

Thèse de doctorat

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

Discipline, spécialité selon la liste des spécialités pour lesquelles l'Ecole Doctorale est accréditée :
Génie mécanique

Présentée et soutenue par Sébastien, Mavel.

Le 04/12/2012, à Valenciennes

Ecole doctorale :

Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

Equipe de recherche, Laboratoire :

Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH)

Développement d'un outil de pré-dimensionnement de structures sandwich soumises à des impacts à vitesse intermédiaire

JURY

Président du jury

- Rassinoux, Alain. Professeur. Université Technologique de Compiègne.

Rapporteurs

- Debray, Karl. Professeur. Université de Reims.
- Viot, Philippe. Professeur. Université de Bordeaux.

Directeur de thèse

- Lauro, Franck. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

Co-directeur de thèse : Naceur, Hakim. Professeur. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

Co-encadrant : Maréchal, Christophe. Maître de conférences. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

Membres invités

- Le Roux, Olivier. Directeur du Centre. Centre de Recherche, d'Expertise et d'Appui Logistique.
- Mauzac, Olivier. Chef du département de physique des matériaux. Centre de Recherche, d'Expertise et d'Appui Logistique.

Sommaire

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Synthèse bibliographique.....	4
1. Introduction.....	5
2. Protection dans différents domaines.....	5
2.1. Confidentiel.....	5
2.2. Protection dans l'aviation.....	7
2.3. Protections dans l'automobile.....	8
2.4. Protection dans le domaine de l'emballage.....	8
2.5. Protections dans le domaine militaire.....	8
2.6. Synthèse.....	9
3. Dimensionnement des protections.....	11
3.1. Méthodes expérimentales.....	11
3.2. Méthodes analytiques.....	13
3.3. Méthodes numériques.....	16
3.4. Choix de matériaux.....	17
4. Conclusion et stratégie.....	19
5. Plan de la thèse.....	20
Chapitre II : Modélisation élastique.....	22
1. Introduction.....	23
2. Théorie de plaques stratifiées.....	24
2.1. Caractéristiques géométriques et cinématiques.....	24
2.2. Relations cinématiques.....	25
2.3. Equations d'équilibre.....	27
2.4. Loi constitutive.....	28
2.5. Conditions aux limites classiques.....	32
2.6. Plaque de type Kirchhoff.....	33
2.7. Modélisation du chargement.....	33
3. Conditions aux limites généralisées.....	34
4. Solution de flexion de plaque avec CL généralisées.....	36
4.1. Expression fondamentale du champ de déplacement.....	36
4.2. Equations d'équilibre.....	38
4.3. Prise en compte des conditions aux limites généralisées.....	41
5. Modélisation de l'impact.....	43

5.1.	Equilibre du projectile	43
5.2.	Traitement du contact	44
6.	Algorithme de résolution	45
7.	Applications numériques.....	46
7.1.	Validation du modèle de flexion isotrope.....	46
7.2.	Validation du modèle de flexion composite multicouche	48
7.3.	Validation du modèle d'impact isotrope.....	50
7.4.	Validation du modèle d'impact composite	53
7.5.	Comparaison des temps de calcul.....	55
8.	Conclusion	56
Chapitre III : Introduction du comportement local dans la flexion globale		57
1.	Introduction.....	58
2.	Modèle élastoplastique d'impact	59
2.1.	Phase d'indentation élastique	62
2.2.	Phase d'indentation plastique	63
2.3.	Phase de relaxation	64
2.4.	Phase de séparation.....	64
2.5.	Correction plastique de la flèche	65
3.	Modélisation de l'écrasement d'un matériau cellulaire	67
4.	Modélisation de la rupture	72
4.1.	Principe	72
4.2.	Identification de la rupture.....	74
5.	Validation.....	79
5.1.	Solution obtenue par éléments finis 3D.....	79
5.2.	Résultats obtenus par le modèle analytique.....	83
5.3.	Comparaisons et exploitations	86
5.4.	Validation expérimentale.....	88
6.	Conclusion	105
Chapitre IV : Optimisation des paramètres matériau		106
1.	Introduction.....	107
2.	Théorie d'optimisation	108
3.	Résolution du problème d'optimisation	109
4.	Méthodologie de surface de réponse.....	111
4.1.	Techniques d'approximation des réponses	111
4.2.	Facteurs influents la précision des SR	113

4.3.	Méthode de SR basée sur les Moindres Carrés.....	113
4.4.	Méthode de SR basée sur les Moindres Carrés Mobiles	115
4.5.	Méthode de SR basée sur le krigeage	116
5.	Plans d'expériences.....	117
5.1.	Plan factoriel complet 3^k	117
5.2.	Plan central composite	118
5.3.	Plan latins Hypercubes.....	119
6.	Application à l'optimisation d'une structure de protection.....	121
6.1.	Position du problème	121
6.2.	Solution avec un PE hypercube latin à 200 points.....	124
6.3.	Solution avec un PE hypercube latin à 400 points.....	140
7.	Conclusion	141
Chapitre V : Confidentiel		Erreur ! Signet non défini.
1.	Confidentiel.....	Erreur ! Signet non défini.
2.	Confidentiel.....	Erreur ! Signet non défini.
2.1.	Confidentiel	Erreur ! Signet non défini.
2.2.	Confidentiel	Erreur ! Signet non défini.
3.	Confidentiel.....	Erreur ! Signet non défini.
3.1.	Confidentiel	Erreur ! Signet non défini.
3.2.	Confidentiel	Erreur ! Signet non défini.
3.3.	Confidentiel	Erreur ! Signet non défini.
4.	Confidentiel.....	Erreur ! Signet non défini.
Conclusions et perspectives		157
1.	Conclusions.....	158
2.	Perspectives.....	160
Références		162
Annexes.....		173
Annexe 1 : Détail de la mise sous forme de matrice de l'équilibre autour de l'axe x		174
Annexe 2 : Détail de la mise en équation de l'équilibre autour de l'axe y.....		178
Annexe 3 : Détail de la mise en équation de l'équilibre suivant l'axe normal z		182
Annexe 4 : Détail du calcul des matrices des conditions aux limites		186
4.1.	Equilibre des efforts tranchants en $x=0$	186

4.2. Equilibre des moments fléchissants en $x=0$	189
4.3. Equilibre des efforts tranchants en $x=a$	191
4.4. Equilibre des moments fléchissants en $x=a$	193
4.5. Equilibre des efforts tranchants en $y=0$	195
4.6. Equilibre des moments fléchissants en $y=0$	197
4.7. Equilibre des efforts tranchants en $y=b$	199
4.8. Equilibre des moments fléchissants en $y=b$	201
Annexe 5 : Fichier de données du modèle analytique et interface graphique.....	203
5.1. Exemple de fichier de données.....	203
5.2. Interface graphique.....	204
Annexe 6 : détail des éléments du montage expérimental.	206
Annexe 7 : Confidentiel	208

Introduction générale

CONFIDENTIEL

CONFIDENTIEL

Chapitre I

Synthèse bibliographique

1. Introduction

Ce chapitre propose un état de l'art concernant la protection de structures soumises à des impacts. La première partie présente les études préliminaires qui sont la base de cette thèse et ayant permis de l'orienter vers une approche utilisant des sandwichs multicouches et multi-matériaux, ainsi que les principales utilisations de protections que l'on peut retrouver dans divers domaines. Dans une seconde partie, une présentation des différentes méthodes de modélisation de structures soumises à des chargements de type impact sera présentée et enfin dans une troisième partie, la stratégie adoptée pour cette thèse.

