

Solutions presque automorphes et S asymptotiquement ω -périodiques pour une classe d'équations d'évolution

William DIMBOUR

Dirigé par M. V. VALMORIN et Mme G. MOPHOU LOUDJOM

Université des Antilles et de la Guyane

Laboratoire CEREGMIA

Table des matières

Introduction	4
1 Préliminaire	13
1.1 Espaces de Banach et opérateurs linéaires	13
1.1.1 Espaces de Banach	13
1.1.2 Opérateurs linéaires	14
1.1.3 Semi-groupe fortement continu	15
1.2 Fonctions presque-périodiques	16
1.3 Fonctions et suites presque automorphes	18
1.3.1 Fonctions presque automorphes	18
1.3.2 Fonctions pseudo presque automorphes	20
1.3.3 Suites presque automorphes	21
1.3.4 Théorème de Kadets	21
1.4 Fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques	22
1.5 Théorie Spectrale des fonctions et des suites bornées	24
2 Solutions presque automorphes pour une équation différentielle à arguments constants par morceaux	30
Introduction	30
2.1 Solutions presque automorphes	31
2.2 Solutions compact presque automorphes	44
2.3 La stabilité	48
3 Solutions S-asymptotiquement ω-périodiques pour des équations d'évolution	52
Introduction	52
3.1 Quelques propriétés sur les fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques	54

3.2	Une application pour une classe d'équations d'évolution	57
3.3	Une application pour une équation différentielle avec un retard fini	65
3.4	Une application pour une équation différentielle à arguments constants par morceaux	78
3.4.1	Solutions S-asymptotiquement ω -périodiques dans le cas linéaire	78
3.4.2	Solutions S-asymptotiquement ω -périodiques dans le cas nonlinéaire	83
4	Mild solutions presque automorphes pour une équation différentielle neutre à arguments constants par morceaux	87
	Introduction	87
4.1	Solutions presque automorphes dans le cas linéaire	88
4.2	Solutions compact presque automorphes dans le cas linéaire .	110

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord mes directeurs de thèse, Monsieur Valmorin et Madame Mophou qui ont su faire preuve d'énormément de pédagogie et de patience à mon égard. Je tiens à leur témoigner toute ma reconnaissance et ma gratitude pour m'avoir guidé et conseillé.

Je tiens aussi à remercier le professeur N'Guérékata pour ses nombreux conseils, les nombreuses discussions que nous avons eu et l'honneur qu'il m'a fait en travaillant avec moi sur la problématique de ma thèse.

Mes remerciements particuliers s'adressent aussi à tous les membres du laboratoire CEREGMIA étudiants, professeurs et secrétaires.

Je remercie mon frère Jean-Philippe, ma soeur Jacinthe et ma grand-mère. Enfin, je remercie tout particulièrement mes parents.

Introduction

De nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques, économiques, épidémiologiques peuvent avoir un comportement plus ou moins périodiques. Différents types d'équations permettent de modéliser ces phénomènes : il s'agit entre autres des équations intégrales, des équations opérationnelles abstraites, des équations aux dérivées partielles, des équations aux différences, des équations fonctionnelles, des équations différentielles à arguments constants par morceaux pour ne citer que celles-là. L'étude de ces phénomènes nécessitent des notions qui dépassent le concept de la périodicité, qui tiennent compte du fait que ces phénomènes ne sont pas tout à fait périodiques. Dans le cadre de ce travail, nous considérons deux généralisations des fonctions périodiques : les fonctions S asymptotiquement ω -périodiques et les fonctions presque automorphes.

Durant ces dernières décennies plusieurs auteurs se sont penchés sur le concept de périodicité et ses diverses généralisations. Les fonctions presque périodiques introduites par Bohr [17], [18], [19] est l'une des généralisations de la périodicité. Les premiers résultats relatifs à l'études des fonctions presque périodiques étaient limités à des fonctions à valeurs réelles ou complexes. Bochner [15] a proposé des caractérisations séquentielles de la presque périodicité et a étendu cette notion aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Plusieurs généralisations de la presque périodicité ont alors été définies. Nous pouvons citer entre autres la classe des fonctions Stepanov presque périodiques [86], la classe des fonctions Besicovitch presque périodiques [11], [12] ou encore la classe des fonctions Weyl presque périodiques [92]. En 1992, C. Zhang [107] généralise le concept de presque périodicité en définissant les fonctions pseudo-presque périodiques. Plusieurs travaux ont été menés sur la presque périodicité et la pseudo-presque périodicité dans l'étude des équations différentielles. Abbas [1], Alia, Ezzinbi et Fatajou [6], Basit [8], Diagana [36], Diagana et Hernández [37], Diagana, Hernández et Rabello [39], Diagana, Mophou et N'Guérékata [40], Ezzinbi, Fatajou et N'Guérékata [50], Hino, Naito, Van Minh et Shin [56], Hong [55], Levitan et Zhikov [60],

Naito, Van Minh, Miyazaki et Hamaya [74], Yuan [102], [103], Zhao, Chang et N'Guérékata [106], ont présenté des études sur la presque périodicité et la pseudo-presque périodicité des solutions d'équations différentielles.

La notion dite Stepanov presque périodique a ensuite été introduite. Les fonctions dite Stepanov presque périodiques généralisent le concept de la presque périodicité. De nombreux articles traitent de l'existence de solutions dite Stepanov presque périodiques : Diagana [33], Zhanrong Hu et Zhen Jin [104], [105].

Les résultats relatifs au concept de la presque périodicité ont essentiellement été développés par Bohr, mais aussi Bochner [14] qui définit une classe de fonctions généralisant ce concept : les fonctions presque automorphes. La classe des fonctions presque périodiques possède des propriétés qui ne sont pas vérifiées par celle des fonctions presque automorphes : par exemple une fonction presque périodique est uniformément continue tandis qu'une fonction presque automorphe ne l'est pas nécessairement. La pseudo presque automorphie a alors aussi été introduite, généralisant le concept de presque automorphie mais également celui de la pseudo-presque périodicité. Evidemment des mathématiciens se sont intéressés à l'étude de la presque automorphie des solutions d'équations différentielles : Carvalho dos Santos et Cuevas [23], Chang, Zhao et N'Guérékata [24], Diagana [34], [35], Diagana, Hernández et Dos Santos [38], Ding, Xiao et Liang [32], Ezzinbi et N'Guérékata [49], [51], Liang, Zhang et Xiao [61], N'Guérékata [75], [76], Meril, Mophou et N'Guérékata [70], Mophou [71], Mophou et N'Guérékata [73], Xiao, Liang et Zhan [99]. Cependant, il existe des équations différentielles à coefficients presque périodiques qui ont des solutions presque automorphes qui ne sont pas presque périodiques [83].

La notion de Stepanov dite presque automorphe a ensuite été définie. Les fonctions Stepanov dite presque automorphes généralisent le concept de la presque automorphie. Parmi les articles traitant de l'existence de solutions Stepanov dite presque automorphes, citons : Lee et Alkhaby [58], N'Guérékata et Pankov [77].

Enfin, depuis peu, une nouvelle classe de fonction généralisant celle des fonctions périodiques a été définie : il s'agit de la classe des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques. Cette classe de fonction généralise aussi celle des fonctions asymptotiquement ω -périodiques.

Les résultats relatifs aux fonctions S asymptotiquement ω -périodiques sont limités car ce concept est nouveau. Néanmoins des propriétés sont présentées et des conditions d'existence et d'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique d'équations différentielles et d'équations différentielles fractionnaires dans des espaces de dimension finie ou infinie ont été proposées :

Blot, Cieutat et N'Guérékata [13], Cuevas [28], Cuevas et de Souza [30], Henríquez, Pierre, Táboas [53], [54], Nicola et Pierri [79]. Pour l'étude des équations différentielles et des équations différentielles fractionnaires, on peut considérer [7], [31], [52], [57], [72], [81], [82], [88].

Dans ce travail, nous étudierons essentiellement l'existence de solutions S-asymptotiquement ω -périodiques et de solutions presque automorphes d'équations différentielles. La théorie des semi-groupes étant utilisée dans l'étude des équations différentielles, nous en donnons quelques éléments.

L'équation fonctionnelle $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$ admet pour solutions les fonctions $t \mapsto e^{ta}$, $a \in \mathbb{R}$. On constate également que la fonction $t \mapsto e^{ta}x_0$ est aussi l'unique solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

En 1888, Giuseppe Peano proposa d'écrire la solution du problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = I, \end{cases},$$

où A est une matrice, sous la forme

$$t \mapsto e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

Ce résultat a été ensuite étendu aux équations différentielles $x' = Ax$, où A est un opérateur linéaire borné dans un espace de Banach $\mathbb{X}$ de dimension finie.

Toutes ces considérations ont conduit les mathématiciens à étudier des équations différentielles d'ordre un en considérant des extensions de la fonction exponentielle. L'équation différentielle

$$x'(t) = Ax(t),$$

où A est un opérateur linéaire non borné dans un espace de Banach $\mathbb{X}$ a alors suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens. La définition des semi-groupes a alors été introduite et a permis d'introduire la définition d'une "fonction exponentielle" comme solution de l'équation précédente.

L'introduction des semi-groupes a donc permis de définir en dimension infinie la solution de $x' = Ax$ quand A est un opérateur linéaire non borné. Cependant il existe une classe d'équations qui n'avait pas encore été traitée

dans le cadre de la théorie des semi-groupes : il s'agit de celle des équations différentielles à arguments constants par morceaux.

L'étude des équations différentielles à arguments constants par morceaux est un domaine important car ces équations ont la structure de système dynamique de longueur constante. La continuité de la solution conduit à une relation de récurrence entre les valeurs de cette dernière aux points n et $n + 1$, où n est un entier relatif quelconque. Par conséquent les équations différentielles à arguments constants par morceaux combinent à la fois les propriétés des équations différentielles ([2], [3], [10]) et des équations aux différences ([21], [66], [59]). Le premier article présentant la solution d'une équation différentielle à arguments constants par morceaux a été écrit par Shah et Wiener [85] en 1983. Depuis de nombreux auteurs ont étudié cette classe d'équations différentielles : Aftabizadeh et Wiener [4], Aftabizadeh, Wiener et Xu [5], Cooke et Wiener [25], [26], [27], Carvalho et Marconato [21], Marconato [67], [68], [69], G. Seifert [84], Wiener [93], [96], [97], Wiener et Debnath [94], [95]. Dans ces articles, l'existence et l'unicité des solutions de différentes équations différentielles à arguments constants par morceaux sont étudiées. Des propriétés oscillatoires et des critères de stabilité des solutions sont aussi proposés. Ces résultats sont obtenus en considérant les équations aux différences gouvernant ces équations différentielles à argument constant par morceaux. Les équations différentielles à arguments constants par morceaux ont été utilisées pour la première fois en 1988 par Busenberg et Cooke pour modéliser la dynamique de certaines épidémies [20]. Cependant ce n'est qu'en 2006 que la presque automorphie des solutions d'une équation différentielle à argument constant par morceaux de la forme

$$x'(t) = Ax([t]) + f(t)$$

est étudiée, où A est un opérateur linéaire borné et f une fonction presque automorphe. Il s'agit des travaux de Van Minh et de Tran Tat Dat [90]. Dans cette thèse nous étudions cette équation différentielle à arguments constants par morceaux dans un cadre plus général :

$$x'(t) = A(t)x([t]) + f(t) \tag{1}$$

où $A(t)$ est un opérateur linéaire dépendant du temps. Cependant l'étude de cette équation dans le cas de la dimension infinie reste un problème ouvert. Nous présenterons donc des conditions d'existence de solutions presque automorphes et pseudo presque automorphes de l'équation (1) en dimension finie, dans le cas où $A(t)$ est un opérateur linéaire borné. Nous montrerons que les solutions de l'équation (1) sont presque automorphes ssi elles sont

bornées et obtiendront ce résultat en étudiant l'équation aux différences gouvernant (1). Nous appliquerons ensuite ce résultat au modèle de dynamique des populations de Leslie.

Le modèle de Leslie est un modèle discret très utilisé en dynamique des populations. Ce modèle est utilisé pour tenter de prédire l'évolution du nombre d'individus, du taux de croissance ou la composition d'une population. Introduit par P.H. Leslie en 1945, ce type de modèle s'est ensuite répandu parmi les écologistes et les démographes. Les écologistes utilisent ce modèle pour déterminer si une espèce peut survivre quand elle est introduite dans un environnement nouveau. Si $y(n)$ est la taille de la population à l'instant n , le modèle de Leslie s'écrit sous la forme suivante

$$y(n+1) = Ly(n)$$

où L est une matrice appelée la matrice de Leslie. Nous montrerons que la restriction sur $\mathbb{Z}$ d'une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle à arguments constants par morceaux suivante

$$y'(t) = (L - I)y([t])$$

est aussi solution du modèle discret de Leslie. Ainsi l'existence de fonctions presque automorphes définies sur l'ensemble des réels solution sur l'ensemble des entiers relatifs du modèle de Leslie sera prouvés.

Dans [41], Diagana et N'Guérékata étudient l'existence et l'unicité de solutions presque automorphes d'une classe d'équation d'évolution de la forme

$$\frac{d}{dt}[u(t) + f(t, Bu(t))] = Au(t) + g(t, Cu(t)). \quad (2)$$

Ici A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 exponentiellement stable à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{X}$; B, C sont deux opérateurs linéaires fermés sur $\mathbb{X}$ et f, g sont des fonctions continues. Dans [46], Elazzouzi étudie l'existence de solutions de classe C^n presque périodiques et C^n presque automorphes du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = -Au(t) + L(u_t) + f(t) \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \quad (3)$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, L est un opérateur linéaire borné et f une fonction continue. Pour une étude de la théorie des semi-groupes on peut considérer [101], [80], [65], [47]. Grâce à cette théorie,

de nombreux auteurs ont pu travailler sur la presque périodicité, la presque automorphie de solutions d'équations différentielles en dimension infinie et donner des applications de ces équations dans des domaines variés tel que celui de la physique ou de l'économie.

Dans notre travail nous étudierons l'équation (2) et une forme non linéaire de l'équation (3), toujours dans le cas où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe. Nous donnerons une condition suffisante d'existence et d'unicité de mild solution S-asymptotiquement ω -périodique de l'équation (2). Ce résultat sera obtenu en utilisant le théorème du point fixe de Banach-Picard et nous l'illustrerons dans le cadre d'une équation de la chaleur. La forme non linéaire de (3) et plus précisément l'équation

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = -Au(t) + L(u_t) + g(t, u(t)) \\ u(0) = \varphi \end{cases} \quad (4)$$

sera étudiée. Dans ce cadre nous obtiendrons alors des conditions d'existence et d'unicité de mild solution S-asymptotiquement ω -périodique des équations (3) et (4).

L'étude des équations différentielles à arguments constants par morceaux a débuté il y a une trentaine d'années. Cependant d'une façon générale, les auteurs proposent des solutions de ce type d'équation dans le cadre de la dimension finie. Par conséquent l'étude de la presque périodicité, de la presque automorphie des solutions d'équations différentielles à arguments constants par morceaux s'opère essentiellement en dimension finie. Différentes équations ont été résolues dans le cadre de la dimension infinie en utilisant la théorie des semi-groupes. C'est le cas des équations (2), (3) et (4). C'est aussi le cas d'équations différentielles intégrales, d'équations différentielles stochastiques, d'équations différentielles fonctionnelles. Nous déterminerons la solution de l'équation différentielle à arguments constant par morceaux suivante

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + A_0x([t]) + f(t) \\ x(0) = c_0 \end{cases} \quad (5)$$

en supposant que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe. Nous donnerons des conditions d'existence et d'unicité de solutions S asymptotiquement ω périodiques, où ω est un entier positif.

Afin de déterminer les solutions des équations différentielles à arguments constants par morceaux, les auteurs cherchent d'abord l'expression de la solution sur les intervalles $[n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$, utilisent cette expression afin de mettre en évidence une relation de récurrence entre $x(n)$ et $x(n+1)$ et déterminent ainsi la solution de cette équation sur $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}$. Nous

présenterons une solution obtenue directement sur $\mathbb{R}^+$. Cette solution sera déterminée sans utiliser les techniques habituelles de discrétisation. Certes la fonction $x([t])$ n'est pas nécessairement continue sur $\mathbb{R}$, néanmoins elle est étagée. Par conséquent cette fonction est intégrable au sens de Riemann sur les intervalles fermés bornés. Ainsi la "mild solution" de l'équation (5) sur $\mathbb{R}^+$ sera définie. Nous n'utiliserons pas les propriétés de l'équation aux différences gouvernant cette équation. En effet, nous traiterons de l'existence et de l'unicité de solution S asymptotiquement ω -périodique de l'équation (5), où ω est un entier positif, en utilisant le théorème de Banach-Picard. Les résultats relatifs à l'équation (5) seront appliqués à une équation aux dérivées partielles.

Nous traiterons aussi de l'existence et de l'unicité de solutions S asymptotiquement ω -périodiques de l'équation (5) dans le cas non linéaire, où ω est un entier positif. Des conditions d'existence et d'unicité de solution S asymptotiquement ω -périodiques de l'équation différentielle à arguments constants par morceaux

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + A_0x([t]) + g(t, x(t)) \\ x(0) = c_0 \end{cases} \quad (6)$$

seront alors obtenues en utilisant le théorème de Banach-Picard. Les résultats relatifs à l'équation (6) seront aussi appliqués à une équation aux dérivées partielles. Même si nous nous limitons au cas où ω est un entier positif, nous proposerons pour la première fois des conditions d'existence et d'unicité de solution S asymptotiquement ω -périodique d'une équation différentielle à arguments constants par morceaux dans un espace de dimension infinie.

En 2005 dans [87], Tran Tat Dat étudie la presque périodicité des solutions de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) + \sum_{j=-N}^N A_jx([t+j]) + f(t) \quad (7)$$

en dimension finie. Nous étendrons la théorie des semi-groupes à cette équation différentielle à arguments constants par morceaux et nous définirons alors la "mild solution" de cette dernière. Afin d'obtenir une "mild solution" définie sur $\mathbb{R}$, nous déterminerons d'abord la "mild solution" de l'équation (7) sur l'intervalle $[n, n+1[$ que nous généraliserons ensuite à l'ensemble des réels. Nous montrerons qu'une mild solution de l'équation (7) est presque automorphe si et seulement si sa restriction à l'ensemble des entiers relatifs est une suite presque automorphe. Des critères d'existence de mild solutions presque automorphes de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) + A_0x([t]) + A_1x([t+1]) + f(t). \quad (8)$$

seront proposés. Ces conditions d'existence seront obtenues en utilisant l'équation aux différences gouvernant l'équation (8). Les résultats relatifs à la presque automorphie des équations (7) et (8) seront donc obtenus en utilisant les techniques liées aux équations aux différences. Il s'agit de la théorie spectrale des suites bornées.

Nous obtiendrons des résultats concernant l'existence et l'unicité de solution S -asymptotiquement ω -périodique et de solution presque automorphe de plusieurs équations d'évolution. Cette problématique sera notamment étudiée dans le cadre d'équations d'évolution appartenant à la classe des équations différentielles à arguments constants par morceaux.

Le travail est divisé en quatre chapitres. Au premier chapitre nous présentons les résultats nécessaires à notre étude. Il s'agira de la théorie des fonctions presque périodiques, des fonctions pseudo presque périodiques, des fonctions compact presque automorphes, des fonctions presque automorphes, des fonctions pseudo presque automorphes et des fonctions S -asymptotiquement ω -périodiques. Nous rappelons aussi les définitions d'espace de Banach, d'opérateurs linéaires et de semi-groupe fortement continu. Les éléments de la théorie spectrale permettant de définir des conditions d'existence de suites presque automorphes solution d'une équation aux différences seront exposés : l'ensemble résolvant d'un opérateur linéaire, le spectre d'un opérateur linéaire, le spectre uniforme d'une suite bornée.

Le deuxième chapitre est composé de trois sections. Dans la première section, nous étudierons en dimension finie la presque automorphie des solutions de l'équation (1). Nous montrerons que les solutions de cette équation différentielle à arguments constants par morceaux sont presque automorphes si et seulement si elles sont bornées. Dans la deuxième section nous traiterons de l'existence de solutions compact presque automorphe de l'équation (1). Dans la troisième section nous présenterons un critère de stabilité de cette équation. Nous appliquerons ces résultats au modèle de Leslie et montrerons l'existence de fonctions presque automorphes définies sur l'ensemble des réels, solutions de ce modèle discret. Les résultats relatifs à la presque automorphie et la compact presque automorphie des solutions de l'équation (1) ont été publiés dans [42]. Les résultats relatifs à la pseudo presque automorphie, à la pseudo compact presque automorphie des solutions de l'équation (1) et la stabilité ont été publiés dans [43].

Le troisième chapitre est composé de quatre sections. Dans la première section, nous proposerons de nouvelles propriétés sur la classe des fonctions S -asymptotiquement ω -périodiques. Il s'agira entre autres de propriétés sur la multiplication de fonctions S -asymptotiquement ω -périodiques, sur l'in-

verse d'une fonction S-asymptotiquement ω -périodique, sur la composée d'un opérateur uniformément continu et d'une fonction S-asymptotiquement ω -périodique et enfin sur le produit de convolution d'une fonction intégrable et d'une fonction S-asymptotiquement ω -périodique. Dans la deuxième section, nous donnerons des conditions d'existence et d'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique de l'équation d'évolution (2). Ces résultats seront appliqués à une équation de la chaleur. Les travaux de la première et deuxième section de ce chapitre ont été publiés dans [44]. Dans la troisième section, nous donnerons des conditions d'existence et d'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique des équations d'évolution (3) et (4). Ces résultats seront appliqués à une équation de diffusion avec retard. Les travaux de la troisième section de ce chapitre ont été publiés dans [45]. Dans la cinquième section, nous donnerons des conditions d'existence et d'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique d'une équation différentielle à arguments constants par morceaux dans le cas linéaire Eq. (5) et non linéaire Eq. (6) en dimension infinie.

Le quatrième chapitre est composé de deux sections. Dans la première section, nous définirons grâce à la théorie des semi-groupes, la "mild solution" de l'équations (7). Ainsi nous traiterons d'un problème d'évolution dans le cadre d'une équation différentielle à arguments constants par morceaux. Nous donnerons des conditions d'existence de mild solutions presque automorphes de l'équation (8). Dans la deuxième section, des conditions d'existence de mild solutions compact presque automorphes de l'équation (8) seront considérées. Les résultats relatifs aux équations différentielles (7) et (8) seront obtenus en dimension infinie, dans le cas d'un opérateur linéaire A non borné générateur infinitésimal d'un semi-groupe.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espaces de Banach et opérateurs linéaires

1.1.1 Espaces de Banach

Nous noterons par $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres réels et complexes, respectivement. Nous considérons un espace vectoriel normé $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme sera noté $\|\cdot\|$.

Définition 1 Une suite de vecteurs (x_n) dans $\mathbb{X}$ est de Cauchy si pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$, pour tout $n, m > N$.

Proposition 1 Si (x_n) est une suite de Cauchy dans un espace normé $\mathbb{X}$, la suite $(\|x_n\|)$ est convergente.

Définition 2 Un espace de Banach $\mathbb{X}$ est un espace normé complet, c'est-à-dire, un espace normé tel que toute suite de Cauchy de $\mathbb{X}$ converge dans $\mathbb{X}$.

Exemple 1 Soit $BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'espace des fonctions continues et bornées définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{X}$ muni de la norme sup

$$\|f\| := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|, \quad \forall f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

Alors $BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est un espace de Banach.

Théorème 1 (Théorème du point fixe de Banach-Picard) Soit $\mathbb{X}$ un espace métrique et f une application contractante de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$. Il existe un point fixe unique x^* de f dans $\mathbb{X}$, c'est-à-dire tel que $f(x^*) = x^*$.

1.1.2 Opérateurs linéaires

2.1.2.1 Applications et opérateurs linéaires

Définition 3 Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach. Une application $A : D(A) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est un opérateur linéaire si $D(A)$ est un s.e.v de $\mathbb{X}$ et A est linéaire. $D(A)$ est appelé le domaine de A et l'image de cet opérateur sera notée $R(A)$.

Exemple 2 Soit A l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ où

$$D(A) = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{X}) : \frac{d}{dt} \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})\}.$$

Nous noterons par $L(\mathbb{X})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{X}$. $L(\mathbb{X})$ est une algèbre, le produit interne est la composition d'application, l'élément neutre est I l'application identité. Un élément T de $L(\mathbb{X})$ est inversible, s'il existe une application linéaire S telle que $T \circ S = S \circ T = I$. Ainsi, si $T \in L(\mathbb{X})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) T est inversible ;
- ii) T est bijectif et T^{-1} est continu ;
- iii) $\text{Ker}T = \{0\}$, $\text{Im}T = \mathbb{X}$ et T^{-1} est continu.

Proposition 2 L'ensemble des éléments inversibles de $L(\mathbb{X})$ est un ouvert de $L(\mathbb{X})$ qui contient I .

Définition 4 Soit A un opérateur linéaire sur un espace de Banach $\mathbb{X}$ avec $D(A) = \mathbb{X}$. A est un opérateur linéaire borné sur $\mathbb{X}$ si il existe une constante positive c telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}.$$

Définition 5 Un opérateur linéaire $A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est continu au point $x \in \mathbb{X}$ si pour toute suite $(x_n) \subset \mathbb{X}$ tel que $x_n \rightarrow x$, nous avons $Ax_n \rightarrow Ax$, c'est à dire, $\|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0$ quand $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Définition 6 Un opérateur linéaire $A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est continu sur $\mathbb{X}$ si et seulement si il est continu pour tout point $x \in \mathbb{X}$.

Remarque 1 A est un opérateur linéaire borné si et seulement si A est continu.

Définition 7 Soit A un opérateur linéaire borné. Le nombre suivant

$$\|A\| := \inf\{c \in \mathbb{R} : \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall x \in \mathbb{X}\}$$

est appelé la norme de A .

Définition 8 Un opérateur linéaire A défini sur $D(A) \subset \mathbb{X}$ à valeurs dans $\mathbb{X}$ est fermé si son graphe $\{(x, Ax), x \in D(A)\}$ est fermé dans $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$.

2.1.2.2 Théorie spectrale

Définition 9 Soit $T \in L(\mathbb{X})$. On appelle valeur spectrale de T tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I - T$ ne soit pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de T est appelé le spectre de T et noté $\sigma(T)$. Un élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas valeur spectrale de T est appelé valeur résolvante de T . L'ensemble des valeurs résolvantes de T est noté $\rho(T)$ et appelé ensemble résolvant de T . Ainsi, $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$.

Notation : Si $T \in L(\mathbb{X})$ et $\lambda \in \rho(T)$, on note

$$R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

Théorème 2 L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est ouvert dans $\mathbb{K}$, tandis que le spectre est fermé. La résolvante $R(\lambda, T)$ est holomorphe dans $\rho(T)$.

Définition 10 Une valeur propre de T est un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I - T$ ne soit pas injectif.

Remarque 2 Toute valeur propre de T est valeur spectrale.

1.1.3 Semi-groupe fortement continu

Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach.

Définition 11 Une famille $(T(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach $\mathbb{X}$ est un semi-groupe fortement continu (ou C_0 -semi-groupe) si

- i) $T(0) = I$,
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$,
- iii) $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur $\mathbb{X}$ i.e pour chaque $x \in \mathbb{X}$, la fonction

$$t \mapsto T(t)x$$

est continue de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{X}$.

Le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t \geq 0}$ est défini par :

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ \varphi \in C : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe} \right\} \\ A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ pour } \varphi \in D(A) \end{cases}$$

Exemple 3 Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach $\mathbb{X}$. Alors $(e^{tA})_{t \geq 0}$ défini par la formule

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach $\mathbb{X}$. Son générateur infinitésimal est l'opérateur A avec $D(A) = \mathbb{X}$.

Théorème 3 Soit $\omega \in \mathbb{R}$, $N \geq 1$ deux constantes et A un opérateur linéaire sur un espace de Banach $\mathbb{X}$. Les conditions suivantes sont équivalentes,

i) A est le générateur d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathbb{X}$ vérifiant

$$|T(t)| \leq Ne^{\omega t} \text{ pour } t \geq 0.$$

ii) A est à domaine dense et pour chaque $\lambda > \omega$ on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\sup\{(\lambda - \omega)^{-n} |(\lambda I - A)^{-n}| : n \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda > \omega\} < N.$$

1.2 Fonctions presque-périodiques

Définition 12 (Voir [16]) Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$$

est dite presque périodique si

i) f est continue,

ii) Pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un $l(\epsilon) > 0$, tel que tout intervalle I de longueur $l(\epsilon)$ contient un nombre τ avec la propriété que :

$$\|f(t + \tau) - f(t)\| < \epsilon, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Les nombres τ sont appelés des ϵ presque-périodes.

Exemple 4 *Toute fonction continue et T -périodique est une fonction presque-périodique.*

Exemple 5 *(Voir [63]) La fonction*

$$f(t) = a \sin t + a \sin \sqrt{2}t, \quad a \in \mathbb{X}, \quad a \neq 0,$$

est presque périodique mais n'est pas périodique.

Quelques Propriétés

P.1) Toute fonction presque-périodique est bornée.

P.2) Toute fonction presque-périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

P.3) Principe de reconstitution (à ∞ et $-\infty$). Il existe des suites $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $t_n \rightarrow \infty$ et $t'_n \rightarrow -\infty$ telle que $(f(t+t_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(f(t+t'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f(t)$.

P.4) L'ensemble des fonctions presque-périodiques est invariant par translation ; il l'est également par convolution par des fonctions de L^1 .

La caractérisation suivante est due à Bochner.

Caractérisation de Bochner

Définition 13 *(Voir [14]) Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach muni d'une norme notée $\|\cdot\|$,*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}.$$

On dit que f est presque-périodique si elle vérifie les deux conditions suivantes :

i) f est continue,

ii) de toute suite $(h'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, on peut extraire une sous-suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(t+h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Quelques propriétés déduites de la caractérisation de Bochner.

