



université
des Antilles et de la Guyane

Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
École doctorale pluridisciplinaire

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'Université des Antilles et de la Guyane

Mention : Mathématiques

Présentée et Soutenue par :

Michelle MERCAN

Sur le contrôle de Stackelberg de problèmes d'évolution

Thèse dirigée par :

Ousseynou NAKOULIMA et Gisèle Adélie MOPHOU-LOUDJOM

soutenue le : 5 Décembre 2014 à Pointe-à-Pitre

Jury :

Gaston Mandata NGUEREKATA (Professeur) - Morgan State University
(Baltimore USA), Rapporteur, Président du jury

Marius TUCSNAK (Professeur) - Institut Élie Cartan de Nancy (France),
Rapporteur

Ousseynou NAKOULIMA - Université des Antilles et de la Guyane
(Guadeloupe), Directeur

Gisèle Adélie MOPHOU-LOUDJOM - Université des Antilles et de la Guyane
(Guadeloupe), Co-directrice

Jean-Pierre PUEL (Professeur) - Université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines
(France), Invité

Sur le contrôle de Stackelberg de problèmes d'évolution

Michelle MERCAN

Thèse dirigée par Mr Ousseynou NAKOULIMA et Mme Gisèle MOPHOU-LOUDJOM

Université des Antilles et de la Guyane

Faculté des Sciences Exactes et Naturelles

Département de Mathématiques et Informatique

Laboratoire C.E.R.E.G.M.I.A

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier mes directeurs de thèse, monsieur NAKOULIMA et madame MOPHOU, d'avoir accepté d'encadrer cette thèse mais également pour leur pédagogie, leur disponibilité et leur gentillesse. Un grand merci aussi aux membres du laboratoire C.E.R.E.G.M.I.A. (enseignants-chercheurs, doctorants et autres) pour leurs conseils et leur soutien.

Je remercie également les membres du département de Mathématiques et Informatique du campus de Fouillole que j'ai eu comme enseignants en cours et/ou en travaux dirigés au cours de mes années de Licence et de Master et qui m'ont donné envie de continuer en thèse.

Je remercie aussi le Conseil Régional de la Martinique de m'avoir permis de commencer cette thèse en la finançant pendant deux ans grâce à l'attribution d'une bourse de formation doctorale.

Je remercie mes rapporteurs, le professeur Gaston NGUEREKATA et le professeur Marius TUCSNAK, pour leurs remarques ainsi que monsieur Jean-Pierre PUEL d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Enfin, je souhaite également remercier mes amis et les membres de ma famille qui m'ont toujours soutenu et encouragé tout au long de mon parcours.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à des problèmes d'évolution gouvernés par des équations de type parabolique et soumis à l'action d'un couple de contrôles (h, k) où h et k jouent des rôles différents ; le contrôle k étant de type "contrôlabilité" et h de type "contrôle optimal".

Il est alors naturel de considérer un problème d'optimisation multi-critères. Il existe plusieurs façons d'étudier de tels problèmes. Nous proposons, dans cette thèse, le contrôle de Stackelberg. Il s'agit d'une notion d'optimisation hiérarchique avec, ici, h qui est le "Leader" et k le "Follower".

Plus précisément, nous considérons dans un premier temps le système d'évolution linéaire de type parabolique suivant

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + k\chi_\omega & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ , ω est un ouvert non vide de Ω , h et k sont deux variables de contrôle et χ_ω désigne la fonction caractéristique de l'ouvert ω .

Le problème de Stackelberg considéré consiste en ce qui suit : étant donné h , déterminer dans un premier temps le contrôle k solution d'un problème de contrôlabilité à zéro ; k étant trouvé en fonction de h , déterminer dans un second temps le contrôle h solution d'un problème de contrôle optimal.

Deux problèmes de contrôlabilité à zéro sont considérés ici :

- un avec contrainte sur le contrôle formulé comme suit : Étant donné un sous-espace vectoriel K de $L^2(\omega \times (0, T))$ de dimension finie, trouver k dans l'orthogonal de K (noté $K^\perp$) tel que si y est solution du système (1) alors y vérifie $y(T) = 0$ dans Ω .
- un avec contraintes sur l'état où il s'agit de trouver le contrôle k tel que la solution y du système (1) vérifie non seulement $y(T) = 0$ dans Ω mais aussi la condition $\int_Q y e_i dxdt = 0$ où $\{e_i, 1 \leq i \leq M\}$ est un ensemble de fonctions de $L^2(Q)$ que l'on suppose linéairement indépendantes.

Nous démontrons que ce dernier problème est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle. Ainsi donc, les deux problèmes de contrôlabilité à zéro sont en fait de même nature. Nous les résolvons en utilisant une inégalité d'observabilité adaptée à la contrainte dérivant d'une inégalité de Carleman classique.

Une fois le contrôle k déterminé, nous cherchons le contrôle h de telle sorte que l'évolution de l'état du système dans l'ouvert Q ne s'éloigne pas trop d'un état donné. Il s'agit, ici, d'un problème de contrôle optimal tel que développé par Jacques-Louis Lions.

Dans un second temps, on s'intéresse à un problème d'évolution à deux temps. Par exemple, le problème adjoint d'un problème de dynamique de population suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = h + k\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T \end{array} \right.$$

où $Q = (0, T) \times (0, A) \times \Omega$, $\Gamma = (0, T) \times (0, A) \times \Sigma$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ et $Q_A = (0, A) \times \Omega$. Nous prouvons, comme dans le cas de l'équation (1), que ce problème est contrôlable au sens de Stackelberg.

Mots clés : Contrôle de Stackelberg, contrôlabilité à zéro, inégalités de Carleman, Contrôle optimal.

Abstract

In this thesis, we are interested in evolution problems governed by parabolic equations subjected to the action of a pair of controls (h, k) where h and k play different roles : the control k being of "controllability" type and h of "optimal control" type.

It is then natural to consider a multi-criteria optimization problem. There are several ways to study such problems. We propose in this thesis, the Stackelberg control which is a notion of hierarchical optimization with here, h which is the "Leader" and k the "Follower".

More precisely, we consider at first the following evolution linear parabolic system

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + k\chi_\omega & \text{in } Q = \Omega \times (0, T), \\ y &= 0 & \text{on } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y(0) &= 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$ with boundary Γ , ω is an open set of Ω , h and k are two control variables and χ_ω denotes the characteristic function of the open set ω .

The Stackelberg problem consists in the following : given h , determine firstly the control k solution of a null controllability problem ; k being founded as a function of h , determine secondly the control h solution of an optimal control problem.

Two null controllability problems are considered here :

- one with constraint on the control which is formulated as follows : Given a subspace K of $L^2(\Omega \times (0, T))$ of finite dimension, find k in the orthogonal of K (denoted by $K^\perp$) such that if y is a solution of system (1) then y satisfies $y(T) = 0$ in Ω .
- the other with state constraints which it is to find the control k so that the solution y of system (1) satisfies not only $y(T) = 0$ in Ω but also the condition $\int_Q y e_i \, dx dt = 0$ where $\{e_i, 1 \leq i \leq M\}$ is a set of functions of $L^2(Q)$ which is assumed linearly independent.

We show that this last problem is equivalent to a null controllability problem with constraint on the control. Thus, both controllability problems are of same nature. We solve them using

a suitable observability inequality derived from a classical Carleman inequality and adapted to the constraint.

Once the control k chosen, we look for the control h so that the evolution of the system state, in the open set Q , is not too far from a given state. This is an optimal control problem as developed by Jacques-Louis Lions.

In a second step, we are interesting in an evolution problem with two time variables. For instance, the following adjoint problem of a population dynamics problem :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = & h + k\chi_\omega \quad \text{in } Q, \\ y(t, a, x) & = & 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ y(T, a, x) & = & 0 \quad \text{in } Q_A, \\ y(t, A, x) & = & 0 \quad \text{in } Q_T \end{array} \right.$$

where $Q = (0, T) \times (0, A) \times \Omega$, $\Gamma = (0, T) \times (0, A) \times \Sigma$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ and $Q_A = (0, A) \times \Omega$. We prove, as in the case of equation (1), that this problem is controllable in the sense of Stackelberg.

Keywords : Stackelberg control, Null controllability, Carleman inequalities, Optimal control.

Table des matières

Introduction	1
1 Contrôle optimal d'un système distribué linéaire soumis à la contrôlabilité à zéro.	8
1 Position du problème.	8
2 Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.	10
2.1 Inégalités de Carleman.	10
2.2 Méthode de pénalisation.	19
2.3 Existence, unicité et caractérisation du Follower.	23
3 Résolution du problème de contrôle optimal.	26
3.1 Existence et caractérisation du Leader.	27
2 Contrôle optimal d'un système distribué linéaire soumis à la contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état.	31
1 Équivalence entre le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état et le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.	32
2 Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.	37
2.1 Inégalités de Carleman.	38
2.2 Propriétés de $k_0(h)$	38
2.3 Existence et unicité de la solution du problème de contrôlabilité avec contrainte sur le contrôle.	41
2.4 Caractérisation de la solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.	42
3 Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état. .	48
4 Résolution du problème de contrôle optimal.	48
4.1 Quelques propriétés.	48
4.2 Existence et caractérisation du Leader.	50
3 Contrôle optimal d'un problème à deux temps soumis à la contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état.	54

1	Équivalence entre le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état et un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.	56
1.1	Propriétés de $k_0(h)$.	62
2	Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.	64
2.1	Inégalités de Carleman.	64
2.2	Caractérisation de la solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.	69
3	Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état.	81
4	Résolution du problème de contrôle optimal.	81
4.1	Quelques propriétés.	81
4.2	Existence et caractérisation du Leader.	84
	Conclusions et perspectives	89
	Annexes	89
	A Existence, unicité et propriétés de la solution pour l'équation de la chaleur.	90
1	Existence : Méthode spectrale.	90
1.1	Formulation variationnelle.	90
1.2	Existence et unicité.	92
2	Propriétés de la solution.	94
	B Propriétés des solutions pour le problème à deux temps.	98
1	Estimations de la solution du problème de dynamique de population.	98
2	Estimations de l'état adjoint d'un problème de dynamique de population.	101
	Bibliographie	104

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons au contrôle de Stackelberg de quelques problèmes d'évolution.

Le problème de Stackelberg est un modèle économique de duopole qui permet d'étudier les fondements de la concurrence et d'introduire la théorie des jeux ; le duopole étant une situation d'un marché où deux firmes se partagent la production. Le duopole de Stackelberg, aussi appelé concours de Stackelberg, est un modèle de concurrence imparfaite, basé sur un jeu non coopératif. Il a été conçu en 1934 par Heinrich Von Stackelberg dans son livre "Market Structure and Equilibrium" et représente un point de rupture dans l'étude de la structure du marché, en particulier l'analyse des duopoles, puisqu'il s'agissait d'un modèle basé sur des hypothèses de départ différentes et qui a donné des conclusions différentes de celles des modèles de duopole de Bertrand et de Cournot.

En théorie des jeux, un duopole de Stackelberg est un jeu séquentiel. Il y a deux entreprises qui vendent des produits homogènes et subissent les mêmes fonctions de demande et de coût. Une entreprise, le leader, est mieux connue ou a une plus grande équité de la marque et est donc mieux placée pour décider tout d'abord quelle quantité q_1 vendre. L'autre entreprise, le suiveur, observe et décide alors de sa quantité de production q_2 .

Plus précisément, le modèle de Leadership de Stackelberg est un jeu stratégique faisant intervenir deux entreprises en concurrence : l'une appelée Leader et l'autre Follower (ou entreprise suiveuse ou satellite). La particularité de ce problème est qu'il existe une hiérarchie dans la réalisation des objectifs de chacune des entreprises. De ce point de vue, le Leader impose sa stratégie au Follower et ce dernier doit atteindre son objectif en tenant compte de la stratégie du Leader.

D'un point de vue mathématique, nous nous sommes intéressés à l'étude de problèmes d'évolution de type parabolique soumis à l'action d'un couple de contrôles (h, k) où k qui sera le Follower est un contrôle de type "contrôlabilité" tandis que h - le Leader - est de type "contrôle optimal". Plus précisément, nous considérons, dans un premier temps, le problème linéaire d'évolution parabolique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} y' - \Delta y + a_0 y & = & h + k\chi_\omega \quad \text{dans } Q = \Omega \times (0, T) \\ y & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ y(0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ , ω est un ouvert non vide de Ω , h et k sont deux variables de contrôle et χ_ω désigne la fonction caractéristique de l'ouvert ω . Le problème (2) ainsi posé est le problème de Cauchy-Dirichlet pour l'équation de la chaleur. Nous considérerons aussi dans un second temps le problème d'évolution à deux temps suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = h + k\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T \end{array} \right.$$

où, cette fois, $Q = (0, T) \times (0, A) \times \Omega$, $\Sigma = (0, T) \times (0, A) \times \Gamma$, $Q_A = (0, A) \times \Omega$ et $Q_T = (0, T) \times \Omega$ avec Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ de classe C^2 . Ce problème est l'adjoint d'un problème linéaire de dynamique de population pour lequel le second membre est encore la somme de deux contrôles h et k à déterminer.

Alors, le problème de Stackelberg considéré consiste en ce qui suit : étant donné h , déterminer dans un premier temps le contrôle k solution d'un problème de contrôlabilité à zéro ; k étant trouvé en fonction de h puis déterminer dans un second temps le contrôle h solution d'un problème de contrôle optimal.

Avant de commencer l'étude de ces différents problèmes, rappelons quelques définitions de contrôlabilité.

Le problème de la contrôlabilité consiste en la possibilité de transférer l'état d'un système en un temps fini, d'un état initial vers un état désiré choisi a priori. Contrairement aux systèmes de dimension finie, pour les systèmes distribués on est amené à considérer plusieurs degrés de contrôlabilité, notamment la contrôlabilité exacte, la contrôlabilité approchée ou encore la contrôlabilité à zéro.

Plus précisément, en considérant ω un ouvert non vide de Ω et χ_ω la fonction caractéristique de l'ouvert ω , le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} y' - \Delta y & = v\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(0) & = 0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (3)$$

est dit

- exactement contrôlable si, pour tout $y^1 \in L^2(\Omega)$, il existe $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que la solution y de (3) vérifie $y(T) = y^1$.
- approximativement contrôlable au temps T si l'ensemble $R(T) = \{y(x, T, v) \in L^2(\Omega); v \in L^2(\omega \times (0, T))\}$ (où $y(x, T, v)$ est la solution du système pour un contrôle v donné) est dense dans $L^2(\Omega)$. Autrement dit, le système

(3) est dit contrôlable de façon approchée au temps T si $\overline{R(T)} = L^2(\Omega)$.

- contrôlable à zéro s'il existe $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que la solution y de (3) vérifie $y(T) = 0$ dans Ω .

Beaucoup de progrès ont été faits ces dernières années dans le cadre de la contrôlabilité à zéro des équations paraboliques. En effet, dans [34], D. Russel obtient la contrôlabilité exacte de l'équation de la chaleur comme une conséquence de la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes.

Par ailleurs, lorsque les conditions aux limites sont de type Dirichlet, la contrôlabilité à zéro du système (3) (avec $y(0) = y_0 \in L^2(\Omega)$) a été résolue d'une part par G. Lebeau et L. Robbiano [15] et d'autre part par A. Fursikov et O. Yu Imanuvilov [13] en utilisant des inégalités d'observabilité dérivant des inégalités de Carleman globales. En effet, les inégalités globales de Carleman impliquent l'observabilité d'un problème adjoint associé au problème de contrôle linéaire ce qui entraîne la contrôlabilité à zéro.

On fait également référence aux travaux de D. Tataru [37] qui montre que, pour les équations linéaires, la contrôlabilité locale et la contrôlabilité globale sont équivalentes et sont vérifiées pour tout $T > 0$. Dans [12], E. Fernandez-Cara et al. ont démontré la contrôlabilité globale à zéro de l'équation de la chaleur avec des conditions de Fourier aux bords de la forme $\frac{\partial y}{\partial \nu} + \beta y = 0$. Pour cela, ils utilisent une inégalité de Carleman pour les solutions faibles de l'équation de la chaleur avec conditions de Neumann non homogènes.

Dans le cas non-linéaire, le problème de la contrôlabilité à zéro en dimension finie a été étudié par E. Zuazua dans [40]. L'auteur a démontré que, pour une classe assez générale et naturelle des non-linéarités, le problème peut être résolu si les données initiales sont suffisamment petites. Dans [11], E. Fernandez-Cara et al. ont établi un résultat de contrôlabilité locale à zéro d'une équation parabolique non linéaire avec des non linéarités non locales en utilisant le théorème du point fixe de Kakutani.

Récemment, O. Nakoulima [26] a démontré des résultats de contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur rétrograde avec des contraintes linéaires sur un contrôle distribué. Plus précisément, il existe une fonction θ positive, de classe C^2 et d'inverse borné pour laquelle on considère l'espace H défini par $H = \{h \in L^2(Q) \mid \theta h \in L^2(Q)\}$. Alors le problème de contrôlabilité est énoncé comme suit : Étant donné $h \in H$, $a_0 \in L^\infty(Q)$, K un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega \times (0, T))$ de dimension finie dont l'orthogonal dans $L^2(\omega \times (0, T))$ est noté $K^\perp$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, trouver $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que

$$v \in K^\perp \tag{4}$$

et si y est solution du système

$$\begin{cases} -y' + Ay + a_0 y = h + v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (5)$$

(où A est l'opérateur différentiel défini par $A = - \sum_{i=1,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j})$ avec $a_{i,j}$ vérifiant

$a_{i,j} \in C^2(Q)$, $a_{i,j} = a_{j,i}$ et $\sum_{i=1,j=1}^n a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2$, $\alpha_0 > 0$) alors y vérifie

$$y(0) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (6)$$

La contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle ou sur l'état trouve une justification et une application dans la notion de sentinelles discriminantes ou à sensibilité donnée. La notion de sentinelles introduite par Jacques-Louis Lions[18] repose sur trois considérations : une équation d'état à données incomplètes, un système d'observation et une fonction d'évaluation particulière, appelée sentinelle, qui permet concrètement de distinguer et d'analyser deux types de données incomplètes : les termes dits de pollutions pour lesquels on recherche des informations et les termes manquants que l'on ne cherche pas à identifier. Dans [19], G. Mophou et O. Nakoulima ont prouvé l'existence de sentinelles permettant l'identification de paramètres dans un problème de pollution modélisé par une équation semi linéaire parabolique. Pour cela, ils ont résolu un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle. Dans [20], ces mêmes auteurs ont étudié un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état de l'équation de la chaleur semi-linéaire. Ce dernier peut être énoncé comme suit : Étant donné $\{e_i, 1 \leq i \leq M\} \subset L^2(Q)$ un ensemble de fonctions de $L^2(Q)$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application, trouver $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que si y est solution du système

$$\begin{cases} y' - \Delta y + f(y) = v\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

alors

$$\int_Q y \cdot e_i \, dx dt = 0, \quad 1 \leq i \leq M \quad \text{et} \quad y(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

En émettant des hypothèses sur les fonctions e_i et sur l'application f , les auteurs montrent, dans un premier temps, que le système linéarisé associé à ce problème est équivalent à un problème de contrôlabilité à zéro linéaire avec contrainte sur le contrôle. Ils démontrent ensuite la contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état du problème semi-linéaire en appliquant le théorème de point fixe de Schauder. Enfin, dans [24], G. Mophou a généralisé ce résultat dans le cas où les termes non linéaires contiennent un gradient.

Il est important de préciser que l'étude de la contrôlabilité d'un système nécessite avant tout que la solution de ce système existe. C'est pour cela que nous rappelons le résultat d'existence concernant le problème linéaire (2). Pour $f \in L^2(Q)$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution

$$y \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

La preuve de l'existence et l'unicité est rappelée dans l'annexe A. On peut aussi se référer à [33].

Des résultats de contrôlabilité ont également été démontrés pour des problèmes de dynamique de population du type

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} - \Delta y + \mu y &= v \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0, a, x) &= y_0(a, x) & \text{dans } Q_A, \\ y(t, 0, x) &= \int_0^A \beta(t, a, x) y(t, a, x) da & \text{dans } Q_T \end{array} \right. \quad (7)$$

où $Q = (0, T) \times (0, A) \times \Omega$, $\Gamma = (0, T) \times (0, A) \times \Sigma$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ et $Q_A = (0, A) \times \Omega$. Ce modèle décrit la dynamique d'une population régie par la distribution $y = y(t, a, x)$ d'individus d'âge $a > 0$, à l'instant $t > 0$ et à la position x dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$. A représente la durée de vie maximale de l'espèce, μ et β sont les fonctions de mortalité et de natalité et v représente le contrôle défini sur un ouvert ω de Ω et correspond à un apport extérieur d'individus ou à une élimination. Enfin, la fonction $\int_0^A \beta(t, a, x) y(t, a, x) da$ représente le répartition des naissances à l'instant t et à l'emplacement x .

Les premiers résultats de contrôlabilité de ce type de problème ont été établis par B. Ainseba et M. Langlais dans [3, 4] où ils démontrent qu'une certaine famille d'états est approximativement atteignable à un instant T . Dans [1], B. Ainseba démontre la contrôlabilité exacte et approchée d'un problème linéaire de dynamique de population structurée en âge et en espace. Dans [5], un résultat de contrôlabilité exacte locale est obtenu. En effet, les auteurs y démontrent que si la distribution initiale est assez petite, on peut trouver un contrôle qui conduit à l'extinction de la population. Dans [2], Ainseba et Iannelli établissent la contrôlabilité exacte de deux problèmes de dynamique non linéaires en utilisant le théorème du point fixe de Kakutani. Par ailleurs, dans [29], O. Nakoulima et S. Sawadogo ont appliqué la méthode des sentinelles de Lions à un système à deux temps et à données manquantes. Dans [38], O. Traore a établi la contrôlabilité à zéro d'un problème de dynamique de population non linéaire. En utilisant le théorème de point fixe de Leray-Schauder et une inégalité de Carleman associée au problème adjoint, l'auteur a montré l'existence

d'un contrôle menant la population à extinction sur un petit ouvert proche du domaine d'étude. Dans [39], le même auteur utilise un résultat de contrôlabilité à zéro du problème rétrograde de dynamique de population pour déterminer la densité des individus du modèle linéaire direct. Enfin, plus récemment, G. Mophou et S. Sawadogo [35] se sont intéressés à une méthode de résolution de la contrôlabilité avec un certain nombre de contraintes sur l'état du problème linéaire de dynamique de population dépendant de l'âge et de l'espace et, dans [36], ces mêmes auteurs ont résolu la contrôlabilité à zéro avec un certain nombre de contraintes sur l'état de ce même problème.

Rappelons maintenant la définition du contrôle optimal.

Le contrôle optimal des systèmes distribués est un problème d'optimisation défini par l'ensemble de cinq considérations :

- un système modélisant un phénomène (physique, chimique, biologique... etc) dont l'état associé est gouverné par une équation aux dérivées partielles ou une équation différentielle ordinaire.
- un ensemble de variables "contrôle" qui permet d'agir sur l'état du système.
- un système d'observation qui informe de l'état du système.
- une fonction coût ou "fonction objectif", fonction de l'état du système via l'observation et la variable de contrôle.
- un problème d'extrémum pour la fonction coût.

Plus précisément, on considère $\mathcal{U}_{ad}$ un sous ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$ et la fonctionnelle J définie par

$$J(h) = \frac{1}{2} \|y - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|h\|_{L^2(Q)}^2$$

où $N > 0$ et $z_d \in L^2(Q)$. Alors, le problème de contrôle optimal consiste à trouver $\hat{h} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(\hat{h}) = \inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h)$.

Ce type de problème a été largement étudié par J.L. Lions [17].

Dans cette thèse, nous montrerons la contrôlabilité au sens de Stackelberg de deux problèmes d'évolution. Dans le premier chapitre, nous nous intéresserons au problème de la chaleur suivant :

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + k\chi_\omega & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T) \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T) \\ y(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

pour lequel nous chercherons à déterminer le contrôle k solution d'un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle puis le contrôle h solution d'un problème de contrôle optimal. Dans le deuxième chapitre, nous étudierons encore le problème de la chaleur pour lequel nous déterminerons, cette fois, le contrôle k solution d'un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état puis le contrôle h solution d'un problème de contrôle optimal. Enfin, dans le dernier chapitre, nous considérerons le problème adjoint d'un problème de dynamique de population suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) & & & \\ +\mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = & h + k\chi_\omega & \text{dans } Q = (0, T) \times (0, A) \times \Omega, \\ y(t, a, x) & = & 0 & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times (0, A) \times \Gamma, \\ y(T, a, x) & = & 0 & \text{dans } Q_A = (0, A) \times \Omega, \\ y(t, A, x) & = & 0 & \text{dans } Q_T = (0, T) \times \Omega \end{array} \right.$$

Une fois de plus, nous déterminerons les contrôles k et h solutions respectives d'un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état et d'un problème de contrôle optimal.

Ainsi, dans chacun des chapitres, le contrôle h devra maintenir l'état du système proche d'un état donné tandis que k aura pour objectif de ramener l'état du système à zéro à un instant T choisi au préalable en tenant compte de la stratégie de h . De ce point de vue, h est donc le Leader et k le Follower.

Chapitre 1

Contrôle optimal d'un système distribué linéaire soumis à la contrôlabilité à zéro.

1 Position du problème.

Dans ce premier chapitre, on considère l'équation d'évolution parabolique suivante :

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + k\chi_\omega & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ de classe C^2 , ω est un ouvert non vide de Ω , $a_0 \in L^\infty(Q)$ et $(h, k) \in L^2(Q) \times L^2(\omega \times (0, T))$. Dans la suite, on notera $G = \omega \times (0, T)$. Puisque $h + k\chi_\omega \in L^2(Q)$ et $a_0 \in L^\infty(Q)$, le problème (1.1) admet une unique solution y dans l'espace de Hilbert

$$\Xi^{1,2}(Q) = H^1((0, T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)).$$

Nous utiliserons la notation

$$y = y(h, k)$$

pour signifier que chaque terme source h et k joue un rôle particulier.

Maintenant soit θ une fonction positive de classe C^2 sur Q et d'inverse $\frac{1}{\theta}$ bornée sur Q . Soient H un sous-espace de $L^2(Q)$ défini par $H = \{h \in L^2(Q) \mid \theta h \in L^2(Q)\}$ et K un sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ de dimension finie.

Dans ce chapitre, nous voulons déterminer le couple contrôle (h, k) afin d'atteindre un double objectif. Le premier est de trouver, pour tout h fixé dans H , k appartenant à

l'orthogonal de K qui puisse ramener le système (1.1) au repos à l'instant T . Une fois k trouvé, notre second objectif est alors de chercher $h \in H$ de telle sorte que l'état du système ne s'éloigne pas trop d'un état donné. Plus précisément, on s'intéresse aux deux problèmes suivants :

Problème 1.1. (*Problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle*)

Soit $H \subset L^2(Q)$ un espace de Hilbert et K un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$. Soit $h \in H$. Étant donné $a_0 \in L^\infty(Q)$, trouver $k = k(h) \in L^2(G)$ tel que

$$k \in K^\perp \quad (1.2)$$

et si $y = y(h, k)$ est solution du système

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + k\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

alors

$$y(T) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.4)$$

avec

$$k = \min_{\tilde{k} \in \mathcal{E}} \|\tilde{k}\| \quad (1.5)$$

où $\mathcal{E} = \{k \in L^2(G) \mid (k, y) \text{ est solution de (1.2) - (1.4)}\}$.

Problème 1.2. (*Problème de contrôle optimal*)

Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de H . Trouver $\hat{h} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$J(\hat{h}) = \inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h). \quad (1.6)$$

où $J(h) = \frac{1}{2} \|y(h, k(h)) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|h\|_H^2$ avec $z_d \in L^2(Q)$

Notons que si, pour tout $h \in H$, le problème 1.1 admet une solution k , alors k est unique et dépend de h . Ainsi, le couple $(k(h), y(h, k(h)))$ est une réalisation du problème (1.2)-(1.5). En fait, nous montrerons dans la section 3 que l'application $\mathcal{F}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : H &\rightarrow L^2(G) \\ h &\mapsto \mathcal{F}(h) = k(h). \end{aligned} \quad (1.7)$$

est linéaire et continue de H dans $L^2(G)$. Ainsi, si $\hat{h}$ solution de (1.6) existe, le couple $(\mathcal{F}(\hat{h}), y(\hat{h}, \mathcal{F}(\hat{h})))$ est la réalisation optimale du problème (1.2)-(1.6). De ce point de vue, nous dirons que $\hat{h}$ est le Leader, $\hat{k} = \mathcal{F}(\hat{h})$ est le Follower et $\hat{y} = y(\hat{h}, \hat{k})$ est l'état optimal du système.

Les problèmes 1.1 et 1.2 constituent un problème de contrôle hiérarchique. Ce problème a déjà été étudié par O. Nakoulima [27]. Mais dans son travail, O. Nakoulima ne choisit pas le contrôle k de norme minimale comme le demande le concept du contrôle de Stackelberg.

Dans ce chapitre, nous prouvons, sous l'hypothèse

$$\forall k \in K, \left(-\frac{\partial k}{\partial t} - \Delta k + a_0 k = 0 \text{ sur } G\right) \Rightarrow k = 0 \text{ sur } G, \quad (1.8)$$

qu'il existe un contrôle $\hat{k}$ de norme minimale parmi les contrôles $k \in L^2(G)$ tels que (k, y) soit solution de (1.2)-(1.4). Ce qui nous permet de trouver $\hat{h}$ solution de (1.6).

Remarque 1.1. (cf.[28]) *L'hypothèse (1.8) n'est pas vide. En effet, elle a déjà été introduite par Jacques-Louis Lions dans [18]. A titre d'exemple, supposons que K est le sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ engendré par M fonctions indépendantes m_i . On considère le cas où chaque m_i a son support dans un domaine $\omega_i \times (0, T)$ avec $\omega_i \subset \omega$ et $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. En supposant que $-\frac{\partial m_i}{\partial t} - \Delta m_i + a_0 m_i \neq 0$, si $k \in K$ et $-\frac{\partial k}{\partial t} - \Delta k + a_0 k = 0$ dans $\omega \times (0, T)$, on a $k = 0$ dans $\omega \times (0, T)$ et l'hypothèse (1.8) est satisfaite.*

2 Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution du problème 1.1. Pour cela, nous utiliserons une inégalité de Carleman adaptée à la contrainte (1.2) qui est une conséquence de l'inégalité de Carleman classique.

