



UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE
FACULTÉ DE SCIENCES
ECOLE DOCTORALE PHYSIQUE ET SCIENCES DE LA MATIÈRE
INSTITUT MATÉRIAUX MICROÉLECTRONIQUE NANOSCIENCES DE
PROVENCE

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Mention: Matière Condensée et Nanosciences

par

RICARDO GABRIEL ELÍAS

Solitons magnétiques et transitions topologiques

Roland Hayn	Examineur
Riccardo Hertel	Rapporteur
Christophe Josserand	Examineur
Anatoli Stepanov	Examineur
Jean-Christophe Toussaint	Rapporteur
Alberto Verga	Directeur de thèse

Soutenue à Marseille le 29 avril 2013

RÉSUMÉ

Dans cette thèse nous étudions théoriquement et numériquement les solitons magnétiques et leurs transitions topologiques. Dans une première partie, nous trouvons une solution en 3 dimensions appelée Point de Bloch qui vient de la minimisation de l'énergie d'échange, de l'énergie de Landau et de l'énergie dipolaire. Les oscillations autour du point de Bloch sont trouvées et quantifiées pour étudier le rôle des fluctuations quantiques dans sa stabilité.

Dans une deuxième partie, nous regardons l'évolution d'un système ferromagnétique avec des textures de topologie non-triviale, couplé à des électrons itinérants qui interagissent avec la texture au moyen de leurs spins. Ce système physique est modélisé avec l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert couplée à l'équation de Schrödinger des électrons quantiques. Des transitions topologiques sont observées et mises dans un cadre général. De la grande quantité des transitions topologiques observées, nous distinguons les différents rôles que jouent les électrons selon le régime et l'ensemble de paramètres. Les ordres de grandeur temporels et spatiales des transitions topologiques montrent l'importance des effets quantiques ainsi que des effets de discrétisation du problème.

ABSTRACT

In this thesis we study the magnetic solitons and its topological transitions, both theoretically and numerically. In the first part, we find a particular configuration of what is denominated the Bloch Point, a three-dimensional solution of the Free Energy minimization with exchange, Landau and dipolar terms. Oscillations around the Bloch point are found and quantized in order to understand the role of quantum fluctuations over its stability.

In the second part, we look at the evolution of a system coupling ferromagnetic textures with nontrivial topology, with itinerant electrons. The interaction between the magnetic texture and the electrons is understood by means of spin-torque phenomena. This physical system is modeled with the equation Landau-Lifshitz-Gilbert equation coupled with Schrödinger equation for quantum electrons. Topological transitions are observed and understood in a general framework that unifies older works done in a more classical context. Among the large amount of topological transitions observed, we can distinguish the different roles played by electrons depending on parameters. The orders of magnitude of time and space in the topological transition events show the importance of quantum effects as well as the fundamental role of discretization.

TABLE DES MATIÈRES

1. <i>Introduction</i>	5
2. <i>Des solitons magnétiques</i>	9
2.1 Introduction	10
2.2 Solitons topologiques	10
2.2.1 Singularités, stabilité et charges topologiques.	14
2.3 Energie libre et solitons dans les ferromagnétiques	15
2.3.1 Ferromagnétisme et solitons tri-dimensionnels	15
2.3.2 Anisotropie magnétique	17
2.3.3 Echange anisotropique et interaction de Dzyaloshinskii-Moriya	18
2.3.4 Energie libre	19
2.3.5 Solitons dans les ferromagnétiques bidimensionnels	20
2.4 Equation de Landau-Lifshitz et ses variantes.	22
2.5 Interaction entre l'aimantation et les électrons de conduction	24
2.5.1 Des aspects phénoménologiques	26
2.6 Charge topologique et dynamique	28
3. <i>Le point de Bloch</i>	31
3.1 Introduction	32
3.2 Minimisation de l'énergie d'échange et famille de monopôles de différents charges topologiques.	33
3.3 Solutions avec les termes dipolaire et de Landau.	35
3.4 Minimisation de l'énergie magnétique.	36
3.4.1 Calcul du champ dipolaire	38
3.4.2 Equations de minimisation.	40
3.4.3 Solution globale type hérisson	40
3.4.4 Solution locale hélicoïdal	41
3.4.5 Des simulations numériques	44
3.4.6 Conclusions	46
3.5 Le point de Bloch quantique	47
3.5.1 Action et équations de mouvement	50
3.5.2 Des perturbations autour d'une solution arbitraire	51
3.5.3 Autour de la solution homogène	52
3.5.4 Autour du point de Bloch, résolution de l'équation de Schrödinger .	52
3.5.5 Des considérations sur la quantification	55
4. <i>Interaction d'un courant électrique avec une texture magnétique</i>	59
4.1 Introduction	60
4.2 Modèle physique	60
4.3 Les solutions analytiques vortex et skyrmions bidimensionnelles	62

4.4	Equations de mouvement	66
4.5	Implémentation numérique	68
4.6	Unités et ordres de grandeur	69
4.7	Dynamique des vortex et skyrmions en absence de courant électrique . . .	72
4.7.1	Des forces gyrotropiques et charge topologique en général	72
4.7.2	Interaction des vortex	73
4.8	Phénoménologie de l'interaction courant-aimantation	74
4.9	Des transitions topologiques	76
4.9.1	Courent continu polarisé sur des réseaux de skyrmions	76
4.9.2	Courant continu sur un réseau de vortex et nucléation de paires vortex-antivortex	80
4.9.3	Changement de polarité d'un skyrmion isolé et rôle des électrons . .	83
4.9.4	Changement de topologie par un paquet gaussien. Renversement de la polarité d'un vortex magnétique	86
4.10	Conclusions	88
5.	<i>Conclusion</i>	91
6.	<i>Annexes</i>	95
6.1	Elements de magnétisme	96
6.2	Spin équation	97
6.3	Introduction du champ électrique et les équations de mouvement.	99
6.4	Transformation stéréographique	100
6.5	Transformation de jauge sur le champ Ψ	103

1. INTRODUCTION

La spintronique¹ est une nouvelle branche de la physique qui étudie l'interaction entre les courants électriques et les champs magnétiques dans la matière, en considérant autant la charge des électrons que leur spin quantique [37, 13]. On distingue différents domaines de la spintronique selon si le matériau considéré est un métal ferromagnétique, un semi-conducteur ferromagnétique, ou un semi-conducteur paramagnétique. Depuis son début, la spintronique est fortement liée au développement du stockage, et au transfert d'information. Dans ce but, il a été suggéré que certains objets topologiques, observés dans les ferromagnétiques, pourraient servir comme bits d'information grâce à leur petite taille et à leur stabilité. Des études menées pour comprendre ces objets, appelés *solitons*, ont été faites dans les différentes branches de la physique, et plus particulièrement, dans la physique des ferromagnétiques bien avant l'arrivée de la spintronique. Cependant, de nouveaux défis pratiques et expérimentaux, tels que la manipulation des solitons magnétiques par des courants électriques, ont repoussé la recherche théorique au-delà du cadre de la physique classique dans laquelle elle s'était développée auparavant. La théorie visant à décrire de manière définitive l'interaction entre l'aimantation et le courant électrique est en plein développement engendrant nombre de controverses dans son sillage. Mis à part le fait qu'une théorie générale ne peut pas aboutir en raison de différences entre les matériaux, on trouve une difficulté supplémentaire provenant du cadre de validité des modèles, selon les énergies en jeu et les ordres de grandeurs considérés. Ainsi par exemple, il n'est pas encore clair que les effets quantiques des électrons sur l'aimantation puissent être introduits de manière univoque dans une équation effective de Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG). De même, les restrictions de la limite continue dans des situations singulières où il existe des variations de champs de l'ordre du réseau cristallin ne sont pas encore établies.

L'utilisation de solitons topologiques, comme alternative de stockage d'information, a posé naturellement la question de la possibilité de transitions entre différentes configurations topologiques. Ces types de transitions topologiques, interdites du point de vue des théories continues, ont été observés dans le contexte du micromagnétisme, dans le cas des vortex magnétiques. En particulier, la transition entre un vortex de polarité positive vers un autre de polarité négative (ou vice-versa) a été réussie numériquement et expérimentalement avec des champs magnétiques externes et des courants polarisés. La dynamique complexe de ce type de processus rend difficile sa compréhension théorique, et l'élucidation des mécanismes microscopiques reste un sujet ouvert. Les transitions topologiques, dans le cadre de l'équation de LLG, contiennent un paradoxe qui est à la base de cette thèse : des transitions topologiques, interdites par l'équation de LLG continue, sont observées dans les simulations numériques et dans les expériences. Paradoxalement, cette équation semble bien reproduire les régions de paramètres expérimentales où les transitions se produisent. Il semble que des situations singulières, telles que les transitions topologiques, peuvent se produire grâce aux discrétisations numériques des équations, et à des ordres de grandeurs qui sortent du cadre de validité de ces mêmes équations. Autrement dit, pour comprendre la nature des transitions topologiques, il faut des modèles qui tiennent compte de la discrétisation naturelle de la physique du problème, ainsi que des effets quantiques se produisant à ces ordres-là.

Dans ce contexte, nous étudions dans cette thèse des solitons magnétiques bi et tri-dimensionnels. Cette étude se déroule, dans un premier temps, en prêtant spécialement attention aux ordres de grandeurs des différents termes d'énergies introduits dans l'énergie

1. Le mot *spintronique* est un néologisme dérivé de la contraction des mots *spin* et *électronique*.

libre classique. On considère aussi la relation topologique entre les solitons de différentes charges. Ce dernier élément permet d'avoir une vision très utile dû fait de sa généralité.

Ainsi dans le chapitre 2 nous expliquons du point de vue mathématique la signification d'un soliton topologique, la notion de stabilité topologique, et l'idée de singularité. Ensuite, nous appliquons ces notions à un ferromagnétique classique où on peut trouver des solitons pour des domaines uni, bi et tri-dimensionnels : parois de Bloch et de Néel, skyrmions et vortex magnétiques, points de Bloch et invariant d'Hopf, respectivement. Nous étudions aussi dans ce chapitre la dynamique classique puis l'introduction des électrons quantiques, ainsi que la dynamique effective de LLG après l'introduction des électrons et sous l'hypothèse adiabatique. Finalement, l'évolution et conservation de la charge topologique est discutée.

Dans le chapitre 3 nous étudions en détail le point de Bloch. D'abord, nous trouvons la solution classique en faisant une discussion sur les ordres de grandeurs, la singularité et la structure interne. Puis, nous faisons des simulations numériques qui confirment les prédictions analytiques. Finalement, nous attaquons le problème des effets quantiques sur le point de Bloch, en utilisant les idées de la quantification des solitons classiques.

Le travail se poursuit dans le chapitre 4, avec une étude numérique et l'étude de certains aspects analytiques concernant l'interaction entre une texture magnétique de topologie non-triviale (plus précisément des skyrmions et vortex) et un courant électrique qui évolue de façon quantique. Des événements topologiques d'annihilation et nucléations, présentant parfois des changements globaux ou locaux de topologie, sont observés et analysés. Finalement le rôle des électrons est discuté.

2. DES SOLITONS MAGNÉTIQUES

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous développons avec plus de détail les concepts et équations qui seront utilisés au long de cette thèse.

Nous commençons avec une discussion générale de ce qu'on entend par solitons topologiques ou défauts topologiques. Ensuite, nous verrons comment s'appliquent ces concepts au cas d'un système de spins couplés ferromagnétiquement pour lequel nous définissons la charge topologique.

Puis, nous évoquerons les aspects dynamiques des vortex dans les ferromagnétiques. Pour cela nous introduisons l'équation de Landau-Lifshitz dans ses différentes formes et en présence de courants électriques, ainsi que la conservation de la charge topologique précédemment définie. Enfin, nous discutons de certaines conséquences théoriques des transitions qui violent cette loi de conservation.

2.2 Solitons topologiques

Le concept de défaut topologique ou de soliton topologique fait référence à un type de solution d'une équation différentielle partielle qui est stable par le fait qu'elle ne peut pas être déformée continûment en une solution homogène. Bien que cette définition soit assez intuitive, l'explication profonde de ces solutions repose sur la topologie et les propriétés des fonctions entre deux espaces définis par un système physique : l'espace physique et l'espace de solutions [54].

Nous allons maintenant faire un résumé des idées générales tout en essayant de rester précis.

L'idée intuitive de la topologie est assez simple et nous pouvons la trouver par exemple exprimée dans l'article de Wikipedia sur ce sujet : *La topologie est une branche des mathématiques concernant l'étude des déformations spatiales par des transformations continues (sans arrachages ni recollement des structures).*

Pour ce qui nous intéresse, le lien entre physique et topologie vient de la considération des fonctions continues entre deux espaces de importance capitale pour les systèmes physiques.

Le premier d'entre eux est tout simplement l'espace défini par le champ qui définit le système¹. Ce champ peut être scalaire, vectoriel ou tensoriel, réel ou complexe ; et selon le contexte on l'appelle l'*espace du paramètre d'ordre* ou *variété d'états internes*² [54]. Dans certains cas, plutôt que de s'intéresser à tout le champ on s'intéresse à la variété formée par les états qui minimisent l'énergie du système. Dans ce cas on parle de l'*espace de solutions*. Par exemple, dans un cristal liquide le paramètre d'ordre est le «directeur» $\mathbf{m}$ (*i.e.* une quantité qui a une direction mais pas un sens, autrement dit, un vecteur «sans flèche») et si le système est isotrope toutes les directions peuvent être solution

1. Exemples de champs sont la fonction d'onde d'un système quantique Ψ , le champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, les champs effectifs comme les paramètres d'ordre des théories de Landau, et caetera.

2. Une variété de dimension n est un espace topologique qui localement est isomorphe à $\mathbb{R}^n$.

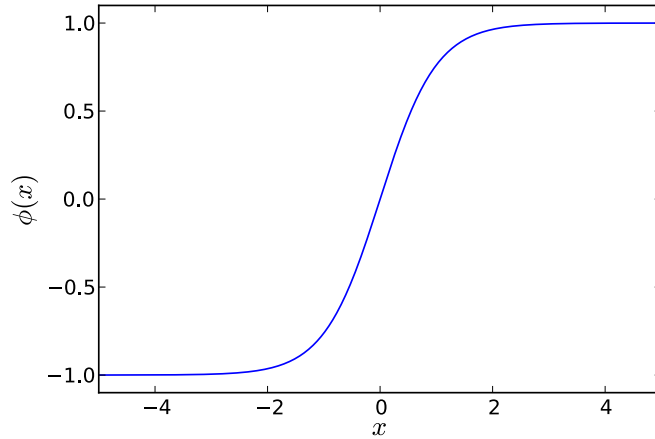


Fig. 2.1: Nous voyons la solution kink $\phi = \tanh(x)$ qui unit asymptotiquement les solutions d'équilibre $+1$ et -1 . L'antikink est celle qui va de -1 à $+1$. Les deux configurations sont les solutions topologiques les plus simples qui existent.

d'équilibre ; comme quoi l'espace de solutions constitue une sphère où l'on identifie les points antipodaux. De façon générale, nous allons appeler la variété associée aux champs $\mathcal{O}$. D'autres exemples de variétés associées aux espaces de solutions sont par exemple la sphère S^2 pour un système de spins isotropes ou la sphère S^0 (les points $+1$ et -1) pour un système de spins avec un axe facile.

Le deuxième espace à considérer est l'espace physique. En suivant le même raisonnement qu'avant, nous pouvons associer à n'importe quelle région de l'espace physique une variété $\mathcal{P}$. En général, on va s'intéresser soit au bord de la région qui entoure un soliton soit à l'espace entier. Par exemple, dans un système bidimensionnel (2D), la variété associée au bord d'une région serait un cercle et celle associée à tout l'espace est un plan. Similairement, un système 2D rectangulaire à conditions de bords périodiques peut être associé au tore T^2 .

Ainsi, nous nous intéressons aux fonctions qui vont de l'espace physique à l'espace d'états internes :

$$f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}.$$

Dans ce contexte, on définit la solution triviale comme la solution qui est représentée par une fonction qui va de l'espace physique $\mathcal{P}$ vers un seul point de $\mathcal{O}$. Cette solution n'est rien d'autre qu'une solution homogène. Nous nous apercevons qu'il peut arriver que certaines de ces fonctions ne puissent pas être déformées continûment en la solution triviale. Ces fonctions représentent des solutions topologiques.

Précisons avec quelques exemples.

Prenons un système dans la ligne réelle caractérisé par un paramètre d'ordre scalaire ϕ et dont les solutions d'équilibre sont les points ± 1 . Ceci constitue le cas du système ϕ^4 [64]. En général, pour regarder les propriétés d'un système au bord nous faisons des transformations qui amènent les infinis à une région finie de l'espace. Par exemple, dans le cas d'une ligne infinie nous pouvons toujours identifier les infinis avec les points ± 1 .

Dans le cas présent, cette considération nous donne $\mathcal{P} = \mathcal{O}$. Les états d'énergie minimale du système (solutions homogènes) correspondent aux fonctions qui amènent les points ± 1 de l'espace physique *au même point* $+1$ où -1 de l'espace de solutions. Les fonctions qui amènent les points physiques ± 1 à deux points différents ne peuvent pas être déformées aux solutions homogènes car les deux ensembles sont discrets. Ces fonctions représentent des solutions topologiques asymptotiques qui unissent le point -1 en $-\infty$, avec le point $+1$ en $+\infty$ (ou vice-versa). Ces solitons s'appellent kinks et antikinks, solutions que l'on voit dans la fig. 2.1.

Dans certains cas, l'analyse du bord ne suffit pas pour déterminer s'il y a un soliton. Ainsi, si nous regardons le bord d'un système de spins isotropes dans un plan, l'espace physique est identifié à S^1 (car le bord de $\mathbb{R}^2$ peut se projeter sur S^1), alors que l'espace de solutions s'identifie à S^2 . Il s'agit alors de regarder les fonctions du cercle en la sphère ou les familles de boucles sur la sphère. Sur la sphère, n'importe quelle boucle peut toujours être déformée à un point qui représente la solution homogène. Autrement dit, il y a toujours une transformation continue qui amène n'importe quelle configuration dans le plan à la solution triviale, comme nous le montrons dans la fig. 2.2. Cependant, comme nous le voyons plus bas, la situation change lorsque nous considérons le comportement du champ dans *tout* l'espace $\mathbb{R}^2$.

Dans le langage de la topologie, les transformations continues qu'amènent une fonction quelconque à une autre s'appellent *homotopies* et les fonctions qui sont liées par homotopies s'appellent *fonctions homotopiquement équivalentes*. Cette relation est une relation d'équivalence et permet de classer les chemins (1D) ou surfaces (2D) sur une variété en classes distinctes. Ces classes d'équivalence, plus la composition entre différents chemins (vue comme un produit) ont une structure de groupe. Le fait que ce groupe soit isomorphe à un ensemble discret (comme par exemple $\mathbb{Z}$) veut dire que les familles de courbes et surfaces donnent lieu à des familles de solutions topologiquement distinctes, normalement caractérisées par une charge. Le groupe formé par les classes d'équivalence de courbes 1D d'une variété s'appelle le *groupe fondamental* ou *groupe de Poincaré* de cette variété, et se désigne par π_1 . Le groupe de classes d'équivalences de surfaces sur une variété est appelé π_2 , et ainsi de suite [59].

Grâce aux théorèmes de la topologie, nous pouvons prédire l'existence de certaines configurations dont la vraie existence va dépendre du système physique réel (dynamique, énergie nécessaire pour leur existence, et cætera). Pour l'espace physique réel, nous pouvons considérer soit tout l'espace, soit son bord. De la même manière, l'espace de solutions change quand il y a des contraintes (telles que les anisotropies). Les combinaisons sont multiples et nous le résumons dans la table 2.1.

En référence à cette table : Pour le cas où $\mathcal{P} = S^0$ (un système à une dimension), la raison pour laquelle il n'existe pas de solitons quand l'espace de solutions est S^1 ou S^2 est que deux points sur un cercle ou sur une sphère peuvent toujours être déformés à un point. Dans le cas où $\mathcal{P} = S^1$ et $\mathcal{O} = S^2$ l'argument pour l'inexistence est que toute boucle dans la sphère peut être amenée à un point. Ces arguments doivent s'appliquer à tous le cas où $\dim \mathcal{P} < \dim \mathcal{O}$, mais nous ne connaissons pas de théorèmes la-dessus.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{O}$	soliton
$\mathbb{R}, S^0$	S^0	kink, parois de Néel, parois de Bloch
	S^1	-
	S^2	-
$\mathbb{R}^2, S^1$	S^0	kink 2D
	S^1	vortex 2D (cœur indéterminé)
	S^2	-
$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \leftrightarrow S^2$	S^2	skyrmion, vortex 2D
$\mathbb{R}^3, S^2$	S^0	kink 3D
	S^1	ligne de vortex
	S^2	monopôle, point de Bloch
$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \leftrightarrow S^3$	S^2	soliton d'Hopf

Tab. 2.1: Dans la première colonne nous représentons l'espace physique $\mathcal{P}$ et sa correspondance avec une n-sphère selon que nous regardions le bord ou l'espace entier. Dans la deuxième colonne, l'espace de solutions $\mathcal{O}$, est déduit par des propriétés de l'hamiltonien d'un champ unitaire. S^0, S^1, S^2 correspondent respectivement à des systèmes avec un axe facile, avec un plan facile et isotrope. Dans la troisième colonne nous voyons les solitons que l'on peut trouver dans chaque cas.

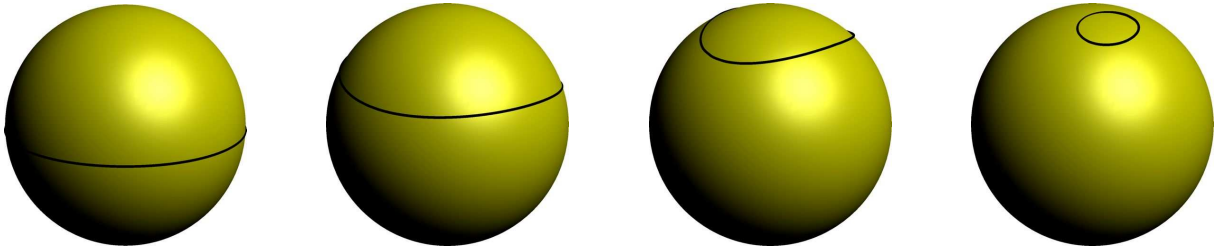


Fig. 2.2: N'importe quelle courbe fermée sur la sphère peut être déformée continûment dans un point. Ceci montre que dans un système de spins isotrope bi-dimensionnel le comportement asymptotique ne suffit pas pour déterminer s'il existe des solitons topologiques.

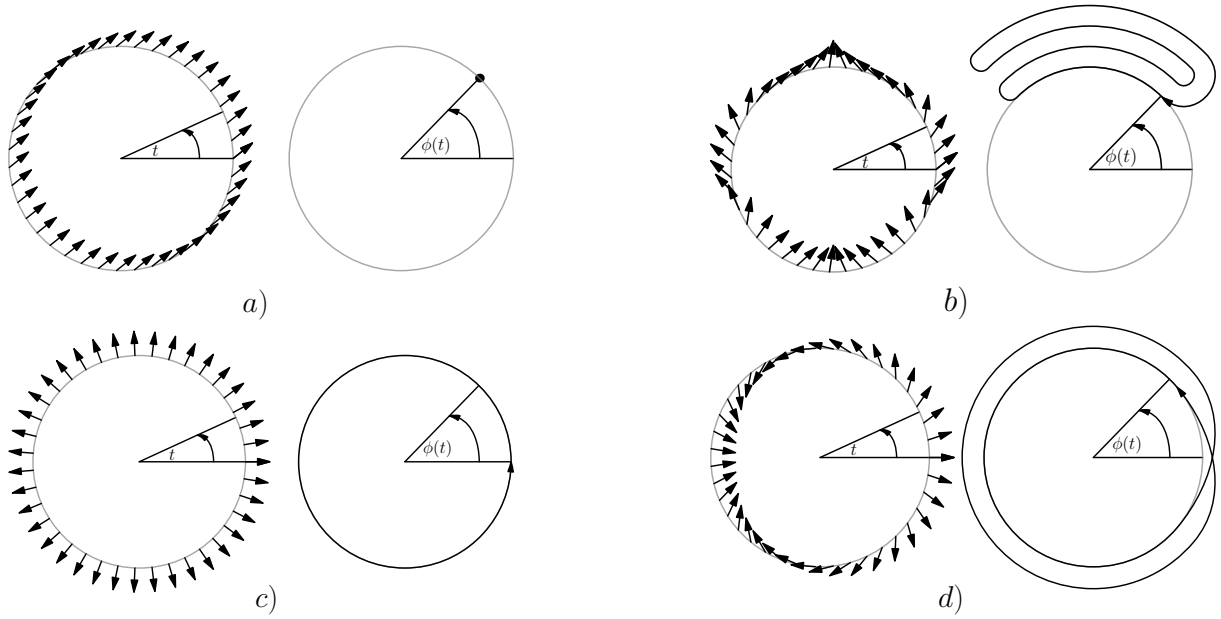


Fig. 2.3: Représentation géométrique des fonctions de S^1 en S^1 . Chaque courbe peut être déformée continûment en une courbe qui tourne un nombre entier de fois c autour du cercle. Dans la figure a), un champ homogène sur le cercle se représente comme un point sur le cercle de la droite ($c = 0$) ; bien que la figure b) soit plus compliquée, la courbe est déformable en un point et donc la charge est également nulle. Dans les figures c) et d) nous voyons deux exemples avec respectivement $c = 1$ et $c = 2$.

2.2.1 Singularités, stabilité et charges topologiques.

Considérons un système bidimensionnel de spins restant dans le plan et une boucle autour d'un point. Si toutes les directions dans le plan sont équivalentes, alors l'espace de solutions correspond à un cercle dont chaque point représente une solution possible. De même, dans l'espace physique le comportement topologique est déterminé par un cercle qui entoure ce point. Ainsi les fonctions qui nous intéressent sont :

$$f : S^1 \rightarrow S^1.$$

Autrement dit, des boucles fermées sur le cercle unitaire. Intuitivement, nous savons que si nous parcourons le cercle et nous revenons au même point de départ, ces trajectoires seront toujours déformables continuellement en une trajectoire qui entoure le cercle complet un nombre entier de fois (0 y compris) dont le signe donne la direction du parcours, comme nous le montrons dans la figure 2.3. Mathématiquement cela s'exprime en disant que le groupe fondamental est isomorphe à l'ensemble des entiers :

$$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Dû au fait que chaque famille de courbes est libellée par un nombre entier, nous ne pouvons pas passer continûment d'une configuration à une autre ayant un n différent, c'est-à-dire ces solutions sont homotopiquement différentes et donc, topologiquement stables.

Si nous nous approchons du centre, la situation ne changera pas et il y aura forcément un point à l'intérieur de la boucle où le spin change de 2π dans une région aussi petite que l'on veut. Ce fort gradient produit une singularité « au centre ».

Le nombre c est appelé « indice » et en raison de sa nature discrète il donne lieu à une quantité conservée par la dynamique, qui est présupposée continue. Il ne peut donc pas faire de sauts entre des valeurs discrètes³. Cette quantité conservée est appelée *charge topologique*, et le fait qu'elle ne disparaisse que lors de changements discontinus s'appelle *stabilité topologique*.

Notons finalement qu'il peut y avoir aussi des solitons sans singularités. C'est-à-dire une singularité n'est pas une condition nécessaire pour l'existence d'une charge topologique. L'affirmation contraire est vraie aussi, à savoir, il peut y avoir des solutions singulières sans que leurs origines ne soient topologiques.

2.3 Energie libre et solitons dans les ferromagnétiques

2.3.1 Ferromagnétisme et solitons tri-dimensionnels

Le ferromagnétisme est le phénomène par lequel certains matériaux métalliques solides ont un moment magnétique spontané quand ils se trouvent en dessous de leur température critique T_c [41]. L'explication d'un tel comportement se trouve dans la mécanique quantique et dans l'interaction des spins des électrons des différents atomes dans le réseau cristallin. Cette interaction peut être très complexe, et dans la description microscopique du ferromagnétisme il y a divers mécanismes pour décrire ce phénomène de base [72] : le fait que les différents spins du réseau (ou une partie d'entre eux) ont tendance à s'aligner de façon à produire une aimantation macroscopique⁴. Par exemple, nous mentionnons le modèle de Hubbard, où on considère l'énergie cinétique des électrons comme dans les modèles de liaisons fortes avec une énergie de saut t et un paramètre de réseau a , plus un terme de répulsion paramétrisé par une constante $U > 0$. À partir du modèle de Hubbard on peut démontrer le critère du Stoner pour l'existence de la phase ferromagnétique

$$U\nu(\epsilon_F) > 1$$

où pour un système de N particules, $\nu(\epsilon_F) = N \sum_{\mathbf{k}} \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F)$ est la densité d'état à l'énergie de Fermi ϵ_F , et $\epsilon_{\mathbf{k}} = -2t \sum_{\alpha} \cos(k_{\alpha}a)$ est la relation de dispersion des électrons libres pour l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ dans l'espace de Fourier.

Une autre approche du problème est de considérer les électrons dans le conducteur comme un gaz de Fermi avec un potentiel de répulsion δ . Ce modèle prédit que dans certaines situations on peut avoir une température critique nulle ; autrement dit, du désordre même en l'absence de fluctuations thermiques. Dans ce cas la source du désordre sont les fluctuations quantiques et ce point critique de température zéro est appelé *point critique quantique* [58].

3. Cette condition est très générale et d'une nature autre que celle des quantités conservées telles que l'énergie ou le moment (où la conservation est une conséquence des symétries internes de l'hamiltonien).

4. Il y a fondamentalement deux approches théoriques supplémentaires pour expliquer le ferromagnétisme : le magnétisme localisé et itinérant. Dans le premier, l'énergie cinétique des électrons prévaut et ils se comportent plus comme des ondes de Bloch que comme particules ; tandis que dans la deuxième approche c'est l'énergie de répulsion de Coulomb qui domine, produisant des électrons localisés qui se comportent comme des particules.

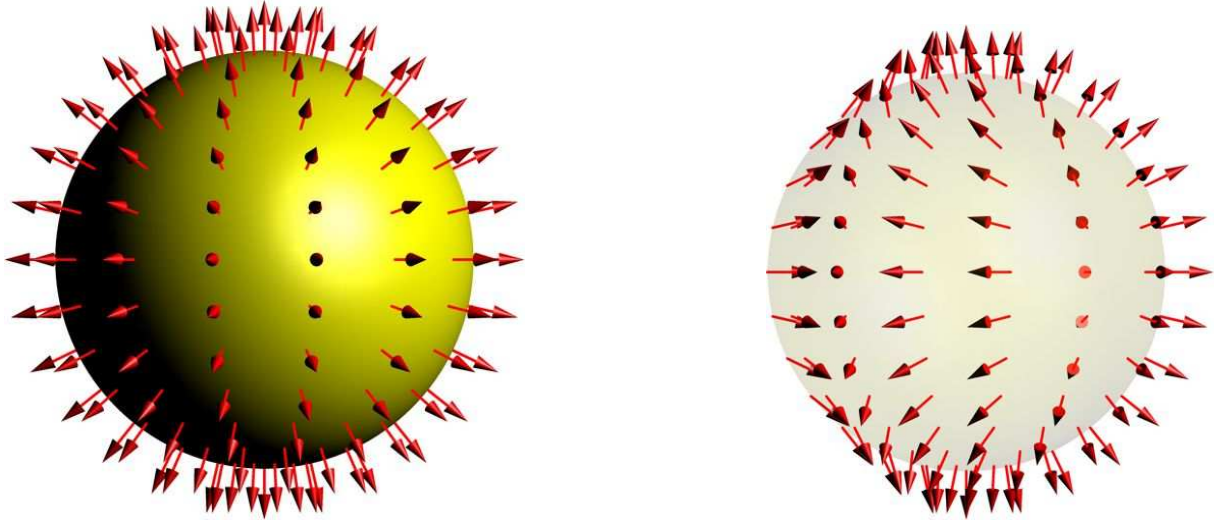


Fig. 2.4: Point de Bloch avec $Q = 1$ et soliton avec $Q = -2$.

Dans cette thèse, nous nous contentons du modèle le plus standard pour décrire le couplage ferromagnétique : le modèle de Heisenberg, qui considère que dans chaque site i du réseau il y a un spin $\hat{\mathbf{S}}_i$ qui interagit avec ses voisins proches de façon telle que l'énergie est minimale quand ils sont parallèles. Cette interaction peut se caractériser par l'hamiltonien de Heisenberg :

$$\mathcal{H}_S = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j, \quad (2.1)$$

où $\langle i,j \rangle$ sont les paires de premiers voisins et J la constante d'échange, qui représente le degré de couplage entre les spins.

Il est intéressant de remarquer que la version plus générale du modèle de Heisenberg tient compte de constantes d'échange qui peuvent dépendre de la position J_{jk} . Ainsi l'interaction entre les spins peut être de longue portée. Par une théorie de champ moyen il est possible de montrer que la température critique est :

$$k_B T_c = \sum_k J_{jk},$$

avec k_B la constante de Boltzmann, et j un point arbitraire. Pour un réseau carré avec interaction à premiers voisins les constantes d'échange sont $J_{jk} = J(\delta_{j,k-1} + \delta_{j,k+1})$ et $k_B T_c = nJ$ où n est le nombre de premiers voisins.

L'hamiltonien (2.1) constitue le modèle le plus simple d'un ferromagnétique car il n'a pas de contraintes géométriques, c'est-à-dire il est isotrope, et il ne comporte pas des termes d'interaction dipolaires entre les spins. Cependant, il constitue souvent le point de départ de l'analyse d'un métal ferromagnétique et le terme d'interaction le plus important d'entre tous. Avec lui, nous pouvons déjà dire un mot sur les solitons dans le système physique qu'il décrit.

Nous traitons le spin localisé comme une variable classique $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \langle \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \rangle$. Autrement dit, le spin classique est tout simplement la moyenne de l'opérateur quantique $\hat{\mathbf{S}}$.

Par ailleurs, nous pouvons aisément trouver la limite continue de l'hamiltonien de Heisenberg, en faisant :

$$-\sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_j) \cdot (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_j) - \frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^2 + S_j^2) \rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{d^3x}{a^3} a^2 (\nabla \mathbf{S})^2 + \text{const.} \quad (2.2)$$

Les termes «const.» sont ceux qui dépendent de la norme de $\mathbf{S}$ et donc ils ne varient pas. Ils peuvent être absorbés en redéfinissant le minimum de l'énergie. Notons que dans cette équation la signification de $\nabla \mathbf{S}$ est celle d'un tenseur de deuxième ordre $\partial_i S_j$ et son carré est la somme sur toutes les coordonnées des gradients de chaque composante de $\mathbf{S}$ (somme qui vient de la somme sur $\langle i, j \rangle$, les premiers voisins dans les trois directions spatiales). C'est-à-dire, on a que :

$$(\nabla \mathbf{S})^2 \equiv (\nabla S_x)^2 + (\nabla S_y)^2 + (\nabla S_z)^2 = \partial_i S_j \partial_i S_j, \quad (2.3)$$

où dans la dernière expression nous utilisons la convention d'Einstein de somme sur des indices muets.

L'état qui minimise cette énergie est celui qui a tous les spins pointant dans la même direction. Cet état est dégénéré et n'importe quelle direction est admise comme l'état d'énergie minimale et est choisie par le mécanisme de brisure spontanée de symétrie. Ainsi, en considérant seulement la direction de $\mathbf{S}$, l'espace de solutions $\mathcal{O}$ est S^2 . De la même manière, en 3D la variété qui représente le bord est S^2 . Les familles de fonctions de S^2 en S^2 sont classifiées par le deuxième groupe d'homotopie de la sphère, isomorphe aux entiers :

$$\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Cette relation exprime le fait que lorsqu'on recouvre la sphère 2D avec un champ vectoriel unitaire, la nombre de fois que le champ parcourt la sphère complète est un invariant entier, qui constitue une charge topologique et qui a une singularité du même ordre dans la structure magnétique [18, 12]. Ces solutions sont une famille de monopôles dont celui d'énergie plus petite est appelé le point de Bloch que nous étudierons plus en détail au chapitre 3. Dans la figure 2.4 nous montrons deux exemples de ces monopôles.

Finalement, il existe un soliton magnétique tridimensionnel qui vient de la considération de tout l'espace tri-dimensionnel plus l'infini comme étant une sphère dans un espace de 4 dimensions (c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \leftrightarrow S^3$) pliée sur la sphère 2D. Ces transformations ont aussi la propriété :

$$\pi_2(S^3) \simeq \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

et la charge topologique associée s'appelle *invariant d'Hopf* [43].

2.3.2 Anisotropie magnétique

Les matériaux n'ont pas toujours la symétrie de rotation continue présente dans l'hamiltonien de Heisenberg. En général, il y a fondamentalement deux sources d'anisotropie : l'interaction dipolaire et l'interaction spin-orbite dans un réseau cristallin.

L'interaction dipôle-dipôle entre les spins des électrons contribue avec une énergie qui est donnée par :

$$\mathcal{H}_{dip} = \frac{J_d}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} [\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - 3(\mathbf{S}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})(\mathbf{S}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}_{ij})], \quad (2.6)$$

où $J_d > 0$ est une constante de couplage positive qui peut être calculée explicitement pour chaque matériau. Cette interaction est de longue portée car elle décroît inversement au cube de la distance. Le premier terme se minimise quand les spins voisins sont anti-parallèles, favorisant l'ordre anti-ferromagnétique, tandis que le deuxième a la propriété de se minimiser quand les spins s'alignent au long des directions qui les unissent. Ce terme fait que les matériaux de dimension spatiale plus grande que un s'ordonnent en petits morceaux d'aimantation constante appelés *domaines* dont les régions de transition sont appelées *parois de domaines*. La compétition entre l'interaction d'échange et l'interaction dipolaire fait que les parois des domaines doivent être de petite taille car les changements de direction coutent de l'énergie d'échange et aussi dipolaire. Même en considérant que l'énergie d'échange est plus importante que l'énergie dipolaire ($Ja^3 > J_d$), la longue portée de l'énergie dipolaire fait qu'il est toujours avantageux pour des grands systèmes de s'ordonner en domaines. La même raison fait que l'énergie dipolaire est sensible à la forme du matériau ; raison pour laquelle elle donne lieu à un type d'anisotropie appelée *anisotropie de forme* [13].

L'autre source microscopique d'anisotropie est le couplage spin-orbite. Ce couplage est d'origine relativiste. Dans le réseau, il y a des champs électriques qui dans le système de référence de l'électron en mouvement sont aperçus comme champs magnétiques (en accord avec transformations relativistes des équations de Maxwell). Ce champ magnétique se couple via l'interaction de Zeeman avec le spin de l'électron. Cette interaction produit une anisotropie cristalline car dans un réseau cristallin la symétrie de rotation continue est brisée et cette brisure de symétrie est communiquée aux spins par moyen du couplage de spin-orbite. Les types d'anisotropies que le couplage spin-orbite produit sont appelées *anisotropies cristallines* et font que les spins ont tendance à s'aligner dans une certaine direction (axe facile) ou au contraire d'éviter une autre (axe dure $\sim$ plan facile). Par exemple le terme suivant dans l'hamiltonien :

$$\mathcal{H}_{ani} = K \sum_i (S_i^z)^2, \quad (2.7)$$

produit un système avec un plan facile (x, y) si $K > 0$, ou un système avec un axe facile z si $K < 0$. Ceci car l'énergie est minimale quand $S_i^z = 0$ ou $S_i^z = 1$, respectivement.