P.5) L'image d'une fonction presque-périodique à valeur dans un espace de dimension quelconque est relativement compacte.

P.6) L'ensemble des translatées d'une fonction presque-périodique f i.e.

$$\{s \rightarrow f(t + s), t \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact quand $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

P.7) L'espace des fonctions presque-périodiques est complet pour la norme sup.

P.8) La somme et le produit de fonctions presque-périodiques sont presque-périodiques.

P.9) La composée de deux fonctions presque-périodiques est une fonction presque-périodique.

10) Si f est une fonction presque-périodique et si g est une fonction uniformément continue alors la composée $g \circ f$ est une fonction presque-périodique.

Deuxième Caractérisation de Bochner

Théorème 4 (voir [14]) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ une fonction continue. Alors, f est presque-périodique si pour toute suite $((\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}})$ $\sigma_n, \tau_n \in \mathbb{R}$ il existe une sous-suite $((\sigma'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tau'_n)_{n \in \mathbb{N}})$ telles que $(f(t + \sigma'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $g(t)$ et $(f(t + \sigma'_n + \tau'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g(t + \tau'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement vers la même fonction $h(t)$.

1.3 Fonctions et suites presque automorphes

1.3.1 Fonctions presque automorphes

Définition 14 (voir [78]) Une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est presque automorphe si pour toute suite à valeur réelle (s'_n) , il existe une sous-suite (s_n) telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n - s_m) = f(t) \quad (1.1)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

La limite dans (1.1) signifie que

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + s_n) \quad (1.2)$$

est bien définie pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t - s_n)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

Si la limite est uniforme sur chaque compacte $K \subset \mathbb{R}$, nous disons que f est compacte presque automorphe.

Exemple 6 (Voir [76]) La fonction

$$f(t) := \frac{1}{2 + \cos t + \cos \sqrt{2}t}$$

est presque automorphe, mais n'est pas uniformément continue. Par conséquent cette fonction n'est pas presque périodique.

Exemple 7 (Voir [91]) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) := \frac{2 + e^{it} + e^{i\sqrt{2}t}}{|2 + e^{it} + e^{i\sqrt{2}t}|}$$

est presque automorphe, mais n'est pas presque périodique.

Théorème 5 (Voir [75], Théorèmes 2.1.3 et 2.1.4) Supposons que f, f_1 et f_2 sont presque automorphes et λ est un scalaire. Alors les assertions suivantes sont vraies

- i) λf et $f_1 + f_2$ sont presque automorphes,
- ii) $f_a(t) = f(t + a)$, $t \in \mathbb{R}$, est presque automorphe pour tout $a \in \mathbb{R}$
- iii) $\bar{f}(t) := f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, est presque automorphe,
- iv) L'image R_f de f est précompacte, donc f est bornée.

Remarque 3 $AA(\mathbb{X})$ l'espace des fonctions presque automorphes muni de la norme sup

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$$

est un espace de Banach. Nous noterons $KAA\mathbb{X}$, l'espace des fonctions compactes presque automorphes. Alors nous avons

$$AP(\mathbb{X}) \subset KAA(\mathbb{X}) \subset AA(\mathbb{X}) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$$

où $AP\mathbb{X}$ est l'espace des fonctions presque périodiques et $BC(\mathbb{R}\mathbb{X})$ est l'espace des fonctions bornées et continues.

Théorème 6 Si $\{f_n\}$ est une suite de fonctions presque automorphes tel que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}$, alors f est presque automorphe.

Proposition 3 Nous définissons $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ par $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ où $f \in AA(\mathbb{X})$. Alors $F \in AA(\mathbb{X})$ si $R_F = \{F(t) | t \in \mathbb{R}\}$ est précompacte.

Théorème 7 Si $f \in AA(\mathbb{X})$ et sa dérivée f' existe et est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f' \in AA(\mathbb{X})$.

Théorème 8 Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ une fonction presque automorphe en t pour tout $x \in \mathbb{X}$ et vérifie une condition lipschitzienne en x uniformément pour $t \in \mathbb{R}$. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ une fonction presque automorphe. Alors la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ définie par $F(t) = f(t, \phi(t))$ est presque automorphe.

1.3.2 Fonctions pseudo presque automorphes

Définition 15 Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach .

Une fonction bornée et continue à valeur moyenne volatile est définie comme une fonction qui appartient à l'ensemble

$$AA_0(\mathbb{X}) = \left\{ \phi \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X}) : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|\phi(s)\| ds = 0 \right\}.$$

Définition 16 Une application $f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est pseudo presque automorphe (pseudo compact presque automorphe) si $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in AA(\mathbb{X})$ (respectivement $f_1 \in KAA(\mathbb{X})$) et $f_2 \in AA_0(\mathbb{X})$.

La fonction f_2 est appelée la partie ergodique de f . L'ensemble des fonctions pseudo presque automorphes sera noté par $PAA(\mathbb{X})$.

Corollaire 1 (Voir [107]) La décomposition de fonctions pseudo presque automorphes est unique.

Lemme 1 (Voir [98]) Si $x(\cdot) \in PAA(\mathbb{X})$ alors $x(\cdot - h) \in PAA(\mathbb{X})$, où $h \geq 0$ est une constante fixée.

Théorème 9 (Voir [100]) $(PAA(\mathbb{X}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Proposition 4 (Voir [99] Théorème 2.2) Soient $f, f_1, f_2 \in PAA(\mathbb{X})$. Alors nous avons

- i) $\lambda f \in PAA(\mathbb{X})$, pour tout scalaire λ .
- ii) $f_1 + f_2 \in PAA(\mathbb{X})$
- iii) $g(t) := f(-t) \in PAA(\mathbb{X})$
- iv) $f_a(t) := f(t + a) \in PAA(\mathbb{X})$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- v) $PAA(\mathbb{X})$ est un espace de Banach pour la norme sup.

1.3.3 Suites presque automorphes

Comme pour les fonctions, la presque automorphie des suites a été définie (Voir [89]). $l^\infty(\mathbb{X})$ est l'espace des suites bornées dans un espace de Banach $\mathbb{X}$ muni de la norme sup, i.e., $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{X})$, alors

$$\|x\| := \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|.$$

Définition 17 Une suite $x \in l^\infty(\mathbb{X})$ est presque automorphe si pour toute suite d'entiers (k'_n) , il existe une sous-suite (k_n) telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p+k_n-k_m} = x_p \quad (1.3)$$

pour chaque $p \in \mathbb{Z}$. La limite dans (1.3) signifie que

$$y(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(p + s_n) \quad (1.4)$$

est bien définie pour chaque $p \in \mathbb{Z}$ et

$$x(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(p - s_n)$$

pour chaque $p \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des suites presque automorphes $\mathbb{X}$ est un sous-espace fermé de $l^\infty(\mathbb{X})$ que nous noterons $aa\mathbb{X}$. L'image d'une suite presque automorphe est précompacte. Pour chaque suite bornée $g := \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{X}$, $S(k)g$ est la k -translation de g dans $l^\infty(\mathbb{X})$, i.e., $(S(k)g)_n = g_{n+k}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, et $S = S(1)$.

1.3.4 Théorème de Kadets

Nous utiliserons comme notation standard c_0 pour l'espace de Banach des suites numériques $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, muni de la norme sup.

Le problème considéré est le suivant : L'intégrale d'une fonction presque automorphe est elle presque automorphe ? Le contre exemple de [60] montre que des conditions doivent être imposées sur l'espace $\mathbb{X}$.

Exemple 8 Considérons la fonction $f(t)$ à valeur dans c_0 définie par

$$f(t) = \left\{ \frac{1}{n} \cos\left(\frac{t}{n}\right) \right\}_n, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'intégrale $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ de $f(t)$ est $F(t) = \left\{ \sin\left(\frac{t}{n}\right) \right\}_{n=1}^\infty$. Évidemment, f est presque périodique (par conséquent presque automorphe), et F est bornée. Cependant, l'image de F , (voir [60], p81-82), n'est pas précompacte, donc F n'est pas presque automorphe.

Nous allons énoncer maintenant le théorème de Kadets.

Théorème 10 (Voir [60] Théorème 2, p.86) *Supposons que f est une fonction presque périodique et F est bornée. Alors F est presque périodique si et seulement si $\mathbb{X}$ ne contient pas de sous-espace isomorphe à c_0 .*

Une extension du théorème de Kadets aux fonctions presque automorphes a été donnée dans [8].

Lemme 2 (Voir [89], lemme 2.8) *Nous supposons que $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{X}$, nous supposons aussi que $\mathbb{X}$ ne contient pas de sous espace isomorphe à c_0 et considérons l'équation aux différences*

$$x - Sx = y$$

où y est presque automorphe. Alors la suite x est presque automorphe.

Remarque 4 *Chaque espace de dimension finie ne contient pas de sous espace isomorphe à c_0 .*

1.4 Fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques

Soit $\mathbb{X}$ un espace de Banach. $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ est l'espace des fonctions bornées et continues définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{X}$; muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$, c'est un espace de Banach. $C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ est l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{X}$ tel que $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$; c'est un sous-espace de Banach de $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Soit ω un réel strictement positif. $P_\omega(\mathbb{X})$ est l'espace des fonctions continues ω -périodiques définies sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{X}$. Muni de la norme sup, c'est un espace de Banach.

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ est l'espace des applications linéaires continues définies sur $\mathbb{X}$ à valeur dans $\mathbb{Y}$. Si $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, nous utilisons la notation $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ pour $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Nous considérerons cet ensemble

$$C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) := \{f \in BC(\mathbb{X}) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \|f(t)\| = 0\}.$$

Définition 18 *Soit $f \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ et $\omega > 0$. f est asymptotiquement ω -périodique si $f = g + h$ où $g \in P_\omega(\mathbb{X})$ et $h \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.*

Nous noterons par $AP_\omega(\mathbb{X})$ l'ensemble des fonctions asymptotiquement ω -périodiques définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{X}$. $(AP_\omega(\mathbb{X}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Remarquons que nous avons

$$AP_\omega(\mathbb{X}) = P_\omega(\mathbb{X}) \oplus C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}).$$

Définition 19 *Une fonction $f \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ est S-asymptotiquement ω -périodique si $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t + \omega) - f(t)) = 0$. Dans ce cas ω est une période asymptotique de f .*

Nous noterons par $SAP_\omega(\mathbb{X})$, l'ensemble des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{X}$. Alors nous avons

$$AP_\omega(\mathbb{X}) \subset SAP_\omega(\mathbb{X}).$$

L'inclusion est stricte. En effet la fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow c_0$ où $c_0 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ munie de la norme $\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$, et $(f(t) = \frac{2nt^2}{t^2 + n^2})_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $f \in SAP_\omega(\mathbb{X})$ mais $f \notin AP_\omega(\mathbb{X})$ (voir [53] Exemple 3.1).

Le résultat suivant a été obtenu par Henriquez-Pierri-Tàboas ; Proposition 3.5 dans [53].

Théorème 11 *Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est un espace de Banach.*

Corollaire 2 *(voir [13], Corollaire 3.10 p.5) Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux espaces de Banach, et soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Si $f \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, alors $Af := [t \rightarrow Af(t)] \in SAP_\omega(\mathbb{Y})$.*

Maintenant nous considérons les fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques avec paramètre.

Définition 20 *(voir [53]) Une fonction continue $f : [0, \infty[\times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est uniformément S-asymptotiquement ω -périodique sur des ensembles bornés si pour chaque ensemble borné $K \subset \mathbb{X}$, l'ensemble $\{f(t, x) : t \geq 0, x \in K\}$ est borné et $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t, x) - f(t + \omega, x)) = 0$ uniformément pour $x \in K$.*

Définition 21 *(voir [53]) Une fonction continue $f : [0, \infty[\times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est asymptotiquement uniformément continue sur des ensembles bornés si pour chaque $\epsilon > 0$ et chaque ensemble borné $K \subset \mathbb{X}$, il existe $L_{\epsilon, K} > 0$ et $\delta_{\epsilon, K} > 0$ tel que $\|f(t, x) - f(t, y)\| < \epsilon$ pour tout $t \geq L_{\epsilon, K}$ et tout $x, y \in K$ avec $\|x - y\| < \delta_{\epsilon, K}$.*

Théorème 12 (voir [53]) Soit $f : [0, \infty[\times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ une fonction uniformément S -asymptotiquement ω -périodique sur des ensembles bornés et asymptotiquement uniformément continue sur des ensembles bornés. Soit $u : [0, \infty[$ une fonction S -asymptotiquement ω -périodique. Alors l'opérateur de Nemytskii $\phi(\cdot) := f(\cdot, u(\cdot))$ est une fonction S -asymptotiquement ω -périodique.

1.5 Théorie Spectrale des fonctions et des suites bornées

Définition 22 Soit u une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{X}$, l'ensemble des réels ξ pour lesquels la transformée de Carleman

$$\hat{x}(\lambda) := \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t) dt, & \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \\ - \int_0^\infty e^{\lambda t} u(-t) dt, & \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \end{cases}$$

n'a pas d'extension holomorphe aux voisinages de $i\xi$ dans le plan complexe $\mathbb{C}$, est appelé le spectre de Carleman de u et est noté $sp(u)$.

Proposition 5 Soient $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ des fonctions mesurables et bornées, et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction lisse qui décroît plus rapidement que les fonctions polynômes. Alors

- i) $sp(u)$ est fermé
- ii) $sp(u + v) \subset sp(u) \cup sp(v)$
- iii) $sp(\varphi * u) \supset sp(u) \cap \operatorname{supp}(\tilde{\varphi})$
- iv) $sp(u - \varphi * u) \subset sp(u) \cap \operatorname{supp}(1 - \tilde{\varphi})$

Pour chaque suite bornée $g := \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{X}$, $S(k)g$ est la k -translation de g dans $l^\infty(\mathbb{X})$, i.e., $(S(k)g)_n = g_{n+k}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, et $S = S(1)$.

Définition 23 Soit $\mathcal{A}$ un sous espace fermé de $l^\infty(\mathbb{X})$. Nous disons que $\mathcal{A}$ vérifie la condition H si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) Chaque suite constante est dans $\mathcal{A}$.
- ii) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$ et $q \in \Gamma$ (Le cercle unité), alors la suite $\{q^n x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dans $\mathcal{A}$.

- iii) Si B est un opérateur linéaire borné dans $\mathbb{X}$, alors $\{Bx_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$ quand $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}$.
- iv) $S\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Comme exemple de sous espace de $l^\infty(\mathbb{X})$ qui vérifie la Condition H, nous pouvons prendre $aa(\mathbb{X})$ qui est un sous espace fermé de $l^\infty(\mathbb{X})$.

Dans la suite nous supposons que $\mathcal{A}$ est un sous espace fermé de $l^\infty(\mathbb{X})$ qui vérifie la Condition H. Considérons l'espace quotient $l^\infty(\mathbb{X})/\mathcal{A}$. Nous définissons l'opérateur $\tilde{S}$ par $\tilde{S}(x + \mathcal{A}) = Sx + \mathcal{A}$, $\forall x \in l^\infty(\mathbb{X})$. Soit π la projection canonique définie sur $l^\infty(\mathbb{X})$ à valeur dans $l^\infty(\mathbb{X})/\mathcal{A}$: nous avons $\pi x = \tilde{x}$. L'ensemble $\mathcal{M}_{\tilde{x}}$ désigne l'adhérence dans $l^\infty(\mathbb{X})/\mathcal{A}$ du sous-ensemble $\{\hat{S}(n)\tilde{x}, n \in \mathbb{Z}\}$.

Définition 24 *Le spectre uniforme de $x \in l^\infty(\mathbb{X})$ par rapport à $\mathcal{A}$, noté par $sp_{\mathcal{A}}(x)$, est défini par*

$$\sigma(\tilde{S}|_{\mathcal{M}_{\tilde{x}}})$$

On peut considérer que $sp_{\mathcal{A}}(x)$ est une partie du cercle unité Γ .

Lemme 3 *(Voir [90], lemme 2.4) Soit $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{X})$ et soit $\mathcal{A}$ un sous-espace de $l^\infty(\mathbb{X})$ qui vérifie la condition H. Alors $sp_{\mathcal{A}}(x)$ est l'ensemble des points z_0 du cercle unité Γ tel que la transformée de Carleman*

$$\hat{\tilde{x}}(\lambda) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \tilde{S}(n)\tilde{x}, & \forall |\lambda| > 1, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \tilde{S}(-n)\tilde{x}, & \forall |\lambda| < 1 \end{cases}$$

n'a pas d'extension holomorphe sur aucun voisinage de z_0 .

Considérons cette équation

$$x_{n+1} = Bx_n + f_n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$

où B est un opérateur linéaire borné. Nous noterons par $\sigma_{\Gamma}(B)$ la partie du spectre de B sur le cercle unité Γ du plan complexe.

Lemme 4 *(voir [89]) Soit $x \in l^\infty(\mathbb{X})$ une solution de l'équation (1.5) et soit $f \in \mathcal{A}$. Alors*

$$sp_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\Gamma}(B).$$

Preuve Tout d'abord montrons que l'opérateur $B : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ a le même spectre que l'opérateur $B_0 : l^\infty(\mathbb{X}) \mapsto l^\infty(\mathbb{X})$ qui est la restriction de B à $l^\infty(\mathbb{X})$. Soit λ une valeur résolvante de l'opérateur B défini sur $\mathbb{X}$. Pour tout $x \in \mathbb{X}$, il existe un opérateur C défini sur $\mathbb{X}$ telle que

$$(\lambda I - B) \circ C(x) = x.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_n \in \mathbb{X}$. Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$(\lambda I - B) \circ C(x_n) = x_n.$$

λ est alors valeur résolvante de l'opérateur B_0 définie sur $l^\infty(\mathbb{X})$. Soit λ une valeur résolvante de l'opérateur B_0 défini sur $l^\infty(\mathbb{X})$. Soit $y \in \mathbb{X}$. Posons $y_n = y$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe une unique suite $x_n \in l^\infty(\mathbb{X})$ tel que $(\lambda I - B_0)(x_n) = y_n$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$ que $(\lambda I - B_0)(x_n) = y$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $x \in \mathbb{X}$ tel que $x_n = x$. Pour $p \neq q$, posons $x'_p = x_q$ et $x'_q = x_p$. Alors $(\lambda I - B_0)(x_n) = y$, $(\lambda I - B_0)(x'_n) = y$ et $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Par conséquent, il existe $x \in \mathbb{X}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_n = x$. Nous déduisons donc que pour tout $y \in \mathbb{X}$, il existe un unique $x \in \mathbb{X}$ tel que

$$(\lambda I - B_0)(x) = y.$$

Par conséquent λ est alors valeur résolvante de l'opérateur B définie sur $\mathbb{X}$. Nous avons montré que l'opérateur B défini sur $\mathbb{X}$ a le même résolvant que l'opérateur B_0 défini sur $l^\infty(\mathbb{X})$. Par conséquent ils ont le même spectre. Nous noterons B l'opérateur défini sur $l^\infty(\mathbb{X})$.

L'opérateur linéaire borné B induit un opérateur linéaire borné $\tilde{B}$ défini sur l'espace quotient $l^\infty(\mathbb{X})/\mathcal{A}$. En effet, si $\tilde{x} = \tilde{y}$ alors $\tilde{x} - \tilde{y} = \tilde{0}$ et $x - y \in \mathcal{A}$. Puisque B est borné et que $\mathcal{A}$ vérifie la condition H, $B(x - y) \in \mathcal{A}$ et $\tilde{B}\tilde{x} = \tilde{B}\tilde{y}$. Soit une suite $\tilde{x}_n \in l^\infty(\mathbb{X})/\mathcal{A}$ tel que $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{0}$. Il existe alors une suite $x_n \in l^\infty(\mathbb{X})$ et $x \in \mathcal{A}$ tel que $x_n \rightarrow x$. B étant un opérateur borné, $Bx_n \rightarrow Bx$. Puisque $\mathcal{A}$ vérifie la condition H et que B est borné, $Bx \in \mathcal{A}$ et $\tilde{B}\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{0}$.

En considérant l'équation (1.5), nous obtenons

$$\tilde{S}\tilde{x} = \tilde{B}\tilde{x}$$

car $f \in \mathcal{A}$. En considérant maintenant la transformée de Carleman, nous obtenons

$$\widehat{\tilde{S}\tilde{x}}(\lambda) = \tilde{B}\hat{x}(\lambda).$$

Nous allons montrer que

$$\widehat{\tilde{S}\tilde{x}}(\lambda) = \lambda\hat{x}(\lambda) - \tilde{x}.$$

Pour $|\lambda| > 1$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\tilde{S}\tilde{x}}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \tilde{S}(n) \tilde{S}\tilde{x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \tilde{S}(n+1) \tilde{x} \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)-1} \tilde{S}(n+1) \tilde{x} \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \tilde{S}(n) \tilde{x} - \tilde{x} \\
&= \lambda \hat{\tilde{x}}(\lambda) - \tilde{x}.
\end{aligned}$$

Pour $|\lambda| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\tilde{S}\tilde{x}}(\lambda) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \tilde{S}(-n) \tilde{S}\tilde{x} \\
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \tilde{S}(-n+1) \tilde{x} \\
&= -\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{(n-1)-1} \tilde{S}(-n+1) \tilde{x} \\
&= -\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \tilde{S}(-n) \tilde{x} - \tilde{x} \\
&= \lambda \hat{\tilde{x}}(\lambda) - \tilde{x}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lambda \hat{\tilde{x}}(\lambda) - \tilde{x} = \tilde{B} \hat{\tilde{x}}(\lambda)$$

et

$$\begin{aligned}
\lambda \hat{\tilde{x}}(\lambda) - \tilde{B} \hat{\tilde{x}}(\lambda) &= \tilde{x}, \\
(\lambda - \tilde{B}) \hat{\tilde{x}}(\lambda) &= \tilde{x}.
\end{aligned}$$

Soit $\eta_0 \in \rho(\tilde{B})$. Pour η suffisamment proche de η_0 tel que $\eta \notin i\mathbb{R}$,

$$\hat{\tilde{x}}(\eta) = (\eta - \tilde{B})^{-1} \tilde{x}.$$

Or le résolvant $(\eta - \tilde{B})^{-1}$ est holomorphe. Par conséquent $\hat{\tilde{x}}(\eta)$ peut être étendu holomorphiquement à un voisinage de η_0 . Par contraposée, nous déduisons

que si $\hat{x}(\eta)$ ne peut être étendu holomorphiquement à un voisinage de η_0 , alors $\eta_0 \in \sigma(\tilde{B})$. Nous avons donc montré que

$$sp_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_{\Gamma}(\tilde{B}).$$

Maintenant afin de terminer la preuve, il suffit de montrer que $\sigma(\tilde{B}) \subset \sigma(B)$. Soit $z_0 \in \rho(B)$. Par définition, pour chaque $y \in l^{\infty}(\mathbb{X})$, il existe un unique $w \in l^{\infty}(\mathbb{X})$ tel que $z_0 w_n - B w_n = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ceci nous permet de déduire que si $\tilde{y} \in l^{\infty}(\mathbb{X})/\mathcal{A}$, il existe une solution $\tilde{w} \in l^{\infty}(\mathbb{X})/\mathcal{A}$ tel que

$$z_0 \tilde{w} - \tilde{B} \tilde{w} = \tilde{y}.$$

Montrons l'injectivité. Soit $\tilde{w}$ et $\tilde{v}$ tels que $z_0 \tilde{w} - \tilde{B} \tilde{w} = z_0 \tilde{v} - \tilde{B} \tilde{v}$. Nous obtenons donc que $z_0(\tilde{w} - \tilde{v}) - \tilde{B}(\tilde{w} - \tilde{v}) = \tilde{0}$. Par conséquent il existe $x \in \mathcal{A}$, tel que $(z_0 - B)(w - v) = x$. Nous déduisons alors que

$$w - v = (z_0 - B)^{-1}(x).$$

En remarquant que $\|z_0 - B\| \leq \|z_0\| + \|B\|$, nous déduisons que $z_0 - B$ est borné. $z_0 - B$ étant borné et bijectif, son inverse $(z_0 - B)^{-1}$ est alors également borné. $(z_0 - B)^{-1}$ vérifie donc la condition H. Par conséquent $(z_0 - B)^{-1}(x) \in \mathcal{A}$ et $w - v \in \mathcal{A}$. Nous obtenons donc que $\tilde{w} = \tilde{v}$. $\square$

Lemme 5 (Voir [89]) *Soit $\mathcal{A}$, l'espace des suites presque automorphes dans $\mathbb{X}$, et soit $x \in l^{\infty}(\mathbb{X})$ tel que $sp_{\mathcal{A}}(x)$ est dénombrable. Supposons que $\mathbb{X}$ ne contient pas de sous-espace isomorphe à c_0 . Alors $x \in \mathcal{A}$.*

Preuve Supposons que $sp_{\mathcal{A}}(x)$ n'est pas vide. Puisque $\tilde{S}|_{\mathcal{M}_{\hat{x}}}$ est une isométrie sur $\mathcal{M}_{\hat{x}}$ et que $sp_{\mathcal{A}}(x) = \sigma(\tilde{S}|_{\mathcal{M}_{\hat{x}}})$ est dénombrable, par le théorème de Gelfand (voir [7], [8], [9]) nous déduisons qu'il existe un point z_0 dans le spectre qui est valeur propre de $\tilde{S}|_{\mathcal{M}_{\hat{x}}}$. Il existe donc un élément $\tilde{y} \in \mathcal{M}_{\hat{x}}$ tel que $z_0 \tilde{y} = \tilde{S} \tilde{y}$. Montrons que $V_{\lambda} : l^{\infty}(\mathbb{X}) \mapsto l^{\infty}(\mathbb{X})$ où

$$V_{\lambda} x_n = \lambda^n x_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lambda \in \Gamma$$

est bijectif. Soit $y_n \in l^{\infty}$. On a $V_{\lambda}(\lambda^{-n} y_n) = y_n$. V_{λ} est donc surjectif. Supposons que $\lambda^n x(n) = \lambda^n y(n)$. En multipliant par λ^{-n} , nous obtenons que $x_n = y_n$. V_{λ} est donc injectif. Nous remarquons que si $x_n \in \mathcal{A}$, $V_{\lambda}(x_n) \in \mathcal{A}$, car $\mathcal{A}$ vérifie la condition H. Nous remarquons aussi que $V_{\lambda}(V_{\lambda^{-1}}(x_n)) = x_n$. Par conséquent $V_{\lambda}^{-1} = V_{\lambda^{-1}}$. Montrons que

$$V_{\lambda} S V_{\lambda}^{-1} = \lambda^{-1} S.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
V_\lambda S V_\lambda^{-1}(x_n) &= V_\lambda S \lambda^{-n} x_n \\
&= V_\lambda \lambda^{-(n+1)} x_{n+1} \\
&= \lambda^n \lambda^{-(n+1)} x_{n+1} \\
&= \lambda^{-1} x_{n+1} \\
&= \lambda^{-1} S x_n.
\end{aligned}$$

Alors, nous obtenons $z_0 x - Sx = z_0(x - z_0^{-1} Sx) = z_0(x - V_{z_0} S V_{z_0}^{-1} x)$. Si $z_0 x - Sx \in \mathcal{A}$, alors $z_0(x - V_{z_0} S V_{z_0}^{-1} x) \in \mathcal{A}$ et $x - V_{z_0} S V_{z_0}^{-1} x \in \mathcal{A}$. Puisque $V_{z_0}^{-1}$ est un isomorphisme qui laisse invariant $\mathcal{A}$, nous déduisons que $V_{z_0}^{-1}(x - V_{z_0} S V_{z_0}^{-1} x) \in \mathcal{A}$ et $V_{z_0}^{-1} x - S V_{z_0}^{-1} x \in \mathcal{A}$. En appliquant le lemme (2), nous déduisons que $V_{z_0}^{-1} x \in \mathcal{A}$. Puisque V_{z_0} est un isomorphisme qui laisse invariant $\mathcal{A}$, nous déduisons que $x \in \mathcal{A}$.

Si $sp_{\mathcal{A}}(x)$ est vide voir [89] lemme 2.13. $\square$

Théorème 13 (Voir [90], théorème 2.19) *Soit B un opérateur linéaire borné dans $\mathbb{X}$ tel que $\sigma_\Gamma(B)$ est dénombrable. Nous supposons que $\mathbb{X}$ ne contient pas de sous espace isomorphe à c_0 . Nous supposons aussi que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite bornée qui vérifie l'équation*

$$x_{n+1} = Bx_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dans $aa\mathbb{X}$. Alors $\{x_n\}$ est presque automorphe.

Preuve Si $\sigma_\Gamma(B)$ est dénombrable, $sp_{\mathcal{A}}(x)$ est dénombrable car

$$sp_{\mathcal{A}}(x) \subset \sigma_\Gamma(B).$$

Nous vérifions donc les conséquences du lemme précédent. Par conséquent la suite $\{x_n\}$ est presque automorphe. $\square$

Remarque 5 *En dimension finie, l'espace de Banach $\mathbb{X}$ ne contient pas de sous espace isomorphe à c_0 . $\sigma_\Gamma(B)$ est dénombrable. Par conséquent toute suite bornée qui vérifie l'équation*

$$x_{n+1} = Bx_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dans $aa\mathbb{X}$ est presque automorphe.

Chapitre 2

Solutions presque automorphes pour une équation différentielle à arguments constants par morceaux

Introduction

L'étude des équations différentielles à arguments constants par morceaux est un sujet important car ces équations ont la structure de système dynamique sur des intervalles de longueur constante. Par conséquent, ces équations ont les propriétés d'équations différentielles et d'équations aux différences. De nombreux articles traitent de ce type d'équation. Le premier papier considérant ce sujet est l'article de Shah et Wiener [85] en 1983. En 1984, Cooke et Wiener [25] étudient ces équations avec retard. Cependant, c'est seulement en 2006 que la presque automorphie de ce type d'équation a été étudiée. Dans leur papier [90], en utilisant la théorie spectrale, N'Guyen Van Minh et Tran Tat Dat donnent des conditions afin que chaque solution bornée de l'équation

$$x'(t) = Ax([t]) + f(t)$$

soit presque automorphe. Dans cette équation A est un opérateur linéaire borné, f est une fonction presque automorphe définie sur $\mathbb{R}$ et $[\cdot]$ est la partie entière. Il est alors naturel de se demander sous quelles conditions les solutions bornées du cas nonautonome

$$x'(t) = A(t)x([t]) + f(t) \tag{2.1}$$

sont presque automorphes ou pseudo presque automorphes. En considérant le cas où f est une fonction presque automorphe, où $A(t)$ est un opérateur presque automorphe, nous généraliserons le travail de N'Guyen Van Minh et Tran Tat Dat. Nous présenterons un critère de stabilité et illustrerons ces résultats en étudiant l'existence de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions du modèle discret de Leslie. Ces résultats seront obtenus en dimension finie.