2.1 Inégalités de Carleman.

2.1.1 Inégalité de Carleman classique

On considère une fonction auxiliaire $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ qui satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(x) &> 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \psi(x) &= 0 \quad \forall x \in \Gamma \\ |\nabla \psi(x)| &\neq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega - \omega} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Une telle fonction existe selon A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov [13]. On définit alors pour tout $\lambda > 0$, les fonctions φ et η par

$$\varphi(x, t) = \frac{e^{\lambda(\psi(x) + m_1)}}{t(T - t)} \quad (1.10)$$

$$\eta(x, t) = \frac{e^{\lambda(|\psi(x)|_\infty + m_2)} + e^{\lambda(\psi(x) + m_1)}}{t(T - t)} \quad (1.11)$$

pour $(x, t) \in Q$ et $m > 1$ et on adopte les notations suivantes :

$$\begin{cases} L &= \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + a_0 I \\ L^* &= -\frac{\partial}{\partial t} - \Delta + a_0 I \\ \mathcal{V} &= \{\rho \in C^\infty(\overline{Q}) \mid \rho = 0 \text{ sur } \Sigma\} \end{cases}$$

Nous avons alors l'inégalité de Carleman suivante (cf.[13, 20]).

Proposition 1.1. (*Inégalité de Carleman classique*)

Soit ψ , φ et η définies respectivement par (1.9), (1.10) et (1.11). Alors, il existe $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega, \omega, a_0)$, $s_0 = s_0(\Omega, \omega, a_0, T)$ et $C = C(\Omega, \omega, a_0, T)$ tels que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, pour tout $s \geq s_0$ et pour tout $\rho \in \mathcal{V}$, on ait :

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{e^{-2s\eta}}{s\varphi} \left(\left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|^2 + |\Delta \rho|^2 \right) dxdt + s\lambda^2 \int_Q \varphi e^{-2s\eta} |\nabla \rho|^2 dxdt + \\ & s^3 \lambda^4 \int_Q \varphi^3 e^{-2s\eta} |\rho|^2 dxdt \leq C \left(\int_Q e^{-2s\eta} |L^* \rho|^2 dxdt + s^3 \lambda^4 \int_G \varphi^3 e^{-2s\eta} |\rho|^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Puisque φ ne s'annule pas sur Q , on pose

$$\theta = \varphi^{-\frac{3}{2}} e^{s\eta}. \quad (1.13)$$

Alors, d'après les définitions de φ et η données respectivement par (1.10) et (1.11), la fonction θ est positive et $\frac{1}{\theta}$ est bornée. Donc, en remarquant que $\varphi^3 e^{-2s\eta} = \frac{1}{\theta^2}$ dans (1.12), on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dxdt \leq C \left(\int_Q \frac{1}{\theta^2 \varphi^3 s^3 \lambda^4} |L^* \rho|^2 dxdt + \int_G \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dxdt \right).$$

D'où, puisque les fonctions $\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\varphi}$ sont bornées, pour tout $s \geq s_0 > 1$ et $\lambda \geq \lambda_0 > 1$, on obtient l'inégalité d'observabilité suivante, pour tout $\rho \in \mathcal{V}$,

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dxdt \leq C \left(\int_Q |L^* \rho|^2 dxdt + \int_G |\rho|^2 dxdt \right). \quad (1.14)$$

2.1.2 Inégalité de Carleman adaptée

Pour le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte, nous avons besoin d'une autre inégalité d'observabilité. En effet, pour traiter la contrainte (1.2), nous allons établir une inégalité d'observabilité qui lui est adaptée.

Notons

- P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ sur K

- $P\rho$ la projection orthogonale de $\rho\chi_\omega$ sur K pour $\rho \in L^2(Q)$.

On a alors l'inégalité de Carleman adaptée suivante (cf.[19, 20, 26]).

Lemme 1.1. (*Inégalité de Carleman adaptée*)

On suppose l'hypothèse (1.8) vérifiée. Soit θ définie par (1.13). Alors, il existe $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega, \omega, a_0) > 1$, $s_0 = s_0(\Omega, \omega, a_0, T) > 1$ et $C = C(\Omega, \omega, a_0, T) > 0$ tels que pour tous $\lambda > \lambda_0$ et $s > s_0$ et pour tout $\rho \in \mathcal{V}$:

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dxdt \leq C \left(\int_Q |L^* \rho|^2 dxdt + \int_G |\rho - P\rho|^2 dxdt \right). \quad (1.15)$$

Démonstration. On procède par contraposition. Supposons que l'inégalité (1.15) n'est pas vérifiée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\rho_n \in \mathcal{V}$, tels que

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho_n|^2 dxdt = 1, \quad (1.16)$$

$$\int_Q |L_n^* \rho_n|^2 dxdt \leq \frac{1}{n}, \quad (1.17)$$

$$\int_G |\rho_n - P\rho_n|^2 dxdt \leq \frac{1}{n} \quad (1.18)$$

Maintenant, le reste de la preuve consiste à montrer que les hypothèses (1.16), (1.17) et (1.18) mènent à une contradiction. On procède en quatre étapes.

Étape 1. On a

$$\int_G \frac{1}{\theta^2} |P\rho_n|^2 dxdt \leq 2 \int_G \frac{1}{\theta^2} |\rho_n|^2 dxdt + 2 \int_G \frac{1}{\theta^2} |\rho_n - P\rho_n|^2 dxdt.$$

Puisque $\frac{1}{\theta^2}$ est borné, on déduit des hypothèses (1.16), (1.17) et (1.18) que

$$\int_G \frac{1}{\theta^2} |P\rho_n|^2 dxdt \leq C$$

où C ne dépend pas de n . Comme $P\rho_n$ appartient à K qui est de dimension finie, alors on a

$$\|P\rho_n\|_{L^2(G)} \leq C. \quad (1.19)$$

et, en utilisant encore l'hypothèse (1.18), on déduit que

$$\|\rho_n\|_{L^2(G)} \leq C. \quad (1.20)$$

Étape 2. On peut extraire une sous-suite, encore notée $(\rho_n)_n$ telle que

$$\rho_n \chi_\omega \rightharpoonup \rho \chi_\omega \text{ faiblement dans } L^2(G). \quad (1.21)$$

Par ailleurs, comme l'hypothèse (1.18) est vérifiée, on a

$$\rho_n \chi_\omega - P\rho_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (1.22)$$

Ensuite, puisque K est de dimension finie, on déduit de la compacité de l'opérateur P que

$$P\rho_n \rightarrow P\rho \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (1.23)$$

On déduit alors des relations (1.22) et (1.23) que

$$\rho_n \chi_\omega \rightarrow P\rho \text{ fortement dans } L^2(G).$$

ce qui, en utilisant (1.21) donne $P\rho = \rho \chi_\omega$. Autrement dit $\rho \chi_\omega \in K$. On a alors

$$\rho_n \chi_\omega \rightarrow \rho \chi_\omega \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (1.24)$$

Étape 3. En fait, on a $\rho \chi_\omega = 0$. En effet, d'après l'hypothèse (1.17), on a

$$L^* \rho_n \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(Q). \quad (1.25)$$

De la relation (1.21), on a que

$$L^* \rho_n \rightharpoonup L^* \rho \text{ faiblement dans } \mathcal{D}'(G).$$

On déduit de l'unicité de la limite que

$$L^* \rho_n \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } \mathcal{D}'(G).$$

Par conséquent, on a $L^* \rho = 0$ dans G . Et, comme $\rho \in K$, la condition (1.8) nous permet de dire que $\rho = 0$ dans G . Dès lors, la relation (1.24) s'écrit

$$\rho_n \chi_\omega \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (1.26)$$

Étape 4. Comme $\rho_n \in \mathcal{V}$, alors, d'après l'inégalité (1.14), on a

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho_n|^2 dxdt \leq C \left(\int_Q |L^* \rho_n|^2 dxdt + \int_G |\rho_n|^2 dxdt \right).$$

Des relations (1.25) et (1.26), on en déduit que

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho_n|^2 dxdt \rightarrow 0 \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

La contradiction vient de la relation (1.16). La preuve de l'inégalité de Carleman adaptée (1.15) est alors complète. $\square$

Le Lemme 1.1 nous permet de définir un cadre fonctionnel par la donnée de trois espaces de Hilbert V , $L^2_\theta(Q)$ et H . Pour cela, on considère le produit scalaire $a(.,.)$ défini par

$$a(\rho, \hat{\rho}) = \int_Q L^* \rho L^* \hat{\rho} dxdt + \int_G (\rho - P\rho)(\hat{\rho} - P\hat{\rho}) dxdt. \quad (1.27)$$

- D'une part, notons V le complété de $\mathcal{V}$ pour la norme :

$$\rho \mapsto \|\rho\|_V = \sqrt{a(\rho, \rho)}. \quad (1.28)$$

Alors $V = \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_V}$ est un espace de Hilbert.

- D'autre part, on munit $\mathcal{V}$ de la norme

$$\|\rho\|_\theta = \left(\int_Q \frac{1}{\theta} |\rho|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.29)$$

et on note $L^2_\theta(Q)$ le complété hilbertien de $\mathcal{V}$. Autrement dit, on a

$$L^2_\theta(Q) = \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_\theta}. \quad (1.30)$$

Le Lemme 1.1 nous assure que

$$\|\rho\|_\theta \leq C \|\rho\|_V, \quad \forall \rho \in \mathcal{V}. \quad (1.31)$$

En effet, le Lemme 1.1 nous donne l'inégalité suivante :

$$\int_Q \frac{1}{\theta} |\rho|^2 dxdt \leq C \left(\int_Q |L^* \rho|^2 dxdt + \int_G |\rho - P\rho|^2 dxdt \right).$$

Dès lors, en utilisant les définitions des normes de $\|\rho\|_\theta$ et $\|\rho\|_V$ données respectivement par (1.29) et (1.28), on obtient le résultat. Cette dernière inégalité reste vraie pour tout $\rho \in V$. Autrement dit, on a l'injection continue $V \hookrightarrow L^2_\theta(Q)$.

- Enfin, on considère l'espace

$$H = \{h \in L^2(Q) \mid \theta h \in L^2(Q)\} \quad (1.32)$$

muni de la norme

$$\|h\|_H = \left(\int_Q |\theta h|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.33)$$

Alors, H est un espace de Hilbert. En effet, soit $(h_n)_n$ une suite de Cauchy dans H . Alors, par définition, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Rightarrow \|h_p - h_q\|_H \leq \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \Rightarrow \|h_p - h_q\|_H \leq \varepsilon$$

Donc la relation précédente nous permet de dire que $(\theta h_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^2(Q)$. Et, comme $L^2(Q)$ est complet, il existe $v \in L^2(Q)$ telle que

$$\theta h_n \rightarrow v \text{ dans } L^2(Q).$$

On peut donc extraire une sous-suite, encore notée $(\theta h_n)_n$ telle que

$$\theta h_n \rightarrow v \text{ presque partout dans } Q.$$

De plus, comme $\theta \neq 0$, on a

$$h_n \rightarrow \frac{1}{\theta}v \text{ presque partout dans } Q.$$

En posant $h = \frac{1}{\theta}v$, on a $\theta h = v \in L^2(Q)$ et, comme $v \in L^2(Q)$ et $\frac{1}{\theta} \in L^\infty(Q)$, on a $h \in L^2(Q)$. Donc $h \in L^2(Q)$ et $\theta h \in L^2(Q)$. Par conséquent, $h \in H$ et h_n converge vers h dans H . D'où H est un espace de Hilbert.

Dans la suite, nous utiliserons l'espace de Hilbert H défini par la relation (1.32).

Il est clair que, pour tout $h \in H$, la forme linéaire $\varphi \mapsto \int_Q h \varphi dxdt$ est continue sur V .

Alors, d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $\rho_\theta = \rho_\theta(h) \in V$ solution de l'équation variationnelle suivante :

$$a(\rho_\theta, \varphi) = \int_Q h \varphi dxdt, \quad \forall \varphi \in V \quad (1.34)$$

ou encore

$$\int_Q L^* \rho_\theta L^* \varphi dxdt + \int_G (\rho_\theta - P \rho_\theta)(\varphi - P \varphi) dxdt = \int_Q h \varphi dxdt, \quad \forall \varphi \in V. \quad (1.35)$$

Proposition 1.2. *On suppose l'hypothèse (1.8) vérifiée. Soient $h \in H$ et ρ_θ l'unique solution de (1.34). On pose*

$$k_\theta = -(\rho_\theta - P \rho_\theta) \chi_\omega \quad (1.36)$$

et

$$y_\theta = L^* \rho_\theta. \quad (1.37)$$

Alors, le couple (k_θ, y_θ) vérifie le problème de contrôlabilité (1.2)-(1.4). De plus, il existe $C = C(\Omega, \omega, a_0, T) > 0$ tel que

$$\|\rho_\theta\|_V \leq C \|h\|_H, \quad (1.38)$$

$$\|k_\theta\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H, \quad (1.39)$$

$$\|y_\theta\|_{\Xi^{1,2}(Q)} \leq C \|h\|_H. \quad (1.40)$$

Démonstration. On procède en deux étapes.

Étape 1. On montre que (k_θ, y_θ) est solution de (1.2)-(1.4).

Puisque $\rho_\theta \in V$, alors $k_\theta = -(\rho_\theta \chi_\omega - P\rho_\theta) \in L^2(G)$ et $y_\theta \in L^2(Q)$. Et, comme $P\rho_\theta \in K$, on a $k_\theta \in K^\perp$. En remplaçant $-(\rho_\theta \chi_\omega - P\rho_\theta)$ par k_θ et $L^*\rho_\theta$ par y_θ dans (1.35), on a

$$\int_Q y_\theta L^* \rho \, dxdt + \int_G (\rho_\theta - P\rho_\theta)(\rho - P\rho) \, dxdt = \int_Q h\rho \, dxdt, \quad \forall \rho \in V.$$

Puisque $P\rho \in K$, l'égalité précédente devient

$$\int_Q y_\theta L^* \rho \, dxdt + \int_G (\rho_\theta - P\rho_\theta)\rho \, dxdt = \int_Q h\rho \, dxdt, \quad \forall \rho \in V.$$

Autrement dit, on a

$$\int_Q y_\theta L^* \rho \, dxdt = \int_Q h\rho \, dxdt + \int_G k_\theta \rho \, dxdt, \quad \forall \rho \in V. \quad (1.41)$$

En particulier, pour $\rho \in \mathcal{D}(Q)$, on a

$$\int_Q y_\theta L^* \rho \, dxdt = \int_Q h\rho \, dxdt + \int_G k_\theta \rho \, dxdt.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_Q Ly_\theta \rho \, dxdt = \int_Q h\rho \, dxdt + \int_G k_\theta \rho \, dxdt, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}(Q)$$

ou encore

$$\int_Q (Ly_\theta - h - k_\theta \chi_\omega) \rho \, dxdt = 0, \quad \forall \rho \in \mathcal{D}(Q).$$

Donc

$$y'_\theta - \Delta y_\theta + a_0 y_\theta = h + k_\theta \chi_\omega \text{ dans } Q. \quad (1.42)$$

Nous allons maintenant montrer l'existence des traces de y_θ .

On a, d'une part, $y_\theta \in L^2(Q)$. Donc $y'_\theta \in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$. De plus, comme $h + k_\theta \chi_\omega \in L^2(Q)$, alors $\Delta y_\theta \in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$. Donc, d'après Lions (cf. [17], chapitre 2, page 79),

les traces $y_{\theta|_\Sigma}$ et $\frac{\partial y_\theta}{\partial \nu}|_\Sigma$ existent et appartiennent respectivement à $H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ et

$H^{-1}(0, T; H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$.

D'autre part, comme $y_\theta \in L^2(Q)$, alors $\Delta y_\theta \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$. Donc $y_\theta \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ (d'après Lions (cf. [17], chapitre 3, page 216)). Par conséquent, $y_\theta(0)$ et $y_\theta(T)$ existent et appartiennent à $H^{-1}(\Omega)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{V}$. Multiplions l'égalité (1.42) par φ et intégrons par parties sur Q . On obtient alors

$$\begin{aligned} & \langle y_\theta(T), \varphi(T) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle y_\theta(0), \varphi(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_Q y_\theta \varphi' dx dt \\ & - \int_0^T \left\langle \frac{\partial y_\theta}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma), H^{3/2}(\Gamma)} dt + \int_0^T \left\langle y_\theta, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} dt \\ & - \int_Q y_\theta \Delta \varphi dx dt + \int_Q a_0 y_\theta \varphi dx dt = \int_Q h \varphi dx dt + \int_G k_\theta \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \langle y_\theta(T), \varphi(T) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle y_\theta(0), \varphi(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ & + \int_0^T \left\langle y_\theta, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} dt + \int_Q y_\theta L^* \varphi dx dt \\ & = \int_Q h \varphi dx dt + \int_G k_\theta \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Comme $\int_Q y_\theta L^* \varphi dx dt = \int_Q (h + k_\theta \chi_\omega) \varphi dx dt$, d'après la relation (1.41), on a

$$\begin{aligned} & \langle y_\theta(T), \varphi(T) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \langle y_\theta(0), \varphi(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ & + \int_0^T \left\langle y_\theta, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} dt = 0 \end{aligned} \tag{1.43}$$

On choisit, dans (1.43) $\varphi \in \mathcal{V}$ telle que $\varphi(T) = \varphi(0) = 0$ dans Ω et on a

$$\int_0^T \left\langle y_\theta, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} dt = 0.$$

Donc $y_\theta = 0$ sur Σ . Ensuite, on choisit $\varphi \in \mathcal{V}$ telle que $\varphi(T) = 0$ dans Ω et on a

$$\langle y_\theta(0), \varphi(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0$$

ce qui implique que $y_\theta(0) = 0$ dans Ω . Finalement, on déduit de (1.43) que $y_\theta(T) = 0$ dans Ω .

Nous avons ainsi montré que y_θ est solution du système

$$\begin{cases} y'_\theta - \Delta y_\theta + a_0 y_\theta &= h + k_\theta \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_\theta &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_\theta(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

et que

$$y_\theta(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Par conséquent, le couple (k_θ, y_θ) est bien solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (1.2)-(1.4).

Étape 2. On démontre les estimations (1.38)-(1.40).

En remplaçant φ par ρ_θ dans l'équation variationnelle (1.34) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} a(\rho_\theta, \rho_\theta) &= \int_Q h \rho_\theta \, dx dt \\ &= \int_Q \theta h \frac{1}{\theta} \rho_\theta \, dx dt \\ &\leq \| \theta h \|_{L^2(Q)} \left\| \frac{1}{\theta} \rho_\theta \right\|_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

ce qui, d'après les définitions de la norme dans H et de celle dans $\mathcal{V}$ données respectivement par les relations (1.33) et (1.29), donne

$$a(\rho_\theta, \rho_\theta) \leq \|h\|_H \|\rho_\theta\|_\theta.$$

Dès lors, la relation (1.31) et la définition de la norme dans V donnée par la relation (1.28) nous permettent d'écrire

$$\|\rho_\theta\|_V^2 \leq C \|h\|_H \|\rho_\theta\|_V.$$

D'où

$$\|\rho_\theta\|_V \leq C \|h\|_H.$$

On a donc l'estimation (1.38). Par ailleurs, d'après les définitions de $a(.,.)$, k_θ et y_θ données respectivement par les relations (1.27), (1.36) et (1.37), on a

$$\begin{aligned} a(\rho_\theta, \rho_\theta) &= \|L^* \rho_\theta\|_{L^2(Q)}^2 + \|\rho_\theta - P\rho_\theta\|_{L^2(G)}^2 \\ &= \|y_\theta\|_{L^2(Q)}^2 + \|k_\theta\|_{L^2(G)}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\|k_\theta\|_{L^2(G)}^2 \leq a(\rho_\theta, \rho_\theta).$$

ce qui, d'après (1.38) donne

$$\begin{aligned} \|k_\theta\|_{L^2(G)} &\leq \|\rho_\theta\|_V, \\ &\leq C \|h\|_H. \end{aligned}$$

On a donc bien l'estimation (1.39). Enfin, l'estimation (1.40) est une conséquence de l'estimation (1.39) et des propriétés classiques de l'équation de la chaleur (cf. [16], tome 2). $\square$

Proposition 1.3. *Sous les hypothèses de la Proposition 1.2, il existe un unique contrôle $k = k(h)$ tel que*

$$k = \min_{\tilde{k} \in \mathcal{E}} \|\tilde{k}\| \quad (1.44)$$

où $\mathcal{E} = \{\tilde{k} \in L^2(G) \mid (\tilde{k}, \tilde{y}) \text{ est solution de (1.2) - (1.4)}\}$.

Démonstration. D'après la Proposition 1.2, le couple (k_θ, y_θ) vérifie le problème de contrôlabilité (1.2)-(1.4). Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{E}$ est non vide. Puisque, $\mathcal{E}$ est aussi un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(G)$, on en déduit qu'il existe un unique contrôle $k = k(h)$ de norme minimale dans $L^2(G)$ tel que $(k(h), y(h, k(h)))$ satisfasse le problème (1.2)-(1.4). $\square$

2.2 Méthode de pénalisation.

Dans cette partie, nous allons caractériser la solution optimale. Pour cela, nous utiliserons une méthode de pénalisation introduite par J.L. Lions. Soit alors l'ensemble

$$\begin{cases} u \in K^\perp, z \in L^2(Q), \\ z' - \Delta z \in L^2(Q), z = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ z(0) = 0, z(T) = 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Pour tout $h \in L^2(Q)$, on définit la fonctionnelle I_ε par

$$I_\varepsilon(u, z) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Lz - h - u\chi_\omega\|_{L^2(Q)}^2, \quad \forall (u, z) \text{ vérifiant (1.45)} \quad (1.46)$$

et on considère le problème suivant :

$$\inf \{I_\varepsilon(u, z), (u, z) \text{ vérifiant (1.45)}\}. \quad (1.47)$$

Puisque I_ε est coercive, continue et strictement convexe, alors le problème (1.47) admet une unique solution $(k_\varepsilon = k_\varepsilon(h), y_\varepsilon = y_\varepsilon(h))$. Autrement dit, on a

$$I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq I_\varepsilon(u, z).$$

Nous donnons maintenant le système d'optimalité vérifié par $(k_\varepsilon, y_\varepsilon)$.

Proposition 1.4. *Soit $(k_\varepsilon, y_\varepsilon)$ la solution optimale du problème (1.47). Alors, il existe $\rho_\varepsilon \in V$ tel que le triplet $(k_\varepsilon, y_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ soit solution du système d'optimalité suivant :*

$$k_\varepsilon = -(\rho_\varepsilon \chi_\omega - P\rho_\varepsilon) \in K^\perp, \quad (1.48)$$

$$\begin{cases} y'_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon + a_0 y_\varepsilon &= h + k_\varepsilon \chi_\omega - \varepsilon \rho_\varepsilon & \text{dans } Q, \\ y_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_\varepsilon(0) &= 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.49)$$

$$y_\varepsilon(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (1.50)$$

$$\begin{cases} -\rho'_\varepsilon - \Delta\rho_\varepsilon + a_0\rho_\varepsilon &= 0 & \text{dans } Q, \\ \rho_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (1.51)$$

Démonstration. Établissons les conditions d'Euler-Lagrange qui caractérisent $(k_\varepsilon, y_\varepsilon)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon + \lambda\varphi)|_{\lambda=0} &= 0, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{Q}) \text{ tel que } \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma, \quad \varphi(0) = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{et } \varphi(T) &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{d}{d\lambda} I_\varepsilon(k_\varepsilon + \lambda k, y_\varepsilon)|_{\lambda=0} &= 0, \quad \forall k \in K^\perp. \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\frac{d}{d\lambda} I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon + \lambda\varphi)|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon + \lambda\varphi) - I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\lambda}$$

et

$$\frac{d}{d\lambda} I_\varepsilon(k_\varepsilon + \lambda k, y_\varepsilon)|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I_\varepsilon(k_\varepsilon + \lambda k, y_\varepsilon) - I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\lambda}$$

.

On calcule, d'une part $I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon + \lambda\varphi)$. On a alors

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon + \lambda\varphi) &= \frac{1}{2} \|k_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Ly_\varepsilon + \lambda\varphi - h - k_\varepsilon\chi_\omega\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|k_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega\|_{L^2(Q)}^2 + \\ &\quad \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \|L\varphi\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega, L\varphi)_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on calcule $I_\varepsilon(k_\varepsilon + \lambda k, y_\varepsilon)$ et on obtient

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(k_\varepsilon + \lambda k, y_\varepsilon) &= \frac{1}{2} \|k_\varepsilon + \lambda k\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Ly_\varepsilon - h - (k_\varepsilon + \lambda k)\chi_\omega\|_{L^2(Q)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|k_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|k\|_{L^2(G)}^2 + \lambda(k_\varepsilon, k)_{L^2(G)} + \\ &\quad \frac{1}{2\varepsilon} \|Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \|k\|_{L^2(G)}^2 - \frac{\lambda}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega, k)_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

On a donc

$$I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon + \lambda\varphi) - I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon) = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \|L\varphi\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega, L\varphi)_{L^2(Q)}$$

et

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(k_\varepsilon + \lambda k, y_\varepsilon) - I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon) &= \frac{\lambda^2}{2} \|k\|_{L^2(G)}^2 + \lambda(k_\varepsilon, k)_{L^2(G)} + \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \|k\|_{L^2(G)}^2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega, k)_{L^2(G)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en divisant les deux égalités précédentes par $\lambda \neq 0$ et en passant à la limite quand λ tend vers 0, les conditions d'Euler-Lagrange nous donnent, d'une part,

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{1}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega) L\varphi \, dxdt &= 0, \\ \forall \varphi \in C^\infty(\overline{Q}) \text{ tel que } \varphi &= 0 \text{ sur } \Sigma, \varphi(0) = \varphi(T) = 0 \text{ dans } \Omega \end{aligned} \quad (1.52)$$

et, d'autre part,

$$\int_G k_\varepsilon k \, dxdt - \int_Q \frac{1}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega) k \, dxdt = 0, \forall k \in K^\perp. \quad (1.53)$$

On définit alors l'état adjoint par

$$\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon(h) = -\frac{1}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega). \quad (1.54)$$

On a $\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$ et on déduit alors que $Ly_\varepsilon = h + k_\varepsilon\chi_\omega - \varepsilon\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$. En outre, puisque $(k_\varepsilon, y_\varepsilon)$ vérifie les conditions (1.45), on a $y_\varepsilon = 0$ sur Σ , $y_\varepsilon(0) = 0$ dans Ω et $y_\varepsilon(T) = 0$ dans Ω . Donc y_ε est solution du système (1.49) et vérifie la contrôlabilité à zéro (1.50). Par ailleurs, comme $h + k_\varepsilon - \varepsilon\rho_\varepsilon \in L^2(Q)$, alors $y_\varepsilon \in \Xi^{1,2}(Q)$. Maintenant, en remplaçant $-\frac{1}{\varepsilon} (Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon\chi_\omega)$ par ρ_ε , dans (1.52) et (1.53), on obtient respectivement

$$\int_Q \rho_\varepsilon L\varphi \, dxdt = 0, \forall \varphi \in C^\infty(\overline{Q}) \text{ tel que } \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma, \varphi(0) = \varphi(T) = 0 \text{ dans } \Omega \quad (1.55)$$

et

$$\int_G k_\varepsilon k \, dxdt + \int_Q \rho_\varepsilon k \, dxdt = 0, \forall k \in K^\perp. \quad (1.56)$$

En particulier pour $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$, l'égalité (1.55) devient

$$\int_Q \rho_\varepsilon L\varphi \, dxdt = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q).$$

En utilisant la formule de Green, on obtient $\int_Q L^* \rho_\varepsilon \varphi \, dxdt = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$. On a donc

$$L^* \rho_\varepsilon = -\rho'_\varepsilon - \Delta \rho_\varepsilon + a_0 \rho_\varepsilon = 0 \text{ dans } Q. \quad (1.57)$$

On démontre, comme pour y_θ à la page 16, que les traces $\left(\rho_{\varepsilon|_\Sigma}, \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu} \Big|_\Sigma \right)$ et $(\rho_\varepsilon(0), \rho_\varepsilon(T))$ sont définies et ont un sens respectivement dans $H^{-1}(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \times H^{-1}(0, T; H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$ et $(H^{-1}(\Omega))^2$.

Multiplions l'égalité (1.57) par $\varphi \in \mathcal{V}$ tel que $\varphi(T) = \varphi(0) = 0$ dans Ω et intégrons par parties sur Q . On obtient alors

$$\int_Q \rho_\varepsilon L \varphi \, dxdt + \int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{H^{-3/2}(\Gamma), H^{3/2}(\Gamma)} dt = 0$$

ce qui, en utilisant (1.55), donne

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} dt = 0.$$

Donc $\rho_\varepsilon = 0$ sur Σ .

D'après l'égalité (1.56), on a

$$\int_G (k_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega) k \, dxdt = 0, \quad \forall k \in K^\perp$$

ce qui veut dire que $k_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega \in K$. Et, comme $k_\varepsilon \in K^\perp$, on a $k_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega = P(k_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega) = P\rho_\varepsilon$. Donc $k_\varepsilon = -(\rho_\varepsilon \chi_\omega - P\rho_\varepsilon) \in K^\perp$. □

La proposition suivante nous donne les estimations sur k_ε , y_ε et ρ_ε .