2. Protection dans différents domaines

2.1. Etude préliminaire

CONFIDENTIEL

CONFIDENTIEL

2.2. Protection dans l'aviation

La protection face à des impacts se retrouve dans d'autres domaines. Notamment dans le domaine de l'aviation (Figure 1) pour absorber les chocs causés par les impacts de débris, de glaçons ou d'oiseaux durant les vols. En effet, ces derniers sont responsables d'importants dégâts sur les aéronefs [31], [32]. Cela est principalement dû à la vitesse de l'avion impacté ce qui donne une énergie moyenne d'impact d'un oiseau de l'ordre de 12 kJ (l'oiseau ayant une masse normalisée de 1,82 kg et avec une vitesse d'impact de 116 m.s^{-1}). Pour limiter les effets de ces impacts, les avions sont conçus en utilisant des matériaux composites et dont certaines parties telles que le radome peuvent être un assemblage de mousses d'aluminium et d'une surface anti-perforation [8], [9]. Les matériaux mis en jeu doivent donc répondre à des sollicitations extrêmes et les approches associées au dimensionnement de ce type de structures restent dans l'ensemble fortement expérimentales. L'intégrité de la structure doit être absolument obtenue et le poids doit être faible, ce qui autorise l'utilisation de matériaux spécifiques dont le coût peut être élevé.



Un CRJ-700 a heurté un vautour noir pendant un atterrissage vers un aéroport dans le Kentucky, le 28 août 2007. L'impact a causé des dommages substantiels au nez de l'appareil.



Bord d'attaque de l'aile gauche d'un B-737 ayant frappé un grand héron, le 7 novembre 2007.

Figure 1 : Résultats d'impacts d'oiseaux sur le nez d'un avion et d'une aile [31]

2.3. Protections dans l'automobile

Dans l'automobile, on retrouve la problématique de l'absorption d'énergie, hors crash de la structure, notamment au niveau du capot des véhicules afin de limiter les blessures lors d'un choc piéton en respectant les critères HIC [82][90]. Les structures sont généralement simples et le travail consiste souvent à une optimisation topologique permettant d'atteindre les objectifs [87]. Il existe aussi d'autres types de protections pour le choc piéton tel que l'ajout de systèmes pyrotechniques couplés à des détecteurs radar qui permettent de soulever une partie du capot [34]. Ainsi que des protections hybrides, constituées de couches de métal et de plastique [88] ou avec des matériaux composites [89], ou avec des matériaux thermoplastiques [91] ou encore entièrement en aluminium [91]. Néanmoins, ces systèmes restent dédiés à des véhicules haut de gamme, dans la plupart des véhicules le coût des matériaux utilisés est un point extrêmement important ainsi que le poids de la structure. Dans le sport automobile, par contre, les structures sandwich se rapprochent de celle de l'aéronautique avec les mêmes objectifs de performance et de légèreté.

2.4. Protection dans le domaine de l'emballage

Dans le domaine du packaging, l'absorption d'énergie due à un choc est une problématique importante. Les chocs sont en général dus à la chute de faible hauteur de l'objet à protéger. Pour cela, les objets peuvent être emballés dans de la mousse qui est adaptée à la forme de l'objet à protéger. Ainsi, la mousse se déforme et absorbe l'énergie générée par la masse de l'objet. Le type de mousse et son épaisseur dépendent du niveau de protection voulue et de la masse de l'objet [7], [35]. Ils peuvent aussi être emballés dans un nid d'abeilles en papier [48].

2.5. Protections dans le domaine militaire

Dans le domaine militaire, les véhicules terrestres sont souvent blindés afin de protéger les équipages notamment face à des impacts de projectiles et à des ondes de choc. Ces protections doivent toujours être améliorées pour faire face aux nouvelles menaces. Une des principales protections est le blindage constitué de matériaux massifs de type acier [52]. L'utilisation de cette protection se fait dès la conception du véhicule pour avoir le moins de pièces possible et prendre en compte la masse ajoutée qui est de plusieurs tonnes (Figure 2). L'énergie d'impact est absorbée par déformation plastique locale et par rupture d'une partie de l'épaisseur de la

protection. Cette protection permet d'arrêter les petits projectiles et éclats mais pour limiter les blessures en cas de pénétration ou de fragmentation de la partie intérieure du blindage, l'intérieur est parfois recouvert d'une surface en composite antibalistique tel que le kevlar [55].



Figure 2 : Blocs d'assemblages du char M1 Abrams [52]

Il existe aussi des blindages constitués de couches complexes de matériaux tels que des céramiques, des métaux, des composites et des matériaux cellulaires [56]. Le blindage multicouches permet d'avoir une protection aussi efficace que le blindage de type acier mais permet de protéger les occupants de véhicules contre d'autres menaces spécifiques tels que la chaleur ou les jets de charges creuses. Suivant le niveau de protection recherchée, celle-ci peut être plus légère qu'avec la méthode précédente mais avec un coup plus élevé. Pour certains véhicules dont la protection peut être plus faible, l'acier est remplacé par des alliages, notamment d'aluminium [53]. Il existe d'autres types de protections telles que les protections actives qui sont constituées d'une couche explosive réagissant lors de l'impact d'un projectile et propulsant une plaque de blindage inclinée, ce qui permet d'augmenter l'épaisseur que devra traverser le projectile pour atteindre sa cible [54].

2.6. Synthèse

Dans les divers domaines où le critère de légèreté est important et que le niveau de protection à assurer est élevé, un sandwich de plusieurs matériaux est généralement utilisé. Le sandwich est composé d'une âme en matériau cellulaire et d'une peau anti-perforante.

Les matériaux cellulaires sont des mousses ou des nids d'abeilles principalement en aluminium. Leur comportement permet d'absorber une plus grande quantité d'énergie comparé à un matériau dense [7], [5]. La peau est généralement composée d'un acier avec une haute limite d'élasticité ou d'un alliage d'aluminium ou d'un composite. La séparation des

couches par une âme cellulaire permet d'accroître le moment d'inertie de la structure avec une faible augmentation de masse conduisant à une structure efficace au regard de la résistance à la flexion. Le tableau ci-dessous illustre les avantages de la structure sandwich en comparaison avec une plaque pleine dans le cadre de la théorie des poutres pour des données classiques sur les peaux et le matériau cellulaire. Il est donc logique dans le cadre des travaux envisagés pour cette thèse de s'orienter vers une structure sandwich dont les caractéristiques seront définies au regard du cahier des charges présenté précédemment.

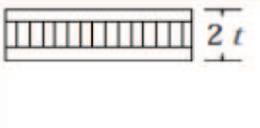
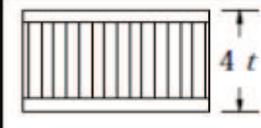
			
Rigidité relative à la flexion	1	7	37
Résistance relative à la flexion	1	3,5	9,2
Poids relatif	1	1,03	1,06

Tableau 1 : Conditions aux limites de plaques

Le type de protection étudié dans cette thèse est donc l'assemblage d'une structure anti-perforation et d'une structure absorbant l'énergie comme le montre la Figure 3, le nombre de couches de matériaux anti-perforation et de matériaux absorbant pouvant être variable.

Confidentiel

Figure 3 : Confidentiel

3. Dimensionnement des protections

Les structures sandwich sont dimensionnées pour résister aux sollicitations extérieures (impact d'oiseau, onde de choc, ...) et sont composées d'un assemblage de matériaux (acier, composite, mousse d'aluminium,...) dont les comportements sont différents et complexes. En conséquence, les méthodes utilisées pour calculer ces protections sont nombreuses et variées. Il est rappelé dans la partie suivante un certains nombres de travaux mais la liste n'est pas exhaustive.