2.3.3 Echange anisotropique et interaction de Dzyaloshinskii-Moriya

Il a été suggéré qu'en absence de symétrie d'inversion (c'est-à-dire, quand la relation $\mathbf{S} \rightarrow -\mathbf{S}$ n'est plus valable) il existe des interactions spin-orbite chirales qui peuvent être décrites par une interaction d'échange de la forme [10] :

$$H_{DM} = - \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{D}_{ij} \cdot \mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j, \quad (2.8)$$

où $\mathbf{D}_{ij}$ est appelé le vecteur de Dzyaloshinskii-Moriya et satisfait la relation d'anti-symétrie $\mathbf{D}_{ij} = -\mathbf{D}_{ji}$. Cette interaction, exprimée localement devient :

$$H_{DM} = -\frac{D}{2} \sum_i \mathbf{S}_i \cdot (\nabla \times \mathbf{S}_i), \quad (2.9)$$

terme que nous ajoutons à l'analyse dans les cas des skyrmions [1] observés par exemple dans les cristaux de MnSi, qui développent de l'ordre magnétique hélicoïdal [57].

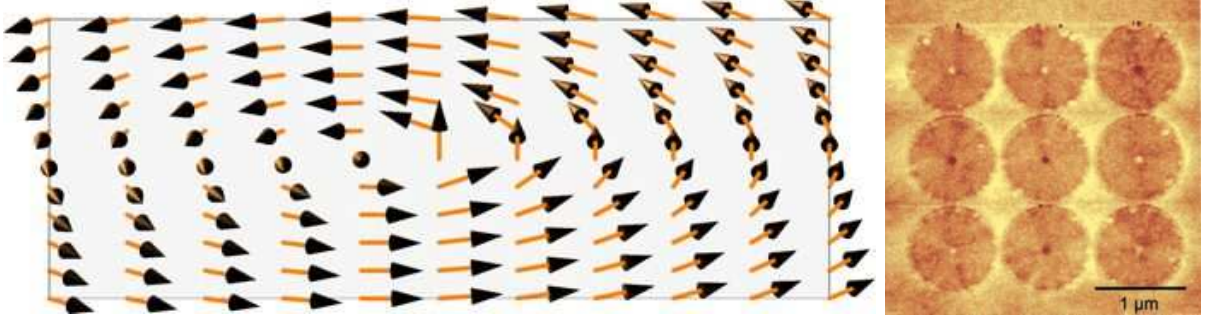


Fig. 2.5: Vortex magnétique de charge $1/2$. Sur la gauche, la solution analytique et sur la droite l'observation par microscopie à force magnétique (MFM) dans des domaines circulaires de permalloy ($\text{Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$) de $1\mu\text{m}$ de diamètre et de 50nm d'épaisseur. Dans cette dernière image, la couleur foncée ou claire au centre des vortex indique la polarité (figure prise de [66]).

2.3.4 Energie libre

Comme nous l'expliquons dans l'Annexe 6.1, la relation entre l'aimantation macroscopique $\mathbf{M}$ et le spin adimensionnel classique $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \langle \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{x}) \rangle$ est donnée par :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar\gamma}{a^3}\mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

où $\hbar$ est la constante de Planck, γ le rapport gyromagnétique et a la constante du réseau. Le signe moins est conséquence de la charge de l'électron. Cette relation met en évidence le lien étroit qui existe entre le ferromagnétisme classique, c'est-à-dire l'étude de la variable macroscopique $\mathbf{M}$ et le spin, lui même de nature quantique. La valeur de la constante

$$M_s = \frac{\hbar\gamma}{a^3S},$$

est appelée *aimantation de saturation*. Dans le cadre classique, la limite continue de l'énergie dipolaire donne, entre d'autres termes, $-\frac{\mu_0}{2} \int d^3x \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}$, et le fait que l'énergie doit être minimale quand le matériau atteint l'aimantation de saturation s'explique par l'énergie de Landau [48] qui nous introduisons ici de manière phénoménologique sans nous soucier de son origine microscopique :

$$f_L = a_L M^2 + b M^4, \quad (2.11)$$

avec $a_L < 0$ dans la phase ferromagnétique, et $b > 0$. Avec ces termes et le lien entre $\mathbf{S}$ et $\mathbf{M}$ nous pouvons trouver l'énergie libre classique du système :

$$\mathcal{F}[\mathbf{M}] = \int_V \left[\frac{A_s}{2} (\nabla \mathbf{M})^2 + \frac{K}{2} (M_z)^2 + f_L(M) - \frac{\mu_0}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} \right] dV, \quad (2.12)$$

avec A_s est la constante d'échange qui est lié aux paramètres microscopiques J , a et M_s par $A_s = J/M_s^2 a$.

Vu la correspondance entre $\mathbf{S}$ et $\mathbf{M}$ nous utiliserons par la suite les deux, en fonction de si nous nous intéressons à la nature discrète et quantique du phénomène ou plutôt à la dynamique classique. Comme nous le montrons ci-dessous, $|\mathbf{M}|$ est une quantité conservée et souvent nous allons la normaliser pour profiter des propriétés algébriques du champ unitaire $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$.

2.3.5 Solitons dans les ferromagnétiques bidimensionnels

Considérons un système bidimensionnel avec une anisotropie plan facile. Evidemment, à l'infini, le champ doit être dans l'état d'énergie minimale, c'est-à-dire, dans le plan. Les familles de configurations possibles sortent alors des fonctions de S^1 en S^1 . Ces familles sont indexées par l'indice c (voir figure 2.3). Le fait que le champ tourne de $2\pi c$ autour d'un point donné est une preuve de l'existence des vortex dans la région entourée par la boucle «à l'infini». Cependant, le comportement du champ au cœur du vortex n'est pas déterminé par cette grandeur, et il existe plusieurs possibilités selon que les spins soient contraints de rester dans le plan ou pas. Quand l'aimantation est contrainte de rester dans le plan il doit y avoir une singularité produite par le fait que le champ tourne de 2π dans une région infiniment petite. Mais, quand le champ de spin peut sortir du plan, cette singularité est résolue par l'aimantation en développant un cœur de petite taille où les spins sortent du plan. Comme il existe deux sens possibles où les spins au cœur peuvent pointer, il s'ajoute aux propriétés topologiques une nouvelle quantité appelée la polarité p dont la valeur est discrète et ne peut avoir que les valeurs ± 1 . Celui-ci est le vortex physique que l'on observe dans les expériences [66] et que nous montrons dans la figure 2.5.

Pour comprendre l'aspect topologique nous observons qu'il existe une transformation qui amène les points d'un plan vers celui d'une sphère. Cette transformation s'appelle *transformation stéréographique* et nous la montrons graphiquement dans la figure 2.6. Cette transformation prend n'importe quel point sur la sphère de coordonnées sphériques (Θ, Φ) et l'amène vers le plan complexe en accord avec [46] :

$$\omega = e^{-i\Phi} \tan \frac{\Theta}{2}. \quad (2.13)$$

Cette fonction transforme l'infini complexe en le pôle sud et le zéro complexe en le pôle nord. A l'aide de cette transformation nous pouvons étudier notre système physique comme un champ unitaire sur la sphère, autrement dit, une transformation de la sphère en la sphère. De l'équation (2.4) nous savons qu'il existe des charges topologiques pour un tel système. Pour les calculer nous observons que l'invariant topologique est défini par le nombre de fois que le champ recouvre la sphère entière. Si les coordonnées du vecteur unitaire $\mathbf{m}$ sont « Θ » et « Φ », alors l'angle solide, quand le champ varie d'une quantité infiniment petite, est $\sin \Theta d\Phi d\Theta$, et donc le nombre de fois qu'il fait l'angle solide est :

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \sin \Theta d\Phi d\Theta = \frac{1}{4\pi} \int q(\mathbf{x}) d^2x, \quad (2.14)$$

avec $q(\mathbf{x}, t)$ la densité de charge topologique et en faisant le pas vers les coordonnées de l'espace (x, y) nous devons considérer le Jacobien [81] $\partial(\Theta, \Phi)/\partial(x, y) = \epsilon_{ij} \partial_i \Theta \partial_j \Phi$ où ϵ_{ij} est le tenseur antisymétrique bi-dimensionnel. Ce qui nous amène à

$$q(x, y) = \epsilon_{ij} \sin \Theta \partial_i \Theta \partial_j \Phi = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_i \mathbf{m} \times \partial_j \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m}. \quad (2.15)$$

Cette quantité est conservée et a des propriétés très intéressantes [62], que nous voyons quand nous introduisons la dynamique temporelle dans la section 2.4.

Notons que cette charge topologique n'est pas la même que celle sortie de la simple considération d'une courbe autour d'une région du plan. Comme nous voyons dans le chapitre 4, des solutions analytiques sur le plan complexe pour l'énergie d'échange donnent

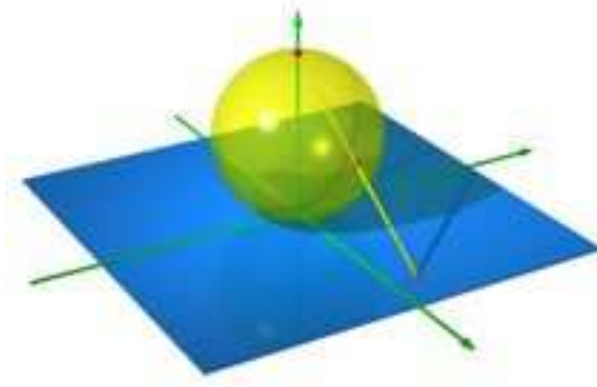


Fig. 2.6: Transformation stéréographique du pôle sud $\omega = \exp(i\Phi)\cotan(\Theta/2)$ entre le plan complexe et la sphère. Tous les points infinis du plan complexe sont projetés au pôle nord.

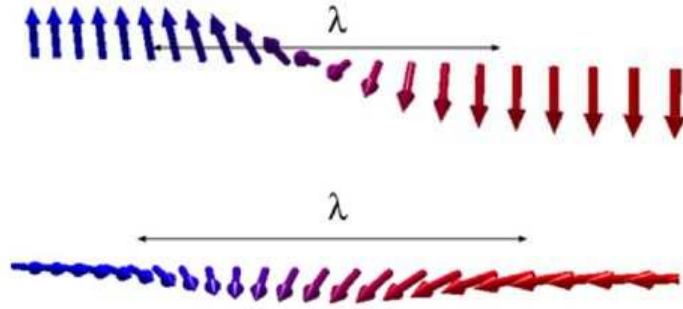


Fig. 2.7: Des solitons magnétiques unidimensionnels, dans une paroi de Bloch l'aimantation tourne hors du plan, une paroi de Néel est celle où l'aimantation reste dans le plan.

les solutions skyrmions sur le plan [7], dont la charge topologique est entière. Elle est liée à l'indice et à la polarité par $Q = cp$. Pour $Q = 1$, le skyrmion doit dans le plan infini parcourir toutes les directions une seule fois. Cette configuration est montrée dans la figure 2.8. Des solutions définies sur morceaux donnent les solutions vortex, dont la charge est demi-entier $Q = cp/2$ [55] et dont un exemple de $Q = 1/2$ est montré dans la figure 2.5.

Nous n'étudions pas les cas 1D. Mais par complétude nous pouvons dire qu'il est inclut aussi dans le cadre détaillé plus haut. En particulier, dans un fil ferromagnétique existent des solitons topologiques à condition que $\dim \mathcal{O} \leq \dim \mathcal{P}$, autrement dit, que $\mathcal{O} = \mathbb{R}$. Cette condition est satisfaite quand le matériau a un axe facile (en choisissant cet axe comme l'axe z , dans notre hamiltonien l'anisotropie associée se modélise avec $K < 0$). Cet axe peut être parallèle au fil où perpendiculaire à lui. Ainsi, nous avons deux cas possibles [43], comme nous le montrons dans la figure 2.7, qui sont des réalisations vectorielles des solutions «type kink».

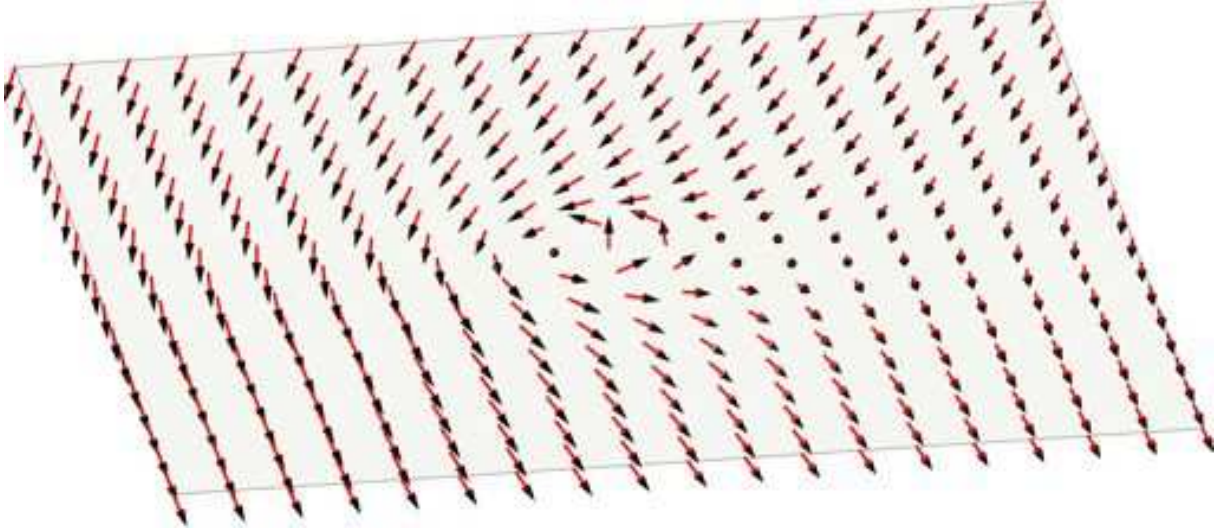


Fig. 2.8: Skyrmion de charge unitaire [1].

2.4 Equation de Landau-Lifshitz et ses variantes.

L'équation de Landau-Lifshitz est la première d'une famille d'équations qui donnent la dynamique d'un système de moments magnétiques à couplage ferromagnétique dans un réseau cristallin. Elle a été proposée par Landau et Lifshitz en 1935 [47] avec des arguments phénoménologiques qui ont été confirmés par la suite avec des modèles plus fondamentaux qui considèrent la limite semi-classique des opérateurs de spin [5]. Cette équation constitue souvent le point de départ de l'étude semi-classique des ferromagnétiques (ce que l'on appelle le micromagnétisme) et aussi le modèle le plus efficace à considérer et à modifier quand il y a des éléments physiques supplémentaires, tels que des bruits stochastiques, des courants électriques, et cætera.

Nous avons déjà trouvé l'énergie libre dans un ferromagnétique. Cette énergie nous donne le champ magnétique dans la matière par la relation

$$\mathbf{H}_{\text{eff}}(\mathbf{x}) = -\frac{\delta \mathcal{F}[\mathbf{M}]}{\delta \mathbf{M}(\mathbf{x})}. \quad (2.16)$$

La dynamique du vecteur $\mathbf{M}$ se trouve aisément à partir du torque produit par un champ magnétique $\mathbf{B}$ sur un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (2.17)$$

De l'équation de Newton nous savons que le torque est la dérivée temporelle du moment angulaire $\mathbf{l}$, qui est lui-même lié au moment magnétique par la relation :

$$\boldsymbol{\mu} = -\gamma \mathbf{l}, \quad (2.18)$$

avec γ le rapport gyromagnétique. Ainsi, l'équation de Newton d'évolution de $\boldsymbol{\mu}$ est :

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (2.19)$$

Cette équation est valable aussi dans la matière aimantée (comme nous le voyons dans l'annexe 6.1) en faisant la correspondance entre l'aimantation et le moment magnétique

et entre le champ magnétique $\mathbf{B}$ et le champ effectif dans la matière $\mathbf{H}_{\text{eff}}$. Ce qui d'après les équations (6.7) et (2.16) nous donne :

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma \mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{M}. \quad (2.20)$$

Cette équation a comme solution un champ $\mathbf{M}$ qui précesse autour de $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ dans le sens antihoraire dû à la charge négative de l'électron. Ainsi, cette équation n'explique pas l'alignement de l'aimantation autour d'un champ extérieur ni le fait que l'on peut observer des configurations magnétiques statiques. Effectivement selon la thermodynamique on doit avoir qu'à l'équilibre :

$$\delta \mathcal{F} = 0 \Rightarrow \int \mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \delta \mathbf{M} dV = 0, \quad (2.21)$$

mais comme $\delta \mathbf{M}$ est toujours perpendiculaire à $\mathbf{M}$ (dans l'approximation où la norme de $\mathbf{M}$ est constante), de l'équation (2.21), nous pouvons déduire qu'à l'équilibre, soit $\mathbf{M}$ est parallèle à $\mathbf{H}_{\text{eff}}$, soit $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ est nul. Notons que cet argument dépend du fait que la variation est arbitraire.

Entre les moments magnétiques il y a deux types d'interactions : interaction d'échange et interactions de type relativiste [47] ; cette dernière étant de moindre importance. L'interaction d'échange ne peut pas changer le moment magnétique et donc $\mathbf{M}$ se comporte comme un moment libre qui précesse autour du $\mathbf{H}_{\text{eff}}$.

De ce fait, c'est les effets relativistes qui font que les moments s'alignent avec le champ effectif. Si nous admettons que le terme qui produit cet effet peut être ajouté sans que la constante γ soit modifiée (autrement dit, si les interactions relativistes sont beaucoup plus petites que l'interaction d'échange), le terme de dissipation peut tout simplement s'ajouter aux autres, et il doit être proportionnel au vecteur qui pointe de $\mathbf{M}$ vers $\mathbf{H}_{\text{eff}}$. Ce vecteur est

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} - \frac{1}{M^2} (\mathbf{H}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{M},$$

qui est proportionnel à $\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}})$ ⁵. Donc l'équation (2.20) devient :

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma \mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{M} + \lambda \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}), \quad (2.22)$$

cette équation décrit la précession et l'alignement des moments magnétiques autour d'un champ $\mathbf{H}_{\text{eff}}$. C'est une équation non-linéaire dont la dynamique est extrêmement riche. A partir de cette équation, et en faisant le produit vectorielle avec $\mathbf{M}$, nous pouvons montrer que

$$-\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}) = \frac{\lambda M^2}{\gamma} \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}},$$

qui remplacé dans l'équation de Landau-Lifshitz nous donne l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert :

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma \mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{M} - \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}}, \quad (2.23)$$

où

$$\alpha = \frac{\lambda}{\gamma}$$

est appelée la constante de Gilbert, et où nous avons fait l'approximation :

$$\gamma - \frac{\lambda^2 M_s^2}{\gamma} \approx \gamma.$$

5. $\mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}) = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{\text{eff}}) \mathbf{M} - M^2 \mathbf{H}_{\text{eff}}$

2.5 Interaction entre l'aimantation et les électrons de conduction

Considérons maintenant qu'il y a dans le métal un courant électrique.

Quand les électrons de conduction du métal ferromagnétique bougent, leurs spins interagissent avec les spins qui produisent l'aimantation. Cette interaction est mise en évidence par l'effet appelé *magnétorésistance géante* (GMR) [67]. Dans l'expérience qui donne lieu à la GMR, on regarde la résistance électrique qui oppose deux couches minces et successives de ferromagnétiques à un courant électrique perpendiculaire à elles. Cette résistance s'avère beaucoup plus grande si l'aimantation des couches est anti-parallèle que quand elles sont magnétisées parallèlement. La magnétorésistance géante montre que l'aimantation peut influencer un courant électrique. Réciproquement, un courant électrique peut changer l'aimantation d'un matériau. Il a été montré que les effets produits par le flux du courant électrique à travers les nanostructures magnétiques dominant sur les effets dus aux champs produits par le même courant [71]. En effet, l'électron itinérant de conduction porte avec lui un spin qui a un couplage de Zeeman avec l'électron localisé qui produit l'aimantation. Ce couplage produit un torque appelé *torque de transfert de spin*.

On fait donc l'hypothèse de séparation entre la dynamique quantique des électrons de conduction et l'aimantation, dont la dynamique est donnée par l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert. Ainsi on arrive au modèle s-d, qui est né de la supposition, valable dans le cas de métaux magnétiques et des semi-conducteurs, que les électrons de l'orbital d contribuent plus à l'aimantation et les électrons s plus à la conduction électrique. La forte interaction d'échange entre les électrons d fait que la superposition des fonctions d'onde est faible et ainsi les fluctuations quantiques sont bloquées justifiant ainsi la considération du spin localisé comme une variable classique.

Sur un réseau, les électrons de conduction sont décrits par un modèle de liaison forte. En présence d'un champ électrique $\mathbf{E} = -E\hat{x}$, et avec une énergie de saut d'un site à l'autre t_s ce modèle s'écrit :

$$\mathcal{H}_e = -t_s \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} e^{-i \frac{eEt}{\hbar} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \hat{x}} + \text{h.c.}, \quad (2.24)$$

Ici $c_{i,\sigma}^\dagger$ est l'opérateur fermionique de création. Appliqué à un état quelconque, il crée un électron de spin s au site i . Dans cet hamiltonien $-e$ est la charge de l'électron, $\mathbf{r}_i$ la position du site i et t le temps.

Le spin de l'électron au site i est $\mathbf{s}_i = \sum_{ss'} c_{is}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{ss'} c_{is'}$, avec $\boldsymbol{\sigma}_{ss'}$ les matrices de Pauli. Le couplage ferromagnétique de constante J_{sd} entre les électrons itinérants $\mathbf{s}_i$ et localisés $\mathbf{S}_i$ apporte une énergie :

$$\mathcal{H}_{sd} = -J_{sd} \sum_i \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{S}_i. \quad (2.25)$$

Ce $\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_{sd}$ total constitue le modèle s-d. Nous étudions plus en détail ce modèle et l'interaction entre le courant électrique et une texture magnétique dans le chapitre 4.

Il est possible à partir du modèle s-d de déduire une dynamique effective de l'aimantation qui tienne compte de l'effet des électrons sur elle. La littérature sur ce sujet est

vaste et en développement, et les résultats obtenus dépendent autant des ingrédients du modèle que de la méthode et des approximations faites [3].

L'équation pour $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ dans la limite continue (voir annexe 6.2) est :

$$\frac{\partial s^\beta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_s^\beta = J_s(\mathbf{s} \times \mathbf{S})^\beta, \quad (2.26)$$

où $\mathbf{j}^\beta$ est la composante β du tenseur de courant de spin définie par :

$$\mathbf{j}_s^\beta = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -\frac{i}{2} (\nabla \Psi^\dagger \sigma_\beta \Psi - \Psi^\dagger \sigma_\beta \nabla \Psi) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\Psi^\dagger \sigma_\beta \Psi) \right\}. \quad (2.27)$$

L'équation pour l'aimantation aura un terme supplémentaire $\boldsymbol{\tau} = -J_{sd} \mathbf{s} \times \mathbf{S}$ appelé spin-torque. La réduction de ce terme à une fonction uniquement de $\mathbf{S}$ constitue le but de nombreux travaux qui se servent de différents calculs de transport ou des transformations de jauge. Pour y arriver la supposition la plus élémentaire est que les électrons de conduction ont une échelle temporelle courte par rapport à celle de l'aimantation. De cette manière, du point de vue de l'électron, l'aimantation constitue un champ de Zeeman constant et inhomogène et le spin de l'électron suit l'aimantation. Cela constitue l'*approximation adiabatique* [89].

Prenons pour le moment une approximation encore plus extreme et considérons que les spins électroniques sont dans un état stationnaire [13]. Dans ce cas $\partial \mathbf{s} / \partial t = 0$ et formellement nous trouvons à partir de (2.26) la relation :

$$\boldsymbol{\tau} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_s^\beta. \quad (2.28)$$

Sous l'approximation adiabatique, le courant électrique $\mathbf{j}_c$ et le courant de spin sont liés dans un ferromagnétique par un factor de polarisation :

$$\mathbf{j}_s^\beta \approx -\frac{\hbar P S^\beta}{2e} \mathbf{j}_c, \quad (2.29)$$

avec $\mathbf{j}_c$ le courant électrique. Cette relation exprime le fait qu'à premier ordre le tenseur de courant de spin peut s'exprimer comme un produit tensoriel entre le vecteur d'aimantation et le courant électrique [89] :

$$\mathbf{j}_s = -\frac{\hbar P}{2e} \mathbf{S} \otimes \mathbf{j}_c + \delta \mathbf{j}_s. \quad (2.30)$$

Ceci n'est pas tout à fait arbitraire d'après la formule (2.27) où les indices d'espace viennent des dérivés de la fonction d'onde et des indices de spin des matrices de Pauli, étant les premières responsables des courants électriques et les deuxièmes de l'interaction magnétique entre spin itinérants et fixes. Si nous remplaçons (2.29) en (2.28), nous trouvons pour un courant électrique homogène :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\hbar P}{2e} (\mathbf{j}_c \cdot \nabla) \mathbf{S}. \quad (2.31)$$

Alors dans cette approximation de courant polarisé adiabatique et de transfert total de moment angulaire vers l'aimantation, l'équation de LLG devient [77] :

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma \mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{M} - \frac{\alpha}{M_s} \mathbf{M} \times \dot{\mathbf{M}} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M}, \quad (2.32)$$

avec $\mathbf{u} = (Pg\mu_B/2eM_s)\mathbf{j}_c$. Cette équation est la limite continue de l'équation de Slonczewski [71], trouvé dans le cas de deux couches ferromagnétiques aimantées homogènement.

Dans un approche plus raffiné on peut considérer l'effet de la relaxation de spin dû aux impuretés. Dans ce cas il apparaît dans l'équation pour $\mathbf{s}$ un nouveau terme $-\langle\Gamma(\mathbf{s})\rangle$. On considère la contribution à premier ordre $\delta\mathbf{s}$ perpendiculaire à $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_{\parallel} + \delta\mathbf{s}, \quad (2.33)$$

ainsi que la partie non-adiabatique du tenseur du courant de spin $\delta\mathbf{j}_s$ liée à la densité du spin $\delta\mathbf{j}_s = -D_0\nabla\delta\mathbf{s}$ (où D_0 est une constante de diffusion).

En Zhang 2004 [89] ces deux corrections permettent de trouver un torque qui contient quatre termes, dont deux qui ne dépendent pas du courant et ne sont que des corrections à la valeur effective de $|\mathbf{S}|$ et un terme de la forme du terme de Gilbert (et que produit alors une renormalisation de la constante α). Le premier de ces termes est le spin-torque déjà montré et le deuxième le dit *terme* β , dont la forme fonctionnelle a été établie avec d'autres approches aussi [6]⁶ :

$$\beta\mathbf{M} \times [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{M}], \quad (2.34)$$

et sur le fait que la dynamique des électrons peut contribuer à la dissipation avec un terme de la forme de la dissipation de Gilbert. Cela modifierait la valeur d' α . Cependant la valeur de ces constantes (α et β) n'est pas claire et il est toujours objet de débat [51, 19, 6]. Des corrections à la valeur de S ont aussi été rapportés [42].

Ainsi, en prenant l'équation (2.32) et le terme (2.34), l'expression la plus générale de l'équation de LLG en présence de courants électriques est :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right)\mathbf{m} + \gamma\mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{m} = -\alpha\mathbf{m} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{u} \cdot \nabla\right)\mathbf{m} \quad (2.35)$$

Où $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$. Sous cette forme il est claire que l'équation devient invariante de Galilée dans le cas $\alpha = \beta$.

2.5.1 Des aspects phénoménologiques

Comme nous l'avons vu, en présence de courants électriques l'équation de LLG se modifie en incorporant les torques de transfert de spin. Cet effet n'est autre chose que l'expression de la conservation de moment angulaire. Quand un électron de l'orbitale s bouge à travers une texture magnétique, il peut changer son orientation pour s'aligner avec l'aimantation. La variation de moment angulaire du spin de l'électron (en unités de $\hbar$) doit être compensée par une variation du moment angulaire du spin localisé. De ce fait, c'est les variations spatiales de $\mathbf{M}$ qui produisent les torques de spin [6, 90], d'où l'importance de cet effet sur les textures magnétiques en général et les solitons magnétiques en

6. Notamment dans le travail précurseur de Bazaliy [6] une transformation de jauge qui diagonalise le terme s-d dans l'équation de Schrödinger donne lieu à un champ de jauge $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ qui est incorporé à l'équation de Landau-Lifshitz-Gilbert par moyen d'un terme de couplage entre le champ $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ et un courant électrique $\mathbf{j}_c$ considéré homogène.

particulier, car ces derniers peuvent développer des forts gradients d'aimantation grâce à leur stabilité topologique⁷.

Sous l'hypothèse adiabatique, le terme le plus important est de la forme $-(\mathbf{j}_e \cdot \nabla)\mathbf{m}$. Nous pouvons nous faire une idée de l'effet de ce terme sur un vortex ou un skyrmion en regardant d'abord comme il agit sur des parois uni-dimensionnelles. Cet analyse est utile du fait qu'une coupure d'un vortex ou d'un skyrmion en 2D à travers leurs cœurs, produit des parois 1D.

Considérons une paroi uni-dimensionnelle au long de l'axe x dont la composante z est $m_z = \tanh(x)$. Admettons que $m_x = 0$, avec quoi nous trouvons que $\mathbf{m} = (0, \text{sech}(x), \tanh(x))$ qui est appelée *paroi de Bloch*. Un courant dans la direction x ($\mathbf{j} \cdot \nabla \sim \partial_x$) fait un spin-torque proportionnel à

$$-\partial_x \mathbf{m} = -(0, \text{sech}(x)\tanh(x), \text{sech}^2(x)),$$

qui fait que la paroi bouge dans la direction x .

Le fait d'avoir supposé que les électrons de conduction suivent l'aimantation implique par la conservation du moment angulaire, que il doit y avoir un torque égal et opposé sur l'aimantation, qui produit dans le cas présent le mouvement de la paroi [67].

Une vision complémentaire a celle-ci fait l'observation que l'équation LLG avec torque de transfert de spin et sans β -terme est une équation qui a l'invariance de Galilée est de ce fait, n'importe quelle solution de l'équation statique, par exemple la paroi de Néel, est aussi solution de l'équation dans le système de référence co-mobile $\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$.

Un autre effet rapporté dans la littérature est le transfert de moment linéaire des électrons vers la paroi [74]. Ceci est conséquence du comportement ondulatoire (quantique) des électrons, pouvant se refléter dans la paroi avec une probabilité non-nulle. Le transfert de moment angulaire est l'effet dominant dans le cas des parois dont le cœur est grand (c'est-à-dire une variation douce de l'aimantation), tandis que dans le cas de parois abruptes c'est le transfert de moment linéaire l'effet prépondérant.

En général, si l'on considère des autres mécanismes tels que l'émission d'ondes des spins [49], les effets des impuretés [75, 14], ou les champs de jauge [76], il y apparaitront de manière générique des nouveaux termes dans l'équation de LLG qui rendront compte de la dissipation d'énergie (tel que le terme β déjà mentionné). appelé aussi transfert de spin dissipatif.

Des simulations numériques et des travaux analytiques montrent des différents régimes de vitesse des parois pour différents valeurs de β et du courant [67].

Comme nous le verrons dans la section 4.7 et dans nos propres résultats, dans le cas de vortex et skyrmions la dynamique est forcément plus complexe et riche [30, 85, 61, 45].

7. Les forts gradients d'aimantation sont en concurrence avec la minimisation de l'énergie d'échange et sans contraintes autres (comme les topologiques) ont souvent tendance à s'atténuer.

2.6 Charge topologique et dynamique

L'équation (2.35) multipliée scalairement par $\mathbf{m}$ nous donne

$$\mathbf{m} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{m} = 0,$$

ce qui implique que chacun de ces termes est zéro. Pour le voir il suffit de se mettre dans une situation stationnaire ou dans la situation où le courant est zéro. Autrement dit, toute l'équation (2.35) est dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{m}$ et nous pouvons toujours écrire son évolution comme :

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \mathbf{m} \times \mathbf{F} \quad (2.36)$$

où $\mathbf{F}$ dépend de $\mathbf{m}$ et de ses dérivées spatiales. Avec cette expression nous pouvons regarder l'évolution de la charge topologique $Q(t)$ définie dans la section 2.3.5. De cette définition-là et de l'équation (2.36), on en déduit la dérivée temporelle de $q(t)$:

$$\dot{q}(t) = (\partial_x(\mathbf{m} \times \mathbf{F}) \times \partial_y \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} + (\partial_x \mathbf{m} \times \partial_y(\mathbf{m} \times \mathbf{F})) \cdot \mathbf{m} + (\partial_x \mathbf{m} \times \partial_y \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{F}).$$

Ensuite en utilisant les propriétés du produit vectoriel triple, certains termes s'en vont et nous arrivons à une expression plutôt simple :

$$\dot{q}(t) = \partial_x \mathbf{m} \cdot \partial_y \mathbf{F} - \partial_x \mathbf{F} \cdot \partial_y \mathbf{m} = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \mathbf{m} \cdot \partial_\nu \mathbf{F}.$$

Cette dernière expression peut être écrite comme $\partial_\mu \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{m} \cdot \partial_\nu \mathbf{F}$ car $\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{F} = 0$. Alors en définissant le vecteur $g_\nu = \mathbf{m} \cdot \partial_\nu \mathbf{F}$ et en utilisant le théorème de Stokes, nous trouvons :

$$\dot{Q}(t) = \int d^2x \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu g_\nu = \int d^2x \hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}) = \oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{g},$$

où $\mathbf{l}$ est le vecteur unitaire parallèle à la courbe qui entoure la région considérée.

Avec le théorème de Gauss et $h_\mu = \epsilon_{\mu\nu} g_\nu$:

$$\dot{Q}(t) = \int d^2x \partial_\mu h_\mu = \oint d\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{h},$$

où $\hat{\mathbf{n}}$ est le vecteur unitaire normal à la courbe.

En regardant suffisamment loin, le flux à travers la ligne doit être nul :

$$\dot{Q}(t) = 0.$$

La conclusion est claire : n'importe quelle équation de LL qui conserve la norme du vecteur $\mathbf{m}$, conserve aussi la charge topologique skyrmionique. Bien qu'il peut y avoir des changements de topologie locaux, la charge totale est une quantité conservée par la dynamique [79, 62]. Cependant, il a été largement rapporté dans la littérature des changements de topologie dans l'équation de LLG [30] et dans les expériences pratiques [86]. Nous pensons que ces phénomènes sont liés au fait que dans les solitons topologiques les ordres de grandeurs peuvent décroître jusqu'aux ordres de la discrétisation ou du réseau (autant dans les expériences que dans les simulations numériques). A ces ordres de grandeurs les hypothèses de différenciabilité nécessaires pour déduire la conservation de la charge sont pour le moins inappropriées. A ces ordres-là les fluctuations de type quantique et

thermique peuvent permettre des discontinuités qui ne sont pas prises en compte par un modèle déterministe et continu comme celui de l'équation (2.36).

Nous discutons plus en profondeur ce dernier point dans le chapitre 4, où nous regardons l'évolution du modèle s-d sans faire d'approximations, c'est-à-dire en gardant la partie quantique des électrons. En particulier, nous étudions l'évolution et les changements de topologie dans un modèle discret s-d.

3. LE POINT DE BLOCH

3.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.1, de la considération du deuxième groupe d'homotopie de la sphère bi-dimensionnelle, on peut déduire qu'il existe une famille de configurations du champ d'aimantation caractérisée par une charge Q qui représente la quantité de fois que le champ parcourt l'angle solide.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à ces types de solutions, en particulier à celle avec $Q = 1$, solution appelée *point de Bloch* [36]. Tel qu'on l'a défini, le point de Bloch est le type de monopôle magnétique formé par le champ d'aimantation $\mathbf{M}$ dont les vecteurs, considérés dans une sphère autour du centre du point de Bloch, couvrent la sphère une seule fois.

Depuis la prédiction de son existence par Feldtkeller [18], il a été étudié pour différentes raisons. Initialement le lien entre le point de Bloch et les domaines magnétiques ont fait de son étude un sujet nécessaire à la compréhension des transitions entre différentes configurations. Après, on a observé que le point de Bloch est impliqué dans les transitions qui mènent un vortex d'une certaine polarisation à un autre de polarisation inverse [78, 30]. Ces transitions qui produisent des changements de topologie du type $\Delta Q = 1$ sont véhiculées par l'apparition d'un point de Bloch qui du fait de son instabilité disparaît rapidement par les bords. Des points de Bloch ont aussi été utilisés pour changer le sens de rotation des lignes de Bloch [36].

Du point de vue mathématique le point de Bloch est la seule singularité qui peut apparaître dans un système magnétique où la longueur du vecteur d'aimantation est conservée [44]. Pour le champ unitaire $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s$, le point de Bloch renferme nécessairement une singularité quelque part autour de laquelle le champ tourne de 4π . A ce point (que l'on définit comme le centre du point de Bloch) le champ ne peut pas être défini sauf régularisation et relaxation de certaines contraintes (notamment le caractère saturé de $\mathbf{M}(\mathbf{x})$). Ce caractère singulier fait du point de Bloch un objet intéressant pour ce qu'il apporte de défis en calculs numériques et théoriques. Pour ce qui concerne les défis numériques, on a beau réduire la taille de la grille, il est impossible d'éviter la divergence de l'énergie d'échange. Théoriquement, il serait intéressant de déterminer quelle est l'importance que pourraient avoir les fluctuations quantiques et thermiques dans la stabilisation de la structure [50, 63]. Aussi, la divergence de l'énergie d'échange met en garde sur l'origine discrète de la théorie [2]. De même, le fait que cette même énergie soit dépendante du rayon de la structure prévient de l'importance des effets non-locaux sur les singularités.

La manière la plus simple de concevoir le point de Bloch consiste à imaginer dans l'espace 3D une paroi de domaine qui divise l'espace en une région de champ en z d'une autre région de champ en $-z$. Entre ces deux régions il y a un plan où nous pouvons imaginer que le champ restera dans le plan xz . Autrement dit, le champ tourne de z à $-z$ en passant par l'axe x . Si dans une région de ce plan il passe par x et dans l'autre en passant par $+x$, alors dans ce plan il y aura une ligne où le champ doit forcément sortir du plan xz vers l'axe y . Cette ligne peut constituer elle-même une paroi de Bloch de manière que le cœur de cette paroi de Bloch est un point singulier et autour de lui toutes les directions sont parcourues, comme on le voit dans la figure 3.1. Ce point singulier (qui est dans la paroi de domaine et aussi dans la ligne où se trouve la paroi de Bloch) est le centre d'un point

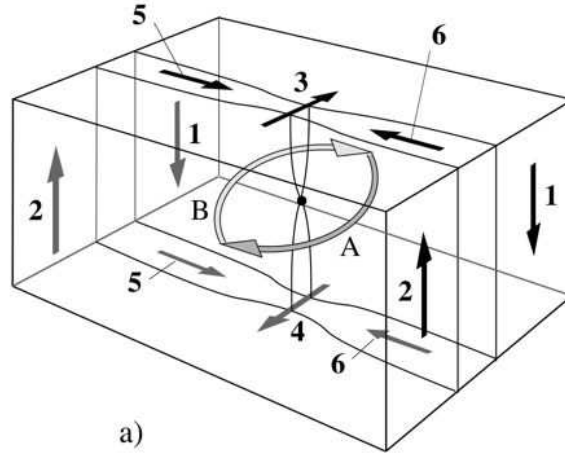


Fig. 3.1: Formation du Point de Bloch à partir des parois et lignes de domaines (figure prise de [36]). Les flèches représentent l'aimantation. Dans les régions 1 et 2 l'aimantation est en $\mp z$, respectivement. L'interface entre 1 et 2 est une paroi bi-dimensionnelle dont l'aimantation pointe vers $\pm z$ (5 et 6 respectivement), et entre 5 et 6 il existe une paroi uni-dimensionnelle où l'aimantation passe de $-y$ (4) à $+y$ (3). Le tout fait qu'autour du point central toutes les directions de l'angle solide sont nécessairement parcourues.

de Bloch. Le lien étroit entre le point de Bloch et les parois de domaines a augmenté les efforts théoriques pour comprendre sa dynamique [69, 70, 21, 87, 52] ainsi que son rôle dans les transitions topologiques des vortex magnétiques [78, 34, 33, 60, 63, 84].