Proposition 1.5. *Soit $(k_\varepsilon, y_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ défini comme dans la Proposition 1.4. Alors, il existe une constante positive C , indépendante de ε , telle que*

$$\|k_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leq C, \quad (1.58)$$

$$\|y_\varepsilon\|_{\Xi^{1,2}(Q)} \leq C, \quad (1.59)$$

$$\|\rho_\varepsilon \chi_\omega\|_{L^2(G)} \leq C, \quad (1.60)$$

$$\|\rho_\varepsilon\|_V \leq C. \quad (1.61)$$

Démonstration. Comme k_θ et y_θ définis par (1.36) et (1.37) vérifient (1.45), en utilisant, d'une part, la structure de I_ε et, d'autre part, la relation (1.39), on a

$$0 \leq I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq I_\varepsilon(k_\theta, y_\theta) = \frac{1}{2} \|k_\theta\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \|h\|_H.$$

Autrement dit, nous avons

$$\frac{1}{2} \|k_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon \chi_\omega\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \|h\|_H.$$

Donc

$$\|k_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H, \quad (1.62)$$

$$\|Ly_\varepsilon - h - k_\varepsilon \chi_\omega\|_{L^2(Q)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|h\|_H \quad (1.63)$$

et les relations (1.54) et (1.63) nous donnent

$$\|\varepsilon \rho_\varepsilon\|_{L^2(Q)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|h\|_H.$$

Ainsi, y_ε étant solution de (1.49), on obtient l'estimation (1.59) grâce aux propriétés de régularité de l'équation de la chaleur (cf. [16], tome 2).

De plus, puisque $L^* \rho_\varepsilon = 0$ et que l'estimation (1.58) est vérifiée, en utilisant la définition de la norme sur V donnée par la relation (1.28) ainsi que la définition de k_ε donnée par la relation (1.48), on obtient l'estimation (1.61).

D'autre part, puisque $\rho_\varepsilon \in V$, en appliquant l'inégalité d'observabilité (1.15) à ρ_ε , on a $\left\| \frac{1}{\theta} \rho_\varepsilon \right\|_{L^2(G)} \leq C$. Donc, en utilisant les relations (1.48), (1.58) et le fait que $\frac{1}{\theta} \in L^\infty(Q)$, on déduit que $\left\| \frac{1}{\theta} P \rho_\varepsilon \right\|_{L^2(G)} \leq C$. Puisque $P \rho_\varepsilon \in K$ qui est un sous espace de $L^2(G)$ de dimension finie, nous obtenons l'inégalité $\|P \rho_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leq C$ car, en dimension finie, les normes sont équivalentes. Ainsi, en réutilisant une fois de plus les relations (1.48) et (1.58), nous obtenons l'estimation (1.60). □

Maintenant, on peut passer à la limite quand ε tend vers 0 pour obtenir le système d'optimalité singulier associé au problème 1.1.

2.3 Existence, unicité et caractérisation du Follower.

Théorème 1.1. (*Caractérisation du Follower*)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ de classe C^2 et ω un ouvert non vide de Ω . On suppose l'hypothèse (1.8) vérifiée. Alors, pour toute fonction $h \in H$, le problème de

contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (1.2)-(1.5) admet une unique solution $k = k(h)$ caractérisée par

$$k(h) = -(\rho(h) - P\rho(h))\chi_\omega \quad (1.64)$$

où $\rho = \rho(h)$ est solution de

$$\begin{cases} -\rho' - \Delta\rho + a_0\rho &= 0 & \text{dans } Q, \\ \rho &= 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (1.65)$$

Démonstration. On procède en trois étapes.

Étape 1. On étudie la convergence de $(k_\varepsilon, y_\varepsilon)$.

D'après les estimations (1.58) et (1.59), on peut extraire de $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(y_\varepsilon)_\varepsilon$ deux sous-suites, encore notées $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(y_\varepsilon)_\varepsilon$ telles que

$$k_\varepsilon \rightharpoonup k_0 \quad \text{faiblement dans } L^2(G), \quad (1.66)$$

$$y_\varepsilon \rightharpoonup y_0 \quad \text{faiblement dans } \Xi^{1,2}(Q). \quad (1.67)$$

De plus, puisque $k_\varepsilon \in K^\perp$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$, on a

$$k_0 \in K^\perp. \quad (1.68)$$

Enfin, l'injection de $\Xi^{1,2}(Q)$ dans $L^2(Q)$ étant compacte, le couple (k_0, y_0) est tel que

$$\begin{cases} y'_0 - \Delta y_0 + a_0 y_0 &= h + k_0 \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_0 &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_0(0) &= 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.69)$$

$$y_0(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (1.70)$$

Ainsi, (k_0, y_0) est solution de (1.2)-(1.4).

Étape 2. On montre que $(k_0, y_0) = (k(h), y(h, k(h)))$.

D'après l'expression de I_ε donnée par (1.46), on peut écrire

$$\frac{1}{2} \|k_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 \leq I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon).$$

Puisque $(k(h), y(h, k(h)))$ satisfait le problème (1.2)-(1.4), cette dernière inégalité devient

$$\frac{1}{2} \|k_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 \leq I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq I_\varepsilon(k(h), y(h, k(h))) = \frac{1}{2} \|k(h)\|_{L^2(G)}^2. \quad (1.71)$$

Donc, en utilisant la relation (1.66) quand on passe à la limite dans l'inégalité (1.71), on obtient

$$\frac{1}{2} \|k_0\|_{L^2(G)}^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \|k(h)\|_{L^2(G)}^2.$$

Par conséquent,

$$\|k_0\|_{L^2(G)} \leq \|k(h)\|_{L^2(G)}. \quad (1.72)$$

D'autre part, (k_0, y_0) étant solution de (1.2)-(1.4), on a, d'après (1.44),

$$\|k(h)\|_{L^2(G)} \leq \|k_0\|_{L^2(G)}$$

ce qui, combiné avec (1.72) nous donne

$$\|k_0\|_{L^2(G)} = \|k(h)\|_{L^2(G)}.$$

D'où

$$k_0 = k(h). \quad (1.73)$$

Dès lors, l'unicité des solutions du système (1.69) nous donne $y_0 = y(h, k(h))$.

Étape 3. D'après les estimations (1.60) et (1.61), on peut extraire de $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ une sous-suite, encore notée $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que

$$\rho_\varepsilon \chi_\omega \rightharpoonup \rho \chi_\omega \text{ faiblement dans } L^2(G), \quad (1.74)$$

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } V. \quad (1.75)$$

Comme P est un opérateur compact, on déduit de (1.74) que

$$P\rho_\varepsilon \rightarrow P\rho \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (1.76)$$

Donc, en utilisant (1.74) et (1.76), on obtient

$$k_\varepsilon = -(\rho_\varepsilon \chi_\omega - P\rho_\varepsilon) \rightharpoonup -(\rho \chi_\omega - P\rho) \text{ faiblement dans } L^2(G).$$

Ainsi, d'après (1.66), (1.73) et l'unicité de la limite, on a que

$$k(h) = -(\rho \chi_\omega - P\rho) = (P - I)\rho \chi_\omega$$

et donc $\rho \chi_\omega = \rho(h) \chi_\omega$.

Nous avons ainsi montré que pour tout $h \in H$, le couple $(k(h), y(h, k(h)))$ est l'unique solution du problème (1.2)-(1.5) avec $k(h) = -(\rho(h) \chi_\omega - P\rho(h))$.

Maintenant, passons à la limite dans (1.51).

De (1.75), on obtient que $\rho \in V$,

$$\begin{aligned} L^* \rho_\varepsilon &\rightharpoonup L^* \rho(h) \text{ dans } L^2(Q) \\ \rho(h) &= 0 \text{ sur } \Sigma \end{aligned}$$

et, comme $L^* \rho_\varepsilon = 0$ dans Q , on en déduit que $L^* \rho = 0$ dans Q . Ainsi $\rho = \rho(h)$ est solution du système (1.65). $\square$

Remarque 1.2. Notons que $\|k(h)\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H$. En effet, comme (k_θ, y_θ) vérifie (1.45), on peut écrire

$$I_\varepsilon(k_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq I_\varepsilon(k_\theta, y_\theta) = \frac{1}{2}\|k_\theta\|_{L^2(G)}.$$

Donc, en utilisant la définition de I_ε donnée par la relation (1.46) et le fait que k_θ vérifie l'estimation (1.39), on obtient que $\|k_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H$. Par conséquent, d'après les relations (1.66) et (1.73), on a bien $\|k(h)\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H$.

3 Résolution du problème de contrôle optimal.

Avant de résoudre le problème de contrôle optimal, nous étudions les propriétés de l'application $\mathcal{F}$, définie par (1.7), qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 1.2. Pour tout $h \in H$, soit $\rho = \rho(h)$ la solution de (1.65). Alors, l'application $\mathcal{F}$ définie par la relation (1.7) est linéaire et continue de H dans $L^2(G)$.

Démonstration. On considère le sous-espace vectoriel V_0 de V défini par

$$V_0 = \{\varphi \in V \mid L^*\varphi = 0\}.$$

Puisque $(\mathcal{F}(h), y = y(h, \mathcal{F}(h)))$ est solution du problème (1.2)-(1.5), multiplions l'équation (1.3)₁ par $\varphi \in V_0$ et intégrons par parties dans Q . On a alors

$$\begin{aligned} \int_Q (h + \mathcal{F}(h)\chi_\omega)\varphi \, dxdt &= \int_Q (y' - \Delta y + a_0 y)\varphi \, dxdt \\ &= \int_\Omega y(T)\varphi(T) \, dx - \int_\Omega y(0)\varphi(0) \, dx - \int_Q y\varphi' \, dxdt \\ &\quad - \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial \nu}\varphi \, d\Gamma dt - \int_\Sigma y \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, d\Gamma dt - \int_Q y\Delta\varphi \, dxdt \\ &\quad + \int_Q a_0 y\varphi \, dxdt \end{aligned}$$

Comme $\varphi = 0$ sur Σ et $L^*\varphi = 0$, on a

$$\int_Q h\varphi \, dxdt + \int_Q \mathcal{F}(h)\chi_\omega\varphi \, dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in V_0. \quad (1.77)$$

ou encore

$$\int_Q h\varphi \, dxdt - \int_Q (\rho(h) - P\rho(h))\chi_\omega\varphi \, dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in V_0,$$

Par ailleurs, comme l'application $\varphi \mapsto \int_Q h\varphi \, dxdt$ est linéaire et continue sur V et que

$$\begin{aligned} - \int_G \mathcal{F}(h)\varphi \, dxdt &= \int_G (\rho(h) - P\rho(h))\varphi \, dxdt \\ &= \int_G (\rho(h) - P\rho(h))(\varphi - P\varphi) \, dxdt \\ &= a(\rho(h), \varphi), \end{aligned}$$

nous déduisons de l'égalité (1.77) que $\rho = \rho(h)$ est solution du problème variationnel

$$a(\rho, \varphi) = \int_Q h \varphi \, dx dt, \quad \forall \varphi \in V_0. \quad (1.78)$$

Donc l'application $h \mapsto \rho = \rho(h)\chi_\omega$ est linéaire de H dans $L^2(G)$. Par ailleurs, puisque l'opérateur de projection $I - P$ défini de $L^2(G)$ dans $K^\perp \subset L^2(G)$ est aussi linéaire, on en déduit que l'application $\mathcal{F}$ est linéaire de H dans $L^2(G)$. Il s'en suit alors, d'après la remarque 1.2, que $\mathcal{F}$ est continue sur H puisque $\|\mathcal{F}(h)\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H$. $\square$

Remarque 1.3. Si on note π la projection orthogonale de V sur V_0 alors $\rho = \pi\rho_\theta$. En effet, d'après l'égalité (1.34) d'une part et, l'égalité (1.78) d'autre part, on a

$$a(\rho_\theta, \varphi) = \int_Q h \varphi \, dx dt, \quad \forall \varphi \in V$$

et

$$a(\rho, \psi) = \int_Q h \psi \, dx dt, \quad \forall \psi \in V_0.$$

En particulier, pour $\varphi = \psi \in V_0$, il vient

$$a(\rho_\theta - \rho, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in V_0.$$

Par conséquent, puisque $\rho \in V_0$, on a bien $\rho = \pi\rho_\theta$.

3.1 Existence et caractérisation du Leader.

On considère la fonctionnelle J définie par

$$J(h) = \frac{1}{2} \|y(h, \mathcal{F}(h)) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|h\|_H^2 \quad (1.79)$$

à laquelle on associe le problème de minimisation

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h) \quad (1.80)$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

En utilisant les propriétés de l'application $\mathcal{F}$ données par le Lemme 1.2, il s'en suit que J est strictement convexe, continue et coercive. On a donc le résultat classique suivant (voir [17], chapitre 2, page 52) :

Proposition 1.6. Sous l'hypothèse (1.8), il existe un unique contrôle $\hat{h}$ solution du problème de minimisation (1.80).

Dans la suite de cette partie, nous utiliserons la notation $\hat{y} = y(\hat{h}, \mathcal{F}(\hat{h}))$. Nous allons maintenant caractériser $\hat{h}$.

Par définition, les conditions d'Euler-Lagrange nous donnent

$$\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Rappelons que $\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) - J(\hat{h})}{\lambda}$. On a alors

$$\begin{aligned} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) &= \frac{1}{2} \|y(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}), \mathcal{F}(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + \frac{N}{2} \|\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})\|_H^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\hat{y} - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, \mathcal{F}(h - \hat{h})))_{L^2(Q)} \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} \|y(h - \hat{h}, \mathcal{F}(h - \hat{h}))\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|\hat{h}\|_H^2 \\ &\quad + N\lambda(\hat{h}, h - \hat{h})_{L^2(Q)} + \frac{N\lambda^2}{2} \|h - \hat{h}\|_H^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) - J(\hat{h}) &= \lambda \left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, \mathcal{F}(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} \\ &\quad + N\lambda(\hat{h}, h - \hat{h})_H + \frac{\lambda^2}{2} \|y(h - \hat{h}, \mathcal{F}(h - \hat{h}))\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + \frac{N\lambda^2}{2} \|h - \hat{h}\|_H^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} = (\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, \mathcal{F}(h - \hat{h})))_{L^2(Q)} + (N\hat{h}, h - \hat{h})_H.$$

Ainsi, les conditions d'Euler-Lagrange nous donnent

$$(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, \mathcal{F}(h - \hat{h})))_{L^2(Q)} + (N\hat{h}, h - \hat{h})_H \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (1.81)$$

On interprète cette condition en utilisant l'état adjoint. Pour faciliter les calculs, on pose $w = h - \hat{h}$ et on note $z = y(w, \mathcal{F}(w))$. Alors z vérifie

$$\begin{cases} z' - \Delta z + a_0 z &= w + \mathcal{F}(w)\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ z &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ z(0) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.82)$$

Soit p la solution du système suivant :

$$\begin{cases} -p' - \Delta p + a_0 p &= \hat{y} - z_d & \text{dans } Q, \\ p &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ p(T) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.83)$$

Puisque $\hat{y} - z_d \in L^2(Q)$, on sait que $p \in \Xi^{1,2}(Q)$. En multipliant l'équation (1.83)₁ par z solution du système (1.82) et en intégrant par partie sur Q , on a

$$\begin{aligned} \int_Q z(\hat{y} - z_d) dxdt &= \int_Q (-p' - \Delta p + a_0 p) z dxdt \\ &= - \int_\Omega p(T)z(T) dx + \int_\Omega p(0)z(0) dx + \int_Q pz' dxdt - \\ &\quad \int_\Sigma z \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Gamma dt + \int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \nu} p d\Gamma dt - \int_Q p \Delta z dxdt + \int_Q a_0 pz dxdt \\ &= \int_Q p(z' - \Delta z + a_0 z) dxdt \\ &= \int_Q p(w + \mathcal{F}(w)\chi_\omega) dxdt. \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\int_Q pw dxdt + \int_Q p\mathcal{F}(w)\chi_\omega dxdt = \int_Q y(\hat{y} - z_d) dxdt.$$

On va maintenant interpréter cette égalité, en exprimant chacune des intégrales précédentes dans l'espace de Hilbert $H = \{h \in L^2(Q) \mid \theta h \in L^2(Q)\}$ où θ est définie par la relation (1.13). Soient H' le dual de l'espace H et Λ^{-1} l'isomorphisme isométrique de H' dans H . En observant que l'on peut écrire

$$\int_Q pw dxdt = \int_Q \frac{1}{\theta} p \theta w = \left\langle \frac{1}{\theta} p, w \right\rangle_{H', H}$$

et

$$\int_G p\mathcal{F}(w) dxdt = \langle \mathcal{F}^*(p), w \rangle_{H', H},$$

on obtient

$$\int_Q pw dxdt = (\Lambda^{-1}(\frac{1}{\theta}p), w)_H$$

et

$$\int_G p\mathcal{F}(w) dxdt = (\Lambda^{-1}\mathcal{F}^*(p), w)_H.$$

En résumé, la condition (1.81) devient

$$(\Lambda^{-1}(\frac{1}{\theta}p) + \Lambda^{-1}\mathcal{F}^*(p) + N\hat{h}, h - \hat{h})_H \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}$$

ou encore

$$(\Lambda^{-1}(\frac{1}{\theta}I + \mathcal{F}^*)(p) + N\hat{h}, h - \hat{h})_H \geq 0, \forall h \in \mathcal{U}_{ad}$$

où I est l'opérateur identité de $L^2(Q)$.

On a donc montré le résultat suivant :

Théorème 1.2. (*Existence, unicité et caractérisation du Leader*)

On suppose la condition (1.8) vérifiée. Soient θ la fonction définie par la relation (1.13) et $\mathcal{F}$ l'application linéaire continue définie par (1.7). Alors, il existe $p \in \Xi^{1,2}(Q)$ tel que le problème de minimisation (1.80) admette une unique solution $\hat{h}$ caractérisée par la condition d'optimalité suivante

$$(\Lambda^{-1}(\frac{1}{\theta}I + \mathcal{F}^*)(p) + N\hat{h}, h - \hat{h})_H \geq 0, \forall h \in \mathcal{U}_{ad} \quad (1.84)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lll} -p' - \Delta p + a_0 p & = & \hat{y} - z_d \quad \text{dans } Q \\ p & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ p(T) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.85)$$

Chapitre 2

Contrôle optimal d'un système distribué linéaire soumis à la contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état.

Dans ce chapitre, le problème de Stackelberg associé à une équation parabolique que nous considérons consiste à résoudre, dans un premier temps, un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état puis un problème de contrôle optimal. Plus précisément, nous considérons le système d'équation

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y = h + k\chi_\omega & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \\ y(0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

et nous nous intéressons aux problèmes suivants :

Problème 2.1. Soit $\{e_i, 1 \leq i \leq M\}$ un ensemble de fonctions de $L^2(Q)$ tel que les fonctions

$$e_i \chi_\omega, 1 \leq i \leq M \text{ soient linéairement indépendantes.} \quad (2.2)$$

Soient H l'espace de Hilbert défini par la relation (1.32), $h \in H$ et $a_0 \in L^\infty(Q)$. Trouver un contrôle $k \in L^2(\omega \times (0, T))$ tel que si y est solution de

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y = h + k\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

alors

$$\int_Q y e_i \, dx dt = 0, \quad 1 \leq i \leq M \quad (2.4)$$

et

$$y(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.5)$$

Problème 2.2. Soient $\mathcal{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $z_d \in L^2(Q)$. Trouver $\hat{h} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$J(\hat{h}) = \inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h). \quad (2.6)$$

où

$$J(h) = \frac{1}{2} \|y(h, k) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|h\|_H^2 \quad (2.7)$$

Si le minimum $\hat{h}$ existe, alors le couple $(k(\hat{h}), y(\hat{h}, k(\hat{h})))$ est la réalisation optimale du problème (2.3)-(2.6). Nous dirons alors que $\hat{h}$ est le Leader, $\hat{k} = k(\hat{h})$ est le Follower et $\hat{y} = y(\hat{h}, \hat{k})$ est l'état optimal du système. Dans la suite, nous noterons $G = \omega \times (0, T)$.

1 Équivalence entre le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état et le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Dans un premier temps, nous montrons que le problème (2.1) est équivalent au problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Proposition 2.1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ de classe C^2 et θ la fonction positive d'inverse bornée définie en (1.13). Alors, il existe deux sous-espaces de dimension finie K et K_θ tels que, pour tout $h \in H$, il existe $k_0 = k_0(h) \in K_\theta$ de telle sorte que le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état (2.3)-(2.5) soit équivalent au problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle suivant : Étant donné $a_0 \in L^\infty(Q)$, trouver $v \in L^2(G)$ tel que

$$v \in K^\perp \quad (2.8)$$

$$k = k_0 + v \quad (2.9)$$

et telle que la solution y de

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + (k_0 + v)\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

vérifie

$$y(T) = 0 \quad \text{dans } Q. \quad (2.11)$$

Pour la preuve de la Proposition (2.1), nous avons besoin des résultats qui suivent.

Lemme 2.1. Soient θ définie par la relation (1.13) et $e_i, 1 \leq i \leq M \in L^2(Q)$ telles que l'hypothèse (2.2) soit satisfaite. Soit $q_i \in \Xi^{1,2}(Q)$, $1 \leq i \leq M$, solution de :

$$\begin{cases} -q'_i - \Delta q_i + a_0 q_i &= e_i & \text{dans } Q, \\ q_i &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ q_i(T) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.12)$$

Alors, les fonctions $q_i \chi_\omega$, $1 \leq i \leq M$, sont linéairement indépendantes. De même, les fonctions $\frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega$, $1 \leq i \leq M$, sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Montrons, dans un premier temps, que les fonctions $q_i \chi_\omega$ ($1 \leq i \leq M$) sont linéairement indépendantes.

Soit $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq M$, tel que $\tilde{u} = \sum_{i=1}^M \gamma_i q_i \chi_\omega = 0$. Puisque q_i est solution de (2.12), on a, pour tout ouvert ω' de ω ,

$$-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \Delta \tilde{u} + a_0 \tilde{u} = \sum_{i=1}^M \gamma_i e_i \quad \text{dans } (0, T) \times \omega'.$$

On en déduit alors que $\sum_{i=1}^M \gamma_i e_i = 0$ dans G . Les fonctions $e_i \chi_\omega$, $i \in \{1, \dots, M\}$, étant linéairement indépendantes, on conclut que $\gamma_i = 0$, $1 \leq i \leq M$. D'où, les fonctions $q_i \chi_\omega$ sont linéairement indépendantes.

Montrons maintenant que les fonctions $\frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega$ ($1 \leq i \leq M$) sont linéairement indépendantes.

Soit $\delta_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq M$ tel que $\tilde{u}' = \sum_{i=1}^M \delta_i \frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega = 0$. On a $\theta \tilde{u}' = \sum_{i=1}^M \delta_i q_i \chi_\omega$. Comme q_i est solution de (2.12) et $\tilde{u}'|_G = 0$, on a, pour tout ouvert ω' de ω ,

$$-\frac{\partial(\theta \tilde{u}')}{\partial t} - \Delta(\theta \tilde{u}') + a_0(\theta \tilde{u}') = \sum_{i=1}^M \delta_i e_i \quad \text{dans } (0, T) \times \omega'.$$

On en déduit alors que $\sum_{i=1}^M \delta_i e_i = 0$ dans G . Les fonctions $e_i \chi_\omega$, $i \in \{1, \dots, M\}$, étant linéairement indépendantes, on conclut que $\delta_i = 0$, $1 \leq i \leq M$. D'où, les fonctions $\frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega$ sont linéairement indépendantes. □

Lemme 2.2. Soient θ définie par la relation (1.13), $e_i, 1 \leq i \leq M \in L^2(Q)$ telles que l'hypothèse (2.2) soit satisfaite et $q_i, 1 \leq i \leq M$, solution du système (2.12). Posons $A_\theta = \left(\int_G \frac{1}{\theta} q_i q_j dx dt \right)_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq M$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(A_\theta X, X)_{\mathbb{R}^M} \geq \delta \|X\|_{\mathbb{R}^M}^2$$

où

$$(A_\theta X, X)_{\mathbb{R}^M} = \int_G \frac{1}{\theta} \left(\sum_{i=1}^M X_i q_i \right) \left(\sum_{j=1}^M X_j q_j \right) dx dt$$

et

$$X = (X_1, \dots, X_M) \in \mathbb{R}^M.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists X^n = (X_1^n, \dots, X_M^n) \in \mathbb{R}^M$ tel que

$$(A_\theta X^n, X^n)_{\mathbb{R}^M} \leq \frac{1}{n} \|X^n\|_{\mathbb{R}^M}.$$

On pose $\tilde{X}^n = \frac{X^n}{\|X^n\|_{\mathbb{R}^M}}$. Alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{X}^n\|_{\mathbb{R}^M} &= \sqrt{\sum_{i=1}^M |\tilde{X}^n|^2} = 1, \\ (A_\theta \tilde{X}^n, \tilde{X}^n)_{\mathbb{R}^M} &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On peut donc extraire une sous-suite de $(\tilde{X}_i^n)$, $1 \leq i \leq M$, encore notée $(\tilde{X}_i^n)$, $1 \leq i \leq M$ telle que

$$\tilde{X}_i^n \rightarrow \tilde{X}_i \text{ dans } \mathbb{R}, 1 \leq i \leq M. \quad (2.13)$$

De plus, $\sum_{i=1}^M |\tilde{X}_i|^2 = 1$.

Soit $\tilde{u}^n = \sum_{i=1}^M \tilde{X}_i^n q_i$. Alors, d'après la relation (2.13), on a

$$\tilde{u}^n \rightarrow \tilde{u} = \sum_{i=1}^M \tilde{X}_i q_i \text{ fortement dans } L^2(Q).$$

Et, puisque

$$\int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{u}^n|^2 dx dt = (A \tilde{X}, \tilde{X})_{\mathbb{R}^M} \leq \frac{1}{n},$$

on obtient que

$$\int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{u}|^2 dxdt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{u}^n|^2 dxdt = 0.$$

Par conséquent, $\int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{u}|^2 dxdt = 0$. Ce qui implique que $\tilde{u} = 0$ dans G . Comme $\tilde{u} = \sum_{i=1}^M \tilde{X}_i q_i$ et que les $q_i \chi_\omega$ sont linéairement indépendantes, on en déduit que $\tilde{X}_i = 0$, $1 \leq i \leq M$. Ce qui contredit le fait que $\sum_{i=1}^M |\tilde{X}_i|^2 = 1$. □

Preuve de la Proposition 2.1. On interprète la contrainte (2.4) en utilisant l'état adjoint. Plus précisément, pour tout e_i , $1 \leq i \leq M$, on considère le système adjoint défini par (2.12). Puisque $a_0 \in L^\infty(Q)$ et $e_i \in L^2(Q)$, le problème (2.12) admet une unique solution $q_i \in \Xi^{1,2}(Q)$. (cf. [17])

Multiplions chaque membre de l'équation (2.3)₁ par q_i solution de (2.12) et intégrons les sur Q . On a alors :

$$\int_Q (y' - \Delta y + a_0 y) q_i dxdt = \int_Q (h + k \chi_\omega) q_i dxdt.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega y(T) q_i(T) dx - \int_\Omega y(0) q_i(0) dx - \int_Q y q_i' dxdt - \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial \nu} q_i d\Gamma dt \\ & + \int_\Sigma y \frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\Gamma dt - \int_Q y \Delta q_i dxdt + \int_Q a_0 y q_i dxdt = \int_Q (h + k \chi_\omega) q_i dxdt. \end{aligned}$$

Comme $y(T) = y(0) = 0$, $y|_\Sigma = 0 = q_i|_\Sigma$ et $-q_i' - \Delta q_i + a_0 q_i = e_i$, l'égalité précédente devient :

$$\int_Q y e_i dxdt = \int_Q (h + k \chi_\omega) q_i dxdt$$

ce qui, d'après la relation (2.4), donne

$$0 = \int_Q (h + k \chi_\omega) q_i dxdt.$$

Ainsi, on a

$$\int_G k q_i dxdt = - \int_Q h q_i dxdt. \quad (2.14)$$

Soient

$$K = Vect\{q_i \chi_\omega, 1 \leq i \leq M\} \quad (2.15)$$

le sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ engendré par les M fonctions $q_i \chi_\omega$, $1 \leq i \leq M$ et $K^\perp$ son orthogonal dans $L^2(G)$. Notons

$$K_\theta = \frac{1}{\theta} K \quad (2.16)$$

le sous-espace de $L^2(G)$ engendré par les M fonctions $\frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega$, $1 \leq i \leq M$.

D'après le Lemme 2.2, la matrice $\left(\int_0^T \int_\omega \frac{1}{\theta} q_i q_j dx dt \right)_{1 \leq i, j \leq M}$ est symétrique, définie positive. Donc, il existe un unique $k_0 = k_0(h) \in K_\theta$ tel que

$$\int_G k_0 q_i dx dt = - \int_Q h q_i dx dt, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.17)$$

En combinant les relations (2.14) et (2.17), on en déduit que

$$\int_G (k - k_0) q_i dx dt = 0, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Par conséquent,

$$k - k_0 \in K^\perp.$$

Ainsi, on obtient $k = k_0 + v$ avec $v \in K^\perp$. En remplaçant $k \chi_\omega$ par $(k_0 + v) \chi_\omega$ dans le système (2.3), on obtient le système (2.10).

Réciproquement, fixons $h \in L^2(Q)$ et, pour tout $e_i \in L^2(Q)$, $1 \leq i \leq M$, supposons que (v, y) est tel que

$$v \in K^\perp, \quad (2.18)$$

$$k = k_0 + v, \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + (k_0 + v) \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.20)$$

et

$$y(T) = 0 \text{ dans } Q. \quad (2.21)$$

Alors, en résolvant le système (2.12), on obtient les fonctions q_i , $1 \leq i \leq M$. Soient K et K_θ définis respectivement par (2.15) et (2.16), $K^\perp$ l'orthogonal de K dans $L^2(G)$, $v \in K^\perp$ et k_0 vérifiant la relation (2.17).