3.1. Méthodes expérimentales

Le lanceur à gaz est un des systèmes d'essais les plus utilisés. Il permet d'avoir des très hautes vitesses d'impact de l'ordre de 1000 m.s^{-1} comme des faibles vitesses de l'ordre de 20 m.s^{-1} . Gama [11] a utilisé un lanceur à gaz pour comparer l'efficacité de protections multicouches auxquelles une couche en mousse d'aluminium a été ajoutée. Ces protections étaient soumises à l'impact d'un projectile ayant une vitesse de 838 m.s^{-1} . De nombreux essais d'impact ont été réalisés à moyennes vitesses d'impact entre 150 m.s^{-1} et 350 m.s^{-1} [6], [8], [26], tout comme des essais à faible vitesse, entre 17 m.s^{-1} et 150 m.s^{-1} [15], [25], [30]. Ces essais ont permis de déterminer la limite balistique des matériaux [6], [26], et des assemblages de matériaux. Ils sont généralement limités à des projectiles de faible masse, tels que les projectiles balistiques. Le système utilisé par Henssen [8], permet de lancer des projectiles de 1,82 kg représentant des oiseaux. Les mesures effectuées sont des mesures de vitesses d'impact, de vitesses résiduelles lorsque le projectile perce la cible. L'utilisation d'une caméra rapide permet de suivre l'évolution des phénomènes tels que la perforation [26]. Les impacts peuvent être obliques [15] et les projectiles de diverses formes [25]. Kolopp [83] présente une première démarche d'optimisation expérimentale pour des structures sandwich composites dans le cas d'application de blindage aéronautique. Elle montre que les solutions de peau ayant répondu aux critères de non perforation pour un impact d'un projectile de 127 g à 120 m.s^{-1} sont des aluminiums à faible niveau d'écaillage et à forte déformation à la rupture ou des composites tissés kevlar sec à 16 plis. Les essais à partir d'onde de choc (blast) sont aussi très répandus dans la littérature [80]. Nurik [81] étudie l'influence de l'épaisseur de l'âme et des plaques pour une structure acier-nid d'abeilles soumise à un chargement d'onde de souffle et

montre que l'épaisseur du nid d'abeilles retarde la densification et réduit la flexion en face arrière. L'accroissement de l'épaisseur des plaques réduit aussi la flexion en face arrière. Zhu [79] a montré qu'il existe un compromis entre la rigidité et la masse et qu'augmenter l'épaisseur des plaques, la densité de l'âme ou l'épaisseur des feuilles de nid d'abeilles réduit la flexion en face arrière mais augmente la masse. Enfin, Radford [78] a mis en valeur la différence sur la réponse mécanique entre des essais quasi-statiques et des essais dynamiques sur des structures sandwich avec des mousses métalliques due à la formation de rotules plastiques sur les plaques.

Pour des gammes de vitesse moins élevées, le puits de chute est un autre système très utilisé pour effectuer des impacts sur structures. Les projectiles sont de l'ordre de quelques kilogrammes et les énergies varient entre quelques joules et quelques centaines de joules [14], [22], [29], [51], [58]. Le puits de chute peut être utilisé pour impacter des sandwiches [14], [29], des mousses [58], ou des composites [22], [51]. Ces essais permettent de déterminer quelle est la structure qui résiste le mieux à un impact à faible vitesse [14], [51], de trouver quelles sont les vitesses limites de perforation [22], de caractériser l'endommagement [29] et la capacité d'une structure à absorber de l'énergie [58]. Par exemple, Torre [77] a défini des paramètres sans dimension pour évaluer les performances au crash de structures sandwich planes. Ces paramètres dépendent du ratio de l'énergie absorbée sur la déformation maximum et permettent une indexation des performances.

Il existe d'autres moyens permettant de caractériser la capacité d'une protection à absorber de l'énergie. Il y a les vérins dynamiques qui permettent de caractériser l'indentation dynamique lors d'un impact [49]. On peut aussi citer la compression quasi-statique. Amindana [50] utilise la compression pour caractériser l'indentation d'un nid d'abeilles. Yoo [13] présente une étude expérimentale d'absorbeur d'énergie de type « Egg-box » avec un projectile ayant une vitesse de $2 \text{ mm} \cdot \text{min}^{-1}$ qui a permis de connaître les caractéristiques de compression et la capacité d'absorption d'énergie de ce type de matériau. Pour les impacts à faible vitesse, il existe des essais d'impacts réalisés avec une presse hydraulique. Karakuzu [57] présente une étude d'impact d'une masse de 5 kg, ayant une vitesse de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sur des composites stratifiés.

En conclusion, la base expérimentale est très riche et permet de se faire une idée des matériaux utilisés au regard des performances mécaniques demandées. Les travaux menés sont essentiellement comparatif entre des solutions déterminés et donne les grandes lignes de la conception de structures sandwich. Cependant, on trouve des essais à haute énergie (faible

masse, grande vitesse) ou à faible énergie (masse moyenne, faible vitesse) mais très peu d'information pour des essais à masse importante et vitesse moyenne.

3.2. Méthodes analytiques

3.2.1. Modèles rhéologiques

Les modèles rhéologiques (Figure 4) sont l'utilisation combinée de masses, ressorts et amortisseurs pour modéliser un système, un impact ou le comportement des matériaux.

Confidentiel

Abrate [36], présente un modèle rhéologique d'impact sur une cible, où les raideurs linéaire et non linéaire de la cible sont représentées par des ressorts et les masses représentent les masses du projectile et celle de la cible. Hoo Fatt [24] présente deux modèles rhéologiques, le premier permettant de modéliser un impact sur une plaque sandwich ayant une fondation rigide et un second permettant de modéliser des conditions aux limites encastrees ou simplement appuyées. Ces deux modèles sont couplés à une modélisation de type plaque similaire à celle utilisée par Türk et al [43]. Cette modélisation permet de calculer la force de contact au court du temps et d'avoir le déplacement dynamique et l'effort de contact entre le projectile et la cible. Cette modélisation permet de prendre en compte la résistance à la compression d'une mousse incluse dans le sandwich. Ces modèles ont ensuite été développés pour prendre en compte de l'endommagement [46].

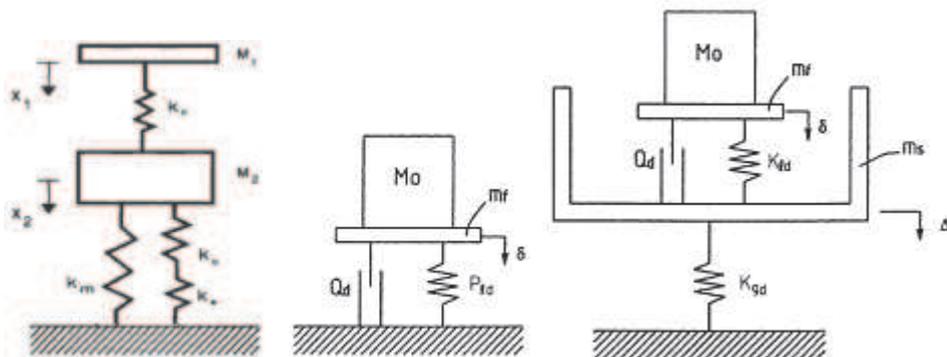


Figure 4 : Différents modèles rhéologiques d'impacts

Malekzadeh [28] utilise un modèle rhéologique couplée à la théorie d'ordre supérieur en plaque sandwich pour étudier l'impact à basse vitesse de panneaux. Le modèle rhéologique sert à modéliser l'interaction entre le projectile et le sandwich. Cette modélisation permet d'obtenir l'effort de contact, le déplacement du projectile et la flèche du sandwich. La méthode de Galerkin est utilisée pour la modélisation des couches du sandwich. La force de contact est considérée comme étant répartie uniformément sur une surface de contact dont la taille dépend de la grandeur de la charge d'impact ainsi que les propriétés élastiques et la géométrie du projectile.