2.1 Solutions presque automorphes

Définition 25 Une solution de l'équation (2.1) sur $\mathbb{R}$ est une fonction x qui vérifie les conditions suivantes :

- 1- x est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2- La dérivée x' existe pour tout point $t \in \mathbb{R}$, mais éventuellement n'est dérivable qu'à la droite ou à la gauche du point $[t] \in \mathbb{R}$.
- 3- x vérifie l'équation (2.1) sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 14 Chaque solution de l'équation (2.1) vérifie

$$x(t) = \left(I + \int_{[t]}^t A(s) ds \right) x([t]) + \int_{[t]}^t f(s) ds \quad (2.2)$$

Preuve En considérant l'intégrale de

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1([t]) + \dots + a_{1r}(t)x_r([t]) + f_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r'(t) = a_{r1}(t)x_1([t]) + \dots + a_{rr}(t)x_r([t]) + f_r(t) \end{cases}$$

sur $[n, t[$ avec $t \in [n, n+1[$, nous obtenons

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(n) + \int_n^t a_{11}(s) ds x_1(n) + \dots + \int_n^t a_{1r}(s) ds x_r(n) + \int_n^t f_1(s) ds \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r(t) = x_r(n) + \int_n^t a_{r1}(s) ds x_1(n) + \dots + \int_n^t a_{rr}(s) ds x_r(n) + \int_n^t f_r(s) ds \end{cases}$$

□

Dans ce chapitre, nous donnons tout d'abord des résultats sur la presque automorphie des solutions bornées de l'équation (2.1).

Lemme 6 *Soit x une solution bornée de l'équation (2.1) sur $\mathbb{R}$, $A(t)$ un opérateur presque automorphe et f une fonction presque automorphe. Alors x est presque automorphe si et seulement si la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est presque automorphe.*

Preuve Il est évident que si $x(t)$ est presque automorphe, la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe.

Maintenant supposons que $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe. Nous allons prouver que x est presque automorphe. La preuve se divise en plusieurs étapes.

Étape 1 :

Nous supposons que $\{n'_k\}$ est une suite à valeurs entières. Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ et une suite $\{v(n)\}$ telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(n + n_k) = v(n); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v(n - n_k) = x(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + n_k) = g(t); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(t - n_k) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(t + n_k) = B(t); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B(t - n_k) = A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $[t]$ est la partie entière et $\{t\}$ la partie fractionnaire de t . Alors, définissons

$$V(t) := \left(I + \int_{[t]}^t B(s) ds \right) v([t]) + \int_{[t]}^t g(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comme $A(t)$, $f(t)$ et $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont presque automorphes, il existe des constantes $K, L, J > 0$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|A(t)\| \leq M, \quad \|f(t)\| \leq J, \quad \|x([t])\| \leq L$$

$$\|B(t)\| \leq M, \quad \|g(t)\| \leq J, \quad \|v([t])\| \leq L.$$

Nous avons,

$$\|x(t+n_k) - V(t)\| \leq \left\| \left(I + \int_{[t]+n_k}^{t+n_k} A(s) ds \right) x([t]+n_k) - \left(I + \int_{[t]}^t B(s) ds \right) v([t]) \right\|$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_{[t]+n_k}^{t+n_k} f(s)ds - \int_{[t]}^t g(s)ds \right| \\
& \leq \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\
& + \left| \int_{[t]}^t A(s + n_k)ds \left(x([t] + n_k) - v([t]) \right) \right| \\
& + \left| \left(\int_{[t]}^t A(s + n_k) - B(s)ds \right) v([t]) \right| \\
& + \int_{[t]}^t \|f(s + n_k) - g(s)\|ds \\
& \leq \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\
& + M \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\
& + L \int_{[t]}^t \|A(s + n_k) - B(s)\|ds \\
& + \int_{[t]}^t \|f(s + n_k) - g(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + n_k) - V(t)\| & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\
& + \lim_{k \rightarrow \infty} M \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\
& + J \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[t]}^t \|A(s + n_k) - B(s)\|ds \\
& + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[t]}^t \|f(s + n_k) - g(s)\|ds.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
\|A(s + n_k) - B(s)\| & \leq 2M, \\
\int_{[t]}^t 2Mds & \leq 2M
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|f(s + n_k) - g(s)\| & \leq 2J, \\
\int_{[t]}^t 2Jds & \leq 2J
\end{aligned}$$

, nous déduisons donc que

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + n_k) - V(t)\| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\
&+ \lim_{k \rightarrow \infty} M \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\
&+ J \int_{[t]}^t \lim_{k \rightarrow \infty} \|A(s + n_k) - B(s)\| ds \\
&+ \int_{[t]}^t \lim_{k \rightarrow \infty} \|f(s + n_k) - g(s)\| ds
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + n_k) - V(t)\| = 0.$$

Maintenant montrons que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|V(t - n_k) - x(t)\| = 0$.

Nous avons,

$$\begin{aligned}
\|V(t - n_k) - x(t)\| &\leq \left\| \left(I + \int_{[t] - n_k}^{t - n_k} B(s) ds \right) v([t] - n_k) - \left(I + \int_{[t]}^t A(s) ds \right) x([t]) \right\| \\
&+ \left\| \int_{[t] - n_k}^{t - n_k} g(s) ds - \int_{[t]}^t f(s) ds \right\| \\
&\leq \|v([t] - n_k) - x([t])\| \\
&+ \left\| \int_{[t]}^t B(s - n_k) ds \left(v([t] - n_k) - x([t]) \right) \right\| \\
&+ \left\| \left(\int_{[t]}^t B(s - n_k) - A(s) ds \right) x([t]) \right\| \\
&+ \int_{[t]}^t \|g(s - n_k) - f(s)\| ds \\
&\leq \|v([t] - n_k) - x([t])\| \\
&+ M \|v([t] - n_k) - x([t])\| \\
&+ J \int_{[t]}^t \|B(s - n_k) - A(s)\| ds \\
&+ \int_{[t]}^t \|g(s - n_k) - f(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \|V(t - n_k) - x(t)\| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|v([t] - n_k) - x([t])\| \\
&+ \lim_{k \rightarrow \infty} M \|v([t] - n_k) - x([t])\| \\
&+ J \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[t]}^t \|B(s - n_k) - A(s)\| ds \\
&+ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[t]}^t \|g(s - n_k) - f(s)\| ds.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}
\|B(s - n_k) - A(s)\| &\leq 2M, \\
\int_{[t]}^t 2M ds &\leq 2M
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|g(s - n_k) - f(s)\| &\leq 2J, \\
\int_{[t]}^t 2J ds &\leq 2J
\end{aligned}$$

, nous déduisons donc que

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \|V(t - n_k) - x(t)\| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|v([t] - n_k) - x([t])\| \\
&+ \lim_{k \rightarrow \infty} M \|v([t] - n_k) - x([t])\| \\
&+ J \int_{[t]}^t \lim_{k \rightarrow \infty} \|B(s - n_k) - A(s)\| ds \\
&+ \int_{[t]}^t \lim_{k \rightarrow \infty} \|g(s - n_k) - f(s)\| ds
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|V(t - n_k) - x(t)\| = 0.$$

Étape 2 :

Maintenant nous considérons le cas général où $(s'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas nécessairement une suite à valeurs entières.

Soit $n'_k = [s'_k]$, $t'_k = \{s'_k\}$ pour chaque k . Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ de $\{n'_k\}$ et une suite $\{v(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que (2.3), (2.4) et (2.5) sont vérifiées. Il existe aussi une sous-suite $\{t_k\}$ de $\{t'_k\}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0 \in [0, 1]$.

Nous montrerons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_k + n_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_0 + n_k) = V(t_0 + t).$$

Considérons le cas où $0 < \{t_0 + t\}$. Tout d'abord, vérifions que pour k suffisamment grand nous avons

$$[t + t_0] = [t + t_k].$$

Pour $\epsilon = \{t_0 + t\}$:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall k > N_0 \Rightarrow |t + t_k - (t + t_0)| < \{t_0 + t\}$$

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall k > N_0 \Rightarrow [t_0 + t] < t + t_k$$

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall k > N_0 \Rightarrow [t_0 + t] \leq [t + t_k].$$

Montrons que $\{t + t_k\} > 0$.

Comme $\{t + t_0\} > 0$, nous déduisons que $t + t_0 \neq [t + t_k]$. Si $\{t + t_k\} = 0$ alors $t + t_k = [t + t_k]$. Par conséquent $t + t_0 \neq t + t_k$ et $t_0 - t_k \neq 0$. Nous obtenons alors deux cas : $t_0 - t_k > 0$ ou $t_0 - t_k < 0$. Si $t_0 - t_k > 0$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} t_0 - t_k > \lim_{k \rightarrow \infty} 0$. Par conséquent $0 > 0$ (absurde). Si $t_0 - t_k < 0$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} t_0 - t_k < \lim_{k \rightarrow \infty} 0$. Par conséquent $0 < 0$ (absurde).

Pour $\epsilon = \{t_k + t\}$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow |t + t_k - (t + t_0)| < \{t_k + t\}$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow t + t_k - (t + t_0) < \{t + t_k\}$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow -(t + t_0) < -[t + t_k]$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow [t + t_k] < t + t_0$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow [t + t_k] \leq [t + t_0].$$

Posons $N = \max\{N_0, N_1\}$. Nous obtenons donc que pour tout $k > N$ que $[t + t_k] \leq [t + t_0]$ et que $[t + t_k] \geq [t + t_0]$. Par conséquent pour tout $k > N$, $[t + t_0] = [t + t_k]$.

Dans ce cas, pour k suffisamment grand nous avons donc que $[t + t_0] = [t + t_k]$. La suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ étant bornée, l'image de la fonction f et celle de l'opérateur A étant précompact, nous déduisons alors

$$\begin{aligned}
& \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\
& \leq \left\| \left(I + \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s) ds \right) x([t+t_k]+n_k) - \left(I + \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} A(s) ds \right) x([t+t_0]+n_k) \right\| \\
& \quad + \left\| \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s) ds - \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} f(s) ds \right\| \\
& \leq \left\| \left(I + \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s) ds \right) x([t+t_0]+n_k) - \left(I + \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} A(s) ds \right) x([t+t_0]+n_k) \right\| \\
& \quad + \left\| \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s) ds - \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} f(s) ds \right\| \\
& \leq \left\| \left(\int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s) ds - \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} A(s) ds \right) x([t+t_0]+n_k) \right\| \\
& \quad + \left\| \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s) ds - \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} f(s) ds \right\| \\
& \leq \left\| \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s) ds x([t+t_0]+n_k) \right\| + \left\| \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s) ds \right\| \\
& \leq \left\| \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s) ds \right\| \|x([t+t_0]+n_k)\| + \left\| \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s) ds \right\| \\
& \leq \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} \|A(s)\| ds \|x([t+t_0]+n_k)\| + \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} \|f(s)\| ds \\
& \leq ML|t_k - t_0| + J|t_k - t_0|
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + t_k + n_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Maintenant, considérons le cas où $\{t + t_0\} = 0$, $t + t_0$ est donc un entier.

Supposons que $t_k + t \geq t_0 + t$. Dans ce cas nous déduisons que pour k suffisamment grand $[t_k + t] = t_0 + t$. En effet $t_k + t \geq [t_k + t] \geq t_0 + t$ car $[t_k + t]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $t_k + t$. Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [t_k + t] = t_0 + t.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
& ||x(t+t_k+n_k) - x(t+t_0+n_k)|| \\
& \leq ||\left(I + \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds\right)x([t+t_k]+n_k) - x(t+t_0+n_k)|| + ||\int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds|| \\
& \leq ||\left(I + \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds\right)x([t+t_0]+n_k) - x(t+t_0+n_k)|| + ||\int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds|| \\
& \leq ||\left(\int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds\right)x(t+t_0+n_k)|| + ||\int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds|| \\
& \leq ||\int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds|| ||x(t+t_0+n_k)|| + ||\int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds|| \\
& \leq \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} ||A(s)||ds ||x(t+t_0+n_k)|| + \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} ||f(s)||ds \\
& \leq ML|t_k-t_0| + J|t_k-t_0| = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ||x(t+t_k+n_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} x(t+t_0+n_k)|| = 0.$$

Maintenant supposons que $t_k + t < t_0 + t$. Vérifions alors que à partir d'un certain rang $[t+t_k] = t+t_0-1$.

Puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} t+t_k = t+t_0$, pour $\epsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N \Rightarrow t+t_0 - (t+t_k) < 1$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N \Rightarrow t+t_0 - 1 < t+t_k$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N \Rightarrow t+t_0 - 1 \leq [t+t_k]$$

car $t+t_0-1$ est un entier. En remarquant que

$$[t+t_k] \leq t+t_k < t+t_0,$$

nous déduisons que $[t+t_k] < t+t_0$ et $[t+t_k] \leq t+t_0-1$. Par conséquent à partir d'un certain rang $[t+t_k] = t+t_0-1$.

Nous allons montrer que

$$x(t+t_0+n_k) = \left(I + \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} A(s)ds\right)x(t+t_0-1+n_k) + \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} f(s)ds.$$

$t + t_0$ et n_k sont des entiers pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent nous pouvons considérer la solution de l'équation (2.1) sur l'intervalle $[t + t_0 - 1 + n_k, t + t_0 + n_k]$. Pour $y \in [t + t_0 - 1 + n_k, t + t_0 + n_k]$, nous avons

$$x(y) = \left(I + \int_{t+t_0-1+n_k}^y A(s)ds \right) x(t + t_0 - 1 + n_k) + \int_{t+t_0-1+n_k}^y f(s)ds$$

Or $\lim_{y \rightarrow t+t_0+n_k} x(y) = x(t + t_0 + n_k)$. Par conséquent

$$x(t + t_0 + n_k) = \left(I + \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} A(s)ds \right) x(t + t_0 - 1 + n_k) + \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} f(s)ds.$$

La suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ étant bornée, l'image de la fonction f et celle de l'opérateur A étant précompactes, nous déduisons alors

$$\begin{aligned} & \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ & \leq \left\| \left(I + \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds \right) x([t+t_k]+n_k) - \left(I + \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} A(s)ds \right) x(t+t_0-1+n_k) \right\| \\ & \quad + \left\| \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds - \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} f(s)ds \right\| \\ & \leq \left\| \left(I + \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds \right) x(t+t_0-1+n_k) - \left(I + \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} A(s)ds \right) x(t+t_0-1+n_k) \right\| \\ & \quad + \left\| \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds - \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} f(s)ds \right\| \\ & \leq \left\| \left(\int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds - \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} A(s)ds \right) x(t + t_0 - 1 + n_k) \right\| \\ & \quad + \left\| \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds - \int_{t+t_0-1+n_k}^{t+t_0+n_k} f(s)ds \right\| \\ & \leq \left\| \left(\int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds \right) x(t+t_0-1+n_k) \right\| + \left\| \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds \right\| = 0 \\ & \leq \left\| \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} A(s)ds \right\| \|x(t+t_0-1+n_k)\| + \left\| \int_{t+t_0+n_k}^{t+t_k+n_k} f(s)ds \right\| = 0 \\ & \leq ML|t_k - t_0| + J|t_k - t_0|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + t_k + n_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Nous savons que de toute suite, on peut extraire une sous-suite décroissante ou strictement croissante. Nous avons donc la preuve du lemme. $\square$

Avant de présenter le prochain théorème, nous rappelons ce lemme :

Lemme 7 (Voir [[90], Lemme 3.2, p.171]) Si $f(t)$ est presque automorphe alors la suite $\{\int_n^{n+1} f(s)ds\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe.

Théorème 15 Soit $A(t)$ un opérateur 1-périodique et f une fonction presque automorphe. Alors chaque solution bornée de l'équation (2.1) sur l'ensemble des réels est presque automorphe.

Preuve Supposons que x est une solution bornée de l'équation (2.1). Nous avons

$$x(t) = x(n) + \int_n^t A(s)ds x(n) + \int_n^t f(s)ds, \quad n \leq t \leq n+1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Comme $x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, nous obtenons

$$x(n+1) = x(n) + \int_n^{n+1} A(s)ds x(n) + \int_n^{n+1} f(s)ds, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$x(n+1) = x(n) + \int_0^1 A(s)ds x(n) + \int_n^{n+1} f(s)ds, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$x(n+1) = (I + \int_0^1 A(s)ds)x(n) + \int_n^{n+1} f(s)ds, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La suite $\{\int_n^{n+1} f(s)ds\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe. Les hypothèses du théorème (13) sont vérifiées car nous sommes en dimension finie. Par conséquent la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe. La solution x est donc presque automorphe. $\square$

Corollaire 3 Soit $A(t)$ un opérateur 1-périodique et f une fonction presque automorphe. Une solution x de l'équation (2.1) est presque automorphe ssi la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.

Preuve Supposons que x est presque automorphe. Alors x est bornée. Par conséquent la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. Supposons que la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. On a

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x([t])\| + \left\| \int_{[t]}^t A(s)ds x([t]) \right\| + \left\| \int_{[t]}^t f(s)ds \right\|, \\ &\leq \|x([t])\| + \int_{[t]}^t \|A(s)\| ds \|x([t])\| + \int_{[t]}^t \|f(s)\| ds \\ &\leq \|x([t])\| + \|A\|_\infty \|x([t])\| + \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent x est borné. En utilisant le résultat précédent, nous déduisons donc que la solution x est presque automorphe. $\square$

Lemme 8 Si $h \in AA_0(\mathbb{X})$, alors $l(t) = \int_{[t]}^t h(s)ds \in AA_0(\mathbb{X})$.

Preuve La preuve se divise en plusieurs étapes.

Étape 1 : Nous montrerons que si $T \in \mathbb{N}$ alors le lemme est vrai.
Soit $T = n \in \mathbb{N}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^n ||l(t)||dt &\leq \int_{-n}^n \int_{[t]}^t ||h(s)||dsdt \\
&\leq \sum_{j=-n}^{n-1} \int_j^{j+1} \int_{[t]}^t ||h(s)||dsdt \\
&\leq \sum_{j=-n}^{n-1} \int_j^{j+1} \int_j^t ||h(s)||dsdt \\
&\leq \sum_{j=-n}^{n-1} \int_j^{j+1} \int_s^{j+1} ||h(s)||dtds \\
&\leq \sum_{j=-n}^{n-1} \int_j^{j+1} ||h(s)|| (j+1-s)ds \\
&\leq \sum_{j=-n}^{n-1} \int_j^{j+1} ||h(s)||ds \\
&\leq \int_{-n}^n ||h(s)||ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n ||l(t)||dt = 0$.

Étape 2 : Soit $T \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_{-T}^T || \int_{[t]}^t h(s)ds ||dt \leq \int_{-T}^T \int_{[t]}^t ||h(s)||dsdt.$$

Par conséquent $\int_{-T}^T || \int_{[t]}^t h(s)ds ||dt \leq L_1 + L_2 + L_3$ où

$$L_1 = \int_{-T}^{[-T]+1} \int_{[t]}^t ||h(s)||dsdt,$$

$$L_2 = \int_{[-T]+1}^{[T]} \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt,$$

$$L_3 = \int_{[T]}^T \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt.$$

Il suffit de montrer que $\frac{1}{2T}L_1$, $\frac{1}{2T}L_2$ et $\frac{1}{2T}L_3$ tendent vers 0 quand $T \rightarrow \infty$.
Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T}L_1 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{[-T]+1} \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt \\ &\leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{[-T]+1} M dt \\ &\leq \frac{1}{2T} M, \end{aligned}$$

où $M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |h(t)|$. Par conséquent $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T}L_1 = 0$.

De la même façon nous montrons que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T}L_3 = 0$. En effet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T}L_3 &= \frac{1}{2T} \int_{[T]}^T \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt \\ &\leq \frac{1}{2T} \int_{[T]}^T M dt \\ &\leq \frac{1}{2T} M. \end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T}L_3 = 0$.

En remarquant que

$$\begin{aligned} \int_{[-T]+1}^{[T]} \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt &\leq \int_{-[T]}^{[T]} \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt \\ &\leq \sum_{j=-[T]}^{[T]-1} \int_j^{j+1} \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt \\ &\leq \sum_{j=-[T]}^{[T]-1} \int_j^{j+1} \int_j^t ||h(s)|| ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=-[T]}^{[T]-1} \int_j^{j+1} \int_s^{j+1} \|h(s)\| dt ds \\
&\leq \sum_{j=-[T]}^{[T]-1} \int_j^{j+1} \|h(s)\| (j+1-s) ds \\
&\leq \sum_{j=-[T]}^{[T]-1} \int_j^{j+1} \|h(s)\| ds \\
&\leq \int_{-[T]}^{[T]} \|h(s)\| ds,
\end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{[-T]+1}^{[T]} \int_{[t]}^t \|h(s)\| ds dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2[T]} \int_{-[T]}^{[T]} \|h(s)\| ds.$$

En utilisant l'étape 1, nous obtenons que $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{[-T]+1}^{[T]} \int_{[t]}^t \|h(s)\| ds dt = 0$. $\square$

Théorème 16 *Soit x une solution bornée de l'équation (2.1) sur $\mathbb{R}$, $A(t)$ un opérateur pseudo presque automorphe et f une fonction pseudo presque automorphe. Si $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors x est pseudo presque automorphe.*

Preuve Soient $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \in PAA(\mathbb{X})$, $A(t) = A_1(t) + A_2(t) \in PAA(\mathbb{X})$ où $f_1(t), A_1(t) \in AA(\mathbb{X})$, $f_2(t), A_2(t) \in AA_0(\mathbb{X})$.

Alors $x(t) = V(t) + l(t)$, où

$$\begin{aligned}
V(t) &= \left(I + \int_{[t]}^t A_1(s) ds\right) x([t]) + \int_{[t]}^t f_1(s) ds, \\
l(t) &= \int_{[t]}^t A_2(s) ds x([t]) + \int_{[t]}^t f_2(s) ds.
\end{aligned}$$

Selon le lemme 6, $V(t)$ est presque automorphe et le Lemme 8 permet de dire que $l(t) \in AA_0(\mathbb{X})$. Nous déduisons alors que $x(t) \in PAA(\mathbb{X})$. $\square$

Corollaire 4 *Soient x une solution bornée de l'équation (2.1) sur $\mathbb{R}$, $A(t)$ un opérateur pseudo presque automorphe (opérateur presque automorphe) et f une fonction presque automorphe (pseudo presque automorphe). Si $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors x est pseudo presque automorphe.*

Preuve Considérons le cas où $A(t)$ est un opérateur pseudo presque automorphe et f est une fonction presque automorphe. f est une fonction pseudo presque automorphe. Le terme ergodique de f est la fonction nulle. Considérons le cas où f est une fonction pseudo presque automorphe et $A(t)$ un opérateur presque automorphe. $A(t)$ est un opérateur pseudo presque automorphe. Le terme ergodique de A est la fonction nulle. $\square$

2.2 Solutions compact presque automorphes

Dans ce sous-chapitre, nous donnerons des résultats sur la compact presque automorphie des solutions bornées l'équation (2.1).

Lemme 9 (*Voir [90], lemme 3.5, p.174*)

a) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} x(n + n_k) = v(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x([t] + n_k) - v([t])\| = 0, \forall K \subset \mathbb{R}.$$

b) Si $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|f(t + n_k) - g(t)\| = 0, \forall K \subset \mathbb{R}$ alors

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \int_{[t]}^t \|f(s + n_k) - g(s)\| ds = 0, \forall K \subset \mathbb{R}.$$

Lemme 10 Soit x une solution bornée de l'équation (2.1) sur $\mathbb{R}$, $A(t)$ un opérateur compact presque automorphe et f une fonction compact presque automorphe. Alors x est compact presque automorphe si et seulement si la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe.

Preuve

Il est évident que si x est compact presque automorphe, la suite $\{x(n)\} \in \mathbb{N}$ est presque automorphe.

Maintenant supposons que $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est presque automorphe. Nous montrerons que $x(t)$ est presque automorphe. La preuve se divise en plusieurs étapes.

Étape 1 :

Nous supposons que $\{n'_k\}$ est une suite à valeurs entières. Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ et une suite $\{v(n)\}$ telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(n + n_k) = v(n); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v(n - n_k) = x(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|f(t + n_k) - g(t)\| = 0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(t - n_k) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|A(t + n_k) - B(t)\| = 0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B(t - n_k) = A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

Alors, définissons

$$V(t) := \left(I + \int_{[t]}^t B(s) ds \right) v([t]) + \int_{[t]}^t g(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comme $A(t)$, $f(t)$ et $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont compact presque automorphes, il existe des constantes $K, L, M > 0$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\|A(t)\| \leq M, \quad \|f(t)\| \leq J, \quad \|x([t])\| \leq L$$

$$\|B(t)\| \leq M, \quad \|g(t)\| \leq J, \quad \|v([t])\| \leq L.$$

Maintenant nous allons montrer que pour chaque compact $K \subset \mathbb{R}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + n_k) - V(t)\| = 0.$$

Nous avons montré dans la preuve du lemme 2.2 que

$$\begin{aligned} \|x(t + n_k) - V(t)\| &\leq \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\ &\quad + M \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\ &\quad + L \int_{[t]}^t \|A(s + n_k) - B(s)\| ds \\ &\quad + \int_{[t]}^t \|f(s + n_k) - g(s)\| ds. \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + n_k) - V(t)\| &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} M \|x([t] + n_k) - v([t])\| \\ &\quad + L \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \int_{[t]}^t \|A(s + n_k) - B(s)\| ds \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \int_{[t]}^t \|f(s + n_k) - g(s)\| ds. \end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + n_k) - V(t)\| = 0.$

Étape 2 :

Maintenant nous considérons le cas général où $(s'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas nécessairement une suite à valeurs entières.

Soient $n'_k = [s'_k]$, $t'_k = \{s'_k\}$ pour chaque k . Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ de $\{n'_k\}$ et une suite $\{v(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que (2.6), (2.7) et (2.8) sont vérifiées. Il existe aussi une sous-suite $\{t_k\}$ de $\{t'_k\}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0 \in [0, 1]$.

Tout d'abord considérons le cas où $0 < \{t_0 + t\}$. Nous montrerons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Nous avons montré dans la preuve du lemme 2.2 que

$$\|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \leq ML|t_k - t_0| + K|t_k - t_0|$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Considérons le cas où $\{t_0 + t\} = 0$.

Si $t_k + t \geq t_0 + t$, nous avons montré dans la preuve du lemme 2.2 que

$$\|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \leq ML|t_k - t_0| + J|t_k - t_0|.$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Si $t_k + t < t_0 + t$, nous avons montré dans la preuve du lemme 2.2 que

$$\|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \leq ML|t_k - t_0| + J|t_k - t_0|.$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Nous savons que de toute suite, on peut extraire une sous-suite décroissante ou strictement croissante. Nous avons donc la preuve du lemme. $\square$

Théorème 17 *Soit $A(t)$ un opérateur 1-périodique et f une fonction compact presque automorphe. Alors chaque solution bornée de l'équation (2.1) sur l'ensemble des réels est compact presque automorphe.*

Preuve Supposons que $x(t)$ est une solution bornée de l'équation (2.1). Nous avons

$$x(t) = x(n) + \int_n^t A(s)ds x(n) + \int_n^t f(s)ds, \quad n \leq t \leq n+1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Comme $x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, nous obtenons

$$x(n+1) = x(n) + \int_n^{n+1} A(s)ds x(n) + \int_n^{n+1} f(s)ds, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$x(n+1) = x(n) + \int_0^1 A(s)ds x(n) + \int_n^{n+1} f(s)ds, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$x(n+1) = (I + \int_0^1 A(s)ds)x(n) + \int_n^{n+1} f(s)ds, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La fonction $f(t)$ est compact presque automorphe. Par conséquent la fonction $f(t)$ est presque automorphe et la suite $\{\int_n^{n+1} f(s)ds\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe. Les hypothèses du théorème (13) sont vérifiées car nous sommes en dimension finie. Par conséquent la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe. La solution $x(t)$ est donc compact presque automorphe. $\square$

Corollaire 5 *Soit $A(t)$ un opérateur 1-périodique et $f(t)$ une fonction compact presque automorphe. Une solution $x(t)$ de l'équation (2.1) est compact presque automorphe ssi la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe.*

Preuve Supposons que $x(t)$ est compact presque automorphe. Alors $x(t)$ est bornée. Par conséquent la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. Supposons que la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. On a

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x([t])\| + \left\| \int_{[t]}^t A(s)ds x([t]) \right\| + \left\| \int_{[t]}^t f(s)ds \right\|, \\ &\leq \|x([t])\| + \int_{[t]}^t \|A(s)\| ds \|x([t])\| + \int_{[t]}^t \|f(s)\| ds \\ &\leq \|x([t])\| + \|A\|_\infty \|x([t])\| + \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent $x(t)$ est borné. En utilisant le résultat précédent, nous déduisons donc que la solution $x(t)$ est compact presque automorphe. $\square$

Théorème 18 Soient $x(t)$ une solution bornée de l'équation (2.1) sur $\mathbb{R}$, $A(t)$ un opérateur pseudo compact presque automorphe et $f(t)$ une fonction pseudo compact presque automorphe. Si $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors $x(t)$ est pseudo compact presque automorphe.

Preuve Soient $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ où $f_1(t), A_1(t) \in KAA(\mathbb{X})$, $f_2(t), A_2(t) \in AA_0(\mathbb{X})$.