En multipliant chaque membre de la première équation du système (2.20) par q_i et en intégrant par parties sur Q , on a

$$\int_Q (y' - \Delta y + a_0 y) q_i dx dt = \int_Q (h + (k_0 + v) \chi_\omega) q_i dx dt.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} y(T)q_i(T) dx - \int_{\Omega} y(0)q_i(0) dx - \int_Q yq'_i dxdt - \int_{\Sigma} \frac{\partial y}{\partial \nu} q_i d\Gamma dt + \int_{\Sigma} y \frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\Gamma dt \\ & - \int_Q y\Delta q_i dxdt + \int_Q a_0 y q_i dxdt = \int_Q h q_i dxdt + \int_Q (k_0 + v)\chi_{\omega} q_i dxdt. \end{aligned}$$

Et, comme $y(T) = y(0) = 0$, $y|_{\Sigma} = 0 = q_i|_{\Sigma}$ et $-q'_i - \Delta q_i + a_0 q_i = e_i$, l'égalité précédente devient

$$- \int_Q h q_i dxdt + \int_Q y e_i dxdt = \int_Q (k_0 + v)\chi_{\omega} q_i dxdt. \quad (2.22)$$

En observant que $v \in K^{\perp}$ et que k_0 vérifie la relation (2.17), la relation (2.22) devient

$$\int_Q y e_i dxdt = 0.$$

Ainsi, (k, y) est bien solution du problème (2.3)-(2.5). □

En résumé, la proposition 2.1 montre que la contrôlabilité à zéro avec contraintes de type (2.4) sur l'état peut être ramené à la contrôlabilité à zéro avec contrainte de type (2.8) sur le contrôle. Autrement dit, on se ramène au problème étudié au chapitre 1. Ceci étant, les résultats du chapitre 1 reposent sur la condition (1.8). Nous allons, dans la section qui suit, prouver que nous pouvons nous débarrasser de cette condition.

2 Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Lemme 2.3. *On suppose la condition (2.2) vérifiée. Soient q_i , $1 \leq i \leq M$, solution de (2.12) et K le sous espace vectoriel défini par (2.15). Alors, toute fonction ρ vérifiant*

$$-\rho' - \Delta \rho + a_0 \rho = 0 \text{ dans } \omega \times (0, T) \text{ et } \rho|_G \in K \quad (2.23)$$

est identiquement nulle dans $\omega \times (0, T)$.

Démonstration. Soit ρ tel que $\rho|_G \in K$ et $-\rho' - \Delta \rho + a_0 \rho = 0$ dans $\omega \times (0, T)$. Alors, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq M$ tel que

$$\rho = \sum_{i=1}^M \alpha_i q_i \chi_{\omega}. \quad (2.24)$$

Donc, pour tout ouvert ω' de ω , on a

$$-\rho' - \Delta \rho + a_0 \rho = \sum_{i=1}^M \alpha_i (-q'_i - \Delta q_i + a_0 q_i), \text{ dans } \omega' \times (0, T)$$

ce qui, d'après le système (2.12), nous donne

$$-\rho' - \Delta\rho + a_0\rho = \sum_{i=1}^M \alpha_i e_i, \quad \text{dans } \omega' \times (0, T).$$

Comme $-\rho' - \Delta\rho + a_0\rho = 0$ dans $\omega \times (0, T)$, on a

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i e_i = 0 \quad \text{dans } \omega \times (0, T).$$

Les fonctions $e_i \chi_\omega$ étant linéairement indépendantes pour $1 \leq i \leq M$, on obtient $\alpha_i = 0$. Ce qui, d'après (2.24), implique que $\rho = 0$ dans $\omega \times (0, T)$. □

2.1 Inégalités de Carleman.

Soit encore

- K le sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ défini par la relation (2.15),
- P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ sur K ,
- $P\rho$ la projection orthogonale de $\rho \chi_\omega$ sur K pour $\rho \in L^2(Q)$.

D'après le Lemme 2.3, la condition (1.8) est vérifiée sous l'hypothèse (2.2). Nous pouvons donc démontrer, comme dans le chapitre précédent, l'inégalité de Carleman adaptée suivante.

Proposition 2.2. (*Inégalité de Carleman adaptée*)

On suppose la condition (2.2) vérifiée. Soit θ définie par la relation (1.13). Alors, il existe $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega, \omega, a_0) > 1$, $s_0 = s_0(\Omega, \omega, a_0, T) > 1$ et $C = C(\Omega, \omega, a_0, T) > 0$ tels que pour tous $\lambda > \lambda_0$ et $s > s_0$ et pour tout $\rho \in \mathcal{V}$:

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dxdt \leq C \left(\int_Q |L^* \rho|^2 dxdt + \int_G |\rho - P\rho|^2 dxdt \right). \quad (2.25)$$

2.2 Propriétés de $k_0(h)$.

Dans le chapitre précédent, le terme source du système (1.1) est $h + k\chi_\omega$ avec $h \in H$. Dans ce chapitre, le terme source du système (2.10) est de la forme $h + (k_0 + v)\chi_\omega = (h + k_0\chi_\omega) + v\chi_\omega$. Pour résoudre le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle associé au système (2.10), nous avons donc besoin de connaître les propriétés du terme $k_0 = k_0(h)$ défini à la page 36 par la relation (2.17).

Proposition 2.3. Soit θ définie par la relation (1.13) et $h \in H$. Soit également q_i et $k_0(h)$ définis respectivement par (2.12) et (2.17). Alors, l'application $h \mapsto k_0(h)$ est linéaire. De

plus, il existe $C = C(\Omega, a_0, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}) > 0$ tel que

$$\|\theta k_0(h)\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H, \quad (2.26)$$

$$\|k_0(h)\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H. \quad (2.27)$$

Démonstration. D'après la relation (2.17), on a

$$\int_G k_0(h) q_i \, dxdt = - \int_Q h q_i \, dxdt, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (2.28)$$

Donc l'application $h \mapsto k_0(h)$ est clairement linéaire.

Par ailleurs, puisque $k_0(h) \in \text{Vect}\{\frac{1}{\theta} q_1 \chi_\omega, \dots, \frac{1}{\theta} q_M \chi_\omega\}$, il existe

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{R}^M$$

tel que

$$k_0(h) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \chi_\omega. \quad (2.29)$$

En remplaçant $k_0(h)$ par $\sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \chi_\omega$ dans l'égalité (2.28), on obtient :

$$\int_G \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j q_i \, dxdt = - \int_Q h q_i \, dxdt, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Par conséquent,

$$\int_G \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \sum_{i=1}^M \alpha_i q_i \, dxdt = - \int_Q \theta h \sum_{i=1}^M \alpha_i \frac{1}{\theta} q_i \, dxdt, \quad (2.30)$$

ce qui, d'après Cauchy-Schwartz, donne

$$\int_G \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \sum_{i=1}^M \alpha_i q_i \, dxdt \leq \|h\|_H \sum_{i=1}^M |\alpha_i| \|q_i\|_{L^2(Q)}.$$

Dès lors, en observant que $\int_G \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \sum_{i=1}^M \alpha_i q_i \, dxdt = (A_\theta \alpha, \alpha)$, le Lemme 2.2 nous permet de conclure qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\delta \|\alpha\|_{\mathbb{R}^N}^2 \leq \|h\|_H \sum_{i=1}^M |\alpha_i| \|q_i\|_{L^2(Q)}. \quad (2.31)$$

Or, q_i étant solution de (2.12), on a

$$\|q_i\|_{L^2(Q)} \leq C(\Omega, a_0, T) \|e_i\|_{L^2(Q)}. \quad (2.32)$$

En combinant (2.32) et (2.31), on obtient :

$$\|\alpha\|^2 \leq \delta^{-1} C(\Omega, a_0, T) \|h\|_H \|\alpha\|_{\mathbb{R}^M} \sqrt{\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2}$$

puisque $\delta > 0$. Ce qui équivaut à

$$\|\alpha\| \leq \delta^{-1} C(\Omega, a_0, T) \|h\|_H \sqrt{\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2}. \quad (2.33)$$

Maintenant, en utilisant (2.29), (2.31) et (2.33), on obtient, d'une part,

$$\begin{aligned} \|\theta k_0(h)\|_{L^2(G)} &\leq \sum_{j=1}^M |\alpha_j| \|q_j\|_{L^2(G)}, \\ &\leq C(\Omega, a_0, T) \sum_{j=1}^M |\alpha_j| \|e_j\|_{L^2(Q)}, \\ &\leq C(\Omega, a_0, T) \|\alpha\|_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta^{-1} C(\Omega, a_0, T)^2 \|h\|_H \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2 \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\|k_0(h)\|_{L^2(G)} \leq C(\Omega, a_0, T) \|\alpha\| \left(\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta^{-1} C(\Omega, a_0, T)^2 \|h\|_H \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2$$

puisque $\frac{1}{\theta}$ est borné dans $L^\infty(Q)$. Finalement, en posant

$$C = C(\Omega, a_0, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}) = \delta^{-1} C(\Omega, a_0, T)^2 \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2,$$

on obtient les relations (2.26) et (2.27). □

2.3 Existence et unicité de la solution du problème de contrôlabilité avec contrainte sur le contrôle.

On suppose l'hypothèse (2.2) vérifiée, autrement dit que les fonctions $e_i \chi_\omega$ sont linéairement indépendantes, et on considère l'espace de Hilbert H défini par la relation (1.32). Soit $h \in H$. Soient également θ et $k_0(h)$ définis respectivement par (1.13) et (2.17). Alors, grâce à l'estimation de $\theta k_0(h)$ donnée par la relation (2.26) et à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, la forme linéaire définie sur V par

$$\rho \mapsto \int_Q h \rho \, dx dt + \int_G k_0(h) \rho \, dx dt$$

est continue sur V . Dès lors, le théorème de Lax-Milgram nous permet de dire que, pour tout $h \in H$, il existe un unique $\rho_\theta = \rho_\theta(h) \in V$ solution de l'équation variationnelle suivante

$$a(\rho_\theta, \rho) = \int_Q (h + k_0(h) \chi_\omega) \rho \, dx dt, \quad \forall \rho \in V. \quad (2.34)$$

où $a(., .)$ est la forme bilinéaire définie par la relation (1.27). La relation (2.34) peut encore s'écrire

$$\int_Q L^* \rho_\theta L^* \rho \, dx dt + \int_G (\rho_\theta - P \rho_\theta)(\rho - P \rho) \, dx dt = \int_Q (h + k_0(h) \chi_\omega) \rho \, dx dt, \quad \forall \rho \in V.$$

Proposition 2.4. *On suppose l'hypothèse (2.2) vérifiée et on considère $h \in H$ et ρ_θ l'unique solution du problème variationnel (2.34). On pose*

$$v_\theta = -(\rho_\theta \chi_\omega - P \rho_\theta) \quad (2.35)$$

et

$$y_\theta = L^* \rho_\theta. \quad (2.36)$$

Alors, le couple (v_θ, y_θ) vérifie le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (2.8)-(2.11).

De plus, il existe $C = C(\Omega, \omega, a_0, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}) > 0$ telle que

$$\|\rho_\theta\|_V \leq C \|h\|_H, \quad (2.37)$$

$$\|v_\theta\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H, \quad (2.38)$$

$$\|y_\theta\|_{\Xi^{1,2}(Q)} \leq C \|h\|_H. \quad (2.39)$$

Démonstration. C'est une application de la Proposition 1.2 du chapitre 1 où, d'une part, k_θ est remplacé par v_θ et h est remplacé par $h + k_0(h)$ et où, d'autre part, on applique les estimations (2.26) et (2.27). □

Proposition 2.5. *On suppose les hypothèses de la Proposition 2.4 vérifiées. Alors, il existe un unique contrôle $v = v(h)$ tel que*

$$v = \min_{\tilde{v} \in \mathcal{E}} \|\tilde{v}\| \quad (2.40)$$

où

$$\mathcal{E} = \{\tilde{v} \in K^\perp \mid (\tilde{v}, \tilde{y}) \text{ vérifie (2.8) - (2.11)}\}. \quad (2.41)$$

De plus, il existe $C = C(\Omega, \omega, a_0, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}) > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H. \quad (2.42)$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.4, le couple (v_θ, y_θ) vérifie le problème de contrôlabilité (2.8)-(2.11). Par conséquent, $\mathcal{E}$ est non vide. Puisque $\mathcal{E}$ est aussi un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(G)$, on en déduit qu'il existe un unique contrôle v de norme minimale dans $L^2(G)$. En particulier, on a

$$\|v\|_{L^2(G)} \leq \|v_\theta\|_{L^2(G)}.$$

D'où, en utilisant l'estimation (2.38), on obtient l'estimation (2.42). □

2.4 Caractérisation de la solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Dans cette partie, nous allons caractériser la solution optimale. Pour cela, nous utilisons une méthode de pénalisation introduite par J.L. Lions.

Posons

$$\mathcal{A} = \begin{cases} u \in K^\perp, \\ z' - \Delta z + a_0 z = h + (k_0 + u)\chi_\omega, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ z(0) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.43)$$

Comme $z \in \Xi^{1,2}(Q)$, on sait que $z(T)$ existe et appartient à $L^2(\Omega)$. Considérons donc la fonctionnelle I_ε définie par

$$I_\varepsilon(u, z) = \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|z(T)\|_{L^2(Q)}^2 \quad (2.44)$$

et résolvons le problème suivant :

$$\inf\{I_\varepsilon(u, z), (u, z) \text{ vérifiant (2.43)}\}. \quad (2.45)$$

Comme $(v_\theta, y_\theta) \in \mathcal{A}$ et $I_\varepsilon(u, z) \geq 0$, on peut définir $d_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$d_\varepsilon = \inf\{I_\varepsilon(u, z), (u, z) \in \mathcal{A}\}.$$

Soit (u_n, y_n) une suite minimisante telle que $(u_n, y_n) \in \mathcal{A}$ et

$$d_\varepsilon \leq I_\varepsilon(u_n, y_n) < d_\varepsilon + \frac{1}{n} < d_\varepsilon + 1.$$

En particulier,

$$d_\varepsilon \leq I_\varepsilon(v_\theta, y_\theta) = \frac{1}{2}\|v_\theta\|_{L^2(G)}^2.$$

De la structure de I_ε et de la relation (2.38), on a

$$\|u_n\|_{L^2(G)} \leq \|v_\theta\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H, \quad (2.46)$$

$$\|y_n(T)\|_{\Xi^{1,2}(Q)} \leq \sqrt{\varepsilon}\|v_\theta\|_{L^2(G)} \leq C\sqrt{\varepsilon}\|h\|_H. \quad (2.47)$$

Comme $(u_n, y_n) \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{cases} y'_n - \Delta y_n + a_0 y_n &= h + k_0 \chi_\omega + u_n \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_n &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_n(0) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.48)$$

Dès lors, en utilisant (2.46), (2.27) et les propriétés de l'équation de la chaleur, on a

$$\|y_n\|_{\Xi^{1,2}(Q)} \leq C\|h\|_H. \quad (2.49)$$

Des relations (2.46), (2.47) et (2.49), on déduit que l'on peut extraire de $(u_n, y_n)_n$ et de $(y_n(T))_n$ des sous-suites encore notées $(u_n, y_n)_n$ et $(y_n(T))_n$ telles que

$$u_n \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ dans } L^2(G), \quad (2.50)$$

$$y_n \rightharpoonup y_\varepsilon \text{ dans } \Xi^{1,2}(Q), \quad (2.51)$$

$$y_n(T) \rightharpoonup \alpha \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (2.52)$$

Comme $K^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(G)$ et que $u_n \in K^\perp$, on a $u_\varepsilon \in K^\perp$. Par ailleurs, l'injection de $\Xi^{1,2}(Q)$ dans $L^2(Q)$ étant compacte, on obtient, d'une part en passant à la limite dans (2.48) et en utilisant (2.50),

$$\begin{cases} y'_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon + a_0 y_\varepsilon &= h + k_0 \chi_\omega + u_\varepsilon \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_\varepsilon(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.53)$$

et, d'autre part,

$$y_n(T) \rightharpoonup y_\varepsilon(T) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

ce qui combiné avec (2.52) donne $\alpha = y_\varepsilon(T)$. Ainsi,

$$y_n(T) \rightharpoonup y_\varepsilon(T) \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (2.54)$$

Maintenant, si on combine (2.50), (2.54) et la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle I_ε , on obtient

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n, y_n) = d_\varepsilon.$$

Donc $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ est le couple optimal solution du problème (2.45). L'unicité de ce couple vient de la stricte convexité de la fonctionnelle I_ε .

Dans ce qui suit, nous caractérisons le couple optimal.

Proposition 2.6. *Soit $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ la solution optimale du problème (2.45). Soit P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ dans K . Alors, il existe $\rho_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ tel que le triplet $(u_\varepsilon, y_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ soit solution du système d'optimalité suivant :*

$$u_\varepsilon = -(\rho_\varepsilon \chi_\omega - P\rho_\varepsilon) \in K^\perp, \quad (2.55)$$

$$\begin{cases} y'_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon + a_0 y_\varepsilon &= h + k_0 \chi_\omega + u_\varepsilon \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_\varepsilon(0) &= 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\begin{cases} -\rho'_\varepsilon - \Delta \rho_\varepsilon + a_0 \rho_\varepsilon &= 0 & \text{dans } Q, \\ \rho_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \rho_\varepsilon(T) &= \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(T) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.57)$$

Démonstration. Ecrivons les équations d'Euler. On a

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I_\varepsilon(u_\varepsilon + \lambda(w - u_\varepsilon), y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon)) - I_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\lambda} \geq 0, \quad \forall (w, z) \in \mathcal{A}.$$

Calculons $I_\varepsilon(u_\varepsilon + \lambda(w - u_\varepsilon), y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon))$. On a alors

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(u_\varepsilon + \lambda(w - u_\varepsilon), y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon)) &= \frac{1}{2} \|u_\varepsilon + \lambda(w - u_\varepsilon)\|_{L^2(G)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \|(y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon))(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 + \lambda(u_\varepsilon, w - u_\varepsilon)_{L^2(G)} \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} \|w - u_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|y_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{\varepsilon} (y_\varepsilon(T), (z - y_\varepsilon)(T)) + \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \|(z - y_\varepsilon)(T)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(u_\varepsilon + \lambda(w - u_\varepsilon), y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon)) - I_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) &= \lambda(u_\varepsilon, w - u_\varepsilon)_{L^2(G)} \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \|w - u_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 \\
&+ \frac{\lambda}{\varepsilon} (y_\varepsilon(T), (z - y_\varepsilon)(T)) \\
&+ \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \|(z - y_\varepsilon)(T)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, en divisant les deux égalités précédentes par $\lambda \neq 0$ et en passant à la limite quand λ tend vers 0, nous obtenons

$$(u_\varepsilon, w - u_\varepsilon)_{L^2(G)} + \frac{1}{\varepsilon} (y_\varepsilon(T), (z - y_\varepsilon)(T))_{L^2(\Omega)} \geq 0, \quad \forall (w, z) \in \mathcal{A}. \quad (2.58)$$

Pour interpréter (2.58), on considère le système adjoint suivant :

$$\begin{cases} -\rho'_\varepsilon - \Delta \rho_\varepsilon + a_0 \rho_\varepsilon &= 0 & \text{dans } Q, \\ \rho_\varepsilon &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \rho_\varepsilon(T) &= \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(T) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.59)$$

Comme $z - y_\varepsilon$ est solution de

$$\begin{cases} (z - y_\varepsilon)' - \Delta(z - y_\varepsilon) + a_0(z - y_\varepsilon) &= w - u_\varepsilon \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ (z - y_\varepsilon) &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ (z - y_\varepsilon)(0) &= 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.60)$$

puisque $(z, y_\varepsilon) \in \mathcal{A}^2$, si on multiplie (2.59)₁ par $z - y_\varepsilon$ et que l'on intègre sur Q , on a

$$\begin{aligned}
& - \int_{L^2(\Omega)} \rho_\varepsilon(T) (z(T) - y_\varepsilon(T)) dx + \int_{L^2(\Omega)} \rho_\varepsilon(0) (z(0) - y_\varepsilon(0)) dx \\
& + \int_{L^2(Q)} ((z - y_\varepsilon)' - \Delta(z - y_\varepsilon) + a_0(z - y_\varepsilon)) \rho_\varepsilon dx dt = 0.
\end{aligned} \quad (2.61)$$

Les relations (2.61) et (2.58) donnent alors

$$\int_{L^2(G)} u_\varepsilon (w - u_\varepsilon) dx dt + \int_{L^2(G)} \rho_\varepsilon \chi_\omega (w - u_\varepsilon) dx dt \geq 0, \quad \forall w \in K^\perp.$$

$K^\perp$ étant un sous espace vectoriel, on a

$$\int_{L^2(G)} (u_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega) (w - u_\varepsilon) dx dt = 0, \quad \forall w \in K^\perp.$$

On en déduit alors que $u_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega \in K$ puisque $u_\varepsilon \in K^\perp$. Ainsi, $u_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega = P(u_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega) = P\rho_\varepsilon$. Finalement, on obtient

$$u_\varepsilon = -\rho_\varepsilon \chi_\omega + P\rho_\varepsilon. \quad (2.62)$$

□

On peut maintenant passer à la limite dans le système d'optimalité approché afin d'obtenir une caractérisation du contrôle v . Nous obtenons alors le résultat suivant :

Proposition 2.7. *Soit $v = v(h)$ l'unique solution de (2.40) et $y = y(h, v(h))$ l'état associé. Soit P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ dans K . Alors, il existe $\rho = \rho(h) \in V$ tel que le triplet (v, y, ρ) soit solution du système d'optimalité singulier suivant :*

$$v = -(\rho \chi_\omega - P\rho) \in K^\perp, \quad (2.63)$$

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + k_0 \chi_\omega + v \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) &= 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.64)$$

$$y(T) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.65)$$

$$\begin{cases} L^* \rho &= 0 & \text{dans } Q, \\ \rho &= 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.66)$$

Démonstration. Des estimations (2.46), (2.47) et (2.49) et de la semi-continuité inférieure faible de la norme, on a

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H, \quad (2.67)$$

$$\|y_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}\|h\|_H, \quad (2.68)$$

$$\|y_\varepsilon\|_{\Xi^{1,2}(Q)} \leq C\|h\|_H. \quad (2.69)$$

On peut donc extraire de $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ et de $(y_\varepsilon(T))$ des sous suites encore notées $(u_\varepsilon, y_\varepsilon)$ et $(y_\varepsilon(T))$ telles que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ faiblement dans } L^2(Q), \quad (2.70)$$

$$y_\varepsilon(T) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega), \quad (2.71)$$

$$y_\varepsilon \rightharpoonup y_0 \text{ faiblement dans } \Xi^{1,2}(Q). \quad (2.72)$$

L'injection de $\Xi^{1,2}(Q)$ dans $L^2(Q)$ étant compacte, on a, d'une part en utilisant (2.70) et (2.72), que (u_0, y_0) est solution de

$$\begin{cases} y'_0 - \Delta y_0 + a_0 y_0 &= h + k_0 \chi_\omega + u_0 \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_0 &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_0(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.73)$$

et, d'autre part, que

$$y_\varepsilon(T) \rightharpoonup y_0(T) \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (2.74)$$

Dès lors, de (2.71), on a $y_0(T) = 0$ dans Ω .

Montrons maintenant que $(u_0, y_0) = (v, y)$.

D'après l'expression de I_ε , on peut écrire

$$\frac{1}{2} \|u_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 \leq I_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon). \quad (2.75)$$

Comme le couple optimal (v, y) est solution de (2.8)-(2.11), en passant à la limite dans (2.75), on obtient

$$\frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(G)}^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \|v\|^2.$$

Par conséquent,

$$\|u_0\|_{L^2(G)} \leq \|v\|_{L^2(G)}. \quad (2.76)$$

D'autre part, (u_0, y_0) étant solution de (2.8)-(2.11), on a $(u_0, y_0) \in \mathcal{E}$ défini par (2.41).

Donc, d'après (2.40), on a

$$\|v\|_{L^2(G)} \leq \|u_0\|_{L^2(G)}$$

ce qui combiné avec (2.76) donne

$$\|u_0\|_{L^2(G)} = \|v\|_{L^2(G)}.$$

D'où

$$u_0 = v. \quad (2.77)$$

Dès lors, l'unicité des solutions du système (2.73) nous donne $y_0 = y$.

Passons maintenant à la limite dans (2.57).

Comme ρ_ε est solution de (2.57), on a en particulier $\rho_\varepsilon \in V$. En utilisant la définition de la norme sur V donnée par la relation (1.28) et la définition de u_ε donnée par (2.62), on obtient l'estimation

$$\|\rho_\varepsilon\|_V \leq C. \quad (2.78)$$

On peut donc extraire de $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ une sous suite encore notée $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } V. \quad (2.79)$$

De (2.79), on obtient que $\rho \in V$,

$$\begin{aligned} L^* \rho_\varepsilon &\rightharpoonup L^* \rho(h) \text{ dans } L^2(Q), \\ \rho(h) &= 0 \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Comme $L^* \rho_\varepsilon = 0$ dans Q , on en déduit que $L^* \rho(h) = 0$ dans Q . Ainsi $\rho = \rho(h)$ est solution du système (2.66). $\square$

Remarque 2.1. La semi continuité inférieure de la norme et les relations (2.70) et (2.67), nous permettent de dire que

$$\|v\| \leq c\|h\|_H.$$

3 Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état.

Théorème 2.1. (*Existence unicité et caractérisation du Follower*).

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ de classe C^2 et H l'espace de Hilbert défini par la relation (1.32). Alors, pour toute fonction $e_i \in L^2(Q)$, $1 \leq i \leq M$ vérifiant l'hypothèse (2.2) et pour tout $h \in H$, il existe un unique contrôle $k = k(h) \in L^2(Q)$ tel que la solution $y = y(h, k(h))$ de

$$\begin{cases} y' - \Delta y + a_0 y &= h + k\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.80)$$

vérifie

$$\int_Q y e_i \, dx dt = 0, \quad 1 \leq i \leq M \quad (2.81)$$

et

$$y(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.82)$$

De plus, le contrôle k peut être choisi de telle sorte que

$$\|k\| \leq C\|h\|_H \quad (2.83)$$

$$\text{où } C = C\left(\Omega, \omega, a_0, T, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}\right) > 0.$$

Démonstration. Nous avons montré qu'il existe un unique contrôle $v(h) \in K^\perp$ solution de (2.40) tel que le couple $(v(h), y(h, v(h)))$ vérifie le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (2.8)-(2.11). Par conséquent, la Proposition 2.1 nous permet de dire que le contrôle $k = k(h) = (k_0(h) + v(h))$ est solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état (2.80), (2.81) et (2.82). De plus, en utilisant les relations (2.27) et (2.42), on déduit l'estimation (2.83). $\square$

4 Résolution du problème de contrôle optimal.

4.1 Quelques propriétés.

On définit, comme au chapitre 1, l'application $\mathcal{F}$ de H à valeurs dans $L^2(G)$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : H &\rightarrow L^2(G) \\ h &\mapsto \mathcal{F}(h) = v(h) = -(\rho(h) - P\rho(h))\chi_\omega. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Lemme 2.4. *Pour tout $h \in H$, soit $\rho = \rho(h)$ la solution de (2.66). Alors, l'application $\mathcal{F}$ définie par la relation (2.84) est linéaire et continue de H dans $L^2(G)$.*

Démonstration. On considère le sous-espace vectoriel V_0 de V défini par

$$V_0 = \{\varphi \in V \mid L^*\varphi = 0\}.$$

Puisque $\mathcal{F}(h)$ est solution du problème (2.8)-(2.11) et vérifie (2.63), multiplions les deux membres de l'équation (2.10)₁ par $\varphi \in V_0$ puis intégrons les par parties dans Q . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_Q (h + (k_0(h) + \mathcal{F}(h))\chi_\omega)\varphi \, dxdt &= \int_Q (y' - \Delta y + a_0 y) \varphi \, dxdt \\ &= \int_\Omega y(T)\varphi(T) \, dx - \int_\Omega y(0)\varphi(0) \, dx - \int_Q y\varphi' \, dxdt \\ &\quad - \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial \nu} \varphi \, d\Gamma dt - \int_\Sigma y \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, d\Gamma dt - \int_Q y \Delta \varphi \, dxdt \\ &\quad + \int_Q a_0 y \varphi \, dxdt. \end{aligned}$$

Comme $\varphi = 0$ sur Σ et $L^*\varphi = 0$, on a

$$\int_Q h\varphi \, dxdt + \int_Q k_0(h)\varphi \, dxdt + \int_Q \mathcal{F}(h)\chi_\omega\varphi \, dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in V_0 \quad (2.85)$$

ou encore

$$\int_Q h\varphi \, dxdt + \int_Q k_0(h)\varphi \, dxdt - \int_Q (\rho - P\rho)\chi_\omega\varphi \, dxdt = 0, \quad \forall \varphi \in V_0.$$

Par ailleurs, puisque l'application $\varphi \mapsto \int_Q h\varphi \, dxdt + \int_Q k_0(h)\varphi \, dxdt$ est linéaire et continue sur V_0 et que

$$\begin{aligned} - \int_G \mathcal{F}(h)\varphi \, dxdt &= \int_G (\rho(h) - P\rho(h))\varphi \, dxdt \\ &= \int_G (\rho(h) - P\rho(h))(\varphi - P\varphi) \, dxdt \\ &= a(\rho(h), \varphi), \quad \forall \varphi \in V_0, \end{aligned}$$

on déduit de la relation (2.85) que $\rho = \rho(h)$ est solution du problème variationnel

$$a(\rho, \varphi) = \int_Q h\varphi \, dxdt + \int_Q k_0(h)\varphi \, dxdt, \quad \forall \varphi \in V_0. \quad (2.86)$$

Donc l'application $h \mapsto \rho = \rho(h)\chi_\omega$ est linéaire de H dans $L^2(G)$. Et, puisque l'opérateur de projection $I - P$ défini de $L^2(G)$ dans $K^\perp \subset L^2(G)$ est également linéaire, on en déduit que l'application $\mathcal{F}$ est linéaire de H dans $L^2(G)$. Par ailleurs, de la Remarque 2.1, nous déduisons que l'application $\mathcal{F}$ est continue sur H puisque $\|\mathcal{F}(h)\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H$. $\square$

Remarque 2.2. Soit k_0 défini par la relation (2.17). Alors

1. $k_0 \in H$. En effet, puisque $k_0 \in K_\theta$, on a d'une part $k_0 \in L^2(G)$ et d'autre part $\theta k_0 \in K \subset L^2(G)$.
2. D'après la définition de k_0 donnée par la relation (2.17), l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 : H &\rightarrow L^2(G) \\ h &\mapsto \mathcal{F}_1(h) = k_0(h) \end{aligned} \quad (2.87)$$

est linéaire. De plus, l'estimation (2.27) nous donne $\|k_0\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H$. On en déduit donc que cette application est continue sur H .