Dans tout système avec une fonctionnelle d'énergie $\mathcal{F}$ on peut trouver la solution exacte du point de Bloch en minimisant cette énergie magnétique. Pourtant, les termes d'énergie magnétique à considérer dépendent fortement de la physique microscopique du système (anisotropies cristallines, constantes d'échange, et cetera.)

Dans ce chapitre nous trouvons la solution point de Bloch quand on considère l'énergie d'échange, l'énergie dipolaire et l'énergie de Landau. Nous montrons que notre solution généralise les solutions trouvées dans les cas partiel par Döring [12] et Galkina [21] et que les simulations numériques confirment nos prédictions sur la configuration qui minimise l'énergie.

3.2 Minimisation de l'énergie d'échange et famille de monopôles de différents charges topologiques.

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3.4, l'énergie d'échange s'écrit :

$$\mathcal{F}[\mathbf{M}] = \int_V \left[\frac{A_s}{2} (\nabla \mathbf{M})^2 \right] dV. \quad (3.1)$$

Sous la transformation stéréographique (annexe 6.4) $\omega = \exp(i\Phi) \tan(\Theta/2)$, où (Θ, Φ) sont les coordonnées sphériques de $\mathbf{m}$, l'énergie devient :

$$\mathcal{F}[\omega, \bar{\omega}] = \frac{A_s M^2}{2} \int_V \frac{(\nabla \omega)^2 + (\nabla \bar{\omega})^2}{(1 + \omega \bar{\omega})^2} dV. \quad (3.2)$$

Si nous centrons le point de Bloch à l'origine des cordonnées, pour $r \rightarrow 0$ le point de Bloch est singulier et donc mal défini et l'énergie d'échange infinie. Cependant pour un R suffisamment petit l'intégral doit converger. De ce fait, l'énergie à minimiser est la partie angulaire de la densité d'énergie. Si nous l'écrivons $\omega = u + iv$ et les cordonnées de l'espace (θ, ϕ) (à ne pas confondre avec les coordonnés du champ $\mathbf{M}$) comme :

$$z = \xi + i\eta = \exp(i\phi) \tan(\theta/2), \quad (3.3)$$

l'énergie prend la forme [12] :

$$\mathcal{F} = 2A_s M^2 R \int \int \frac{(\frac{\partial u}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial u}{\partial \eta})^2 + (\frac{\partial v}{\partial \xi})^2 + (\frac{\partial v}{\partial \eta})^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} d\xi d\eta \quad (3.4)$$

$$= 2A_s M^2 R \int \int \frac{|d\omega/dz|^2 + |d\bar{\omega}/dz|^2}{1 + |\omega|^2} d\xi d\eta \quad (3.5)$$

où la coordonnée r a disparue du fait que l'élément d'angle solide contienne r^2 de même qu'elle se retrouve dans le dénominateur. La constante R vient de l'intégration radiale sur le domaine. En résumé, nous avons transformé une intégrale d'une fonction vectorielle sur la sphère, en l'intégral d'une fonction complexe ω sur le plan complexe $z = (\xi, \eta)$.

La minimisation de cette fonctionnelle nous donne des équations pour ω et $\bar{\omega}$:

$$\frac{d}{dz} \frac{d\omega}{d\bar{z}} = \frac{2\bar{\omega}}{1 + \omega\bar{\omega}} \frac{d\omega}{dz} \frac{d\omega}{d\bar{z}}. \quad (3.6)$$

Nous observons que n'importe quelle fonction dépendant seulement de z où uniquement de $\bar{z}$ est solution de l'équation (3.6). La première des conditions est équivalente aux équations de Cauchy-Riemann, de ce fait on trouve que *toute fonction analytique*

$$\omega = f(z),$$

est solution. De la même manière, une fonction dépendant uniquement de $\bar{z}$ (une fonction dit anti-analytique) peut trivialement être construite à partir des premières en faisant la conjugaison des variables. Nous verrons dans le chapitre 4 que la même méthode sert à trouver les solitons topologiques dans l'espace bi-dimensionnel. La raison est simple, les solitons que l'on trouve dans un espace tri-dimensionnel en regardant la surface d'une sphère équivalent aux solitons que l'on trouve en regardant *la totalité* du plan d'un espace bi-dimensionnel.

La solution non-triviale la plus simple est une fonction du type :

$$f(z) = \left(\sum_{i=0}^n a_i z^i \right) / \left(\sum_{j=0}^m b_j z^j \right) \quad (3.7)$$

avec $m \leq n$ ¹. Quand nous introduisons ces solutions dans l'énergie d'échange nous réalisons que l'énergie ne dépend pas des coefficients mais uniquement du n , qui constitue

1. La solution plus générale permet que $z \rightarrow z - z_0$ où z_0 ce fait mais dans le cas du 3D cela n'est pas un ingrédient intéressant (ce sont les points où le champ est dans le pôle sud ou nord) à différence de 2D où z_0 sont les centres des solitons

la quantité de fois qu'une direction quelconque de $\mathbf{M}$ est répétée. Cette quantité n représente la charge topologique, autrement dit $Q = n$. Une manière simple de calculer l'intégrale (3.5) consiste à voir le lien étroit qui existe entre Q et l'énergie d'échange. En effet [26] Q satisfait :

$$Q = \int \int \frac{|d\omega/dz|^2 - |d\bar{\omega}/dz|^2}{1 + |\omega|^2} d\xi d\eta, \quad (3.8)$$

ce qui amène à la relation $E_{exch} = 8A_s M^2 R Q$. Dans le cas de l'équation (3.7) :

$$E_{exch} = 8A_s M^2 n R. \quad (3.9)$$

D'après les formules précédentes nous pouvons trouver des expressions exactes dans l'espace réel. Nous montrons quelques exemples dans la figures 2.4. Les mêmes considérations sont aussi vraies pour des fonctions qui dépendent exclusivement de $\bar{z}$. Dans ce cas là, la charge topologique est négative, comme l'indique clairement l'équation (3.8).

Le fait que ces solutions aient une énergie qui dépende uniquement de la charge topologique montre que l'énergie d'échange ne suffit pas à déterminer leurs structures (autrement dit, il y a des paramètres libres dans ces solutions). Ce fait oblige à considérer les termes suivants dans l'énergie. Evidement celui d'énergie plus petite est le point de Bloch.

3.3 Solutions avec les termes dipolaire et de Landau.

Ici nous revoyons rapidement deux résultats indépendants concernant le point de Bloch. Tout les deux consistent en l'introduction d'un terme d'énergie suivant à l'énergie d'échange : l'énergie dipolaire et l'énergie de Landau. Ces résultats sont importants pour nous, car dans les sections suivantes nous résolvons le problème avec les trois termes d'énergie, en introduisant un ansatz qui prend en compte les résultats précédents pour en faire la synthèse.

Dans le travail de Döring[12] on considère de (3.7), le cas le plus simple, il s'agit de la fonction de Möbius qui d'après une transformation de coordonnées devient :

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow \omega = a \exp(i\gamma_d)(z - \beta). \quad (3.10)$$

Avec $a, \gamma_d, \beta \in \mathbb{R}$. Dans ce travail-là, il est argumenté que le terme d'énergie dipolaire doit être régulier dans la singularité, donnant comme résultat $\beta = 0$ et $a = 1$.

Le réel γ_d représente un angle d'inclinaison du vecteur d'aimantation par rapport à la direction azimutale. En effet, si nous écrivons $\mathbf{m}$ à partir de l'équation (3.10), nous obtenons :

$$\mathbf{m}_{\gamma_d} = (\cos(\phi + \gamma_d) \sin \theta, \sin(\phi + \gamma_d) \sin \theta, \cos \theta). \quad (3.11)$$

Par ailleurs si l'on minimise l'énergie dipolaire par rapport à γ_d on trouve :

$$\cos \gamma_d = -\frac{11}{29}. \quad (3.12)$$

qui donne un angle $\gamma_d \approx 112.291^\circ$.

L'autre résultat intéressant concernant la structure du point de Bloch est celui de Galkina [21] qui considère l'énergie d'échange plus l'énergie de Landau, équation (2.11). De la condition de minimum de l'énergie on a l'équation :

$$\nabla^2 \mathbf{M} + (a_L + bM^2) \mathbf{M} = 0. \quad (3.13)$$

On en déduit

$$\mathbf{m} \times \nabla^2 \mathbf{m} = 0, \quad (3.14)$$

dont la solution point de Bloch d'une configuration angulaire type hérisson $\mathbf{m} = \mathbf{r}/r$, ainsi qu'une équation différentielle pour le module $M(r)$ qui est une fonction uniquement de r :

$$A_s \left(\frac{d^2 M}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dM}{dr} - \frac{2M}{r^2} \right) = \frac{df_L}{dM}, \quad (3.15)$$

La solution de cette équation est un profil régulier en zéro et qui atteint la valeur saturée M_s à l'infini.

3.4 Minimisation de l'énergie magnétique.

Dans cette section nous étudions la structure du point de Bloch pour l'énergie :

$$\mathcal{F}[\mathbf{M}] = \int_{\mathcal{V}} dV \left[\frac{A_s}{2} (\nabla \mathbf{M})^2 + f_L(M) - \frac{\mu_0}{2} \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} \right], \quad (3.16)$$

où $f_L(M)$ est l'énergie de Landau et $\mathbf{H}$ est le champ magnétique dipolaire. L'intégral se fait sur le domaine magnétique $\mathcal{V}$. La constante a_L détermine si l'énergie magnétique est minimisée pour $M = 0$ si $a_L > 0$ où $M \neq 0$ si $a_L < 0$. C'est bien sûr ce dernier cas celui qui nous intéresse.

A l'équilibre et en absence de courants électriques, l'équation de Maxwell pour le champ magnétique est :

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (3.17)$$

et de l'équation de Maxwell de l'absence de monopoles magnétiques ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), plus la définition de $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (3.18)$$

L'équation (3.17) implique qu'on puisse écrire $\mathbf{H} = -\nabla \Phi$.

Nous choisissons des nouvelles unités pour les paramètres physiques qui suivent :

Longueur	$\ell = \sqrt{A_s/\mu_0}$
Aimantation	$\mathcal{M}_s = (-a_L/2b)^{1/2}$
Energie	$\mathcal{E} = (-a_L A_s/2b)\ell$

Alors l'énergie adimensionnelle devient :

$$\mathcal{F} = \int dV \left[\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{M})^2 + \nu f(M) + \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \nabla \Phi \right], \quad (3.19)$$

où $\nu = -a_L/\mu_0 > 0$ est le seul paramètre du système, il est adimensionnel et peut notamment être écrit comme le rapport de deux longueurs caractéristiques :

$$\nu = \ell^2/\ell_0^2, \ell = (A_s/\mu_0)^{1/2}, \ell_0 = (-A_s/a_L)^{1/2}, \quad (3.20)$$

où ℓ est lié à la longueur d'échange ℓ_A ,

$$\ell_A = \sqrt{2}\ell = \sqrt{2A/M_s^2\mu_0}, \quad (3.21)$$

avec A la constante d'échange usuelle, liée à A_s par $A = A_s M_s^2/2$, et ℓ_0 est une longueur microscopique qui détermine la région où $M = |\mathbf{M}|$ varie.

Où par exemple, pour le Permalloy on a :

$$\begin{aligned} M_s &= 795 \text{ kA/m} \\ AM_s^2 &= 13 \text{ pJ/m} \Rightarrow A = 2.05688 \cdot 10^{-23} \text{ Jm/A}^2 \\ \mu_0 &= 4\pi 10^{-7} \text{ J/mA}^2 \approx 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ J/mA}^2 \\ \ell_A &= \sqrt{\frac{2 \cdot 2.05688 \cdot 10^{-23} \text{ Jm/A}^2}{4\pi 10^{-7} \text{ J/mA}^2}} \Rightarrow \ell_A \approx 6 \text{ nm}. \end{aligned}$$

Pour trouver les équations de mouvement, nous devons réaliser la variation de l'énergie par rapport à $\mathbf{M}$. Etant donné la relation implicite entre $\mathbf{M}$ et $\mathbf{H}$ il y a le risque d'oublier des termes en considérant $\mathbf{H}$ comme étant indépendant de $\mathbf{M}$. Autre option est réaliser cette variation par rapport aux deux champs de manière indépendante. Cependant la variation par rapport au champ de démagnétisation dans une région de vecteur normal $\mathbf{n}$:

$$\delta\mathcal{F}_H = \int dS \mathbf{n} \cdot (\mathbf{M} + \nabla\Phi) \delta\Phi + \int dV (\nabla \cdot \mathbf{M} - \nabla^2\Phi) \delta\Phi \quad (3.22)$$

est nulle quand on considère les équations de Maxwell et les conditions de bords. En effet $\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \mathbf{M}$ dans le domaine magnétique et $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$ dans le bord. Ainsi, de la variation par rapport à $\mathbf{M}$ comme variable indépendante de $\mathbf{H}$ nous obtenons la condition d'équilibre qui détermine le champ de démagnétisation

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{M}} = 0 \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow \left[-\nabla^2\mathbf{M} + \nu \frac{\partial f(M)}{\partial \mathbf{M}} + \nabla\Phi \right] = 0 \quad (3.24)$$

où le potentiel est la solution à l'équation de Poisson

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} dS' \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{M}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.25)$$

L'équation (3.24) est ainsi une équation intégral-différentielle et donc non-locale. Pour la résoudre nous utilisons un ansatz qui prend compte du fait que l'énergie dipolaire produit une inclinaison azimutale γ_d et du fait que l'énergie de Landau régularise la singularité en zéro produisant un profil qui dépend du rayon. Ainsi pour le $\mathbf{m}$ de l'équation (3.11) l'ansatz est :

$$\mathbf{M} = M(r) \mathbf{m}_{\gamma_d}(\theta, \phi). \quad (3.26)$$

Si on exprime $\mathbf{m}_{\gamma_d}$ dans la base sphérique $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$, on obtient l'expression que l'on utilisera par la suite :

$$\mathbf{m}_{\gamma_d} = \begin{pmatrix} c_+(\gamma_d) + c_-(\gamma_d) \cos 2\theta \\ -c_-(\gamma_d) \sin 2\theta \\ \sin \gamma_d \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

où nous définissons (c_2 sera utilisé plus bas)

$$c_{\pm}(\gamma_d) = \frac{1}{2}(1 \pm \cos \gamma_d) \text{ et } c_2(\gamma_d) = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos \gamma_d) \quad (3.28)$$

Les termes qui apparaissent dans l'équation de minimisation sont :

$$\nabla^2 \mathbf{M} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{M}} = \left(L(r)M(r) + 2\nu(M(r) - M(r)^3) \right) \mathbf{m}_{\gamma_d}(\theta, \phi), \quad (3.29)$$

où

$$L(r) = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} - 2 \right) \quad (3.30)$$

On notera pour simplifier $O(r) = L(r)M(r) + 2\nu(M(r) - M(r)^3)$: opérateur à partir duquel on déduit la solution de Galkina, pour le profil du point de Bloch.

3.4.1 Calcul du champ dipolaire

Pour trouver Φ nous utilisons la formule d'addition d'harmoniques sphériques :

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_l^{*m}(\theta', \phi') Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.31)$$

avec $r_{<}$ ($r_{>}$) égal au plus petite (grand) entre r et r' . Nous écrivons les termes dans l'intégral de l'équation (3.25) comme une expansion en harmoniques sphériques. D'abord la divergence dans le terme volumique :

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = M \nabla \cdot \mathbf{m}_{\gamma_d} + \mathbf{m}_{\gamma_d} \cdot \nabla M = A(r, \gamma_d) Y_0^0(\theta, \phi) + B(r, \gamma_d) Y_2^0(\theta, \phi) \quad (3.32)$$

où

$$A(r, \gamma_d) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} (1 + 2 \cos \gamma_d) \left(\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{2M}{r} \right), \quad (3.33)$$

$$B(r, \gamma_d) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} (1 - \cos \gamma_d) \left(\frac{\partial M}{\partial r} - \frac{M}{r} \right). \quad (3.34)$$

Ensuite le terme dans l'intégrale sur le bord :

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M \mathbf{m}_{\gamma_d} \cdot \mathbf{n} = M(r) \left(a(\gamma_d) Y_0^0(\theta, \phi) + b(\gamma_d) Y_2^0(\theta, \phi) \right), \quad (3.35)$$

où

$$a(\gamma_d) = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} (1 + 2 \cos \gamma_d) \quad (3.36)$$

$$b(\gamma_d) = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} (1 - \cos \gamma_d) \quad (3.37)$$

A la fois pour la divergence de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$, il n'existe que deux termes dans cette expansion (ceux avec $l = 0$ et pour $l = 2$), donc nous pouvons résoudre les intégrales en utilisant les propriétés d'ortonormalité des harmoniques sphériques :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{l'}^{*m'}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (3.38)$$

Evidemment la géométrie la plus naturelle pour étudier la structure interne du point de Bloch est la sphérique en raison des ses propriétés géométriques. Ainsi nous obtenons explicitement pour une sphère de rayon R :

Terme de Bord

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int dS' \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{M}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{M(R)R^2}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_l^m(\theta, \phi) \\ &\quad \int Y_l^{*m}(\theta', \phi') \left(a(\gamma_d) Y_0^0(\theta', \phi') + b(\gamma_d) Y_2^0(\theta', \phi') \right) d\Omega' \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{M(R)R^2}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_l^m(\theta, \phi) (a(\gamma_d) \delta_{l0,m0} + b(\gamma_d) \delta_{l2,m2}) \\ &= a(\gamma_d) Y_0^0(\theta, \phi) \frac{M(R)R^2}{r_{>}} + b(\gamma_d) Y_2^0(\theta, \phi) \frac{M(R)R^2 r_{<}^2}{5r_{>}^3} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Terme de Volume

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{M}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{2l+1} \\ &\quad \int Y_l^{*m}(\theta', \phi') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} \left(A(r', \gamma_d) Y_0^0(\theta', \phi') + B(r', \gamma_d) Y_2^0(\theta', \phi') \right) d\Omega' r'^2 dr' \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{2l+1} \int_0^R \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} (A(r', \gamma_d) \delta_{l0,m0} + B(r', \gamma_d) \delta_{l2,m2}) r'^2 dr' \\ &= Y_0^0(\theta, \phi) \int_0^R A(r', \gamma_d) \frac{r'^2}{r_{>}} dr' + \frac{Y_2^0(\theta, \phi)}{5} \int_0^R B(r', \gamma_d) \frac{r_{<}^2}{r_{>}^3} r'^2 dr' \\ &= Y_0^0(\theta, \phi) a(\gamma_d) \left[\frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{\partial M'}{\partial r'} + \frac{2M'}{r'} \right) r'^2 dr' + \int_r^R \left(\frac{\partial M'}{\partial r'} + \frac{2M'}{r'} \right) r' dr' \right] \\ &\quad + Y_2^0(\theta, \phi) b(\gamma_d) \left[\frac{1}{5r^3} \int_0^r \left(\frac{\partial M'}{\partial r'} - \frac{M'}{r'} \right) r'^4 dr' + \frac{r^2}{5} \int_r^R \left(\frac{\partial M'}{\partial r'} - \frac{M'}{r'} \right) \frac{dr'}{r'} \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Les équations (3.39) et (3.40) nous permettent d'écrire le potentiel comme :

$$-\Phi = a(\gamma_d) Y_0^0(\theta, \phi) F(r) + b(\gamma_d) Y_2^0(\theta, \phi) G(r) \quad (3.41)$$

où $F(r)$ y $G(r)$ sont des fonctions compliquées de r comportant des intégrales sur les différentes régions :

$$F(r) = \left[\frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{\partial M'}{\partial r'} + \frac{2M'}{r'} \right) r'^2 dr' + \int_r^R \left(\frac{\partial M'}{\partial r'} + \frac{2M'}{r'} \right) r' dr' \right] - \frac{M(R)R^2}{r_{>}} \quad (3.42)$$

$$G(r) = \left[\frac{1}{5r^3} \int_0^r \left(\frac{\partial M'}{\partial r'} - \frac{M'}{r'} \right) r'^4 dr' + \frac{r^2}{5} \int_r^R \left(\frac{\partial M'}{\partial r'} - \frac{M'}{r'} \right) \frac{dr'}{r'} \right] - \frac{M(R)R^2 r_{<}^2}{5r_{>}^3} \quad (3.43)$$

Dans ces formules nous utilisons la notation $r_{<} (r_{>})$ pour designer les plus petits (grand) entre r et R . Ainsi le champ $\mathbf{H}$ est dans la base sphérique :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} c_2(\gamma_d)F'(r) + c_{-}(\gamma_d)\left(\frac{1}{3} + \cos 2\theta\right)G'(r) \\ -\frac{2}{r}c_{-}(\gamma_d)G(r)\sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

3.4.2 Equations de minimisation.

Des équations (3.44) et (3.29) ainsi que de (3.27) nous pouvons écrire les trois composantes de l'équation de minimisation qu'en coefficients de Fourier deviennent quatre équations :

$$\sin \gamma_d O(r) = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{1 - \cos \gamma_d}{2} \left[O(r) + \frac{2}{r}G(r) \right] = 0 \quad (3.46)$$

$$\frac{1 + \cos \gamma_d}{2} O(r) - \frac{1 + 2 \cos \gamma_d}{3} F'(r) + \frac{1 - \cos \gamma_d}{6} G'(r) = 0 \quad (3.47)$$

$$\frac{1 - \cos \gamma_d}{2} [O(r) + G'(r)] = 0, \quad (3.48)$$

dont l'équation de la composante $\hat{\phi}$ (3.45), l'équation de la composante $\hat{\theta}$ (3.46) et les deux équations indépendantes comme coefficients de Fourier de l'équation pour la composante $\hat{r}$, pour $n = 0$ l'équation (3.47) et pour $n = 2$ l'équation (3.48).

Ces quatre équations constituent les équations qui déterminent le comportement de $M(r)$ pour différentes valeurs de γ_d . De l'équation (3.45) on ne peut extraire que deux conclusions : Soit $\sin \gamma_d = 0$, soit $O(r) = 0$. Regardons séparément les deux cas.

3.4.3 Solution globale type hérisson

Dans le premier des cas, $\sin \gamma_d = 0$ (ce qui implique $\cos \gamma_d = \pm 1$). Cependant, le cas $\cos \gamma_d = -1$ qui consiste à changer le sens en π de $\mathbf{M}$ dans la direction azimutale ne sera pas considéré ici car ne correspond pas à ce qu'on attend d'une correction mais d'un cas à part qui peut être analysé en faisant la transformation $\phi \rightarrow \phi + \pi$. Les équations (3.46), (3.48) ne donne aucune information, par contre l'équation (3.47) devient :

$$O(r) - F'(r) = 0. \quad (3.49)$$

Nous pouvons calculer explicitement $F'(r)$ pour la région $r < R$. En fait, dans cette région $F'(r) = -M(r)$ et donc l'équation qui nous donne le profil de la configuration sans inclination du champs de vecteurs est :

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} - 2 \right) M + 2\nu(M - M^3) - M = 0. \quad (3.50)$$

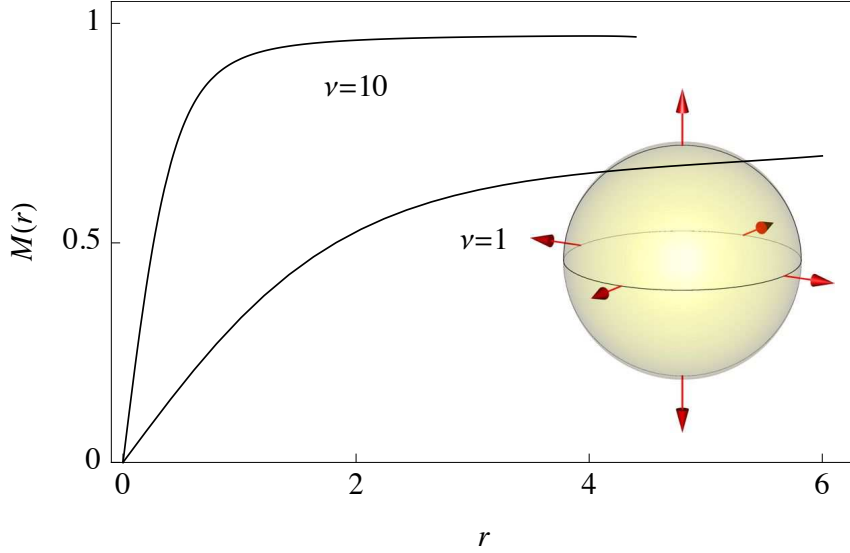


Fig. 3.2: Point de Bloch comme solution globale des équations d'équilibre et son profil pour des différentes valeurs de ν . Dans cette figures et dans ceux qui suivent l'unité de longueur est celle définie dans la section 3.4

L'aimantation doit être nulle dans la singularité et pour $r \sim R \gg \ell_0/\ell$ elle doit atteindre sa valeur de saturation :

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) \rightarrow 0, \quad \lim_{r \rightarrow R} M(r) \rightarrow M_s(\nu). \quad (3.51)$$

De cette manière, dans la région où il n'y a plus de variations de M il doit se satisfaire

$$2\nu(M_s - M_s^3) - M_s = 0. \quad (3.52)$$

dont la solution, l'aimantation de saturation est $M_s = \sqrt{\frac{2\nu-1}{2\nu}}$ qui pour un ferromagnétique ne s'éloigne pas beaucoup de 1 car ν est plutôt grand. Une équation différentielle d'une seule variable avec des valeurs asymptotiques comme celle-ci peut être résolue avec des méthodes numériques. On peut alors observer des profils comme ceux de la figure (3.2).

Cette solution est définie dans tout l'espace et nous allons l'appeler solution hérisson où solution globale. Après nous allons voir que cette solution correspond à un maximum de l'énergie dans l'ansatz considéré et elle est donc pas la solution qu'on devrait observer dans les faits.

3.4.4 Solution locale hélicoïdal

Du fait que nous ayons deux longueurs caractéristiques tirées des différents termes d'énergie, définis comme $\ell = (A_s/\mu_0)^{1/2}$ et $\ell_0 = (-A_s/a_L)^{1/2}$, nous pouvons distinguer trois régions pour r . De la valeur importante de a_L dans les ferromagnétiques nous avons une région microscopique ou singulière entre 0 et ℓ_0 , une région appelée *cœur* où la distance physique au centre de la structure est de l'ordre de ℓ et finalement une région asymptotique où on espère que l'aimantation de saturation est atteinte.

Dans le deuxième cas à considérer $\sin \gamma_d \neq 0$ et $O(r) = 0$ dans l'équation (3.45). De l'équation (3.46) on déduit $G(r)/r = 0$. A l'intérieur du matériau ($r < R$) et si l'on

considère que les dérivées de M ne sont pas nulles, nous trouvons exactement :

$$G(r) = \frac{-1}{r^3} \int_0^r M(r') r'^3 dr' = 0,$$

qui est une condition trop forte pour pouvoir être satisfaite dans tout l'espace, c'est-à-dire *la solution avec $\gamma_d \neq 0$ ne permet pas une solution globale*. Cependant l'équation $O(r) = 0$:

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} - 2 \right) M + 2\nu(M - M^3) = 0 \quad (3.53)$$

admet, elle, une solution autour du point zéro, celle-ci étant :

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = C(\nu)r$$

qui vient du fait que $L(r)Cr = 0$, où $L(r)$ est donné par (3.30). La dépendance en ν peut être éliminée en faisant le changement d'échelle $r \rightarrow r/\sqrt{2\nu}$ d'où le profil de la solution locale étant universel et sa *forme* ne dépendant pas du matériau, contrairement au profil déduit de l'équation (3.50) où le paramètre ν ne peut pas être éliminé. Les autres termes concernant les autres équations de minimisation nous donnent :

$$G(r) = -\frac{C(\nu)r^2}{5} \Rightarrow G'(r) = -\frac{2C(\nu)r}{5},$$

$$F'(r) = -C(\nu)r,$$

et *toutes* les équations sont satisfaites tout y appliquant la limite $r \rightarrow 0$. La valeur exacte de $C(\nu)$ dépend des termes qui sont pas négligeables pour $r \rightarrow \infty$ et donc elle dépend de ν . Selon le changement d'échelle nous trouvons que :

$$C(\nu) = (2\nu)^{1/2} C_\infty \quad (3.54)$$

et la valeur de C_∞ peut se déterminer numériquement à partir de $O(M) = 0$ et une valeur de saturation $M = 1$ pour r grand, qui nous donne une valeur de $C_\infty = 0.506$. Il est intéressant de comparer cette valeur à la dépendance en ν de $C(\nu)$ pour le point de Bloch radial. Dans le point de Bloch radial comme on voit dans la figure 3.2, la valeur de ν détermine la pente au point zéro : *plus grand est ν plus grande est la pente*, d'où que dans la limite $\nu \rightarrow \infty$ la situation devient singulière du fait que la longueur ℓ_0 est nulle. La variation de cette pente par rapport à ν pour le point de Bloch radial est montrée dans la figure 3.3 et nous permet de définir la taille de la singularité du point de Bloch comme :

$$\ell_s = \ell/C(\nu). \quad (3.55)$$

Bien que la solution hélicoïdale ne soit pas globale sa validité reste au delà la région singulière. En effet, pour la région singulière et le cœur nous obtenons que $r \lesssim 1$, tandis qu'il est toujours vrai que $\nu = (\ell/\ell_0)^2 \gg 1$ et donc la région de validité de cette solution local est équivalente à la limite formelle $\nu \rightarrow \infty$, limite dans laquelle les termes d'énergie fondamentaux sont l'énergie d'échange et de Landau dépassant l'importance de l'énergie dipolaire.

Par contre, en trouvant des identités on n'a pas de conditions sur γ_d , étant donné que cette solution appartient à une famille de solutions à un paramètre. Cependant, en

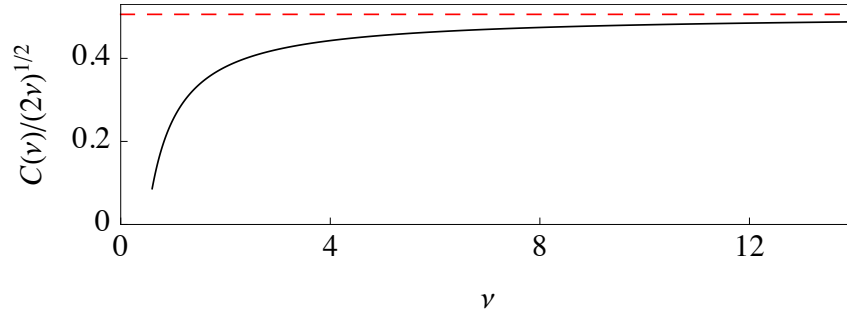


Fig. 3.3: Variation de la pente à l'origine normalisée comme fonction de ν pour le point de Bloch radial. La ligne pointillée représente la valeur de C_∞ .

se minimisant, le champ dipolaire doit imposer une valeur précise de γ_d . Pour le trouver nous utilisons le théorème de Gauss et nous exprimons l'énergie dipolaire (la seule qui dépend de γ_d) uniquement comme fonction du champ de dipolaire :

$$-\int \left(\mathbf{M} \cdot \mathbf{H} + \frac{H^2}{2} \right) dV = \int_{\partial V} \Phi(\mathbf{M} - \nabla \Phi) \cdot \mathbf{n} dS + \int \frac{H^2}{2} dV = \int \frac{H^2}{2} dV \quad (3.56)$$

$$\Rightarrow -\int (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}) dV = \int H^2 dV \quad (3.57)$$

La forme explicite du champ dipolaire est :

$$\mathbf{H} = C(\nu)r \begin{pmatrix} -c_2(\gamma_d) - \frac{2}{5}c_-(\gamma_d)(\frac{1}{3} + \cos 2\theta) \\ \frac{2}{5}c_-(\gamma_d) \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Après l'intégration de cette densité d'énergie par rapport aux variables angulaires, la partie qui dépend de γ_d est :

$$\epsilon(\gamma_d) = (28 \cos \gamma_d + 18 \cos 2\gamma_d + 29)/75, \quad (3.59)$$

Si nous faisons le graphique de la densité d'énergie par rapport à γ_d nous aurons la figure 3.4. Ce qui montre que la valeur maximale correspond à $\gamma_d = 0$. En la minimisant nous trouvons :

$$\cos \gamma_d = -\frac{7}{18} \Rightarrow \gamma_d \approx 113^\circ \quad (3.60)$$

cette dernière valeur est une correction au résultat de Döring $\gamma_d = 112^\circ$ qui revient à considérer la valeur saturé de $M = 1$ et attire l'attention sur le fait qu'en réalité cet angle γ_d est une fonction du rayon. Avec cette valeur de γ_d est le profil pour l'équation pour la coordonnée (après le changement d'échelle) déjà trouvé nous avons la solution locale hélicoïdale, qui nous montrons dans la figure 3.5.

Une fois que nous avons les deux solutions nous pouvons les comparer, la solution global ($\gamma_d = 0$) a une constante C connue parce que elle doit être consistante avec la condition à l'infini. Par contre, pour la solution avec $\gamma_d \neq 0$ il n'existe pas une condition fixe à l'infini, cependant du point de vue physique il est raisonnable de penser que le champ devienne le champ de saturation à l'infini. Avec cette supposition nous trouvons des valeurs numériques dans la région singulière, ce qui nous permet de trouver l'énergie pour les deux cas. Il se trouve que l'énergie de la solution hérisson est toujours plus grande

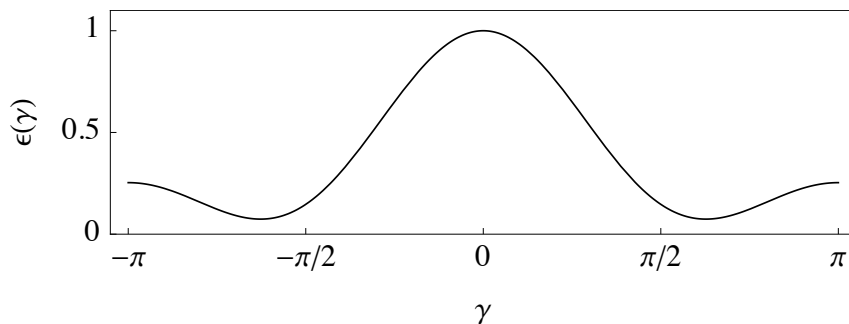


Fig. 3.4: L'énergie de démagnétisation par rapport à γ_d autour du point zéro.

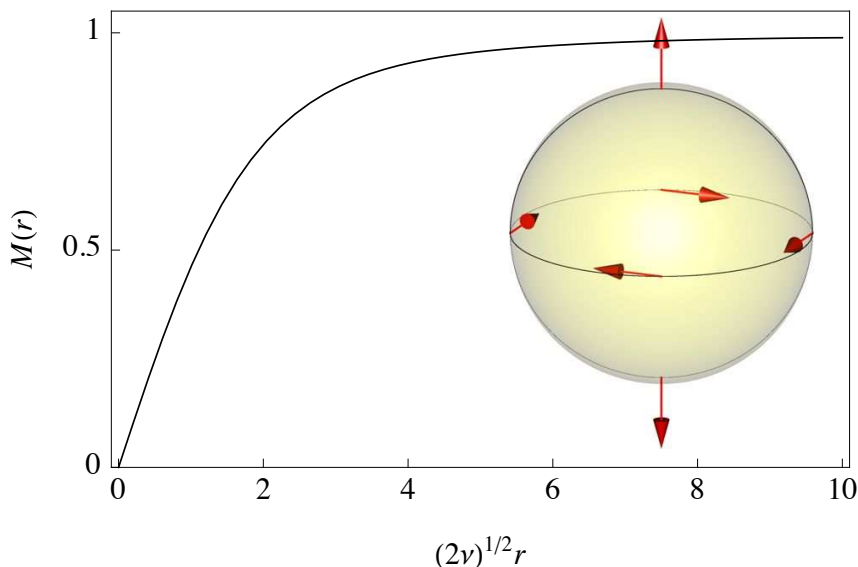


Fig. 3.5: Point de Bloch comme solution locale des équations d'équilibre.

que l'énergie de la solution avec le champ de vecteurs hélicoïdal comme il est facile de deviner aussi de la figure 3.4. Cela étant vrai pour tout ν et pour toute la région où la solution est valable.

Ces deux solutions sont de nature assez distincte, mais étant toutes les deux des solutions d'équilibre, elles peuvent en principe être observées et leur apparition dépend de la taille du matériau, aucune distinction ne pouvant être observée entre les deux pour un matériau ne dépassant pas l'ordre de la taille du cœur. Ces types de considérations sont difficiles à mettre à l'épreuve analytiquement et dans la section qui suit seront réalisées des simulations numériques pour élucider la pertinence des deux solutions.

3.4.5 Des simulations numériques

Dans la section précédente nous avons vu que les solutions hérisson et hélicoïdale sont des extrêmes de l'énergie, cette dernière étant celle d'énergie minimale dans la région de la singularité et du cœur. Selon notre analyse, dans cette région l'énergie dipolaire est négligeable et il ne devrait pas exister une sélection de l'angle γ_d pour des objets de tailles petite (typiquement la longueur d'échange) en compatibilité avec les conditions de bords.