Alors $x(t) = V(t) + l(t)$, où

$$V(t) = \left(I + \int_{[t]}^t A_1(s) ds\right) x([t]) + \int_{[t]}^t f_1(s) ds,$$

$$l(t) = \int_{[t]}^t A_2(s) ds x([t]) + \int_{[t]}^t f_2(s) ds.$$

Le lemme 10 montre que $V(t)$ est une fonction compact presque automorphe et le lemme 8 nous permet de dire que $l(t) \in AA_0(\mathbb{X})$. Nous déduisons alors que $x(t)$ est pseudo compact presque automorphe. $\square$

Corollaire 6 Soit $x(t)$ une solution bornée de l'équation (2.1) sur $\mathbb{R}$, $A(t)$ un opérateur pseudo compact presque automorphe (compact presque automorphe) et $f(t)$ une fonction compact presque automorphe (pseudo compact presque automorphe). Si $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors $x(t)$ est pseudo compact presque automorphe.

Preuve Considérons le cas où $A(t)$ est un opérateur pseudo compact presque automorphe et $f(t)$ est une fonction compact presque automorphe. $f(t)$ est une fonction pseudo compact presque automorphe. Le terme ergodique de $f(t)$ est la fonction nulle.

Considérons le cas où $f(t)$ est une fonction pseudo compact presque automorphe et $A(t)$ un opérateur compact presque automorphe. $A(t)$ est un opérateur pseudo compact presque automorphe. Le terme ergodique de $A(t)$ est la fonction nulle. $\square$

2.3 La stabilité

Maintenant nous présenterons un résultat sur la stabilité uniforme des solutions de l'équation (2.1).

Théorème 19 Nous supposons que $A(t)$ est un opérateur 1-périodique de l'équation (2.1). Si pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $I + \int_0^\alpha A(s) ds$ est inversible, alors chaque solution $x(t)$ de l'équation (2.1) est uniformément stable.

Preuve Si $x(t)$ et $y(t)$ sont solutions de l'équation (2.1), $x(t)$ et $y(t)$ vérifient

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(I + \int_{[t]}^t A(s) ds \right) x([t]) + \int_{[t]}^t f(s) ds, \\ y(t) &= \left(I + \int_{[t]}^t A(s) ds \right) y([t]) + \int_{[t]}^t f(s) ds. \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$x(t) - y(t) = \left(I + \int_{[t]}^t A(s) ds \right) (x([t]) - y([t])), \quad (2.9)$$

$$x([t] + 1) - y([t] + 1) = \left(I + \int_{[t]}^{[t]+1} A(s) ds \right) (x([t]) - y([t])).$$

En posant $L(n) = I + \int_n^{n+1} A(s) ds$, nous montrons que

$$x(n+1) - y(n+1) = \prod_{j=[t_0]}^n L(j) (x([t_0]) - y([t_0])) \quad \forall n > [t_0], n \in \mathbb{N},$$

$$x([t] + 1) - y([t] + 1) = \prod_{j=[t_0]}^{[t]} L(j) (x([t_0]) - y([t_0])) \quad \forall t > [t_0].$$

De (2.9), nous déduisons que pour tout $t > [t_0] + 1$

$$x(t) - y(t) = \left(I + \int_{[t]}^t A(s) ds \right) \prod_{j=[t_0]}^{[t]-1} L(j) (x([t_0]) - y([t_0])),$$

$$x(t) - y(t) = \left(I + \int_{[t]}^t A(s) ds \right) \prod_{j=[t_0]}^{[t]-1} L(j) \left(I + \int_{[t_0]}^{t_0} A(s) ds \right)^{-1} (x(t_0) - y(t_0)).$$

Nous montrons aussi que

$$x(t) - y(t) = \left(I + \int_{[t]}^t A(s) ds \right) \left(I + \int_{[t_0]}^{t_0} A(s) ds \right)^{-1} (x(t_0) - y(t_0)) \quad \forall t \in [t_0, [t_0] + 1].$$

Comme $A(t)$ est un opérateur 1-périodique et en prenant $J(t) = I + \int_0^{\{t\}} A(s) ds$ nous déduisons que

$$x(t) - y(t) = J(t) \left(I + \int_0^1 A(s) ds \right)^{[t]-[t_0]} J(t_0)^{-1} (x(t_0) - y(t_0)) \quad \forall t > [t_0] + 1,$$

$$x(t) - y(t) = J(t)J(t_0)^{-1} \left(x(t_0) - y(t_0) \right) \forall t \in [t_0, [t_0] + 1].$$

Comme $A(t)$ est un opérateur 1-périodique, $A(t)$ est borné. Par conséquent il existe une constante $M > 0$, tel que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq M \|x(t_0) - y(t_0)\|.$$

Pour chaque $\epsilon > 0$, en prenant $\delta = \frac{\epsilon}{M} > 0$, nous déduisons que $\|x(t) - y(t)\| < \epsilon$ pour tout $t \geq t_0$. $\square$

APPLICATION

Considérons le modèle discret de dynamique des population (souvent appelé modèle de Leslie) présenté dans [59]

$$y(n+1) = Ly(n) \tag{2.10}$$

où L est la matrice suivante :

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_p \\ \beta_1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \cdot & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & \\ 0 & & & & 0 & \beta_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

La population étudiée est divisée en p classes. Sur la première ligne de la matrice se trouve le taux de fécondité de chaque classe de la population étudiée. Tandis que sous la diagonale se trouve le taux de survie de chaque classe de la population étudiée. Considérons maintenant l'équation suivante

$$y'(t) = (L - I)y([t]) + f(t), \tag{2.11}$$

où f est la fonction nulle. Soit y solution de l'équation (2.11). Par conséquent y vérifie

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(I + \int_{[t]}^t (L - I) ds \right) y([t]) \\ &= \left(I + (L - I)\{t\} \right) y([t]). \end{aligned}$$

Pour $t \in [n, n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$, nous obtenons

$$y(t) = \left(I + (L - I)(t - n) \right) y(n)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow n+1} y(t) = \lim_{t \rightarrow n+1} (I + (L - I)(t - n))y(n).$$

Nous obtenons alors que

$$y(n + 1) = Ly(n).$$

Nous avons donc montré que si y est solution de l'équation (2.11), alors la suite $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est solution du modèle discret (2.10). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant.

Théorème 20 *Toute solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation (2.11) est solution du modèle discret (2.10).*

Théorème 21 *Une fonction y solution de l'équation (2.11) est presque automorphe et compact presque automorphe ssi la suite $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ solution du modèle discret (2.10) est bornée. Si la suite $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ solution du modèle discret (2.10) est bornée alors y est pseudo presque automorphe et pseudo compact presque automorphe.*

Preuve Nous avons que f est la fonction nulle. Par conséquent $f(t)$ est presque automorphe, pseudo presque automorphe, compact presque automorphe et pseudo compact presque automorphe. En utilisant les corollaires 3 et 5, nous déduisons que $y(t)$ est presque automorphe et compact presque automorphe ssi la suite $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. De même en utilisant les corollaires 4 et 6, nous déduisons que si la suite $\{y(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors $y(t)$ est pseudo presque automorphe et pseudo compact presque automorphe. Or cette suite est presque automorphe ssi elle est bornée. D'où le résultat énoncé. $\square$

Théorème 22 *Si pour tout $\alpha \in [0, 1[$, $I + \alpha(L - I)$ est inversible, alors chaque solution y de l'équation (2.11) est uniformément stable.*

Preuve

En appliquant le théorème 19, nous déduisons que si pour tout $\alpha \in [0, 1[$, $I + \int_0^\alpha (L - I)ds$ est inversible, alors chaque solution $x(t)$ de l'équation (2.11) est uniformément stable. D'où le résultat énoncé. $\square$

Chapitre 3

Solutions S-asymptotiquement ω -périodiques pour des équations d'évolution

Introduction

Les fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques constituent une classe de fonctions généralisant la classe des fonctions asymptotiquement ω -périodiques. Les résultats relatifs aux fonctions S-asymptotiquement ω périodiques sont limités car ce concept est nouveau. Des propriétés qualitatives de ces fonctions sont présentées dans [53]. Il existe aussi des articles traitant de l'existence de solution S-asymptotiquement ω -périodique d'équations différentielles et d'équations différentielles fractionnaires dans des espaces de dimension finie ou infinie ([13], [53], [54], [64], [79]). Dans [64] Lizama et N'Guérékata montrent une relation entre les fonctions S-asymptotiquement ω périodiques et plusieurs sous espaces de $BC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ où $\mathbb{X}$ est un espace de Banach. Nous commencerons ce chapitre en présentant de nouvelles propriétés sur les fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques.

Dans [41], Diagana et N'Guérékata étudient l'existence et l'unicité de solution presque automorphe pour une classe d'équation d'évolution de la forme

$$\frac{d}{dt}[u(t) + f(t, Bu(t))] = Au(t) + g(t, Cu(t)) \quad (3.1)$$

où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 exponentiellement stable à valeur dans $\mathbb{X}$; B, C sont deux opérateurs linéaires bornés sur $\mathbb{X}$ et f, g sont des fonctions continues.

La classe des fonctions presque automorphes, tout comme celle des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques généralisant le concept de la périodicité,

il est alors naturel de se demander sous quelles conditions l'équation (3.1) admet des solutions S-asymptotiquement ω -périodiques. Nous supposons que f, g sont des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques et que $f(0, 0) = 0$. Le théorème 23 présentera une condition suffisante d'existence et d'unicité de solution S-asymptotiquement ω périodique de l'équation (3.1). Ce résultat sera obtenu en utilisant le théorème du point fixe de Banach-Picard et nous l'illustrerons, en étudiant l'existence et l'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique d'une équation de la chaleur.

Plusieurs articles étudient aussi l'existence et l'unicité de solutions presque périodiques, presque automorphes, et pseudo presque périodiques à poids de différentes classes d'équations différentielles. Dans [46], Elazzouzi étudie l'existence de solutions de classe C^n presque périodiques et C^n presque automorphes du Problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = -Au(t) + L(u_t) + f(t) \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans [46], afin d'obtenir des solutions C^n presque périodiques et C^n presque automorphes, l'auteur utilise la méthode de la variation de la constante et la méthode de réduction développée par Adimy, Elazzouzi et Ezzinbi. Dans [48], Boukli-Hacene et Ezzinbi étudient l'existence et l'unicité de solution pseudo presque automorphe à poids pour (3.2), en utilisant une méthode de la variation de la constante développée par Ezzinbi et N'Guérékata [49].

Les classes des fonctions presque périodiques, presque automorphes, pseudo presque automorphes, tout comme la classe des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques généralisant le concept de périodicité, nous étudierons alors l'existence et l'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique dans la norme α pour l'équation différentielle (3.2) et

$$\frac{d}{dt}u(t) = -Au(t) + L(u_t) + g(t, u(t)), \quad (3.3)$$

où $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $T(t)$, $t \geq 0$, sur un espace de Banach $\mathbb{X}$.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, A^α est la puissance fractionnaire de A de domaine $D(A^\alpha)$ qui, muni de la norme $|x|_\alpha = \|A^\alpha x\|$, forme un espace de Banach $\mathbb{X}_\alpha$. On note $\mathcal{C}_\alpha = C([-r, 0], \mathbb{X}_\alpha)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[-r, 0]$ à valeur dans $\mathbb{X}_\alpha$ muni de la norme

$$|\phi|_{\mathcal{C}_\alpha} = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|_\alpha.$$

L est un opérateur linéaire borné défini sur $\mathcal{C}_\alpha$ à valeur dans $\mathbb{X}_\alpha$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{X}_\alpha \rightarrow \mathbb{X}_\alpha$ est une fonction continue. La fonction histoire $x_t \in \mathcal{C}_\alpha$ est définie

par

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) \text{ pour } \theta \in]-r, 0].$$

Les théorèmes 26 et 27 présenteront des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique des équations (3.2) et (3.3). Nous illustrerons ces résultats en étudiant l'existence et l'unicité des solutions d'une équation de diffusion avec retard.

Enfin nous nous intéresserons à cette équation différentielle à arguments constant par morceaux

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + A_0x([t]) + f(t) \\ x(0) = c_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

en supposant que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe. Nous définirons sur $\mathbb{R}^+$ la mild solution de (3.4) et proposerons des conditions d'existence et d'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique de cette équation où ω est un entier positif. Nous traiterons aussi de conditions d'existence et d'unicité de solution S-asymptotiquement ω -périodique de l'équation (3.4) dans le cas non linéaire où ω est un entier positif, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + A_0x([t]) + g(t, x(t)) \\ x(0) = c_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

3.1 Quelques propriétés sur les fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques

Nous noterons par $SAP_\omega(\mathbb{X})$, l'ensemble des fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeur dans $\mathbb{X}$. $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ est l'espace des fonctions bornées et continues défini sur $\mathbb{R}^+$ à valeur dans $\mathbb{X}$; muni de la norme $\|f\|_\infty := \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$, c'est un espace de Banach. Tout d'abord nous présentons de nouvelles propriétés sur les fonctions S-asymptotiquement ω -périodiques.

Proposition 6 *Soit $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $a \in SAP_\omega(\mathbb{K})$ et $f \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, alors $af \in SAP_\omega(\mathbb{X})$.*

Preuve Comme a et f sont bornés, $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $|a(t)| \leq M_1$ et $\|f(t)\| \leq M_2$, $\forall t \geq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|a(t + \omega)f(t + \omega) - a(t)f(t)\| &\leq \|(a(t + \omega) - a(t))f(t + \omega)\| \\ &\quad + \|(f(t + \omega) - f(t))a(t)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |(a(t+\omega) - a(t))| |f(t+\omega)| \\
&+ |(f(t+\omega) - f(t))| |a(t)| \\
&\leq |(a(t+\omega) - a(t))| M_2 \\
&+ |(f(t+\omega) - f(t))| M_1.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \|a(t+\omega)f(t+\omega) - a(t)f(t)\| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} |(a(t+\omega) - a(t))| M_2 \\
&+ \lim_{t \rightarrow \infty} |(f(t+\omega) - f(t))| M_1 = 0,
\end{aligned}$$

d'où $\lim_{t \rightarrow \infty} \|a(t+\omega)f(t+\omega) - a(t)f(t)\| = 0$. $\square$

Proposition 7 *Supposons que $f \in SAP_\omega(\mathbb{R})$ est tel que $\inf_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)| \geq \gamma > 0$. Alors $g := \frac{1}{f} \in SAP_\omega(\mathbb{R})$.*

Preuve Il est évident que $|f(t)| \geq \gamma$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Nous déduisons alors que

$$\frac{1}{|f(t)f(t+\omega)|} \leq \frac{1}{\gamma^2}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $T_\epsilon > 0$ tel que

$$|f(t+\omega) - f(t)| < \epsilon \gamma^2, \quad t > T_\epsilon.$$

Pour $t > T_\epsilon$, nous avons donc

$$\begin{aligned}
|g(t+\omega) - g(t)| &\leq \left| \frac{f(t+\omega) - f(t)}{f(t+\omega)f(t)} \right| \\
&\leq \frac{\epsilon \gamma^2}{\gamma^2} \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 8 *Soit $f \in SAP_\omega(\mathbb{X})$ et $\Phi : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ un opérateur uniformément continu sur les sous-ensembles bornés de $\mathbb{X}$. Alors la fonction $F : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{X}$ définie par*

$$F(t) := \Phi \circ f(t)$$

est S asymptotiquement ω -périodique.

Preuve Soit $\delta > 0$. Comme $f \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, il existe $T_\delta > 0$ tel que pour tout $t > T_\delta$, nous avons

$$\|f(t + \omega) - f(t)\| < \delta.$$

Pour $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathcal{R}_f$ (l'image de f qui est un ensemble borné inclus dans $\mathbb{X}$), tel que $\|x - y\| \leq \delta$ nous avons

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| < \epsilon.$$

Pour $x = f(t + \omega)$ et $y = f(t)$, nous obtenons donc

$$\|\Phi(f(t + \omega)) - \Phi(f(t))\| < \epsilon$$

pour tout $t > T_\delta$. $\square$

Proposition 9 Soit $f \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, et $a \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Alors la fonction $G : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$G(t) := \int_0^t a(t-s)f(s)ds$$

est S asymptotiquement ω -périodique.

Preuve Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $T > 0$ tel que si $t > T$, alors

$$\|f(t + \omega) - f(t)\| < \epsilon$$

et

$$|a(t)| < \epsilon.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|G(t+\omega) - G(t)\| &= \left\| \int_0^\omega a(t+\omega-s)f(s)ds + \int_\omega^{t+\omega} a(t+\omega-s)f(s)ds - \int_0^t a(t-s)f(s)ds \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^\omega a(t+s)f(\omega-s)ds \right\| + \int_0^t |a(t-s)| \|f(s+\omega) - f(s)\| ds \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^\omega |a(t+s)| ds + \int_0^T |a(t-s)| \|f(s+\omega) - f(s)\| ds \\ &\quad + \int_T^t |a(t-s)| \|f(s+\omega) - f(s)\| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f\|_\infty \omega \epsilon + 2\|f\|_\infty \int_0^T |a(t-s)|ds + \epsilon \int_T^t |a(t-s)|ds \\
&\leq \|f\|_\infty \omega \epsilon + 2\|f\|_\infty \int_{t-T}^t |a(s)|ds + \epsilon \int_0^{t-T} |a(s)|ds \\
&\leq \|f\|_\infty \omega \epsilon + 2\|f\|_\infty \int_{t-T}^\infty |a(s)|ds + \epsilon \int_0^\infty |a(s)|ds
\end{aligned}$$

qui montre que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|G(t + \omega) - G(t)\| = 0. \square$

3.2 Une application pour une classe d'équations d'évolution

Définition 26 Une fonction $u \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ est une mild solution de l'équation (3.1) si la fonction $s \mapsto AT(t-s)f(s, Bu(s))$ est intégrable sur $[0, t[$ et

$$u(t) = -f(t, Bu(t)) - \int_0^t AT(t-s)f(s, Bu(s))ds + \int_0^t T(t-s)g(s, Cu(s))ds,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes.

(H.1) L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe exponentiellement stable $(T(t))_{t \geq 0}$ telle que il existe des constantes $M > 0$ et $\delta > 0$ avec

$$\|T(t)\|_{B(\mathbb{X})} \leq Me^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

La fonction $\sigma \mapsto AT(\sigma)$ définie sur $]0, \infty[$ et à valeur dans $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ est (Lebesgue) mesurable et il existe une fonction bornée $\gamma : [0, \infty[\mapsto [0, \infty[$ tel que

$$\|\gamma\|_\infty < J.$$

Il existe aussi une constante $\alpha > 0$, tel que

$$\|AT(s)\|_{B(\mathbb{X})} \leq e^{-\alpha s} \gamma(s), \quad s > 0.$$

(H.2) Les fonctions f, g définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}$ et à valeurs dans $\mathbb{X}$ sont uniformément S-asymptotiquement ω -périodiques sur les ensembles bornés

et asymptotiquement uniformément continues sur les ensembles bornés. Il existe des constantes $K_f, K_g \geq 0$ telles que

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq K_f \|u - v\|, \text{ et}$$

$$\|g(t, u) - g(t, v)\| \leq K_g \|u - v\|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et $\forall u, v \in \mathbb{X}$.

(H.3) B, C appartiennent à $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ avec $\max(\|B\|, \|C\|) = \varpi$.

Lemme 11 *Supposons que les hypothèses (H.1)-(H.2)-(H.3) sont vérifiées. Définissons l'opérateur non linéaire Λ_2 par : pour chaque $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$*

$$(\Lambda_2 \phi)(t) = \int_0^t T(t-s)g(s, C\phi(s))ds.$$

Alors l'application Λ_2 défini sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeur dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$.

Preuve Tout d'abord, vérifions que Λ_2 est bien définie. Si $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, alors le corollaire 2 montre que $t \mapsto C\phi(t) \in SAP_\omega(\mathbb{X})$ quand $C \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Par conséquent, le théorème 12 nous permet de déduire que la fonction $\Phi(\cdot) = g(\cdot, C\phi(\cdot))$ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X})$ quand $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. En particulier $\|\Phi\|_\infty < \infty$.

Nous posons $v(t) = \int_0^t T(t-s)\Phi(s)ds$. Pour $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} v(t+\omega) - v(t) &= \int_0^{t+\omega} T(t+\omega-s)\Phi(s)ds - \int_0^t T(t-s)\Phi(s)ds \\ &= \int_0^\omega T(t+\omega-s)\Phi(s)ds + \int_\omega^{t+\omega} T(t+\omega-s)\Phi(s)ds \\ &\quad - \int_0^t T(t-s)\Phi(s)ds. \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$\|v(t+\omega) - v(t)\| \leq \|I_1(t)\| + \|I_2(t)\|$$

où

$$I_1(t) = \int_0^\omega T(t+\omega-s)\Phi(s)ds$$

et

$$I_2(t) = \int_\omega^{t+\omega} T(t+\omega-s)\Phi(s)ds - \int_0^t T(t-s)\Phi(s)ds.$$

En remarquant que

$$I_1(t) = T(t) \int_0^\omega T(\omega - s) \Phi(s) ds$$

et en utilisant le fait que $(T(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable, nous déduisons que

$$\|I_1(t)\| \leq M e^{-\delta t} \|v(\omega)\|.$$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = 0$.

Maintenant comme $\Phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, nous pouvons trouver T_ϵ suffisamment grand tel que

$$\|\Phi(t + \omega) - \Phi(t)\| < \frac{\delta}{M} \epsilon, \text{ pour } t > T_\epsilon.$$

Par changement de variable nous déduisons que

$$I_2(t) = \int_0^t T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds.$$

Alors nous obtenons que

$$\|I_2(t)\| \leq \left\| \int_0^{T_\epsilon} T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds \right\| + \left\| \int_{T_\epsilon}^t T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds \right\|.$$

En observant que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{T_\epsilon} T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds \right\| &\leq \int_0^{T_\epsilon} \|T(t-s)\| \|\Phi(s+\omega) - \Phi(s)\| \\ &\leq \int_0^{T_\epsilon} M e^{-\delta(t-s)} 2 \|\Phi\|_\infty ds \\ &\leq \frac{M 2 \|\Phi\|_\infty}{\delta} (e^{-\delta(t-T_\epsilon)} - e^{-\delta t}) \end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{T_\epsilon} T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds = 0.$$

Nous avons aussi que

$$\left\| \int_{T_\epsilon}^t T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds \right\| \leq \int_{T_\epsilon}^t M e^{-\delta(t-s)} \frac{\delta}{M} \epsilon ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \epsilon \int_{T_\epsilon}^t \delta e^{-\delta(t-s)} ds \\
&\leq \epsilon(1 - e^{-\delta(t-T_\epsilon)}) \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{T_\epsilon}^t T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds = 0$.

Nous déduisons donc que $\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0$, ce qui prouve que $\Lambda_2 \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. $\square$

Lemme 12 *Supposons que les hypothèses (H.1)-(H.2)-(H.3) sont vérifiées. Définissons l'opérateur non linéaire Λ_1 par : pour chaque $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$*

$$(\Lambda_1 \phi)(t) = \int_0^t AT(t-s)f(s, B\phi(s))ds.$$

Alors l'application Λ_1 définie sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeur dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$.

Preuve Montrons que Λ_1 est bien définie. Si $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, alors le corollaire 2 montre que $t \mapsto B\phi(t) \in SAP_\omega(\mathbb{X})$ quand $B \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Le théorème 12 nous permet donc de déduire que la fonction $\Phi(\cdot) = f(\cdot, B\phi(\cdot))$ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X})$ quand $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. Nous remarquons donc aussi que $\|\Phi\|_\infty < \infty$.

$\Phi(\cdot) = f(\cdot, B\phi(\cdot))$ appartient $SAP_\omega(\mathbb{X})$ quand $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. Nous posons $v(t) = \int_0^t AT(t-s)\Phi(s)ds$, et nous obtenons que

$$\|v(t+\omega) - v(t)\| \leq \|I_1(t)\| + \|I_2(t)\|$$

où

$$I_1(t) = \int_0^\omega AT(t+\omega-s)\Phi(s)ds$$

et

$$I_2(t) = \int_\omega^{t+\omega} AT(t+\omega-s)\Phi(s)ds - \int_0^t AT(t-s)\Phi(s)ds.$$

En observant que

$$I_1(t) = \int_0^\omega AT(t)T(\omega-s)\Phi(s)ds$$

$$I_1(t) = \int_0^\omega T(t)AT(\omega-s)\Phi(s)ds$$

et $T(\omega-s)\Phi(s) \in \mathbb{X}$, nous déduisons que

$$\|I_1(t)\| \leq Me^{-\delta t}\|v(\omega)\|.$$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = 0$.

Comme $\Phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, nous pouvons trouver T_ϵ suffisamment grand tel que

$$\|\Phi(t + \omega) - \Phi(t)\| < \frac{\omega}{J}\epsilon,$$

où $\gamma(t) \leq J, \forall t \geq 0$.

Nous remarquons que

$$\|I_2(t)\| \leq \left\| \int_0^{T_\epsilon} AT(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds \right\| + \left\| \int_{T_\epsilon}^t AT(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds \right\|.$$

En observant que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{T_\epsilon} AT(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds \right\| &\leq \int_0^{T_\epsilon} \|AT(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))\| ds \\ &\leq \int_0^{T_\epsilon} \|AT(t-s)\| \|\Phi(s+\omega) - \Phi(s)\| ds \\ &\leq 2\|\phi\|_\infty \int_0^{T_\epsilon} \|AT(t-s)\| ds \\ &\leq 2\|\phi\|_\infty \int_0^{T_\epsilon} e^{-\alpha(t-s)} \gamma(t-s) ds \\ &\leq 2\|\phi\|_\infty J \int_0^{T_\epsilon} e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &\leq \frac{2\|\phi\|_\infty J}{\alpha} (e^{-\alpha(t-T_\epsilon)} - e^{-\alpha t}), \end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{T_\epsilon} AT(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds = 0.$$

En observant que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{T_\epsilon}^t AT(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds \right\| &\leq \int_{T_\epsilon}^t \|AT(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))\| ds \\ &\leq \int_{T_\epsilon}^t \|AT(t-s)\| \|\Phi(s+\omega) - \Phi(s)\| ds \\ &\leq \int_{T_\epsilon}^t e^{-\alpha(t-s)} \gamma(t-s) \frac{\alpha}{J} \epsilon ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \epsilon(1 - e^{-\alpha(t-T_\epsilon)}) \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

nous obtenons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{T_\epsilon}^t AT(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds = 0.$$

Ceci prouve que $\Lambda_1 \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. $\square$

Théorème 23 *Supposons que les hypothèses (H.1)-(H.2)-(H.3) sont vérifiées. Alors l'équation (3.1) a une unique solution (mild) S asymptotiquement ω -périodique si*

$$\Theta := \varpi(K_f + \frac{JK_f}{\alpha} + \frac{MK_g}{\delta}) < 1.$$

Preuve Définissons l'opérateur non linéaire $\Gamma : SAP_\omega(\mathbb{X}) \mapsto SAP_\omega(\mathbb{X})$ par

$$(\Gamma u)(t) := -f(t, Bu(t)) - (\Lambda_1 u)(t) + (\Lambda_2 u)(t)$$

pour chaque $u \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. Par conséquent

$$(\Gamma u)(t) := -f(t, Bu(t)) - \int_0^t AT(t-s)f(s, Bu(s))ds + \int_0^t T(t-s)g(s, Cu(s))ds.$$

La fonction $s \mapsto AT(t-s)f(s, B\phi(s))$ est intégrable sur $[0, t]$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ car

$$\|AT(t-s)f(s, B\phi(s))\| \leq e^{-\omega(t-s)}\gamma(t-s)\|\Phi\|_\infty$$

avec $\Phi(\cdot) = f(\cdot, B\phi(\cdot)) \in SAP_\omega(\mathbb{X})$.

Pour tout $\phi, \psi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$

$$\|f(t, B\phi(t)) - f(t, B\psi(t))\| \leq K_f \varpi \|\phi - \psi\|_\infty$$

selon (H-2)-(H-3).