3.2.2. Modèles poutres

Une modélisation simplifiée d'un problème d'impact sur plaque est la modélisation de type poutre. Christoforou [12] a étudié l'impact transversal d'une poutre composite avec une loi de contact linéaire. Puis il a implémenté une loi de contact élasto-plastique et a validé cette loi par comparaison à des courbes effort-temps et déplacement/indentation-temps. Li [37] présente un autre modèle élasto-plastique qui permet de déterminer la réponse dynamique d'une poutre sandwich simplement appuyée et impactée au centre par un projectile. Yi et Chen [86] ont étudié la réponse de poutres sandwichs encastées soumises à des forces d'impact, en utilisant un modèle de poutre avec une solution analytique basée sur le concept de « conservation de la quantité de mouvement » au lieu de la méthode « Energy-Balance » pour modéliser le compactage du cœur du sandwich lors d'impact. Les résultats obtenus montrent que le modèle proposé donne une bonne prédiction de la flèche maximale de la face avant de la poutre ainsi que les deux limites des régions où le cœur cellulaire est totalement compacté. Yu et al. [87] ont mené une étude sur les mécanismes de rupture sous impact de poutres sandwich avec cœur en mousse d'aluminium. Plusieurs tests d'impact de type quasi-statiques à faible vitesses 5 m.s^{-1} ont été menés. Les auteurs montrent que le modèle de Gibson modifié qu'ils proposent reproduit bien les modes de rupture observés expérimentalement par contre la courbe effort-déplacement reste assez éloignée de celle observée expérimentalement.

3.2.3. Modèles plaques

Timochenko [38] a proposé une modélisation basée sur les hypothèses de Kirchhoff pour modéliser le chargement statique d'une plaque. Le chargement pouvant être concentré en un

point, ou uniformément réparti sur toute la plaque ou uniformément réparti sur une zone rectangulaire. Les conditions aux limites devant être fixées. Bhaskar [42], [61], a étendu cette solution à une plaque composite encadrée en utilisant une double série de Fourier.

Parga-Landa [21] présente un modèle analytique élastique pour prédire le comportement face à un impact de protections légères. Il utilise le principe de conservation de moment. Il peut être utilisé pour calculer une courbe de protection balistique, la force d'impact, le déplacement et la vitesse de chaque couche, ainsi que la vitesse et le déplacement du projectile, les contraintes et déformations et la zone endommagée.

Mamivand [16] présente un modèle analytique similaire pour le comportement au choc balistique de composites tissés utilisés dans les gilets pare-balles. Il simule une plaque multicouche carrée encadrée dont chaque couche mince est supposée élastique. La pénétration du projectile cylindrique plat est basée sur la conservation de moment et la théorie des ondes. Sun [60] a utilisé la théorie de Mindlin pour la prise en compte du cisaillement transversal qui a été développé par Whitney [59] pour l'analyse de plaques orthotropes soumises à des impacts. Qian [44] a adopté la méthode Rayleigh-Ritz afin d'obtenir une solution approchée de l'impact de plaques rectangulaires encadrées. En se basant sur les techniques de la transformée de Laplace, Christoforou [45] a obtenu une solution analytique avec l'hypothèse de linéarisation de la loi de contact entre la force et l'indentation. Li [40] a développé une extension de la solution en série de Fourier pour le cas des vibrations libres de poutres avec des conditions aux limites générales. Cette méthode est une combinaison linéaire de la série de Fourier et d'une fonction polynomiale auxiliaire qui permet de tenir compte des discontinuités du déplacement aux bords. Puis, il introduit une seconde amélioration pour le cas général de vibration de plaques [39], [41]. Khov [47] a repris cette modélisation pour introduire un chargement concentré, uniformément réparti ou sur une zone de la plaque.

3.2.4. Modèles « Energy-Balance »

Le modèle « Energy-Balance » est un modèle basé sur l'égalité entre l'énergie cinétique et l'énergie absorbée par la structure juste avant rebond. Feli [20] présente un modèle analytique, basé sur cette méthode, pour la perforation des panneaux sandwich en composite avec une âme alvéolaire soumis à un impact haute vitesse. Il permet de déterminer l'énergie absorbée par le panneau sandwich, la vitesse résiduelle du projectile, et le temps de perforation. Foo [17], [18] présente une version modifiée du modèle « Energy-Balance » couplé avec une loi

de conservation de moment permettant de mieux décrire les phases de compaction de l'âme et de retard de déformation. Ces modèles sont appliqués à des poutres encastres en condition 2D. En conclusion, les modèles analytiques permettent d'évaluer rapidement et simplement la performance d'une structure sandwich. Néanmoins, certains modèles sont limités par rapport au problème de l'impact d'une masse importante à vitesse moyenne et notamment de la physique mise en jeu lors de la déformation.

Confidentiel

La structure simplifiée envisagée sera donc une structure sandwich plane avec des conditions aux limites variables (encastrement, appui simple ou libre) afin de représenter les différentes configurations possibles.

Les méthodes analytiques pour les poutres et plaques correspondent donc parfaitement à la problématique. L'impact pouvant se situer n'importe où sur la structure sandwich, il est donc préférable d'utiliser un modèle plaque par rapport aux poutres afin de mieux représenter la déformation globale dans les différentes directions. Néanmoins, les approches analytiques utilisées pour les poutres peuvent être étendues aux plaques. L'approche utilisée notamment par Li [40] pour les conditions aux limites variables semble à ce titre très intéressante mais limitée aux problèmes de vibration. L'approche « Energy-Balance » correspondant à un impact peut elle aussi être étendue aux plaques mais pose problème pour les conditions aux limites variables. Enfin, la prise en compte de l'écrasement de l'âme, de la plasticité de la plaque impactée et de sa rupture sont généralement peu considérés.

3.3. Méthodes numériques

La méthode éléments finis est bien évidemment un outil extrêmement performant dans la modélisation et le dimensionnement des structures sandwich. Thama [6] présente les simulations éléments finis de l'impact d'une sphère et d'une balle de 9 mm sur un casque en Kevlar. Les simulations sont comparées à des résultats d'essais. Henssen [8] présente un modèle numérique d'impact d'oiseau sur une structure composée d'une mousse et d'une plaque en aluminium qui a été développé avec le programme d'éléments finis LS-DYNA.

L'oiseau est modélisé avec une formulation ALE et les comportements des matériaux de protection ont été identifiés expérimentalement. Un algorithme de fluide-structure a été utilisé pour le contact entre l'oiseau et la protection. Ce modèle est capable de représenter la rupture des deux peaux en aluminium ainsi que celle du noyau en mousse d'aluminium. Il a été validé par des essais expérimentaux. Kurtaran [10] présente une étude numérique basée sur la méthode des éléments finis pour la simulation de l'impact d'une balle de 7,62 mm à nez hémisphérique allant à une vitesse de 500 m.s^{-1} à 1500 m.s^{-1} sur une porte de véhicule militaire en aluminium 4340 de 2 mm d'épaisseur. Les simulations ont été effectuées sur un modèle simplifié, une plaque circulaire. Une comparaison des lois de comportements utilisées (Johnson Cook et modèle plastique) montre qu'il y a un effet thermique non négligeable. A 500 m.s^{-1} , l'ajout d'une seconde plaque de 2 mm d'aluminium permet de ne pas avoir de perforation complète de la porte lors d'un impact à cette vitesse. Burlayenko [19] présente un modèle élément finis utilisant le logiciel ABAQUS pour l'analyse de la réponse dynamique de plaques sandwich impactées, avec prise en compte de l'écrasement du cœur, l'endommagement des peaux et le décollement des couches. Tiberkak [23] présente une analyse en éléments finis couplée à la théorie de plaques de Reissner-Mindlin pour caractériser l'endommagement d'un composite face à un impact à faible vitesse. Les résultats indiquent que la fissuration de la matrice apparaît principalement à cause de la contrainte de cisaillement transversal. Karger [27] présente un modèle en éléments finis avec endommagement de l'impact à faible vitesse de sandwichs composites avec une amélioration de l'outil CODAC pour la détermination des dommages. Des essais d'impacts effectués sur des panneaux sandwich en nid d'abeilles ont été utilisés pour valider la simulation.