Nous résolvons avec le paquet NMAG [20] et avec une grille tétraédrique générée par

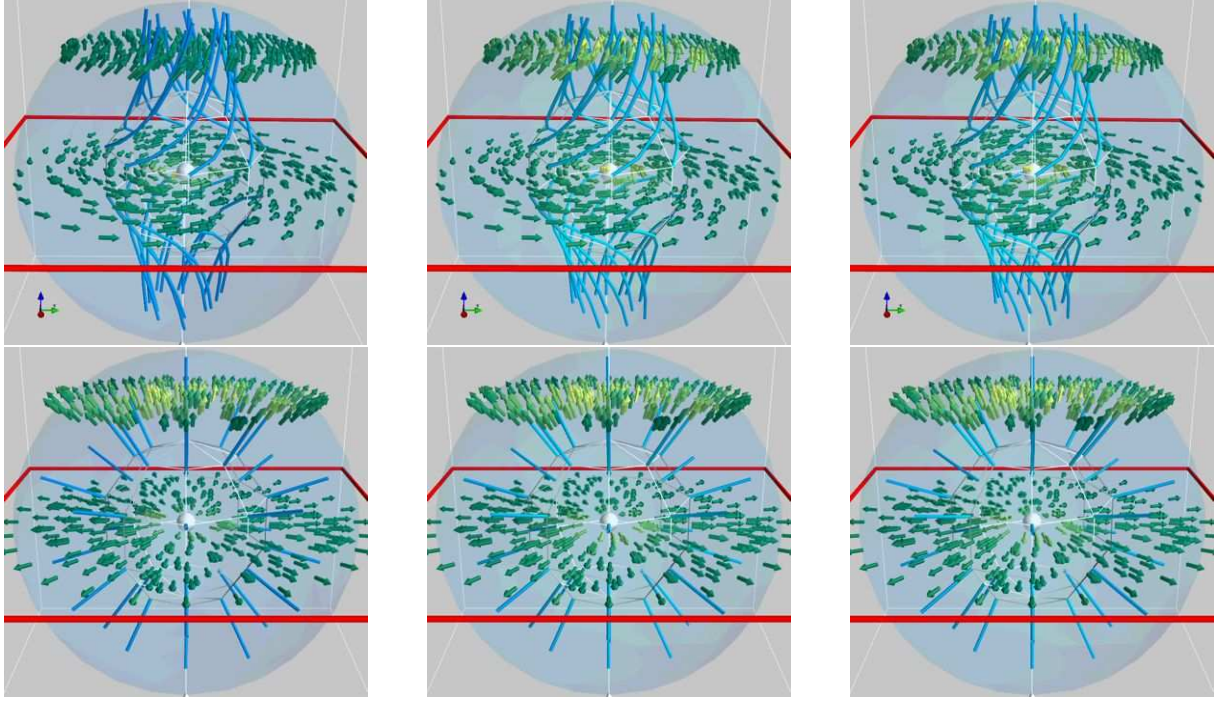


Fig. 3.6: Evolution temporelle pour deux conditions initiales différentes (hérissée et hélicoïdale) et pour des conditions de bords fixées à la surface pour une sphère de la taille de la longueur d'échange $R = 10$ nm. Les temps sont (gauche) $t = 0$, (centre) $t = 20$ ps, et (droite) $t = 40$ ps. Pour cette sphère «petite» les deux points de Bloch sont stables et c'est la condition de bord qui impose l'aimantation dans le volume.

GMSH [23], l'équation de Landau-Lifshitz sans termes de relaxation

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -g \mathbf{M} \times \mathbf{H}_T, \quad (3.61)$$

avec $\mathbf{H}_T$ contenant des termes d'énergie dipolaire et d'échange. Nous considérons un matériau isotrope avec $g = 2.2 \times 10^5 \text{mA}^{-1}\text{s}^{-1}$. Pour tester nos prédictions analytiques nous faisons des simulations de l'équation de Landau-Lifshitz des deux conditions initiales hélicoïdale et radiale pour deux tailles différentes de sphère : une petite avec un rayon $R = 10 \text{nm}$ de l'ordre de la longueur d'échange $\ell_A \approx 6 \text{nm}$, et une autre sphère grande de rayon $R = 20 \text{nm}$. Ici la zone de singularité est de l'ordre de la discrétisation de la grille $\ell_0 \lesssim 1 \text{nm}$ et alors le paramètre adimensionnel $\nu \gtrsim 10$. La petite sphère contient 3821 éléments de volume, tandis que la sphère grande 234 108. Les résultats des simulations jusqu'à l'obtention d'un état stationnaire sont montrées dans les figures 3.6 et 3.7.

Ces simulations montrent ce que nous avons prédit concernant l'enjeu de taille est des termes d'énergie relevant. En effet la taille de la structure détermine l'importance des différents termes d'énergie. En effet, nous pouvons nous faire une idée plus précise de l'évolution vers l'état d'équilibre dans les différents cas en regardant le comportement de l'aimantation normalisée dans le volume $\mathcal{V}$:

$$\overline{\mathbf{m}}(t) = \int_{\mathcal{V}} dV \mathbf{m}(\mathbf{r}, t). \quad m(t) = |\overline{\mathbf{m}}(t)|, \quad (3.62)$$

L'évolution de cette grandeur pour les deux cas $\gamma_d = 113^\circ$ et $\gamma_d = 0$ est très différente. En effet l'évolution de l'aimantation moyenne doit rester proche du zéro pour un point

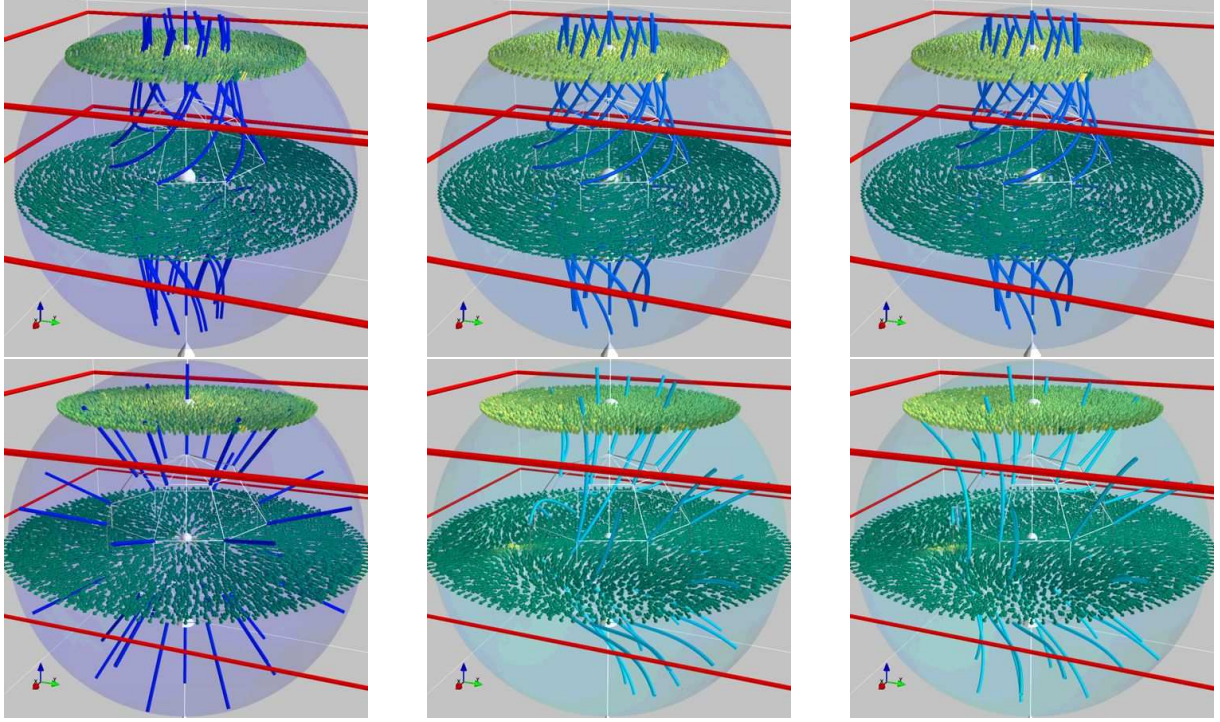


Fig. 3.7: Evolution des deux point de Bloch avec des conditions de bords fixées à la surface et pour une sphère de taille plus grande que la longueur d'échange $R = 20$ nm. Les temps sont (gauche) $t = 0$, (centre) $t = 80$ ps, et (droite) $t = 160$ ps. Nous voyons qu'alors que le point de Bloch hélicoïdal reste sans déformation (minimum de l'énergie), le point de Bloch radial disparaît pour devenir de type hélicoïdal à l'intérieur de la sphère.

de Bloch «ordonné». C'est le cas observé pour le point de Bloch hélicoïdal (autant pour la petite que pour la grande sphère). Or, pour le point de Bloch radial il existe une différence importante (un ordre de grandeur) entre l'évolution de la moyenne pour les deux valeurs de R : pour la petite sphère l'évolution est semblable à celle du point de Bloch hélicoïdal pour la sphère de la même taille, tandis que pour la grande sphère il existe une reacommodation brutale du champ d'aimantation produisant une évolution qui s'éloigne des autres cas, comme nous le montrons dans la figure 3.8.

Notamment, nous pouvons constater le transfert d'énergie d'échange à énergie dipolaire en regardant l'évolution de ces deux grandeurs pour le cas du point de Bloch radial dans la grande sphère. Effectivement, bien que l'énergie reste constante (pas de termes dissipatifs en LL), en changeant d'une configuration radiale vers une autre hélicoïdale, l'énergie dipolaire diminue au dépend de l'énergie d'échange qui augmente, comme on peut le constater dans la figure 3.9.

3.4.6 Conclusions

Nous avons résolu le problème de la minimisation de l'énergie pour un point de Bloch tenant compte de l'énergie d'échange, l'énergie dipolaire et l'énergie de Landau. Ce calcul montre ce qui avait été prévu dans les anciens travaux : l'énergie dipolaire impose la sélection d'un angle d'inclination γ_d par rapport à la direction azimutale et l'énergie de Landau régularise la singularité au point zéro, donnant au cœur une taille différente de zéro. Nous avons trouvé qu'il existe deux solutions du point du Bloch. La première

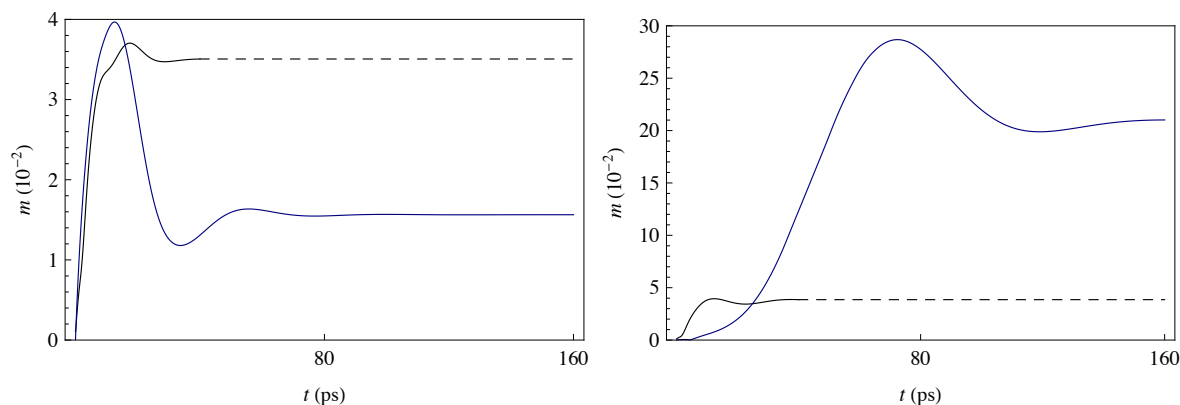


Fig. 3.8: Evolution temporelle de l'aimantation moyenne sur la sphère pour $\gamma_d = 113^\circ$ (gauche) et $\gamma_d = 0$ (droite) cas. Pour le cas hélicoïdal la moyenne reste proche du zéro (petite sphère en noir et grande sphère en bleu). Par contre le point de Bloch hérisson dévie de manière significative de l'état initial. La différence peut être appréciée en regardant l'échelle des axes verticaux.

consistant en un point de Bloch type hérisson dont le profil dépend de ν et qui devient singulier pour $\nu \rightarrow \infty$. Cette solution est défini dans tout l'espace mais elle correspond à un maximum de l'énergie dipolaire. Cette énergie se minimise pour une valeur de $\gamma_d = 113^\circ$ qui correspond au point de Bloch hélicoïdal et qui est une solution locale bien définie dans la région de la singularité et du cœur. Cette solution ne dépend pas des paramètres du matériau. Selon les équations, c'est dans la région au-delà du cœur que l'énergie dipolaire devient importante et donc toutes les deux solutions s'avèrent stables quand la taille du matériau reste de l'ordre de la longueur d'échange et dépendent des conditions de bords. Ceci est corroboré par des simulations numériques. Par contre dans un matériau dépassant cette longueur nous voyons que la relaxation se fait vers le point de Bloch d'énergie minimale, c'est-à-dire, le point de Bloch hélicoïdal, étant les conditions de bords moins importantes. Des observations similaires ont été faites dans des simulations dans un cube [31][40]. Ces observations montrent que la structure du point de Bloch est plus ou moins indépendante de la géométrie quand la taille du matériau est beaucoup plus grand que la longueur d'échange.

Ces recherches ont été publiées en 2011 [16, 15].

En regardant la taille caractéristique de la singularité pour un ferromagnétique typique on trouve $\ell_s \approx 1\text{nm}$. Ce qui montre que pour rendre compte de mécanismes de régularisation et de structure interne il faut considérer des effets quantiques [56] et peut-être aussi la discrétisation naturelle du problème. Dans la section suivante nous avançons dans cette direction en appliquant des méthodes de quantification de solitons dans l'approche semi-classique.

3.5 Le point de Bloch quantique

La petite taille du cœur du point de Bloch met en évidence le fait que autour de la singularité les effets quantiques peuvent être importants. L'idée d'inclure des effets quantiques dans une solution classique vient de la théorie quantique des champs où les

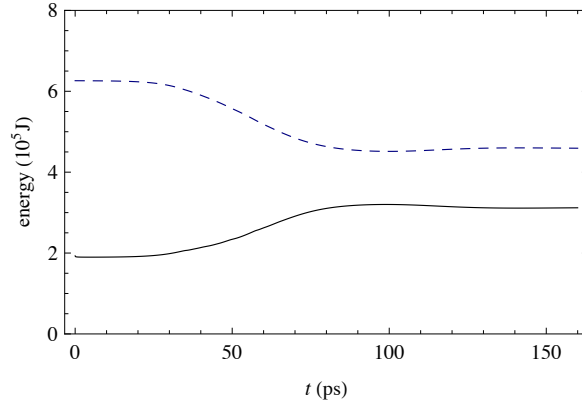


Fig. 3.9: Evolution de l'énergie magnétique pour le cas d'une sphère grande avec aimantation radiale. La ligne solide est l'énergie d'échange et la ligne pointillée l'énergie dipolaire. Toutes les deux moyennées sur tout le volume. Le système minimise son énergie dipolaire à travers d'un transfert d'énergie d'échange.

ressemblances entre les solitons classiques et la notion de particule en mécanique quantique ont motivés l'étude du lien entre les deux (regarder [64] et les citations jointes). Un soliton a certaines propriétés que l'on peut considérer comme des propriétés caractérisant ce qu'on comprend par «particule». En effet, en général un soliton classique bouge de manière cohérente sans se déformer et il est localisé dans un endroit précis de l'espace. De la même manière une particule quantique n'est rien d'autre qu'une distribution de probabilité dont certaines caractéristiques sont invariables, par exemple la charge électrique et le spin. De même, les charges topologiques définissent et restent conservées dans le mouvement des solitons. Cependant il se trouve qu'une solution classique d'une théorie de champs ne peut pas être directement associée à des états propres de l'hamiltonien qui respectent les relations attendues pour des particules². Ainsi, du point de vue conceptuel, le problème de associer un état quantique à une solution classique est loin d'être trivial. Malgré cela, la solution trouvée à ce problème n'est pas tout à fait difficile à expliquer. L'idée centrale de la quantification de solitons consiste à calculer les oscillations autour d'une solution classique et ensuite de considérer ces modes oscillatoires quantiquement, c'est-à-dire comme des oscillateurs harmoniques³. Pour que cela soit possible il faut faire une expansion de l'hamiltonien à deuxième ordre et autour de la solution classique. Ceci nous pourvoit d'un système d'oscillateurs dont les fréquences d'oscillation correspond à les valeurs propres de l'opérateur différentiel qui apparait de l'expansion à deuxième ordre. Ainsi, en quantifiant ces modes ce que nous faisons est regarder un système quantique d'oscillateurs dont le vide est donné par la solution classique, et dans le cas qui nous intéresse, un soliton. Cette méthode peut paraître un peu arbitraire dans le sens que le fait de considérer des fluctuations autour d'une solution classique pourrait ne pas avoir un lien direct avec les états de la théorie quantique au sens strict, c'est-à-dire, la théorie quantique où les champs sont des opérateurs et les observables physiques de la théorie sont les valeurs propres des opérateurs. Cependant il a été montré par Goldstone et Jackiw [24] que pour une théorie classique contenant des solutions solitoniques, il existe un certain

2. Par exemple, dans le cas des particules relativistes, on voudrait que les états propres de l'hamiltonien aient pour chaque vecteur propre une énergie E et un moment linéaire $\mathbf{P}$ qui satisfassent la relation $E^2 - \mathbf{P}^2 = M^2$ pour un M fixe qui correspondra à la masse de la particule.

3. Ces oscillations ont de différents noms selon le contexte. Pour un champ scalaire on les appelle *mesons*, quand il s'agit des oscillations de champs magnétiques, sont des *magnons*.

nombre de conditions qui se satisfont dans la théorie quantique. Notamment le fait qu'il existe des états dans «le secteur soliton» dont celui d'énergie minimale correspond à une particule avec les propriétés du soliton et les autres correspondent à des états où il y a les solitons plus les fluctuations décrites auparavant.

Plus précisément, considérons l'action d'un système de spins de coordonnées $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d\mathbf{x} dt, \quad (3.63)$$

dans le cas présent :

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}_B - \mathcal{H}(\phi, \nabla \phi), \quad (3.64)$$

où $\mathcal{L}_B$ est le terme cinétique ou phase de Berry et $\mathcal{H}(\phi, \nabla \phi)$ est l'hamiltonien. L'action jusqu'au deuxième ordre autour de la solution $\phi = \phi_0$ est :

$$\mathcal{S}[\phi_0 + \delta\phi] = \mathcal{S}[\phi_0] + \int \left. \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi_i(x)} \right|_{\phi=\phi_0} \delta \phi_i(x) dx + \frac{1}{2} \int \delta \phi_i(x) \left. \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)} \right|_{\phi=\phi_0} \delta \phi_j(y) dx dy, \quad (3.65)$$

où x, y symbolisent les coordonnées de l'espace mais aussi du temps et il y a une somme sur les indices i et j .

Puis si ϕ_0 s'agit d'une solution classique la condition de minimum de l'action réduit l'expansion à :

$$\mathcal{S}[\phi_0 + \delta\phi] = \mathcal{S}[\phi_0] + \frac{1}{2} \int \delta \phi_i(x) \left. \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)} \right|_{\phi=\phi_0} \delta \phi_j(y) dx dy. \quad (3.66)$$

Rappelons-nous que la dérivée fonctionnelle, pour un Lagrangien qui ne dépend pas de dérivées d'ordre supérieur à deux, est :

$$\frac{\delta \mathcal{S}[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \quad (3.67)$$

En appliquant deux fois cette formule et avec la relation

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta(x - y) \quad (3.68)$$

nous trouvons une expression pour la deuxième variation

$$\frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \phi_i(x) \delta \phi_j(y)} = \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \phi_i(x)^2} \delta(x - y) \quad (3.69)$$

explicitement :

$$\frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \phi^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^2} - 2 \partial_\mu \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \partial_\nu \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu \phi)} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \quad (3.70)$$

Si nous considérons une solution ϕ_0 stationnaire, alors la seule partie qui rentrera dans l'analyse est l'hamiltonien (comme on fait par exemple avec le kink en tant que solution stationnaire [64]). Considérons, pour fixer l'idée principale, un hamiltonien d'un champ scalaire tel que :

$$\mathcal{H} = (\nabla \phi)^2 + U(\phi). \quad (3.71)$$

Dans ce cas nous avons dans l'expansion à deuxième ordre de l'action et en occupant les formules (3.66), (3.68) et (3.70), le terme :

$$\int d\mathbf{x} \delta\phi(x) \left. \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} \delta\phi(x) = \int d\mathbf{x} \left[-\nabla^2 + \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right] \Big|_{\phi=\phi_0} \delta\phi. \quad (3.72)$$

Où on a fait une intégration par parties. Alors on a intérêt à trouver les valeurs propres de l'opérateur entre parenthèses,

$$\left[-\nabla^2 + \frac{d^2 U}{d\phi^2} \right] \Big|_{\phi=\phi_0} \delta\phi_i = \omega_i^2 \delta\phi_i, \quad (3.73)$$

ce avec quoi le Lagrangien devient quadratique dans les champs $\delta\phi$ et la quantification devient simple. En effet les valeurs propres de l'énergie quantique sont

$$E_i = H[\phi_0] + \hbar \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \omega_i. \quad (3.74)$$

C'est alors qu'on a trouvé le soliton dans la théorie quantique et qu'on peut faire des analyses sur quelles sont les effets macroscopiques sur la solution classique. Cependant il faut garder en tête que cette méthode repose sur la supposition initiale de que la solution constitue un minimum de l'énergie (les $\omega_i > 0$) et que cette méthode néglige des effets de plus grand ordre.

Dans notre cas, l'équation (3.73) se réduit à $-\nabla^2 \delta\mathbf{S} = \lambda_i \delta\mathbf{S}$ et la dépendance du point de Bloch disparaît (la même situation est observée avec le skyrmion et en général avec les solutions de l'énergie d'échange). C'est alors qu'il faut trouver une méthode alternative pour calculer les oscillations autour du soliton et ainsi regarder les effets quantiques. La différence entre l'énergie quantique autour d'un soliton et l'énergie autour du vide dans le contexte de quantification de solitons est souvent appelée *correction de l'énergie à une boucle*.

Dans cette section nous faisons un changement de coordonnées astucieux vers le plan complexe qui nous permet de trouver la forme des oscillations autour de la solution classique et de les comparer avec les oscillations autour d'une solution homogène. Inspirés de la section précédente où nous avons montré que le champ dipolaire est de moindre importance dans la région singulière, nous considérons uniquement le terme d'échange. Ce travail s'inspire du papier d'Ivanov [38] où la même méthode est utilisée pour un skyrmion bi-dimensionnel. Cependant les résultats dans notre cas ne sont pas complètement aboutis pour le moment et ce pour des raisons que nous allons discuter à la fin et dans les conclusions. Malgré ceci il est intéressant de regarder le lien qui existe entre une théorie magnétique macroscopique et phénoménologique (comme c'est le cas de LL) et l'équation pour un monopôle magnétique dans la mécanique quantique (ce qu'on appelle le monopôle de Dirac).

3.5.1 Action et équations de mouvement

Nous considérons l'action d'un système de spins classiques $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ couplés par l'interaction d'échange. Dans la limite continue, avec une constante de réseau a , pour une constante

d'échange J et le champ écrit dans des coordonnées sphérique $\mathbf{S} = S(\cos \phi \sin \theta, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, l'action est :

$$\mathcal{S} = \int \frac{d^3x}{a^3} \int dt \mathcal{L}, \quad (3.75)$$

avec le lagrangien et hamiltonien :

$$\mathcal{L} = S \cos \theta \dot{\phi} - \mathcal{H}, \quad (3.76)$$

$$\mathcal{H} = \frac{Ja^2}{2} (\nabla \mathbf{S})^2 \quad (3.77)$$

Explicitement, en développant l'hamiltonien et pour $S = \text{const}$ nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathcal{L}}{S} = \cos \theta \dot{\phi} - \frac{D}{2} (\sin^2 \theta (\nabla \phi)^2 + (\nabla \theta)^2) \quad (3.78)$$

Où nous avons défini la constante D , qui a des unités d'une constante de diffusion

$$D = JSa^2 \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (3.79)$$

Les équation d'Euler-Lagrange nous donnent les équation de mouvement du système :

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \sin \theta \partial_t \phi &= \nabla^2 \theta - \sin \theta \cos \theta (\nabla \phi)^2 \\ \frac{1}{D} \sin \theta \partial_t \theta &= -\nabla \cdot (\sin^2 \theta \nabla \phi) \end{aligned} \quad (3.80)$$

3.5.2 Des perturbations autour d'une solution arbitraire

Soit une solution stationnaire des équations de mouvement (θ_0, ϕ_0) et une perturbation (θ, ϕ) autour d'elle : nous écrivons le décalage de la solution stationnaire par rapport aux perturbations dans le plan complexe avec la transformation qui suit :

$$\Psi = \theta - \theta_0 + i(\phi - \phi_0) \sin \theta_0. \quad (3.81)$$

Nous réécrivons l'équation de mouvement (3.80) à premier ordre dans les parties imaginaires et réelles de $\Psi = \Psi_r + i\Psi_i$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta_0}{D} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} &= \sin \theta_0 \nabla^2 \Psi_r - \sin 2\theta_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \Psi_i + \cos \theta_0 \sin 2\theta_0 (\nabla \phi_0 \cdot \nabla \theta_0) \Psi_i \\ &\quad - \sin \theta_0 \cos 2\theta_0 (\nabla \phi_0)^2 \Psi_r, \\ \frac{\sin \theta_0}{D} \frac{\partial \Psi_r}{\partial t} &= -\sin \theta_0 \nabla^2 \Psi_i - \sin 2\theta_0 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \Psi_r - \nabla \cdot (\sin 2\theta_0 \nabla \phi_0) \Psi_r \\ &\quad + \nabla \cdot (\cos \theta_0 \nabla \theta_0) \Psi_i. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Pour bénéficier des propriétés et des acquis de l'équation de Schrödinger, nous écrivons ces dernières équations comme $\partial_t \Psi = \hat{H} \Psi$. Les conditions pour que cela soit possible sont :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\sin 2\theta_0 \nabla \phi_0) &= \cos \theta_0 \sin 2\theta_0 (\nabla \phi_0 \cdot \nabla \theta_0) \\ \nabla \cdot (\cos \theta_0 \nabla \theta_0) &= \sin \theta_0 \cos 2\theta_0 (\nabla \phi_0)^2. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Il apparaît que pour la solution homogène autant que pour le point de Bloch ces conditions sont satisfaites.

Désormais nous utilisons les variables (θ, ϕ) pour designer les coordonnées de l'espace et non les champs eux mêmes, comme il a été fait jusqu'alors.

3.5.3 Autour de la solution homogène

Pour une solution homogène (c'est-à-dire pour θ_0 et ϕ_0 des constantes dans l'équation (3.82)), les équations (3.83) sont vérifiées identiquement et nous pouvons écrire :

$$\frac{i}{D} \partial_t \Psi = -\nabla^2 \Psi. \quad (3.84)$$

Les solutions d'ondes stationnaires $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \Psi(\mathbf{r})$ donnent :

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.85)$$

avec $k^2 \equiv \omega/D$. Explicitement, en coordonnées sphériques, cette équation est :

$$\left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} + k^2 r^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] \Psi = 0 \quad (3.86)$$

dont la solution générale est une série de produits entre les fonctions de Bessel sphériques d'ordre m $j_m(kr)$ et les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$, avec $l \in \mathbb{Z}$ et $l \geq 0$ [22] :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_m(kr) Y_l^m(\theta, \phi). \quad (3.87)$$

Cette solution est importante pour notre problématique car elle va définir le «vide» par rapport auquel les propriétés, telles l'énergie des excitations autour du soliton, doivent être mesurées.

3.5.4 Autour du point de Bloch, résolution de l'équation de Schrödinger

Soit la solution point de Bloch radial : $\theta_0 = \theta$ et $\phi_0 = \phi$ (c'est-à-dire que les champs sont équivalents aux coordonnées de l'espace, quand les champs et les coordonnées sont dans des bases sphériques). En introduisant cette solution en (3.83) les identités sont satisfaites⁴. Donc on a :

$$\boxed{\frac{i}{D} \partial_t \Psi = -\nabla^2 \Psi - \frac{2i \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} \cdot \nabla \Psi + \frac{\cos 2\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \Psi} \quad (3.88)$$

Cette équation peut être écrite comme :

$$\frac{i}{D} \partial_t \Psi = \hat{H} \Psi, \quad (3.89)$$

avec l'opérateur $\hat{H}$ donné par :

$$\hat{H} = (i\nabla + \mathbf{A})^2 + V, \quad (3.90)$$

où le champ vectoriel $\mathbf{A}$ est :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{-2 \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi}, \quad (3.91)$$

et le champ scalaire est :

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r^2} (1 + 3 \cot^2 \theta). \quad (3.92)$$

4. La première des équations devient $0 = 0$ et la deuxième devient $\frac{\cos 2\theta}{r^2 \sin \theta}$ des deux cotés.

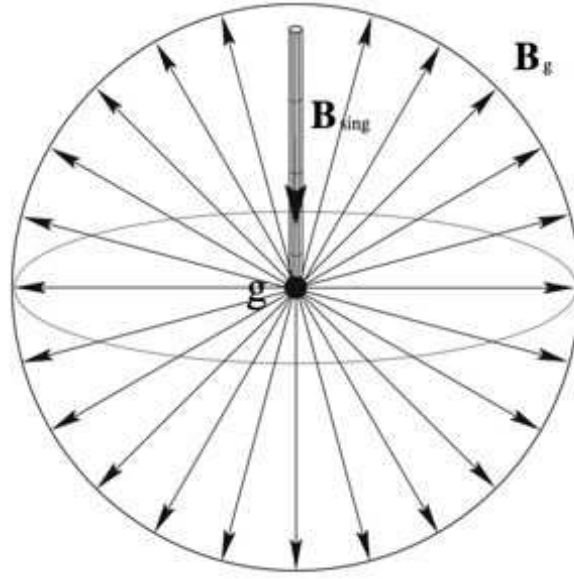


Fig. 3.10: Champ du monopôle de Dirac.

L'équation (3.88) correspond très exactement (sauf pour les paramètres) à l'équation de Schrödinger d'une particule chargée dans un champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et soumise à un potentiel scalaire V attractif (l'énergie diminue avec la distance r) et anisotrope. Le potentiel vecteur satisfait $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Cette dernière équation définit une jauge particulière appelée jauge de Coulomb. Le rotationnel de $\mathbf{A}$ nous donne le champ magnétique qui constitue celui d'un monopôle magnétique (figure 3.10), parfois appelé monopôle de Dirac, car ce dernier a été le premier à l'étudier, notamment pour démontrer la quantification de la charge électrique [59, 68]. Le champ magnétique $\mathbf{B}$ est singulier, ce qui permet ainsi d'avoir simultanément une forme radiale et une divergence nulle. L'ubication de la singularité est différente selon la jauge considérée. Dans la jauge de Coulomb, le champ magnétique est (voir aussi figure 3.10) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4g\pi \mathbf{n} \theta(z) \delta(x) \delta(y). \quad (3.93)$$

Explicitement, l'hamiltonien de l'équation (3.90) est :

$$\hat{H} = -\nabla^2 - \frac{2i \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{r^2} \quad (3.94)$$

$$= \frac{-1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i \cos \theta \right)^2 + 1 \right] \quad (3.95)$$

$$= \frac{-1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \hat{\mathbf{L}}^2 \right] \quad (3.96)$$

Où

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \equiv -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i \cos \theta \right)^2 \right] + 1 \quad (3.97)$$

est le moment angulaire généralisé [68]⁵. En effet, ce moment angulaire appartient à une famille de moments angulaires à un paramètre. Ainsi, l'équation de Schrödinger de valeurs

5. Pour cette partie regarder la référence [68] et ses citations.

propres pour des ondes stationnaires est :

$$\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + r^2 k^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.98)$$

qui est une équation séparable puisque $\hat{\mathbf{L}}^2$ dépend uniquement de θ et ϕ . Essayons donc de résoudre l'équation des valeurs propres pour le moment angulaire.

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \Psi(\theta, \phi) = \lambda \Psi(\theta, \phi). \quad (3.99)$$

Si nous appliquons la transformation de jauge $\Psi \rightarrow e^{-i\phi} \Psi$, nous aboutissons à une équation dont la partie azimutale est modifiée par rapport à l'équation de Schrödinger libre :

$$\left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i \cos \theta \right)^2 \right] + 1 \right) \Psi(\theta, \phi) = \lambda \Psi(\theta, \phi). \quad (3.100)$$

Ceci correspond à un cas particulier d'une équation étudiée auparavant, dont les valeurs propres sont des harmoniques sphériques généralisés $Y_{\mu l m}$. Dans le contexte du monopôle de Dirac, ces trois paramètres correspondent aux valeurs propres usuelles de $\mathbf{L}^2$ et L_z (l et m respectivement) et le paramètre $\mu = eg = n/2$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Avec e la charge de l'électron et g égal au flux magnétique sur 4π . Dans notre cas $\mu = 1$. La définition des harmoniques sphériques généralisés $Y_{\mu l m}$ est :

$$Y_{\mu l m}(\theta, \phi) \equiv N(1-x)^{(\mu+m)/2}(1+x)^{-(\mu-m)/2} P_{l+m}^{-\mu-m, -\mu+m}(x) e^{i(\mu+m)\phi} \quad (3.101)$$

avec $x = \cos \theta$ et $P_n^{\alpha, \beta}$ les polynômes de Jacobi :

$$P_n^{\alpha, \beta} \equiv \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right). \quad (3.102)$$

Le facteur de normalisation N est donné par :

$$N = 2^m \left(\frac{(2l+1)(l-m)!(l+m)!}{4\pi(l-\mu)!(l+\mu)!} \right). \quad (3.103)$$

Le lien entre les différents paramètres des harmoniques sphériques généralisés est :

$$-l \leq m \leq l \quad (3.104)$$

$$l = \mu, \mu+1, \mu+2, \dots \quad (3.105)$$

$$\lambda = l(l+1). \quad (3.106)$$

La partie radiale de l'équation est donnée ci-dessous :

$$\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + r^2 k^2 - l(l+1) \right] \Psi(r) = 0. \quad (3.107)$$

Ceci correspond notamment à la partie radiale d'une particule libre, dont les solutions régulières en zéro sont encore les fonctions sphériques de Bessel d'ordre l :

$$\Psi_l(\rho = kr) = j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^l \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right) \quad (3.108)$$

L'expression asymptotique des fonctions de Bessel correspond à des fonctions sinus :

$$j_l(\rho) = \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{l\pi}{2}\right). \quad (3.109)$$

Notons cependant que les l sortis de l'équation du monopôle de Dirac ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux qui correspondent à une équation libre. Pour le cas libre tous les modes sont permis, $l_f = 0, 1, 2, \dots$ tandis que pour un $\mu = 1$, les valeurs de l sont $l = 1, 2, 3, \dots$. On peut démontrer d'après le flux magnétique de notre $\mathbf{B}$ que $g = 2$. Ceci ajouté au fait que $\mu = 1$, nous avons une charge électrique correspondant à $e = 1/2$. Si nous voulions aller plus loin dans l'analogie nous pourrions dire que les oscillations autour du point de Bloch correspondent très exactement (au moins mathématiquement) à un système quantique d'un électron de charge électrique $e = 1/2$ qui bouge dans le champ d'un monopôle de Dirac de charge magnétique $g = 2$ et dans un potentiel scalaire attractif ayant une dépendance en θ et donc anisotrope. Il n'est pas complètement surprenant qu'en utilisant des solutions mathématiques d'un certain système physique dans un autre système pas nécessairement lié, on trouve des interprétations inattendues⁶.

3.5.5 Des considérations sur la quantification

Jusqu'alors, la forme des oscillations autour du point de Bloch a été trouvée de manière analytique. Ce résultat peut être maintenant utilisé pour quantifier le point de Bloch.

Dans les théories de champs, le vide correspond à un état où il n'y a pas de variation du champ, ni par rapport à l'espace, ni par rapport au temps. Ceci correspond à l'état fondamental qui est normalement un minimum absolu de l'énergie. Les petites oscillations du vide peuvent être étudiées en faisant une expansion au second ordre dans l'énergie. Un tel système est équivalent à un système d'oscillateurs harmoniques dans chaque point de l'espace. En mécanique quantique l'énergie de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique est positive en raison du principe d'incertitude. Il en résulte alors que dans les théories de champs l'énergie des oscillations quantiques est infinie (somme d'une énergie différente de zéro dans chaque point de l'espace).

De la même manière, l'énergie des oscillations autour d'une solution sera infinie. Cette énergie ne prend son sens physique qu'en étant comparée avec l'énergie du vide. Le résultat de cette soustraction est souvent infini et il faut alors faire appel à des méthodes de régularisation ou de renormalisation afin de trouver la contribution finie à l'énergie du système en présence du soliton.

Nous sommes maintenant en mesure de comparer les oscillations autour du vide et autour du point de Bloch. Si nous revenons à la fonction originale Ψ (avant de faire la transformation de jauge), la forme des oscillations en présence du point de Bloch est :

$$\Psi^{\text{bp}}(\mathbf{r}) = e^{-i\phi} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.110)$$

6. Rappelons-nous par exemple de l'interprétation qu'on peut donner à un spin quand on regarde son action classique : « The classical action of a spin is one of a massless particle moving on a unit sphere. The particle carries a magnetic moment of magnitude S . It is coupled to a conventional magnetic field via its magnetic moment, and to a monopole field via its orbital motion. » (Altland, 2006 [4])

En revanche la forme des fluctuations autour de la solution homogène est :

$$\Psi^{\text{free}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.111)$$

et

$$Y_{0lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.112)$$

Ces deux solutions sont presque similaires. Les seules différences résident à la fois dans la phase $e^{-i\phi}$ (qui n'a pas de conséquence sur l'énergie) et, de manière plus important, dans les modes de fluctuations dans le secteur du soliton qui ne commencent qu'à partir de $l = 1$. Le mode fondamental de fluctuation est en quelque sorte absorbé par le point de Bloch. De ce point de vue, l'énergie des fluctuations autour du point de Bloch devrait être plus petite que l'énergie des fluctuations autour du vide, signifiant que le point de Bloch est du point de vue quantique énergiquement favorable et donc stable (sous les hypothèses considérées).

Ce qui est frappant dans cette solution, c'est sa simplicité. En effet le problème des fluctuations autour d'un soliton doit être souvent traité à l'aide de méthodes de diffusion car il est difficile de trouver des solutions analytiques explicites. Dans ce contexte de diffusion toute l'information apparaît dans les phases de l'onde diffusée regardée à l'infini, où cette onde-ci est une onde libre. C'est alors qu'il est important d'écrire le comportement asymptotique des fluctuations. En effet, pour $kr \gg 1$ les fonctions radiales sont asymptotiquement :

$$j_l^{bp}(\rho) = \frac{1}{\rho} \sin \left(\rho - \frac{l\pi}{2} + \eta_l \right), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.113)$$

$$\eta_l = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } l \geq 1 \\ 0 & \text{si } l = 0. \end{cases} \quad (3.114)$$

Le changement de phase est 0 pour le mode fondamental et $-\pi/2$ pour les autres modes. Ces changements de phase ne sont pas localisés (ils ne décroissent pas avec la distance). Ce fait est lié à la longue portée du champ $\mathbf{A}$ [8]. Un potentiel vecteur de ce type est la conséquence des caractéristiques topologiques du soliton. Ceci impose que le problème de la diffusion soit résolu avec des méthodes non-usuelles comme celles développées pour résoudre la diffusion de Aharonov-Bohm (à ce sujet regarder les papiers cités dans [38]).

En utilisant les vecteurs d'onde dans le cas du vide et dans le cas avec le point de Bloch, nous pouvons appliquer la théorie développée en [], où il est montré que la correction à l'énergie à une boucle est donnée comme suit :

$$\epsilon^{1\text{-loop}} = \frac{\hbar D}{2} \left(\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}^2 - \sum_{\mathbf{k}_{\text{vac}}} \mathbf{k}_{\text{vac}}^2 \right). \quad (3.115)$$

Ceci peut également s'écrire par rapport aux changements de phase [11] :

$$\epsilon^{1\text{-loop}} = -\frac{\hbar D}{\pi} \int_0^\infty k \eta(k) dk. \quad (3.116)$$

Evidemment si nous remplaçons les phases déjà trouvées dans l'équation (3.116), nous obtenons une correction infinie. Ce problème est récurrent dans les travaux visant à trouver des corrections quantiques autour d'un soliton. Pour y pallier, des méthodes de renormalisation sont utilisées afin d'isoler la contribution finie.