Le Théorème 12 et le Corollaire 2 montrent que l'opérateur défini par $\pi(u)(t) = f(t, Bu(t))$ sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeur dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$. Les lemmes 11 et 12 nous permettent de déduire que l'opérateur non linéaire Γ défini sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeur dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$. Pour tout $\phi, \psi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$,

$$\begin{aligned} &\|\Gamma(\phi)(t) - \Gamma(\psi)(t)\| \\ &\leq \|f(t, B\psi(t)) - f(t, B\phi(t))\| + \left\| \int_0^t AT(t-s)(f(s, B\psi(s)) - f(s, B\phi(s)))ds \right\| \end{aligned}$$

$$+||\int_0^t T(t-s)(g(s, C\psi(s))-g(s, C\phi(s)))ds||.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & ||\int_0^t AT(t-s)(f(s, B\psi(s))-f(s, B\phi(s)))ds|| \\ & \leq \int_0^t ||AT(t-s)(f(s, B\psi(s))-f(s, B\phi(s)))||ds \\ & \leq \int_0^t ||AT(t-s)|| ||f(s, B\psi(s))-f(s, B\phi(s))||ds \\ & \leq \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\gamma(t-s)K_f||B\psi(s)-B\phi(s)||ds \\ & \leq \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}J\varpi K_f||\psi-\phi||_\infty \\ & \leq \frac{J\varpi K_f}{\alpha}||\psi-\phi||_\infty(1-e^{-\alpha t}) \\ & \leq \frac{J\varpi K_f}{\alpha}||\psi-\phi||_\infty \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & ||\int_0^t T(t-s)(g(s, C\psi(s))-g(s, C\phi(s)))ds|| \\ & \leq \int_0^t ||T(t-s)(g(s, C\psi(s))-g(s, C\phi(s)))||ds \\ & \leq \int_0^t ||T(t-s)|| ||(g(s, C\psi(s))-g(s, C\phi(s)))||ds \\ & \leq \int_0^t Me^{-\delta(t-s)}K_g||C\psi(s)-C\phi(s)||ds \\ & \leq \int_0^t Me^{-\delta(t-s)}K_g\varpi||\psi-\phi||_\infty \\ & \leq \frac{MK_g}{\delta}\varpi||\psi-\phi||_\infty(1-e^{-\delta t}) \\ & \leq \frac{MK_g}{\delta}\varpi||\psi-\phi||_\infty. \end{aligned}$$

Nous déduisons alors que

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\phi) - \Gamma(\psi)\|_\infty &\leq \frac{J\varpi K_f}{\alpha} \|\psi - \phi\|_\infty + \frac{MK_g}{\delta} \varpi \|\psi - \phi\|_\infty + K_f \varpi \|\phi - \psi\|_\infty \\ &\leq \varpi \left(K_f + \frac{JK_f}{\alpha} + \frac{MK_g}{\delta} \right) \|\phi - \psi\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme $\Theta < 1$, l'opérateur a un unique point fixe. Par conséquent l'équation (3.1) a une unique solution S-asymptotiquement ω -périodique. $\square$

APPLICATION

Nous traiterons de l'existence et de l'unicité d'une solution S-asymptotiquement ω -périodique de l'équation de la chaleur donné par le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + g(t, q(x)u(t, x)) & t \in \mathbb{R}^+, x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Nous supposons que $(\mathbb{X}, \|\cdot\|) = (L^2(0, \pi), \|\cdot\|_2)$, $f = 0$ et définissons

$$D(A) = \{u \in L^2[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}$$

$$Au(\cdot) = \Delta u = u''(\cdot), \quad \forall u(\cdot) \in D(A).$$

A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $T(t)$ sur $L^2[0, \pi]$ avec $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ pour $t \geq 0$. Comme T. Diagana et G.M.Nguérékata dans [41], nous considérons le cas où $\mathbb{Y} = \mathbb{X} = L^2[0, \pi]$ et C est la multiplication d'un opérateur borné défini par : $Cu = q(x) \cdot u$ pour chaque $u \in L^2[0, \pi]$, où $q \in L^\infty[0, \pi]$. Dans ce cas $\|C\|_{B(L^2[0, \pi])} = \|q\|_\infty$. Nous supposons que $q \neq 0$.

Maintenant, faisons l'hypothèse suivante.

(H.4) La fonction $g : \mathbb{R}^+ \times L^2[0, \pi] \mapsto L^2[0, \pi]$, $(t, u) \rightarrow g(t, u)$ est uniformément S-asymptotiquement ω -périodique sur des ensembles bornés et asymptotiquement uniformément continue sur des ensembles bornés. Il existe une constante $K_g \geq 0$ telle que

$$\|g(t, u(t, \cdot)) - g(t, v(t, \cdot))\|_2 \leq K_g \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $u(t, \cdot), v(t, \cdot) \in L^2[0, \pi]$.

Théorème 24 *Sous les hypothèses de (H.4), le système d'équation (3.6) a une unique solution (mild) S-asymptotiquement ω -périodique si $K_g < \frac{1}{\|q\|_\infty}$.*

Preuve Nous avons $M = 1$, $\delta = 1$, $K_f = 0$, $\varpi = \|B\|_{B(L^2[0, \pi])} = \|q\|_\infty$. Par conséquent en utilisant le théorème 23, nous déduisons que si $\|q\|_\infty K_g < 1$, le système d'équation (3.6) a une unique solution (mild) S-asymptotiquement ω -périodique. $\square$

3.3 Une application pour une équation différentielle avec un retard fini

Soit $\rho(A)$ l'ensemble des résolvants de A . Nous supposons que

$$0 \in \rho(A). \quad (3.7)$$

Ceci nous permet, d'un coté de dire qu'il existe des constantes $M > 1$ et $\delta > 0$ telles que

$$\|T(t)x\| \leq Me^{-\delta t}\|x\|, \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{X}, \quad (3.8)$$

et d'un autre coté, de définir la puissance fractionnaire A^α pour $0 < \alpha < 1$, comme un opérateur linéaire fermé sur son domaine $D(A^\alpha)$, dont l'inverse $A^{-\alpha}$ est donné par

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} T(t) dt$$

où Γ est la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^t t^{\alpha-1} e^{-\alpha t} dt.$$

Nous rappelons que $D(A^\alpha)$ muni de la norme $|x|_\alpha = \|A^\alpha x\|$, forme un espace de Banach $\mathbb{X}_\alpha$. On note $\mathcal{C}_\alpha = C([-r, 0], \mathbb{X}_\alpha)$, l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[-r, 0]$ à valeur dans $\mathbb{X}_\alpha$ muni de la norme

$$|\phi|_{\mathcal{C}_\alpha} = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|_\alpha.$$

Nous avons les propriétés suivantes basiques pour A^α .

Théorème 25 ([80], pp.69-75) *Pour $0 < \alpha < 1$, nous avons :*

i) $\mathbb{X}_\alpha = D(A^\alpha)$ est un espace de Banach muni de la norme $|x|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ pour $x \in D(A^\alpha)$;

ii) $A^{-\alpha}$ est un opérateur linéaire fermé vérifiant $Im(A^{-\alpha}) = D(A^\alpha)$ et nous avons $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$;

iii) $A^{-\alpha} \in \mathbb{B}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$;

iv) $T(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}_\alpha$ pour tout $t > 0$;

v) $A^\alpha T(t)x = T(t)A^\alpha x$ pour chaque $x \in D(A^\alpha)$ et $t \geq 0$;

vi) Il existe une constante M_α telle que

$$\|A^\alpha T(t)x\| \leq M_\alpha \frac{e^{-\delta t}}{t^\alpha} \|x\| \text{ pour } x \in \mathbb{X}, t > 0,$$

où $\delta > 0$ est donné par (3.8).

Remarque 6 Soit $x \in \mathbb{X}_\alpha$.

$$|T(t)x|_\alpha = \|A^\alpha T(t)x\| = \|T(t)A^\alpha x\| \leq \|T(t)\| \|A^\alpha x\| = |T(t)| |x|_\alpha,$$

et quand t tend vers 0,

$$|T(t)x - x|_\alpha = \|A^\alpha T(t)x - A^\alpha x\| = \|T(t)A^\alpha x - A^\alpha x\| \rightarrow 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{X}_\alpha$. Nous déduisons donc que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe continu sur $\mathbb{X}_\alpha$ et $|T_\alpha(t)| \leq |T(t)|$ pour tout $t \geq 0$.

Proposition 10 (Voir [46], [88]) $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur $\mathcal{C}_\alpha$:

i) Pour tout $t \geq 0$ $T(t)$ est un opérateur linéaire sur $\mathcal{C}_\alpha$;

ii) $T(0) = I$;

iii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$;

iv) Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$, $T(t)\varphi$ est une fonction continue pour $t \geq 0$ à valeur dans $\mathcal{C}_\alpha$.

Définition 27 Soit $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$. Une fonction $u : [-r, +\infty[\rightarrow \mathbb{X}_\alpha$ est la mild solution de l'équation (3.2) si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $u : [-r, +\infty[\rightarrow \mathbb{X}_\alpha$ est continue ;

ii) $u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(u_s) + f(s)]ds$ pour $t \geq 0$;

iii) $u_0 = \varphi$.

Dans cette partie, nous définissons

$$\Omega = \{u : [-r, +\infty[\rightarrow \mathbb{X}_\alpha \text{ tel que } u|_{[-r, 0]} \in \mathcal{C}_\alpha \text{ et } u|_{\mathbb{R}^+} \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)\}.$$

Nous remarquons que si $u \in \Omega$, alors u est bornée sur $[-r, +\infty[$. Nous posons

$$\|u\|_\Omega = \sup_{s \in [-r, +\infty[} |u(s)|_\alpha.$$

Il est clair que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_\Omega$.

Lemme 13 *Sous l'hypothèse (3.8), la fonction l définie par*

$$l(t) = T(t)\varphi(0)$$

appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$.

Preuve Puisque $\varphi(0) \in \mathbb{X}_\alpha$, nous avons que $(T(t))_{t \geq 0}$ est une famille de semi-groupe continu sur $\mathbb{X}_\alpha$, et que $|l(t)|_\alpha \leq M|\varphi(0)|_\alpha$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} |l(t)|_\alpha &= \|A^\alpha l(t)\| \\ &= \|A^\alpha T(t)\varphi(0)\| \\ &= \|T(t)A^\alpha \varphi(0)\| \\ &\leq Me^{-\delta t} \|A^\alpha \varphi(0)\| \\ &\leq M|\varphi(0)|_\alpha. \end{aligned}$$

Par conséquent $l \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}_\alpha)$. En utilisant l'hypothèse (3.8), nous obtenons pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |l(t+\omega) - l(t)|_\alpha &= |T(t+\omega)\varphi(0) - T(t)\varphi(0)|_\alpha \\ &\leq |T(t+\omega)\varphi(0)|_\alpha + |T(t)\varphi(0)|_\alpha \\ &\leq \|A^\alpha T(t+\omega)\varphi(0)\| + \|A^\alpha T(t)\varphi(0)\| \\ &\leq \|T(t+\omega)A^\alpha \varphi(0)\| + \|T(t)A^\alpha \varphi(0)\| \\ &\leq Me^{-\delta(t+\omega)} \|A^\alpha \varphi(0)\| + Me^{-\delta t} \|A^\alpha \varphi(0)\| \\ &\leq Me^{-\delta(t+\omega)} |\varphi(0)|_\alpha + Me^{-\delta t} |\varphi(0)|_\alpha. \end{aligned}$$

Comme $\delta > 0$, nous déduisons que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |l(t+\omega) - l(t)|_\alpha = 0.$$

Alors $l \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$. $\square$

Lemme 14 Si $u \in \Omega$, alors

$$\begin{aligned} |u_t|_{\mathcal{C}_\alpha} &\leq \|u\|_\Omega, \\ |L(u_t)|_\alpha &\leq |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u\|_\Omega, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} |u_{t+\omega} - u_t|_{\mathcal{C}_\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Preuve Pour chaque $\theta \in [-r, 0]$ et $t \geq 0$, nous avons

$$|u_t(\theta)|_\alpha = |u(t + \theta)|_\alpha.$$

Puisque u_t est continue sur $[-r, 0]$ qui est un compact, nous savons que il existe $\theta^* \in [-r, 0]$ tel que

$$|u_t|_{\mathcal{C}_\alpha} = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |u(t + \theta)|_\alpha = |u(t + \theta^*)|_\alpha.$$

Comme $u \in \Omega$, nous déduisons que

$$|u_t|_{\mathcal{C}_\alpha} \leq \|u\|_\Omega.$$

Maintenant montrons que

$$|L(u_t)|_\alpha \leq |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u\|_\Omega.$$

Puisque $L \in \mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)$, nous pouvons écrire que

$$|L(u_t)|_\alpha \leq |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} |u_t|_{\mathcal{C}_\alpha}.$$

Or nous avons montré que $|u_t|_{\mathcal{C}_\alpha} \leq \|u\|_\Omega$. Par conséquent

$$|L(u_t)|_\alpha \leq |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u\|_\Omega.$$

Maintenant montrons que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_{t+\omega} - u_t|_{\mathcal{C}_\alpha} = 0.$$

Puisque u_t est continue sur $[-r, 0]$ qui est un compact, nous savons que il existe $\theta^* \in [-r, 0]$ tel que

$$\begin{aligned} |u_{t+\omega} - u_t|_{\mathcal{C}_\alpha} &= \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |u(t + \theta + \omega) - u(t + \theta)|_\alpha \\ &= |u(t + \theta^* + \omega) - u(t + \theta^*)|_\alpha. \end{aligned}$$

Posons $s = t + \theta$. Alors, quand t tend vers $+\infty$ nous avons que s tend vers $+\infty$. Par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t + \theta^* + \omega) - u(t + \theta^*)|_\alpha = \lim_{s \rightarrow +\infty} |u(s + \omega) - u(s)|_\alpha = 0$$

car $u \in \Omega$. Nous déduisons donc que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_{t+\omega} - u_t|_{\mathcal{C}_\alpha} = 0$. $\square$

Lemme 15 *Nous supposons que l'hypothèse (3.8) est vérifiée. Soit $f \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$ et $\phi \in \Omega$. Alors la fonction $\Phi : t \mapsto L(\phi_t) + f(t)$ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$.*

Preuve Puisque L est un opérateur linéaire borné, que ϕ_t et $f(t)$ sont continues, nous déduisons donc que $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}_\alpha)$. En utilisant le lemme 14, nous obtenons

$$|\Phi(t)|_\alpha \leq |L(\phi_t)|_\alpha + |f(t)|_\alpha \leq |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|\phi\|_\Omega + \|f\|_\infty.$$

Ceci implique que $\Phi \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}_\alpha)$. Nous déduisons donc aussi que

$$\|\Phi\|_\infty \leq |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|\phi\|_\Omega + \|f\|_\infty.$$

D'un autre coté, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |\Phi(t+\omega) - \Phi(t)|_\alpha &\leq |L(\phi_{t+\omega}) - L(\phi_t)|_\alpha + |f(t+\omega) - f(t)|_\alpha \\ &\leq |L(\phi_{t+\omega} - \phi_t)|_\alpha + |f(t+\omega) - f(t)|_\alpha \\ &\leq |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|\phi_{t+\omega} - \phi_t\|_{\mathcal{C}_\alpha} + |f(t+\omega) - f(t)|_\alpha. \end{aligned}$$

Puisque $\phi \in \Omega$, en utilisant le lemme 14 et le fait que $f \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$, nous déduisons que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Phi(t+\omega) - \Phi(t)|_\alpha = 0.$$

Ceci termine la preuve. $\square$

Proposition 11 *Nous supposons que l'hypothèse (3.8) est vérifiée. Soit $f \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$. Pour chaque $\phi \in \Omega$, définissons l'opérateur non linéaire Λ_0 par*

$$(\Lambda_0 \phi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-r, 0], \\ T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(u_s) + f(s)]ds & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Alors l'application Λ_0 définie sur Ω est à valeur dans Ω .

Preuve Par définition l'opérateur Λ_0 est défini sur $[-r, +\infty[$. Puisque $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$, nous avons $(\Lambda_0 \phi)(t)|_{[-r, 0]} \in \mathcal{C}_\alpha$. Puisque $T(t)\varphi(0) \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$, il suffit de montrer que la fonction

$$v : t \mapsto \int_0^t T(t-s)[L(\phi_s) + f(s)]ds \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha).$$

Pour $t \geq 0$, posons $\Phi(t) = L(\phi_t) + f(t)$. Alors

$$v(t+\omega) - v(t) = \int_0^{t+\omega} T(t+\omega-s)\Phi(s)ds - \int_0^t T(t-s)\Phi(s)ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\omega T(t + \omega - s)\Phi(s)ds + \int_\omega^{t+\omega} T(t + \omega - s)\Phi(s)ds \\
&\quad - \int_0^t T(t - s)\Phi(s)ds.
\end{aligned}$$

Alors

$$|v(t + \omega) - v(t)|_\alpha \leq |I_1(t)|_\alpha + |I_2(t)|_\alpha,$$

où

$$I_1(t) = \int_0^\omega T(t + \omega - s)\Phi(s)ds,$$

et

$$I_2(t) = \int_\omega^{t+\omega} T(t + \omega - s)\Phi(s)ds - \int_0^t T(t - s)\Phi(s)ds.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
|I_1(t)|_\alpha &= \left| \int_0^\omega T(t + \omega - s)\Phi(s)ds \right|_\alpha \\
&\leq \int_0^\omega |T(t + \omega - s)\Phi(s)|_\alpha ds.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\int_0^\omega |T(t + \omega - s)\Phi(s)|_\alpha ds &= \int_0^\omega \|A^\alpha T(t + \omega - s)\Phi(s)\| ds \\
&= \int_0^\omega \|T(t + \omega - s)A^\alpha \Phi(s)\| ds \\
&\leq \int_0^\omega M e^{-\delta(t+\omega-s)} \|A^\alpha \Phi(s)\| ds,
\end{aligned}$$

nous déduisons donc que

$$\begin{aligned}
|I_1(t)|_\alpha &\leq M e^{-\delta(t+\omega)} \int_0^\omega e^{\delta s} |\Phi|_\alpha ds \\
&\leq M e^{-\delta(t+\omega)} \|\Phi\|_\infty \int_0^\omega e^{\delta s} ds \\
&\leq M e^{-\delta(t+\omega)} \|\Phi\|_\infty \frac{1}{\delta} (e^{\delta\omega} - 1) \\
&\leq M e^{-\delta(t+\omega)} \|\Phi\|_\infty \frac{1}{\delta} e^{\delta\omega} \\
&\leq M e^{-\delta t} \|\Phi\|_\infty \frac{1}{\delta}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow +\infty} |I_1(t)|_\alpha = 0$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Phi(t+\omega) - \Phi(t)|_\alpha = 0$, nous pouvons alors trouver T_ϵ suffisamment grand tel que

$$|\Phi(t+\omega) - \Phi(t)|_\alpha < \frac{\delta}{M}\epsilon, \quad \text{pour } t > T_\epsilon.$$

En faisant le changement de variable $y = s - \omega$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_0^t T(t-s)\Phi(s+\omega)ds - \int_0^t T(t-s)\Phi(s)ds, \\ &= \int_0^t T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds. \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons

$$|I_2(t)|_\alpha \leq \left| \int_0^{T_\epsilon} T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds \right|_\alpha + \left| \int_{T_\epsilon}^t T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds \right|_\alpha.$$

En observant que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{T_\epsilon} T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds \right|_\alpha &\leq \int_0^{T_\epsilon} |T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))|_\alpha ds \\ &\leq \int_0^{T_\epsilon} \|A^\alpha T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))\| ds \\ &\leq \int_0^{T_\epsilon} \|T(t-s)A^\alpha(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))\| ds \\ &\leq \int_0^{T_\epsilon} M e^{-\delta(t-s)} |\Phi(s+\omega) - \Phi(s)|_\alpha ds \\ &\leq 2 \int_0^{T_\epsilon} M e^{-\delta(t-s)} \|\Phi\|_\infty ds \\ &\leq 2M \|\Phi\|_\infty e^{-\delta t} \int_0^{T_\epsilon} e^{\delta s} ds \\ &\leq 2M \|\Phi\|_\infty e^{-\delta t} \left(\frac{e^{\delta T_\epsilon}}{\delta} - \frac{1}{\delta} \right), \end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{T_\epsilon} T(t-s)(\Phi(s+\omega) - \Phi(s))ds \right|_\alpha = 0$$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} 2M \|\Phi\|_\infty e^{-\delta t} \left(\frac{e^{\delta T_\epsilon}}{\delta} - \frac{1}{\delta} \right) = 0$. Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
\left| \int_{T_\epsilon}^t T(t-s) (\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds \right|_\alpha &\leq \int_{T_\epsilon}^t |T(t-s) (\Phi(s+\omega) - \Phi(s))|_\alpha ds \\
&\leq \int_{T_\epsilon}^t \|A^\alpha T(t-s) (\Phi(s+\omega) - \Phi(s))\| ds \\
&\leq \int_{T_\epsilon}^t \|T(t-s) A^\alpha (\Phi(s+\omega) - \Phi(s))\| ds \\
&\leq \int_{T_\epsilon}^t \|T(t-s)\| \|A^\alpha (\Phi(s+\omega) - \Phi(s))\| ds \\
&\leq \int_{T_\epsilon}^t \|T(t-s)\| \|\Phi(s+\omega) - \Phi(s)\|_\alpha ds \\
&\leq \int_{T_\epsilon}^t M e^{-\delta(t-s)} \frac{\delta}{M} \epsilon ds \\
&\leq \epsilon \int_{T_\epsilon}^t e^{-\delta(t-s)} \delta ds \\
&\leq \epsilon (1 - e^{-\delta(t-T_\epsilon)}) \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{T_\epsilon}^t T(t-s) (\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} |I_2(t)|_\alpha &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_0^{T_\epsilon} T(t-s) (\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds \right|_\alpha \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left| \int_{T_\epsilon}^t T(t-s) (\Phi(s+\omega) - \Phi(s)) ds \right|_\alpha.
\end{aligned}$$

Nous déduisons donc que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |I_2(t)|_\alpha = 0$.

Nous avons montré que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |I_1(t)|_\alpha = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} |I_2(t)|_\alpha = 0$. Or

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |v(t+\omega) - v(t)|_\alpha \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} |I_1(t)|_\alpha + \lim_{t \rightarrow +\infty} |I_2(t)|_\alpha.$$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow +\infty} |v(t + \omega) - v(t)|_\alpha = 0$. Nous avons donc que

$$t \rightarrow \int_0^t T(t-s)[L(\phi_s) + f(s)]ds \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha).$$

Nous avons prouvé que

$$\checkmark(\wedge_0 \phi) \text{ est définie sur } [-r, +\infty[,$$

$$\checkmark(\wedge_0 \phi)|_{[-r, 0]} \in \mathcal{C}_\alpha,$$

$$\checkmark(\wedge_0 \phi)|_{\mathbb{R}^+} \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha).$$

Nous avons donc montré que $(\wedge_0 \phi) \in \Omega$. $\square$

Théorème 26 *Nous supposons que l'hypothèse (3.8) est vérifiée et que $f \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$. Soit v la restriction de la mild solution de l'équation (3.2) à $\mathbb{R}^+$. Alors $v \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$.*

Preuve Par définition nous avons pour tout $t \geq 0$,

$$v(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(u_s) + f(s)]ds.$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition 11, avec $u = \phi$, pour obtenir que v appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$. $\square$

Maintenant nous faisons les hypothèses suivantes.

(H5) La fonction $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}_\alpha \mapsto \mathbb{X}_\alpha$, $t \mapsto g(t, u)$ est uniformément asymptotiquement ω -périodique sur les ensembles bornés et asymptotiquement uniformément continu sur les ensembles bornés. Il existe aussi une constante $K_g \geq 0$ telle que

$$|g(t, u) - g(t, v)|_\alpha \leq K_g |u - v|_\alpha \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+ (u, v) \in \mathbb{X}^2.$$

$$\textbf{(H6)} \quad \frac{M}{\delta} (|L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} + K_g) < 1.$$

Définition 28 *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$. Une fonction $u : [-r, +\infty[\rightarrow \mathbb{X}_\alpha$ est la mild solution de l'équation (3.3) si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $u : [-r, +\infty[\rightarrow \mathbb{X}_\alpha$ est continue ;

ii) $u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(u_s) + g(s, u(s))]ds$ pour $t \geq 0$;

iii) $u_0 = \varphi$.

Proposition 12 *Nous supposons que l'hypothèse (3.8) est vérifiée. Nous supposons aussi que la fonction g est uniformément S -asymptotiquement ω -périodique sur les ensembles bornés et que **(H5)** est vérifié. Pour chaque $\phi \in \Omega$, définissons l'opérateur non linéaire Λ_1 par*

$$(\Lambda_1\phi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-r, 0], \\ T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(u_s) + g(s, u(s))]ds & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Alors l'opérateur Λ_1 défini sur Ω est à valeur dans Ω .

Preuve Nous avons $\phi|_{\mathbb{R}^+} \in SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$ car $\phi \in \Omega$. Puisque g vérifie l'hypothèse **(H5)**, le théorème 12 nous permet de déduire que la fonction $h : t \mapsto g(t, \phi(t))$ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$. En procédant exactement comme dans la preuve de la proposition 11 et en remplaçant $f(\cdot)$ par $h(\cdot)$, nous pouvons dire que l'opérateur Λ_1 défini sur Ω est à valeur dans Ω . $\square$

Théorème 27 *Nous supposons que les hypothèses (3.8) et **(H6)** sont vérifiées. Nous supposons aussi que la fonction g est uniformément S -asymptotiquement ω -périodique sur les ensembles bornés et que **(H5)** est vérifiée. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$, l'équation (3.3) a une unique mild solution dans Ω .*

Preuve Considérons l'opérateur $Q : \Omega \mapsto \Omega$ défini par :

$$(Qu)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \in [-r, 0], \\ T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[L(u_s) + g(s, u(s))]ds & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

La proposition 12 montre que l'opérateur Q défini sur Ω est à valeur dans Ω . Par conséquent l'opérateur Q est bien défini. Soient $u, v \in Q$. Pour tout $t \in [-r, +\infty[$, nous avons

$$\begin{aligned} & |(Qu)(t) - (Qv)(t)|_\alpha \\ &= \left| \int_0^t T(t-s)[(L(u_s) - L(v_s)) + (g(s, u(s)) - g(s, v(s)))]ds \right|_\alpha \\ &\leq \int_0^t |T(t-s)[(L(u_s) - L(v_s)) + (g(s, u(s)) - g(s, v(s)))]|_\alpha ds \\ &\leq \int_0^t \|A^\alpha T(t-s)[(L(u_s) - L(v_s)) + (g(s, u(s)) - g(s, v(s)))]\| ds \\ &\leq \int_0^t \|T(t-s)A^\alpha[(L(u_s) - L(v_s)) + (g(s, u(s)) - g(s, v(s)))]\| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t M e^{-\delta(t-s)} |(L(u_s) - L(v_s)) + (g(s, u(s)) - g(s, v(s)))|_\alpha ds \\
&\leq \int_0^t M e^{-\delta(t-s)} [|L(u_s) - L(v_s)|_\alpha + |g(s, u(s)) - g(s, v(s))|_\alpha] ds \\
&\leq \int_0^t M e^{-\delta(t-s)} |L(u_s) - L(v_s)|_\alpha ds \\
&\quad + \int_0^t M e^{-\delta(t-s)} |g(s, u(s)) - g(s, v(s))|_\alpha ds \\
&\leq \int_0^t M e^{-\delta(t-s)} |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} |u_s - v_s|_{\mathcal{C}_\alpha} ds \\
&\quad + \int_0^t M e^{-\delta(t-s)} K_g |u(s) - v(s)|_\alpha ds \\
&\leq \int_0^t M e^{-\delta t} e^{\delta s} |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u - v\|_\Omega ds \\
&\quad + \int_0^t M e^{-\delta t} e^{\delta s} K_g \|u - v\|_\infty ds \\
&\leq M e^{-\delta t} |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u - v\|_\Omega \int_0^t e^{\delta s} ds \\
&\quad + M e^{-\delta t} K_g \|u - v\|_\infty \int_0^t e^{\delta s} ds \\
&\leq \frac{M}{\delta} e^{-\delta t} |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u - v\|_\Omega (e^{\delta t} - 1) \\
&\quad + \frac{M}{\delta} e^{-\delta t} K_g \|u - v\|_\infty (e^{\delta t} - 1) \\
&\leq \frac{M}{\delta} e^{-\delta t} |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u - v\|_\Omega e^{\delta t} + \frac{M}{\delta} e^{-\delta t} K_g \|u - v\|_\infty e^{\delta t} \\
&\leq \frac{M}{\delta} |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u - v\|_\Omega + \frac{M}{\delta} K_g \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Puisque $\|u - v\|_\infty \leq \|u - v\|_\Omega$, nous déduisons que pour tout $t \geq -r$,

$$\begin{aligned}
|(Qu)(t) - (Qv)(t)|_\alpha &\leq \frac{M}{\delta} |L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \|u - v\|_\Omega + \frac{M}{\delta} K_g \|u - v\|_\Omega \\
&\leq \frac{M}{\delta} (|L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} + K_g) \|u - v\|_\Omega.
\end{aligned}$$

Puisque l'hypothèse (3.8) est vérifiée, l'opérateur Q a un unique point fixe. Par conséquent l'équation (3.3) a une unique solution $u \in \Omega$. La preuve est maintenant complète. $\square$

APPLICATION

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) + \int_{-r}^0 q(\theta)y(t+\theta, x)d\theta + g(t, u(t, x)) \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in [0, \pi]$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(\theta, x) = \phi(\theta, x), \quad \text{pour } \theta \in [-r, 0] \text{ et } x \in [0, \pi] \quad (3.9)$$

où $q : [-r, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ est continu. Afin d'étudier ce système dans la forme abstraite de l'équation (3.3), nous choisissons $\mathbb{X} = L^2([0, \pi])$ et l'opérateur $A : D(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ est donné par $Au = u''$ qui a pour domaine

$$D(A) = \{u \in \mathbb{X} : u' \in \mathbb{X}, u'' \in \mathbb{X}, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Alors $-A$ génère un semi-groupe analytique $T(\cdot)$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{-t}$, $t \geq 0$ ([65]). De plus, les valeurs propres de A sont $n^2\pi^2$ et les vecteurs propres correspondantes sont $e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $n = 1, 2, \dots$. Nous choisissons $\alpha = \frac{1}{2}$. De là, nous avons

$$(a) \quad Au = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 \langle u, e_n \rangle e_n \text{ si } u \in D(A);$$

$$(b) \quad A^{-\frac{1}{2}}u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle u, e_n \rangle e_n \text{ si } u \in \mathbb{X};$$

$$(c) \quad \text{L'opérateur } A^{\frac{1}{2}} \text{ est donné par}$$

$$A^{\frac{1}{2}}u = \sum_{n=1}^{\infty} n \langle u, e_n \rangle e_n$$

$$\text{pour chaque } u \in D(A^{\frac{1}{2}}) = \{u \in \mathbb{X} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle u, e_n \rangle e_n \in \mathbb{X}\}.$$

Soit $\mathbb{X}_{\frac{1}{2}} = (D(A^{\frac{1}{2}}), |\cdot|_{\frac{1}{2}})$ où $|x|_{\frac{1}{2}} = \|A^{\frac{1}{2}}x\|_2$ pour chaque $x \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Soit $\mathcal{C}_\alpha$ l'espace de Banach $C([-r, 0], \mathbb{X}_{\frac{1}{2}})$ muni de la norme $|\cdot|_\infty$. Nous définissons $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}_{\frac{1}{2}} \mapsto \mathbb{X}_{\frac{1}{2}}$ et $\phi : [-r, 0] \times [0, \pi] \mapsto \mathbb{X}_{\frac{1}{2}}$ par $g(t, u(t))(x) = g(t, u(t, x))$ et $\phi(\theta)x = \phi(\theta, x)$ respectivement. Nous définissons l'opérateur L par

$$L(\phi)(x) = \int_{-r}^0 q(\theta)\phi(\theta)(x)d\theta \quad \text{pour } x \in [0, \pi], \phi \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons $A^{\frac{1}{2}}\phi(\theta)(x) \in L^2([-r, 0])$ car $\phi \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$. Nous déduisons alors que

$$\begin{aligned} |A^{\frac{1}{2}}L(\phi)(x)|^2 &\leq \int_{-r}^0 q(\theta)^2 d\theta \int_{-r}^0 |A^{\frac{1}{2}}\phi(\theta)(x)|^2 d\theta \\ &\leq r \left(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} q(\theta) \right)^2 \int_{-r}^0 |A^{\frac{1}{2}}\phi(\theta)(x)|^2 d\theta \end{aligned}$$

car q est continue sur $[-r, 0]$ qui est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$. Par conséquent, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \int_0^x |A^{\frac{1}{2}}L(\phi)(x)|^2 dx &\leq r \left(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} q(\theta) \right)^2 \int_0^\pi \int_{-r}^0 |A^{\frac{1}{2}}\phi(\theta)(x)|^2 d\theta dx \\ &= r \left(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} q(\theta) \right)^2 \int_{-r}^0 \int_0^\pi |A^{\frac{1}{2}}\phi(\theta)(x)|^2 dx d\theta. \end{aligned}$$

Nous déduisons alors que

$$|L(\phi)|_{\frac{1}{2}} \leq r^2 \left(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} q(\theta) \right)^2 |\phi|_{\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}}^2.$$

Ceci montre que L est un opérateur borné défini sur $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}$ à valeur dans $\mathbb{X}_{\frac{1}{2}}$. Par conséquent (3.9) prend la forme abstraite (3.3).