Dans la suite, nous noterons $k_0(h) = \mathcal{F}_1(h)$.

4.2 Existence et caractérisation du Leader.

On considère la fonctionnelle J définie par

$$J(h) = \frac{1}{2} \|y(h, k(h)) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|h\|_H^2 \quad (2.88)$$

à laquelle on associe le problème de minimisation suivant

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h) \quad (2.89)$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

En utilisant les propriétés des applications $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ données respectivement par le Lemme 2.4 et la Remarque 2.2, on en déduit que J est strictement convexe, continue et coercive. On a donc le résultat classique suivant :

Proposition 2.8. Le Problème (2.89) admet un unique contrôle $\hat{h} \in \mathcal{U}_{ad}$.

En observant que $k(h) = k_0(h) + v(h) = \mathcal{F}_1(h) + \mathcal{F}(h)$, nous notons $\hat{y} = y(\hat{h}, \hat{k} = \hat{k}(\hat{h}))$ l'état associé au contrôle optimal $\hat{h}$. Il s'agit maintenant de caractériser $\hat{h}$.

Par définition, la condition d'Euler-Lagrange nous donne

$$\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Rappelons que $\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) - J(\hat{h})$. On a alors

$$\begin{aligned}
J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) &= \frac{1}{2} \|y(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}), k(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\quad + \frac{N}{2} \|\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})\|_H^2 \\
&= \frac{1}{2} \|\hat{y} - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda \left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{2} \|y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h}))\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|\hat{h}\|_H^2 \\
&\quad + N\lambda(\hat{h}, h - \hat{h})_H + \frac{N\lambda^2}{2} \|h - \hat{h}\|_H^2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) - J(\hat{h}) &= \lambda \left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} \\
&\quad + N\lambda(\hat{h}, h - \hat{h})_H + \frac{\lambda^2}{2} \|y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h}))\|_{L^2(Q)}^2 \\
&\quad + \frac{N\lambda^2}{2} \|h - \hat{h}\|_H^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} = \left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} + \left(N\hat{h}, h - \hat{h} \right)_H.$$

Ainsi, la condition d'Euler-Lagrange nous donne

$$\left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} + \left(N\hat{h}, h - \hat{h} \right)_H \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (2.90)$$

On interprète cette condition en utilisant la notion d'état adjoint. Pour faciliter les calculs, on pose $w = h - \hat{h}$ et on note $z = y(w, k(w))$. Alors z vérifie

$$\left\{ \begin{array}{lll} z' - \Delta z + a_0 z & = & w + k(w)\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ z & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ z(0) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.91)$$

Soit p la solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -p' - \Delta p + a_0 p & = & \hat{y} - z_d \quad \text{dans } Q, \\ p & = & 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ p(T) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.92)$$

Puisque $\hat{y} - z_d \in L^2(Q)$, on sait que $p \in \Xi^{1,2}(Q)$. En multipliant (2.92)₁ par z solution de (2.91) et en intégrant par partie sur Q , on a

$$\begin{aligned}
\int_Q z(\hat{y} - z_d) dxdt &= \int_Q (-p' - \Delta p + a_0 p) z dxdt \\
&= - \int_\Omega p(T)z(T) dx + \int_\Omega p(0)z(0) dx + \int_Q pz' dxdt \\
&\quad - \int_\Sigma z \frac{\partial p}{\partial \nu} d\Gamma dt + \int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial \nu} p d\Gamma dt - \int_Q p \Delta z dxdt \\
&\quad + \int_Q a_0 p z dxdt \\
&= \int_Q p(z' - \Delta z + a_0 z) dxdt \\
&= \int_Q p(w + (\mathcal{F}_1(w) + F(w))\chi_\omega) dxdt.
\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\int_Q pw dxdt + \int_Q \mathcal{F}_1(w)\chi_\omega dxdt + \int_Q p\mathcal{F}(w)\chi_\omega dxdt = \int_Q p(\hat{y} - z_d) dxdt.$$

On va maintenant interpréter cette égalité, en exprimant chacune des intégrales précédentes dans l'espace de Hilbert $H = \{h \in L^2(Q) \mid \theta h \in L^2(Q)\}$ où θ est définie par la relation (1.13). Soient H' le dual de l'espace H et Λ^{-1} l'isomorphisme isométrique de H' dans H . On observe que l'on peut écrire

$$\int_Q pw dxdt = \int_Q \frac{1}{\theta} p \theta w dxdt = \left\langle \frac{1}{\theta} p, w \right\rangle_{H', H},$$

$$\int_G p\mathcal{F}_1(w) dxdt = \langle \mathcal{F}_1^*(p), w \rangle_{H', H}$$

et

$$\int_G p\mathcal{F}(w) dxdt = \langle \mathcal{F}^*(p), w \rangle_{H', H}.$$

On obtient alors :

$$\int_Q pw dxdt = (\Lambda^{-1}(\frac{1}{\theta}p), w)_H,$$

$$\int_G p\mathcal{F}_1(w) dxdt = (\Lambda^{-1}\mathcal{F}_1^*(p), w)_H$$

et

$$\int_G p\mathcal{F}(w) dxdt = (\Lambda^{-1}\mathcal{F}^*(p), w)_H.$$

Ainsi, la condition (2.90) devient

$$\left(\Lambda^{-1} \frac{1}{\theta}(p) + \Lambda^{-1} \mathcal{F}_1^*(p) + \Lambda^{-1} \mathcal{F}^*(p) + N\hat{h}, h - \hat{h} \right)_H \geq 0, \forall h \in \mathcal{U}_{ad}$$

ou encore

$$\left(\Lambda^{-1} \left(\frac{1}{\theta} I + \mathcal{F}_1^* + \mathcal{F}^* \right) (p) + N\hat{h}, h - \hat{h} \right)_H \geq 0, \forall h \in \mathcal{U}_{ad}$$

où I est l'opérateur identité de $L^2(Q)$.

On a donc montré le résultat suivant :

Théorème 2.2. (*Existence, unicité et caractérisation du Leader*).

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière Γ de classe C^2 , θ définie par la relation (1.13) ainsi que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ les applications linéaires et continues définies respectivement par (2.84) et (2.87). Alors, il existe $p \in \Xi^{1,2}(Q)$ tel que le problème de minimisation (2.89) admette une unique solution $\hat{h}$ caractérisée par la condition d'optimalité suivante

$$\left(\Lambda^{-1} \left(\frac{1}{\theta} I + \mathcal{F}_1^* + \mathcal{F}^* \right) (p) + N\hat{h}, h - \hat{h} \right)_H \geq 0, \forall h \in \mathcal{U}_{ad} \quad (2.93)$$

avec p solution de

$$\begin{cases} -p' - \Delta p + a_0 p &= y(\hat{h}, k) - z_d & \text{dans } Q, \\ p &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ p(T) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Chapitre 3

Contrôle optimal d'un problème à deux temps soumis à la contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de Stackelberg associé à un modèle à deux temps, adjoint d'un problème de dynamique de population d'une espèce unique structuré en âge et en espace. Plus précisément, la solution $y = y(t, a, x)$ du système ci-dessous est censée représenter la répartition des individus d'âge $a \geq 0$, au temps $t \geq 0$ et à l'emplacement $x \in \Omega$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) de frontière Γ de classe C^2 . Soit A l'espérance de vie d'un individu et T une constante positive. On pose $U = (0, T) \times (0, A)$, $Q = U \times \Omega$, $\Sigma = U \times \Gamma$, $Q_A = (0, A) \times \Omega$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ et $G = U \times \omega$ où ω est un ouvert non vide de Ω . L'évolution de la répartition y est gouvernée par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) & = & h + k\chi_\omega & \text{dans } Q, \\ +\mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(t, a, x) & = & 0 & \text{dans } Q_A, \\ y(T, a, x) & = & 0 & \text{dans } Q_T, \\ y(t, A, x) & = & 0 & \text{dans } Q_T \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où h et $k\chi_\omega$ sont des fonctions contrôles dans $L^2(Q)$ et χ_ω est la fonction caractéristique de l'ouvert ω . Les fonctions $\beta = \beta(t, a, x)$ et $\mu = \mu(t, a, x)$ représentent respectivement le taux naturel de natalité et le taux naturel de mortalité des individus d'âge a .

On fait les hypothèses suivantes :

$$\mu(t, a, x) = \mu_0(a) + \mu_1(t, a, x) \text{ dans } U \times \Omega \quad (3.2a)$$

$$\mu \geq 0 \text{ dans } U \times \Omega \quad (3.2b)$$

$$\mu_1 \in L^\infty(U \times \Omega), \mu_1(t, a, x) \geq 0 \text{ dans } U \times \Omega \quad (3.2c)$$

$$\mu_0 \in L^1_{loc}(0, A), \lim_{a \rightarrow A} \int_0^a \mu_0(s) ds = +\infty \quad (3.2d)$$

$$\beta \in C^2([0, T] \times [0, A] \times \overline{\Omega}), \quad (3.3a)$$

$$\beta(t, a, x) \geq 0 \text{ dans } [0, T] \times [0, A] \times \overline{\Omega} \quad (3.3b)$$

$$\exists 0 < a_0 < a_1 < A \text{ tel que } \beta(t, a, x) = 0 \text{ dans } [0, T] \times ((0, a_0) \cup (a_1, A) \times \Omega) \quad (3.3c)$$

Remarque 3.1. Puisque μ et β sont des taux naturels, les hypothèses (3.2b) et (3.3b) sont naturelles. L'hypothèse (3.3c) est aussi naturelle car elle signifie que les individus les plus jeunes et les plus vieux ne sont pas fertiles. L'hypothèse (3.2d) signifie que tout individu meurt avant l'âge A .

Soient θ une fonction positive de classe C^2 sur Q , d'inverse $\frac{1}{\theta}$ bornée sur Q et H l'espace de Hilbert défini par

$$H = \{h | h \in L^2(Q), \theta h \in L^2(Q)\} \quad (3.4)$$

muni du produit scalaire et de la norme

$$(h, l)_\theta = \int_Q \theta^2 h l \, dx \, da \, dt, \quad \|h\|_H = \|\theta h\|_{L^2(Q)}$$

Comme dans le chapitre précédent, nous voulons déterminer le couple (h, k) afin d'atteindre un double objectif. En d'autres termes, on s'intéresse aux problèmes suivants :

Problème 3.1. Soient $\{e_i, 1 \leq i \leq M\}$ un ensemble de fonctions de $L^2(Q)$ tel que les fonctions

$$e_i \chi_\omega \text{ soient linéairement indépendantes} \quad (3.5)$$

et $h \in H$. Trouver un contrôle $k \in L^2(G)$ tel que si y est solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = h + k\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T \end{array} \right. \quad (3.6)$$

alors

$$\int_Q y e_i dx da dt = 0, \quad 1 \leq i \leq M \quad (3.7)$$

et

$$y(0, a, x) = 0 \quad \text{dans } Q_A. \quad (3.8)$$

Problème 3.2. Soient $\mathcal{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $z_d \in L^2(Q)$. Trouver $\hat{h} \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que

$$J(\hat{h}) = \inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h) \quad (3.9)$$

où $J(h) = \frac{1}{2} \|y(h, k) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|h\|_H^2$.

Remarque 3.2. Le problème 3.1 est un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état d'un problème à deux temps.

Dans la suite, nous supposons que $\|\beta\|_{L^\infty(Q)} \geq \sqrt{\frac{3}{2C}}$ où $C = C(\Omega)$ est la constante de Poincaré.

1 Équivalence entre le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état et un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Les résultats suivants nous permettent de montrer l'existence d'une équivalence entre le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état et un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Lemme 3.1. Soient θ définie comme précédemment et $e_i, 1 \leq i \leq M \in L^2(Q)$ telles que l'hypothèse (3.5) soit satisfaite. Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial a} - \Delta q_i + \mu q_i &= e_i \quad \text{dans } Q, \\ q_i(t, a, x) &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ q_i(0, a, x) &= 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ q_i(t, 0, x) &= \int_0^A \beta(t, a, x) q_i(t, a, x) da \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Alors, les fonctions $q_i \chi_\omega, 1 \leq i \leq M$, sont linéairement indépendantes. De même, les fonctions $\frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega, 1 \leq i \leq M$, sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Montrons, dans un premier temps, que les fonctions $q_i \chi_\omega (1 \leq i \leq M)$ sont linéairement indépendantes.

Soit $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq M$, tel que $\tilde{u} = \sum_{i=1}^M \gamma_i q_i \chi_\omega = 0$. Comme q_i est solution du système (3.10), on a pour tout ouvert ω' de ω :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a} - \Delta \tilde{u} + \mu \tilde{u} = \sum_{i=1}^M \gamma_i e_i, \quad \text{dans } U \times \omega'.$$

On en déduit alors que $\sum_{i=1}^M \gamma_i e_i = 0$ dans G . Les fonctions $e_i \chi_\omega$, $i \in \{1, \dots, M\}$ étant linéairement indépendantes, on conclut que $\gamma_i = 0$, $1 \leq i \leq M$. D'où, les fonctions $q_i \chi_\omega$ sont linéairement indépendantes.

Montrons maintenant que les fonctions $\frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega$ ($1 \leq i \leq M$) sont également linéairement indépendantes.

Soit $\delta_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq M$, tel que $\tilde{u}' = \sum_{i=1}^M \delta_i \frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega = 0$. On a $\theta \tilde{u}' = \sum_{i=1}^M \delta_i q_i \chi_\omega$. Comme q_i est solution du système (3.10) et $\tilde{u}'|_G = 0$, on a, pour tout ouvert ω' de ω ,

$$\frac{\partial(\theta \tilde{u}')}{\partial t} + \frac{\partial(\theta \tilde{u}')}{\partial a} - \Delta(\theta \tilde{u}') + \mu(\theta \tilde{u}') = \sum_{i=1}^M \delta_i e_i, \quad \text{dans } U \times \omega'.$$

On en déduit alors que $\sum_{i=1}^M \delta_i e_i = 0$ dans G . Les fonctions $e_i \chi_\omega$, $i \in \{1, \dots, M\}$ étant linéairement indépendantes, on conclut que $\delta_i = 0$, $1 \leq i \leq M$. D'où, les fonctions $\frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega$ sont linéairement indépendantes. □

Lemme 3.2. Soient θ définie comme précédemment, e_i $1 \leq i \leq M \in L^2(Q)$ telle que l'hypothèse (3.5) soit satisfaite et q_i définie par (3.10). Posons $A_\theta = \left(\int_G \frac{1}{\theta} q_i q_j dx da dt \right)_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq M$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(A_\theta X, X)_{\mathbb{R}^M} \geq \delta \|X\|_{\mathbb{R}^M}^2$$

où

$$(A_\theta X, X)_{\mathbb{R}^M} = \int_G \frac{1}{\theta} \left(\sum_{i=1}^M X_i q_i \right) \left(\sum_{j=1}^M X_j q_j \right) dx da dt$$

et

$$X = (X_1, \dots, X_M) \in \mathbb{R}^M.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists X^n = (X_1^n, \dots, X_M^n) \in \mathbb{R}^M$ tel que

$$(A_\theta X^n, X^n)_{\mathbb{R}^M} \leq \frac{1}{n} \|X^n\|_{\mathbb{R}^M}.$$

On pose $\tilde{X}^n = \frac{X^n}{\|X^n\|_{\mathbb{R}^M}}$. Alors

$$\begin{aligned} \|\tilde{X}^n\|_{\mathbb{R}^M} &= \sqrt{\sum_{i=1}^M |\tilde{X}_i^n|^2} = 1, \\ (A_\theta \tilde{X}^n, \tilde{X}^n)_{\mathbb{R}^M} &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On peut donc extraire une sous-suite de $(\tilde{X}_i^n)$, $1 \leq i \leq M$, encore notée $(\tilde{X}_i^n)$, $1 \leq i \leq M$, telle que

$$\tilde{X}_i^n \rightarrow \tilde{X}_i \text{ dans } \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (3.11)$$

De plus, $\sum_{i=1}^M |\tilde{X}_i^n|^2 = 1$. Soit $\tilde{u}^n = \sum_{i=1}^M \tilde{X}_i^n q_i$. Alors, d'après la relation (3.11), on a

$$\tilde{u}^n \rightarrow \tilde{u} = \sum_{i=1}^M \tilde{X}_i q_i \text{ fortement dans } L^2(Q).$$

Et, puisque

$$\int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{u}^n|^2 dx dadt = (A_\theta \tilde{X}^n, \tilde{X}^n)_{\mathbb{R}^M} \leq \frac{1}{n},$$

on obtient que

$$\int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{u}|^2 dx dadt \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{u}^n|^2 dx dadt = 0.$$

Par conséquent, $\int_G \frac{1}{\theta} |\tilde{u}|^2 dx dadt = 0$ ce qui implique que $\tilde{u} = 0$ dans G . Comme $\tilde{u} = \sum_{i=1}^M \tilde{X}_i q_i$ et que les fonctions $q_i \chi_\omega$ sont linéairement indépendantes, on en déduit que $\tilde{X}_i = 0$, $1 \leq i \leq M$. Ce qui contredit le fait que $\sum_{i=1}^M |\tilde{X}_i|^2 = 1$.

□

Montrons maintenant l'équivalence entre le problème (3.6)-(3.8) et un problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Proposition 3.1. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ de classe C^2 et θ une fonction positive et d'inverse bornée dans Q . Alors, il existe deux sous-espaces de dimension finie K et K_θ tels que pour tout $h \in H$, il existe $k_0 = k_0(h) \in K_\theta$ de telle sorte que le problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état (3.6), (3.7), (3.8) soit équivalent au problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle suivant : Étant donné $k_0 \in K_\theta$, trouver $v \in L^2(G)$ tel que

$$v \in K^\perp, \quad (3.12)$$

$$k = k_0 + v \quad (3.13)$$

et telle que la solution y de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = h + (k_0 + v)\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T \end{array} \right. \quad (3.14)$$

vérifie

$$y(0, a, x) = 0 \quad \text{dans } Q_A. \quad (3.15)$$

Démonstration. On interprète la contrainte (3.7) en utilisant l'état adjoint. Plus précisément, pour tout e_i , $1 \leq i \leq M$, on considère le système adjoint défini par (3.10). Comme $e_i \in L^2(Q)$, le problème (3.10) admet une unique solution $q_i \in L^2(U; H_0^1(\Omega))$. (voir Annexe 2).

On multiplie chaque membre de l'équation (3.6) par q_i solution de (3.10) et on intègre sur Q . On a alors :

$$\int_Q q_i \left(-\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial a} dx da dt - \Delta y + \mu y - \beta y(t, 0, x) \right) dx da dt = \int_Q (h + k\chi_\omega) q_i dx da dt.$$

Comme $y(T, a, x) = y(t, A, x) = 0 = q_i(0, a, x)$ et que $q_i(t, 0, x) = \int_0^A \beta(t, a, x) q_i(t, a, x) da$, en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_Q y \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial a} - \Delta q_i + \mu q_i \right) dx da dt = \int_Q (h + k\chi_\omega) q_i dx da dt.$$

Comme $\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial a} - \Delta q_i + \mu q_i = e_i$, l'égalité précédente devient :

$$\int_Q y e_i dx da dt = \int_Q (h + k\chi_\omega) q_i dx da dt$$

ce qui, d'après la relation (3.7), donne

$$0 = \int_Q (h + k\chi_\omega) q_i \, dx \, d\omega \, dt.$$

Ainsi, on a

$$\int_G k q_i \, dx \, d\omega \, dt = - \int_Q h q_i \, dx \, d\omega \, dt. \quad (3.16)$$

Soit

$$K = \text{Vect}\{q_i \chi_\omega, \, 1 \leq i \leq M\} \quad (3.17)$$

le sous-espace vectoriel de $L^2(G)$ engendré par les M fonctions $q_i \chi_\omega$, $1 \leq i \leq M$, et $K^\perp$ son orthogonal dans $L^2(G)$. Notons

$$K_\theta = \frac{1}{\theta} K \quad (3.18)$$

le sous-espace de $L^2(G)$ engendré par les M fonctions $\frac{1}{\theta} q_i \chi_\omega$, $1 \leq i \leq M$.

D'après le Lemme 3.2, la matrice $\left(\int_0^T \int_0^A \int_\omega \frac{1}{\theta} q_i q_j \, dx \, d\omega \, dt \right)_{1 \leq i, j \leq M}$ est symétrique, définie positive. Donc il existe un unique $k_0 = k_0(h) \in K_\theta$ telle que

$$\int_G k_0 q_i \, dx \, d\omega \, dt = - \int_Q h q_i \, dx \, d\omega \, dt, \, 1 \leq i \leq M. \quad (3.19)$$

En combinant les relations (3.16) et (3.19), on déduit que

$$\int_G (k - k_0) q_i \, dx \, d\omega \, dt = 0, \, 1 \leq i \leq M.$$

Par conséquent,

$$k - k_0 \in K^\perp.$$

Ainsi, on obtient $k = k_0 + v$ avec $v \in K^\perp$. En remplaçant $k\chi_\omega$ par $(k_0 + v)\chi_\omega$ dans le système (3.6), on obtient le système (3.14).

Réciproquement, on fixe $h \in L^2(Q)$ et, pour tout $e_i \in L^2(Q)$, $1 \leq i \leq M$, on suppose que (v, y) est solution de

$$v \in K^\perp, \quad (3.20)$$

$$k = k_0 + v, \quad (3.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = h + (k_0 + v)\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T \end{array} \right. \quad (3.22)$$

et

$$y(0, a, x) = 0 \text{ dans } Q_A. \quad (3.23)$$

Alors, en résolvant le système (3.10), on obtient les fonctions q_i , $1 \leq i \leq M$. Soient K et K_θ définis respectivement par (3.17) et (3.18), $K^\perp$ l'orthogonal de K dans $L^2(G)$, $v \in K^\perp$ et k_0 vérifiant la relation (3.19).

En multipliant l'équation (3.22)₁ par q_i solution de (3.10), on a :

$$\begin{aligned} \int_Q q_i \left(-\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial a} - \Delta y + \mu y - \beta y(t, 0, x) \right) dx da dt &= \int_Q h q_i dx da dt \\ &+ \int_Q (k_0 + v) \chi_\omega q_i dx da dt. \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière égalité par partie sur Q , on obtient :

$$\int_Q y \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial a} - \Delta q_i + \mu q_i \right) dx da dt = \int_Q h q_i dx da dt + \int_Q (k_0 + v) \chi_\omega q_i dx da dt.$$

Comme q_i est solution du système (3.10) l'égalité précédente devient

$$- \int_Q h q_i dx da dt + \int_Q y e_i dx da dt = \int_Q (k_0 + v) \chi_\omega q_i dx da dt. \quad (3.24)$$

En observant que $v \in K^\perp$ et que k_0 vérifie la relation (3.19), la relation (3.24) devient

$$\int_Q y e_i dx da dt = 0.$$

Donc (k, y) est bien solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état (3.6)-(3.8). □

Remarque 3.3. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par

$$\mathcal{E} = \{ \tilde{v} \in K^\perp \mid (\tilde{v}, \tilde{y}) \text{ vérifie (3.12) - (3.15)} \}. \quad (3.25)$$

$\mathcal{E}$ est un ensemble convexe fermé non vide de $L^2(G)$. Par conséquent, on sait qu'il existe un unique contrôle $v \in \mathcal{E}$ de norme minimale dans $L^2(G)$. En d'autres termes, on a

$$\|v\|_{L^2(G)}^2 = \inf_{\tilde{v} \in \mathcal{E}} \|\tilde{v}\|_{L^2(G)}^2$$

On note $y = y(v)$ l'état du système associé au contrôle v .

1.1 Propriétés de $k_0(h)$.

Proposition 3.2. *Soit θ définie par la relation (3.39) et $h \in H$. Soit également q_i et $k_0(h)$ définis respectivement par (3.10) et (3.19). Alors, l'application $h \mapsto k_0(h)$ est linéaire. De plus, il existe $C = C\left(\Omega, \|\beta\|_{L^\infty(Q)}, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2\right) > 0$ tel que*

$$\|\theta k_0(h)\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H, \quad (3.26)$$

$$\|k_0(h)\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H. \quad (3.27)$$

Démonstration. D'après la relation (3.19), on a

$$\int_G k_0(h) q_i \, dx \, dadt = - \int_Q h q_i \, dx \, dadt, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (3.28)$$

Donc l'application $h \mapsto k_0(h)$ est clairement linéaire.

Par ailleurs, puisque $k_0(h) \in Vect\{\frac{1}{\theta} q_1 \chi_\omega, \dots, \frac{1}{\theta} q_M \chi_\omega\}$, il existe

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{R}^M$$

tel que

$$k_0(h) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \chi_\omega. \quad (3.29)$$

En remplaçant $k_0(h)$ par $\sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \chi_\omega$ dans l'égalité (3.28), on obtient :

$$\int_G \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j q_i \, dx \, dadt = - \int_Q h q_i \, dx \, dadt, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Par conséquent,

$$\int_G \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \sum_{i=1}^M \alpha_i q_i \, dx \, dadt = - \int_Q \theta h \sum_{i=1}^M \alpha_i \frac{1}{\theta} q_i \, dx \, dadt, \quad (3.30)$$

ce qui, d'après Cauchy-Schwartz, donne

$$\int_G \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \sum_{i=1}^M \alpha_i q_i \, dx \, dadt \leq \|h\|_H \sum_{i=1}^M |\alpha_i| \|q_i\|_{L^2(Q)}.$$

Dès lors, en observant que $\int_G \sum_{j=1}^M \alpha_j \frac{1}{\theta} q_j \sum_{i=1}^M \alpha_i q_i dx dadt = (A_\theta \alpha, \alpha)$, le Lemme 3.2 nous permet de conclure qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\delta \|\alpha\|_{\mathbb{R}^N}^2 \leq \|h\|_H \sum_{i=1}^M |\alpha_i| \|q_i\|_{L^2(Q)}. \quad (3.31)$$

Or, q_i étant solution de (3.10), on sait, d'après l'annexe 2 qu'il existe une constante positive λ telle que

$$\|q_i\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))} \leq \sqrt{2\lambda} \|e_i\|_{L^2(Q)}.$$

Puisque l'injection de $L^2(U; H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(Q)$ est continue, on sait qu'il existe une constante positive $C = C(\Omega)$ telle que

$$\|q_i\|_{L^2(Q)} \leq C \|q_i\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}.$$

Dès lors, les deux inégalités précédentes nous donnent

$$\|q_i\|_{L^2(Q)} \leq C \|e_i\|_{L^2(Q)}, \quad (3.32)$$

où C est une constante générique dépendant de Ω et $\|\beta\|_{L^\infty(Q)}$. En combinant (3.32) et (3.31), on obtient :

$$\|\alpha\|_{\mathbb{R}^M}^2 \leq \delta^{-1} C \|h\|_H \|\alpha\|_{\mathbb{R}^M} \sqrt{\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2}$$

puisque $\delta > 0$. Ce qui équivaut à

$$\|\alpha\|_{\mathbb{R}^M} \leq \delta^{-1} C \|h\|_H \sqrt{\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2}. \quad (3.33)$$

Maintenant, en utilisant (3.29), (3.31) et (3.33), on obtient, d'une part,

$$\begin{aligned} \|\theta k_0(h)\|_{L^2(G)} &\leq \sum_{j=1}^M |\alpha_j| \|q_j\|_{L^2(G)}, \\ &\leq C \sum_{j=1}^M |\alpha_j| \|e_j\|_{L^2(Q)}, \\ &\leq C \|\alpha\|_{\mathbb{R}^M} \left(\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \delta^{-1} C^2 \|h\|_H \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2 \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\|k_0(h)\|_{L^2(G)} \leq C \|\alpha\|_{\mathbb{R}^M} \left(\sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \delta^{-1} C^2 \|h\|_H \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2.$$

puisque $\frac{1}{\theta}$ est borné dans $L^\infty(Q)$. Finalement, en posant

$$C = C \left(\Omega, \|\beta\|_{L^\infty(Q)}, \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2 \right) = \delta^{-1} C^2 \sum_{i=1}^M \|e_i\|_{L^2(Q)}^2,$$

on obtient les relations (3.26) et (3.27). $\square$

2 Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

2.1 Inégalités de Carleman.

On considère une fonction auxiliaire $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ qui satisfait les conditions suivantes :

$$\psi(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (3.34a)$$

$$\psi(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma \quad (3.34b)$$

$$|\nabla \psi(x)| \neq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} - \omega_0 \quad (3.34c)$$

où ω_0 est un ouvert de ω tel que $\overline{\omega_0} \subset \omega$. Une telle fonction existe selon A. Fursikov et O. Yu. Imanuvilov[13]. On définit alors pour tout $\lambda > 0$, les fonctions φ et η définies par

$$\varphi(x, t) = \frac{e^{\lambda \psi(x)}}{a(A - a)t(T - t)} \quad (3.35)$$

$$\eta(x, t) = \frac{e^{2\lambda|\psi(x)|_\infty} - e^{\lambda \psi(x)}}{a(A - a)t(T - t)} \quad (3.36)$$

pour $(x, a, t) \in Q$ et on adopte les notations suivantes :

$$\begin{cases} L\rho(t, a, x) &= \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, a, x) + \frac{\partial \rho}{\partial a}(t, a, x) - \Delta \rho(t, a, x) + \mu \rho(t, a, x) \\ L^* \rho(t, a, x) &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial \rho}{\partial a}(t, a, x) - \Delta \rho(t, a, x) + \mu \rho(t, a, x) - \beta(t, a, x) \rho(t, 0, x) \end{cases}$$

et

$$\mathcal{V} = \left\{ \rho \in C^\infty(\overline{Q}) \mid \rho = 0 \text{ sur } \Sigma \text{ et } \rho(t, 0, x) = \int_0^A \beta(t, a, x) \rho(t, a, x) da \text{ dans } Q_T \right\} \quad (3.37)$$

Nous avons alors l'inégalité de Carleman suivante (voir[39]) :

Proposition 3.3. *Soit ψ , φ et η définies respectivement par (3.34), (3.35) et (3.36). Alors, il existe $\lambda_0 > 1$ et $C(\Psi) > 0$ tels que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, pour tout*

$$s \geq s_0(\lambda) = C(\Psi) \frac{TA}{4} e^{2\lambda\|\Psi\|} s^2 \left(\frac{T^2 A^2}{4} + T^2 A^3 + T^3 A^2 + T + A \right)$$

et pour tout $\rho \in \mathcal{V}$, on ait :

$$\begin{aligned} & s\lambda^2 \int_Q \varphi e^{-2s\eta} |\nabla \rho|^2 dx dadt + s^3 \lambda^4 \int_Q \varphi^3 e^{-2s\eta} |\rho|^2 dx dadt \\ & \leq C \left(\int_Q e^{-2s\eta} |L\rho|^2 dx dadt + \int_G s^3 \lambda^4 \varphi^3 e^{-2s\eta} |\rho|^2 dx dadt \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Puisque φ ne s'annule pas sur Q , on pose

$$\theta = \frac{e^{s\eta}}{\varphi \sqrt{\varphi}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\theta} = \varphi \sqrt{\varphi} e^{-s\eta}. \quad (3.39)$$

D'après les définitions de φ et η données respectivement par les relations (3.35) et (3.36), on a $\theta \in C^2(Q)$ et $\frac{1}{\theta}$ est bornée. Donc, en remarquant que $\varphi^3 e^{-2s\eta} = \frac{1}{\theta^2}$ dans (3.38), on obtient l'inégalité suivante :

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dx dadt \leq C \left(\int_Q \frac{1}{\theta^2 \varphi^3 s^3 \lambda^4} |L\rho|^2 dx dadt + \int_G \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dx dadt \right). \quad (3.40)$$

Ainsi, puisque les fonctions $\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\varphi}$ sont bornées, pour tout $s \geq s_0$ et $\lambda \geq \lambda_0$, de (3.40), on déduit l'inégalité d'observabilité suivante, pour tout $\rho \in \mathcal{V}$,

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dx dadt \leq C \left(\int_Q |L\rho|^2 dx dadt + \int_G |\rho|^2 dx dadt \right). \quad (3.41)$$

Pour résoudre le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle, nous avons besoin d'une inégalité adaptée à la contrainte $v \in K^\perp$. Le résultat suivant nous permettra de l'obtenir.