En connaissant la solution analytique nous pouvons directement calculer (3.115) en considérant un $L \gg r$ et des conditions aux bords nulles. C'est-à-dire, à partir de (3.109) et (3.113) nous avons pour un entier positif n :

$$n\pi = k_{\text{free}}L = k_{bp}L - \frac{\pi}{2}, \quad l \neq 0, \quad (3.117)$$

et

$$n\pi = k_{\text{free}}L = k_{bp}L, \quad l = 0. \quad (3.118)$$

Explicitement :

$$\epsilon^{1-\text{loop}} = \frac{\hbar D}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi + \pi/2}{L} \right)^2 \right) = -\frac{\hbar D}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{4} \right) \quad (3.119)$$

La principale difficulté dans cette relation réside dans le fait qu'il y a deux quantités tendant formellement vers l'infinie : n et L . Cette correction est, comme prévue, négative ou nulle. Dans les théories de champs ces deux limites sont résolues en imposant un cut-off pour l'énergie ou en renormalisant le Lagrangien de départ. Ainsi on peut séparer la partie divergente (par exemple un polynôme du cut-off) de la partie finie (ce qu'on appelle l'énergie de Casimir). Dans notre cas, nous avons un cut-off naturel du fait que la longueur d'onde des oscillations ne peut être plus petite que la taille de la grille a . De la même manière, L peut être considéré comme la taille du matériau. Selon ces considérations, nous avons un $n_{\text{max}} = [L/\pi a]$ (la partie entière de L sur πa). La somme n'est plus une série et peut être évaluée :

$$\epsilon^{1-\text{loop}} = -\frac{\hbar D}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(n_{\text{max}}^2 + \frac{3}{4}n_{\text{max}} \right) < 0 \quad (3.120)$$

La forme explicite par rapport à L

$$\epsilon^{1-\text{loop}} = -\frac{\hbar D}{2a^2} \left(1 + \frac{3\pi a}{4L} \right) \quad (3.121)$$

nous montre qu'en effet dans la limite $L \rightarrow \infty$ la contribution reste finie et ne dépend pas du cut-off :

$$\epsilon_{\infty} \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \epsilon^{1-\text{loop}} = -\frac{\hbar JS}{2}, \quad (3.122)$$

où nous nous sommes servis de la valeur de la constante D . L'énergie en unités de $|\epsilon_{\infty}|$ et pour L en unités de a ($a = 1$) est représentée dans la figure 3.11.

Conclusions et discussion

En conclusion, nous avons calculé la correction à une boucle de l'énergie quantique autour d'un point de Bloch radial. Du point de vue formel, cette énergie dépend du cut-off que nous avons établi grâce à la discrétisation naturelle du problème (taille du réseau = a). Nous avons trouvé que pour toutes les valeurs de L , cette correction est négative, ceci

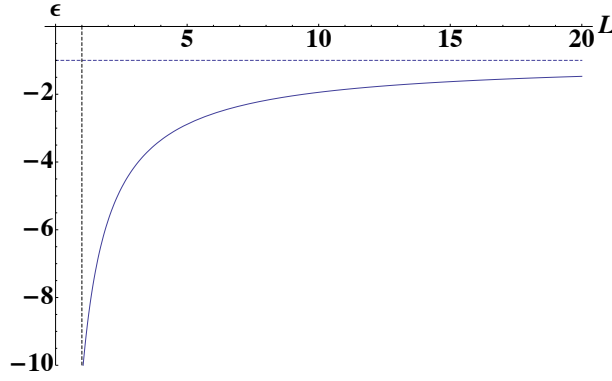


Fig. 3.11: $\epsilon^{1\text{-loop}}$ en unités de $|\epsilon_\infty|$ en fonction de L en unités de a . Les lignes pointillées représentent les valeurs limites $\epsilon^{1\text{-loop}} = |\epsilon_\infty|$ et $L = a$.

signifiant que les fluctuations quantiques aident à stabiliser le point de Bloch radial.

Il faut garder à l'esprit que l'hypothèse de départ qui était de considérer des oscillations reste valable dans toutes les directions où les ondes sont confinées. Lorsqu'il y a des symétries du Lagrangien par rapport aux coordonnées et qu'une solution des équations de champs brise cette symétrie, cette solution appartient alors à une famille de solutions suite à l'application de la transformation de symétrie. Dans ce cas, il existe des directions pour lesquelles les oscillations ne sont pas confinées et produisent des $\omega = 0$. Ces modes doivent être traités de manière indépendante avec des méthodes tel que les *variables collectives*. Ceci constitue un travail à part entière que nous ne traitons pas ici.

4. INTERACTION D'UN COURANT ÉLECTRIQUE AVEC UNE TEXTURE MAGNÉTIQUE

4.1 Introduction

Un de buts majeurs de la spintronique est la manipulation des solitons magnétiques avec des courants électriques polarisés de spin [67]. La grande stabilité des solitons ajoutée à sa grande localisation et petite taille font des skyrmions, vortex, et cætera des candidats à révolutionner les méthodes de stockage d'information numérique. Un intérêt particulier est le changement de polarité des vortex et les transitions topologiques en général. L'interaction entre la magnétisation et le spin de l'électron a été étudiée du point de vue théorique et expérimental avec l'équation de LLG avec des termes β et spin-torque. Cette approche a montré qu'on peut reproduire assez fidèlement des résultats expérimentaux [77] avec des simulations micromagnétiques. Avec cette même approche, les transitions topologiques ont été étudiées pour la première fois dans le ferromagnétiques. Quand on regarde de plus près ces transitions, on trouve qu'il y a d'un côté des singularités (point de Bloch [78]) qui véhiculent les changements de topologie, et d'un autre des ordres de grandeur temporelles et spatiales qui touchent les limites des approximations qui donnent lieu à l'équation de LLG avec des termes supplémentaires [32]. En particulier, quand on a des gradients de l'aimantation de l'ordre de la taille du réseau cristallin, l'approximation adiabatique, selon laquelle le spin de l'électron suit l'aimantation, n'est plus valable.

C'est alors que la recherche s'est tournée vers les modèles qui considèrent la dynamique quantique des électrons mais sans faire des approximations sur leur comportement couplé à l'aimantation, c'est-à-dire, en regardant l'évolution du spin par l'équation de Schrödinger (SE). Ce système d'équations couplés (LLG et SE) a été résolu numériquement en interaction avec des parois magnétiques [53, 61], où des différences avec la limite adiabatique ont été trouvées (la paroi a une vitesse plus petite que celle dans la limite adiabatique quand l'énergie de couplage est plus petite que l'énergie d'échange, et les résultats sont similaires à ceux de la limite adiabatique dans le cas contraire). Des recherches en deux dimensions visant à inclure des effets quantiques est la suite naturelle des travaux mentionnés, et c'est le but de ce chapitre.

Dans ce chapitre nous étudions un système bi-dimensionnel de spins classiques localisés à couplage ferromagnétique, couplés à des spins quantiques itinérants portés par des électrons de conduction. Cette étude est autant analytique que numérique. Nous allons nous intéresser en particulier à l'interaction d'un courant polarisé de spin avec des textures magnétiques de topologie non-trivial comme des vortex et skyrmions. Nous présentons des résultats concernant des changements de topologie induits par un courant polarisé, ainsi que par un paquet gaussien.

4.2 Modèle physique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, des changements de topologie interdits dans l'équation de LLG ont été largement rapportés par des études numériques et expérimentales. Pour en tenir compte, nous travaillons sur un réseau carré où le fait d'avoir une distance minimale ouvre la possibilité de considérer des transitions topologiques là où les hypothèses de différenciabilité et continuité ne sont plus justifiées.

Pour décrire les électrons, nous prenons un modèle de liaison forte. Sur chaque site i , il peut y avoir un électron de spin s qui peut sauter vers le site voisin au prix d'une

énergie $-t_s$. Avec $c_{i,s}$ l'opérateur de destruction d'un spin $s = \pm 1/2$ au site i , l'hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}_e = -t_s \sum_{\langle i,j \rangle, s} (c_{i,s}^\dagger c_{j,s} + c_{j,s}^\dagger c_{i,s}). \quad (4.1)$$

Chacun de ces termes $c_{i,s}^\dagger c_{j,s} + c_{j,s}^\dagger c_{i,s}$ représente une «boucle» dans laquelle une particule de spin s saute de j à i et revient de i à j . L'énergie totale est la somme des boucles sur tous les sites (dans notre cas la somme est sur tous les proches voisins)¹.

Nous introduisons un champ électrique homogène et constant $\mathbf{E} = -E\hat{\mathbf{x}}$. Dans la limite continue, nous pouvons démontrer aisément que l'introduction d'un champ électrique en $\hat{\mathbf{x}}$ est équivalent (à une transformation de jauge prêt) à un potentiel vecteur $\mathbf{A} = tE\hat{\mathbf{x}}$ (voir annexe 6.3) d'après la relation

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

avec ϕ le potentiel électrique, qui dans notre cas est zéro. La transformation de jauge se fait sur les opérateurs du système et son expression explicite est :

$$c_i \rightarrow e^{-\frac{ie\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} c_i. \quad (4.3)$$

En faisant la transformation nous obtenons (nous omettons pour le moment les sous-indices de spin) des termes différents pour les sommes dans les deux directions du réseau i et j :

$$\sum_{\langle i,j \rangle} c_i^\dagger c_j \rightarrow \sum_{\langle i,j \rangle} c_i^\dagger c_j e^{-i\frac{eEt}{\hbar}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \hat{\mathbf{x}}} = \sum_i (e^{i\Phi(t)} c_i^\dagger c_{i+\hat{\mathbf{x}}a} + c_i^\dagger c_{i+\hat{\mathbf{y}}a}), \quad (4.4)$$

où nous avons défini le «flux linéaire» $\Phi = eaEt/\hbar = ea\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}/\hbar$, avec a le paramètre du réseau. Avec ce champ l'évolution quantique contiendra naturellement un courant d'électrons qui bougent dans la direction $+\hat{\mathbf{x}}$.

Explicitement, l'hamiltonien des électrons écrit pour des opérateurs $c_{lm,s}$ où ij sont les sous-indices du réseau carré :

$$\mathcal{H}_e = -t_s \sum_{l,m,s} \left(e^{i\Phi(t)} c_{lm,s}^\dagger c_{l+1m,s} + c_{lm,s}^\dagger c_{lm+1,s} \right) + \text{h.c.} \quad (4.5)$$

Les spins localisés sont décrits avec un hamiltonien de Heisenberg plus le terme d'anisotropie et de l'interaction de Dzyaloshinsky-Moriya, déjà introduits dans le chapitre 2 :

$$\mathcal{H}_S = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j + K \sum_i (S_i^z)^2 - \frac{D}{2} \sum_i \mathbf{S}_i \cdot (\nabla \times \mathbf{S}_i). \quad (4.6)$$

1. En général, l'hamiltonien $\sum_{ij} c_{i,s}^\dagger t_{ij} c_{j,s} + \text{h.c.}$ a comme limite continue l'hamiltonien d'une particule libre dans un potentiel $V(\mathbf{r})$ (voir [4]). Ceci peut être montré par exemple avec les états de Wannier. Si nous désignons par $\epsilon_{\mathbf{k}}$ le spectre des particules libres par rapport au vecteur d'onde $\mathbf{k}$, alors la constante de saut est donnée par $t_{ij} = N^{-1} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)} \epsilon_{\mathbf{k}}$. La magnitude des constantes t_{ij} dépend de la superposition effective des atomes voisins. Dans le cas extrême où il n'y a pas de superposition, le spectre est complètement dégénéré $\epsilon_{\mathbf{k}} = \text{const.}$ et donc $t_{ij} = \delta_{ij}$ et aucun saut d'un site à un autre est possible. Dans le modèle de liaison forte la superposition des orbitales est faible et donc la seule contribution effective à l'énergie est d'après les sauts des électrons entre voisins proches.

Le spin électronique au site i , $\mathbf{s}_i$, se définit à partir des opérateurs de création et de destruction :

$$\mathbf{s}_i = \sum_{ss'} c_{is}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{ss'} c_{is'},$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ les matrices de Pauli :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Explicitement on trouve ($\pm 1/2 = \uparrow, \downarrow$) que :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} c_{\uparrow}^\dagger c_{\downarrow} + c_{\downarrow}^\dagger c_{\uparrow} \\ ic_{\uparrow}^\dagger c_{\uparrow} - ic_{\downarrow}^\dagger c_{\downarrow} \\ c_{\uparrow}^\dagger c_{\uparrow} - c_{\downarrow}^\dagger c_{\downarrow} \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur $\mathbf{s}$ est couplé ferromagnétiquement au spin localisé au moyen de l'interaction s-d, dont l'expression explicite est :

$$\mathcal{H}_{sd} = -J_{sd} \sum_i \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{S}_i. \quad (4.7)$$

Pour rendre compte de la polarisation de spin des électrons nous introduisons un champ «fantôme» qui agit uniquement sur les électrons. Ce champ $\mathbf{B}_p$ se couple au spin des électrons et polarise le courant dans sa direction. Pour μ_e le moment magnétique de l'électron ce terme de l'hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}_p = -\mu_e \mathbf{B}_p \cdot \sum_i \mathbf{s}_i, \quad (4.8)$$

où B_p a des unités de champ magnétique (Tesla) et le spin $\mathbf{s}_i$ n'a pas d'unité.

La somme de tous ces termes $\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_p + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_{sd}$, constitue le modèle s-d discret dont nous nous servons pour étudier des aspects de l'interaction aimantation-courant.

4.3 Les solutions analytiques vortex et skyrmions bidimensionnelles

Considérons maintenant la forme explicite des vortex et skyrmions comme solutions de la minimisation de l'énergie d'échange. Ces configurations nous serviront comme conditions initiales pour le champ d'aimantation qui interagira avec les électrons itinérants. Dans tout ce chapitre nous travaillons avec le vecteur $\mathbf{n} = \mathbf{S}/S = -\mathbf{m}$.

Pour trouver ces solutions revenons à la limite continue de l'aimantation. Considérons le terme d'énergie d'échange de l'énergie libre dans l'équation (2.12) :

$$\mathcal{F}[\mathbf{M}(\mathbf{x})] = \frac{A_s}{2} \int_V (\nabla \mathbf{M})^2 dV. \quad (4.9)$$

Les solutions d'équilibre sont les solutions qui minimisent la fonctionnelle d'énergie libre :

$$-\frac{\delta \mathcal{F}[\mathbf{M}(\mathbf{x})]}{\delta \mathbf{M}(\mathbf{x})} = A_s \nabla^2 \mathbf{M} = 0. \quad (4.10)$$

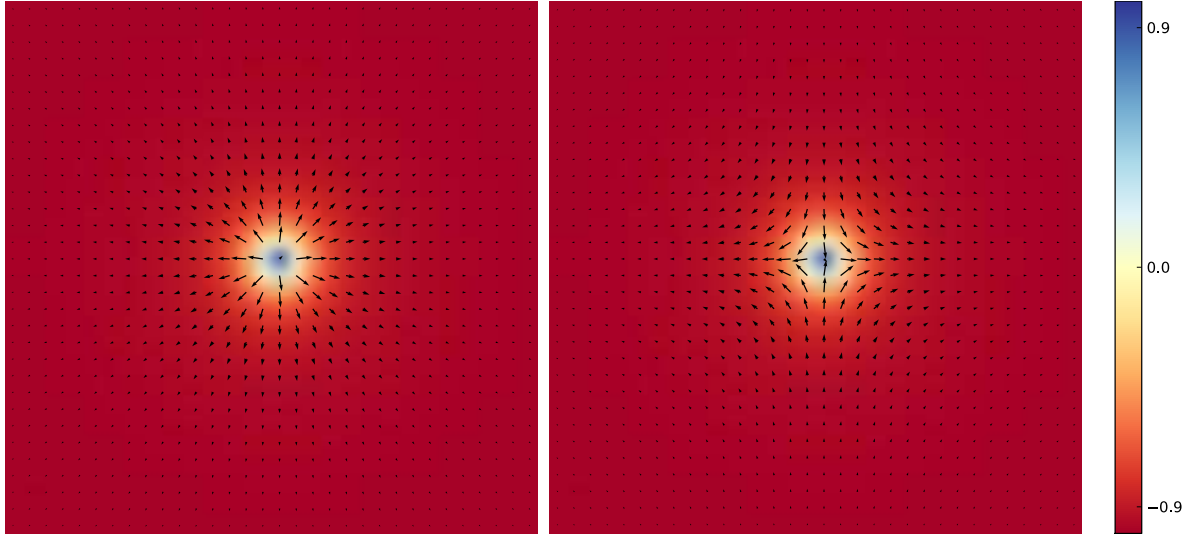


Fig. 4.1: Skyrmion $\omega = x + iy$ et anti-skyrmion $\bar{\omega}$. Les flèches représentent le champ $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ et la couleur la valeur de $n_z(\mathbf{x})$.

En prenant en compte la conservation de la norme de $\mathbf{M}$, le problème se réduit aux solutions de l'équation pour le champ unitaire :

$$\nabla^2 \mathbf{n} = 0. \quad (4.11)$$

En deux dimensions, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est un champ qui prend le plan réel et l'amène dans une sphère dans l'espace tri-dimensionnel. Autant l'espace bi-dimensionnel que la sphère peuvent se mettre en correspondance avec le plan complexe $\mathbb{C}$ et il est alors convenable d'écrire cette équation à l'aide de la transformation stéréographique, comme une équation entre fonctions de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Comme nous le montrons dans l'annexe 6.4, sous la transformation stéréographique le champ $\mathbf{n} = (\cos \Phi \sin \Theta, \sin \Phi \sin \Theta, \cos \Theta)$ devient la variable complexe

$$\omega = e^{i\Phi} \tan \frac{\Theta}{2}, \quad (4.12)$$

et l'équation (4.11) devient :

$$\left(\nabla^2 \omega - \frac{2\bar{\omega}(\nabla \omega)^2}{1 + \bar{\omega}\omega} \right) = 0. \quad (4.13)$$

Les coordonnées du plan complexe sont $z = x + iy$, et d'ici on déduit les dérivés :

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),$$

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y).$$

Avec quoi nous avons le gradient au carré $(\nabla \omega)^2 = 4\partial_z \omega \partial_{\bar{z}} \omega$ et le Laplacien $\nabla^2 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$. En remplaçant ceci en (4.13), nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = \frac{2\bar{\omega}}{1 + \omega\bar{\omega}} \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}. \quad (4.14)$$

Pour les mêmes raisons exposées dans la section 3.2, les solutions de cette équation sont des fonctions analytiques $f(z)$ dans le plan complexe et aussi leur complexes conjuguées (parfois appelées des fonctions anti-analytiques). Belavin et Poliakov [7] ont proposé comme solution des fonctions rationnelles du type :

$$\omega = \prod_i \left(\frac{z - z_i}{\lambda} \right)^{m_i} \prod_j \left(\frac{\lambda}{z - z_j} \right)^{n_j} \quad (4.15)$$

où $\sum m_i > \sum n_j$. Du fait qu'un point quelconque de la sphère est représenté une quantité $\sum m_i$ des fois, l'angle solide total parcouru par la fonction ω est $4\pi \sum m_i$. On trouve alors que la charge topologique skyrmionique totale définie dans la section 2.3.5 est égale à :

$$Q = \sum m_i. \quad (4.16)$$

Le paramètre λ dans l'équation (4.15) est libre et apparait comme conséquence de l'invariance conforme du terme d'échange dans un espace bi-dimensionnel. Effectivement, du fait des dérivés au carré dans l'énergie, en deux dimensions celle-ci reste invariante après la transformation $z \rightarrow \lambda z$. Cette longueur donne une taille caractéristique aux structures qui est sélectionnée quand il y a de termes supplémentaires d'énergie.

Ces solutions sont appelées des *skyrmions de Belavin-Poliakov* et elles équivalent aux structures étudiées dans le chapitre 3 mais dans un espace bi-dimensionnel. Le cas le plus simple est un skyrmion de charge $Q=1$ centré en 0 :

$$\omega = \frac{x + iy}{\lambda}. \quad (4.17)$$

Notons que d'après l'équation (4.12) $z = 0 \Rightarrow \Theta = 0$, et $z \rightarrow \infty \Rightarrow \Theta \rightarrow \pi$. Pour (4.17) la phase sur la sphère de Riemann est parcourue une seule fois et dans le même sens que la phase complexe, ce qui veut dire que l'indice est positif et égal à 1. C'est ainsi que nous notons que le complexe conjugué de cette solution correspond à un anti-skyrmion. Nous montrons ces solutions dans la figure 4.1. Il est évident que toutes les solutions de l'équation (4.14) restent valables quand elles sont multipliées par une phase globale. Ceci veut dire que la quiralité du champ ne change pas l'énergie d'échange.

Si nous revenons à la solution (4.15), les z_i sont les points où $n_z = 1$, autrement dit, les centres des skyrmions. Les z_j sont les points où $n_z = -1$ et sont des centres des anti-skyrmions (en comprenant pour ceci un indice négatif)². Dans l'espace réel ces solutions sont parfaitement continues et régulières, et l'existence des réseaux des skyrmions est donc plausible. Ces réseaux sont donnés par des fonctions périodiques dans le plan complexe : les fonctions elliptiques de Jacobi [25].

A partir de la relation³

$$(\partial_i \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_i \Phi)^2 = \frac{4}{(1 + \omega \bar{\omega})^2} \partial_i \omega \partial_i \bar{\omega}, \quad (4.18)$$

2. La forme des skyrmions et anti-skyrmions autour de leurs centres nous rappelle la différence géométrique entre points hyperboliques et points elliptiques de l'espace de phases bi-dimensionnel.

3. En effet, ceci peut se voir à partir des relations :

$$\nabla \omega = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} (\nabla \Theta + i \sin \Theta \nabla \Phi),$$

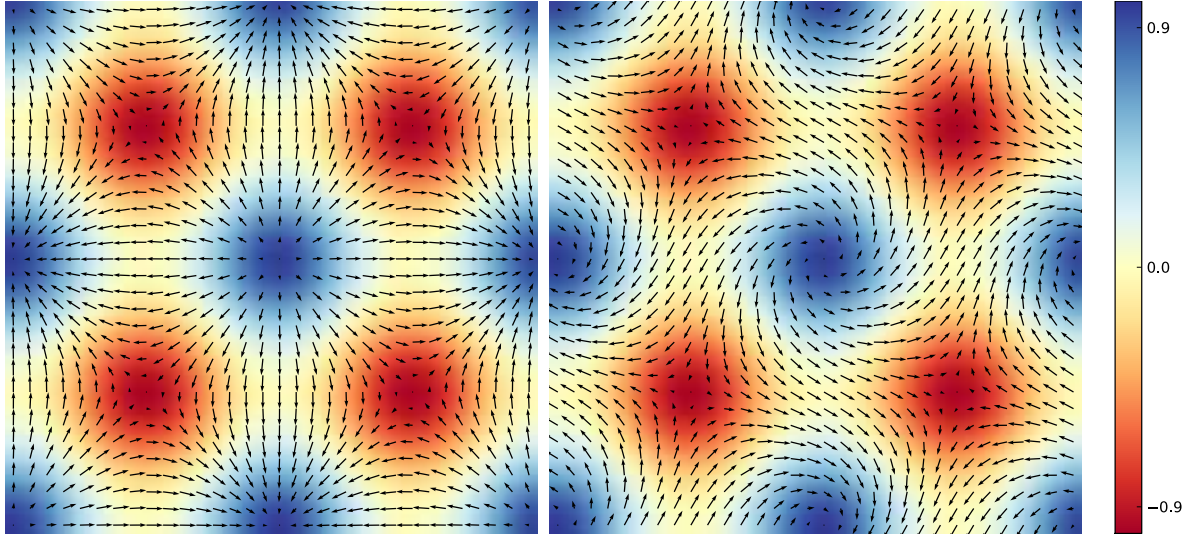


Fig. 4.2: Réseau de skyrmions. Dans le réseau de la droite il y a une phase globale de $\phi_0 = \pi/3$.

nous trouvons l'énergie d'échange 2D :

$$E_{\text{exch}} = A_s d M_s^2 \int \frac{4dx dy}{(1 + \omega \bar{\omega})^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} \right), \quad (4.19)$$

où d correspond à l'épaisseur en z .

Les fonctions de BP tendent vers l'infini pour $|z| \rightarrow \infty$ et donc l'énergie d'échange est finie. En effet, pour $\omega = z$ et en faisant l'intégration, nous avons que :

$$E_{\text{exch}} = 2A_s d M_s^2 \left(\frac{x \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+1}}\right)}{\sqrt{y^2+1}} \right) \xrightarrow{x,y \rightarrow \infty} 4\pi A_s M_s^2 d. \quad (4.20)$$

Il a été montré que les fonctions de BP sont les seules solutions non-triviales d'énergie finie dans un milieu bi-dimensionnel. Comme nous l'avons souligné auparavant, il existe une deuxième famille de solutions qui ont des charges topologiques demi-entières et dont l'énergie n'est pas finie : ce sont les vortex. Ils peuvent être construits à partir des ces mêmes fonctions analytiques. Ces solutions ont été trouvées par Gross [26], et appelées *merons*. Dans le contexte du magnétisme ces solutions sont équivalentes aux vortex d'Usov, trouvés dans l'espace réel [82] et avec un terme d'anisotropie.

Pour $f(z)$ une fonction analytique arbitraire, on définit une nouvelle solution sur morceaux :

$$\omega = \begin{cases} f(z) & |f(z)| \leq 1 \\ \frac{f(z)}{|f(z)|} & |f(z)| > 1. \end{cases} \quad (4.21)$$

(où nous avons utilisé les relations $\sin(\theta/2) \cos(\theta/2) = (\sin \theta)/2$) et

$$\frac{1}{1 + \omega \bar{\omega}} = \cos^2 \frac{\Theta}{2}.$$

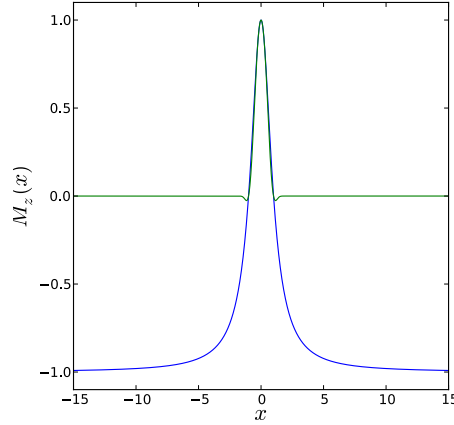


Fig. 4.3: Profils de la composante z d'un skyrmion de charge 1 (bleu), et d'un vortex (vert) selon la formule (4.21).

Dans l'espace réel, ces solutions ω sont des vecteurs dans le plan au-delà de la région où la norme de $f(z)$ est plus grande que 1. A l'intérieur de cette région le meron rejoint la valeur du skyrmion. Le profil d'un vortex et d'un skyrmion d'après $f(z) = z$ sont montrés dans la figure 4.3. De la même manière que pour le skyrmion, des solutions de charge arbitraire dans le plan réel nous permettent de construire des réseaux de vortex, comme on le voit dans la figure 4.4. Nous utilisons ces solutions périodiques lors des simulations numériques du modèle s-d.

4.4 Equations de mouvement

Nous pouvons trouver l'évolution du système présenté dans la section 4.2 à partir de l'équation d'Heisenberg des opérateurs :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (4.22)$$

Où H est l'hamiltonien du système.

Pour l'opérateur c_{ijs} l'équation se réduit un petit peu car la partie $\mathcal{H}_S$ de l'hamiltonien commute avec c_{ijs} . Par ailleurs, les opérateurs de création et destruction ne dépendent pas explicitement du temps. De ces considérations et de l'équation (4.22) on déduit :

$$i\hbar \frac{dc_{ij,s}}{dt} = [c_{ij,s}, \mathcal{H}] = [c_{ij,s}, \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{sd}]. \quad (4.23)$$

Calculons chacun de ces termes. D'abord :

$$[c_{ij,s}, \mathcal{H}_e] = [c_{ij,s}, -t_s \sum_{l,m,s'} (e^{i\Phi(t)} c_{lm,s'}^\dagger c_{l+1m,s'} + c_{lm,s'}^\dagger c_{lm+1,s'}) + \text{h.c.}]. \quad (4.24)$$

Ce dernier commutateur contient la partie cinétique de l'énergie. Pour le calculer nous devons trouver une expression pour $[c_{ij,s}, c_{lm,s'}^\dagger c_{np,s'}]$. En considérant les propriétés d'anti-commutation des opérateurs fermioniques c_i (où dans ces formules i représente un ensemble de sous-indices de position et de spin) :

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij},$$

et

$$\{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0.$$

Nous obtenons de ces termes les relations de commutation :

$$[c_i, c_j] = 2c_i c_j,$$

$$[c_i^\dagger, c_j^\dagger] = 2c_i^\dagger c_j^\dagger,$$

et

$$[c_i^\dagger, c_j] = 2c_i^\dagger c_j - \delta_{ij}. \quad (4.25)$$

D'où $[c_i, c_l^\dagger c_m] = [c_i, c_l^\dagger] c_m + c_l^\dagger [c_i, c_m] = \delta_{il} c_m$. Où nous avons utilisé la relation $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ et l'équation (4.25). Autrement dit :

$$[c_{ij}, c_{lm}^\dagger c_{np}] = \delta_{li} \delta_{mj} c_{np}, \quad (4.26)$$

qui remplacé en (4.24) nous donne :

$$[c_{ij}, \mathcal{H}_e] = -t_s (e^{i\Phi(t)} c_{i+1j} + c_{ij+1} + e^{-i\Phi} c_{i-1j} + c_{ij-1}). \quad (4.27)$$

Par ailleurs,

$$[c_{ij,s}, \mathcal{H}_{sd}] = [c_{ij,s}, -J_{sd} \sum_l \mathbf{s}_l \cdot \mathbf{S}_l] = -J_{sd} [c_{ij,s}, \sum_l \sum_{s' s''} c_{ls}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{s' s''} c_{ls''} \cdot \mathbf{S}_l], \quad (4.28)$$

qui d'après (4.26) devient :

$$[c_{ij,s}, \mathcal{H}_{sd}] = -J_{sd} \boldsymbol{\sigma}_{c_{ij,s}} \cdot \mathbf{S}_{ij}. \quad (4.29)$$

D'où l'équation cherchée pour l'évolution de c_{ij} :

$$i\hbar \frac{dc_{ij}}{dt} = -t_s (e^{-i\Phi(t)} c_{i+1j} + c_{ij+1} + e^{i\Phi(t)} c_{i-1j} + c_{ij-1}) - J_{sd} \boldsymbol{\sigma}_{c_{ij}} \cdot \mathbf{S}_{ij}. \quad (4.30)$$

L'équation pour $\mathbf{S}$ peut être trouvée aussi à partir de l'équation d'Heisenberg. Cette fois, le commutateur qu'il faut calculer est (en la notation de deux sous-indices) :

$$[\mathbf{S}_{ij}, \mathcal{H}] = [\mathbf{S}_{ij}, \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_{sd}]. \quad (4.31)$$

Les termes à considérer sont :

$$[S_{ij}^a, \sum_{lm} (S_{lm}^b S_{l+1m}^b + S_{lm}^b S_{lm+1}^b)] = i\epsilon^{abc} (S_{i-1j}^b + S_{i+1j}^b + S_{ij-1}^b + S_{ij+1}^b) S_{ij}^c \quad (4.32)$$

$$[S_{ij}^a, \sum_{lm} (S_{lm}^z)^2] = -i\epsilon^{abz} S_{ij}^b S_{ij}^z \quad (4.33)$$

$$[S_{ij}^a, \sum_{lm} \mathbf{s}_{lm} \cdot \mathbf{S}_{lm}] = i\epsilon^{abc} c_{ij}^\dagger \sigma^b c_{ij} S_{ij}^c = i\epsilon^{abc} S_{ij}^b S_{ij}^c \quad (4.34)$$

Si nous mettons ensemble tous les termes, nous obtenons pour $\mathbf{S}_{ij}$

$$\frac{d\mathbf{S}_{ij}}{dt} = -J(\mathbf{S}_{i-1j} + \mathbf{S}_{i+1j} + \mathbf{S}_{ij-1} + \mathbf{S}_{ij+1}) \times \mathbf{S}_{ij} - K \mathbf{S}_{ij} \times \hat{\mathbf{z}} S_{ij}^z - J_{sd} \mathbf{s}_{ij} \times \mathbf{S}_{ij}. \quad (4.35)$$

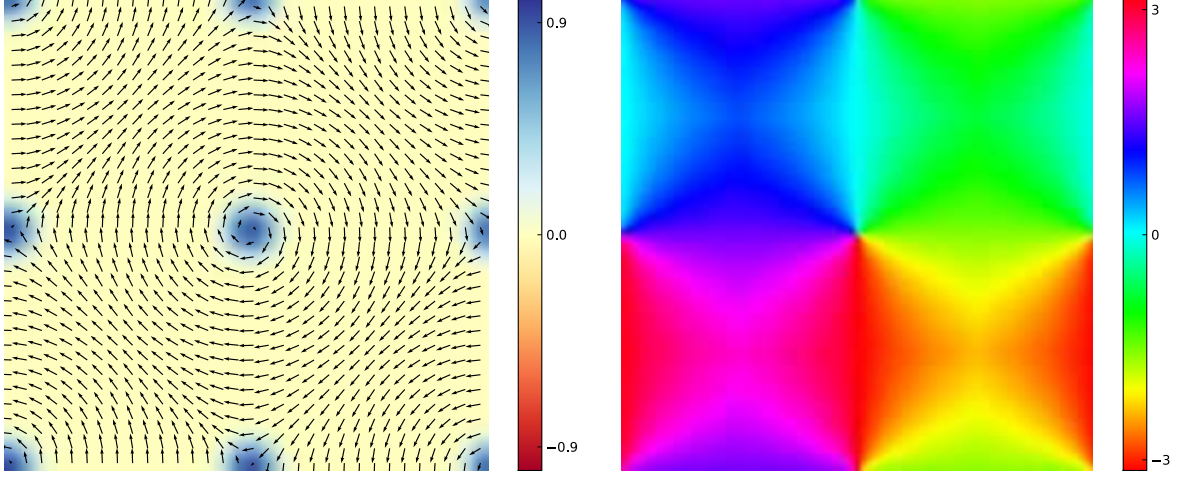


Fig. 4.4: Champ d'aimantation pour un réseau périodique de vortex et d'anti-vortex. La couleur du graphe sur la gauche représente la valeur du M_z et dans celui de droite, la phase Φ . Dans ce dernier, les points autour desquels on a toutes les couleurs sont les points centraux des solitons.

Où :

$$\mathcal{L}\mathbf{S}_{ij} \equiv \mathbf{S}_{i-1j} + \mathbf{S}_{i+1j} + \mathbf{S}_{ij-1} + \mathbf{S}_{ij+1} \quad (4.36)$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times \mathbf{H} + J_{sd}\mathbf{S} \times \mathbf{s} \quad (4.37)$$

Dans la limite continue il apparait a , la taille du réseau :

$$\mathbf{H} = J\mathcal{L}\mathbf{S}_{ij} - \frac{K}{2}S_{ij}^z\hat{z} \rightarrow Ja^2\nabla^2\mathbf{S} - KS^z\hat{z} \quad (4.38)$$

(valable quand le produit vectoriel annule les termes centrés).

Notons qu'en faisant la limite continue (on a le droit de la faire déjà dans la limite classique, pas avant), il y apparaît un nouveau paramètre a , qui est en principe arbitraire. Si, en plus, pour tenir compte des effets de dissipation, nous ajoutons le terme d'alignement autour du champ effectif, l'équation devient dans le continuum l'équation de LLG déjà introduite :

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{S} \times \left(Ja^2\nabla^2\mathbf{S} - KS^z\hat{z} + J_{sd}\mathbf{s} \right) + \alpha\mathbf{S} \times (\mathbf{S} \times \mathbf{H}) \quad (4.39)$$

4.5 Implémentation numérique

En récapitulant, nous avons les équations de mouvement pour le champ d'aimantation sur un réseau :

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = \mathbf{S}_i \times \left(Ja^2\mathcal{L}\mathbf{S}_i - KS_i^z\hat{z} + J_{sd}\mathbf{s}_i \right) + \alpha\mathbf{S}_i \times (\mathbf{S}_i \times \mathbf{H}_i), \quad (4.40)$$

et pour l'opérateur de destruction c_{ij} :

$$i\hbar\frac{dc_{ij}}{dt} = -t_s(e^{-i\Phi(t)}c_{i+1j} + c_{ij+1} + e^{i\Phi(t)}c_{i-1j} + c_{ij-1}) - J_{sd}\boldsymbol{\sigma}_{c_{ij}} \cdot \mathbf{S}_{ij}. \quad (4.41)$$

Nous faisons évoluer ce système d'équations couplées sur un réseau carré bi-dimensionnel à conditions de bords périodiques. Pour évaluer les dérivées temporelles nous utilisons des transformations de Fourier rapides (FFT) et nous utilisons une méthode de time-splitting dans l'évolution de l'équation de Schrödinger du système pour c_{ij} , ainsi qu'une méthode de Runge-Kutta de quatrième ordre pour l'évolution de l'équation pour $\mathbf{S}$.

4.6 Unités et ordres de grandeur

Cette partie est importante pour la simulation numérique et pour la valeur prédictive de notre modèle car nous nous efforçons de faire des simulations avec des paramètres qui représentent une situation physique reproductible. D'ailleurs, en ayant un espace de paramètres si grand, il est fondamental de se mettre dans une région de signification physique.

Nous choisissons les unités $t_s = a = e = m = \hbar = 1$, d'où toutes les autres magnitudes physiques peuvent être déduites.

Les paramètres physiques pour un matériau comme le Permalloy (alliage de 15% de fer et 80% de nickel), largement utilisé dans les expériences, sont approximativement ⁴ :

$$t_s \approx 0.6\text{eV}, \quad (4.42)$$

$$a \approx 0.3\text{nm}. \quad (4.43)$$

Ces paramètres nous donnent les unités caractéristiques. A partir de l'énergie de saut et $\hbar$ on trouve que l'unité de temps est $t \sim 1\text{fs}$. Ce temps caractéristique plus la constante du réseau nous donne une unité de vitesse caractéristique des phénomènes quantiques $v \sim 10^6\text{m/s}$, qui est du même ordre que la vitesse thermique des électrons de conduction à température ambiante.

Nous faisons le choix des valeurs du champ électrique de telle manière à rendre les ordres de grandeurs dynamiques, tel que la vitesse, les plus réalistes possibles ; tout en sachant que dans notre cas, où $T \rightarrow 0$ et l'espace est bidimensionnelle, l'analogie avec un vrai matériau reste limitée. En effet, à température nulle et en l'absence d'impuretés, lorsque nous soumettons un métal à un champ électrique constant et homogène, la sphère de Fermi est déplacée en bloc et accélérée, tandis que dans une situation réelle, les collisions des électrons avec des impuretés, les défauts du réseau et l'interaction avec des phonons font que la sphère peut être maintenue stationnaire et donc que la vitesse des

4. L'estimation de t_s peut se faire grossièrement en voyant l'énergie cinétique quantique d'un électron qui saute d'un site à l'autre :

$$t_s \approx \frac{\hbar^2}{m_e a^2} = 9.68738 \cdot 10^{-20} \text{Joule} = 0.6 \text{eV}.$$

Bien que cela nous donne l'ordre de longueur correcte, il est plus approprié de considérer l'énergie de Fermi d'un électron s de conduction dans le métal conducteur ferromagnétique qui nous intéresse. L'expression pour l'énergie de Fermi est :

$$\epsilon_F = \frac{\hbar}{2m_e} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}.$$

en Kittel [41], nous trouvons que par exemple, pour le Fer la concentration d'électrons est par m^3 égal à 10^{29} et l'énergie de Fermi approximativement 7eV.