Nous supposons que $\int_{-r}^0 |q(\theta)| d\theta < 1$ et que la fonction $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}_\alpha \mapsto \mathbb{X}_\alpha$, $t \mapsto g(t, u)$ est continue et qu'il existe une constante $K_g \geq 0$ telle que

$$|g(t, u) - g(t, v)|_\alpha \leq K_g |u - v|_\alpha \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}^+, (u, v) \in \mathbb{X}^2.$$

Nous remarquons que de telles fonctions existent. Prenons par exemple $f(t, x) = e^{-t}x$. Alors $|f(t, x) - f(t, y)|_{\frac{1}{2}} \leq |x - y|_{\frac{1}{2}}$.

Théorème 28 *Nous supposons que g est uniformément S -asymptotiquement ω -périodique sur les ensembles bornés et asymptotiquement uniformément continue sur les ensembles bornés. Alors le système (3.9) a une solution unique définie sur $[-r, +\infty[$ telle que sa restriction à $\mathbb{R}^+$ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$ si $(r^2(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} q(\theta))^2 + K_g) < 1$.*

Preuve Il suffit d'appliquer le théorème 27. $-A$ génère un semi-groupe analytique $T(\cdot)$ tel que $\|T(t)\| \leq e^{-t}$, $t \geq 0$ ([65]). Par conséquent $M = \delta = 1$ et l'hypothèse (3.8) est vérifiée. Nous avons montré que

$$|L(\phi)|_{\frac{1}{2}} \leq r^2 \left(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} q(\theta) \right)^2 |\phi|_{\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}}^2.$$

Nous déduisons donc que

$$|L|_{\mathbb{B}(\mathcal{C}_\alpha, \mathbb{X}_\alpha)} \leq r^2 \left(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} q(\theta) \right)^2.$$

Or $(r^2(\sup_{-r \leq \theta \leq 0} q(\theta))^2 + K_g) < 1$. Par conséquent l'hypothèse **(H6)** est vérifiée. Alors le système (3.9) a une solution unique définie sur $[-r, +\infty[$ telle que sa restriction à $\mathbb{R}^+$ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X}_\alpha)$. $\square$

3.4 Une application pour une équation différentielle à arguments constants par morceaux

3.4.1 Solutions S-asymptotiquement ω -périodiques dans le cas linéaire

Définition 29 Une solution de l'équation (3.4) sur $\mathbb{R}^+$ est une fonction x qui vérifie les conditions suivantes :

- 1- $x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- 2- La dérivée $x'(t)$ existe pour tout point $t \in \mathbb{R}^+$, mais éventuellement n'est dérivable qu'à la droite ou à la gauche du point $[t] \in \mathbb{R}^+$.
- 3- $x(t)$ vérifie l'équation (3.4) sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Nous supposons que A génère un C_0 semi-groupe $T(t)$ et que u est solution de (3.4). Nous supposons aussi que $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Alors la fonction g définie par $g(s) = T(t-s)x(s)$ est différentiable pour $s < t$.

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)x'(s) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)Ax(s) + T(t-s)A_0x([s]) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)A_0x([s]) + T(t-s)f(s) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, $T(t-s)f(s)$ est intégrable sur $[0, t]$ avec $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction $x([s])$ est une fonction étagée. Par conséquent $x([s])$ est intégrable sur $[0, t]$ avec $t \in \mathbb{R}^+$. En intégrant (3.10) sur $[0, t]$, nous obtenons que

$$x(t) - T(t)x(0) = \int_0^t T(t-s)A_0x([s])ds + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Par conséquent, nous définissons

Définition 30 Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. La fonction $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ donnée par

$$x(t) = T(t)c_0 + \int_0^t T(t-s)A_0x([s])ds + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

est la mild solution de l'équation (3.4).

Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes.

(H.7) L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe exponentiellement stable $(T(t))_{t \geq 0}$ telle que il existe des constantes $M > 0$ et $\delta > 0$ avec

$$\|T(t)\|_{B(\mathbb{X})} \leq Me^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Lemme 16 Sous l'hypothèse **(H.7)**, la fonction L définie par

$$L(t) = T(t)x(0)$$

appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X})$.

Preuve

$$\begin{aligned} \|L(t+\omega) - L(t)\| &= \|T(t+\omega)x(0) - T(t)x(0)\| \\ &\leq \|T(t+\omega)x(0)\| + \|T(t)x(0)\| \\ &\leq Me^{-\delta(t+\omega)} + Me^{-\delta t} \end{aligned}$$

Puisque $\delta > 0$, nous déduisons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|L(t+\omega) - L(t)\| = 0.$$

Alors $L \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. $\square$

Lemme 17 Supposons que l'hypothèse **(H.7)** est vérifiée. Supposons que l'opérateur A_0 est un opérateur linéaire borné. Soit $\omega \in \mathbb{N}$. Définissons l'opérateur non linéaire $\wedge_1$ par : pour chaque $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$

$$(\wedge_1 \phi)(t) = \int_0^t T(t-s)A_0\phi([s])ds.$$

Alors l'opérateur $\wedge_1$ défini sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeur dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$.

Preuve Nous posons $v(t) = \int_0^t T(t-s)A_0\phi([s])ds$. Pour $t \geq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} v(t+\omega) - v(t) &= \int_0^{t+\omega} T(t+\omega-s)A_0\phi([s])ds - \int_0^t T(t-s)A_0\phi([s])ds \\ &= \int_0^\omega T(t+\omega-s)A_0\phi([s])ds + \int_\omega^{t+\omega} T(t+\omega-s)A_0\phi([s])ds \\ &\quad - \int_0^t T(t-s)\phi(s)ds. \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$\|v(t+\omega) - v(t)\| \leq \|I_1(t)\| + \|I_2(t)\|$$

où

$$I_1(t) = \int_0^\omega T(t+\omega-s)A_0\phi([s])ds$$

et

$$I_2(t) = \int_\omega^{t+\omega} T(t+\omega-s)A_0\phi([s])ds - \int_0^t T(t-s)A_0\phi([s])ds.$$

En remarquant que

$$I_1(t) = T(t) \int_0^\omega T(\omega-s)A_0\phi([s])ds$$

et en utilisant le fait que $(T(t))_{t \geq 0}$ est exponentiellement stable, nous déduisons que

$$\|I_1(t)\| \leq Me^{-\delta t} \|v(\omega)\|.$$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1(t) = 0$.

Nous allons montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi([t+\omega]) - \phi([t])\| = 0$.

Nous avons que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t+\omega) - \phi(t)\| = 0$.

Par conséquent :

$$\forall \epsilon > 0, \exists T_\epsilon^0 \in \mathbb{R}^+, \forall t > T_\epsilon^0 \Rightarrow \|\phi(t+\omega) - \phi(t)\| < \epsilon.$$

Posons $T_\epsilon = [T_\epsilon^0] + 1$. Soit $\epsilon > 0$. Pour $t > T_\epsilon$, nous observons que $[t] \geq T_\epsilon$ car T_ϵ est un entier. Nous déduisons donc que

$$\forall \epsilon > 0, \exists T_\epsilon \in \mathbb{R}^+, \forall t > T_\epsilon \Rightarrow \|\phi([t]+\omega) - \phi([t])\| < \epsilon.$$

Puisque ω est un entier, nous remarquons alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists T_\epsilon \in \mathbb{R}^+, \forall t > T_\epsilon \Rightarrow \|\phi([t + \omega]) - \phi([t])\| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver T_ϵ suffisamment grand tel que

$$\|\Phi([t + \omega]) - \Phi([t])\| < \frac{\delta}{M \|A_0\|} \epsilon, \text{ pour } t > T_\epsilon.$$

Par changement de variable nous déduisons que

$$I_2(t) = \int_0^t T(t-s) A_0(\phi([s + \omega]) - \phi([s])) ds.$$

Alors nous obtenons que

$$\|I_2(t)\| \leq \left\| \int_0^{T_\epsilon} T(t-s) A_0(\phi([s + \omega]) - \phi([s])) ds \right\| + \left\| \int_{T_\epsilon}^t T(t-s) A_0(\phi([s + \omega]) - \phi([s])) ds \right\|.$$

En observant que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{T_\epsilon} T(t-s) A_0(\phi([s + \omega]) - \phi([s])) ds \right\| &\leq \int_0^{T_\epsilon} \|T(t-s)\| \|A_0\| \|\phi([s + \omega]) - \phi([s])\| ds \\ &\leq \int_0^{T_\epsilon} M e^{-\delta(t-s)} \|A_0\| 2\|\phi\|_\infty ds \\ &\leq \frac{M \|A_0\| 2\|\phi\|_\infty}{\delta} (e^{-\delta(t-T_\epsilon)} - e^{-\delta t}) \end{aligned}$$

nous déduisons que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{T_\epsilon} T(t-s) (\Phi([s + \omega]) - \Phi([s])) ds = 0.$$

Nous avons aussi que

$$\begin{aligned} \left\| \int_{T_\epsilon}^t T(t-s) A_0(\Phi([s + \omega]) - \Phi([s])) ds \right\| &\leq \int_{T_\epsilon}^t M e^{-\delta(t-s)} \|A_0\| \frac{\delta}{M \|A_0\|} \epsilon ds \\ &\leq \epsilon \int_{T_\epsilon}^t \delta e^{-\delta(t-s)} ds \\ &\leq \epsilon (1 - e^{-\delta(t-T_\epsilon)}) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{T_\epsilon}^t T(t-s) A_0(\Phi([s + \omega]) - \Phi([s])) ds = 0$.

Nous déduisons donc que $\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t) = 0$, ce qui prouve que $\Lambda_1 \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. $\square$

Théorème 29 *Supposons que l'hypothèse (H.7) est vérifiée. Soit $\omega \in \mathbb{N}$. Alors l'équation (3.4) a une unique solution (mild) S asymptotiquement ω -périodique si*

$$\Theta := \frac{M}{\delta} \|A_0\| < 1.$$

Preuve Définissons l'opérateur non linéaire $\Gamma : SAP_\omega(\mathbb{X}) \mapsto SAP_\omega(\mathbb{X})$ par

$$(\Gamma u)(t) := L(t) + (\wedge_1 u)(t) + \wedge_2(t)$$

pour chaque $u \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, où

$$(\wedge_1 u)(t) = \int_0^t T(t-s) A_0 \phi([s]) ds$$

et

$$\wedge_2(t) = \int_0^t T(t-s) f(s) ds.$$

Vérifions que l'opérateur non linéaire Γ est bien défini.

Le lemme 16 montre que $L(t)$ est une fonction S asymptotiquement ω -périodique. Le lemme 17 montre que l'opérateur $\wedge_1$ défini sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeurs dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$. Dans la preuve du lemme 11, nous montrons que si Φ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X})$ alors l'application

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) \Phi(s) ds$$

est une fonction S -asymptotiquement ω -périodique. Puisque f est une fonction S -asymptotiquement ω -périodique, nous déduisons donc que l'application $\wedge_2$ défini sur $\mathbb{R}^+$ est une fonction S -asymptotiquement ω -périodique. Par conséquent l'opérateur non linéaire Γ défini sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ et à valeur dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$.

Pour tout $\phi, \psi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$,

$$\begin{aligned} & \| \Gamma(\phi)(t) - \Gamma(\psi)(t) \| \\ &= \| T(t)c_0 + \int_0^t T(t-s) A_0 \phi([s]) ds + \int_0^t T(t-s) f(s) ds \\ & \quad - T(t)c_0 - \int_0^t T(t-s) A_0 \psi([s]) ds - \int_0^t T(t-s) f(s) ds \| \\ &\leq \| \int_0^t T(t-s) A_0 (\phi([s]) - \psi([s])) ds \| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|A_0\| \|\phi([s]) - \psi([s])\| ds \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|A_0\| \|\phi - \psi\|_\infty ds \\
&\leq \int_0^t M e^{-\delta(t-s)} ds \|A_0\| \|\phi - \psi\|_\infty \\
&\leq \frac{M}{\delta} \|A_0\| \|\phi - \psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\Theta < 1$, alors l'opérateur a un unique point fixe. L'équation (3.4) a donc une unique (mild) solution S asymptotiquement ω -périodique. $\square$

3.4.2 Solutions S -asymptotiquement ω -périodiques dans le cas nonlinéaire

Définition 31 Une solution de l'équation (3.5) sur $\mathbb{R}^+$ est une fonction $x(t)$ qui vérifie les conditions suivantes :

- 1- $x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- 2- La dérivée $x'(t)$ existe pour tout point $t \in \mathbb{R}^+$, mais éventuellement n'est dérivable qu'à la droite ou à la gauche du point $[t] \in \mathbb{R}^+$.
- 3- $x(t)$ vérifie l'équation (3.5) sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Définition 32 Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. La fonction $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ donnée par

$$x(t) = T(t)c_0 + \int_0^t T(t-s)A_0x([s])ds + \int_0^t T(t-s)g(s, x(s))ds$$

est la mild solution de l'équation (3.5).

Nous faisons maintenant l'hypothèse suivante.

(H.8) La fonction g définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X}$ et à valeurs dans $\mathbb{X}$ est uniformément S -asymptotiquement ω -périodiques sur les ensembles bornés et asymptotiquement uniformément continues sur les ensembles bornés. Il existe une constante $K_g \geq 0$ telle que

$$\|g(t, u) - g(t, v)\| \leq K_g \|u - v\|$$

pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et $\forall u, v \in \mathbb{X}$.

Théorème 30 *Supposons que les hypothèses (H.7)-(H.8) sont vérifiées. Soit $\omega \in \mathbb{N}$. Alors l'équation (3.5) a une unique solution (mild) S asymptotiquement ω -périodique si*

$$\Theta := \frac{M}{\delta} (\|A_0\| + K_g) < 1.$$

Preuve Définissons l'opérateur non linéaire $\Gamma : SAP_\omega(\mathbb{X}) \mapsto SAP_\omega(\mathbb{X})$ par

$$(\Gamma u)(t) := L(t) + (\wedge_1 u)(t) + (\wedge_3 u)(t)$$

pour chaque $u \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, où

$$(\wedge_1 u)(t) = \int_0^t T(t-s) A_0 \phi([s]) ds$$

et

$$(\wedge_3 \phi)(t) = \int_0^t T(t-s) g(s, \phi(s)) ds.$$

Vérifions que l'opérateur $\wedge_3$ est bien défini. Si $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$, alors le théorème 12 nous permet de déduire que la fonction $\Psi(\cdot) = g(\cdot, \phi(\cdot))$ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X})$ quand $\phi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$. Dans la preuve du lemme 11, nous montrons que si Φ appartient à $SAP_\omega(\mathbb{X})$ alors l'application

$$v(t) = \int_0^t T(t-s) \Phi(s) ds$$

est une fonction S -asymptotiquement ω -périodique. Puisque $\Psi(\cdot) = g(\cdot, \phi(\cdot))$ est une fonction S -asymptotiquement ω -périodique, nous déduisons donc que l'opérateur $\wedge_3$ défini sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeurs dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$. Le lemme 17 montre que l'opérateur $\wedge_1$ défini sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeurs dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$. Par conséquent l'opérateur non linéaire Γ défini sur $SAP_\omega(\mathbb{X})$ est à valeur dans $SAP_\omega(\mathbb{X})$.

Pour tout $\phi, \psi \in SAP_\omega(\mathbb{X})$,

$$\begin{aligned} & \|\Gamma(\phi)(t) - \Gamma(\psi)(t)\| \\ &= \|T(t)c_0 + \int_0^t T(t-s) A_0 \phi([s]) ds + \int_0^t T(t-s) g(s, \phi(s)) ds \\ & \quad - T(t)c_0 - \int_0^t T(t-s) A_0 \psi([s]) ds - \int_0^t T(t-s) g(s, \psi(s)) ds\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \int_0^t T(t-s) A_0 (\phi([s]) - \psi([s])) ds \right\| + \left\| \int_0^t T(t-s) (g(s, \phi(s)) - g(s, \psi(s))) ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|A_0\| \|\phi([s]) - \psi([s])\| ds + \int_0^t \|T(t-s)\| \|g(s, \phi(s)) - g(s, \psi(s))\| ds \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\| \|A_0\| \|\phi - \psi\|_\infty ds + \int_0^t \|T(t-s)\| K_g \|\phi - \psi\|_\infty ds \\
&\leq \int_0^t M e^{-\delta(t-s)} ds \|A_0\| \|\phi - \psi\|_\infty + \int_0^t M K_g e^{-\delta(t-s)} ds \|\phi - \psi\|_\infty \\
&\leq \frac{M}{\delta} \|A_0\| \|\phi - \psi\|_\infty + \frac{M}{\delta} K_g \|\phi - \psi\|_\infty \\
&\leq \frac{M}{\delta} (\|A_0\| + K_g) \|\phi - \psi\|_\infty
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\Theta < 1$, alors l'opérateur a un unique point fixe. L'équation (3.4) a donc une unique (mild) solution S asymptotiquement ω -périodique. $\square$

EXAMPLE

Nous traiterons de l'existence et de l'unicité d'une solution S-asymptotiquement ω -périodique des équations données par les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \alpha u([t], x) + f(t) & t \in \mathbb{R}^+, x \in [0, \pi], \alpha \in \mathbb{R} \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.11)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \alpha u([t], x) + g(t, u(t, x)) & t \in \mathbb{R}^+, x \in [0, \pi], \alpha \in \mathbb{R} \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.12)$$

où $\alpha < 1$, $c_0 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\mathbb{X}$, f est une fonction S-asymptotiquement ω -périodique et $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est uniformément S-asymptotiquement ω -périodique sur les ensembles bornés et asymptotiquement uniformément continu sur les ensembles bornés.

Posons $(\mathbb{X}, \|\cdot\|) = (L^2(0, \pi), \|\cdot\|_2)$ et définissons l'opérateur $A : D(A) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ par $Au = u''$ qui a pour domaine de définition

$$D(A) = \{u \in \mathbb{X}, u'' \in \mathbb{X}, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

$$Au(\cdot) = \Delta u = u''(\cdot), \quad \forall u(\cdot) \in D(A).$$

A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe analytique $(T(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathbb{X}$. A a un spectre discret, dont les valeurs propres sont $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$ et

les vecteurs propres correspondant sont $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$. Pour $z \in \mathbb{X}$,

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} (z, v_n) v_n. \text{ Par conséquent } \|T(t)\| \leq e^{-t} \text{ pour } t \geq 0.$$

Posons $u(t)x = u(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (0, \pi)$ et considérons $A_0 : L^2[0, \pi] \mapsto L^2[0, \pi]$, $u \mapsto \alpha u$. Alors A_0 est un opérateur linéaire borné tel que $\|A_0\| = |\alpha|$ et $A_0 u([t]) = \alpha u([t], \cdot)$. Nous supposons aussi que

$$\|g(t, u) - g(t, v)\|_2 \leq K_g \|u - v\|_2,$$

et que

$$|\alpha| + K_g < 1.$$

Théorème 31 *Nous supposons que $\omega \in \mathbb{N}$. Alors le système (3.11) (resp. (3.12)) a une unique mild solution S -asymptotiquement ω -périodique.*

Chapitre 4

Mild solutions presque automorphes pour une équation différentielle neutre à arguments constants par morceaux

Introduction

L'étude des équations différentielles à arguments constants par morceaux a débuté en 1983. Cependant d'une façon générale, les solutions de ces équations sont définies dans des espaces de dimension finie. Ainsi les résultats relatifs à l'équation (2.1) sont obtenus en dimension finie. Nous nous proposons alors de définir la solution d'une équation différentielle à arguments constants par morceaux en considérant la théorie des semi-groupes. Dans [87], Tran Tat Dat donne des conditions d'existence de solutions presque périodiques, périodiques et quasi périodiques de l'équation neutre à arguments constants par morceaux suivante

$$x'(t) = Ax(t) + \sum_{j=-N}^N A_j x([t+j]) + f(t). \quad (4.1)$$

Cependant ces résultats sont obtenus dans un espace de Banach de dimension finie. En utilisant la théorie des semi-groupes, nous proposerons la "mild solution" de l'équation (4.1) et par conséquent nous travaillerons en dimension infinie. Sous certaines conditions, nous montrons qu'une solution $x(t)$ de l'équation (4.1) est presque automorphe si et seulement si la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$

est presque automorphe . En utilisant la théorie spectrale, nous proposons des conditions d'existence de solutions presque automorphes de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) + A_0x([t]) + A_1x([t+1]) + f(t). \quad (4.2)$$

4.1 Solutions presque automorphes dans le cas linéaire

Définition 33 Une solution de l'équation (4.1) sur $\mathbb{R}$ est une fonction $x(t)$ qui vérifie les conditions suivantes :

- 1- $x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2- La dérivée $x'(t)$ existe pour tout point $t \in \mathbb{R}$, mais éventuellement n'est dérivable qu'à la droite ou à la gauche du point $[t] \in \mathbb{R}$.
- 3- $x(t)$ vérifie l'équation (4.1) sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Nous supposons que A génère un C_0 semi-groupe $T(t)$ et que u est solution de (4.1). Nous supposons aussi que $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Alors la fonction g définie par $g(s) = T(t-s)x(s)$ est différentiable pour $s < t$.

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)x'(s) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)Ax(s) \\ &\quad + T(t-s)A_{-N}x([s-N]) + \dots + T(t-s)A_Nx([s+N]) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)A_{-N}x([s-N]) + \dots + T(t-s)A_Nx([s+N]) + T(t-s)f(s) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Comme $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $T(t-s)A_{-N}x([s-N]), \dots, T(t-s)A_0x([s]), \dots, T(t-s)A_Nx([s+N])$ et $T(t-s)f(s)$ sont intégrables sur $[n, t[$ avec $t \in [n, n+1[$ et $n \in \mathbb{Z}$. En intégrant (4.3) sur $[n, t[$, nous obtenons que

$$x(t) - T(t-n)x(n) = \sum_{j=-N}^N \int_n^t T(t-s)A_jx(n+j)ds + \int_n^t T(t-s)f(s)ds.$$

Par conséquent, nous définissons

Définition 34 Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-group $T(t)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. La fonction $x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ donnée par

$$x(t) = T(\{t\})x([t]) + \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds x([t+j]) + \int_{[t]}^t T(t-s)f(s)ds$$

est la mild solution de l'équation (4.1).

Remarque 7 La mild solution étant continue sur $\mathbb{R}$, nous obtenons donc que pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$x(n+1) = T(1)x(n) + \sum_{j=-N}^N \int_n^{n+1} T(n+1-s)A_j ds x(n+j) + \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds.$$

Lemme 18 Si f est une fonction presque automorphe, alors la suite $\{\int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe.

Preuve Comme $f(t)$ est une fonction presque automorphe, pour toute suite $\{n'_k\}$, il existe une sous-suite $\{n_k\}$ et une fonction mesurable $g(t)$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + n_k) = g(t) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(t - n_k) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Montrons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{n+n_k}^{n+1+n_k} T(n+1+n_k-s)f(s)ds = \int_n^{n+1} T(n+1-s)g(s)ds.$$

En utilisant le changement de variable $y = s - n_k - n$, nous obtenons

$$\int_{n+n_k}^{n+1+n_k} T(n+1+n_k-s)f(s)ds = \int_0^1 T(1-s)f(s+n_k+n)ds.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 T(1-s)f(s+n_k+n)ds &= \int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} T(1-s)f(s+n_k+n)ds \\ &= \int_0^1 T(1-s)g(s+n)ds. \\ &= \int_n^{n+1} T(n+1-s)g(s)ds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{n+n_k}^{n+1+n_k} T(n+1+n_k-s)f(s)ds = \int_n^{n+1} T(n+1-s)g(s)ds.$$

Montrons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{n-n_k}^{n+1-n_k} T(n+1-n_k-s)g(s)ds = \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds.$$

En utilisant le changement de variable $y = s + n_k - n$, nous obtenons

$$\int_{n-n_k}^{n+1-n_k} T(n+1-n_k-s)g(s)ds = \int_0^1 T(1-s)g(s-n_k+n)ds.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, nous déduisons que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 T(1-s)g(s-n_k+n)ds &= \int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} T(1-s)g(s-n_k+n)ds \\ &= \int_0^1 T(1-s)f(s+n)ds. \\ &= \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{n-n_k}^{n+1-n_k} T(n+1-n_k-s)g(s)ds = \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds.$$

□

Lemme 19 *Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, que $A_{-N}, \dots, A_N$ sont des opérateurs linéaires bornés et que $f(t)$ est une fonction presque automorphe. Soit $x(t)$ une mild solution bornée de l'équation (4.1) sur $\mathbb{R}$. Alors $x(t)$ est presque automorphe ssi la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe.*

Preuve Il est évident que si $x(t)$ est presque automorphe, la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe.

Maintenant supposons que $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe. Nous allons prouver que $x(t)$ est presque automorphe. La preuve se divise en plusieurs

étapes.

Étape 1 :

Nous supposons que $\{n'_k\}$ est une suite à valeurs entières. Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ et une suite $\{v(n)\}$ telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(n + n_k) = v(n); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v(n - n_k) = x(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t + n_k) = g(t); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(t - n_k) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.5)$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $[t]$ est la partie entière et $\{t\}$ la partie fractionnaire de t . Alors, définissons

$$V(t) = T(\{t\})v([t]) + \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds v([t+j]) + \int_{[t]}^t T(t-s)g(s)ds.$$

Nous posons $C = \max\{\|A_{-N}\|, \dots, \|A_N\|\}$. Comme $\{t\} \subset [0, 1[$, nous remarquons donc que il existe $M > 0$ tel que $\|T(\{t\})\| \leq M$.

Montrons que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + n_k) - V(t)\| = 0$.