En conclusion, la méthode des éléments finis est un excellent outil de simulation d'impact, mais elle nécessite une mise en données qui reste lourde et fastidieuse, ainsi qu'une bonne expertise dans le choix du type d'algorithme de contact qui conditionne souvent la convergence. C'est certainement une approche qui permettrait une démarche de dimensionnement par optimisation automatique, cependant cette technique reste trop longue pour la mise en place du calcul et exige des personnes qualifiées pour son utilisation.

3.4. Choix de matériaux

Au travers de la bibliographie précédente, il paraît difficile de choisir la structure sandwich adaptée à la sollicitation considérée. Les matériaux utilisés sont nombreux et leurs

caractéristiques mécaniques et géométriques peuvent être différentes. Il existe donc des outils d'accompagnement pour effectuer ce choix.

Par exemple, le diagramme d'absorption d'énergie [7] sert à synthétiser les lois de comportement des mousses en fonction de leurs densités et à plusieurs vitesses de déformation. Cette méthode ne prend pas en compte les sollicitations combinées, ni les structures multicouches. Néanmoins, elle permet de faire un pré-dimensionnement de la structure absorbante ou à l'inverse de déterminer la surface nécessaire à la répartition de l'énergie en fonction de la capacité d'absorption d'une mousse choisie arbitrairement. Elle nécessite d'avoir les diagrammes d'absorption d'énergies des mousses et ne donne aucune information sur le déplacement qui sera obtenu et sur la flexion éventuelle de la structure.

Pendant longtemps les techniques d'identification de paramètres matériaux par méthode inverse ont été utilisées par les chercheurs, afin de caractériser les nouveaux matériaux utilisés [81-85]. De nombreux algorithmes ont été utilisés mais se limitant à quelques variables matériaux, parmi les plus utilisés, on peut citer les algorithmes à gradients tels que : Levenberg-Marquardt, gradient conjugué, ou encore BFGS.

Parallèlement, depuis un certain nombre d'années, plusieurs auteurs ont eu recours aux techniques d'optimisation pour automatiser le choix des matériaux lors de la conception de structures soumises aux chocs.

Parmi ces méthodes, on peut citer la technique dite évolutionnaire ou topologique [75, 76] où le choix du matériau est fait directement en opérant sur le maillage éléments finis. Ainsi, les endroits les plus sollicités se trouvent affectés du matériau le plus rigide ou les plus absorbants d'énergie et les endroits les moins sollicités se trouvent affectés par des matériaux légers à faible résistance.

Récemment une nouvelle variante des techniques d'optimisation topologique baptisée HCA (Hybrid Cellular Automaton) a été développée [73]. Dans cette méthode, un ensemble de variables d'état (paramètres de matériaux) est amélioré itérativement en faisant varier par des règles d'évolution un ensemble de variables spécifiques de choix de matériaux (i.e. module d'Young, limite élastique,...). Ces règles d'évolution s'opèrent localement dans les cellules à travers une zone de limite d'influence des conditions locales. Cette technique, a été appliquée récemment pour l'optimisation d'un pare-choc en crash frontal afin d'améliorer ses performances en terme d'absorption d'énergie.

D'autres techniques plus classiques d'optimisation basées sur les algorithmes de programmation mathématique (BFGS, SQP) ont été utilisées par certains auteurs [74, 77, 79]

pour la conception de pièces et de structures lors de leur mise en forme afin de minimiser les risques de rupture des pièces formées lors du procédé de formage.

Pour les problèmes fortement non linéaires, tels que le crash, ou la simulation des procédés de mise en forme, les chercheurs font de plus en plus recours aux techniques d'optimisation basées sur les méta modèles construits à partir des techniques de plans d'expériences et de surfaces de réponse [78, 80]. Ces méthodes représentent une alternative efficace permettant de contourner les problèmes de convergence des algorithmes classiques d'optimisation à base de gradients.

4. Conclusion et stratégie

Pour répondre à la problématique de pré-dimensionnement avec des structures sandwich face à des impacts, il apparaît judicieux de développer un modèle analytique ou semi-analytique utilisant la théorie des plaques épaisses multicouches prenant en compte des conditions aux limites variables pour simuler les différents scénarii d'impact y compris sur les bords. Ce modèle doit aussi prendre en compte la géométrie extérieure qui varie en fonction de la structure à protéger. Le modèle mathématique doit être basé sur un algorithme utilisant le schéma de dynamique explicite pour l'intégration des équations différentielles d'équilibre et permettre de calculer le déplacement de la face arrière à chaque instant pour obtenir le déplacement maximal. Les comportements des matériaux dont il faut tenir compte sont de plusieurs types, tels que les composites, les matériaux métalliques et les mousses métalliques. Il faut aussi prendre en compte la plastification locale et un critère de prédiction de la rupture de la peau supérieure.

Pour mettre au point ce modèle, mon travail de thèse consistera à coupler les approches de Reissner-Mindlin pour la modélisation de la flexion/cisaillement de plaques et la théorie de Li [41] utilisant des supports élastiques pour la prise en compte des conditions aux limites généralisées. L'impact d'un projectile sera modélisé en partant de la loi de contact de Hertz et modifiée pour prendre en compte l'écrasement de la mousse et la plasticité locale. Un critère simple de prise en compte de la rupture sera aussi envisagé.

L'objectif final est la mise au point d'une méthodologie de dimensionnement d'une structure sandwich soumise à un impact respectant des contraintes de masse et de volume tout en atteignant des objectifs d'absorption d'énergie avec une flexion limitée et cela pour des énergies variables et des conditions aux limites variables. La stratégie de dimensionnement

(Figure 5) sera donc de faire un choix de matériaux avec le modèle semi-analytique développé, en fonction des contraintes retenues pour la conception. Les quelques solutions obtenues pourront être ensuite simulées par éléments finis pour compléter la démarche notamment pour affiner les résultats sur les conséquences de la rupture. Si la protection donne le résultat attendu, elle sera enfin validée par un essai expérimental.