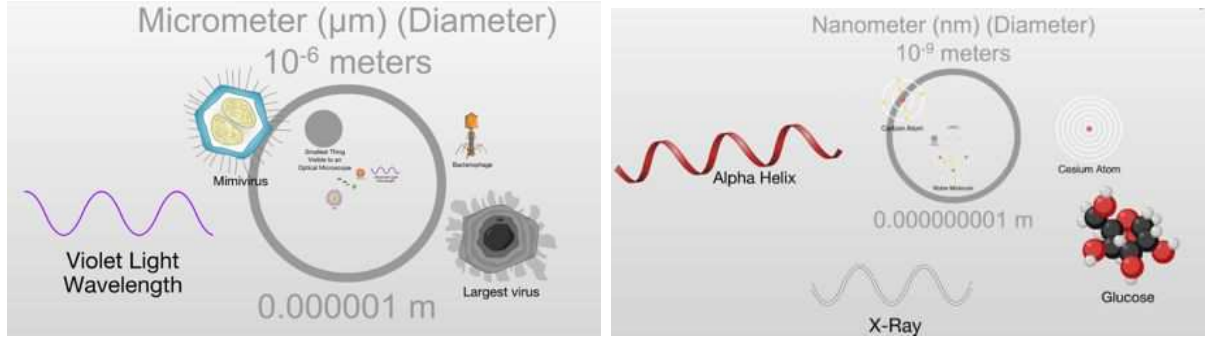


Fig. 4.5: Des objets et des phénomènes observés aux échelles micrométrique et nanométrique (figures prises du site <http://apod.nasa.gov/apod/ap120312.html>). Dans cette figure nous apprécions le lien entre l'ordre de magnitude de nos objets (domaine $\sim \mu\text{m}$, cœurs des vortex $\sim \text{nm}$) d'étude et la lumière de semblable longueur d'onde (lumière violette et rayons x respectivement).

électrons est constante.

Cette distinction entre courant balistique et courant ohmique est à considérer comme une limitation de l'application de notre travail aux expériences, et constitue la principale différence entre notre modèle et une situation qui prend en compte la statistique et des phénomènes de dissipation quantiques. Cependant, l'interaction du courant avec la texture magnétique et la dissipation par moyen de l'équation de LLG rend la situation plus réaliste.

A partir de la valeur de e , de a et de t_s nous trouvons que l'unité de champ électrique est de l'ordre de 10^8 V m^{-1} .

Notons que pour un gaz d'électrons [41], la vitesse est liée au champ électrique $\mathbf{E}$, la conductivité σ , la quantité d'électrons de conduction par volume n , et la charge de l'électron par la loi d'Ohm :

$$\mathbf{v} = -\frac{\sigma \mathbf{E}}{ne}. \quad (4.44)$$

A température ambiante, les atomes ferromagnétiques ont des conductivités d'ordre 10^5 , et un nombre d'atomes par mètre cube $n \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

Comme référence nous prenons la valeur de la densité de courant utilisée dans les expériences de bouleversement des vortex [86] $|\mathbf{j}| \sim 10^{12} \text{ A m}^{-2}$, ce qui nous donne, d'après $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, un champ électrique $E \sim 10^7 \text{ V m}^{-1}$ et une vitesse $v \sim 10^2 \text{ m s}^{-1}$. Nous allons travailler sur des boîtes carrées de longueur $L = 128a$, soit d'environ $0.1 \mu\text{m}$. Pour avoir une idée visuelle des ordres de grandeurs en jeu, nous montrons dans la figure 4.5 des phénomènes et quelques objets dont les ordres de grandeurs sont dans les micro et nanomètres.

Nous définissons la densité électronique sur le réseau comme :

$$N_e = \frac{\sum_i |\Psi_i|^2}{N^2}, \quad (4.45)$$

avec N^2 la quantité de points du réseau, ce qui veut dire qu'une densité $N_e = 1$ est équivalente à un électron par site.

Trouvons maintenant les valeurs pour les paramètres de l'équation de LLG.

A partir de la température de Curie du fer $T_c \sim 1043K$, du nickel $T_c \sim 631K$ et du permalloy $T_c \sim 723K$, on estime que la constante d'échange doit satisfaire $J \sim k_B T_c \sim 10^{-21} - 10^{-20}$ Joule, qui est équivalent à :

$$J/t_s \sim \mathcal{O}(0.01 - 0.1). \quad (4.46)$$

Le rapport entre l'anisotropie et cette constante d'échange, nous donne une taille caractéristique qui détermine l'ordre de grandeur de la variation spatiale des vortex et skyrmions. Autrement dit, la constante l

$$l = \sqrt{\frac{J}{K}} \quad (4.47)$$

doit être du même ordre que la largeur des parois qui séparent deux régions de différentes aimantations. Comme exemple, nous montrons dans la figure 4.6, l'état asymptotique après la relaxation de l'équation de LLG pour deux anisotropies très différentes. Nous avons vu dans la section 4.3 que des skyrmions et vortex sont des solutions qui minimisent l'énergie d'échange et que cette grandeur est invariante par changement d'échelle, ce qui veut dire que la taille du cœur de ces structures est une caractéristique qui dépend des autres termes d'énergie. Les valeurs expérimentales montrent que les cœurs des vortex sont de l'ordre de quelques nanomètres [66, 83]. Pour en rendre compte nous travaillons avec des anisotropies d'au moins un ordre de grandeur plus petit que celui de l'énergie d'échange. En effet, pour K un dixième de J , nous avons $l \sim 1\text{nm}$ qui nous approche des vortex et skyrmions réels. Cela dit, nous voyons qu'en prenant soin de relaxer les conditions initiales pour l'aimantation, la constante λ (voir section 4.3) n'a pas besoin d'être déterminée à priori car elle peut être trouvée par le système même⁵.

Par ailleurs, il a été observé dans les expériences de large magnétorésistance que la valeur de l'interaction s-d est plutôt grande [76] :

$$J_{sd}/t_s \gtrsim \mathcal{O}(0.1 - 1). \quad (4.48)$$

Alors nous prenons de manière générale des valeurs de l'énergie d'interaction s-d un ordre de grandeur plus élevé que celui de l'énergie d'échange (comparer les équations (4.48) et (4.46)). L'unité de grandeur de la constante D de Dzyaloshinskii-Moriya est liée à une autre grandeur caractéristique $\xi = J/D$ qui est pour un réseau de Skyrmions de l'ordre de quelques nanomètres [28] et donc impose, pour les mêmes raisons, une constante de Dzyaloshinskii-Moriya un ordre de grandeur plus petite que l'énergie d'échange J .

Le champ fantôme sera choisi d'ordre 0.1. Cette magnitude nous permet de considérer la polarisation dans nos simulations comme $P = 0.1$.

De manière générale les ordres de grandeurs mentionnés sont un reflet du fait que notre modèle considère la séparation d'échelles réelles (microscopique et macroscopique) présente dans la physique du problème et qui nous permettra de regarder dans le détail ce qui se passe lors de transitions topologiques sans faire des approximations.

5. Ceci pourrait être encore amélioré en connaissant la solution exacte des solitons quand il y a de termes supplémentaires d'énergie, mais ces solutions ne sont pas toujours connues.

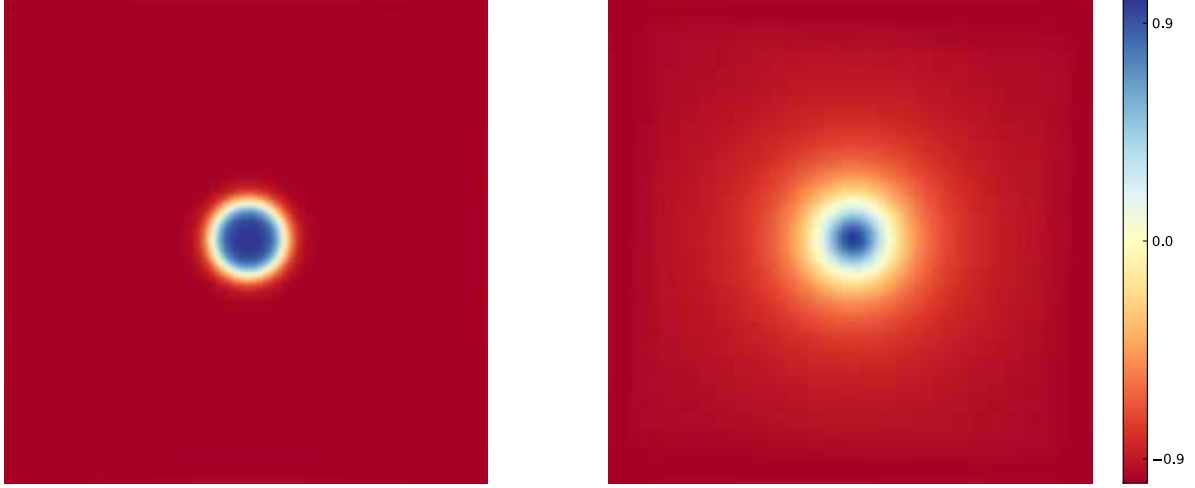


Fig. 4.6: M_z des états asymptotiques d'une condition initial avec un seul skyrmion et pour des différentes anisotropies. L'image sur la gauche a une anisotropie dix fois plus grande que celle de droite ($J = 1, K = -0.01$) et donc une variation plus abrupte de la valeur de M_z .

4.7 Dynamique des vortex et skyrmions en absence de courant électrique

4.7.1 Des forces gyrotropiques et charge topologique en général

Considérons la forme générale de LLG

$$\dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \mathbf{F}, \quad (4.49)$$

avec

$$\mathbf{F} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{n}}.$$

Thiele [79] a montré que lors du mouvement d'une structure magnétique il apparaît une force effective de nature gyrotropique. En effet, moins le gradient de l'énergie est une force $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\delta E}{\delta \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{n} \quad (4.50)$$

De l'équation (4.49) nous pouvons déduire l'équation suivante :

$$\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})\mathbf{n} - \mathbf{F}, \quad (4.51)$$

qui définit le champ $\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}$. Pour une structure qui bouge à une vitesse $\mathbf{v}$, sans perdre ses propriétés, nous avons :

$$\dot{\mathbf{n}}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{n}. \quad (4.52)$$

Ensuite si nous remplaçons (4.52) en (4.51) et $\mathbf{F}$ de (4.51) en (4.50), nous avons, en utilisant aussi le fait que $\mathbf{n}$ est orthogonal à ses dérivées :

$$\mathbf{f} = [\mathbf{n} \times (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{n}] \cdot \nabla \mathbf{n}, \quad (4.53)$$

qui s'écrit en notation de sous-indices comme :

$$f_m = \epsilon_{ijk} n_j v_l \frac{\partial n_k}{\partial x_l} \frac{\partial n_i}{\partial x_m} = g_{lm} v_l, \quad (4.54)$$

où

$$g_{lm} \equiv \epsilon_{ijk} n_j \frac{\partial n_k}{\partial x_l} \frac{\partial n_i}{\partial x_m} = -\mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_l} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x_m} \right), \quad (4.55)$$

qui est appelé le *tenseur gyrotropique*. A partir de lui on peut définir un vecteur g_i

$$g_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ilm} g_{lm} \Leftrightarrow g_{lm} = \epsilon_{ilm} g_i \quad (4.56)$$

qui est le *vecteur gyrotropique* est qui a l'intéressante propriété de permettre d'écrire la force dans la forme d'une force de Lorentz sur une particule chargée dans un champ magnétique, ou une force de Magnus sur un vortex qui bouge dans un fluide qui a une vitesse relative à lui. Dans l'analogie électromagnétique, le vecteur gyrotropique a la fonction d'un champ magnétique. On pourrait penser que l'effet mécanique en tant que Force de Magnus et l'effet électrique comme Force de Lorentz pourraient s'ajouter l'un à l'autre. Cependant, il a été montré que les deux forces sont tout simplement des différentes descriptions du même effet physique [73]. En effet, si nous prenons les équations (4.54) et (4.56), nous pouvons écrire :

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} \times \mathbf{v}. \quad (4.57)$$

Il y a deux points qui sont très intéressants du point de vu des propriétés topologiques.

D'abord la force gyrotropique peut être aussi déduite à partir du terme cinétique de l'hamiltonien qui amène à LL. Ce terme, appelé *phase de Berry* peut être écrit de manière indépendante d'une base de coordonnées uniquement à l'aide d'un champ de jauge $\mathbf{A}$ monopolaire [5] :

$$\mathcal{L}_B = \int dt \mathbf{A}(\mathbf{n}) \dot{\mathbf{n}}. \quad (4.58)$$

Un changement de jauge permet alors de trouver le terme gyrotropique, comme quoi l'analogie avec l'électromagnétisme tient [80].

D'un autre coté, la phase de Berry a elle-même une interprétation géométrique car l'intégration de ce terme intégré entre deux instants donnés et dans un point de l'espace particulier constitue l'air renfermé dans la sphère unitaire par le chemin qui fait le vecteur $\mathbf{n}$. De ce point de vue il n'est pas surprenante qu'il existe une relation entre le tenseur gyromagnétique et la charge topologique. En effet de l'équation (4.55) nous avons pour la charge skyrmionique (2D) :

$$q = -\epsilon_{lm} g_{lm}, \quad (4.59)$$

où lm sont de sous-indices des coordonnées cartésiennes bi-dimensionnelles. De ce fait, il n'y a pas de forces gyrotropiques pour des configurations magnétiques de topologie triviale.

4.7.2 Interaction des vortex

Considérons l'équation de LLG dans la limite continue, avec anisotropie et sans dissipation :

$$\hbar \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{S} \times \left(J a^2 \nabla^2 \mathbf{S} - K S^z \hat{\mathbf{z}} \right). \quad (4.60)$$

La solution vortex-antivortex, avec $K > 0$ [82, 80] et $\mathbf{S} = S(\cos \Phi \sin \Theta, \sin \Phi \sin \Theta, \cos \Theta)$ est :

$$\cos \Theta = \begin{cases} 1 - c_1 \left(\frac{r}{l} \right)^2, & r \rightarrow 0; \\ c_2 \sqrt{\frac{r}{l}} \exp \left(-\frac{r}{l} \right)^2, & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.61)$$

$$\Phi = n\phi + \phi_0 \quad (4.62)$$

Où (r, ϕ) sont les coordonnées polaires de l'espace 2D et n l'indice. Les constantes c_1 et c_2 se trouvent avec des conditions de continuité. La longueur caractéristique est $l = \sqrt{Ja^2/K}$.

Le calcul de l'énergie asymptotique d'un seul vortex (sans considérer les corrections du cœur, négligeables par rapport à la divergence logarithmique) [80] :

$$E = 2S^2 J\pi n^2 \ln\left(\frac{R}{a}\right), \quad (4.63)$$

où R est le rayon du système. Notons que cette énergie diverge. La raison d'une telle divergence est le fait que le vortex n'est pas une solution localisée (contrairement au skyrmion) car il n'est pas homogène à l'infini.

Les forces d'interaction entre deux vortex peuvent se déduire à partir de deux solutions assez éloignées pour que l'énergie puisse s'écrire comme (4.63). En effet cette énergie est explicitement :

$$E_{12} = 2S^2 J\pi \left[n_1^2 \ln\left(\frac{R}{a}\right) + n_2^2 \ln\left(\frac{R}{a}\right) + n_1 n_2 \ln\left(\frac{X_{12}}{a}\right) \right]. \quad (4.64)$$

A partir de cette équation on trouve la force sur un vortex j due à un vortex i :

$$\mathbf{F}_{ij} = S^2 J\pi n_i n_j \frac{\hat{\mathbf{X}}_{ij}}{X_{ij}}, \quad (4.65)$$

où $\hat{\mathbf{X}}_{ij}$ est un vecteur unitaire du vortex i vers le vortex j . De cette relation on conclue que, dans cette approximation, autant pour des polarités différentes, que pour des mêmes polarités, l'interaction vortex-antivortex est attractive, tandis que l'interaction vortex-vortex ou antivortex-antivortex est répulsive.

En résumé, nous pouvons dire que la dynamique classique entre vortex constitue celle qui se dégage d'une superposition de forces gyrotropiques et d'interaction. Ceci produit notamment des mouvements circulaires semblables à ceux observés dans les vortex présents dans les fluides.

4.8 Phénoménologie de l'interaction courant-aimantation

Nous travaillons à température nulle et donc quand nous parlons de courant électrique nous nous limitons au courant de probabilité de la mécanique quantique et non au courant ohmique défini statistiquement. Pour la fonction d'onde dans le continuum $\Psi(\mathbf{x}, t) = \langle 0 | c(\mathbf{x}, t) | \mathbf{x} \rangle$, on définit le courant électrique en présence d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ par [22] :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} (\nabla \Psi^\dagger \Psi - \Psi^\dagger \nabla \Psi) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(\Psi^\dagger \Psi). \quad (4.66)$$

Traditionnellement, dans l'étude de l'interaction courant-texture, les efforts théoriques se sont engagés vers l'introduction des effets du courant dans l'équation de LLG par moyen des approximations d'adiabaticité. Cependant, les phénomènes que nous étudions

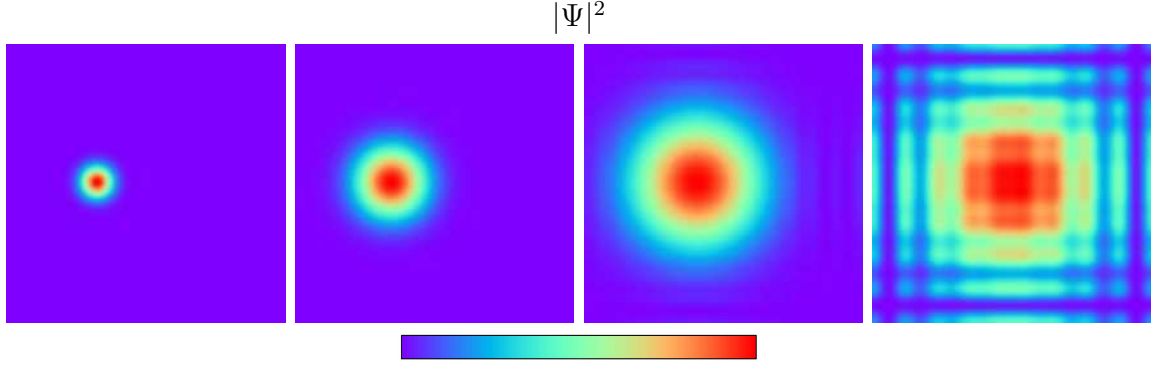


Fig. 4.7: On montre l'évolution de la densité de probabilité $|\Psi|^2$, d'un paquet d'onde gaussien libre pour 4 temps successifs ($t = 50n$, pour $n = 0, 1, 2, 3$) soumis à un champ électrique $|\mathbf{E}| = 10^{-3}$.

ici, voire les changements de topologie, se déroulent dans des conditions de forts gradients de l'aimantation et avec de courants qui ont des propriétés de stochasticité qui rendent injustifiable l'hypothèse de spins électroniques suivant la direction du champ de spin local.

Le mouvement des électrons libres (sans être couplés à l'aimantation) résulte de la superposition de la diffusion de la fonction d'onde et de l'accélération due au champ électrique. La mécanique ondulatoire se manifeste dans l'interférence du paquet avec lui-même, conséquence des conditions de bords périodiques. Pour montrer ce fait on voit dans la figure 4.7 une condition initiale avec un paquet d'onde gaussien.

Quand les électrons interagissent avec l'aimantation il y a deux effets principaux qui se superposent : le transfert de moment angulaire et le transfert de moment linéaire. Le premier fait est conséquence du couplage ferromagnétique entre l'électron et l'aimantation, et le deuxième, des barrières de potentiels qui se créent à cause de gradients de l'aimantation et qui produisent des réflexions du courant. Comme dans le cas d'une paroi de domaine les deux faits produisent des mouvements cohérents des objets topologiques, comme nous le montrons dans la figure 4.8, où pour un champ électrique de $|\mathbf{E}| = 2 \cdot 10^{-3}$, nous trouvons une vitesse du skyrmion de l'ordre de $2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, qui est d'un ordre de magnitude plus grand que les vitesses caractéristiques d'une paroi magnétique soumise à un champ électrique [29]. Ce fait s'explique d'abord par le négligement de dissipation de l'énergie des électrons et aussi par le grand champ électrique du cas présent et confirme l'idée que l'ordre de grandeur physique est d'environ 10^{-4} (dans nos unités).

En effet, si intéressante que soit l'interaction courant-texture magnétique, la dynamique des textures cohérentes (des textures qui ne se déforment pas lors de leurs mouvement) n'est pas si différente que la dynamique classique des vortex soumis à des autres forces, tels que de forces magnétiques, des forces d'interaction ou des forces gyrotropiques [65]. Nos observations dans ces cas ne font que confirmer la validité dans la plupart de cas des études micromagnétiques avec l'addition des spin-torques et dissipation type β -terme. De ce point de vue, le phénomène où l'action de la mécanique quantique est plus frappante sont les transitions topologiques qui, comme nous allons le voir dans la prochaine section, se déroulent dans les ordres de longueur de la grille et pour de temps d'une dizaine de femtoseconds.

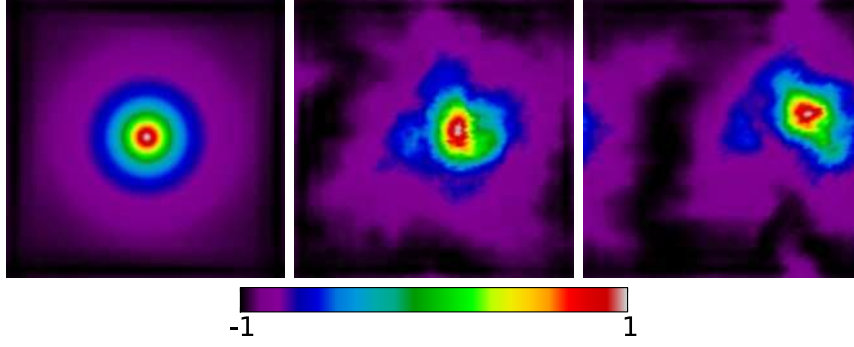


Fig. 4.8: Dans les panneaux d'en haut, on voit le mouvement d'un skyrmion soumis à un courant électrique continu. Les temps sont $t = 350n$, pour $n = 0, 1, 2$ et un champ $|\mathbf{E}| = 2 \cdot 10^{-3}$. La couleur représente $M_z(\mathbf{x})$. La vitesse du Skyrmion est, en unités SI, d'environ $2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$.

4.9 Des transitions topologiques

Dans cette section nous étudions dans le système s-d comment un courant électrique peut changer la topologie d'une texture magnétique. Nous faisons des simulations numériques des équations de mouvements montrées dans la section 4.4, avec les méthodes exposées dans la section 4.5, et pour des textures magnétiques initiales de topologie non-triviale décrites dans la section 4.3.

Le diagnostique principal pour rendre compte de la topologie est la charge topologique Q et la charge topologique positive Q_+ :

$$Q = \int \frac{d^2x}{4\pi} q, \quad Q_+ = \int \frac{d^2x}{4\pi} |q|, \quad (4.67)$$

avec $q = (\partial_x \mathbf{n} \times \partial_y \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$, comme nous l'avons déjà montré dans l'équation (2.15).

La différence entre les deux définitions, Q et Q_+ , est que tandis que la première montre la charge totale du système en considérant les signes des structures topologiques, la deuxième est capable de distinguer entre, par exemple, une topologie triviale sans structures topologiques d'une texture triviale avec des structures topologiques dedans et de charge opposée. Le meilleur exemple étant le cas d'un vortex de charge $1/2$ qui coexiste avec un antivortex de charge $-1/2$. Dans ce cas la charge totale Q est zéro, tandis que la charge topologique positive est 1. Cette situation est montrée dans la figure 4.9.

4.9.1 Courant continu polarisé sur des réseaux de skyrmions

Pour une condition initiale faite d'un réseau carré de skyrmions et d'un courant continu polarisé nous pouvons observer deux comportements différents selon que la direction de la polarisation du courant soit dans le plan ou dans l'axe normal au plan.

Pour un courant polarisé en x et certains paramètres appropriés proches de ceux discutés dans la section 4.6, nous observons une dynamique des skyrmions constituée d'un mouvement des cœurs en préservant la forme des solitons et d'une interaction qui couple la force entre eux avec la force gyrotropique. La charge totale initiale du système est 4 et si l'on considère uniquement la région du cœur et jusqu'au cercle où la composante z du

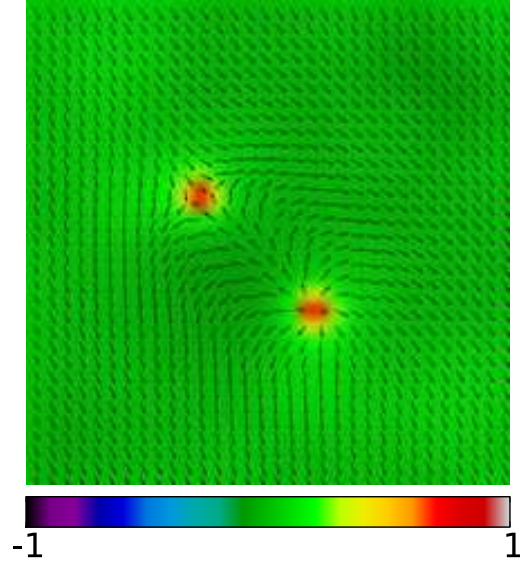


Fig. 4.9: Un vortex plus un anti-vortex. La charge totale Q est nulle, tandis que la charge positive Q_+ est 1.

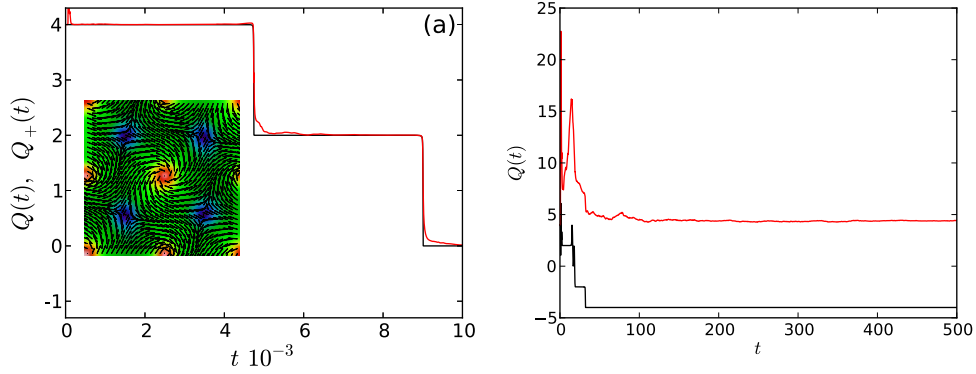


Fig. 4.10: Evolution de la charge totale (en noir) et de la charge positive (en rouge) pour le réseau de skyrmions avec un courant polarisé en x (à gauche) et en z (à droite). Dans le premier cas, on observe clairement que les transitions topologiques se déroulent dans quelques femto-secondes, en opposition à la dynamique entre les solitons, bien plus lente (dans les pico-secondes). Dans le cas du courant polarisé en z la charge varie rapidement au début (notamment les antivortex en -z disparaissent rapidement) pour après arriver à un état stationnaire où la plus part du champ $\mathbf{S}$ est dans l'axe z est la charge est -4 .

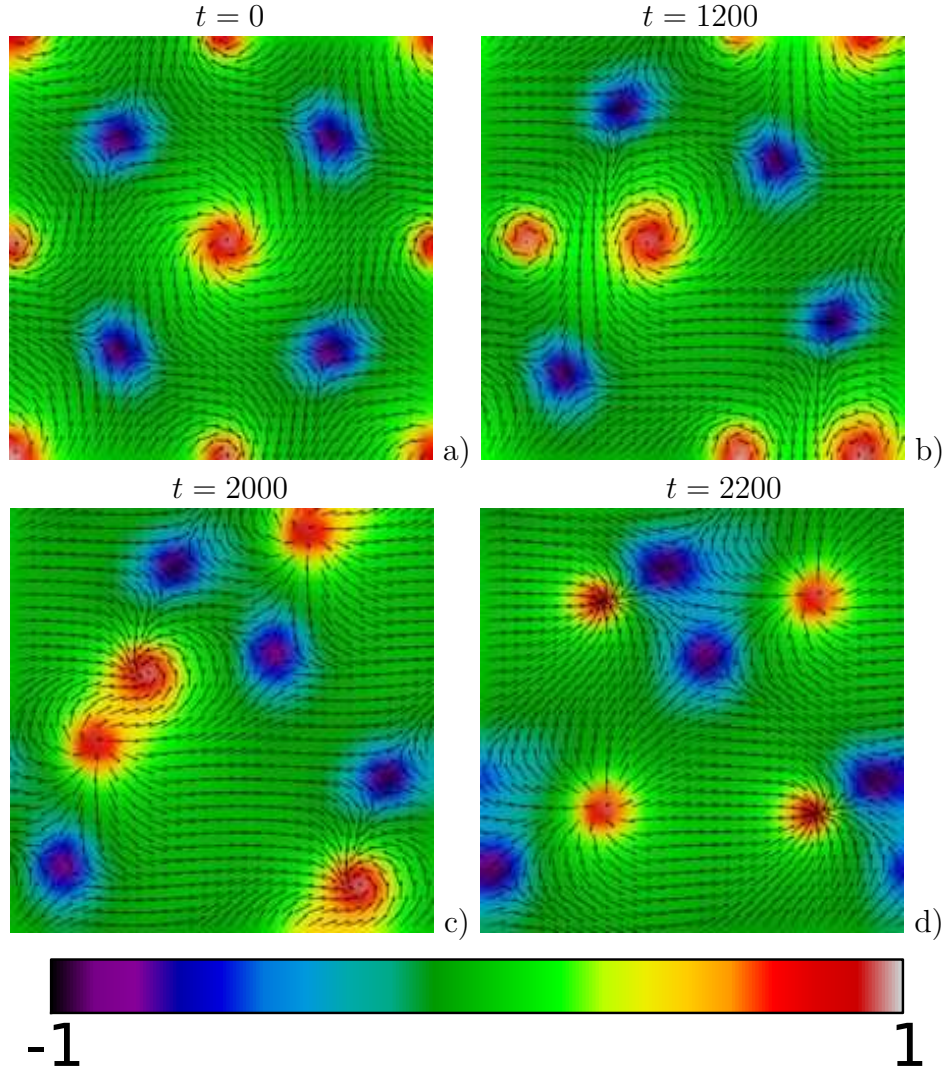


Fig. 4.11: Interaction des vortex avant les collisions qui les amèneront à s'annihiler. Les temps sont $t = 0, 1200, 2000, 3200$ et correspondent à la région initiale de la figure 4.10 où il n'y a pas des transitions topologiques.

$\mathbf{S}$ traverse le plan (x, y) , nous aurons des objets de charges topologiques demi-entières, autrement dit, des vortex. Comme nous l'avons déjà vu, skyrmions et vortex se confondent localement autour du coeur et les 4 skyrmions de notre réseau peuvent aussi être considérés comme la superposition de 4 vortex de charge $Q = 1/2$ plus 4 antivortex de charge aussi $Q = 1/2$, d'où la charge totale 4. Le mouvement est montré dans la figure 4.11 où nous voyons des vortex de charge $1/2$ qui s'approchent des anti-vortex de charge qui ont aussi $Q = 1/2$ et qui se répulsent des autres vortex.

Un vortex $1/2$ plus un anti-vortex $1/2$ qui s'approchent correspondent à un objet de charge unitaire mais d'une nature différente de celle des skyrmions dont la charge topologique unitaire provient du repliement de tout l'espace sur la sphère de Riemann. Au contraire, la charge unitaire d'une paire (vortex $1/2$ + antivortex $1/2$) est concentrée autour d'un seul point, ce qui fait que cette structure ressemble plus à un point de Bloch 3D qu'à un skyrmion. Mais, le point de Bloch est instable dans un espace bi-dimensionnelle du fait de sa nature singulière (des spins de direction opposées dans deux points adjacents), et l'objet disparaît de manière violente en émettant des ondes de spin et en produisant une

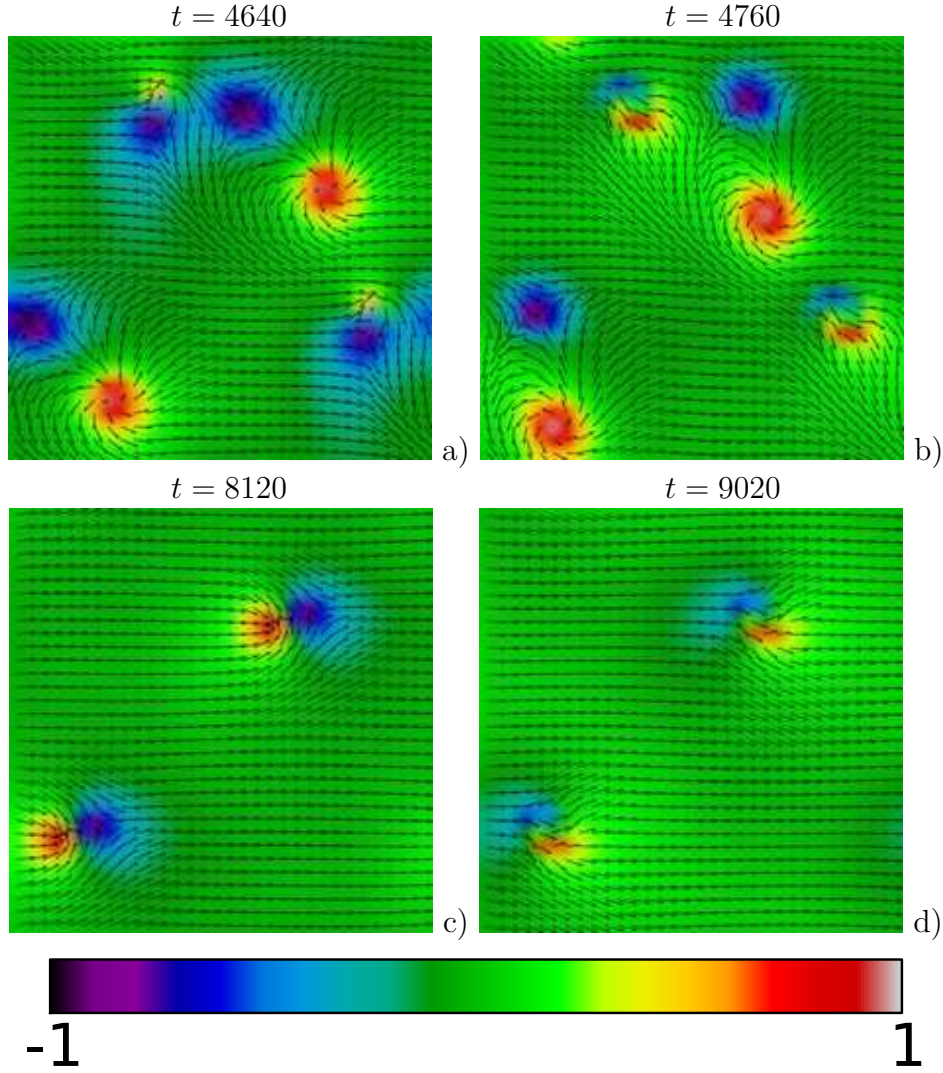


Fig. 4.12: Champ pour les temps juste avant et après les deux transitions topologiques montrés dans la figure 4.10. Les temps sont : $t = 4640, 4760, 8120, 9020$.

transition avec $\Delta Q = 1$. Nous appelons ce processus l'annihilation d'un skyrmion, Fig. 4.12. Ce fait peut se voir clairement dans l'évolution temporelle de la charge topologique, figure 4.10.

La même situation reproduite pour une polarisation dans l'axe z donne des effets de nature très différente. En fait, le courant polarisé en z rend les anti-vortex de polarité négative fortement instables. C'est ainsi que les cœurs des anti-vortex disparaissent rapidement en produisant une baisse de moitié de la charge. Par la suite il y a encore de transitions de nature complexe qui amènent à un état de charge totale -4 (voir figure 4.10), où le système se stabilise (figure 4.13).

Il y a deux choses intéressantes dans cette simulation, d'un côté le fait que bien que le courant soit apparemment un agent de déstabilisation de certaines régions, on voit qu'il est très difficile qu'une configuration topologique devienne un état trivial, principalement car elle comporte tout l'espace. Un autre fait remarquable est l'apparition de régions dans l'aimantation qui diffèrent fortement de l'aimantation autour. Ces régions sont des sortes de *trous* dans le champ qui créent ensuite par relaxation des nouveaux états qui

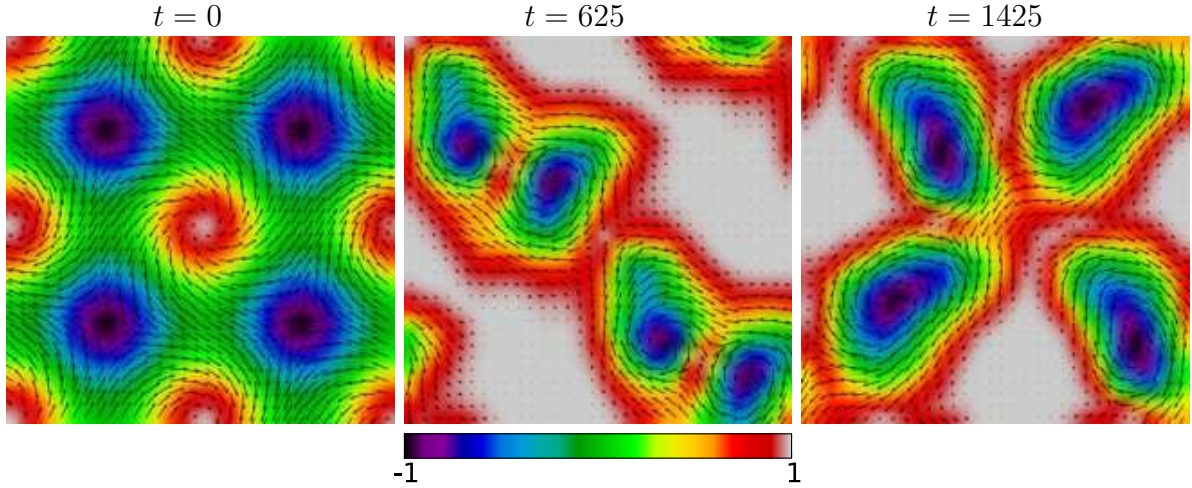


Fig. 4.13: Arrivée à l'état quasi-asymptotique après des transitions topologiques complexes. Les panneaux montrés correspondent aux temps de simulation $t = 0$ (état initial), 625, 1425.

n'existaient pas auparavant.

4.9.2 Courant continu sur un réseau de vortex et nucléation de paires vortex-antivortex

Pour une condition initiale constituée d'un réseau de vortex-antivortex comme celui de la figure 4.4 et un courant polarisé en z il est possible d'observer deux types de transitions topologiques selon la valeur du champ électrique.

Dans le premier cas, pour un champ électrique de $5 \cdot 10^{-4}$, la transition est véhiculée par la nucléation d'un pair vortex-antivortex de même polarité et donc de charge totale nulle, dont un d'eux collisionne avec le vortex préexistant produisant son annihilation, similairement au scénario décrit auparavant, figure 4.12. Ce phénomène peut s'observer dans la figure 4.14.