Lemme 3.3. *On suppose l'hypothèse (3.5) vérifiée. Soit q_i solution de (3.10) et K le sous espace vectoriel défini par (3.17). Alors, toute fonction ρ vérifiant*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} - \Delta \rho + \mu \rho = 0 \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \times (0, A) \quad \text{et } \rho|_G \in K$$

est identiquement nulle dans $\omega \times (0, T) \times (0, A)$.

Démonstration. Soit ρ tel que $\rho|_G \in K$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} - \Delta \rho + \mu \rho = 0$ dans $\omega \times (0, T) \times (0, A)$. Alors, il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq M$, tel que

$$\rho = \sum_{i=1}^M \alpha_i q_i \chi_\omega. \quad (3.42)$$

Donc, pour tout ouvert ω' de ω , on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} - \Delta \rho + \mu \rho = \sum_{i=1}^M \alpha_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial a} - \Delta q_i + \mu q_i \right)$$

dans $\omega' \times (0, T) \times (0, A)$ ce qui, d'après le système (3.10), nous donne

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} - \Delta \rho + \mu \rho = \sum_{i=1}^M \alpha_i e_i \text{ dans } \omega' \times (0, T) \times (0, A).$$

Comme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} - \Delta \rho + \mu \rho = 0$$

dans $\omega \times (0, T) \times (0, A)$, on a

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i e_i = 0 \text{ dans } \omega' \times (0, T) \times (0, A).$$

Les fonctions $e_i \chi_\omega$ étant linéairement indépendantes pour $1 \leq i \leq M$, on obtient $\alpha_i = 0$. Ce qui, d'après (3.42) implique que $\rho = 0$ dans $\omega \times (0, T) \times (0, A)$. □

Soit encore K le sous espace vectoriel de $L^2(G)$ défini par (3.17). Notons

- P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ sur K ,
- $P\rho$ la projection orthogonale de $\rho \chi_\omega$ sur K pour $\rho \in L^2(Q)$.

On a alors l'inégalité de Carleman adaptée suivante.

Proposition 3.4. *On suppose la relation (3.5) vérifiée. Soit θ définie par la relation (3.39). Alors, il existe $\lambda_0 > 1$, $s_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tous $\lambda > \lambda_0$ et $s > s_0$ et pour tout $\rho \in \mathcal{V}$:*

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dx da dt \leq C \left(\int_Q |L\rho|^2 dx da dt + \int_G |\rho - P\rho|^2 dx da dt \right). \quad (3.43)$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose que l'inégalité (3.43) n'est pas vérifiée. Alors, $\forall j \in \mathbb{N}^*, \exists \rho_j \in \mathcal{V}$ tel que

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho_j|^2 dx dadt = 1, \quad (3.44a)$$

$$\int_Q |L\rho_j|^2 dx dadt \leq \frac{1}{j}, \quad (3.44b)$$

$$\int_G |(\rho_j - P\rho_j)\chi_\omega|^2 dx dadt \leq \frac{1}{j}. \quad (3.44c)$$

Le reste de cette démonstration consiste à extraire une sous-suite $(\rho_{j_k})_k$ telle que la contradiction suivante soit vérifiée

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho_{j_k}|^2 dx dadt \rightarrow 0.$$

D'après l'hypothèse (3.44a), il existe $\rho \in L^2\left(\frac{1}{\theta}Q\right)$ tel que

$$\rho_j \rightarrow \rho \text{ fortement dans } L^2\left(\frac{1}{\theta}Q\right).$$

Par conséquent,

$$\rho_j \rightarrow \rho \text{ fortement dans } \mathcal{D}'Q. \quad (3.45)$$

Étape 1 : On montre d'abord que pour tout $j \in \{1, \dots, M\}$, la suite $(\|P\rho_j\|_{L^2(G)}^2)_j$ est bornée.

On a

$$\begin{aligned} \left(\int_G \frac{1}{\theta^2} |P\rho_j \chi_\omega|^2 dx dadt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_G \frac{1}{\theta^2} |\rho_j \chi_\omega|^2 dx dadt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_G \frac{1}{\theta^2} |(\rho_j - P\rho_j)\chi_\omega|^2 dx dadt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Puisque $\frac{1}{\theta^2}$ est bornée, en utilisant l'hypothèse (3.44), on déduit qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \int_G \frac{1}{\theta^2} |P\rho_j \chi_\omega|^2 dx dadt \leq \varepsilon. \quad (3.47)$$

Comme K est de dimension finie, les normes sont équivalentes. En particulier, les applications

$$k \mapsto \int_G |k|^2 dx dadt \text{ et } k \mapsto \int_G \frac{1}{\theta^2} |k|^2 dx dadt$$

sont de normes équivalentes sur K . Il existe alors un réel ε' tel que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \int_G |P\rho_j \chi_\omega|^2 dx dadt \leq \varepsilon'. \quad (3.48)$$

Étape 2 : On a $\rho_j = \rho_j - P\rho_j + P\rho_j$. Donc

$$\|\rho_j\|_{L^2(G)} \leq \|\rho_j - P\rho_j\|_{L^2(G)} + \|P\rho_j\|_{L^2(G)}.$$

Dès lors, les relations (3.48) et (3.44c) nous permettent de dire que la suite $(\rho_j\chi_\omega)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $L^2(G)$. On peut donc extraire une sous-suite de $(\rho_j\chi_\omega)$, encore notée $(\rho_j\chi_\omega)_{j \in \mathbb{N}^*}$, telle que

$$\rho_j\chi_\omega \rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } L^2(G). \quad (3.49)$$

Comme K est de dimension finie, on sait que P est un opérateur compact. Ainsi, de la relation (3.49), on a l'existence d'une sous-suite encore notée $(\rho_j\chi_\omega)_{j \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$P\rho_j\chi_\omega \rightarrow P\rho \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (3.50)$$

Par ailleurs, d'après l'hypothèse (3.44c), on a

$$\rho_j\chi_\omega - P\rho_j\chi_\omega \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (3.51)$$

Ainsi, en combinant les relations (3.51) et (3.50), on a

$$\rho_j\chi_\omega \rightarrow P\rho \text{ fortement dans } L^2(G). \quad (3.52)$$

Dès lors, en utilisant l'unicité de la limite, les relations (3.49) et (3.52) nous donnent

$$P\rho\chi_\omega = \rho\chi_\omega. \quad (3.53)$$

Ce qui veut dire que $\rho \in K$.

Étape 3 : Montrons que $\rho = 0$ dans G .

En utilisant (3.45), on a

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho_j}{\partial a} - \Delta \rho_j + \mu \rho_j = L\rho_j \rightharpoonup L\rho \text{ faiblement dans } \mathcal{D}'(Q),$$

Comme d'après la relation (3.44b) on a

$$L\rho_j \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(Q), \quad (3.54)$$

l'unicité de la limite nous permet de dire que $L\rho = 0$ dans Q et donc dans G . En résumé, nous avons montré que

$$\begin{cases} L\rho = 0 \text{ dans } G, \\ \rho \in K. \end{cases}$$

Par conséquent, le lemme 3.3 nous permet de conclure que $\rho = 0$ dans G .

Dès lors, puisque l'égalité (3.53) est vérifiée, la relation (3.52) devient

$$\rho_j \chi_\omega \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(G). \quad (3.55)$$

Étape 4 : Comme $\rho_j \in \mathcal{V}$, en appliquant l'inégalité d'observabilité (3.41), on obtient

$$\forall j \in \mathbb{N}, \int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho_j|^2 dx dadt \leq C \left(\int_Q |L\rho_j|^2 dx dadt + \int_G |\rho_j|^2 dx dadt \right). \quad (3.56)$$

En utilisant les relations (3.54) et (3.55) quand on passe à la limite dans (3.56), on a

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho_j|^2 dx dadt = 0.$$

Ce qui est contraire à (3.44a). Ceci achève la démonstration de la proposition 3.4. $\square$

On définit, comme aux chapitres précédents, l'espace H par

$$H = \{h \in L^2(Q) \mid \theta h \in L^2(Q)\}. \quad (3.57)$$

Muni de la norme

$$\|h\|_H = \left(\int_Q |\theta h|^2 dx dadt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.58)$$

H est un espace de Hilbert.

2.2 Caractérisation de la solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle.

Dans cette section nous caractérisons la solution optimale. Nous utilisons, pour cela, une méthode de pénalisation introduite par J-L. Lions.

Soit

$$\mathcal{A} = \begin{cases} u \in K^\perp, \\ -\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial a} - \Delta z + \mu z - \beta z(t, 0, x) = h + (k_0 + u)\chi_\omega, \\ z = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ z(T, a, x) = 0, \\ z(t, A, x) = 0. \end{cases} \quad (3.59)$$

On définit, pour tout couple $(u, z) \in \mathcal{A}$, la fonctionnelle I_ε par

$$I_\varepsilon(u, z) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|z(0, a, x)\|_{L^2(Q_A)}^2 \quad (3.60)$$

et on considère le problème de minimisation suivant

$$\inf_{(u, z) \in \mathcal{A}} \{I_\varepsilon(u, z)\}. \quad (3.61)$$

Comme $I_\varepsilon(u, z) \geq 0$, on peut définir $d_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$d_\varepsilon = \inf\{I_\varepsilon(u, z), (u, z) \in \mathcal{A}\}.$$

Soit (v_n, y_n) une suite minimisante telle que $(v_n, y_n) \in \mathcal{A}$ et

$$d_\varepsilon \leq I_\varepsilon(v_n, y_n) < d_\varepsilon + \frac{1}{n} < d_\varepsilon + 1.$$

De la structure de I_ε , on a

$$\|v_n\|_{L^2(G)} \leq C, \quad (3.62)$$

$$\|y_n(0, a, x)\|_{L^2(Q_A)} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \quad (3.63)$$

où C est une constante positive indépendante de ε . Comme $(v_n, y_n) \in \mathcal{A}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y_n}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y_n}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y_n(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y_n(t, a, x) - \beta(t, a, x)y_n(t, 0, x) & = h + k_0\chi_\omega + v_n\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y_n(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y_n(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y_n(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T, \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Dès lors, en utilisant (3.62), (3.27) et les propriétés de l'équation de la dynamique de population, on sait qu'il existe une constante positive C telle que

$$\|y_n(\cdot, 0, \cdot)\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|y_n\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))} \leq C.$$

Il s'en suit alors que

$$\|y_n\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))} \leq C \quad (3.65)$$

$$\|y_n(\cdot, 0, \cdot)\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C \quad (3.66)$$

Des relations (3.62), (3.63) (3.65) et (3.66), on déduit que l'on peut extraire de $(v_n, y_n)_n$, de $(y_n(0, a, x))_n$ et de $(y_n(t, 0, x))_n$ des sous-suites encore notées $(v_n, y_n)_n$, $(y_n(0, a, x))_n$ et $(y_n(t, 0, x))_n$ telles que

$$v_n \rightharpoonup v_\varepsilon \text{ dans } L^2(G), \quad (3.67)$$

$$y_n \rightharpoonup y_\varepsilon \text{ dans } L^2(U; H_0^1(\Omega)), \quad (3.68)$$

$$y_n(0, a, x) \rightharpoonup \alpha \text{ dans } L^2(Q_A) \quad (3.69)$$

$$y_n(t, 0, x) \rightharpoonup \gamma \text{ dans } L^2(Q_T). \quad (3.70)$$

Comme $K^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(G)$ et que $v_n \in K^\perp$, on a $v_\varepsilon \in K^\perp$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$. Multiplions l'égalité (3.64)₁ par φ et intégrons la sur Q . On a alors

$$\int_Q \left(-\frac{\partial y_n}{\partial t} - \frac{\partial y_n}{\partial a} - \Delta y_n + \mu y_n - \beta y_n(t, 0, x) \right) \varphi \, dx \, da \, dt = \int_Q (h + k_0 \chi_\omega + v_n \chi_\omega) \varphi \, dx \, da \, dt.$$

En utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_Q y_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \Delta \varphi + \mu \varphi \right) \, dx \, da \, dt - \int_Q \beta y_n(t, 0, x) \varphi \, dx \, da \, dt \\ &= \int_Q (h + k_0 \chi_\omega + v_n \chi_\omega) \varphi \, dx \, da \, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q). \end{aligned} \quad (3.71)$$

En utilisant (3.67), (3.68) et (3.70) quand on passe à la limite dans l'égalité (3.71), cette dernière devient

$$\begin{aligned} & \int_Q y_\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \Delta \varphi + \mu \varphi \right) \, dx \, da \, dt - \int_Q \beta \gamma \varphi \, dx \, da \, dt = \int_Q (h + k_0 \chi_\omega + v_\varepsilon \chi_\omega) \varphi \, dx \, da \, dt, \\ & \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q). \end{aligned}$$

En intégrant l'égalité précédente par parties, on a

$$\int_Q \varphi \left(-\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a} - \Delta y_\varepsilon + \mu y_\varepsilon - \beta \gamma \right) \, dx \, da \, dt = \int_Q (h + k_0 \chi_\omega + v_\varepsilon \chi_\omega) \varphi \, dx \, da \, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q). \quad (3.72)$$

Ainsi, nous obtenons

$$-\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a} - \Delta y_\varepsilon + \mu y_\varepsilon - \beta \gamma = h + k_0 \chi_\omega + v_\varepsilon \chi_\omega \text{ dans } Q \quad (3.73)$$

Montrons maintenant l'existence des traces de y_ε .

Comme $y_\varepsilon \in L^2(U; H_0^1(\Omega))$, on a $\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(t, a, \cdot) \in L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a}(t, a, \cdot) \in L^2(\Omega)$. Par conséquent, $\Delta y_\varepsilon(t, a, \cdot) \in L^2(\Omega)$ puisque $h + k_\varepsilon \chi_\omega \in L^2(Q)$. En somme, on a $y_\varepsilon(t, a, \cdot) \in L^2(\Omega)$ et $\Delta y_\varepsilon(t, a, \cdot) \in L^2(\Omega)$ ce qui implique que $y_{\varepsilon|_\Sigma}(t, a, \cdot)$ et $\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}|_\Sigma(t, a, \cdot)$ existent et appartiennent respectivement à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$. (voir [17])

D'autre part, y_ε appartenant à $L^2(U; H_0^1(\Omega))$, on a $\Delta y_\varepsilon \in L^2(U; H^{-1}(\Omega))$. Donc $-\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a} \in L^2(U; H^{-1}(\Omega))$ puisque $h + k_\varepsilon \chi_\omega \in L^2(Q)$. Ainsi, $[y_\varepsilon(T, a, x), y_\varepsilon(0, a, x)]$ et $[y_\varepsilon(t, A, x), y_\varepsilon(t, 0, x)]$ existent et appartiennent respectivement à $(L^2(Q_A))^2$ et $(L^2(Q_T))^2$. (voir [31, 14])

Soit $\varphi \in \mathcal{V}$. Si on multiplie (3.64)₁ par φ et que l'on intègre sur Q , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{Q_A} y_n(0, a, x) \varphi(0, a, x) dx da + \int_{Q_T} y_n(t, 0, x) \varphi(t, 0, x) dt dx \\ & + \int_Q y_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \Delta \varphi + \mu \varphi \right) dx dadt - \int_Q \beta(t, a, x) y_n(t, 0, x) \varphi(t, a, x) dx dadt \quad (3.74) \\ & = \int_Q (h + k_0 \chi_\omega + v_n \chi_\omega) \varphi dx dadt. \end{aligned}$$

En utilisant (3.67), (3.68), (3.69) et (3.70) quand on passe à la limite dans (3.74), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{Q_A} \alpha \varphi(0, a, x) dx da + \int_{Q_T} \gamma \varphi(t, 0, x) dx dt + \int_Q y_\varepsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \Delta \varphi + \mu \varphi \right) dx dadt \\ & - \int_Q \beta \gamma \varphi dx dadt = \int_Q (h + k_0 \chi_\omega + v_\varepsilon \chi_\omega) \varphi dx dadt. \end{aligned}$$

En intégrant la précédente égalité par parties dans Q , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_Q (h + k_0 \chi_\omega + v_\varepsilon \chi_\omega) \varphi dx dadt = \int_{Q_A} \alpha \varphi(0, a, x) dx da + \int_{Q_T} \gamma \varphi(t, 0, x) dx dt \\ & - \int_{Q_A} y_\varepsilon(0, a, x) \varphi(0, a, x) dx da + \int_{Q_T} y_\varepsilon(t, A, x) \varphi(t, A, x) dx dt \\ & - \int_{Q_T} y_\varepsilon(t, 0, x) \varphi(t, 0, x) dx dt - \int_0^T \int_0^A \left\langle y_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))} d\Gamma dadt \\ & + \int_0^T \int_0^A \left\langle \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{(H^{-3/2}(\Gamma), H^{3/2}(\Gamma))} d\Gamma dadt \\ & + \int_Q \varphi \left(-\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a} - \Delta y_\varepsilon + \mu y_\varepsilon - \beta \gamma \right) dx dadt. \end{aligned}$$

Comme $\varphi \in \mathcal{V}$ et, d'après (3.72), on a $\int_Q \varphi \left(-\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a} - \Delta y_\varepsilon + \mu y_\varepsilon - \beta \gamma \right) dx dadt = \int_Q (h + k_0 \chi_\omega + v_\varepsilon \chi_\omega) \varphi dx dadt$, alors l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} & \int_{Q_A} \alpha \varphi(0, a, x) dx da + \int_{Q_T} \gamma \varphi(t, 0, x) dx dt + \int_{Q_A} y_\varepsilon(T, a, x) \varphi(T, a, x) dx da \\ & - \int_{Q_A} y_\varepsilon(0, a, x) \varphi(0, a, x) dx da + \int_{Q_T} y_\varepsilon(t, A, x) \varphi(t, A, x) dx dt \\ & - \int_{Q_T} y_\varepsilon(t, 0, x) \varphi(t, 0, x) dx dt - \int_0^T \int_0^A \left\langle y_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))} d\Gamma dadt = 0. \end{aligned}$$

Maintenant, choisissons $\varphi \in \mathcal{V}$ tel que $\varphi(T, a, x) = \varphi(0, a, x) = 0$ dans Q_A , $\varphi(t, A, x) = 0$ dans Q_T et $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ sur Σ . On a alors

$$\int_{Q_T} \gamma \varphi(t, 0, x) dx dt = \int_{Q_T} y_\varepsilon(t, 0, x) \varphi(t, 0, x) dx dt.$$

Donc $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t, 0, x) = y_\varepsilon(t, 0, x)$ dans Q_T . En choisissant $\varphi \in \mathcal{V}$ tel que $\varphi(T, a, x) = \varphi(0, a, x) = 0$ dans Q_A et $\varphi(t, A, x) = 0$ dans Q_T , on a

$$\int_0^T \int_0^A \left\langle y_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\rangle_{(H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma))} d\Gamma da dt = 0.$$

Donc $y_\varepsilon = 0$ sur Σ . En choisissant $\varphi \in \mathcal{V}$ tel que $\varphi(T, a, x) = \varphi(0, a, x) = 0$ dans Q_A , on a

$$\int_{Q_T} y_\varepsilon(t, A, x) \varphi(t, A, x) dx dt = 0.$$

Donc $y_\varepsilon(t, A, x) = 0$ dans Q_T . Et, finalement, on obtient $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(0, a, x) = y_\varepsilon(0, a, x)$.

Nous venons donc de montrer, d'une part, que

$$y_n(t, 0, x) \rightharpoonup y_\varepsilon(t, 0, x) \text{ dans } L^2(Q_T).$$

et, par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y_\varepsilon(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x) y_\varepsilon(t, a, x) - \beta(t, a, x) y_\varepsilon(t, 0, x) & = h + k_0 \chi_\omega + v_\varepsilon \chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y_\varepsilon(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y_\varepsilon(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y_\varepsilon(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right. \quad (3.75)$$

D'autre part, on a

$$y_n(0, a, x) \rightharpoonup y_\varepsilon(0, a, x) \text{ dans } L^2(Q_A). \quad (3.76)$$

Maintenant, si on combine (3.67), (3.76) et la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle I_ε , on obtient

$$I_\varepsilon(v_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} I_\varepsilon(v_n, y_n) = d_\varepsilon.$$

Donc $(v_\varepsilon, y_\varepsilon)$ est le couple optimal solution du problème (3.61). L'unicité de ce couple vient de la stricte convexité de la fonctionnelle I_ε .

Dans ce qui suit, nous caractérisons le couple optimal.

Proposition 3.5. Soient $(v_\varepsilon, y_\varepsilon)$ la solution optimale du problème (3.61) et P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ dans K . Alors, il existe un état adjoint ρ_ε tel que le triplet $(v_\varepsilon, y_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ soit solution du système d'optimalité suivant :

$$v_\varepsilon = -(\rho_\varepsilon \chi_\omega - P\rho_\varepsilon) \in K^\perp, \quad (3.77)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y_\varepsilon(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y_\varepsilon(t, a, x) - \beta(t, a, x)y_\varepsilon(t, 0, x) & = h + k_0\chi_\omega + v_\varepsilon\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y_\varepsilon(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y_\varepsilon(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y_\varepsilon(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T, \end{array} \right. \quad (3.78)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial a} - \Delta \rho_\varepsilon + \mu \rho_\varepsilon & = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \rho_\varepsilon(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \rho_\varepsilon(t, 0, x) & = \int_0^A \beta \rho_\varepsilon da \quad \text{dans } Q_T, \\ \rho_\varepsilon(0, a, x) & = \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(0, a, x) \quad \text{dans } Q_A. \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Démonstration. Écrivons les équations d'Euler-Lagrange qui caractérisent le couple $(v_\varepsilon, y_\varepsilon)$. On a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{I_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(w - v_\varepsilon), y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon)) - I_\varepsilon(v_\varepsilon, y_\varepsilon)}{\lambda} \geq 0, \quad \forall (w, z) \in \mathcal{A}.$$

Calculons $I_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(w - v_\varepsilon), y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon))$. On a alors

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(w - v_\varepsilon), y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon)) &= \frac{1}{2} \|v_\varepsilon + \lambda(w - v_\varepsilon)\|_{L^2(G)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \|(y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon))(0, a, x)\|_{L^2(Q_A)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|v_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 + \lambda(v_\varepsilon, w - v_\varepsilon)_{L^2(G)} \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} \|w - v_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|y_\varepsilon(0, a, x)\|_{L^2(Q_A)}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{\varepsilon} (y_\varepsilon(0, a, x), (z - y_\varepsilon)(0, a, x))_{L^2(Q_A)} \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \|(z - y_\varepsilon)(0, a, x)\|_{L^2(Q_A)}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon(v_\varepsilon + \lambda(w - v_\varepsilon), y_\varepsilon + \lambda(z - y_\varepsilon)) - I_\varepsilon(v_\varepsilon, y_\varepsilon) &= \lambda(v_\varepsilon, w - v_\varepsilon)_{L^2(G)} \\
&+ \frac{\lambda^2}{2} \|w - v_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 \\
&+ \frac{\lambda}{\varepsilon} (y_\varepsilon(0, a, x), (z - y_\varepsilon)(0, a, x))_{L^2(Q_A)} \\
&+ \frac{\lambda^2}{2\varepsilon} \|(z - y_\varepsilon)(0, a, x)\|_{L^2(Q_A)}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, en divisant les deux égalités précédentes par $\lambda \neq 0$ puis en passant à la limite quand λ tend vers 0, nous obtenons

$$(v_\varepsilon, w - v_\varepsilon)_{L^2(G)} + \frac{1}{\varepsilon} (y_\varepsilon(0, a, x), (z - y_\varepsilon)(0, a, x))_{L^2(Q_A)} \geq 0, \quad \forall (w, z) \in \mathcal{A}. \quad (3.80)$$

Pour interpréter (3.80), on considère le système adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial a} - \Delta \rho_\varepsilon + \mu \rho_\varepsilon &= 0 \quad \text{dans } Q, \\ \rho_\varepsilon(t, a, x) &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \rho_\varepsilon(t, 0, x) &= \int_0^A \beta \rho_\varepsilon da \quad \text{dans } Q_T, \\ \rho_\varepsilon(0, a, x) &= \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(0, a, x) \quad \text{dans } Q_A. \end{array} \right. \quad (3.81)$$

Comme $z - y_\varepsilon$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial(z - y_\varepsilon)}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial(z - y_\varepsilon)}{\partial a}(t, a, x) - \Delta(z - y_\varepsilon)(t, a, x) \\ \quad + \mu(t, a, x)(z - y_\varepsilon)(t, a, x) - \beta(t, a, x)(z - y_\varepsilon)(t, 0, x) &= w - v_\varepsilon \quad \text{dans } Q, \\ (z - y_\varepsilon)(t, a, x) &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ (z - y_\varepsilon)(T, a, x) &= 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ (z - y_\varepsilon)(t, A, x) &= 0 \quad \text{dans } Q_T, \end{array} \right. \quad (3.82)$$

puisque $(z, y_\varepsilon) \in \mathcal{A}^2$, si on multiplie (3.81)₁ par $z - y_\varepsilon$ et que l'on intègre par parties sur Q , on a

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_A} \rho_\varepsilon(0, a, x)(z(0, a, x) - y_\varepsilon(0, a, x)) dx da - \int_{Q_T} \rho_\varepsilon(t, 0, x)(z(t, 0, x) - y_\varepsilon(t, 0, x)) dx dt \\
& + \int_Q \left(-\frac{\partial(z - y_\varepsilon)}{\partial t} - \frac{\partial(z - y_\varepsilon)}{\partial a} - \Delta(z - y_\varepsilon) + \mu(z - y_\varepsilon) \right) \rho_\varepsilon dx dadt = 0.
\end{aligned}$$

Ce qui équivaut encore à

$$-\frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_A} y_\varepsilon(0, a, x)(z - y_\varepsilon)(0, a, x) dx da + \int_Q (w - v_\varepsilon) \chi_\omega \rho_\varepsilon dx dadt = 0. \quad (3.83)$$

Les relations (3.83) et (3.80) donnent alors

$$\int_G v_\varepsilon(w - v_\varepsilon) dx dadt + \int_G \rho_\varepsilon \chi_\omega(w - v_\varepsilon) dx dadt \geq 0, \quad \forall w \in K^\perp.$$

$K^\perp$ étant un sous espace vectoriel, on a

$$\int_G (v_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega)(w - v_\varepsilon) dx dadt = 0, \quad \forall w \in K^\perp.$$

On déduit alors que $v_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega \in K$ puisque $v_\varepsilon \in K^\perp$. Ainsi, $v_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega = P(v_\varepsilon + \rho_\varepsilon \chi_\omega) = P\rho_\varepsilon$. Finalement, on obtient

$$v_\varepsilon = -(\rho_\varepsilon \chi_\omega - P\rho_\varepsilon) \in K^\perp. \quad (3.84)$$

□

Nous allons maintenant établir des estimations a-priori sur v_ε , y_ε et ρ_ε . Pour cela, considérons le produit scalaire $a(.,.)$ défini sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ par

$$a(\rho, \hat{\rho}) = \int_Q L\rho L\hat{\rho} dx dadt + \int_G (\rho - P\rho)(\hat{\rho} - P\hat{\rho}) dx dadt. \quad (3.85)$$

On note V le complété de $\mathcal{V}$ pour la norme :

$$\rho \mapsto \|\rho\|_V = \sqrt{a(\rho, \rho)}. \quad (3.86)$$

Ainsi, $V = \overline{\mathcal{V}}$ est un espace de Hilbert.