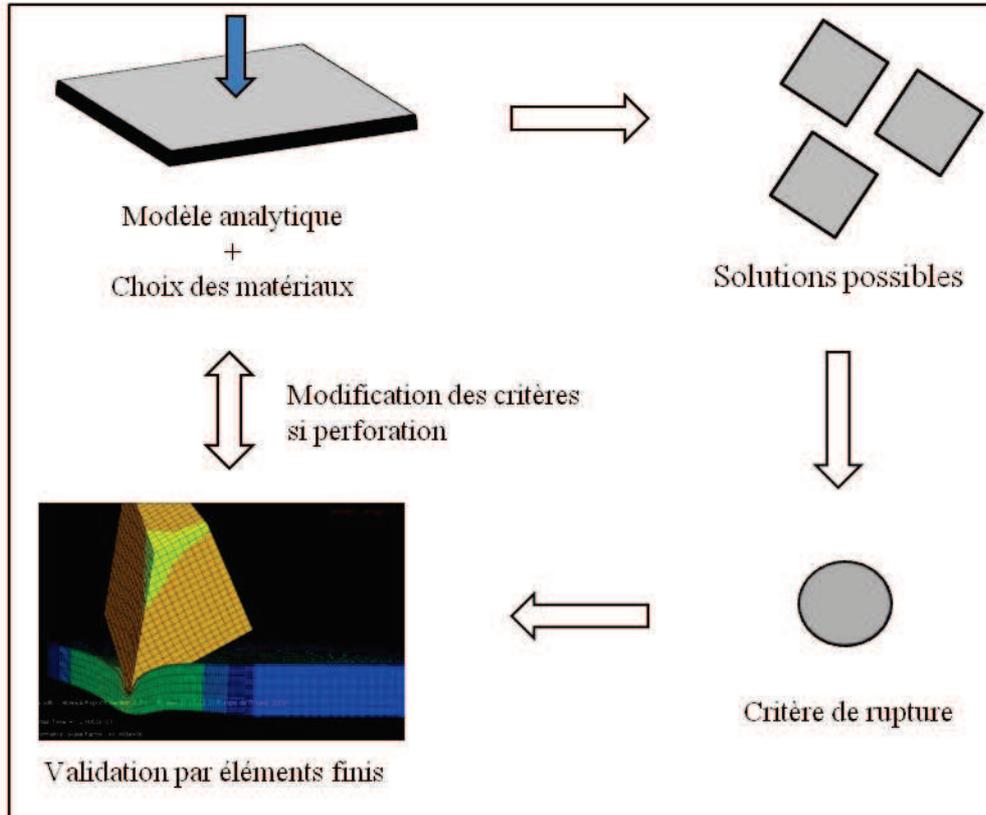


Figure 5 : Stratégie de choix des matériaux

5. Plan de la thèse

Mon travail de thèse est présenté de la façon suivante : le chapitre 2 est consacré au développement d'un modèle élastique de flexion de plaques multicouches anisotropes avec des conditions aux limites généralisées pour un impact. Le chapitre 3 est consacré au développement de modèles de comportements locaux tel que la plasticité locale et la rupture de la couche anti-perforation, et l'écrasement de la mousse. Les critères de rupture sont déterminés expérimentalement avec une méthode inverse. Les résultats sont ensuite validés par étape, par rapport à une référence éléments finis. Et finalement, les résultats sont validés par rapport à des résultats d'essais expérimentaux. Le chapitre 4 présente la démarche

d'optimisation afin de déterminer la meilleure solution possible pour la structure sandwich en tenant compte des différentes contraintes.

Confidentiel

Enfin, le chapitre 6 conclut mes travaux et dresse quelques perspectives à ma recherche.

Chapitre II

Modélisation élastique

1. Introduction

Confidentiel

Cependant, si on restreint la modélisation à l'impact de structures ayant des formes géométriques simples telles que des plaques ou des coques cylindriques, alors il devient possible de développer des solutions semi-analytiques basées par exemple sur les expansions en séries de Fourier pour aboutir efficacement à la solution du problème d'impact.

Confidentiel

Ce modèle sera donc un modèle d'impact sur plaque rectangulaires planes dont les dimensions seront fixées en fonction du besoin. Les courbures éventuelles sont négligées. La plaque est composite et multicouches pour permettre la prise en compte des divers matériaux utilisables pour la protection.

Le modèle retenu sera défini principalement sur la théorie des plaques fondée sur l'hypothèse cinématique des sections droites et de non variation de l'épaisseur (Reissner-Mindlin) et sur l'hypothèse des contraintes planes. Nous établissons les expressions des différentes relations cinématiques et mécaniques pour une plaque définie par une surface d'épaisseur constante qui est définie suivant la normale à la surface moyenne. Nous considérons un modèle avec une continuité C^0 de la surface moyenne, ce qui permet de définir deux rotations en chaque point. La dépendance en z (coordonnée suivant l'épaisseur) des quantités géométriques, cinématiques et mécaniques est étudiée en détail. Des expressions cohérentes, linéaires et quadratiques en z (coordonnée suivant l'épaisseur) sont rappelées pour les déformations et pour l'énergie interne par unité de volume, permettant une intégration explicite suivant l'épaisseur. La présentation est inspirée et adaptée du chapitre quatre de l'ouvrage de Batoz et Dhatt [92].

Le chargement de type impact d'une sphère est modélisé en utilisant la théorie du contact de Hertz modifié pour le cas d'un impact avec un projectile conique. L'effort d'impact est réparti

sur une zone de la plaque dont la taille est représentée par la forme de la géométrie du projectile.

Les conditions aux limites cinématiques de la structure sont modélisées par des supports élastiques de chaque côté de la plaque. Le choix des valeurs des raideurs permettent d'obtenir les différentes conditions aux limites lors d'un impact sur structure. L'intégration temporelle des équations différentielles du problème d'impact est faite en utilisant un schéma de type dynamique explicite étant donné la courte durée du phénomène.

Le modèle mis au point est validé par rapport à plusieurs exemples issus de la littérature et à des simulations éléments finis.

2. Théorie de plaques stratifiées

2.1. Caractéristiques géométriques et cinématiques

Une "plaque" désigne un solide dont l'épaisseur h , mesurée sur z (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) de part et d'autre du plan moyen, est petite devant les deux autres dimensions disposées dans le plan (x, y) . Une plaque peut être constituée d'un matériau homogène, ou être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes.

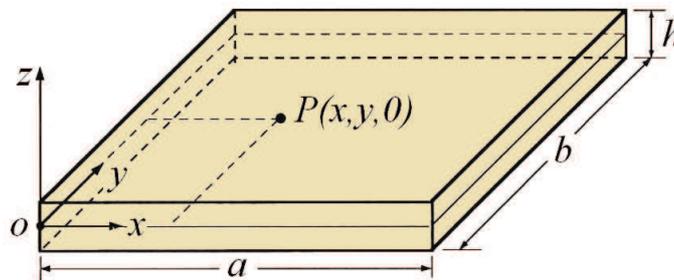


Figure 6 : Description géométrique d'une plaque

La théorie des plaques repose sur plusieurs hypothèses dont les principales sont rappelées ci-dessous :

- Le plan xy est le plan moyen de la plaque.
- Hypothèse des sections droites, une section initialement plane reste plane après déformation (théorie du premier ordre).
- Hypothèse de déformation transversale nulle $\varepsilon_{zz} = 0$.

- Hypothèse de petits déplacements et petites rotations de la surface moyenne après déformation.
- Hypothèse de contraintes planes : la contrainte σ_{zz} normale au plan de la plaque est négligeable par rapport aux autres composantes de contraintes.
- Prise en compte d'une loi de comportement en cisaillement, fonction d'un facteur de correction du cisaillement transversal défini à priori par des considérations d'équivalence énergétique.
- Hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite.

Cette théorie fait intervenir :

- Cinq variables cinématiques indépendantes : les déplacements de membrane u, v dans le plan de référence $z=0$, le déplacement transversal w et les rotations β_x et β_y .
- Trois efforts de membrane N_x, N_y, N_{xy} , trois moments de flexion M_x, M_y, M_{xy} et deux efforts tranchants T_x, T_y tels que montrés sur la Figure 7 ci-dessous.

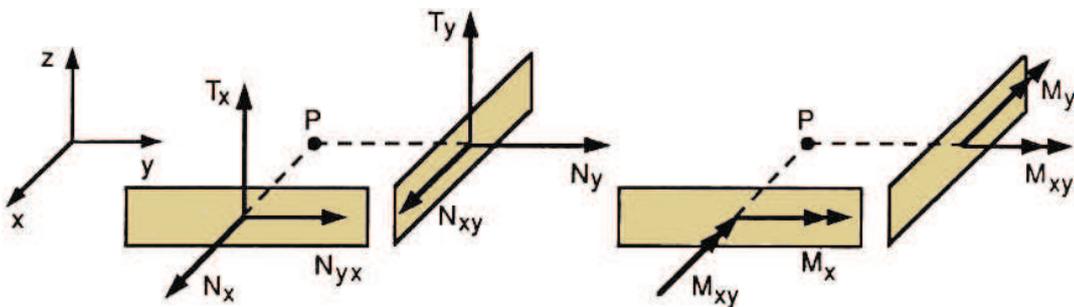


Figure 7 : Efforts résultants dans une plaque

2.2. Relations cinématiques

Le champ de déplacements d'un point $P(x, y, 0)$ est donné par :

$$\vec{u}_P(x, y) = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j} + w(x, y)\vec{k} \quad (2.1)$$

Où $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires suivants les axes x, y, z .