De ces simulations on observe de suite que la fonction d'onde est principalement localisée aux endroits d'aimantation homogène. Cette fonction d'onde a une évolution plus ou moins libre, comme l'on voit dans la figure 4.14. Le fait intéressant est que quand les vortex et antivortex originaux n'existent plus, le passage de la fonction d'onde continue à nucléer de paires qui vont s'annihiler par la suite dans un processus qui devient plus ou moins périodique.

Dans le deuxième cas, et pour un champ électrique le double de l'antérieur (10^{-3}) on observe en plus des phénomènes de nucléation et de localisation de la fonction d'onde, un changement de topologie produit par annihilation *sur site* du cœur du vortex, comme nous le montrons dans la figure 4.15. Ce phénomène est de nature différente de ceux déjà décrits ici et dans la littérature car il ne comporte pas d'annihilation par collision où par nucléation, ni de bouleversement par des raisons dynamiques, qui sont les mécanismes normalement évoqués lors de changements de topologie. Pour étudier plus en détail ce processus nous prenons le cas d'un skyrmion isolé soumis à un courant continu.

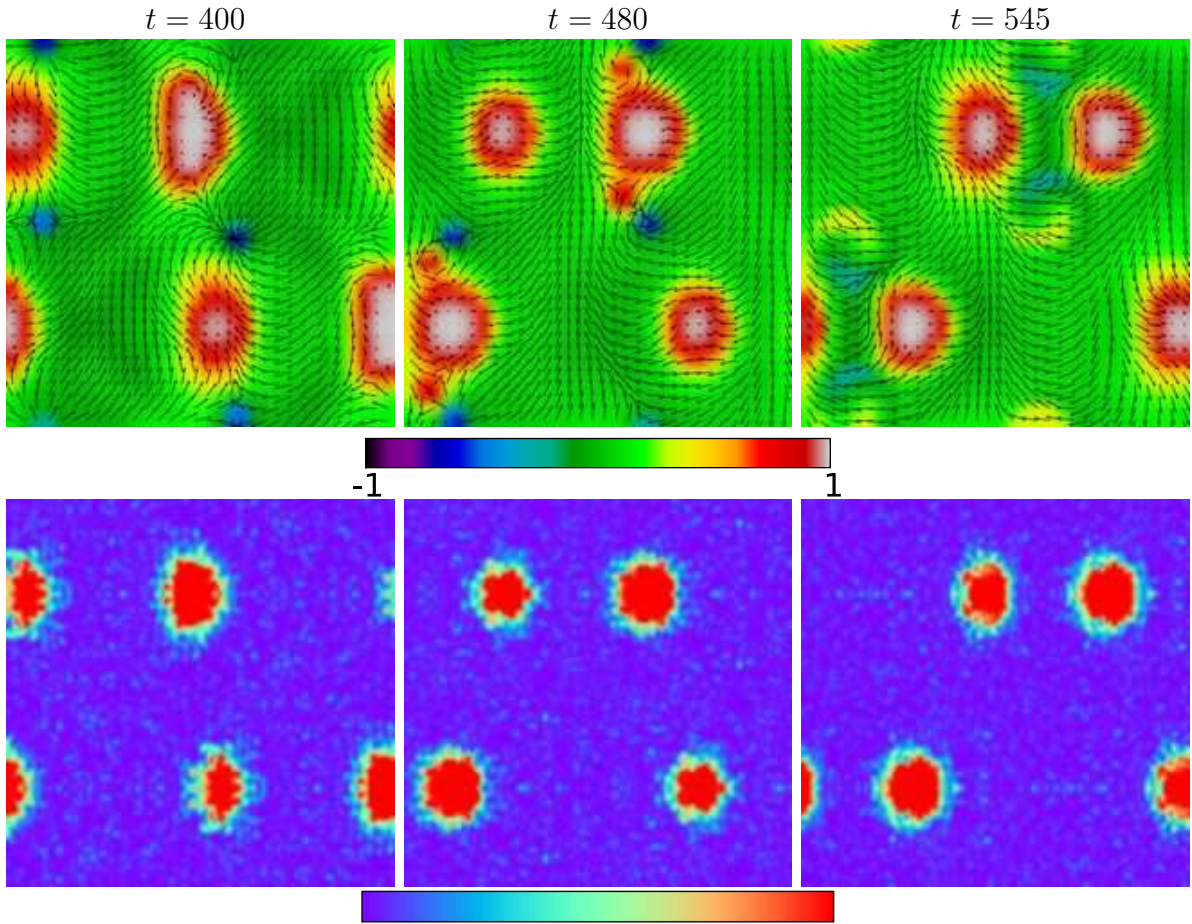


Fig. 4.14: Nucléation des paires vortex-antivortex lors du passage de la fonction d'onde localisée et successive annihilation du vortex existant auparavant. Dans les trois panneaux d'en haut on peut observer qu'à partir d'une région en z (ellipse blanche) il s'est créé une paire vortex-antivortex toutes les deux de polarité positive (régions rouges localisées). Une d'elle collisionne avec le vortex de polarité négative déjà existant (zone localisée bleue) produisant le changement de topologie. Les temps correspondants à ces panneaux sont $t = 400, 480, 545$.

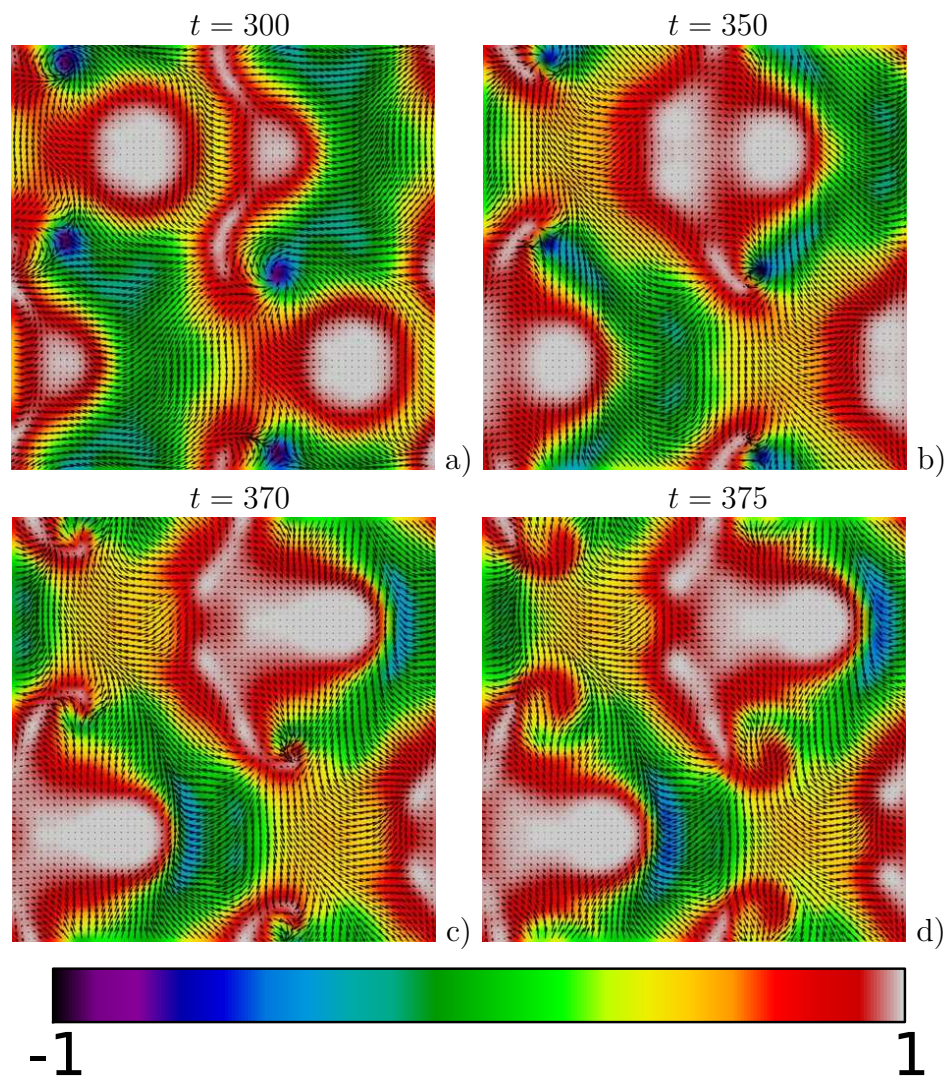


Fig. 4.15: Destruction sur site des vortex magnétiques. Les cœurs des vortex (en bleu) réduisent leurs tailles et disparaissent. Les panneaux correspondent aux temps $t = 300, 350, 370, 375$.

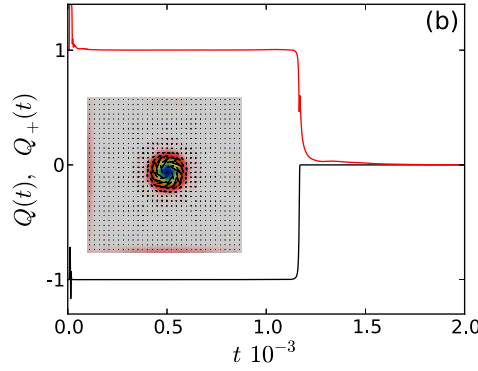


Fig. 4.16: Charge pour le processus d'annihilation d'un skyrmion isolé.

4.9.3 Changement de polarité d'un skyrmion isolé et rôle des électrons

Ici, nous soumettons un skyrmion isolé de charge $Q = -1$ à un courant continu polarisé dans la direction z . Comme nous le montrons dans la figure 4.16, il y a une transition de $\Delta Q = 1$ après un temps d'environ $t = 1200$, correspondant à une picosecond.

D'après nos observations la transition se fait sur presque un seul site et *grosso modo* consiste en une réduction de la taille du cœur de la structure jusqu'à ce que celui-ci ait la taille de quelques points de grille et que le spin-torque exercé par les électrons déclenche le renversement du point central, figure 4.17. Ce fait est en lien directe avec l'instabilité naturelle du skyrmion quand sa taille devient celle de la grille, comme il a été étudié en [9, 1].

L'observation de l'évolution de la fonction d'onde montre qu'elle a un comportement quasi-stochastique. Ce fait est une conséquence autant de la diffusion quantique produite de la rencontre entre l'onde de probabilité et les inhomogénéités de la texture, que des interférences constructives et destructrices de l'onde avec elle-même. Ce fait est aussi vrai pour le champ $\mathbf{s}$, comme nous le montrons dans la figure 4.18.

La delocalisation des électrons par rapport aux zones de fort gradient de $\mathbf{S}$ produit une pression autour de la structure et la réduction de la taille du cœur (processus non-local), ceci rend la variation de l'aimantation ayant lieu dans quelques sites de grille et ainsi la limite continue n'est plus valable et le mouvement des électrons est loin de la limite adiabatique. Le torque étant exercé par les électrons sur l'aimantation proportionnelle aux gradients de $\mathbf{S}$, cette situation augmente le torque fait par les électrons lors de la transition topologique, comme nous voyons dans la figure 4.17. Ainsi, plus le gradient de $\mathbf{S}$ est grand, plus le spin-torque fait par les électrons polarisés selon les alentours du cœur est grand. Comme nous le voyons dans l'Annexe 6.5, dans la limite adiabatique, pour diagonaliser le terme d'interaction s-d, il est convenable de choisir comme axe de quantification la direction du spin fixe $\mathbf{n}$. Dans ce cas, les électrons bougent dans un champ magnétique uniforme et il y apparaît naturellement un champ de jauge $\mathbf{A}$ qui est localisé dans les zones d'inhomogénéités de $\mathbf{S}$ [76, 88]. Il est raisonnable de penser que lors des transitions topologiques la situation est justement le contraire, autrement dit, *l'aimantation suit la direction des électrons de conduction*. Pour mettre à l'épreuve cette idée nous considérons le champ unitaire dans la direction de $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{s}}{s}.$$

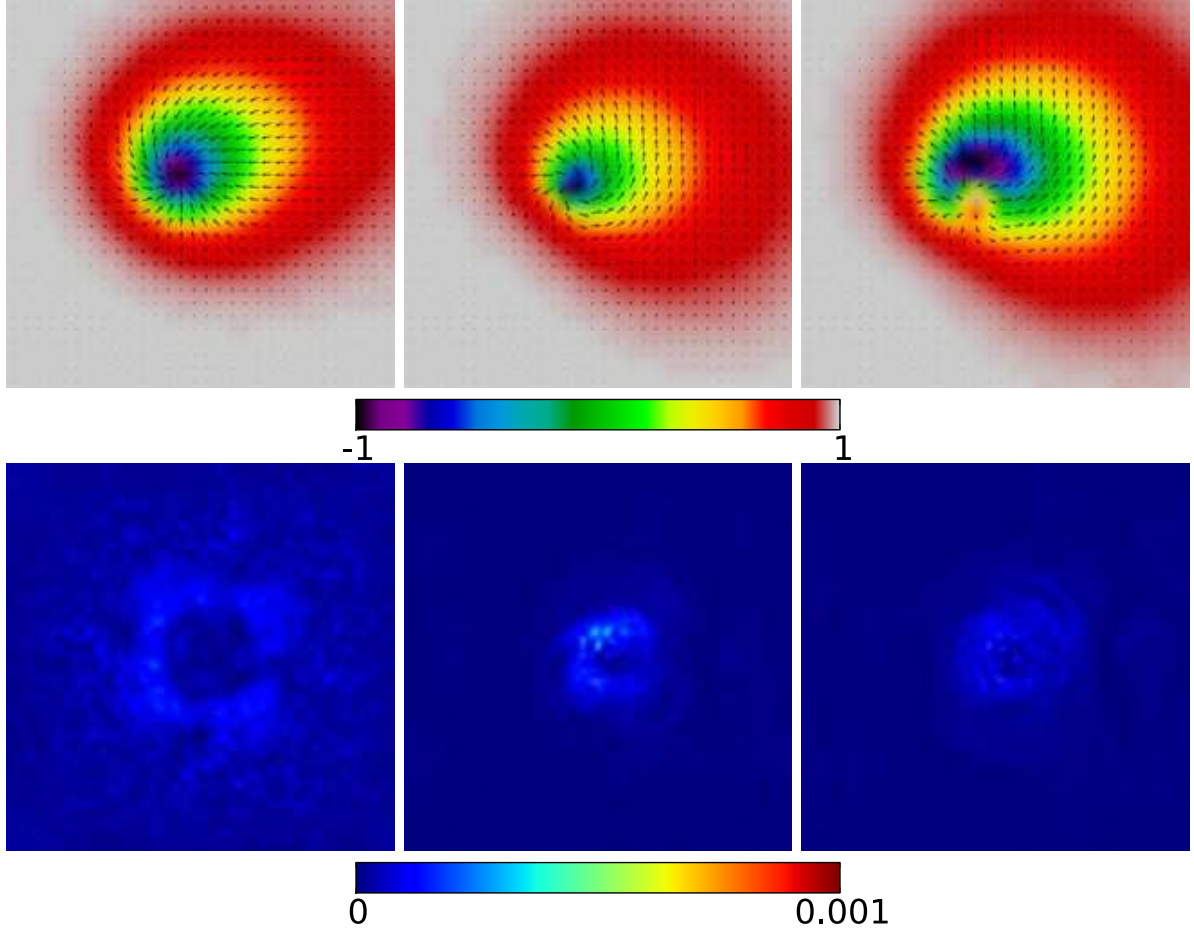


Fig. 4.17: Bouleversement du cœur d'un skyrmion lors de l'annihilation (panneaux d'en haut) et spin-torque ($|\mathbf{s} \times \mathbf{S}|$) pour les temps $t = 10, 1150, 1170$ (à comparer avec la figure 4.16).

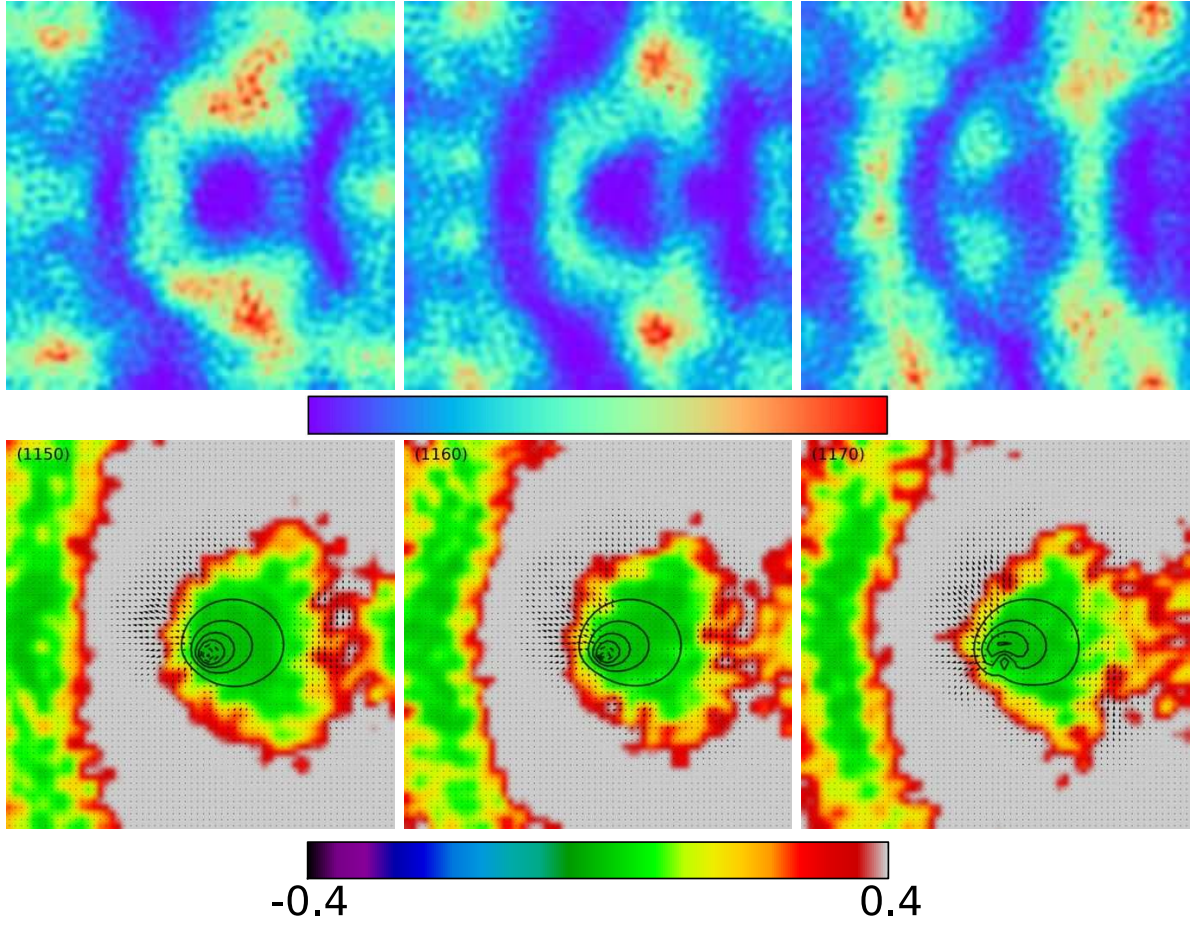


Fig. 4.18: Comportement quasi-stochastique de la densité de probabilité et du champ $\mathbf{s}$. En haut nous montrons la densité de probabilité $|\Psi|^2$, et en bas, le champ $\mathbf{s}$ (en couleur la composante z et les lignes correspondent aux contours de S_z). Les temps sont $t = 1100, 1150, 1240$.

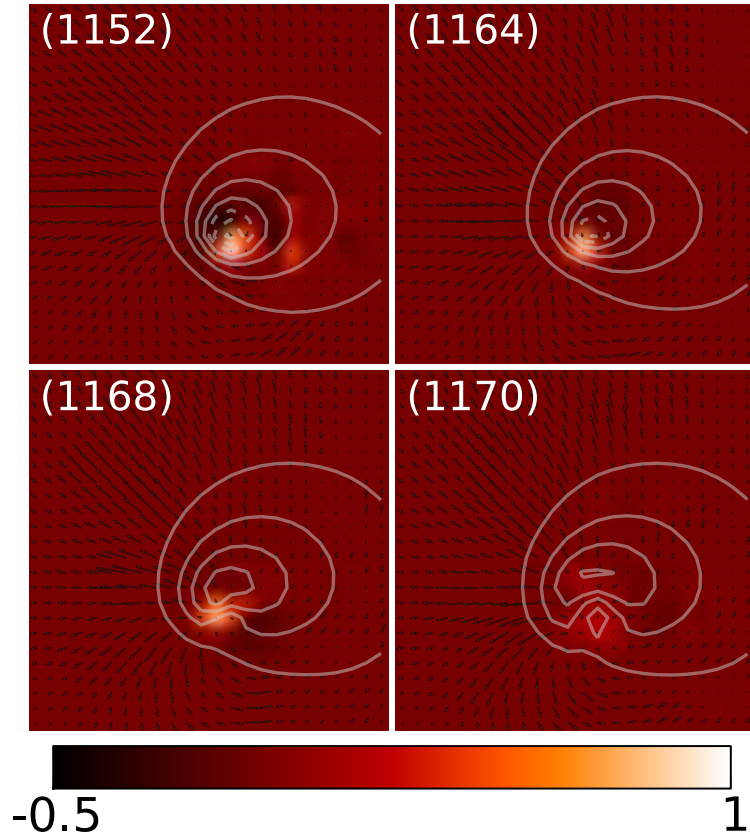


Fig. 4.19: En couleur la valeur absolue du champ $\mathbf{b}$ lors de la transition topologique et les lignes de contour de S_z pour les temps affichés (numéros blancs dans chaque panneau). Les flèches représentent le champ $\mathbf{s}$. Juste avant la transition topologique le champ développe une inhomogénéité qui produit l'annihilation.

Cette variable classique peut être considérée comme axe de quantification du spinor Ψ . Le comportement stochastique de $\mathbf{s}$ écarte le cas $s = 0$. Comme nous le montrons dans l'Annexe 6.5, cette transformation locale sur les électrons fait apparaître un potentiel vecteur de jauge $A_\mu = (\mathbf{u} \times \partial_\mu \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\sigma}$ qui se couple aux électrons par moyen du champ :

$$\mathbf{b} = \mathbf{u} \cdot (\partial_x \mathbf{u} \times \partial_y \mathbf{u}) \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.68)$$

Le champ unitaire $\mathbf{u}$ nous permet de regarder la relation entre la topologie du champ $\mathbf{s}$ et la topologie de $\mathbf{S}$. En effet, c'est le champ $\mathbf{u}$ qui est capable de nucléer une structure de charge topologique $Q = -1$ qui couplée au skyrmion produit une structure triviale. Le champ effectif b montre une forte localisation et déclenche la nucléation, comme nous le voyons dans la figure 4.19. Ce processus de nucléation nous rappelle les transitions topologiques décrites dans le cadre du micromagnétisme, mis à part le fait remarquable que dans le cas usuel ce n'est pas le champ d'aimantation lui même qui développe les ingrédients pour la transition mais le champ des électrons.

4.9.4 Changement de topologie par un paquet gaussien. Renversement de la polarité d'un vortex magnétique

Ici nous discutons l'action sur des vortex et des skyrmions d'un paquet gaussien qui est polarisé uniquement initialement (autrement dit, pour un champ fantôme nul). Pour certains paramètres nous observons l'annihilation du skyrmion et le changement de polarité

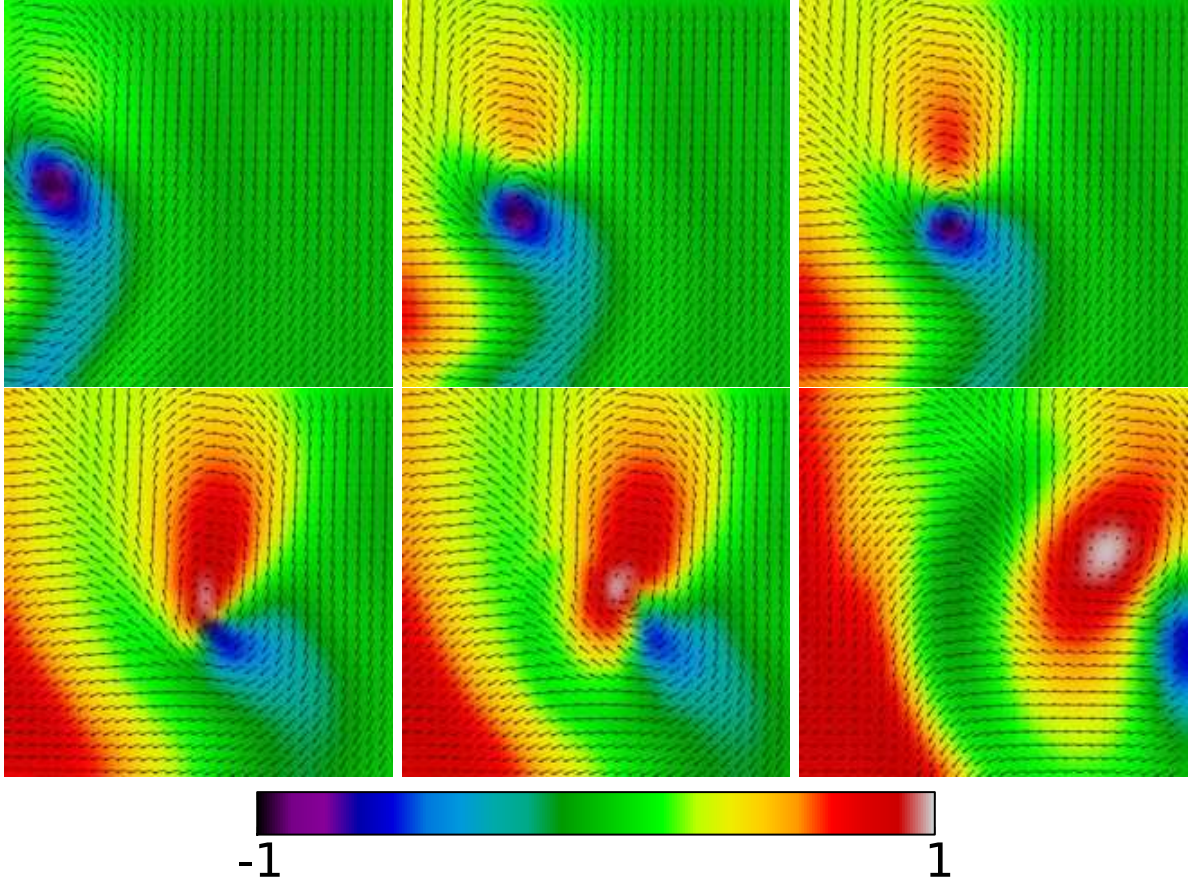


Fig. 4.20: Changement de polarité d'un vortex magnétique. Les temps sont $t = 87, 95, 99, 107, 110, 120$. Les paramètres sont $J_{sd} = 1, J = 0.8, \alpha = 0.2, l_g = 10, v_0 = 1, E_x = 5 \times 10^{-3}$. Avec v_0 la vitesse initiale du paquet d'onde et l_g la largeur de la gaussienne.

du cœur du vortex, les deux phénomènes respectent l'observation générale des transitions avec $\Delta Q = 1$. Ce dernier phénomène est d'un grand intérêt pratique dans l'utilisation des vortex comme des objets de stockage d'information.

Le processus de changement de polarité du vortex se déroule en plusieurs étapes. Quand le paquet d'onde rentre en contact avec le vortex il le pousse à une vitesse de l'ordre de celle du paquet en produisant une diminution de la taille du cœur. Cette diminution de la taille du cœur peut s'expliquer par une longueur $l \sim \sqrt{J/J_{sd}N_{se}}$ caractéristique qui est d'autant plus importante aux endroits où l'interaction existe. Ces deux effets produisent une augmentation localisée de la valeur de M_z autour du cœur du vortex qui est opposée à la valeur de la polarisation du cœur initiale. Cet effet est une espèce d'introduction de charge topologique opposée qui prendra la place de la charge topologique initiale à la fin de la transition. Lorsque le cœur du vortex se réduit à quelques longueurs de grille il y a un transfert de charge topologique par moyen d'une rupture des lignes de champ d'indice non-trivial (indice =1) aux points voisins où $M_z \approx 1$, avec quoi le changement de topologie est fait et en produisant un mouvement violent du nouveau vortex dont le cœur commence à grandir comme dans la situation stationnaire, figure 4.20. Dans ce processus la fonction d'onde est diffusée et on peut apprécier clairement les ondes de spin durant le changement de topologie, comme nous le montrons dans la figure

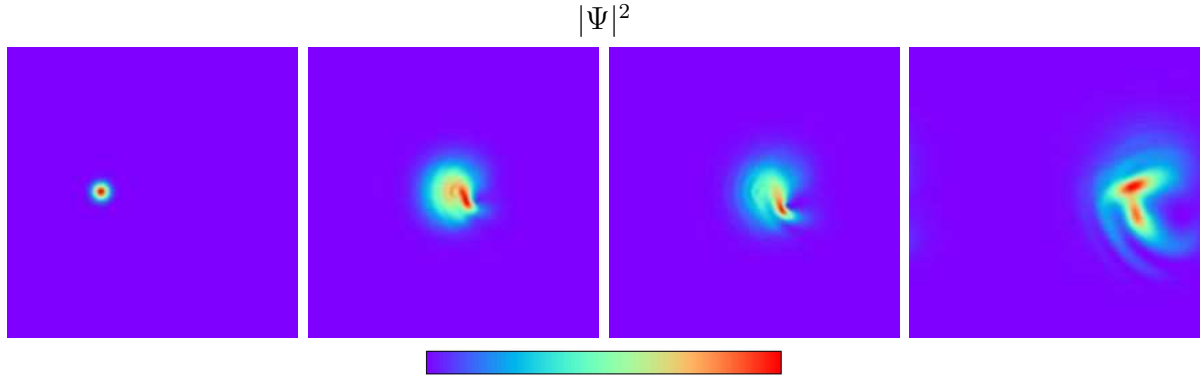


Fig. 4.21: Diffusion de la densité de probabilité $|\Psi|^2$ lors du changement de polarité d'un vortex par un paquet gaussien initialement polarisé. Les temps sont $t = 0, 91, 107, 157$.

4.21. Comme nous pouvons apprécier des temps caractéristiques de ce type de transition, dans ce régime on est bien loin des expériences numériques et expérimentales. En effet, ces transitions se passent dans les 0.1ps, pour des paquets gaussiens de quelques nanomètres et pour des vitesses des vortex d'environ $5 \times 10^5 \text{m/s}$ (des grandeurs loin de celles gérées dans les expériences réelles).

Par rapport au champ électrique et à la densité électronique nous observons un seuil au dessus duquel le changement a lieu, comme nous le montrons dans la figure 4.22, où la courbe qui sert de frontière entre les régions où il y a ou pas la transition correspond à $N_e E = \text{const.}$ Autrement dit, le changement de topologie dépend directement de la valeur de la densité de courant, comme dans les expériences [86].

Comme nous l'avons remarqué, les ordres de grandeur qu'il faut pour produire ce type de transition sont assez loin des ordres maîtrisés dans les expériences actuelles. Ce qui dans la littérature est décrit comme rapide sont des transitions produites par des pulses de quelques nanosecondes, tandis qu'en considérant que notre unité de temps est le femtoseconde, un «pulse» d'un nanoseconde correspond pratiquement dans notre modèle à un courant continu. Les observations faites dans cette sous-section correspondent très bien aux transitions topologiques qui ont été expliquées par le champ gyrotropique produit par le mouvement des vortex à grande vitesse [27], mis à part le fait très important que les ordres de grandeurs diffèrent assez et le rôle des électrons pointé plus haut.

4.10 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons montré que le modèle s-d discret permet des transitions topologiques. Les changements de topologie peuvent être classifiés par rapport aux ΔQ . Il y en a avec $\Delta Q = 1$ et avec $\Delta Q = 0$. Dans les changements de topologie avec $\Delta Q = 1$ on peut encore distinguer différents types de processus :

- En premier lieu, l'effondrement d'une paire vortex-antivortex. L'interaction entre un vortex et un antivortex est attractive indépendamment de la polarité du cœur. Quand ils ont la même charge topologique (donc forcément des polarités différentes), en se heurtant ils constituent un objet très instable de charge unitaire (un type de point de Bloch 2D) qui disparaît en émettant des ondes de spin.

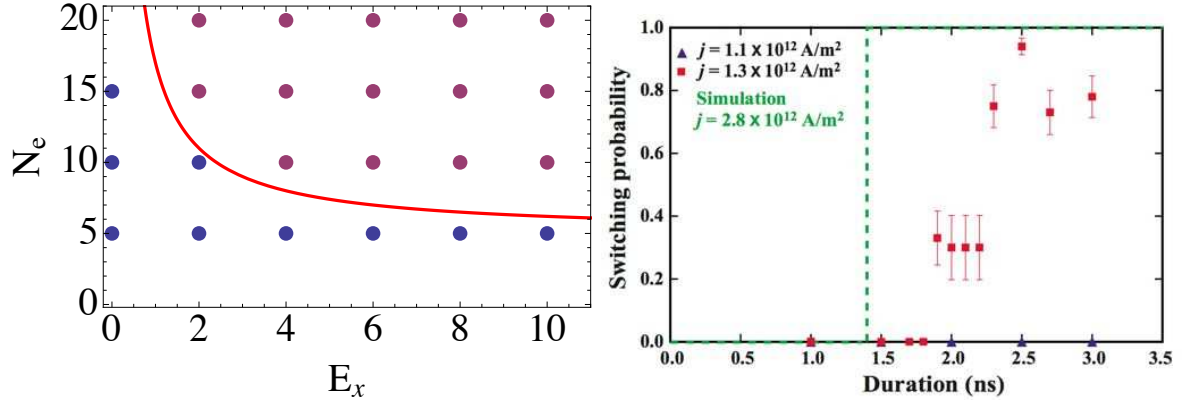


Fig. 4.22: Sur la gauche, de nos simulations, le diagramme de phases représentant la région de l'espace où il y a des changements de polarités des vortex (points violets) en fonction de la densité électronique et du champ électrique. Les unités sont 10^{-2} la valeur affichée dans les axes et elles sont dans les unités rationnelles décrites dans le texte. Sur la droite des résultats expérimentaux qui montrent les mêmes transitions par rapport aux valeurs de la densité de courant et de la durée du pulse (pris de [86]).

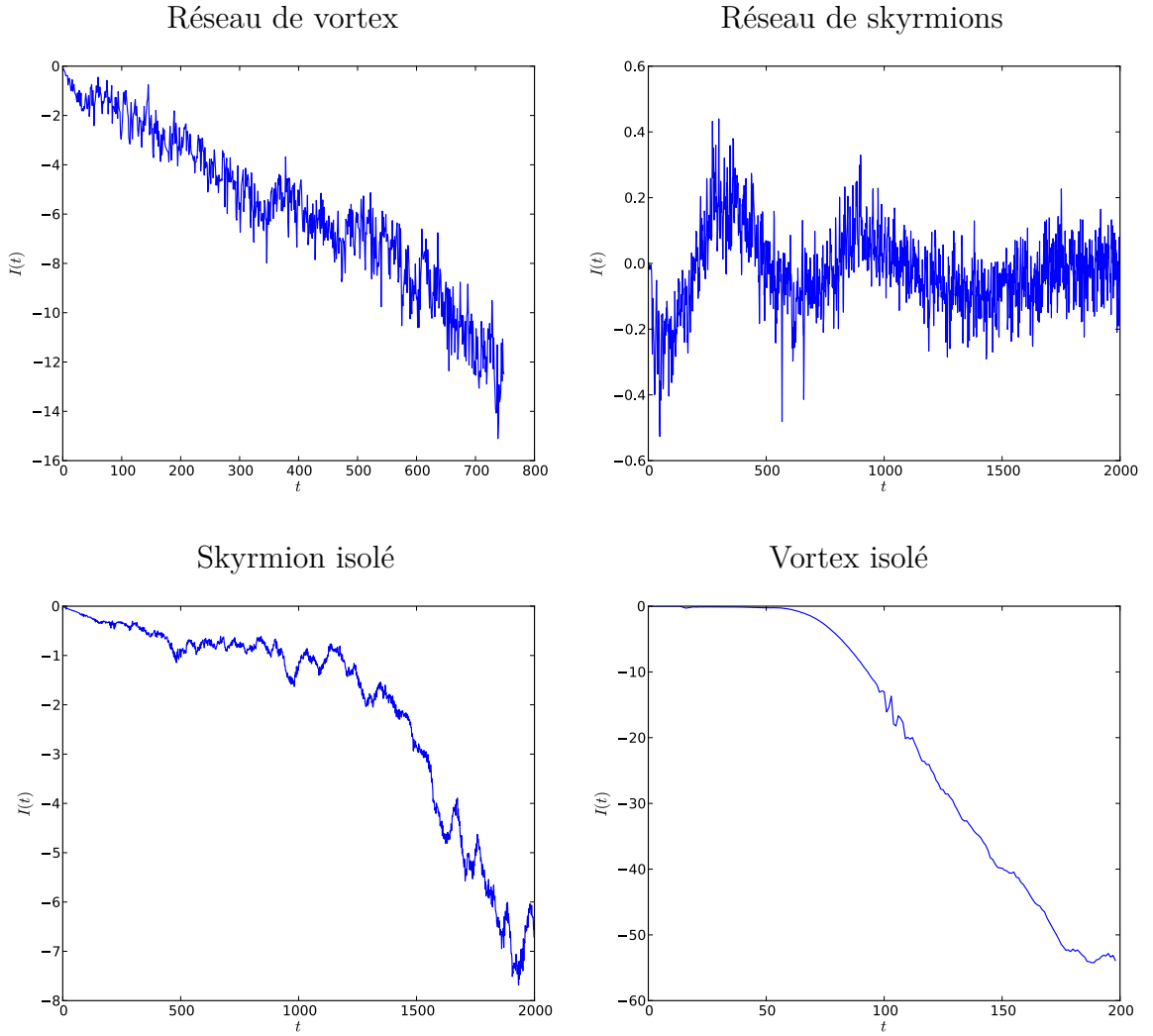


Fig. 4.23: Courants électriques pour les différents cas.

- Le changement de polarité d'un vortex magnétique produit par un paquet d'onde électronique localisé et de grande vitesse.
- L'annihilation d'un skyrmion sur site.

Les changements de topologie avec $\Delta Q = 0$ sont l'annihilation d'un vortex et antivortex de même polarité et la nucléation d'une paire vortex-antivortex. Le premier est un fait spontané, tandis que le deuxième est conséquence directe du passage de l'onde localisée.

Malgré ces variétés de comportement, on observe deux choses remarquables. Tout d'abord le fait indéniable du rôle fondamental que joue la discrétisation. Dans tous les changements de topologie les événements $\Delta Q = 1$ se passent dans des distances de quelques unités de grille, voire une seule. En deuxième lieu, nous avons observé que des charges topologiques peuvent être nucléées par le champ $\mathbf{s}$ des électrons.

Ces résultats ont été publiés en [17] et seront soumis à Physical Review B en mai 2013.

5. CONCLUSION

Dans cette thèse nous avons exploré certains aspects de la riche dynamique et de la complexité des solitons magnétiques. Depuis l'établissement de l'équation phénoménologique de Landau et Lifshitz [47], la découverte des différents défauts topologiques dans ces matériaux est devenue un sujet de recherche très actif. Les solutions qui minimisent l'énergie d'échange donnent lieu à des familles de solutions avec des charges topologiques, ces familles sont normalement libellées par un entier n . La conservation de ces charges lors de l'évolution dynamique de LL fait penser que ces solutions topologiques se comportent comme de vraies particules en interaction. Ainsi, une manière d'étudier leur dynamique est de trouver des systèmes dynamiques pour leurs coordonnées collectives. Ces travaux peuvent être considérés comme le point final de l'étude de la dynamique interne des solitons.