Nous avons

$$\begin{aligned} & \|x(t+n_k) - V(t)\| \\ & \leq \|T(\{t+n_k\})x([t]+n_k) - T(\{t\})v([t])\| \\ & + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+n_k]}^{t+n_k} T(t+n_k-s)A_j ds x([t+n_k+j]) - \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds v([t+j]) \right\| \\ & + \left\| \int_{[t+n_k]}^{t+n_k} T(t+n_k-s)f(s)ds - \int_{[t]}^t T(t-s)g(s)ds \right\| \\ & \leq \|T(\{t\})x([t]+n_k) - T(\{t\})v([t])\| \\ & + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds x([t+n_k+j]) - \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds v([t+j]) \right\| \\ & + \left\| \int_{[t]}^t T(t-s)f(s+n_k)ds - \int_{[t]}^t T(t-s)g(s)ds \right\| \\ & \leq \|T(\{t\})(x([t]+n_k) - v([t]))\| + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds (x([t+n_k+j]) - v([t+j])) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_{[t]}^t T(t-s) (f(s+n_k) - g(s)) ds \right\| \\
& \leq \|T(\{t\})\| \|x([t]+n_k) - v([t])\| + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t-s) A_j ds \right\| \|x([t+n_k+j]) - v([t+j])\| \\
& + \int_{[t]}^t \|T(t-s)\| \|f(s+n_k) - g(s)\| ds \\
& \leq M \|x([t]+n_k) - v([t])\| + \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t \|T(t-s)\| \|A_j\| ds \|x([t+n_k+j]) - v([t+j])\| \\
& + \int_{[t]}^t \|T(t-s)\| \|f(s+n_k) - g(s)\| ds \\
& \leq M \|x([t]+n_k) - v([t])\| + MC(2N+1) \sum_{j=-N}^N \|x([t+n_k+j]) - v([t+j])\| \\
& + \int_{[t]}^t M \|f(s+n_k) - g(s)\| ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t+n_k) - V(t)\| \\
& \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M \|x([t]+n_k) - v([t])\| + \lim_{k \rightarrow \infty} MC(2N+1) \sum_{j=-N}^N \|x([t+n_k+j]) - v([t+j])\| \\
& + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[t]}^t M \|f(s+n_k) - g(s)\| ds.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\|f(s+n_k) - g(s)\| \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

et

$$\int_{[t]}^t \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} ds \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty},$$

nous déduisons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t+n_k) - V(t)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} M \|x([t] + n_k) - v([t])\| + \lim_{k \rightarrow \infty} MC(2N+1) \sum_{j=-N}^N \|x([t + n_k + j]) - v([t + j])\| \\
&+ \int_{[t]}^t \lim_{k \rightarrow \infty} M \|f(s + n_k) - g(s)\| ds
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

$$\text{Par conséquent } \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + n_k) - V(t)\| = 0.$$

$$\text{Montrons que } \lim_{k \rightarrow \infty} \|V(t - n_k) - x(t)\| = 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
&\|V(t - n_k) - x(t)\| \\
&\leq \|T(\{t - n_k\})v([t] - n_k) - T(\{t\})x([t])\| \\
&+ \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t-n_k]}^{t-n_k} T(t - n_k - s) A_j ds v([t - n_k + j]) - \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t - s) A_j ds x([t + j]) \right\| \\
&+ \left\| \int_{[t-n_k]}^{t-n_k} T(t - n_k - s) g(s) ds - \int_{[t]}^t T(t - s) f(s) ds \right\| \\
&\leq \|T(\{t\})v([t] - n_k) - T(\{t\})x([t])\| \\
&+ \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t - s) A_j ds v([t - n_k + j]) - \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t - s) A_j ds x([t + j]) \right\| \\
&+ \left\| \int_{[t]}^t T(t - s) g(s - n_k) ds - \int_{[t]}^t T(t - s) f(s) ds \right\| \\
&\leq \|T(\{t\})(v([t] - n_k) - x([t]))\| + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t - s) A_j ds (v([t - n_k + j]) - x([t + j])) \right\| \\
&+ \left\| \int_{[t]}^t T(t - s) (g(s - n_k) - f(s)) ds \right\| \\
&\leq \|T(\{t\})\| \|v([t] - n_k) - x([t])\| + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t - s) A_j ds \right\| \|v([t - n_k + j]) - x([t + j])\| \\
&+ \int_{[t]}^t \|T(t - s)\| \|g(s - n_k) - f(s)\| ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M||v([t]-n_k)-x([t])|| + \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t ||T(t-s)|| ||A_j|| ds ||v([t+n_k+j])-x([t+j])|| \\
&+ \int_{[t]}^t ||T(t-s)|| ||g(s-n_k)-f(s)|| ds \\
&\leq M||v([t]-n_k)-x([t])|| + MC(2N+1) \sum_{j=-N}^N ||v([t-n_k+j])-x([t+j])|| \\
&+ \int_{[t]}^t M||g(s-n_k)-f(s)|| ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \rightarrow \infty} ||V(t-n_k)-x(t)|| \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} M||v([t]+n_k)-x([t])|| + \lim_{k \rightarrow \infty} MC(2N+1) \sum_{j=-N}^N ||v([t+n_k+j])-x([t+j])|| \\
&+ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[t]}^t M||g(s-n_k)-f(s)|| ds.
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$||g(s-n_k)-f(s)|| \leq ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty}$$

et

$$\int_{[t]}^t ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty} ds \leq ||f||_{\infty} + ||g||_{\infty},$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \rightarrow \infty} ||V(t-n_k)-x(t)|| \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} M||v([t]-n_k)-x([t])|| + \lim_{k \rightarrow \infty} MC(2N+1) \sum_{j=-N}^N ||v([t-n_k+j])-x([t+j])|| \\
&+ \int_{[t]}^t \lim_{k \rightarrow \infty} M||g(s-n_k)-f(s)|| ds
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

$$\text{Par conséquent } \lim_{k \rightarrow \infty} ||V(t-n_k)-x(t)|| = 0.$$

Étape 2 :

Maintenant nous considérons le cas général où $(s'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas nécessairement une suite à valeurs entières.

Soient $n'_k = [s'_k]$, $t'_k = \{s'_k\}$ pour chaque k . Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ de $\{n'_k\}$ et une suite $\{v(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que (4.4) et (4.5) sont vérifiées. Il existe aussi une sous-suite $\{t_k\}$ de $\{t'_k\}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0 \in [0, 1]$.

Tout d'abord considérons le cas où $0 < \{t_0 + t\}$. Nous montrerons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_k + n_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_0 + n_k) = v(t_0 + t).$$

Tout d'abord, vérifions que pour k suffisamment grand nous avons

$$[t + t_0] = [t + t_k].$$

Pour $\epsilon = \{t_0 + t\}$:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall k > N_0 \Rightarrow |t + t_k - (t + t_0)| < \{t_0 + t\}$$

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall k > N_0 \Rightarrow [t_0 + t] < t + t_k$$

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall k > N_0 \Rightarrow [t_0 + t] \leq [t + t_k].$$

Montrons que $\{t + t_k\} > 0$.

Comme $\{t + t_0\} > 0$, nous déduisons que $t + t_0 \neq [t + t_k]$. Si $\{t + t_k\} = 0$ alors $t + t_k = [t + t_k]$. Par conséquent $t + t_0 \neq t + t_k$ et $t_0 - t_k \neq 0$. Nous obtenons alors deux cas : $t_0 - t_k > 0$ ou $t_0 - t_k < 0$. Si $t_0 - t_k > 0$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} t_0 - t_k > \lim_{k \rightarrow \infty} 0$. Par conséquent $0 > 0$ (absurde). Si $t_0 - t_k < 0$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} t_0 - t_k < \lim_{k \rightarrow \infty} 0$. Par conséquent $0 < 0$ (absurde).

Pour $\epsilon = \{t_k + t\}$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow |t + t_k - (t + t_0)| < \{t_k + t\}$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow t + t_k - (t + t_0) < \{t + t_k\}$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow -(t + t_0) < -[t + t_k]$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow [t + t_k] < t + t_0$$

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall k > N_1 \Rightarrow [t + t_k] \leq [t + t_0].$$

Posons $N = \max\{N_0, N_1\}$. Nous obtenons donc que pour tout $k > N$ que $[t + t_k] \leq [t + t_0]$ et que $[t + t_k] \geq [t + t_0]$. Par conséquent pour tout $k > N$, $[t + t_0] = [t + t_k]$.

Considérons le cas où $t_k + t \geq t_0 + t$.

La suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ étant bornée, l'image de la fonction f étant précompacte, nous déduisons alors

$$\begin{aligned}
& ||x(t+t_k+n_k) - x(t+t_0+n_k)|| \\
& \leq ||T(\{t+t_k+n_k\})x([t+t_k+n_k]) - T(\{t+t_0+n_k\})x([t+t_0+n_k])|| \\
& + ||\sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_k+n_k]}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)A_j ds x([t+t_k+n_k+j]) \\
& - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0+n_k]}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)A_j ds x([t+t_0+n_k+j])|| \\
& + ||\int_{[t+t_k+n_k]}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)f(s)ds - \int_{[t+t_0+n_k]}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)f(s)ds|| \\
& \leq ||T(\{t+t_k\})x([t+t_0]+n_k) - T(\{t+t_0\})x([t+t_0]+n_k)|| \\
& + ||\sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \\
& - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j)|| \\
& + ||\int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)f(s)ds - \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)f(s)ds|| \quad (3.1) \\
& \leq ||(T(\{t+t_k\}) - T(\{t+t_0\}))x([t+t_0]+n_k)|| \\
& + ||\sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \\
& - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j)|| \\
& + ||\sum_{j=-N}^N \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j)||
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)f(s)ds - \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_0+n_k-s)f(s)ds \right| \\
& + \left| \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)f(s)ds \right| \\
& \leq \|T(\{t+t_k\})-T(\{t+t_0\})\| \|x([t+t_0]+n_k)\| \\
& + \left| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_0-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \right| \\
& + \left| \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \right| \\
& + \left| \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s)f(s+n_k)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_0-s)f(s+n_k)ds \right| \\
& + M\|f\|_\infty(t_0-t_k) \\
& \leq \|T(\{t+t_k\})-T(\{t+t_0\})\| \|x\|_\infty \\
& + \left| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s)A_j - T(t+t_0-s)A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \right| \\
& + \sum_{j=-N}^N |t_k-t_0| M \|A_j\| |ds| \|x([t+t_0]+n_k+j)\| \\
& + \left| \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s)f(s+n_k)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_0-s)f(s+n_k)ds \right| \\
& + M\|f\|_\infty(t_0-t_k) \\
& \leq \|T(\{t+t_k\})-T(\{t+t_0\})\| \|x\|_\infty \\
& + \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s)A_j - T(t+t_0-s)A_j\| |ds| \|x\|_\infty \\
& + (t_0-t_k)MC(2N+1)\|x\|_\infty \\
& + \left| \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} (T(t+t_k-s)-T(t+t_0-s))f(s+n_k)ds \right| \\
& + M\|f\|_\infty(t_0-t_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|T(\{t+t_k\})-T(\{t+t_0\})\| \|x\|_\infty + \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s)-T(t+t_0-s)\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty \\
&+ (t_0-t_k)MC(2N+1) \|x\|_\infty + \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s)-T(t+t_0-s)\| \|f\|_\infty ds \\
&+ M\|f\|_\infty(t_0-t_k) \\
&\leq \|T(\{t+t_k\})(T(\{t+t_0\}-\{t+t_k\})-I)\| \|x\|_\infty \\
&+ \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s)(T(t_0-t_k)-I)\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty \\
&+ (t_0-t_k)MC(2N+1) \|x\|_\infty + \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s)(T(t_0-t_k)-I)\| \|f\|_\infty ds \\
&+ M\|f\|_\infty(t_0-t_k)
\end{aligned}$$

Comme $[t+t_0] \leq s \leq t+t_k$, nous remarquons que

$$t+t_k-t-t_k \leq t+t_k-s \leq t+t_k-[t+t_0]$$

$$0 \leq t+t_k-s \leq \{t+t_0\}+t_k$$

$$0 \leq t+t_k-s \leq 2.$$

Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(t+t_k-s)\| \leq c$.
Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned}
&\|x(t+t_k+n_k)-x(t+t_0+n_k)\| \\
&\leq M\|(T(\{t+t_0\}-\{t+t_k\})-I)\| \|x\|_\infty + \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} c\|T(t_0-t_k)-I\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty \\
&+ (t_0-t_k)MC(2N+1) \|x\|_\infty + \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} c\|T(t_0-t_k)-I\| \|f\|_\infty ds + M\|f\|_\infty(t_0-t_k) \\
&\leq M\|(T(t_0-t_k)-I)\| \|x\|_\infty + \sum_{j=-N}^N (t+t_k-[t+t_0])c\|T(t_0-t_k)-I\| \|A_j\| \|x\|_\infty \\
&+ (t_0-t_k)MC(2N+1) \|x\|_\infty + (t+t_k-[t+t_0])c\|T(t_0-t_k)-I\| \|f\|_\infty + M\|f\|_\infty(t_0-t_k) \\
&\leq M\|T(t_0-t_k)-I\| \|x\|_\infty + 2c\|T(t_0-t_k)-I\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\
&+ (t_0-t_k)MC(2N+1) \|x\|_\infty + 2c\|T(t_0-t_k)-I\| \|f\|_\infty + M\|f\|_\infty(t_0-t_k). \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t+t_k+n_k) - x(t+t_0+n_k)\| \\
& \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M \|T(t_0-t_k) - I\| \|x\|_\infty + 2c \|T(t_0-t_k) - I\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\
& + \lim_{k \rightarrow \infty} (t_0-t_k) MC(2N+1) \|x\|_\infty + 2c \|T(t_0-t_k) - I\| \|f\|_\infty + M \|f\|_\infty (t_0-t_k).
\end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t+t_k+n_k) - x(t+t_0+n_k)\| = 0.$$

Maintenant, considérons le cas où $t_k + t < t_0 + t$. En utilisant (3.1), la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ étant bornée, l'image de la fonction f étant précompacte, nous déduisons alors

$$\begin{aligned}
& \|x(t+t_k+n_k) - x(t+t_0+n_k)\| \\
& \leq \|T(\{t+t_k\})x([t+t_0]+n_k) - T(\{t+t_0\})x([t+t_0]+n_k)\| \\
& + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \right\| \\
& + \left\| \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) f(s) ds - \int_{[t+t_0]+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) f(s) ds \right\| \\
& \leq \|(T(\{t+t_k\}) - T(\{t+t_0\}))x([t+t_0]+n_k)\| \\
& + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s) A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \right. \\
& \quad \left. - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_0-s) A_j ds x([t+t_0]+n_k+j) \right\| \\
& + \left\| \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s) f(s+n_k) ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_0-s) f(s+n_k) ds \right\| \\
& \leq \|T(\{t+t_k\}) - T(\{t+t_0\})\| \|x([t+t_0]+n_k)\| \\
& + \left\| \left(\sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s) A_j ds - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_0-s) A_j ds \right) x([t+t_0]+n_k+j) \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s)f(s+n_k)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_0-s)f(s+n_k)ds \right\| \\
& \leq \|T(\{t+t_k\})-T(\{t+t_0\})\| \|x\|_\infty \\
& + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s)A_j ds - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_0-s)A_j ds \right\| \|x\|_\infty \\
& + \left\| \int_{[t+t_0]}^{t+t_k} T(t+t_k-s)f(s+n_k)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_0-s)f(s+n_k)ds \right\| \\
& \leq \|T(\{t+t_k\})-T(\{t+t_0\})\| \|x\|_\infty \\
& + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_k-s)A_j ds - \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_0-s)A_j ds \right\| \|x\|_\infty \\
& + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0}^{t+t_k} T(t+t_k-s)A_j ds \right\| \|x\|_\infty \\
& + \left\| \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_k-s)f(s+n_k)ds - \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} T(t+t_0-s)f(s+n_k)ds \right\| \\
& + \left\| \int_{t+t_0}^{t+t_k} T(t+t_k-s)f(s+n_k)ds \right\| \\
& \leq \|T(\{t+t_k\})-T(\{t+t_0\})\| \|x\|_\infty \\
& + \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} \|T(t+t_k-s)-T(t+t_0-s)\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty + MC(2N+1)(t_k-t_0)\|x\|_\infty \\
& + \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} \|T(t+t_k-s)-T(t+t_0-s)f(s+n_k)\|_\infty ds + M(t_k-t_0)\|f\|_\infty \\
& \leq \|T(\{t+t_0\})(T(\{t+t_k\})-\{t+t_0\})-I\| \|x\|_\infty \\
& + \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} \|T(t+t_0-s)(T(t_k-t_0)-I)\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty + MC(2N+1)(t_k-t_0)\|x\|_\infty \\
& + \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} \|T(t+t_0-s)(T(t_k-t_0)-I)\| \|f\|_\infty ds + M(t_k-t_0)\|f\|_\infty
\end{aligned}$$

Comme $[t+t_0] \leq s \leq t+t_0$, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
-(t+t_0) & \leq -s \leq -[t+t_0] \\
t+t_0-(t+t_0) & \leq t+t_0-s \leq \{t+t_0\}
\end{aligned}$$

$$0 \leq t + t_0 - s < 1.$$

Par conséquent, il existe une constante $l > 0$ telle que $\|T(t + t_0 - s)\| \leq l$. Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} & \|x(t+t_k+n_k)-x(t+t_0+n_k)\| \\ & \leq M\|T(\{t+t_k\}-\{t+t_0\})-I\|\|x\|_\infty \\ & + \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} l\|T(t_k-t_0)-I\|\|A_j\|ds\|x\|_\infty + MC(2N+1)(t_k-t_0)\|x\|_\infty \\ & \int_{[t+t_0]}^{t+t_0} l\|T(t_k-t_0)-I\|\|f\|_\infty ds + M(t_k-t_0)\|f\|_\infty \\ & \leq M\|T(t_k-t_0)-I\|\|x\|_\infty + l\|T(t_k-t_0)-I\|C(2N+1)\|x\|_\infty(t+t_0-[t+t_0]) \\ & + MC(2N+1)(t_k-t_0)\|x\|_\infty + l\|T(t_k-t_0)-I\|\|f\|_\infty(t+t_0-[t+t_0]) + M(t_k-t_0)\|f\|_\infty. \\ & \leq M\|T(t_k-t_0)-I\|\|x\|_\infty + l\|T(t_k-t_0)-I\|C(2N+1)\|x\|_\infty \\ & + MC(2N+1)(t_k-t_0)\|x\|_\infty + l\|T(t_k-t_0)-I\|\|f\|_\infty + M(t_k-t_0)\|f\|_\infty. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t+t_k+n_k)-x(t+t_0+n_k)\| \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M\|T(t_k-t_0)-I\|\|x\|_\infty + l\|T(t_k-t_0)-I\|C(2N+1)\|x\|_\infty \\ & + \lim_{k \rightarrow \infty} MC(2N+1)(t_k-t_0)\|x\|_\infty + l\|T(t_k-t_0)-I\|\|f\|_\infty + M(t_k-t_0)\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t+t_k+n_k)-x(t+t_0+n_k)\| = 0$$

Maintenant, considérons le cas où $\{t + t_0\} = 0$, $t + t_0$ est donc un entier.

Supposons que $t_k + t \geq t_0 + t$. Dans ce cas nous déduisons que pour k suffisamment grand $[t_k + t] = t_0 + t$. En effet $t_k + t \geq [t_k + t] \geq t_0 + t$ car $[t_k + t]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $t_k + t$. Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [t_k + t] = t_0 + t.$$

Nous avons

$$\|x(t+t_k+n_k)-x(t+t_0+n_k)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|T(\{t+t_k+n_k\})x([t+t_k+n_k]) - x(t+t_0+n_k)\| \\
&+ \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_k+n_k]}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) A_j ds x([t+t_k+n_k+j]) \right\| \\
&+ \left\| \int_{[t+t_k+n_k]}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) f(s) ds \right\| \\
&\leq \|T(\{t+t_k\})x(t+t_0+n_k) - x(t+t_0+n_k)\| \\
&+ \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) A_j ds x([t+t_k+j]+n_k) \right\| \\
&+ \left\| \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) f(s) ds \right\| \\
&\leq \|T(t_k-t_0)x(t+t_0+n_k) - x(t+t_0+n_k)\| \\
&+ \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} \|T(t+t_k+n_k-s) A_j\| ds \|x([t+t_k+j]+n_k)\| \\
&+ \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} \|T(t+t_k+n_k-s) f(s)\| ds \\
&\leq \|(T(t_k-t_0)-I)x(t+t_0+n_k)\| \\
&+ \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} \|T(t+t_k+n_k-s)\| \|A_j\| ds \|x([t+t_k+j]+n_k)\| \\
&+ \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} \|T(t+t_k+n_k-s)\| \|f(s)\| ds \\
&\leq \|(T(t_k-t_0)-I)\| \|x\|_\infty \\
&+ \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} \|T(t+t_k+n_k-s)\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty \\
&+ \int_{[t+t_k]+n_k}^{t+t_k+n_k} \|T(t+t_k+n_k-s)\| \|f\|_\infty ds.
\end{aligned}$$

Comme $[t+t_k+n_k] \leq s \leq t+t_k+n_k$, nous remarquons que

$$-(t+t_k+n_k) \leq -s \leq -[t+t_k+n_k]$$

$$t+t_k+n_k - (t+t_k+n_k) \leq t+t_k+n_k - s \leq t+t_k+n_k - [t+t_k+n_k]$$

$$0 \leq t + t_k + n_k - s < 1.$$

Par conséquent, il existe une constante $l > 0$ telle que $\|T(t + t_k + n_k - s)\| \leq l$.
Nous obtenons donc que

$$\begin{aligned} & \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ & \leq \|(T(t_k - t_0) - I)\| \|x\|_\infty + lC(2N + 1)(t + t_k - [t + t_k]) \|x\|_\infty \\ & \quad + l(t + t_k - [t + t_k]) \|f\|_\infty \\ & \leq \|(T(t_k - t_0) - I)\| \|x\|_\infty + lC(2N + 1)(t + t_k - t - t_0) \|x\|_\infty \\ & \quad + l(t + t_k - t - t_0) \|f\|_\infty \\ & \leq \|(T(t_k - t_0) - I)\| \|x\|_\infty + lC(2N + 1)(t_k - t_0) \|x\|_\infty + l(t_k - t_0) \|f\|_\infty \quad (3.4) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|(T(t_k - t_0) - I)\| \|x\|_\infty + lC(2N + 1)(t_k - t_0) \|x\|_\infty + l(t_k - t_0) \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Maintenant supposons que $t_k + t < t_0 + t$. Montrons qu'à partir d'un certain rang $[t + t_k] = t + t_0 - 1$.

Puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} t + t_k = t + t_0$, pour $\epsilon = 1$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N \Rightarrow t + t_0 - (t + t_k) < 1$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N \Rightarrow t + t_0 - 1 < t + t_k$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N \Rightarrow t + t_0 - 1 \leq [t + t_k]$$

car $t + t_0 - 1$ est un entier. En remarquant que

$$[t + t_k] \leq t + t_k < t + t_0,$$

nous déduisons que $[t + t_k] < t + t_0$. Par conséquent à partir d'un certain rang $[t + t_k] = t + t_0 - 1$.

Maintenant, montrons que

$$x(t + t_0 + n_k) = T(1)x(t + t_0 + n_k - 1) + \sum_{j=0}^N \int_{t + t_0 + n_k - 1}^{t + t_0 + n_k} T(t + t_0 + n_k - s) A_j ds x(t + t_0 + n_k - 1 + j)$$

$$+ \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)f(s)ds$$

$t+t_0$ et n_k sont des entiers pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent nous pouvons considérer la solution de l'équation (4.1) sur l'intervalle $[t+t_0-1+n_k, t+t_0+n_k[$. Pour $y \in [t+t_0-1+n_k, t+t_0+n_k[$, nous avons

$$\begin{aligned} x(y) &= T(y-(t+t_0-1+n_k))x(t+t_0-1+n_k) \\ &+ \sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_0-1+n_k]}^y T(t+t_0-1+n_k-s)A_j ds x([t+t_0-1+n_k+j]) \\ &+ \int_{[t+t_0-1+n_k]}^y T(t+t_0-1+n_k-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Or $\lim_{y \rightarrow t+t_0+n_k} x(y) = x(t+t_0+n_k)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} x(t+t_0+n_k) &= T(1)x(t+t_0+n_k-1) + \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) \\ &+ \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)f(s)ds \end{aligned}$$

La suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ étant bornée, l'image de la fonction f étant précompacte, les opérateurs $A_0, \dots, A_N$ étant bornés, nous déduisons alors que

$$\begin{aligned} &||x(t+t_k+n_k)-x(t+t_0+n_k)|| \\ &\leq ||T(\{t+t_k+n_k\})x([t+t_k+n_k])-T(1)x(t+t_0+n_k-1)|| \\ &+ ||\sum_{j=-N}^N \int_{[t+t_k+n_k]}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)A_j ds x([t+t_k+n_k+j]) \\ &- \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j)|| \\ &+ ||\int_{[t+t_k+n_k]}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)f(s)ds - \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s)f(s)ds|| \\ &\leq ||T(\{t+t_k\})x(t+t_0+n_k-1)-T(1)x(t+t_0+n_k-1)|| \\ &+ ||\sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s)A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) || \\
& + || \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) f(s) ds - \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) f(s) ds || \\
& \leq ||(T(\{t+t_k\}) - T(1)) x(t+t_0+n_k-1)|| \\
& + || \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) \\
& - \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_k+n_k} T(t+t_0+n_k-s) A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) || \\
& + || \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) || \\
& + || \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_k+n_k} T(t+t_k+n_k-s) f(s) ds - \int_{t+t_0+n_k-1}^{t+t_k+n_k} T(t+t_0+n_k-s) f(s) ds || \\
& + || \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) f(s) ds || \\
& \leq ||T(\{t+t_k\}) - T(1)|| ||x(t+t_0+n_k-1)|| \\
& + || \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} T(t+t_k-s) A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) \\
& - \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} T(t+t_0-s) A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) || \\
& + || \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) A_j ds || ||x(t+t_0+n_k-1+j)|| \\
& + || \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} T(t+t_k-s) f(s+n_k) ds - \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} T(t+t_0-s) f(s+n_k) ds || \\
& + || \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) f(s) ds || \\
& \leq ||T(\{t+t_k\}) - T(1)|| ||x||_\infty \\
& + || \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} T(t+t_k-s) A_j - T(t+t_0-s) A_j ds x(t+t_0+n_k-1+j) ||
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) A_j ds \right\| \|x(t+t_0+n_k-1+j)\| \\
& + \left\| \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} (T(t+t_k-s) - T(t+t_0-s)) f(s+n_k) ds \right\| \\
& + \left\| \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} T(t+t_0+n_k-s) f(s) ds \right\| \\
& \leq \|T(\{t+t_k\}) - T(1)\| \|x\|_\infty \\
& + \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s) - T(t+t_0-s)\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty \\
& + \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} \|T(t+t_0+n_k-s)\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty \\
& + \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s) - T(t+t_0-s)\| \|f\|_\infty ds \\
& + \int_{t+t_k+n_k}^{t+t_0+n_k} \|T(t+t_0+n_k-s)\| \|f\|_\infty ds \\
& \leq \|T(\{t+t_k\})(I - T(1 - \{t+t_k\}))\| \|x\|_\infty \\
& + \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s)(I - T(t_0-t_k))\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty + \sum_{j=-N}^N (t_0-t_k) M \|A_j\| \|x\|_\infty \\
& + \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} \|T(t+t_k-s)(I - T(t_0-t_k))\| \|f\|_\infty ds + (t_0-t_k) M \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Nous avons que $t + t_0 - 1 \leq s \leq t + t_k$. Nous déduisons donc que

$$\begin{aligned}
-(t + t_k) & \leq -s \leq -(t + t_0 - 1) \\
t + t_k - (t + t_k) & \leq t + t_k - s \leq t + t_k - (t + t_0 - 1) \\
0 & \leq t + t_k - s \leq t_k - t_0 + 1 \\
0 & \leq t + t_k - s \leq t_k + 1 \\
0 & \leq t + t_k - s \leq 2.
\end{aligned}$$

Par conséquent il existe une constante $l_0 > 0$ telle que $\|T(t + t_k - s)\| \leq l_0$. Nous obtenons donc que

$$\|x(t+t_k, s) - x(t+t_0+n_k)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \|I - T(1 - \{t + t_k\})\| \|x\|_\infty \\
&+ \sum_{j=-N}^N \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| \|A_j\| ds \|x\|_\infty + \sum_{j=-N}^N (t_0 - t_k) M \|A_j\| \|x\|_\infty \\
&+ \int_{t+t_0-1}^{t+t_k} l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| \|f\|_\infty ds + (t_0 - t_k) M \|f\|_\infty \\
&\leq M \|I - T(t_0 - t_k)\| \|x\|_\infty + (t_k - t_0 + 1) l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\
&+ (t_0 - t_k) M C(2N+1) \|x\|_\infty + (t_k - t_0 + 1) l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| \|f\|_\infty + (t_0 - t_k) M \|f\|_\infty. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} M \|I - T(t_0 - t_k)\| \|x\|_\infty + (t_k - t_0 + 1) l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\
&+ \lim_{k \rightarrow \infty} (t_0 - t_k) M C(2N+1) \|x\|_\infty + (t_k - t_0 + 1) l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| \|f\|_\infty + (t_0 - t_k) M \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Nous savons que de toute suite, on peut extraire une sous-suite croissante ou décroissante. Nous avons donc la preuve du lemme. $\square$

Théorème 32 *Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, que A_0, A_1 sont des opérateurs linéaires bornés et que $f(t)$ est une fonction presque automorphe. Nous supposons aussi que $I - \int_0^1 T(t-s)A_1 ds$ est inversible, que le spectre de $(I - \int_0^1 T(1-s)A_1 ds)^{-1}(T(1) + \int_0^1 T(1-s)A_0 ds)$ sur le cercle unité est dénombrable et que l'espace $\mathbb{X}$ ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_0 . Alors chaque mild solution bornée de l'équation (4.2) est presque automorphe.*

Preuve Pour $t \in [n, n+1[$, nous avons

$$x(t) = T(t-n)x(n) + \int_n^t T(t-s)A_0 ds x(n) + \int_n^t T(t-s)A_1 ds x(n+1) + \int_n^t T(t-s)f(s)ds.$$

Par conséquent

$$x(n+1) = T(1)x(n) + \int_n^{n+1} T(n+1-s)A_0 ds x(n) + \int_n^{n+1} T(n+1-s)A_1 ds x(n+1)$$

$$+ \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds.$$

Par le changement de variable $y = s - n$. Nous déduisons que

$$\begin{aligned} x(n+1) &= T(1)x(n) + \int_0^1 T(1-s)A_0dsx(n) + \int_0^1 T(1-s)A_1dsx(n+1) \\ &\quad + \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \left(I - \int_0^1 T(1-s)A_1ds\right)^{-1} \left(T(1) + \int_0^1 T(1-s)A_0ds\right)x(n) \\ &\quad + \left(I - \int_0^1 T(1-s)A_1ds\right)^{-1} \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Le lemme 18 nous permet de dire que la suite

$$\left(I - \int_0^1 T(1-s)A_1ds\right)^{-1} \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds$$

est presque automorphe. $\mathbb{X}$ ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_0 . le spectre de $\left(I - \int_0^1 T(1-s)A_1ds\right)^{-1} \left(T(1) + \int_0^1 T(1-s)A_0ds\right)$ sur le cercle unité est dénombrable. Les hypothèses du théorème (13) sont donc vérifiées. Par conséquent la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe. La solution x est donc presque automorphe. $\square$

Lemme 20 Si $h(t) \in AA_0(\mathbb{X})$, alors $l(t) = \int_{[t]}^t T(t-s)h(s)ds \in AA_0(\mathbb{X})$.