Le champ de déplacements d'un point $Q(x, y, z)$ est défini en adoptant l'hypothèse de sections planes, par :

$$\vec{u}_Q(x, y, z) = \vec{u}_P(x, y) + z\vec{\beta}(x, y) \quad (2.2)$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$ sont les rotations du vecteur $\overrightarrow{PQ} = z \vec{k}$ (Figure 8).

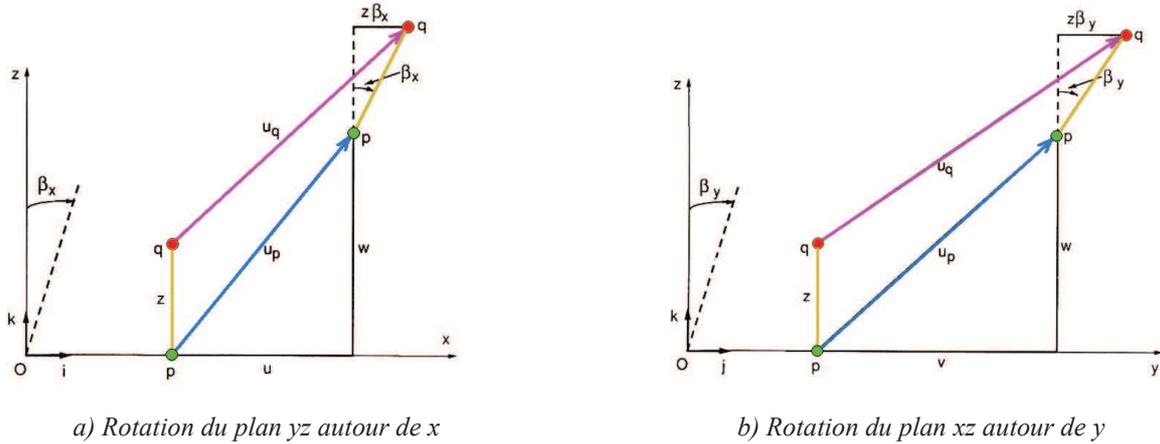


Figure 8 : Cinématique de plaque

Les déformations linéaires s'écrivent :

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z \{\chi\} \quad (2.4)$$

avec :

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix}; \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix}; \quad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Les déformations de cisaillement transversal $\{\gamma\}$ sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, $\{e\}$ représente les déformations de membrane et $\{\chi\}$ les courbures (Figure 9).

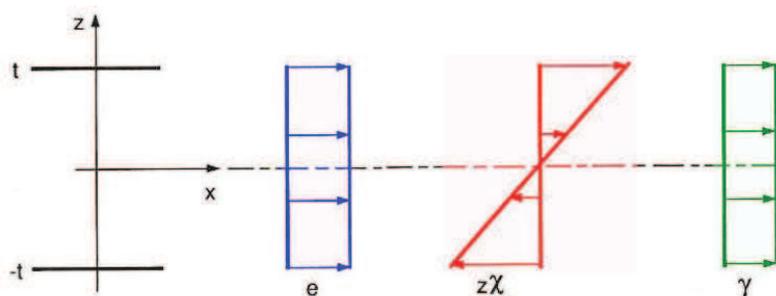


Figure 9 : Déformations à travers l'épaisseur d'une plaque

2.3. Equations d'équilibre

En considérant l'équilibre d'un élément de plaque tel que montré sur la Figure 7, les équations d'équilibre dynamique d'une plaque s'écrivent :

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = \rho_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_{mf} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = \rho_m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho_{mf} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

$$T_{x,x} + T_{y,y} + f_z = \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x = \rho_f \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + \rho_{mf} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - T_y = \rho_f \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} + \rho_{mf} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.13)$$

$$\rho_m = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho(z) dz; \quad \rho_{mf} = \int_{-h/2}^{+h/2} z \rho(z) dz; \quad \rho_f = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \rho(z) dz \quad (2.14)$$

N_x, N_y, N_{xy} représentent les efforts de membrane dans le plan de la plaque (N.m^{-1}).

M_x, M_y, M_{xy} représentent les moments fléchissant (Nm.m^{-1}).

T_x, T_y représentent les efforts tranchants (N.m^{-1}).

f_z représente la charge répartie par unité de surface moyenne dans la direction z (N.m^{-2}).

$\rho(z)$ désigne la densité du matériau (kg.m^{-3}). Dans le cas d'un matériau constitué de nc couches homogènes de densité ρ_i , comme indiquées sur la Figure 10, on a :

$$\rho_m = \sum_{i=1}^{nc} h_i \rho_i; \quad \rho_{mf} = \sum_{i=1}^{nc} \eta_i h_i \rho_i; \quad \rho_f = \sum_{i=1}^{nc} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) \rho_i \quad (2.15)$$

avec $h_i = z_{i+1} - z_i$; $\eta_i = \frac{z_{i+1} + z_i}{2}$.

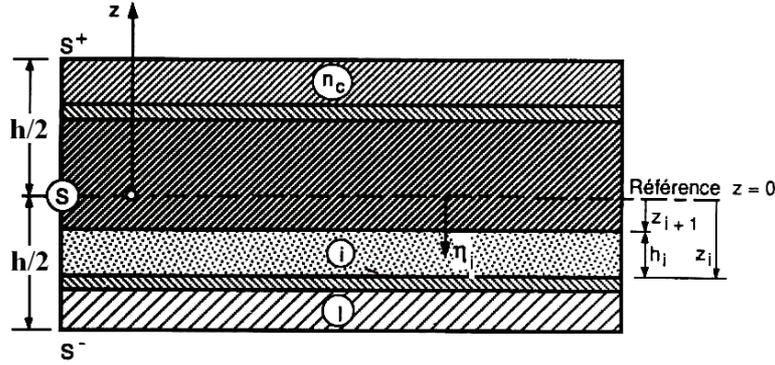


Figure 10 : Plaque stratifiée

2.4. Loi constitutive

Afin de pouvoir utiliser une large gamme de matériaux pour la structure sandwich, le comportement des matériaux est choisi aussi générique que possible en se plaçant dans la théorie des matériaux composites. Dans le cas d'un matériau élastique, la loi de comportement pour une couche orthotrope dans les directions d'orthotropie L, T, Z est définie par :

$$\{\sigma_L\} = [H_L] \{\varepsilon_L\} \quad \text{et} \quad \{\tau_L\} = [H_{\tau L}] \{\gamma_L\} \quad (2.16)$$

avec :

$$\{\sigma_L\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{LL} \\ \sigma_{TT} \\ \sigma_{LT} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{LL} \\ \varepsilon_{TT} \\ \varepsilon_{LT} \end{Bmatrix}; \quad \{\tau_L\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{LZ} \\ \sigma_{TZ} \end{Bmatrix}; \quad \{\gamma_L\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{LZ} \\ \gamma_{TZ} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

$$[H_L] = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LT} & 0 \\ H_{TL} & H_{TT} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H_{\tau L}] = \begin{bmatrix} G_{LZ} & 0 \\ 0 & G_{TZ} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\text{et :} \quad H_{LL} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \quad H_{TT} = \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}; \quad H_{LT} = \nu_{LT}H_{TT}; \quad G_{LZ} = G_{LT} \quad (2.19)$$

avec cinq coefficients indépendants de matériau, $E_L, E_T = E_Z, \nu_{LT} = \nu_{LZ}, G_{LT} = G_{LZ}, G_{TZ}$

$$\text{et } \nu_{LT}E_T = \nu_{TL}E_L \text{ et } G_{TZ} = \frac{E_T}{2(1+\nu_{TZ})}.$$

E_L, E_T, E_Z sont les modules d'élasticité du matériau dans les directions L, T et Z respectivement. ν_{LT}, ν_{TZ} sont les coefficient de Poisson relatifs aux directions LT et TZ respectivement.