On munit $\mathcal{V}$ de la norme

$$\|\rho\|_\theta = \left(\int_Q \frac{1}{\theta} |\rho|^2 dx dadt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.87)$$

et on note $L_\theta^2(Q)$ le complété hilbertien de $\mathcal{V}$. Autrement dit, on a

$$L_\theta^2(Q) = \overline{\mathcal{V}}^{\|\cdot\|_\theta}.$$

La proposition 3.4 nous assure que

$$\|\rho\|_\theta \leq C\|\rho\|_V, \quad \forall \rho \in \mathcal{V} \quad (3.88)$$

puisque nous avons l'inégalité de Carleman adaptée :

$$\int_Q \frac{1}{\theta} |\rho|^2 dx dadt \leq C \left(\int_Q |L\rho|^2 dx dadt + \int_G |\rho - P\rho|^2 dx dadt \right).$$

Nous obtenons alors le résultat suivant :

Proposition 3.6. *Soit $(v_\varepsilon, y_\varepsilon, \rho_\varepsilon)$ défini comme dans la Proposition 3.5. Alors, il existe une constante positive C indépendante de ε telle que*

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H, \quad (3.89)$$

$$\|y_\varepsilon\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))} \leq C\|h\|_H, \quad (3.90)$$

$$\|\rho_\varepsilon\|_V \leq C\|h\|_H, \quad (3.91)$$

$$\|\rho_\varepsilon\|_\theta \leq C\|h\|_H. \quad (3.92)$$

Démonstration. En multipliant l'équation (3.78)₁ par ρ_ε solution de (3.79) puis en intégrant sur Q , on obtient

$$\begin{aligned} \int_Q \rho_\varepsilon \left(-\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial a} - \Delta y_\varepsilon + \mu y_\varepsilon - \beta y_\varepsilon(t, 0, x) \right) dx da dt &= \int_Q h \rho_\varepsilon dx da dt \\ &+ \int_G (k_0 + v_\varepsilon) \rho_\varepsilon dx da dt. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green dans la précédente égalité et en tenant compte du fait que $y_\varepsilon(T, a, x) = y_\varepsilon(t, A, x) = 0$, que $\rho_\varepsilon(t, 0, x) = \int_0^A \beta \rho_\varepsilon da$ et que $y_{\varepsilon|_\Sigma} = \rho_{\varepsilon|_\Sigma} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{Q_A} y_\varepsilon(0, a, x) \rho_\varepsilon(0, a, x) dx da + \int_Q y_\varepsilon \left(\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial a} - \Delta \rho_\varepsilon + \mu \rho_\varepsilon \right) dx da dt \\ &= \int_Q h \rho_\varepsilon dx da dt + \int_G (k_0 + v_\varepsilon) \rho_\varepsilon dx da dt. \end{aligned}$$

Comme $\rho_\varepsilon(t, 0, x) = \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(t, 0, x)$ et $\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial a} - \Delta \rho_\varepsilon + \mu \rho_\varepsilon = 0$, l'égalité précédente devient

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_A} |y_\varepsilon(t, 0, x)|^2 dx da = \int_Q h \rho_\varepsilon dx da dt + \int_G (k_0 + v_\varepsilon) \rho_\varepsilon dx da dt,$$

ce qui équivaut encore à

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{Q_A} |y_\varepsilon(t, 0, x)|^2 dx da = \int_Q h \rho_\varepsilon dx da dt + \int_G k_0 \rho_\varepsilon dx da dt - \int_G |v_\varepsilon|^2 dx da dt,$$

puisque $v_\varepsilon = -(I - P)\rho_\varepsilon \chi_\omega \in K^\perp$.

Comme ρ_ε vérifie l'inégalité de Carleman adaptée (3.43), on sait qu'il existe une constante positive C indépendante de ε telle que

$$\|\rho_\varepsilon\|_\theta = \left\| \frac{1}{\theta} \rho_\varepsilon \right\|_{L^2(Q)} \leq C \|\rho_\varepsilon\|_V \leq C \|v_\varepsilon\|_{L^2(G)}.$$

Ainsi, puisque k_0 vérifie la relation (3.26), on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon} \|y_\varepsilon(0, \cdot, \cdot)\|_{L^2(Q_A)}^2 + \|v_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 &= \int_Q h \rho_\varepsilon dx dadt + \int_G k_0 \rho_\varepsilon dx dadt, \\
&= \int_Q \theta h \frac{1}{\theta} \rho_\varepsilon dx dadt + \int_G \theta k_0 \frac{1}{\theta} \rho_\varepsilon dx dadt, \\
&\leq (\|h\|_H + \|\theta k_0\|_{L^2(G)}) \left\| \frac{1}{\theta} \rho_\varepsilon \right\|_{L^2(G)}, \\
&\leq C \|h\|_H \|v_\varepsilon\|_{L^2(G)}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H, \quad (3.93)$$

$$\|y_\varepsilon(0, \cdot, \cdot)\|_{L^2(Q_A)} \leq C \sqrt{\varepsilon} \|h\|_H, \quad (3.94)$$

Par conséquent, y_ε étant solution de (3.78), en utilisant les estimations (3.93), (3.94), (3.27) et les propriétés de l'équation de dynamique de population (cf. Annexe B) on sait qu'il existe une constante positive C telle que

$$\|y_\varepsilon(\cdot, 0, \cdot)\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|y_\varepsilon\|_{L^2(U, H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \|h\|_H$$

Il s'en suit alors que

$$\|y_\varepsilon(\cdot, 0, \cdot)\|_{L^2(Q_T)} \leq C \|h\|_H, \quad (3.95)$$

$$\|y_\varepsilon\|_{L^2(U, H_0^1(\Omega))} \leq C \|h\|_H. \quad (3.96)$$

D'autre part, comme ρ_ε est solution de (3.79), on a en particulier $\rho_\varepsilon \in V$. En utilisant la définition de la norme sur V donnée par la relation (3.86) et la définition de v_ε donnée par (3.77), on obtient l'estimation

$$\|\rho_\varepsilon\|_V = \|v_\varepsilon\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H. \quad (3.97)$$

Par ailleurs, puisque ρ_ε vérifie l'inégalité de Carleman adaptée (3.43), en utilisant (3.88) et (3.97), on obtient

$$\|\rho_\varepsilon\|_\theta = \left\| \frac{1}{\theta} \rho_\varepsilon \right\|_{L^2(Q)} \leq C \|h\|_H \quad (3.98)$$

□

Passons maintenant à la limite dans le système d'optimalité approché.

Proposition 3.7. *Soit P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ dans K . Alors, il existe une fonction ρ tel que le triplet (v, y, ρ) soit solution du système d'optimalité singulier suivant :*

$$v = -(\rho \chi_\omega - P\rho) \in K^\perp, \quad (3.99)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = h + k_0\chi_\omega + v\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y(t, 0, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right. \quad (3.100)$$

$$y(0, a, x) = 0 \text{ dans } Q_A, \quad (3.101)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} - \Delta \rho + \mu \rho & = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \rho(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \rho(t, 0, x) & = \int_0^A \beta \rho da \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right. \quad (3.102)$$

Démonstration. Grâce aux estimations (3.93), (3.94), (3.95) et (3.96), on peut extraire de $(v_\varepsilon, y_\varepsilon)_\varepsilon$, $(y_\varepsilon(t, 0, x))_\varepsilon$ et $y_\varepsilon(0, a, x)_\varepsilon$ des sous-suites, encore notées $(v_\varepsilon, y_\varepsilon)_\varepsilon$, $(y_\varepsilon(t, 0, x))_\varepsilon$ et $y_\varepsilon(0, a, x)_\varepsilon$ telles que

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v_0 \text{ faiblement dans } L^2(G), \quad (3.103)$$

$$y_\varepsilon(0, a, x) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(Q_A), \quad (3.104)$$

$$y_\varepsilon(t, 0, x) \rightharpoonup \gamma \text{ faiblement dans } L^2(Q_T), \quad (3.105)$$

$$y_\varepsilon \rightharpoonup y_0 \text{ faiblement dans } L^2(U; H_0^1(\Omega)). \quad (3.106)$$

Comme $v_\varepsilon \in K^\perp$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(G)$, on a

$$v_0 \in K^\perp. \quad (3.107)$$

Par ailleurs, le couple $(v_\varepsilon, y_\varepsilon)$ étant solution de (3.78), on peut montrer, comme à la page 71, que le couple $(v_0 = v_0(h), y_0 = y_0(h))$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y_0}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y_0}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y_0(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y_0(t, a, x) - \beta(t, a, x)y_0(t, 0, x) & = h + k_0\chi_\omega + v_0\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y_0(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y_0(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y_0(t, 0, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right. \quad (3.108)$$

et

$$y_0(0, a, x) = 0 \text{ dans } Q_A. \quad (3.109)$$

Montrons maintenant que $(v_0, y_0) = (v, y)$.
Puisque $v \in \mathcal{E}$ défini par (3.25), d'après l'expression de I_ε , on peut écrire

$$\frac{1}{2} \|v_\varepsilon\|_{L^2(G)}^2 \leq I_\varepsilon(v_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(G)}^2. \quad (3.110)$$

En passant à la limite dans (3.110), on obtient

$$\frac{1}{2} \|v_0\|_{L^2(G)}^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(v_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \|v\|_{L^2(G)}^2.$$

Par conséquent, on a

$$\|v_0\|_{L^2(G)} \leq \|v\|_{L^2(G)}. \quad (3.111)$$

D'autre part, (v_0, y_0) étant solution de (3.12)-(3.15), on a $v_0 \in \mathcal{E}$. Donc

$$v_0 = v \quad (3.112)$$

car v est le contrôle optimal donné par (3.25). Dès lors, l'unicité des solutions du système (3.108) nous donne $y_0 = y$.

Passons maintenant à la limite dans (3.79).
Grâce à l'estimation (3.97), on peut extraire de $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ une sous suite encore notée $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ telle que

$$\rho_\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } V, \quad (3.113)$$

La relation (3.113) signifie que $\rho \in V$ et que

$$\begin{aligned} L\rho_\varepsilon &\rightharpoonup L\rho \text{ dans } L^2(Q), \\ \rho &= 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \rho(t, 0, x) &= \int_0^A \beta \rho \, da. \end{aligned}$$

De plus, comme $L\rho_\varepsilon = 0$ dans Q , on en déduit que $L\rho = 0$ dans Q .
Par ailleurs, on a

$$v_\varepsilon = -(I - P)\rho_\varepsilon \rightharpoonup v = -(I - P)\rho \text{ dans } L^2(G).$$

On conclut alors que le triplet (v, y, ρ) est caractérisé par le système d'optimalité singulier (3.99)-(3.102)

□

3 Résolution du problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état.

Théorème 3.1. *Existence, unicité et caractérisation du Follower.*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ de classe C^2 et H l'espace de Hilbert défini par la relation (3.57). On suppose les hypothèses (3.2) et (3.3) satisfaites. Alors, pour toute fonction $e_i \in L^2(Q)$, $1 \leq i \leq M$, vérifiant l'hypothèse (3.5), pour tout $h \in H$ et pour tout β défini par (3.3) telle que $\theta\beta \in L^\infty(Q)$, il existe un unique contrôle $k = k(h) \in L^2(Q)$ tel que la solution $y = y(h, k(h))$ de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) & = h + k\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ y(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T \end{array} \right. \quad (3.114)$$

vérifie

$$\int_Q y e_i dx da dt = 0, \quad 1 \leq i \leq M \quad (3.115)$$

et

$$y(0, a, x) = 0 \quad \text{dans } Q_A. \quad (3.116)$$

De plus,

$$k = k_0 - (I - P)\rho\chi_\omega$$

où P est l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(G)$ dans K et ρ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial a} - \Delta \rho + \mu \rho & = 0 \quad \text{dans } Q, \\ \rho(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \rho(t, 0, x) & = \int_0^A \beta \rho da \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right.$$

Démonstration. Nous avons montré qu'il existe un unique contrôle $v(h) \in K^\perp$ de norme minimale tel que le couple $(v(h), y(h, v(h)))$ vérifie le problème de contrôlabilité à zéro avec contrainte sur le contrôle (3.12)-(3.15). Par conséquent, la Proposition 3.1 nous permet de dire que le contrôle $k = k(h) = (k_0(h) + v(h))$ est solution du problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur l'état (3.6)-(3.7)-(3.8). $\square$

4 Résolution du problème de contrôle optimal.

4.1 Quelques propriétés.

Soient $h \in H$ ainsi que θ et $k_0(h)$ définis respectivement par (3.39) et (3.19). Alors, grâce à l'estimation de $\theta k_0(h)$ donnée par la relation (3.26) et à l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

la forme linéaire définie sur V par

$$\rho \mapsto \int_Q h \rho \, dx \, da \, dt + \int_G k_0(h) \rho \, dx \, da \, dt$$

est continue sur V . Dès lors, le théorème de Lax-Milgram nous permet de dire que, pour tout $h \in H$, il existe un unique $\rho_\theta = \rho_\theta(h) \in V$ solution de l'équation variationnelle suivante

$$a(\rho_\theta, \rho) = \int_Q (h + k_0(h) \chi_\omega) \rho \, dx \, da \, dt, \quad \forall \rho \in V. \quad (3.117)$$

où $a(., .)$ est la forme bilinéaire définie par la relation (3.85).

Lemme 3.4. *Soit k_0 défini par la relation (3.19). Alors $k_0 \in H$ et l'application $\mathcal{F}_1$ définie par*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 : H &\rightarrow L^2(G) \\ h &\mapsto \mathcal{F}_1(h) = k_0(h) \end{aligned} \quad (3.118)$$

est linéaire et continue de H dans $L^2(G)$.

Démonstration. Comme $k_0 \in K_\theta$, on a d'une part $k_0 \in L^2(G)$ et d'autre part $\theta k_0 \in K \subset L^2(G)$. Donc $k_0 \in H$. Par ailleurs, d'après la définition de k_0 donnée par la relation (3.19), $\mathcal{F}_1$ est clairement linéaire. De plus, l'estimation (3.27) nous donne $\|k_0\|_{L^2(G)} \leq C \|h\|_H$. On en déduit donc que cette application est continue sur H . □

Soit, maintenant, $\mathcal{F}$ une application définie sur H à valeurs dans $L^2(G)$ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : H &\rightarrow L^2(G) \\ h &\mapsto v = \mathcal{F}(h) = -(\rho(h) - P\rho(h)) \chi_\omega. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Lemme 3.5. *Pour tout $h \in H$, soit $\rho = \rho(h)$ la solution du système (3.102). Alors, l'application $\mathcal{F}$ définie par la relation (3.119) est linéaire et continue de H dans $L^2(G)$.*

Démonstration. On considère le sous-espace vectoriel V_0 de V défini par

$$V_0 = \{\varphi \in V \mid L\varphi = 0\}.$$

Puisque $\mathcal{F}(h)$ est solution du problème (3.12)-(3.15), on multiplie les deux membres de (3.14)₁ par $\varphi \in V_0$. On a alors :

$$\int_Q \left(-\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial a} - \Delta y + \mu y - \beta(t, a, x) y(t, 0, x) \right) \varphi \, dx \, da \, dt = \int_Q (h + (k_0 + v) \chi_\omega) \varphi \, dx \, da \, dt.$$

En intégrant la précédente égalité par partie, comme $\varphi(t, 0, x) = \int_0^A \beta(t, a, x) \varphi(t, a, x) \, da$ dans Q_T , $L\varphi = 0$ dans Q et $\varphi(t, a, x) = 0$ sur Σ , on obtient :

$$\int_Q h \varphi \, dx \, da \, dt + \int_Q k_0(h) \varphi \, dx \, da \, dt + \int_Q v \chi_\omega \varphi \, dx \, da \, dt = 0, \quad \forall \varphi \in V_0$$

ou encore

$$\int_Q h\varphi \, dxdadt + \int_Q k_0(h)\varphi \, dxdadt - \int_Q (\rho - P\rho)\chi_\omega\varphi \, dxdadt = 0, \forall \varphi \in V_0$$

ce qui équivaut encore à

$$\int_Q h\varphi \, dxdadt + \int_Q k_0(h)\chi_\omega\varphi \, dxdadt + \int_Q \mathcal{F}(h)\chi_\omega\varphi \, dxdadt = 0, \forall \varphi \in V_0. \quad (3.120)$$

Enfin, puisque l'application $\varphi \mapsto \int_Q h\varphi \, dxdadt + \int_Q k_0(h)\varphi \, dxdadt$ est linéaire et continue sur V_0 et que

$$\begin{aligned} - \int_G \mathcal{F}(h)\varphi \, dxdadt &= \int_G (\rho(h) - P\rho(h))\varphi \, dxdadt, \\ &= \int_G (\rho(h) - P\rho(h))(\varphi - P\varphi) \, dxdadt, \\ &= a(\rho(h), \varphi), \forall \varphi \in V_0, \end{aligned}$$

on déduit alors de l'égalité (3.120) que $\rho = \rho(h)$ est solution du problème variationnel

$$a(\rho, \varphi) = \int_Q h\varphi \, dxdadt + \int_Q k_0(h)\chi_\omega\varphi \, dxdadt, \forall \varphi \in V_0. \quad (3.121)$$

Donc, l'application $h \mapsto \rho = \rho(h)\chi_\omega$ est linéaire de H dans $L^2(G)$. En outre, puisque l'opérateur de projection $I - P$ défini de $L^2(G)$ dans $K^\perp \subset L^2(G)$ est également linéaire, on en déduit que l'application $\mathcal{F}$ est linéaire de H dans $L^2(G)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est continue sur H . On rappelle que $v = -(\rho(h) - P\rho(h)) = (I - P)\rho(h)$ et d'après la relation (3.121), on a, en particulier pour $\varphi = \rho$

$$a(\rho, \rho) = \int_Q h\rho \, dxdadt + \int_G k_0(h)\rho \, dxdadt.$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} \|\rho\|_V^2 &= \int_Q h\rho \, dxdadt + \int_G k_0(h)\rho \, dxdadt \\ &= \int_Q \theta h \frac{1}{\theta} \rho \, dxdadt + \int_G \theta k_0(h) \frac{1}{\theta} \rho \, dxdadt. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans le membre de droite de la précédente égalité, on a

$$\begin{aligned} \|\rho\|_V^2 &\leq \left(\int_Q (\theta h)^2 \, dxdadt \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{1}{\theta^2} \rho^2 \, dxdadt \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_Q (\theta k_0(h))^2 \, dxdadt \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{1}{\theta^2} \rho^2 \, dxdadt \right)^{1/2}, \\ &\leq C \|h\|_H \|\rho\|_V + C \|\theta k_0\|_{L^2(G)} \|\rho\|_V, \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (3.26), on obtient

$$\|\rho\|_V \leq C\|h\|_H$$

Et, puisque $\mathcal{F}(h) = (I - P)\rho(h)$ et que $\|(I - P)\rho\|_{L^2(G)} = \|\rho\|_V$, on a

$$\|\mathcal{F}(h)\|_{L^2(G)} \leq C\|h\|_H$$

D'où la continuité de l'application $\mathcal{F}$ sur H .

□

Dans la suite, nous noterons $k_0(h) = \mathcal{F}_1(h)$.

4.2 Existence et caractérisation du Leader.

On considère la fonctionnelle J définie par

$$J(h) = \frac{1}{2}\|y(h, k(h)) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2}\|h\|_H^2 \quad (3.122)$$

à laquelle on associe le problème de minimisation suivant

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h) \quad (3.123)$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

En utilisant les propriétés des applications $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ données respectivement par le Lemme 3.5 et le Lemme 3.4, on en déduit que J est strictement convexe continue et coercive. On a donc le résultat classique suivant :

Proposition 3.8. *Le Problème (3.123) admet un unique contrôle $\hat{h} \in \mathcal{U}_{ad}$.*

Démonstration. Comme $J(h)$ est positive, on peut définir $d_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$d_n = \inf\{J(h), h \in \mathcal{U}_{ad}\}.$$

Soit $(h_n)_n$ une suite minimisante telle que $(h_n)_n \in \mathcal{U}_{ad}$ et

$$d_n \leq J(h_n) < d_n + \frac{1}{n} < d_n + 1 \quad (3.124)$$

De la structure de J , on a

$$\|h_n\|_H \leq C \quad (3.125)$$

où C est une constante indépendante de n .

On peut donc, d'après l'estimation (3.125), extraire de $(h_n)_n$ une sous-suite encore notée $(h_n)_n$ telle que

$$h_n \rightharpoonup \hat{h} \text{ dans } \mathcal{U}_{ad} \quad (3.126)$$

Comme $\mathcal{U}_{ad}$ est convexe et fermé, on a $\hat{h} \in \mathcal{U}_{ad}$. Par ailleurs, J étant continue, elle est semi-continue inférieurement. Donc, on a

$$d_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(h_n) \geq J(\hat{h}).$$

Et puisque $\hat{h} \in \mathcal{U}_{ad}$, on a nécessairement

$$J(\hat{h}) = \inf_{h \in \mathcal{U}_{ad}} J(h)$$

L'unicité de $\hat{h}$ vient de la stricte convexité de J . □

En observant que $k(h) = k_0(h) + v(h) = \mathcal{F}_1(h) + \mathcal{F}(h)$, nous notons $\hat{y} = y(\hat{h}, \hat{k} = k(\hat{h}))$ l'état associé au contrôle optimal $\hat{h}$. Il s'agit maintenant de caractériser $\hat{h}$.

La condition d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} \geq 0, \forall h \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Rappelons que $\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) - J(\hat{h})}{\lambda}$.

On a

$$\begin{aligned} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) &= \frac{1}{2} \|y(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}), k(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))) - z_d\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + \frac{N}{2} \|\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})\|_H^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\hat{y} - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \lambda \left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} \|y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h}))\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N}{2} \|\hat{h}\|_H^2 \\ &\quad + N\lambda(\hat{h}, h - \hat{h})_H + \frac{N\lambda^2}{2} \|h - \hat{h}\|_H^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h})) - J(\hat{h}) &= \lambda \left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} \\ &\quad + N\lambda(\hat{h}, h - \hat{h})_H + \frac{\lambda^2}{2} \|y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h}))\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\quad + \frac{N\lambda^2}{2} \|h - \hat{h}\|_H^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, en divisant la précédente égalité par $\lambda \neq 0$ puis en passant à la limite lorsque λ tend vers 0, on obtient

$$\frac{d}{d\lambda} J(\hat{h} + \lambda(h - \hat{h}))|_{\lambda=0} = \left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} + \left(N\hat{h}, h - \hat{h} \right)_H.$$

Ainsi, la condition d'Euler-Lagrange nous donne

$$\left(\hat{y} - z_d, y(h - \hat{h}, k(h - \hat{h})) \right)_{L^2(Q)} + \left(N\hat{h}, h - \hat{h} \right)_H \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}. \quad (3.127)$$

On interprète cette condition en utilisant la notion d'état adjoint. Pour faciliter nos calculs, on pose $w = h - \hat{h}$ et on note $z = y(w, k(w))$. Alors z vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial z}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial z}{\partial a}(t, a, x) - \Delta z(t, a, x) & \\ +\mu(t, a, x)z(t, a, x) - \beta(t, a, x)z(t, 0, x) & = w + k(w)\chi_\omega \quad \text{dans } Q, \\ z(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ z(T, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ z(t, A, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right. \quad (3.128)$$

Soit p la solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} - \Delta p + \mu p & = \hat{y} - z_d \quad \text{dans } Q, \\ p(t, a, x) & = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ p(0, a, x) & = 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ p(t, 0, x) & = \int_0^A \beta(t, a, x)p(t, a, x) da \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right. \quad (3.129)$$

Puisque $\hat{y} - z_d \in L^2(Q)$, on démontre, comme dans l'annexe 2, que $p \in L^2(U; H_0^1(\Omega))$. Par ailleurs, on montre aussi comme à la page 71 que les traces de p existent. On multiplie l'équation (3.129)₁ par z solution de (3.128) et on intègre par partie sur Q . On a alors

$$\begin{aligned} \int_Q z(\hat{y} - z_d) dx dadt &= \int_Q z \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} - \Delta p + \mu p \right) dx dadt \\ &= \int_Q p \left(-\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial a} - \Delta z + \mu z - \beta(t, a, x)z(t, 0, x) \right) dx dadt. \end{aligned}$$

Et comme $-\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial a} - \Delta z + \mu z - \beta(t, a, x)z(t, 0, x) = w + k(w)\chi_\omega = w + (\mathcal{F}_1(w) + \mathcal{F}(w))\chi_\omega$ dans Q , on obtient

$$\int_Q z(\hat{y} - z_d) dx dadt = \int_Q pw dx dadt + \int_Q p\mathcal{F}_1(w)\chi_\omega dx dadt + \int_Q p\mathcal{F}(w)\chi_\omega dx dadt.$$

On va maintenant interpréter cette égalité, en exprimant chacune des intégrales du membre de droite dans l'espace de Hilbert $H = \{h \in L^2(Q) \mid \theta h \in L^2(Q)\}$ où θ est définie par la relation (3.39). Soient H' le dual de l'espace de Hilbert H et Λ^{-1} l'isomorphisme isométrique de H' dans H . Comme on peut écrire

$$\int_Q pw \, dx \, dadt = \int_Q \frac{1}{\theta} p \theta w \, dx \, dadt = \langle \frac{1}{\theta} p, w \rangle_{H', H},$$

$$\int_G p \mathcal{F}_1(w) \, dx \, dadt = \langle \mathcal{F}_1^*(p), w \rangle_{H', H}$$

et

$$\int_G p \mathcal{F}(w) \, dx \, dadt = \langle \mathcal{F}^*(p), w \rangle_{H', H},$$

on obtient alors

$$\int_Q pw \, dx \, dadt = (\Lambda^{-1}(\frac{1}{\theta} p), w)_H,$$

$$\int_G p \mathcal{F}_1(w) \, dx \, dadt = (\Lambda^{-1} \mathcal{F}_1^*(p), w)_H$$

et

$$\int_G p \mathcal{F}(w) \, dx \, dadt = (\Lambda^{-1} \mathcal{F}^*(p), w)_H.$$

Ainsi, la condition (3.127) devient

$$\left(\Lambda^{-1} \frac{1}{\theta} p + \Lambda^{-1} \mathcal{F}_1^*(p) + \Lambda^{-1} \mathcal{F}^*(p) + N \hat{h}, h - \hat{h} \right)_H \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}$$

ou encore

$$\left(\Lambda^{-1} \left(\frac{1}{\theta} I + \mathcal{F}_1^* + \mathcal{F}^* \right) (p) + N \hat{h}, h - \hat{h} \right)_H \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad}$$

où I est l'opérateur identité de $L^2(Q)$.

On a donc montré le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Existence, unicité et caractérisation du Leader.*

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ de classe C^2 , θ définie par la relation (3.39) ainsi que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ les applications linéaires et continues définies respectivement par (3.119) et (3.118). Alors, il existe $p \in L^2(U; H_0^1(\Omega))$ tel que le problème de minimisation (3.123) admette une unique solution $\hat{h}$ caractérisée par la condition d'optimalité suivante

$$\left(\Lambda^{-1} \left(\frac{1}{\theta} I + \mathcal{F}_1^* + \mathcal{F}^* \right) (p) + N \hat{h}, h - \hat{h} \right)_H \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}_{ad} \quad (3.130)$$

avec p solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} - \Delta p + \mu p &= y(\hat{h}, k(\hat{h})) - z_d \quad \text{dans } Q, \\ p(t, a, x) &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ p(0, a, x) &= 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ p(t, 0, x) &= \int_0^A \beta(t, a, x) p(t, a, x) da \quad \text{dans } Q_T. \end{array} \right.$$

Conclusions et perspectives

Ainsi, dans chacun des problèmes linéaires étudiés, nous avons démontré l'existence et l'unicité de deux contrôles ayant chacun un objectif différent à atteindre. En effet, la solution du problème de contrôlabilité à zéro a pour but de ramener l'état du système à zéro à l'instant final T tandis que la solution du problème de contrôle optimal doit garder l'état du système proche d'un état donné.

De ce point de vue, les deux problèmes étudiés, à savoir le problème de la chaleur linéaire et le problème à deux temps, sont contrôlables au sens de Stackelberg.

En perspectives, dans les applications concrètes des problèmes de diffusions, le problème de Stackelberg prend tout son sens pour les systèmes couplés. On considérera, par exemple, le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{llll} y_1' - \Delta y_1 + a_1 y_2 & = & v_1 \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_2' - \Delta y_2 + a_2 y_1 & = & v_2 \chi_\omega & \text{dans } Q, \\ y_1 = y_2 & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y_1(0) & = & y_0^1 & \text{dans } \Omega, \\ y_2(0) & = & y_0^2 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

ainsi que les fonctionnelles

$$J_1(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \|y_1 - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N_1}{2} \|v_1\|_{L^2(G)}^2$$

et

$$J_2(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \|y_2 - z_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{N_2}{2} \|v_2\|_{L^2(G)}^2$$

et, l'on cherchera alors à déterminer les contrôles v_1 et v_2 de telle sorte que l'un ramène le système à zéro au bout d'un temps T tandis que l'autre maintiendra l'état proche d'un état donné.

On pourra aussi s'intéresser à des systèmes couplés en dynamique de population.

Annexe A

Existence, unicité et propriétés de la solution pour l'équation de la chaleur.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ de classe C^2 . Soit par ailleurs un ouvert non vide $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Pour $T > 0$, on pose $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$ et on considère dans le cylindre Q le problème de Cauchy-Dirichlet pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} y' - \Delta y &= f & \text{dans } Q \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma \\ y(0) &= y^0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où f est le terme source et $y^0 \in L^2(\Omega)$ est la condition initiale.

1 Existence : Méthode spectrale.

1.1 Formulation variationnelle.

Commençons par quelques notations :

$$\begin{aligned} \vartheta &= L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \vartheta' &= L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \\ \mathcal{W}(0, T) &= \{\varphi \mid \varphi \in \vartheta, \varphi' \in \vartheta'\} \\ \|\varphi\|_{\mathcal{W}(0, T)}^2 &= \|\varphi\|_{\vartheta}^2 + \|\varphi'\|_{\vartheta'}^2 \end{aligned}$$

Rappelons que $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ est l'espace des fonctions mesurables sur $]0, T[$ à valeurs dans $H_0^1(\Omega)$ qui sont de carré intégrable sur $]0, T[$. On montre que $\mathcal{W}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T], L^2(\Omega))$

(cf. [17], chapitre 3, page 116 ou [16], chapitre 1). De plus, les traces en 0 et en T existent, on peut donc utiliser les intégrations par parties.

Proposition A.1. *Le problème (A.1) équivaut à trouver $y \in \mathcal{W}(0, T)$ solution du problème variationnel suivant :*

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \cdot \varphi(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_i}(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) \cdot \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ y(0) = y^0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Preuve. On a déjà $y(0) = y^0$ et comme $y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, alors $y = 0$ sur Σ .