Les recherches sur les solitons magnétiques ont acquis des nouveaux éléments d'étude avec la considération de champs magnétiques extérieurs et de courants électriques, dont les électrons porteurs ont un spin qui interagit avec l'aimantation. Dans ce contexte, des transitions topologiques ont été observés entre des états de différentes charges topologiques. Il est clair que ces transitions sont possibles dans un contexte numérique grâce à la discrétisation et aux ordres de grandeur dans lesquels ces transitions se produisent. Cependant, la matière étant de nature discrète, ces phénomènes présentent un grand intérêt physique.

Dans le contexte classique, nous avons étudié et trouvé des solutions analytiques du point de Bloch (PB) en considérant en plus de l'énergie d'échange, l'énergie dipolaire et l'énergie de Landau. Ces travaux ont montré que des solutions trouvées auparavant peuvent être considérées comme des différentes expressions d'une famille de solutions dont l'énergie dipolaire détermine celle qui est choisie pour minimiser l'énergie. Pour être plus précis, nous avons trouvé deux solutions du point de Bloch, une radiale et une autre hélicoïdale qui sont régulières en zéro. La première constitue une solution locale maximum de l'énergie dipolaire et la deuxième une solution globale minimum de cette même énergie. Ces prédictions ont été confirmées numériquement.

Une fois établie avec certitude la structure interne du PB, il resterait à étudier sa stabilité et son mouvement en regardant ses coordonnées collectives et les forces effectives qu'y apparaissent. On peut soupçonner cependant que ce travail n'est pas simple. En effet d'après la conservation de la valeur absolue de l'aimantation on déduit que le centre du PB resterait fixe. Si le PB est instable, il faudrait trouver alors la dissipation produite par les ondes de spin et ainsi avoir les ingrédients mathématiques pour permettre que la singularité bouge.

Le travail s'est poursuivi avec des considérations sur les fluctuations quantiques car les ordres de grandeur du cœur du PB ne sont que de quelques nanomètres. En effet, la petite taille du cœur nous a prévenu sur l'importance qui pourraient avoir les fluctuations quantiques pour la stabilisation ou déstabilisation de la structure magnétique. De cette manière, nous appliquons de méthodes standards de quantification de solutions topologiques pour trouver les ondes autour du PB. Ces ondes nous ont permis de calculer les corrections à une boucle de l'énergie en imposant un cut-off sorti de la longueur du réseau cristallin a et pour un système de taille L grande par rapport à a . Il se trouve que la correction donne une valeur négative, ceci signifiant que les oscillations quantiques

ont tendance à baisser l'énergie et donc à stabiliser la structure. Pour confirmer ces prédictions, il serait nécessaire d'appliquer d'autres méthodes de renormalisation ainsi que l'ajout d'ingrédients donnant des éléments supplémentaires d'analyse, tels que l'énergie dipolaire, l'angle d'inclinaison γ , et cætera.

Dans la partie finale de cette thèse, nous attaquons le problème des transitions topologiques dans les matériaux bi-dimensionnels. Nous faisons évoluer numériquement l'équation de LL couplée avec l'équation de Schrödinger des électrons. En effet, nous avons montré que des réseaux de skyrmions en présence d'un courant électrique développent une riche dynamique où des nombreuses transitions topologiques ont lieu. Dans ces transitions nous avons observé des événements où la charge change de un ($\Delta Q = 1$) ainsi que d'autres événements où la charge topologique est conservée ($\Delta Q = 0$) correspondant à la nucléation des paires vortex-antivortex ou l'annihilation d'une paire vortex-antivortex. On observe aussi l'annihilation de skyrmions isolés. Dans toutes ces transitions topologiques, le rôle des électrons est fondamental. D'abord nous avons montré que la localisation de la fonction d'onde est capable de déclencher des phénomènes de transition et de nucléation de manière plus ou moins violente, avec l'émission, dans le cas $\Delta Q = 1$, d'ondes de spin. Ensuite dans le cas où la transition topologique est sur site et sans le mouvement de la structure magnétique, nous avons observé que le rôle des électrons est celui d'une pression stochastique sur le coeur des skyrmions tendant à réduire leur taille jusqu'à l'ordre de la grille, et ensuite produisant une instabilité qui fait que la structure disparaît. Une observation très intéressante a été faite dans le champ de spin des électrons : lors de la transition topologique le comportement du champ de spins normalisé est tout à fait semblable à la nucléation d'une structure magnétique de charge contraire. Ce dernier point pourrait être étudié de manière analytique avec l'aide du champ de jauge qui apparaît lors de l'élection de la direction du spin de l'électron comme axe de quantification.

Par ailleurs la suite naturelle de ce travail serait de trouver dans le continuum quel est le terme supplémentaire qui déclenche la transition topologique.

6. ANNEXES

6.1 Elements de magnétisme

C'est un fait de la nature que les atomes, soit pour leur mouvement ou pour les spins intrinsèques de leurs éléments, développent un moment magnétique $\mathbf{m}$. Ce moment magnétique est défini par rapport à l'énergie qui acquiert le système en présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}$; cette énergie est :

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (6.1)$$

Dû à l'énorme quantité d'atomes par unité de volume qu'a la matière, ce moment magnétique donne lieu à une aimantation macroscopique $\mathbf{M}$ et qui est [39] :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = N \langle \mathbf{m}(\mathbf{x}) \rangle \quad (6.2)$$

Où N est le nombre moyen d'atomes par unité de volume qui contribuent à l'aimantation et $\langle \mathbf{m}(\mathbf{x}) \rangle$ le moment magnétique moyen dans un petit volume autour de $\mathbf{x}$.

D'après l'électrodynamique classique nous connaissons le lien entre $\mathbf{M}$ et le champ magnétique $\mathbf{B}$ et le champ dipolaire $\mathbf{H}$ (aussi le lien entre $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$) :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (6.3)$$

où μ_0 est la perméabilité du vide, et qui avec les équations de Maxwell forment un ensemble complet d'équations.

Il se trouve que dans les ferromagnétiques le moment magnétique microscopique qui contribue à la magnétisation est dû au moment magnétique intrinsèque de l'électron $\boldsymbol{\mu}_S$ de l'orbital d [41]. Cette quantité est proportionnel au spin $\mathbf{S}$ (ici sans unités) . Alors, le moment magnétique intrinsèque d'un électron est proportionnel à l'unité naturelle de moment magnétique en mécanique quantique $\mu_B = e\hbar/2m_e$, le magnéton de Bohr. D'où la relation :

$$\boldsymbol{\mu}_S = -g_S \mu_B \mathbf{S}, \quad (6.4)$$

dont le facteur g_S vient des effets relativistes et est proche à 2.

Ainsi, nous avons :

$$\boldsymbol{\mu}_S \approx -\frac{e\hbar}{m_e} \mathbf{S}. \quad (6.5)$$

Dit cela nous pouvons trouver un lien entre $\mathbf{S}$ et $\mathbf{M}$. En effet si nous avons que pour chaque cellule de volume a^3 il y a un électron, alors la densité N en (6.2) est

$$N = \frac{1}{a^3},$$

qu'ensemble avec le moment magnétique (6.5), nous donnent que

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = -\frac{e\hbar}{m_e a^3} \mathbf{S}(\mathbf{x}). \quad (6.6)$$

Cette quantité peut être écrite en fonction du rapport entre le moment magnétique et le moment angulaire de l'électron, appelé rapport gyromagnétique :

$$\gamma = \frac{e}{m_e},$$

et donc :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar\gamma}{a^3} \mathbf{S}(\mathbf{x}) = -\frac{\boldsymbol{\mu}_S}{a^3}. \quad (6.7)$$

6.2 Spin équation

Un électron de spin $\frac{1}{2}$ est décrit par le spinor :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow} \\ \Psi_{\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

L'hamiltonien pour un spinor dans un champ électrique et magnétique est :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2 - J_{sd}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S}, \quad (6.9)$$

où $\mathbf{A}$ rend compte du champ électrique, m est la masse effective des électrons dans le métal. L'équation de conservation de la probabilité qui relie la densité $\rho = |\Psi|^2$ avec le courant $\mathbf{j}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (6.10)$$

où :

$$\mathbf{j} = \left\{ -\frac{i}{2} (\nabla \Psi^\dagger \Psi - \Psi^\dagger \nabla \Psi) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A} (\Psi^\dagger \Psi) \right\} \quad (6.11)$$

Similairement, nous pouvons construire une équation pour le courant de spin. Le spin électronique est

$$\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2} \Psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Psi. \quad (6.12)$$

L'équation de Schrödinger est :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi, \quad (6.13)$$

avec cette équation nous pouvons calculer l'évolution de $\mathbf{s}$ à partir de sa définition et l'équation de Schrödinger.

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \frac{\hbar}{2} \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} \Psi + \frac{\hbar}{2} \Psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{H} \Psi}{i} \right)^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Psi + \frac{1}{2} \Psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \frac{\mathcal{H} \Psi}{i} \quad (6.14)$$

Il est convenable calculer chaque terme de l'hamiltonien séparément et les exprimer comme une divergence. Pour la composante x on a les expressions suivantes pour le terme de moment linéaire :

$$\nabla^2 \Psi^\dagger \sigma_x \Psi - \Psi^\dagger \sigma_x \nabla^2 \Psi = \nabla \cdot (\nabla \Psi^\dagger \sigma_x \Psi - \Psi^\dagger \sigma_x \nabla \Psi), \quad (6.15)$$

le terme de couplage entre l'opérateur $\hat{\mathbf{p}}$ et $\mathbf{A}$ (les deux termes ont le même signe du fait que en étant imaginaires dans l'hamiltonien ils annulent l'imaginaire dans le dénominateur de l'équation (6.14)) :

$$(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) \Psi^\dagger \sigma_x \Psi + \Psi^\dagger \sigma_x (\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla) \Psi = \nabla \cdot [\mathbf{A} (\Psi^\dagger \sigma_x \Psi)], \quad (6.16)$$

et le terme venant du potentiel de couplage entre le spin de l'électron et le champ magnétique $J_{sd}\mathbf{S}$, qui est proportionnel à :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} \Psi)^\dagger \sigma_x \Psi - \Psi^\dagger \sigma_x \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} \Psi = \Psi^\dagger [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S}, \sigma_x] \Psi = 2i(s_y S_z - s_z S_y), \quad (6.17)$$

autrement dit :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} \Psi}{i} \right)^\dagger \boldsymbol{\sigma} \Psi + \frac{1}{2} \Psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{S} \Psi}{i} = \mathbf{s} \times \mathbf{S}. \quad (6.18)$$

Il est remarquable le fait que les termes qui ne sont couplés avec des dérivés ni couplés avec le spin n'apparaissent pas dans l'équation explicitement. En mettant tous ces termes ensembles nous obtenons :

$$\frac{\partial s^\beta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}^\beta = \tau^\beta \quad (6.19)$$

où

$$\mathbf{j}^\beta = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ -\frac{i}{2} \left(\nabla \Psi^\dagger \sigma_\beta \Psi - \Psi^\dagger \sigma_\beta \nabla \Psi \right) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{A} (\Psi^\dagger \sigma_\beta \Psi) \right\}, \quad (6.20)$$

et

$$\boldsymbol{\tau} = J_{sd} \mathbf{s} \times \mathbf{S}, \quad (6.21)$$

qui constitue le torque fait par le champ $\mathbf{S}$ sur le spin électronique et qui constitue une source de courant de spin puisque ce terme ne peut pas être écrit comme une divergence, donnant ainsi au courant de spin un caractère non-conservatif.

6.3 Introduction du champ électrique et les équations de mouvement.

L'hamiltonien d'une particule chargée de charge q et masse m dans un champ électromagnétique déterminé par $(\mathbf{A}, \varphi)$ est

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi$$

où

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \quad (6.22)$$

est le moment canonique.

Quand on a l'équation de Schrödinger avec un potentiel électrique scalaire φ produisant un champ électrique constant dans la direction $-x$:

$$\varphi = Ex \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\varphi = -E\hat{\mathbf{x}}$$

L'équation de Schrödinger pour ce potentiel et pour un électron de masse m_e et charge $q = -e = -|e|$, s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - exE \right) \psi$$

On calcule qu'en faisant la transformation unitaire sur la fonction d'onde :

$$\psi = e^{\frac{ieg}{\hbar}} \psi'$$

l'équation de Schrödinger devient :

$$(i\hbar) \left[\frac{ie}{\hbar} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi' = \frac{-\hbar^2}{2m_e} \left[\left(\frac{ie}{\hbar} \right)^2 \nabla g \cdot \nabla g + \frac{ie}{\hbar} \nabla^2 g + 2 \frac{ie}{\hbar} \nabla g \cdot \nabla + \nabla^2 \right] \psi' - exE\psi'$$

Et, en imposant une équation qui ne dépende pas de x explicitement. Nous remarquons que pourvu que g soit linéaire en x la condition de non-dépendance en x est équivalente à :

$$-e \frac{\partial g}{\partial t} = -exE,$$

dont la solution la plus simple (sans constantes) est :

$$g = Et\mathbf{x}.$$

l'équation devient :

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m_e} \left[\nabla + \left(\frac{ie}{\hbar} \right) Et\hat{\mathbf{x}} \right]^2 \psi'$$

ou

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m_e} \psi'$$

Avec

$$\mathbf{P} = -i\hbar \nabla - etE\hat{\mathbf{x}}$$

et donc si nous regardons l'équation (6.22) un champ électrique homogène en $-\hat{\mathbf{x}}$ est équivalent à un champ magnétique dont le potentiel vecteur dépend du temps et vaut :

$$\mathbf{A} = Et\hat{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}$$

Nous nous intéressons à un système qui est dans un champ électrique dans la direction $\hat{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{E} = -E\hat{\mathbf{x}}$$

6.4 Transformation stéréographique

La transformation stéréographique [35] du pôle sud :

$$\Omega = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi}$$

Cette fonction a comme interprétation géométrique la transformation qui amène un point de la sphère unitaire centrée au zéro du plan complexe, vers un point du dit plan. Pour trouver la correspondance entre le point du plan et celui de la sphère il faut tracer la ligne droite qui passe par le pôle sud et un point donné de la sphère. La intersection de cette ligne et le plan complexe mettra en correspondance bijective les points de la sphère et ceux du plan complexe. Ainsi, après la transformation, le pôle nord de la sphère va au zéro complexe et le pôle sud à l'infini complexe (autrement dit, tous les infini du plan complexe sont projetés dans le pôle sud). La transformation stéréographique a certains propriétés très intéressantes :

- Une ligne droite infinie qui passe par zéro dans le plan complexe est mappée dans un cercle maximal qui passe par les pôles.
- Une ligne droite infinie qui ne passe pas par zéro est un cercle qui passe par le pôle sud.
- La transformation stéréographique est conforme, c'est-à-dire elle conserve les angles entre les lignes.
- Si nous prenons le plan réel (x, y) et nous assignons à chaque point une direction donnée par le point sur la sphère qui correspond à ce point du plan, alors nous aurons un champ skyrmionique. Autrement dit, lors d'une transformation stéréographique chaque point du plan complexe a comme valeur sa propre position. Un champ unitaire dans le plan est une solution topologique si $R^2 \rightarrow S^2$ couvre la sphère un nombre entier de fois. Il suit évidemment que le skyrmion est une solution topologique. Par contre le vortex couvre uniquement une demi-sphère.

Ici nous écrivons l'équation de LL avec les termes α et β :

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{S} \times \mathbf{H}_\perp + \alpha \mathbf{H}_\perp - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{S} + \beta \mathbf{S} \times \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{S} \quad (6.23)$$

Avec

$$\mathbf{H} = J \nabla^2 \mathbf{S} - K S_z \hat{\mathbf{z}}. \quad (6.24)$$

Sous la transformation stéréographique les composantes de $\mathbf{S}$ sont :

$$S_x = \frac{\omega + \bar{\omega}}{1 + \omega \bar{\omega}}, \quad (6.25)$$

$$S_y = \frac{1}{i} \frac{\omega - \bar{\omega}}{1 + \omega \bar{\omega}}, \quad (6.26)$$

et

$$S_z = \frac{1 - \omega \bar{\omega}}{1 + \omega \bar{\omega}}. \quad (6.27)$$

La composante x de l'équation (6.23) est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial t} = & J(S_y \nabla^2 S_z - S_y \nabla^2 S_z) - K S_y S_z + \alpha [J \nabla^2 S_x - J(\nabla^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) \nabla^2 S_x - K S_z^2 S_x] \\ & - \mathbf{v} \cdot \nabla S_x + \beta [S_y \mathbf{v} \cdot \nabla S_z - S_z \mathbf{v} \cdot \nabla S_y] \end{aligned} \quad (6.28)$$

En faisant un peu d'algèbre nous pouvons montrer les relations suivantes :

$$\partial_t S_x = i \left[(1 - \bar{\omega}^2) \frac{-i\omega_t}{(1 + \bar{\omega}\omega)^2} - (1 - \omega^2) \frac{i\bar{\omega}_t}{(1 + \bar{\omega}\omega)^2} \right] \quad (6.29)$$

$$S_y \nabla^2 S_z - S_z \nabla^2 S_y = i \left[(1 - \bar{\omega}^2) F(\omega, \bar{\omega}) - (1 - \omega^2) \bar{F}(\omega, \bar{\omega}) \right] \quad (6.30)$$

$$S_y S_z = i \left[(1 - \bar{\omega}^2) E(\omega, \bar{\omega}) - (1 - \omega^2) \bar{E}(\omega, \bar{\omega}) \right] \quad (6.31)$$

$$S_x S_z^2 = i \left[(1 - \bar{\omega}^2) D(\omega, \bar{\omega}) - (1 - \omega^2) \bar{D}(\omega, \bar{\omega}) \right] \quad (6.32)$$

$$\nabla^2 S_x - (S \cdot \nabla^2 S) S_x = i \left[(1 - \bar{\omega}^2) C(\omega, \bar{\omega}) - (1 - \omega^2) \bar{C}(\omega, \bar{\omega}) \right] \quad (6.33)$$

Avec les définitions suivantes :

$$F(\omega, \bar{\omega}) \equiv \frac{(1 + \bar{\omega}\omega) \nabla^2 \omega - 2\bar{\omega}(\nabla \omega)^2}{(1 + \bar{\omega}\omega)^3} \quad (6.34)$$

$$E(\omega, \bar{\omega}) \equiv \frac{-\omega(1 - \bar{\omega}\omega)}{(1 + \bar{\omega}\omega)^3} \quad (6.35)$$

$$D(\omega, \bar{\omega}) \equiv iE(\omega, \bar{\omega}) \quad (6.36)$$

$$C(\omega, \bar{\omega}) \equiv -iF(\omega, \bar{\omega}) \quad (6.37)$$

De la même manière, nous écrivons le terme de spin-torque et le terme β :

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{S})_x = i \left[(1 - \bar{\omega}^2) B(\omega, \bar{\omega}) - (1 - \omega^2) \bar{B}(\omega, \bar{\omega}) \right], \quad (6.38)$$

$$S_y (v \cdot \nabla S)_z - S_z (v \cdot \nabla S)_y = i \left[(1 - \bar{\omega}^2) A(\omega, \bar{\omega}) - (1 - \omega^2) \bar{A}(\omega, \bar{\omega}) \right]. \quad (6.39)$$

Où

$$B(\omega, \bar{\omega}) = -i \frac{v \cdot \nabla \omega}{(1 + \bar{\omega}\omega)^2}, \quad (6.40)$$

et

$$A(\omega, \bar{\omega}) = -iB(\omega, \bar{\omega}) = -\frac{v \cdot \nabla \omega}{(1 + \bar{\omega}\omega)^2}. \quad (6.41)$$

Avec ces relations l'équation (6.28) devient :

$$0 = (1 - \bar{\omega}^2) G(\omega, \bar{\omega}) - (1 - \omega^2) \bar{G}(\omega, \bar{\omega}), \quad (6.42)$$

où

$$G(\omega, \bar{\omega}) = \frac{i\omega_t}{(1 + \bar{\omega}\omega)^2} + (1 - i\alpha)(JF(\omega, \bar{\omega}) - KE(\omega, \bar{\omega})) - B(\omega, \bar{\omega})(1 + i\beta). \quad (6.43)$$

Les équations pour y et z donnent des résultats similaires, pour que toutes ces équations soient résolubles [46], il faut que :

$$G(\omega, \bar{\omega}) = 0. \quad (6.44)$$

Autrement dit :

$$i\omega_t = (i\alpha - 1) \left(J \nabla^2 \omega - J \frac{2\bar{\omega}(\nabla \omega)^2}{1 + \bar{\omega}\omega} + K \frac{\omega(1 - \bar{\omega}\omega)}{1 + \bar{\omega}\omega} \right) + (\beta - i)v \cdot \nabla \omega, \quad (6.45)$$

qui exprime le fait que toute solution de LL ($\alpha = \beta = v = 0$) est aussi solution de l'équation avec la dissipation de Gilbert ($\alpha \neq 0$). Quand nous ajoutons l'interaction avec un vecteur externe $\mathbf{s}$ on obtient :

$$i\omega_t = (i\alpha - 1) \left(J\nabla^2\omega - J\frac{2\bar{\omega}(\nabla\omega)^2}{1 + \bar{\omega}\omega} + K\frac{\omega(1 - \bar{\omega}\omega)}{1 + \bar{\omega}\omega} \right) + (\beta - i)v \cdot \nabla\omega \\ + \frac{J_{sd}}{1 + |z|^2} \left(\frac{1 - z^2}{2}s_x + i\frac{1 + z^2}{2}s_x - zs_3 \right) \quad (6.46)$$

Si $\alpha = \beta = K = 0$ et $J = 1$ nous avons la version isotropique et conservative :

$$i\omega_t + \nabla^2\omega = \frac{2\bar{\omega}(\nabla\omega)^2}{1 + \bar{\omega}\omega}$$

6.5 Transformation de jauge sur le champ Ψ

Dans l'équation de Schrödinger pour le modèle s-d le terme $J_s S(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})\Psi$ couple les composantes Ψ_+ et Ψ_- du spinor. Dans l'hypothèse adiabatique il est naturel de chercher une représentation où l'axe de quantification est la direction du spin localisé $\mathbf{n}$. Dans cette base le terme de couplage est diagonal. Comme $\mathbf{n}$ dépend autant de l'espace que du temps, la matrice de transformation en dépendra aussi. Ainsi, nous cherchons $U(\mathbf{x}, t)$ tel que :

$$U^\dagger(\mathbf{x}, t)(\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma})U(\mathbf{x}, t) = \sigma_z \quad (6.47)$$

Si (θ, ϕ) sont les coordonnées sphériques de $\mathbf{n}$, la transformation qui satisfait (6.47) est [6][76] :

$$U(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.48)$$

avec :

$$\mathbf{m} = \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \phi, \sin \frac{\theta}{2} \sin \phi, \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (6.49)$$

Après ce changement, dans le nouvel Hamiltonien apparaîtra un champ de jauge A_μ défini par :

$$A_\mu = -iU(\mathbf{x}, t)^{-1} \partial_\mu U(\mathbf{x}, t), \quad (6.50)$$

qui apparaît dans les équations comme un potentiel vecteur du champ électromagnétique. Explicitement :

$$A_\mu = (\mathbf{m} \times \partial_\mu \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (6.51)$$

dont les composantes font un vecteur $\mathbf{A}_\mu$ pour chaque coordonné. L'expression explicite de ce vecteur dépend de la base choisie. En générale il satisfait de relations très intéressantes, notamment avec $\mathbf{n}$ et avec le champ de Berry $\Phi_{B\mu} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \partial_\mu \phi$, dont quelques :

$$\partial_\mu \mathbf{n} = 2\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{n} \quad (6.52)$$

$$\mathbf{A}_\mu = \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \partial_\mu \mathbf{n} - \Phi_{B\mu} \mathbf{n}. \quad (6.53)$$

$$\Phi_{B\mu} = -\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{n} \quad (6.54)$$

Comme a été remarqué par plusieurs auteurs, il existe une relation très étroite entre $\mathbf{A}_\mu$ et la charge topologique. En particulier, pour le cas d'un espace bi-dimensionnel :

$$(\mathbf{n} \cdot \partial_x \mathbf{n} \times \partial_y \mathbf{n}) \hat{z} = \nabla \times \Phi_B. \quad (6.55)$$

La signification physique de ce vecteur $\mathbf{A}$ est d'un champ de jauge localisé dans les régions de l'espace où le champ $\mathbf{n}$ varie. Après la transformation les électrons sont uniformément polarisés et interagissent avec le champ de jauge in-homogène et localisé.

Références

- [1] Ar. Abanov and V. L. Pokrovsky. Skyrmion in a real magnetic film. *Physical Review B*, 58(14) :R8889 – R8892, 1998.
- [2] Amikam Aharoni. Exchange energy near singular points or lines. *Journal of Applied Physics*, 51(6) :3330–3332, 06 1980.
- [3] Rolf Allenspach and Philipp Eib. The alphabet of spin in nanostructures. *Physics*, 3 :91, Oct 2010.
- [4] A. Altland and B. Simons. *Condensed Matter Field Theory*. Cambridge University Press, 2006.
- [5] A. Auerbach. *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. Springer Verlag, 1994.
- [6] Ya. B. Bazaliy, B. A. Jones, and Shou-Cheng Zhang. Modification of the landaulifshitz equation in the presence of a spin-polarized current in colossal- and giant-magnetoresistive materials. *Physical Review B*, 57(6), 1998.
- [7] A. A. Belavin and A. M. Polyakov. Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 22 :245–247, November 1975.
- [8] David Boulware. Scattering on magnetic charge". *Phys. Rev. D; Physical Review D*, 14(10) :2708–2727, 1976.
- [9] Liufei Cai, Eugene M. Chudnovsky, and D. A. Garanin. Collapse of skyrmions in two-dimensional ferromagnets and antiferromagnets. *Phys. Rev. B*, 86 :024429, Jul 2012.
- [10] R. Skomski D. Sellmyer. *Advanced magnetic nanostructures*. Springer, 2006.
- [11] Roger Dashen. Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. ii. two-dimensional models and extended hadrons". *Phys. Rev. D; Physical Review D*, 10(12) :4130–4138, 1974.
- [12] W. Doring. Point singularities in micromagnetism. *Journal of Applied Physics*, 39(2) :1006–1007, 1968.
- [13] R. A. Duine. Spintronics : Fundamentals and applications. *Lecture Notes*, 2009.
- [14] R. A. Duine, A. S. Nunez, Jairo Sinova, and A. H. MacDonald. Functional keldysh theory of spin torques. *Phys. Rev. B*, 75 :214420, 2007.
- [15] R. G. Elías and A. Verga. Magnetization structure of a bloch point singularity. *ArXiv*, 10 2010.
- [16] R. G. Elías and A. Verga. Magnetization structure of a bloch point singularity. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 82(2) :159–166, 2011-07-01.
- [17] R. G. Elías and A. Verga. Topological changes of two-dimensional magnetic textures. *ArXiv e-prints*, January 2013.
- [18] Ernst Feldtkeller and Harry Thomas. Struktur und energie von blochlinien in dünnen ferromagnetischen schichten. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 4(1) :8–14, 1965.
- [19] J. Fernández-Rossier, M. Braun, A. S. Nuñez, and A. H. MacDonald. Influence of a uniform current on collective magnetization dynamics in a ferromagnetic metal. *Physical Review B*, 69(17), 2004.

- [20] T. Fischbacher, M. Franchin, G. Bordignon, and H. Fangohr. A systematic approach to multiphysics extensions of finite-element-based micromagnetic simulations : Nmag. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 43(6) :2896–2898, june 2007.
- [21] E. G. Galkina, B. A. Ivanov, and V. A. Stephanovich. Phenomenological theory of bloch point relaxation. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 118(3) :373–378, 1993.
- [22] Stephen Gasiorowicz. *Quantum Physics*. John Wiley and Sons, Inc., 2003.
- [23] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [24] J. Goldstone and R. Jackiw. Quantization of nonlinear waves. *Phys. Rev. D*, 11 :1486–1498, Mar 1975.
- [25] A. G. Green, I. I. Kogan, and A. M. Tsvelik. Skyrmions in the quantum hall effect at finite zeeman coupling. *Phys. Rev. B*, 54 :16838–16849, Dec 1996.
- [26] David J. Gross. Meron configurations in the two-dimensional o(3) sigma-model. *Nuclear Physics B*, 132(5) :439–456, 2 1978.
- [27] K. Y. Guslienko, K. S. Lee, and S. K. Kim. Dynamic origin of vortex core switching in soft magnetic nanodots. *Phys. Rev. Lett.*, 100(2) :027203, Jan 2008.
- [28] Jung Hoon Han, Jiadong Zang, Zhihua Yang, Jin-Hong Park, and Naoto Nagaosa. Skyrmion lattice in a two-dimensional chiral magnet. *Phys. Rev. B*, 82 :094429, Sep 2010.
- [29] Masamitsu Hayashi, Luc Thomas, Charles Rettner, Rai Moriya, Yaroslav B. Bazaliy, and Stuart S. P. Parkin. Current driven domain wall velocities exceeding the spin angular momentum transfer rate in permalloy nanowires. *Physical Review Letters*, 98(3) :037204–4, 01 2007.
- [30] R. Hertel, S. Gliga, M. Fahnle, and C. M. Schneider. Ultrafast nanomagnetic toggle switching of vortex cores. *Phys. Rev. Lett.*, 98(11) :117201, Mar 2007.
- [31] R. Hertel and H. Kronmüller. Finite element calculations on the single-domain limit of a ferromagnetic cube - a solution to mu mag standard problem no. 3. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 238(2-3) :185–199, Jan 2002.
- [32] R. Hertel and C. M. Schneider. Exchange explosions : Magnetization dynamics during vortex-antivortex annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, 97(17) :177202, Oct 2006.
- [33] Riccardo Hertel and Jürgen Kirschner. Magnetic drops in a soft-magnetic cylinder. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 278(3) :L291–L297, 2004.
- [34] Riccardo Hertel and Jürgen Kirschner. Magnetization reversal dynamics in nickel nanowires. *Physica B : Condensed Matter*, 343(1-4) :206–210, 2004.
- [35] Paul P Horley, Vítor R Vieira, Pedro D Sacramento, and Vitalii K Dugaev. Application of the stereographic projection to studies of magnetization dynamics described by the landau–lifshitz–gilbert equation. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 42(31) :315211, 2009.
- [36] A Hubert and R Schäfer. *Magnetic domains : the analysis of magnetic microstructures*. Springer Verlag, 1998.
- [37] Igor, Jaroslav Fabian, and S. Das Sarma. Spintronics : Fundamentals and applications. *Rev. Mod. Phys.*, 76 :323–410, Apr 2004.

-
- [38] Boris A. Ivanov, Denis D. Sheka, Vasyl V. Kryvonos, and Franz G. Mertens. Quantum effects for the two-dimensional soliton in isotropic ferromagnets. *Phys. Rev. B*, 75 :132401, Apr 2007.
 - [39] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc., 1998.
 - [40] T. Jourdan. *Approche multiéchelle pour le magnétisme. Application aux hétérogénéités structurales et aux singularités magnétiques*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008.
 - [41] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, Inc., 1996.
 - [42] H. Kohno, G. Tatara, J. Shibata, and Y. Suzuki. Microscopic calculation of spin torques and forces. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 310(2, Part 3) :2020–2022, 2007.
 - [43] A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev. Magnetic solitons. *Physics Reports*, 194(3-4) :117–238, 1990.
 - [44] P. R. Kotiuga. The algebraic topology of bloch points. *Magnetics, IEEE Transactions on*, 25(5) :3476–3478, 1989.
 - [45] Volodymyr P. Kravchuk, Yuri Gaididei, and Denis D. Sheka. Nucleation of a vortex-antivortex pair in the presence of an immobile magnetic vortex. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 80(10) :100405–4, 09 2009.
 - [46] M. Lakshmanan and K. Nakamura. Landau-lifshitz equation of ferromagnetism : Exact treatment of the gilbert damping. *Phys. Rev. Lett.*, 53(26) :2497–2499, Dec 1984.
 - [47] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Phys. Z. Sowj*, 8 :153, 1935.
 - [48] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Electrodynamics of continuous media*. Pergamon Press, 1984.
 - [49] Yann Le Maho, Joo-Von Kim, and Gen Tatara. Spin-wave contributions to current-induced domain wall dynamics. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 79(17) :174404–16, 05 2009.
 - [50] K. M. Lebecki, D. Hinzke, U. Nowak, and O. Chubykalo-Fesenko. Key role of temperature in ferromagnetic bloch point simulations. *Phys. Rev. B*, 86 :094409, Sep 2012.
 - [51] Z. Li and S. Zhang. Domain-wall dynamics and spin-wave excitations with spin-transfer torques. *Physical Review Letters*, 92(20) :207203, 2004.
 - [52] M. Margulies and J. C. Slonczewski. Energy and mobility of bloch point singularities. *Journal of Applied Physics*, 49(3) :1912–1912, 03 1978.
 - [53] Daisuke Matsubayashi, Masafumi Udagawa, and Masao Ogata. Numerical study of current-induced domain-wall dynamics : Crossover from spin transfer to momentum transfer. *Journal of the Physical Society of Japan*, 78(3) :033703, 2009.
 - [54] N. Mermin. The topological theory of defects in ordered media. *Reviews of Modern Physics*, 51(3) :591–648, 1979.
 - [55] K. L. Metlov. Two-dimensional topological solitons in small exchange-dominated cylindrical ferromagnetic particles. *eprint arXiv :cond-mat/0012146*, 2000.
 - [56] J. Miltat and A. Thiaville. Vortex cores—smaller than small. *Science*, 298(5593) :555, 2002.

- [57] S. Muhlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Boni. Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet. *Science*, 323(5916) :915–919, 2009.
- [58] Naoto Nagaosa. *Quantum field theory in strongly correlated electronic systems*. Springer, 1998.
- [59] M Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics, 2003.
- [60] H. Niedoba and M. Labrune. Magnetization reversal via Bloch points nucleation in nanowires and dots : a micromagnetic study. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 47(4) :467–478, 2005.
- [61] Jun-ichiro Ohe and Bernhard Kramer. Dynamics of a domain wall and spin-wave excitations driven by a mesoscopic current. *Physical Review Letters*, 96(2) :027204–4, 2006.
- [62] N. Papanicolaou and T. N. Tomaras. Dynamics of magnetic vortices. *Nuclear Physics B*, 360(2-3) :425–462, 1991.
- [63] Oleksandr V. Pylypovskyi, Denis D. Sheka, and Yuri Gaididei. Bloch point structure in a magnetic nanosphere. *Phys. Rev. B*, 85 :224401, Jun 2012.
- [64] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons : An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland, 1987.
- [65] J. Shibata, Y. Nakatani, G. Tatara, H. Kohno, and Y. Otani. Current-induced magnetic vortex motion by spin-transfer torque. *Phys. Rev. B*, 73(2) :020403R, Jan 2006.
- [66] T. Shinjo, T. Okuno, R. Hassdorf, K. Shigeto, and T. Ono. Magnetic vortex core observation in circular dots of permalloy. *Science*, 289(5481) :930–932, 2000.
- [67] Teruya Shinjo. *Nanomagnetism and Spintronics*. Elsevier, 2009.
- [68] Yakov Shnir. *Magnetic Monopoles*. Springer, 2005.
- [69] J. C. Slonczewski. Properties of bloch points in bubble domains. *AIP Conference Proceedings*, 24(1) :613–614, 1975.
- [70] J. C. Slonczewski. Force, momentum and topology of a moving magnetic domain. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 12(2) :108–122, 1979.
- [71] J. C. Slonczewski. Current-driven excitation of magnetic multilayers. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 159(1-2) :L1–L7, 1996.
- [72] H. C. Stöhr, J. Siegmann. *Magnetism. From Fundamentals to Nanoscale Dynamics*. Springer, 2006.
- [73] Michael Stone. Magnus force on skyrmions in ferromagnets and quantum hall systems. *Physical Review B*, 53(24), 1996.
- [74] G. Tatara and H. Kohno. Theory of current-driven domain wall motion : Spin transfer versus momentum transfer. *Phys. Rev. Lett.*, 92(8) :086601, Feb 2004.
- [75] Gen Tatara and Peter Entel. Calculation of current-induced torque from spin continuity equation. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 78(6) :064429–6, 2008.
- [76] Gen Tatara, Hiroshi Kohno, and Junya Shibata. Microscopic approach to current-driven domain wall dynamics. *Physics Reports*, 468(6) :213–301, 2008.

-
- [77] A. Thiaville, Y. Nakatani, J. Miltat, and Y. Suzuki. Micromagnetic understanding of current-driven domain wall motion in patterned nanowires. *EPL (Europhysics Letters)*, 69(6) :990–996, 2005.
 - [78] André Thiaville, José Miguel García, Rok Dittrich, Jacques Miltat, and Thomas Schrefl. Micromagnetic study of bloch-point-mediated vortex core reversal. *Physical Review B*, 67(9), 2003.
 - [79] A. A. Thiele. Steady-state motion of magnetic domains. *Physical Review Letters*, 30(6), 1973.
 - [80] Lara Thompson. Magnetic vortex dynamics in a 2d easy plane ferromagnet. *ArXiv*, 2004.
 - [81] O. A. Tretiakov and O. Tchernyshyov. Vortices in thin ferromagnetic films and the skyrmion number. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 75(1) :012408–2, 2007.
 - [82] N. A. Usov and S. E. Peschany. Magnetization curling in a fine cylindrical particle. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 118(3) :L290–L294, 1993.
 - [83] A. Wachowiak, J. Wiebe, M. Bode, O. Pietzsch, M. Morgenstern, and R. Wiesendanger. Direct observation of internal spin structure of magnetic vortex cores. *Science*, 298(5593) :577–580, 2002.
 - [84] X. J. Xing, Y. P. Yu, S. X. Wu, L. M. Xu, and S. W. Li. Bloch-point-mediated magnetic antivortex core reversal triggered by sudden excitation of a suprathreshold spin-polarized current. *Applied Physics Letters*, 93(20) :202507–3, 11 2008.
 - [85] K. Yamada, S. Kasai, Y. Nakatani, K. Kobayashi, H. Kohno, A. Thiaville, and T. Ono. Electrical switching of the vortex core in a magnetic disk. *Nature Materials*, 6(4) :269–273, Apr 2007.
 - [86] Keisuke Yamada, Shinya Kasai, Yoshinobu Nakatani, Kensuke Kobayashi, and Teruo Ono. Switching magnetic vortex core by a single nanosecond current pulse. *Applied Physics Letters*, 93(15) :152502–3, 2008.
 - [87] E.B. Sonin Yu. A. Kufaev. Dynamics of a bloch point (point soliton) in a ferromagnet. *JETP*, 1989.
 - [88] Jiadong Zang, Maxim Mostovoy, Jung Hoon Han, and Naoto Nagaosa. Dynamics of skyrmion crystals in metallic thin films. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :136804, Sep 2011.
 - [89] S. Zhang and Z. Li. Roles of nonequilibrium conduction electrons on the magnetization dynamics of ferromagnets. *Physical Review Letters*, 93(12), 2004.
 - [90] Shufeng Zhang and Steven S. L. Zhang. Generalization of the landau-lifshitz-gilbert equation for conducting ferromagnets. *Physical Review Letters*, 102(8) :086601–4, 02 2009.