Preuve Comme $[t] \leq s \leq t$, nous déduisons donc que $0 \leq t-s < 1$. Par conséquent il existe une constante $M > 0$, telle que

$$\left\| \int_{[t]}^t T(t-s)h(s)ds \right\| \leq M \int_{[t]}^t \|h(s)\|ds.$$

Soit $T \in \mathbb{R}^+$, nous avons

$$\int_{-T}^T \left\| \int_{[t]}^t T(t-s)h(s)ds \right\| dt \leq M \int_{-T}^T \int_{[t]}^t \|h(s)\|dsdt.$$

Dans la preuve du lemme 8, nous montrons que $\int_{-T}^T \int_{[t]}^t \|h(s)\|dsdt \leq L_1 + L_2 + L_3$ où

$$L_1 = \int_{-T}^{[-T]+1} \int_{[t]}^t \|h(s)\|dsdt,$$

$$L_2 = \int_{[-T]+1}^{[T]} \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt,$$

$$L_3 = \int_{[T]}^T \int_{[t]}^t ||h(s)|| ds dt,$$

et tel que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} L_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} L_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} L_3 = 0.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T || \int_{[t]}^t T(t-s)h(s)ds || dt \leq \frac{M}{2T} (L_1 + L_2 + L_3).$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T || \int_{[t]}^t T(t-s)h(s)ds || dt \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M}{2T} (L_1 + L_2 + L_3).$$

Alors $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T || \int_{[t]}^t T(t-s)h(s)ds || dt = 0. \square$

Proposition 13 *Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, que $A_{-N}, \dots, A_N$ sont de opérateurs linéaires bornés et que f est une fonction pseudo presque automorphe. Soit x une mild solution bornée de l'équation (4.1) sur $\mathbb{R}$. Si la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors x est pseudo presque automorphe.*

Preuve Soit $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \in PAA(\mathbb{X})$, où $f_1(t) \in AA(\mathbb{X})$, $f_2(t) \in AA_0(\mathbb{X})$.

Alors $x(t) = V(t) + l(t)$, où

$$V(t) = T(\{t\})x([t]) + \sum_{j=0}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds x([t+j]) + \int_{[t]}^t T(t-s)f_1(s)ds$$

$$l(t) = \int_{[t]}^t T(t-s)f_2(s)ds.$$

Dans la preuve du lemme 19 nous montrons que si la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors $V(t)$ est une fonction presque automorphe. Le lemme 20 montre que $l(t)$ est ergodique. $\square$

4.2 Solutions compact presque automorphes dans le cas linéaire

Lemme 21 (Voir [90], lemme 3.5, p.174)

a) Si $\lim_{k \rightarrow \infty} x(n + n_k) = v(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x([t] + n_k) - v([t])\| = 0, \forall K \subset \mathbb{R}.$$

b) Si $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|f(t + n_k) - g(t)\| = 0, \forall K \subset \mathbb{R}$ alors

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \int_{[t]}^t \|f(s + n_k) - g(s)\| ds = 0, \forall K \subset \mathbb{R}.$$

Lemme 22 Si $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(n + n_k) = v(n),$$

alors pour $i = -N, \dots, N$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x([t] + i + n_k) - v([t] + i)\| = 0, \forall K \subset \mathbb{R}.$$

Preuve $\forall K \subset \mathbb{R}$, nous remarquons que $\{[t] + i, t \in K\}$ est un ensemble fini d'entiers. Alors la convergence de

$$\|x([t] + i + n_k) - v([t] + i)\|$$

est uniforme sur K . $\square$

Lemme 23 Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, que $A_{-N}, \dots, A_N$ sont des opérateurs linéaires bornés et que f est une fonction compacte presque automorphe. Soit x une mild solution bornée de l'équation (4.1) sur $\mathbb{R}$. Alors x est une solution compact presque automorphe ssi la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe.

Preuve Il est évident que si x est compact presque automorphe, la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est presque automorphe.

Maintenant supposons que $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est presque automorphe. Nous montrerons que $x(t)$ est presque automorphe. La preuve se divise en plusieurs

étapes.

Étape 1 :

Nous supposons que $\{n'_k\}$ est une suite à valeurs entières. Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ et une suite $\{v(n)\}$ telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(n + n_k) = v(n); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} v(n - n_k) = x(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (4.6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|f(t + n_k) - g(t)\| = 0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(t - n_k) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

Alors, nous définissons

$$V(t) = T(\{t\})v([t]) + \sum_{j=-N}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds v([t+j]) + \int_{[t]}^t T(t-s)g(s)ds.$$

Nous posons $C = \max\{\|A_0\|, \dots, \|A_N\|\}$. Comme $\{t\} \subset [0, 1[$, nous remarquons qu'il existe $M > 0$ tel que $\|T(\{t\})\| \leq M$.

Dans la preuve du lemme 19, nous montrons que

$$\begin{aligned} & \|x([t+n_k]) - V(t)\| \\ & \leq M \|x([t]+n_k) - v([t])\| + \sum_{j=-N}^N MC \|x[t+n_k+j] - v([t+j])\| + \int_{[t]}^t M \|f(s+n_k) - g(s)\| ds. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t+n_k) - V(t)\| \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} M \|x([t]+n_k) - v([t])\| + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \sum_{j=-N}^N MC \|x[t+n_k+j] - v([t+j])\| \\ & + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \int_{[t]}^t M \|f(s+n_k) - g(s)\| ds. \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + n_k) - V(t)\| = 0.$$

Étape 2 :

Maintenant nous considérons le cas général où $(s'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas nécessairement une suite à valeurs entières.

Soient $n'_k = [s'_k]$, $t'_k = \{s'_k\}$ pour chaque k . Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ de $\{n'_k\}$ et une suite $\{v(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que (4.6) et (4.7) sont vérifiées. Il existe aussi une sous-suite $\{t_k\}$ de $\{t'_k\}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0 \in [0, 1]$.

Tout d'abord considérons le cas où $0 < \{t_0 + t\}$. Nous montrerons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - \lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Tout d'abord nous supposons que $t_k + t \leq t_0 + t$. Nous avons montré dans la preuve du lemme 19 que

$$\begin{aligned} & \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ & \leq M \|T(t_0 - t_k) - I\| \|x\|_\infty + 2c \|T(t_0 - t_k) - I\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\ & + (t_0 - t_k) MC(2N+1) \|x\|_\infty + 2c \|T(t_0 - t_k) - I\| \|f\|_\infty + M \|f\|_\infty (t_0 - t_k). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} M \|T(t_0 - t_k) - I\| \|x\|_\infty + 2c \|T(t_0 - t_k) - I\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\ & + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} (t_0 - t_k) MC(2N+1) \|x\|_\infty + 2c \|T(t_0 - t_k) - I\| \|f\|_\infty + M \|f\|_\infty (t_0 - t_k). \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Maintenant, considérons le cas où $t_k + t > t_0 + t$. Nous avons montré dans la preuve du lemme 19 que

$$\begin{aligned} & \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ & \leq M \|T(t_k - t_0) - I\| \|x\|_\infty + l \|T(t_k - t_0) - I\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\ & + MC(2N+1) (t_k - t_0) \|x\|_\infty + l \|T(t_k - t_0) - I\| \|f\|_\infty + M (t_k - t_0) \|f\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\|$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} M \|T(t_k - t_0) - I\| \|x\|_\infty + l \|T(t_k - t_0) - I\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\ + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} MC(2N+1)(t_k - t_0) \|x\|_\infty + l \|T(t_k - t_0) - I\| \|f\|_\infty + M(t_k - t_0) \|f\|_\infty.$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0$$

Maintenant, considérons le cas où $\{t + t_0\} = 0$, $t + t_0$ est donc un entier. Considérons le cas où $t + t_k \leq t + t_0$. Nous avons montré dans la preuve du lemme 19 que

$$\|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ \leq \|(T(t_k - t_0) - I)\| \|x\|_\infty + lC(2N+1)(t_k - t_0) \|x\|_\infty + l(t_k - t_0) \|f\|_\infty. \quad (3.4)$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|(T(t_k - t_0) - I)\| \|x\|_\infty + lC(2N+1)(t_k - t_0) \|x\|_\infty + l(t_k - t_0) \|f\|_\infty.$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Maintenant supposons que $t_k + t > t_0 + t$.

Nous avons montré dans la preuve du lemme 19 que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ \leq M \|I - T(t_0 - t_k)\| \|x\|_\infty + (t_k - t_0 + 1)l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\ + (t_0 - t_k)M C(2N+1) \|x\|_\infty + (t_k - t_0 + 1)l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| \|f\|_\infty + (t_0 - t_k)M \|f\|_\infty. \quad (3.5)$$

Par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| \\ \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} M \|I - T(t_0 - t_k)\| \|x\|_\infty + (t_k - t_0 + 1)l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| C(2N+1) \|x\|_\infty \\ + \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} (t_0 - t_k)M C(2N+1) \|x\|_\infty + (t_k - t_0 + 1)l_0 \|I - T(t_0 - t_k)\| \|f\|_\infty + (t_0 - t_k)M \|f\|_\infty.$$

Nous déduisons donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|x(t + t_k + n_k) - x(t + t_0 + n_k)\| = 0.$$

Nous savons que de toute suite, on peut extraire une sous-suite croissante ou décroissante. Nous avons donc la preuve du lemme. $\square$

Théorème 33 *Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, que A_0, A_1 sont des opérateurs linéaires bornés et que $f(t)$ est une fonction compact presque automorphe. Nous supposons aussi que $I - \int_0^1 T(t-s)A_1 ds$ est inversible, que le spectre de $(I - \int_0^1 T(1-s)A_1 ds)^{-1}(T(1) + \int_0^1 T(1-s)A_0 ds)$ sur le cercle unité est dénombrable et que l'espace $\mathbb{X}$ ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_0 . Alors chaque mild solution bornée de l'équation (4.2) est compacte presque automorphe.*

Preuve Pour $t \in [n, n+1[$, nous avons

$$x(t) = T(t-n)x(n) + \int_n^t T(t-s)A_0 ds x(n) + \int_n^t T(t-s)A_1 ds x(n+1) + \int_n^t T(t-s)f(s)ds.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} x(n+1) &= T(1)x(n) + \int_n^{n+1} T(n+1-s)A_0 ds x(n) + \int_n^{n+1} T(n+1-s)A_1 ds x(n+1) \\ &\quad + \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $y = s - n$, nous déduisons que

$$\begin{aligned} x(n+1) &= T(1)x(n) + \int_0^1 T(1-s)A_0 ds x(n) + \int_0^1 T(1-s)A_1 ds x(n+1) \\ &\quad + \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \left(I - \int_0^1 T(1-s)A_1 ds\right)^{-1} \left(T(1) + \int_0^1 T(1-s)A_0 ds\right)x(n) \\ &\quad + \left(I - \int_0^1 T(1-s)A_1 ds\right)^{-1} \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

$f(t)$ étant une fonction compact presque automorphe, $f(t)$ étant une fonction presque automorphe. Le lemme 23 nous permet de dire que la suite

$$\left(I - \int_0^1 T(1-s)A_1 ds\right)^{-1} \int_n^{n+1} T(n+1-s)f(s)ds$$

est presque automorphe. $\mathbb{X}$ ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_0 . le spectre de $(I - \int_0^1 T(1-s)A_1 ds)^{-1}(T(1) + \int_0^1 T(1-s)A_0 ds)$ sur le cercle unité est dénombrable. Les hypothèses du théorème (13) sont donc vérifiées. Par conséquent la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe. La solution x est donc compact presque automorphe. $\square$

Proposition 14 *Nous supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, que $A_{-N}, \dots, A_N$ sont de opérateurs linéaires bornés et que f est une fonction pseudo compact presque automorphe. Soit x une mild solution bornée de l'équation (4.1) sur $\mathbb{R}$. Si la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors x est pseudo compact presque automorphe.*

Preuve Soit $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \in PKAA(\mathbb{X})$, où $f_1(t) \in KAA(\mathbb{X})$, $f_2(t) \in AA_0(\mathbb{X})$.

Alors $x(t) = V(t) + l(t)$, où

$$V(t) = T(\{t\})x([t]) + \sum_{j=0}^N \int_{[t]}^t T(t-s)A_j ds x([t+j]) + \int_{[t]}^t T(t-s)f_1(s)ds$$

$$l(t) = \int_{[t]}^t T(t-s)f_2(s)ds.$$

Dans la preuve du lemme 23, nous montrons que si la suite $\{x(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est presque automorphe, alors $V(t)$ est une fonction compact presque automorphe. Le lemme 20 montre que $l(t)$ est ergodique. $\square$

Bibliographie

- [1] S. Abbas, *Weighted pseudo almost automorphic sequences and their applications*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2010, No.2010 (2010) 1-14.
- [2] M. Adimy, K. Ezzinbi, *Local existence and linearized stability for partial neutral functional differential equations*, Dynamic Systems and Applications, Vol.7 (1999) 389-404.
- [3] M. Adimy, K. Ezzinbi, M. Laklach, *Spectral decomposition for some neutral partial functional differential equations*, Canadian Applied Mathematics Quartely Vol.9 (2001), 1-34.
- [4] A.R. Aftabizadeh, J. Wiener, *Oscillatory Properties of First Order Linear functional Differential Equations*, Applicable Analysis Vol.20 (1985) 165-187.
- [5] A.R. Aftabizadeh, J. Wiener, J. Xu, *Oscillatory and periodic solutions of delay differential equations with piecewise constant argument*, Proceeding of the American Mathematical Society, Vol.99, No.4 (1987) 673-679.
- [6] M. Alia, K. Ezzinbi, S. Fatajou, *Exponential dichotomy and pseudo-almost automorphy for partial neutral functional differential equations*, Nonlinear Analysis Vol.71 (2009) 2210-2226.
- [7] W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, *Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems*, Monographs in Mathematics, 96, Birkhausser Verlag, Basel, 2001,
- [8] B. Basit, *Generalisation of two theorems of M.I. Kadets concerning the indefinite integral of abstract almost periodic functions*, Matematiche-

kie Zametki Vol.9 (1971), 311-321.(Russian)

- [9] B. Basit, A.J. Pryde, *Ergodicity and stability of orbits of unbounded semigroup representation*, Journal of the Australian Mathematical Society Vol.77 (2004), 209-232.
- [10] M.A. Bená, J.G. Dos Reis, *Some Results on Stability of Retarded Functional Differential Equations Using Dichotomic Map techniques*, Positivity, Vol.2, No.3, (1998) 229-238.
- [11] A.S. Besicovitch, *Almost Periodic functions*, Cambridge University Press, (1932).
- [12] A.S. Besicovitch, *On generalised almost periodic functions*, Proceedings of London Mathematical society, (2), 25 (1954), 495-512.
- [13] J. Blot, P. Cieutat, G. N'Guérékata, *S-asymptotically ω -periodic functions and applications to evolution equations*, African Diaspora Journal of Mathematics Vol.12 (2) (2011)
- [14] S. Bochner, *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions*, Proceeding of the National Academy of Sciences of the United State of America Vol.52 (1964), 907-910.
- [15] S. Bochner, *Beirtrage zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, Mathematische Annalen, Vol.96 (1926), 119-147.
- [16] H. Bohr, *Almost Periodic Functions*, Chelsea Publishing Company, New York (1968).
- [17] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen 1. Eine Verallgemeinerung der theorie der Fourierreihen*, Acta Mathematica, Vol.45 (1925) 29-127.
- [18] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen 2. Zusammenhang der fastperiodischen Funktionen mit Funktionen von unendlich vielen Variablen; gleichmassige Approximation durch trigonometrische Summen*, Acta Mathematica, Vol.46 (1925) 101-204.

- [19] H. Bohr, *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen 3. Dirichlet-entwicklung analytischer Funktionen*, Acta Mathematica, Vol.47, (1926), 237-281.
- [20] S. Busenberg, K.L. Cooke, *The Population Dynamics of Two Vertically Transmitted Infections*, Theoretical Population Biology, Vol.33 (1988), 181-198.
- [21] L.A.V Carvalho, R.R. Ferreira, *On a new extension of Liapunov's direct method to discrete equations*, Quartely of Applied Mathematics, Vol.4 (1988) 779-788.
- [22] L.A.V Carvalho, S.A.S Marconato, *On dichotomic maps for differential equations with piecewise continuous argument (EPCA)*, Communications in Applied Analysis 1, Vol.1 (1997) 103-112.
- [23] J.P.Carvalho dos Santos, C. Cuevas *Asymptotically almost automorphic solution of abstract fractional integro-differential neutral equations*, Applied Mathematics Letters, Vol.23 (2010) 960-965.
- [24] Y. Chang, Z. Zhao, G. N'Guérékata, *A new composition theorem for square-mean almost automorphic functions and applications to stochastic differential equations*, Nonlinear Analysis, Vol.74 (2011) 2210-2219.
- [25] K.L Cooke,J. Wiener, *Retarded differential equations with piecewise constant argument delays*, Journal of Mathematical Analysis and Application 99(1984) 265-297.
- [26] K.L Cooke,J. Wiener, *Stability regions for linear equations with piecewise continuous delay*, Computer and Mathematics with Applications, Vol.12 A (1986), 695-701.
- [27] K.L Cooke,J. Wiener, *An Equation Alternatively Retarded And Advanced Type*, Proceedings of the American Mathematical Society Vol.99, No.4 (1987) 726-732.
- [28] C. Cuevas, M. Pierri, A. Sepulveda, *Weighted $\mathcal{S}$ -asymptotically ω -Periodic Solutions of a Class of Fractional differential equations*,

Hindawi Publishing Corporation, *Advances in Difference Equations*, Vol.2011, Article ID 584874, 13 pages.

- [29] C. Cuevas, A. Sepulveda, H. Soto, *Almost periodic and pseudo-almost periodic solutions to fractional differential and integro-differential equations*, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.218 (2011) 1735-1745.
- [30] C. Cuevas, J.C. de Souza, *S-asymptotically ω -periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, *Applied Mathematics Letters*, Vol.22 (2009) 865-870.
- [31] W. Desch, R. Grimmer, W. Schappacher, *Some considerations for linear integro-differential equations*, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, Vol.104 (1984) 219-234.
- [32] H. Ding, T. Xiao, J. Liang, *Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions*, *Journal of Mathematical Analysis and Application*, Vol.338 (2008) 141-151.
- [33] T. Diagana, *Stepanov-like pseudo-almost periodicity and its applications to some nonautonomous differential equations* *Nonlinear Analysis*, 69(2008) 4277-4285.
- [34] T. Diagana, *Pseudo-almost automorphic solutions to some classes of nonautonomous partial evolution equations*, *Differential Equations and Applications*, Vol.1, No.4 (2009) 561-582.
- [35] T. Diagana, *Existence of Pseudo-Almost Automorphic Mild Solutions to some Nonautonomous Partial Evolution Equations*, *Advances in Difference* 2011 Article ID 895079, 23 pages doi : 10.1155/2011/895079.
- [36] T. Diagana, *Existence of weighted Pseudo-Almost periodic solutions to some classes of nonautonomous partial evolution equations*, *Nonlinear Analysis*, Vol.74 (2011) 600-615.
- [37] T. Diagana, E. Hernández, *Existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions to some abstract partial neutral functional-differential*

- equations and applications*, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol.327 (2007) 776-791.
- [38] T. Diagana, E. Hernández, J.P.C Dos Santos, *Existence of asymptotically almost automorphic solutions to some abstract partial neutral integro-differential equations*, Nonlinear Analysis, Vol.71 (2009) 248-267.
 - [39] T. Diagana, E. Hernández, M. Rabello, *Pseudo almost periodic solutions to some non-autonomous neutral functional differential equations with unbounded delay*, Mathematical and Computer Modelling 45 (2007)1241-1252.
 - [40] T. Diagana, G. Mophou, G. N'Guérékata, *Existence of weighted pseudo-almost periodic solutions to some classes of differential equations with S^p -weighted pseudo-almost periodic coefficients*, Nonlinear Analysis, Vol.72 (2010) 430-438.
 - [41] T. Diagana, G. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions to some classes of partial evolution equations*, Applied Mathematics Letters, Vol.20(2007), 462-466.
 - [42] W. Dimbour, *Almost automorphic solutions for a differential equations with piecewise constant argument in a Banach space*, Nonlinear Analysis, Vol.74 (2011) 2351-2357.
 - [43] W. Dimbour, *Pseudo Almost automorphic solutions for a differential equations with piecewise constant argument in a Banach space*, Journal of Nonlinear Systems and Applications, (2011) 210-213.
 - [44] W. Dimbour, G. N'Guérékata, *S-asymptotically ω -periodic solutions to some classes of partial evolution equation*, Applied Mathematics and Computation, Vol.218 (2012), 7622-7628.
 - [45] W. Dimbour, G. Mophou, G. N'Guérékata, *S-asymptotically ω -periodic solutions for partial differential equations with finite delay*, Electronic Journal of Differential Equation, Vol.2011 (2011), 1-12.
 - [46] A. Elazzouzi, *$C^{(n)}$ -almost periodic and $C^{(n)}$ -almost automorphic solutions for a class of partial functional differential equations with finite*

- delay*, Nonlinear Analysis : Hybrid Systems, Vol.4 (2010).
- [47] K.J. Engel, R. Nagel, *One Parameter Semigroups of Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Vol.194, Springer(2001).
 - [48] K. Ezzinbi, N. Boukli-Hacene, *Weighted pseudo almost automorphic solutions for some partial functional differential equation*, Nonlinear Analysis : Real World Applications Vol.12 (2011) 562-570.
 - [49] K. Ezzinbi, G. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions for some partial functional differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.328 (2007) 344-358.
 - [50] K. Ezzinbi, S. Fatajou, G. N'Guérékata, *Massera-type theorem for the existence of C^n -almost-periodic solutions for partial functional differential equations with finite delay*, Nonlinear Analysis 69 (2008) 1413-1424.
 - [51] K. Ezzinbi, G. N'Guérékata, *Massera-type theorem for almost automorphic solutions of functional differential equations of neutral type*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.316 (2006) 707-721.
 - [52] J.K. Hale, S.M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New-York/Berlin (1993).
 - [53] H. R. Henríquez, M. Pierre, P. Táboas, *On S -asymptotically ω -periodic function on Banach spaces and applications*, Journal of Mathematical Analysis and Application Vol.343 (2008), 1119-1130.
 - [54] H. R. Henríquez, M. Pierre, P. Táboas, *Existence of S -asymptotically ω -periodic solutions for abstract neutral equations*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 78(2008), 365-382.
 - [55] J. Hong, *Exponential dichotomies, almost periodic structurally stable differential systems, and an example*, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol.208 (1997) 71-84.

- [56] Y. Hino, T. Naito, N. Van Minh and J.S. Shin, *Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, Taylor and Francis Group, London-New York, (2002).
- [57] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Vol. 204 North Holland Mathematics Studies, Hardcover.
- [58] H. Lee, H. Alkahby, *Stepanov-like almost automorphic Solutions of nonautonomous Semilinear evolution equations with delay*, Nonlinear Analysis Vol.69 (2008) 2158-2166.
- [59] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, *Theory of Difference Equations : Numerical Methods and Applications*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.181 (1988).
- [60] B.M. Levitan, V.V. Zhikov, *Almost Periodic Functions and Differential Equations*, Moscow Univ. Publ. House, 1978. English translation by Cambridge University Press, (1982).
- [61] J. Liang, J. Zhang, T. Xiao, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, Journal of Mathematical Analysis and Application Vol.(2008) 1493-1499.
- [62] J. Liang, G. N'Guérékata, T. Xiao, J. Zhang, *Some properties of pseudo almost automorphic function and applications to abstract differential equations*, Nonlinear Analysis 70(2009) 2731-2735.
- [63] J. H. Liu, Gaston N'Guérékata, N. Van Minh, *Topics on Stability and Periodicity in Abstract Differential Equations*, World Scientific, Singapore Vol.6 2008.
- [64] C. Lizama, G. N'Guérékata, *Bounded mild solutions for semilinear integro differential equations in Banach spaces*, Integral Equations and Operators Theory, 68(2010), 207-227.
- [65] A. Lunardi, *Analytic semigroup and optimal regularity in parabolic problems*, in PNLDE Vol.16, Birkhauser Verlag, Basel, 1995.

- [66] S.A.S Marconato, *On dichotomic maps for non autonomous discrete equations*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Vol.3 (1997), 305-315.
- [67] S.A.S Marconato, *On Stability of differential equations with piecewise constant argument and the associated discrete equations using dichotomic map*, Dynamics of continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A : Mathematical Analysis, Vol.15 (2008) 303-316.
- [68] S.A.S Marconato, M.A Bená, *Stability of the null solution of the equation $x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)x([t])$* , International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.63, No.4 (2010), 507-512.
- [69] S.A.S Marconato, A. Spezamiglio, *Stability of differential equations with piecewise constant argument via discrete equations*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Vol.7 (2000), 325-333.
- [70] A. Meril, G. Mophou, G. N'Guérékata, *Asymptotic behavior of bounded mild solutions of some functional differential and fractional differential equations*, Differential and Integral Equations, Vol.24, No.5-6 (2011) 401-416.
- [71] G. Mophou, *Weighted pseudo almost automorphic mild solutions to semilinear fractional differential equations*, Applied Mathematics and Computation, Vol.217(2011) 7579-7587.
- [72] G. Mophou, G. N'Guérékata, *Mild Solutions for Semilinear Fractional Differential Equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2009(2009), No.21, 1-9.
- [73] G. Mophou, G. N'Guérékata, *On some classes of almost automorphic functions and applications to fractional differential equations*, Computers and Mathematics with Applications, Vol.59 (2010) 1310-1317.
- [74] T. Naito, N. Van Minh, R. Miyazaki, Y.Hamaya, *Boundedness and almost periodic dynamical systems*, Journal of Difference Equations and Applications 7(2001), 507-528.

- [75] G. N'Guérékata, *Almost Automorphy and almost periodic function in Abstract Spaces*, Kluwer Academic / Plenum Publisher, New York-Berlin-Moscow, 2001.
- [76] G. N'Guérékata, *Topics in almost automorphy*, Springer-Verlag, New York 2005.
- [77] G. N'Guérékata, A. Pankov, *Stepanov-like almost automorphic functions and monotone evolution equations*, Nonlinear Analysis, Vol.68 (2008) 2658-2667.
- [78] G. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions to second-order semilinear evolution equations*, Nonlinear Analysis, Vol.71(2009) 432-435.
- [79] S. Nicola, M. Pierri, *A note on S -asymptotically ω -periodic functions*, Nonlinear Analysis, Real World Applications, 10 (2009), 2937-2938.
- [80] A. Pazy *Semigroups of linear Operators and Application to Partial Differential Equations*, in :Applied Mathematical sciences, vol.44, Springer-Verlag, New-York, (2001).
- [81] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Vol.198 Mathematics in Science and Engineering.
- [82] G. Da Prato, E. Sinestrari, *Differential operators with nondense domains*, Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa Classe di Science, Vol.2 (1987) 285-344.
- [83] R.A. Johnson, *A linear, almost periodic equation with an almost automorphic solution*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.82 (1981), 199-205.
- [84] G. Seifert, *Certain systems with piecewise constant feedback controls with a time delay*, Differential and Integral Equation, Vol.6, No. 4 (1993) 937-947.
- [85] S.M. Shah, J. Wiener, *Advanced Differential Equations With Piecewise Constant Argument Deviations*, International Journal of Mathematics & Matematical Science Vol.6, No.4, (1983) 671-703.

- [86] V.V. Stepanov, *Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen*, Mathematische Annalen, t.95 (1926), 473-498
- [87] T. Tat Dat, *On the existence of almost periodic, periodic and quasi-periodic solutions of neutral differential equations with piecewise constant arguments*, International Journal of Evolution Equations Vol.1 (2005), 29-44.
- [88] C.C. Travis, G.F. Webb, *Partial differential equations with deviating arguments in the time variable*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.56 (1976) 397-409.
- [89] N. Van Minh, T. Naito, G. N'Guérékata, *A spectral countability condition for almost automorphy of solutions of differential equations*, Proceedings of the American Mathematical Society Vol.134 (2006) 3257-3266.
- [90] N. Van Minh, T. Tat Dat, *On the Almost Automorphy of bounded solutions of differential equations with piecewise constant argument*, Journal of Mathematical Analysis and Application 326(2007), 165-178.
- [91] W.A. Veech, *Almost Automorphic functions on groups*, American Journal of Mathematics Vol.87 (1965) 719-751.
- [92] H. Weyl, *Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen*, Mathematische Annalen, Vol.97 (1927) 338-356.
- [93] J. Wiener, *A Second-Order delay differential equation with multiple Periodic solutions*, Journal of Mathematical Analysis and Application, 229 (1999) 6596-676.
- [94] J. Wiener, L. Debnath, *Boundary Value Problems for the diffusion equation with piecewise continuous time delay*, International Journal of Mathematics & Mathematical Science, Vol.20 (1997) 187-195.
- [95] J. Wiener, L. Debnath, *A survey of partial differential equations with piecewise continuous arguments*, International Journal of Mathematics & Mathematical Science, Vol.18, No.2 (1995) 209-228.

- [96] J. Wiener, V. Lakshmikantham, *Excitability of a second-order delay differential equation*, Nonlinear Analysis, Vol.38 (1999) 1-11.
- [97] J. Wiener, *Generalized solutions of functional differential equations*, World Scientific, Singapore (1999).
- [98] J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol.119, Springer-Verlag, New York (1996).
- [99] T.-J. Xiao, J. liang and J. Zhang, *Pseudo almost automorphic functions to semilinear differential equations in Banach spaces*, Semigroup Forum, Vol.76 (2008), 518-524.
- [100] J.-J. Xiao, X.-X. Zhu, J. liang, *Pseudo-almost automorphic mild,solutions to nonautonomous differential equations and applications*, Nonlinear Analysis Vol.70 (2009) 4079-4085.
- [101] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, New-York (1965).
- [102] R. Yuan, *The existence of almost periodic solutions of first order neutral delay differential equations with piecewise constant argument*, Funkcialay Ekvacioj, Vol.41, (1998) 257-270.
- [103] R. Yuan, *On almost periodic solutions of logistic delay differential equations with almost periodic time dependence*, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol.30 (2007) 780-798.
- [104] Z. Hu, Z. Jin, *Stepanov-like pseudo-almost periodic mild solutions to pertubed nonautonomous evolution equations with infinite delay*, Nonlinear Analysis, Vol.71 (2009) 5381-5391.
- [105] Z. Hu, Z. Jin, *Stepanov-like pseudo-almost periodic mild solutions to nonautonomous neutral partial evolution equations*, Nonlinear Analysis, Vol.71 (2012) 244-252.
- [106] Z. Zhao, Y. Chang, G. N'Guérékata *A new composition theorem for S^p -weighted pseudo almost periodic functions and applications to*

semilinear differential equations, Opuscula Mathematica, Vol.31, No.3
(2011) 457-474.

- [107] C. Zhang, *Pseudo almost periodic functions and their applications*,
thesis, University of Western Ontario (1992).