($\Rightarrow$) Soit y solution de (A.1). On multiplie la première équation du problème (A.1) par φ et on intègre. On obtient alors :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \cdot \varphi(x) dx - \int_{\Omega} \Delta y(x, t) \cdot \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) \cdot \varphi(x) dx.$$

On applique la formule de Green. On a donc :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \cdot \varphi(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_i}(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x, t) dx = \int_{\Omega} f(x, t) \cdot \varphi(x) dx.$$

($\Leftarrow$) Soit $y \in \mathcal{W}(0, T)$ vérifiant le système (A.2). Montrons que $y' - \Delta y = f$ dans Q . Soit $f \in L^2(O, T; L^2(\Omega))$. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(O, T; H_0^1(\Omega))$, (A.2) reste vraie sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On a :

$$\int_{\Omega} y' \cdot \varphi dx + \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Autrement dit :

$$\int_{\Omega} y' \cdot \varphi dx + \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla \varphi dx = \langle y', \varphi \rangle + \langle \nabla y, \nabla \varphi \rangle.$$

Par définition des dérivées des distributions, on a :

$$\langle \nabla y, \nabla \varphi \rangle = -\langle \Delta y, \varphi \rangle.$$

On en déduit que :

$$\langle y' - \Delta y, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Donc $y' - \Delta y = f$ dans Q .

□

1.2 Existence et unicité.

Posons

$$a(y, \varphi) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial y}{\partial x_i}(x, t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$$

et considérons y comme une fonction de $]0, T[$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On considère maintenant le problème suivant : Etant donné $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $y^0 \in L^2(\Omega)$, trouver $y : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \\ \frac{d}{dt}(y(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} + a(y(t), \varphi) = (f, \varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ y(0) = y^0. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Proposition A.2. *On considère la forme bilinéaire $a(., .) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie précédemment. On a :*

- (i) $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection continue et dense.
- (ii) $a(., .)$ est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
- (iii) $a(., .)$ est coercive.
- (iv) $a(., .)$ est symétrique.
- (v) l'injection canonique $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.

Preuve. (i) Continuité : Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On a $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ d'après l'inégalité de Poincaré. D'où le résultat.

Densité : On sait que

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Et, $\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$. Donc $\overline{H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$. D'où le résultat. On retrouve une autre démonstration possible pour la densité dans [7].

(ii) Il faut montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : $|a(u, v)| \leq C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$
 $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

(iii) On a :

$$a(u, u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

On a bien $a(u, u) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ avec ici $C = 1$.

(iv) On montre que $a(u, v) = a(v, u)$.

$$\begin{aligned}
a(v, u) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\
&= a(u, v).
\end{aligned}$$

(v) On trouvera une démonstration dans [7]. □

On déduit de la proposition précédente une décomposition spectrale de l'opérateur Δ . Autrement dit, il existe une suite croissante

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ de vecteurs propres (ω_n) associés aux valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que :

$$a(\omega_n, \varphi) = \lambda_n (\omega_n, \varphi)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème A.1. *Pour tout $f \in L^2(Q)$ et pour tout $y^0 \in L^2(\Omega)$, le problème (A.1) admet une unique solution y de la forme :*

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(y^0, \omega_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_n t} + \int_0^t (f(s), \omega_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_n(t-s)} ds \right] \omega_n \quad (\text{A.4})$$

telle que $y \in \mathcal{W}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T], L^2(\Omega))$.

Preuve. Soit y une solution du problème (A.3). Puisque $y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ et que ω_n est une base hilbertienne orthonormale dans $L^2(\Omega)$, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (y(t), \omega_n)_{L^2(\Omega)}.$$

Mais comme $y(t) \in H_0^1(\Omega)$ (presque partout), on a

$$a(y(t), \omega_n) = \lambda_n (y(t), \omega_n)_{L^2(\Omega)}$$

et on déduit de (A.3) avec $\varphi = \omega_n$ que $\alpha_n(t) = (y(t), \omega_n)_{L^2(\Omega)}$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \alpha_n(t) + \lambda_n \alpha_n(t) = (f(t), \omega_n)_{L^2(\Omega)}, \\ \alpha_n(0) = (y(0), \omega_n)_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

dont la solution est donnée par

$$\alpha_n = (y(0), \omega_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_n t} + \int_0^t (f(s), \omega_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_n(t-s)} ds.$$

Il en résulte que la fonction y est somme de la série (A.4). De plus, si la solution existe, elle est unique. Pour montrer l'existence, il suffit de montrer que la série

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \left[(y^0, \omega_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_n t} + \int_0^t (f(s), \omega_n)_{L^2(\Omega)} e^{-\lambda_n(t-s)} ds \right]$$

converge pour tout $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et pour tout $y^0 \in L^2(\Omega)$ et que sa somme est solution du problème (A.3). La démonstration se fait en plusieurs étapes. On en trouve une dans [33]. $\square$

2 Propriétés de la solution.

Enonçons d'abord le résultat suivant :

Théorème A.2. *Sous les hypothèses de la Proposition A.2, on a :*

1. *L'application $(f, y^0) \mapsto y$ est linéaire de $L^2(Q) \times L^2(\Omega)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$*

2. $\|y\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \left[\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)} \right]$
3. $\|y'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq K \left[\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)} \right], \quad K \in \mathbb{R}$

Preuve. 1) La linéarité résulte de la bilinéarité de $a(.,.)$ et du produit scalaire de $L^2(\Omega)$, de la linéarité de $\frac{d}{dt}$ et de l'unicité de la solution.

2) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$y_m(t) = \sum_{k=1}^m \left[(y^0, \omega_k)_{L^2(Q)} e^{-\lambda_k t} + \int_0^t (f(s), \omega_k)_{L^2(Q)} e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right] \omega_k$$

la somme partielle de $y(t)$.

Comme $y^0 \in L^2(\Omega)$, alors

$$\begin{cases} y^0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (y^0, \omega_n)_{L^2(\Omega)} \\ \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |y_n^0|^2 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

avec $y_n^0 = (y^0, \omega_n)_{L^2(\Omega)}$

De même, $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \Rightarrow f(t) \in L^2(\Omega)$ (presque partout en t) et, on a :

$$\begin{cases} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (f(t), \omega_n)_{L^2(\Omega)} \\ \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)|^2 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

avec $f_n(t) = (f(t), \omega_n)_{L^2(\Omega)}$

Par suite, $\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T |f_n(t)|^2 dt$. On obtient alors :

$$a(y_{m+p}(t) - y_m(t), y_{m+p}(t) - y_m(t)) = \sum_{l=m+1}^{m+p} \lambda_l \left| (y_{m+p}(t) - y_m(t), \omega_l)_{L^2(\Omega)} \right|^2.$$

Par coercivité de $a(.,.)$, et comme (ω_k) est orthonormée dans $L^2(\Omega)$, on a :

$$\alpha \|y_{m+p}(t) - y_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{m+p} \lambda_k \left[e^{-\lambda_k t} y_k^0 + \int_0^t f_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right]^2.$$

En utilisant $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on obtient :

$$\|y_{m+p}(t) - y_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{m+p} \lambda_k \left[e^{-2\lambda_k t} |y_k^0|^2 + \left(\int_0^t f_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right)^2 \right].$$

Comme $\lambda_k \int_0^T e^{-2\lambda_k t} dt = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda_k T}) < \frac{1}{2}$ et

$$\int_0^T \left(\int_0^t f_k(s) e^{-\lambda_k(t-s)} ds \right)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T |f_k(s)|^2 ds$$

on trouve :

$$\int_0^T \|y_{m+p}(t) - y_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \leq \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=m+1}^{m+p} |y_k^0|^2 + \sum_{k=m+1}^{m+p} \int_0^T |f_k(s)|^2 ds \right).$$

D'où

$$\|y_{m+p} - y_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq C \left[\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)} \right], \quad C \in \mathbb{R}.$$

On déduit de (A.6) et (A.7) que (y_m) est une suite de Cauchy dans $L^2(O, T; H_0^1(\Omega))$ qui est un espace de Hilbert. Par conséquent, elle converge. D'où le résultat.

3) On rappelle que $\|y'\|_{\vartheta'} = \sup_{\substack{\varphi \in \vartheta \\ \|\varphi\|_{\vartheta}=1}} |\langle y', \varphi \rangle|$.

D'après l'équation (A.1), on a $y' = \Delta y + f$. Donc :

$$\begin{aligned} \int_Q y' \varphi \, dx \, dt &= \int_Q (\Delta y) \varphi \, dx \, dt + \int_Q f \varphi \, dx \, dt \\ &= - \int_Q \nabla y \nabla \varphi \, dx \, dt + \int_Q f \varphi \, dx \, dt \\ \left| \int_Q y' \varphi \, dx \, dt \right| &\leq \left(\int_Q |\nabla y|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q |\nabla \varphi|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_Q |f|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q |\varphi|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_Q |\nabla y|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q |\nabla \varphi|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + k \left(\int_Q |f|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q |\nabla \varphi|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbb{R} \\ &\leq \|y\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + k \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où

$$\|y'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq K \left[\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|y^0\|_{L^2(\Omega)} \right], \quad K \in \mathbb{R}.$$

□

Proposition A.3. $(f, y^0) \mapsto y(f, y^0)$ est linéaire et continue de $L^2(Q) \times L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{W}(0, T)$.

Preuve. La linéarité résulte de la bilinéarité de $a(.,.)$ et du produit scalaire de $L^2(\Omega)$, de la linéarité de $\frac{d}{dt}$ et de l'unicité de la solution. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathcal{W}(0,T)}^2 &= \|y\|_{\vartheta}^2 + \|y'\|_{\vartheta'}^2 \\ &\leq C \left[\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|y^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Annexe B

Propriétés des solutions pour le problème à deux temps.

1 Estimations de la solution du problème de dynamique de population.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ de classe C^2 . Soit par ailleurs ω un ouvert non vide tel que $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Pour $T > 0$, on pose $U =]0, T[\times]0, A[$, $Q =]0, T[\times]0, A[\times \Omega$, $\Sigma =]0, T[\times]0, A[\times \Gamma$, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $Q_A =]0, A[\times \Omega$ et on considère le problème linéaire de dynamique de population suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial a} - \Delta q_i + \mu q_i &= e_i \quad \text{dans } Q, \\ q_i(t, a, x) &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ q_i(0, a, x) &= 0 \quad \text{dans } Q_A, \\ q_i(t, 0, x) &= \int_0^A \beta(t, a, x) q_i(t, a, x) da \quad \text{dans } Q_T \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

où $e_i \in L^2(Q)$. La solution $q_i = q_i(t, a, x)$ du système ci-dessus représente la répartition des individus d'âge $a \geq 0$, au temps $t \geq 0$ et à l'emplacement $x \in \Omega$. Les fonctions μ et β représentent respectivement les taux de mortalité et de natalité des individus et vérifient les hypothèses suivantes :

$$\mu(t, a, x) = \mu_0(a) + \mu_1(t, a, x) \text{ dans } U \times \Omega \quad (\text{B.2a})$$

$$\mu \geq 0 \text{ dans } U \times \Omega \quad (\text{B.2b})$$

$$\mu_1 \in L^\infty(U \times \Omega), \mu_1(t, a, x) \geq 0 \text{ dans } U \times \Omega \quad (\text{B.2c})$$

$$\mu_0 \in L^1_{loc}(0, A), \lim_{a \rightarrow A} \int_0^a \mu_0(s) ds = +\infty \quad (\text{B.2d})$$

$$\beta \in C^2([0, T] \times [0, A] \times \overline{\Omega}), \quad (\text{B.3a})$$

$$\beta(t, a, x) \geq 0 \text{ dans } [0, T] \times [0, A] \times \overline{\Omega} \quad (\text{B.3b})$$

$$\exists 0 < a_0 < a_1 < A \text{ tel que } \beta(t, a, x) = 0 \text{ dans } [0, T] \times ((0, a_0) \cup (a_1, A) \times \Omega) \quad (\text{B.3c})$$

Proposition B.1. *Sous les hypothèses (B.2)-(B.3), pour toute solution q_i du système (B.1), il existe une constante positive λ telle que l'estimation suivante soit vérifiée :*

$$\|q_i\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))} \leq \sqrt{2\lambda} \|e_i\|_{L^2(Q)}. \quad (\text{B.4})$$

Démonstration. On considère le système (B.1) que l'on multiplie par q_i et que l'on intègre sur Q . On a alors

$$\int_Q q_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial a} - \Delta q_i + \mu q_i \right) dx da dt = \int_Q q_i e_i dx da dt.$$

En intégrant la précédente égalité par parties, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{Q_A} (q_i(T, a, x))^2 dx da - \frac{1}{2} \int_{Q_A} (q_i(0, a, x))^2 dx da + \frac{1}{2} \int_{Q_T} (q_i(t, A, x))^2 dx dt \\ & - \frac{1}{2} \int_{Q_T} (q_i(t, 0, x))^2 dx dt + \int_Q \nabla q_i^2 dx da dt + \int_Q \mu q_i^2 dx da dt = \int_Q q_i e_i dx da dt. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Comme $\frac{1}{2} \int_{Q_A} (q_i(T, a, x))^2 dx da + \frac{1}{2} \int_{Q_T} (q_i(t, A, x))^2 dx dt > 0$, $\mu > 0$ et $q_i(0, a, x) = 0$, on déduit de l'égalité (B.5) que

$$-\frac{1}{2} \int_{Q_T} (q_i(t, 0, x))^2 dx dt + \int_Q \nabla q_i^2 dx da dt \leq \int_Q q_i e_i dx da dt,$$

ce qui équivaut encore

$$\int_Q \nabla q_i^2 dx da dt \leq \frac{1}{2} \int_{Q_T} (q_i(t, 0, x))^2 dx dt + \int_Q q_i e_i dx da dt. \quad (\text{B.6})$$

Or $q_i(t, 0, x) = \int_0^A \beta(t, a, x) q_i(t, a, x) dx da dt \leq \|\beta(t, \cdot, x)\|_{L^\infty(0, A)} \|q_i(t, \cdot, x)\|_{L^2(0, A)}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_Q q_i^2(t, 0, x) dx da dt &= \int_{Q_T} \int_0^A q_i^2(t, 0, x) dx da dt \\ &\leq \int_{Q_T} \|\beta(t, \cdot, x)\|_{L^\infty(0, A)}^2 \|q_i(t, \cdot, x)\|_{L^2(0, A)}^2 dx dt, \\ &\leq \|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2 \|q_i\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit de l'inégalité précédente que l'inégalité (B.6) devient

$$\int_Q \nabla q_i^2 dx dadt \leq \frac{1}{2} \|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2 \|q_i\|_{L^2(Q)}^2 + \int_Q q_i e_i dx dadt. \quad (\text{B.7})$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Young, il existe une constante positive λ telle que

$$\int_Q q_i e_i dx dadt \leq \frac{1}{2\lambda} \int_Q q_i^2 dx dadt + \frac{\lambda}{2} \int_Q e_i^2 dx dadt.$$

Ainsi l'inégalité (B.7) devient

$$\int_Q \nabla q_i^2 dx dadt \leq \frac{1}{2\lambda} \int_Q q_i^2 dx dadt + \frac{\lambda}{2} \int_Q e_i^2 dx dadt + \frac{1}{2} \|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2 \|q_i\|_{L^2(Q)}^2. \quad (\text{B.8})$$

Autrement dit, on a

$$\|q_i\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \left(\|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2 + \frac{1}{\lambda} \right) \|q_i\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|e_i\|_{L^2(Q)}^2. \quad (\text{B.9})$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante positive $C = C(\Omega)$ telle que

$$\|q_i\|_{L^2(Q)} \leq C \|q_i\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}$$

L'inégalité (B.9) devient alors

$$\frac{1}{2} \left(2 - C \left(\frac{1}{\lambda} + \|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2 \right) \right) \|q_i\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{\lambda}{2} \|e_i\|_{L^2(Q)}^2,$$

soit

$$\left(2 - C \left(\frac{1}{\lambda} + \|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2 \right) \right) \|q_i\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}^2 \leq \lambda \|e_i\|_{L^2(Q)}^2. \quad (\text{B.10})$$

On choisit λ tel que $2 - C \left(\frac{1}{\lambda} + \|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2 \right) > \frac{1}{2}$ ce qui équivaut à $\lambda > \frac{2C}{3 - 2C\|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2}$

avec la condition que $\|\beta\|_{L^\infty(Q)} < \sqrt{\frac{3}{2C}}$. Ainsi, l'inégalité (B.10) devient

$$\|q_i\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))} \leq \sqrt{2\lambda} \|e_i\|_{L^2(Q)}.$$

□

2 Estimations de l'état adjoint d'un problème de dynamique de population.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ de classe C^2 . Soit par ailleurs ω un ouvert non vide tel que $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Pour $T > 0$, on pose $U =]0, T[\times]0, A[$, $Q =]0, T[\times]0, A[\times \Omega$, $\Sigma =]0, T[\times]0, A[\times \Gamma$, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $Q_A =]0, A[\times \Omega$ et on considère le problème adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial y}{\partial t}(t, a, x) - \frac{\partial y}{\partial a}(t, a, x) - \Delta y(t, a, x) \\ + \mu(t, a, x)y(t, a, x) - \beta(t, a, x)y(t, 0, x) = f & \text{dans } Q, \\ y(t, a, x) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ y(T, a, x) = 0 & \text{dans } Q_A, \\ y(t, A, x) = 0 & \text{dans } Q_T \end{array} \right. \quad (\text{B.11})$$

où $f \in L^2(Q)$. On suppose, par ailleurs que les fonctions μ et β vérifient les hypothèses suivantes :

$$\mu(t, a, x) = \mu_0(a) + \mu_1(t, a, x) \text{ dans } U \times \Omega \quad (\text{B.12a})$$

$$\mu \geq 0 \text{ dans } U \times \Omega \quad (\text{B.12b})$$

$$\mu_1 \in L^\infty(U \times \Omega), \mu_1(t, a, x) \geq 0 \text{ dans } U \times \Omega \quad (\text{B.12c})$$

$$\mu_0 \in L^1_{loc}(0, A), \lim_{a \rightarrow A} \int_0^a \mu_0(s) ds = +\infty \quad (\text{B.12d})$$

$$\beta \in C^2([0, T] \times [0, A] \times \bar{\Omega}), \quad (\text{B.13a})$$

$$\beta(t, a, x) \geq 0 \text{ dans } [0, T] \times [0, A] \times \bar{\Omega} \quad (\text{B.13b})$$

$$\exists 0 < a_0 < a_1 < A \text{ tel que } \beta(t, a, x) = 0 \text{ dans } [0, T] \times ((0, a_0) \cup (a_1, A) \times \Omega) \quad (\text{B.13c})$$

Proposition B.2. *Sous les hypothèses (B.12)-(B.13), il existe une constante positive C telle que :*

$$\|y(t, \cdot, x)\|_{L^2(Q_T)} \leq C \|f\|_{L^2(Q)} \quad (\text{B.14})$$

$$\|y\|_{L^2(U; H^1_0(\Omega))} \leq C \|f\|_{L^2(Q)}. \quad (\text{B.15})$$

Démonstration. On considère le système (B.11) que l'on multiplie par y et que l'on intègre sur Q . On a alors

$$\int_Q y \left(-\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial a} - \Delta y + \mu y - \beta y(t, 0, x) \right) dx da dt = \int_Q f y dx da dt.$$

En intégrant la précédente égalité par parties, on a :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{Q_A} (y(T, a, x))^2 dx da + \frac{1}{2} \int_{Q_A} (y(0, a, x))^2 dx da - \frac{1}{2} \int_{Q_T} (y(t, A, x))^2 dx dt \\
& + \frac{1}{2} \int_{Q_T} (y(t, 0, x))^2 dx dt + \int_Q \nabla y^2 dx dadt + \int_Q \mu y^2 dx dadt - \int_Q y \beta y(t, 0, x) dx dadt \\
& = \int_Q f y dx dadt.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Comme $\frac{1}{2} \int_{Q_A} (y(0, a, x))^2 dx da > 0$ et $\mu > 0$, on déduit de (B.16) que

$$\frac{1}{2} \int_{Q_T} (y(t, 0, x))^2 dx dt + \int_Q \nabla y^2 dx dadt - \int_Q y \beta y(t, 0, x) dx dadt \leq \int_Q f y dx dadt,$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \int_{Q_T} (y(t, 0, x))^2 dx dt + \int_Q \nabla y^2 dx dadt \leq \int_Q y \beta y(t, 0, x) dx dadt + \int_Q f y dx dadt. \tag{B.17}$$

On rappelle d'une part que β vérifie l'hypothèse (B.13), donc β est bornée dans $L^\infty(Q)$. D'autre part, d'après l'inégalité de Young, il existe deux constantes positives λ_0 et λ_1 telle que

$$\int_Q \beta(t, a, x) y(t, a, x) y(t, 0, x) dx dadt \leq \frac{\|\beta\|_{L^\infty(Q)}}{2} \left(\frac{1}{\lambda_0} \int_Q y^2(t, 0, x) dx dadt + \lambda_0 \int_Q y^2 dx dadt \right)$$

et

$$\int_Q f y dx dadt \leq \frac{\lambda_1}{2} \int_Q f^2 dx dadt + \frac{1}{2\lambda_1} \int_Q y^2 dx dadt.$$

Ainsi, l'inégalité (B.17) devient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{Q_T} (y(t, 0, x))^2 dx dt + \int_Q \nabla y^2 dx dadt & \leq \frac{\lambda_1}{2} \int_Q f^2 dx dadt \\
& + \frac{A\|\beta\|_{L^\infty(Q)}}{2\lambda_0} \int_{Q_T} y^2(t, 0, x) dx dadt \\
& + \frac{1}{2\lambda_1} \int_Q y^2 dx dadt + \frac{\lambda_0\|\beta\|_{L^\infty(Q)}}{2} \int_Q y^2 dx dadt.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante positive $C = C(\Omega)$ telle que

$$\|y\|_{L^2(Q)}^2 \leq C \|y\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}.$$

Par conséquent, l'inégalité (B.18) devient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A\|\beta\|_{L^\infty(Q)}}{\lambda_0} \right) \|y(t, \cdot, x)\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \left(2 - C \left(\frac{1}{\lambda_1} + \lambda_0 \|\beta\|_{L^\infty(Q)} \right) \right) \|y\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}^2 \\ & \leq \frac{\lambda_1}{2} \|f\|_{L^2(Q)}^2, \end{aligned}$$

ce qui équivaut encore à

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{A\|\beta\|_{L^\infty(Q)}}{\lambda_0} \right) \|y(t, \cdot, x)\|_{L^2(Q_T)}^2 + \left(2 - C \left(\frac{1}{\lambda_1} + \lambda_0 \|\beta\|_{L^\infty(Q)} \right) \right) \|y\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}^2 \\ & \leq \lambda_1 \|f\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned}$$

On choisit λ_0 tel que $1 - \frac{A\|\beta\|_{L^\infty(Q)}}{\lambda_0} \geq \frac{1}{2}$ et λ_1 tel que $2 - C \left(\frac{1}{\lambda_1} + \lambda_0 \|\beta\|_{L^\infty(Q)} \right) > \frac{1}{2}$. En d'autres termes, on choisit λ_0 tel que $\frac{3}{2C\|\beta\|_{L^\infty(Q)}} > \lambda_0 > 2A\|\beta\|_{L^\infty(Q)}$ ce qui implique que $\lambda_1 > \frac{2C}{3 - 4AC\|\beta\|_{L^\infty(Q)}^2}$. On obtient alors :

$$\|y(t, \cdot, x)\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|y\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))}^2 \leq 2\lambda_1 \|f\|_{L^2(Q)}^2$$

Et, par suite, en posant $C = \sqrt{2\lambda_1}$, on obtient les estimations

$$\begin{aligned} \|y(t, \cdot, x)\|_{L^2(Q_T)} & \leq C \|f\|_{L^2(Q)} \\ \|y\|_{L^2(U; H_0^1(\Omega))} & \leq C \|f\|_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

□

Bibliographie

- [1] B. AINSEBA : Exact and approximate controllability of the age and space population dynamics structured model. *J. Math. Anal. Appl.*, 275:562–574, 2002.
- [2] B. AINSEBA & M. IANNELLI : Exact controllability of a nonlinear population dynamics problem. *Differential and Integral Equations*, 16(11):1369–1384, 2003.
- [3] B. AINSEBA & M. LANGLAIS : Sur un problème de contrôle d’une population structurée en âge et en espace. *C.R.Acad.Sci., Ser.I*, 323:269–274, 1996.
- [4] B. AINSEBA & M. LANGLAIS : On a population dynamics control problem with age dependence and spatial structure. *J. Math. Anal. Appl.*, 248:455–474, 2000.
- [5] B. AINSEBA & S. ANITA : Local exact controllability of the age-dependent population dynamics with diffusion. *Abstract Appl. Anal.*, 6:357–368, 2001.
- [6] B. AINSEBA & S. ANITA : Internal exact controllability of the linear population dynamics with diffusion. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2004(112):1–11, 2004.
- [7] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle*. Dunod, Paris, 1999.
- [8] T. CAZENAVE & A. HARAUX : *Introduction aux problèmes d’évolution semi-linéaires*, volume 1. Ellipses, Paris, 1990.
- [9] W. L. CHAN & B. Z. GUO : On the semigroup of age-size dependent population dynamics with spatial diffusion. *manuscripta mathematica*, 66:161–181, 1989.
- [10] W. L. CHAN & B. Z. GUO : On the semigroup for age dependent population dynamics with spatial diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 184:190–199, 1994.
- [11] E. FERNANDEZ-CARA, J. LIMACO & S. B. de MENEZES : Null controllability for a parabolic equation with non local nonlinearities. *Systems and Control Letters*, 61:107–111, 2012.
- [12] E. FERNANDEZ-CARA, M. GONZÁLEZ-BURGOS, S. GUERRERO & J-P. PUEL : Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions : the linear case. *COCV*, 12:442–465, 2006.
- [13] A. FURSIKOV & O. YU. IMANUVILOV : Controllability of evolution equations. Lecture notes, Seoul National University, Korea, 1996.

- [14] M. LANGLAIS : A nonlinear problem in age-dependent population diffusion. *SIAM J. MATH. ANAL.*, 16(3):510–529, 1985.
- [15] G. LEBEAU & L. ROBBIANO : Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Comm. P.D.E.*, 20:335–356, 1995.
- [16] J-L. LIONS & E. MAGENES : *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1 and 2. Dunod, Paris, 1988.
- [17] J-L. LIONS : *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1968.
- [18] J-L. LIONS : *Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes*. Masson, Paris, 1992.
- [19] G. MASSENGO-MOPHOU & O. NAKOULIMA : Sentinels with given sensitivity. *Eur. J. Appl. Math.*, 19(1):21–40, 2008.
- [20] G. MASSENGO-MOPHOU & O. NAKOULIMA : Null controllability with constraints on the state for the semilinear heat equation. *J. Optim. Theory. Appl.*, 143(3):539–565, 2009.
- [21] M. MERCAN & G. MOPHOU : Null controllability with state constraints of a linear backward population dynamics problem. *International Journal of Evolution Equations*, 9(1):99–120, 2014.
- [22] M. MERCAN : Optimal control for distributed linear systems subjected to nullcontrollability with constraints on the state. *In Advances in Interdisciplinary Mathematical Research*.
- [23] M. MERCAN : Optimal control for distributed linear systems subjected to nullcontrollability. *Applicable Analysis*, 2012(1):1–16, 2012.
- [24] G. MOPHOU : Null controllability with constraints on the state for nonlinear heat equation. *Forum Mathematicum*, 2011.
- [25] M MOPHOU & J. P. PUEL : Boundary sentinel with given sensitivity. *Revista Mathematica Complutense*, 22(1):165–185, 2009.
- [26] O. NAKOULIMA : Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. *C.R.Acad.Sci., Ser. I*, 339/6:405–410, 2004.
- [27] O. NAKOULIMA : Optimal control for distributed systems subject to null controllability : application to discriminating sentinels. *ESAIM : Control, Optimization and Calculus of Variations*, 4:623–638, 2007.
- [28] O. NAKOULIMA : A revision of J. L. Lions' notion of sentinels. *Portugaliae Mathematica. Portugal. Math.*, 65, 2008.
- [29] O. NAKOULIMA & S. SAWADOGO : Internal pollution and discriminating sentinel in population dynamics problem. *Intern. J. Evol. Equ.*, 1(1):55–67, 2004.

- [30] A. OUEDRAOGO & O. TRAORE : Sur un problème de dynamique de population. *Imhotep : Journal Africain de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4:15–23, 2003.
- [31] A. OUEDRAOGO & O. TRAORE : Optimal control for a nonlinear population dynamics problem. *Portugaliae Mathematica*, 62(2):217–229, 2005.
- [32] J.P PUEL : Applications of global Carleman inequalities to controllability and inverse problems. Lecture notes, 2003.
- [33] P-A. RAVIART & J-M. THOMAS : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. dunod, 2004.
- [34] D. RUSSEL : A unified boundary controllability theory for hyperbolic et parabolic partial differential equations. *Stud. Appl. Math.*, 52(3):189–212, 1973.
- [35] S. SAWADOGO & G. MOPHOU : On a method of resolution of controllability problems for a population dynamics equation. *Journal of Nonlinear Systems and Applications*, pages 205–209, 2011.
- [36] S. SAWADOGO & G. MOPHOU : Null controllability with constraints on the state for the age dependent linear population dynamics problem. *Advances in Differential equations and Control Processes*, 10(2):113–130, 2012.
- [37] D. TATARU : Carleman estimates, unique continuation and controllability for anisotropic PDEs, Optimization methods in partial differential equations. *Amer. Math. Soc.*, pages 267–279, 1996.
- [38] O. TRAORE : Null controllability of a nonlinear population dynamics problem. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2006:1–20, 2006.
- [39] O. TRAORE : Null controllability and application to data assimilation problem for a linear model of population dynamics. *Annales mathématiques Blaise Pascal*, 17:375–399, 2010.
- [40] E. ZUAZUA : Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation. *J. Math. Pures Appl.*, pages 237–264, 1997.