La relation (2.16) peut être explicitée après intégration en :

$$\begin{cases} \{N\} = [H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\} \\ \{M\} = [H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\} \\ \{T\} = [H_c]\{\gamma\} \end{cases} \quad (2.20)$$

avec

$$[H_m] = \int_{-h/2}^{+h/2} [H] dz; \quad [H_{mf}] = \int_{-h/2}^{+h/2} z [H] dz; \quad [H_f] = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [H] dz \quad (2.21)$$

Dans le cas d'un matériau constitué de nc couches homogènes de densité ρ_i

$$[H_m] = \sum_{i=1}^{nc} h_i [H]_i; \quad [H_{mf}] = \sum_{i=1}^{nc} \eta_i h_i [H]_i; \quad [H_f] = \sum_{i=1}^{nc} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H]_i \quad (2.22)$$

La matrice $[H_c]$ tient compte des composantes de $[H_\tau]$ et du facteur de correction du cisaillement transversal k . $[H_\tau]$ constitue le lien entre les déformations de cisaillement $\{\gamma\}$ et les contraintes correspondantes $\{\tau\}$.

$$\{\tau\} = [H_\tau]\{\gamma\} \quad (2.23)$$

Les matrices $[H]$ et $[H_\tau]$ sont ainsi définies dans le repère global de la plaque par :

$$[H] = [T_1]^T [H_L] [T_1] \quad \text{et} \quad [H_\tau] = [T_2]^T [H_{\tau L}] [T_2] \quad (2.24)$$

avec

$$[T_1] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & CS \\ S^2 & C^2 & -CS \\ -2CS & 2CS & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} C & S \\ S & C \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

et $C = \cos \theta, S = \sin \theta$ et $\theta = \theta(x, L)$ l'angle que fait l'axe x avec la direction d'orthotropie L (voir Figure 11).

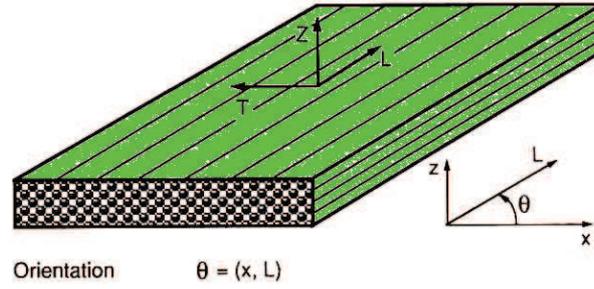


Figure 11 : Couche orthotrope dans une plaque

Si le matériau est isotrope on a :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [H_\tau] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Le calcul de $[H]$ et $[H_\tau]$ permettront d'aboutir aux expressions de $[H_m]$, $[H_{mf}]$ et $[H_f]$ à partir de l'équation (2.18).

La loi de comportement intégrée s'écrit de façon générale sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_m] & [H_{mf}] & [0] \\ [H_{mf}] & [H_f] & [0] \\ [0] & [0] & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{e\} \\ \{\chi\} \\ \{\gamma\} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

Le calcul de $[H_c]$ est effectué par une méthode basée sur des considérations d'équilibre et d'équivalences énergétiques de manière à ce que la rigidité en CT (cisaillement transversal) du modèle de plaque corresponde au mieux à celle définie par la mécanique des milieux continus tridimensionnels.

Dans le cas de plaques composites, avec x et y comme directions d'orthotropie, la matrice $[H_c]$ est diagonale et deux facteurs de correction sont définis. La méthode présentée dans le cadre de ma thèse pour les plaques sandwichs généralise celle adoptée pour les poutres en faisant abstraction du couplage membrane-flexion, c'est-à-dire que $[H_{mf}] = [0]$.

La matrice $[H_c]$ est définie de telle sorte que la densité surfacique d'énergie interne de CT obtenue pour une distribution tridimensionnelle (exacte) des contraintes σ_{xz} et σ_{yz} noté U_{3D}

soit identique à celle associée au modèle bidimensionnel (noté U_{Plaque}) construit selon l'hypothèse de Reissner-Mindlin, ainsi :

$$U_{3D} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{+h/2} \langle \tau \rangle [H_\tau]^{-1} \{ \tau \} dz \quad \text{et} \quad \{ \tau \} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

L'énergie interne de CT du modèle de plaque est donnée par :

$$U_{Plaque} = \frac{1}{2} \langle T \rangle [H_c]^{-1} \{ T \} \quad \text{et} \quad \{ T \} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{ \tau \} dz \quad (2.29)$$

L'équivalence énergétique des deux modèles donne :

$$U_{3D} = U_{Plaque} \Rightarrow \int_{-h/2}^{+h/2} \langle \tau \rangle [H_\tau]^{-1} \{ \tau \} dz = \left(\int_{-h/2}^{+h/2} \langle \tau \rangle dz \right) [H_c]^{-1} \left(\int_{-h/2}^{+h/2} \{ \tau \} dz \right) \quad (2.30)$$

La distribution exacte des contraintes de CT $\{ \tau(z) \}$ doit satisfaire les équations d'équilibre en contraintes suivantes :

$$\sigma_{xz}(z) = - \int_{-h/2}^z (\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y}) dz; \quad \sigma_{yz}(z) = - \int_{-h/2}^z (\sigma_{yy,y} + \sigma_{xy,x}) dz \quad (2.31)$$

Avec : $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ pour $z = \pm \frac{h}{2}$

Dans le cas particulier d'un matériau isotrope, on a :

$$[H_m] = \int_{-h/2}^{+h/2} [H] dz = \frac{hE}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$[H_{mf}] = \int_{-h/2}^{+h/2} z [H] dz = [0] \quad (2.33)$$

$$[H_f] = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 [H] dz = \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$[H_c] = k G h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.35)$$

L'application de la relation (2.30) donne $k = \frac{5}{6}$.

2.5. Conditions aux limites classiques

Elles ont pour objet, d'éliminer les mouvements de corps rigide et aussi d'aider à la résolution des équations aux dérivées partielles fondamentales. Aussi, elles influencent très fortement la distribution des efforts au voisinage des bords (voir Figure 12). Dans le cas d'encastrement et d'appuis simples, des variations importantes des efforts résultants peuvent être observées au voisinage des bords des plaques ainsi que dans les coins.

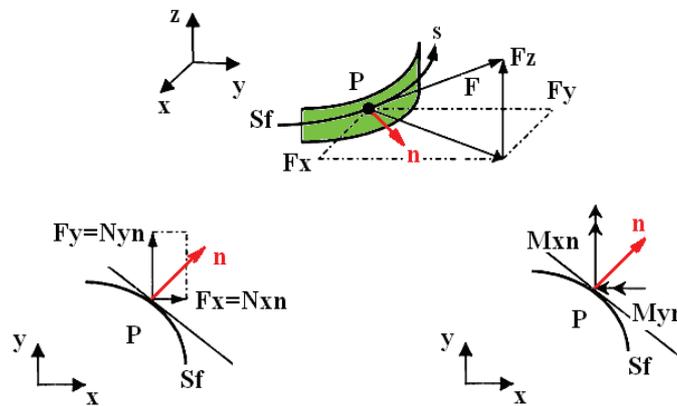


Figure 12 : Efforts et moments sur le contour

Les principales conditions aux limites de plaques sont énumérées dans le Tableau 2.

Bord	Conditions aux limites
Encastrement E_1	$w = \beta_n = M_{ns} = 0$
Encastrement E_2	$w = \beta_s = \beta_n = 0$
Appui simple S_1	$w = M_n = M_{ns} = 0$
Appui simple S_2	$w = \beta_s = M_n = 0$
Bord libre	$T_s = M_n = M_{ns} = 0$

Tableau 2 : Conditions aux limites de plaques

2.6. Plaque de type Kirchhoff

L'hypothèse de Kirchhoff pour les plaques minces ($L/h \geq 20$) est basée sur celle dite de conservation des normales. Autrement dit, les points matériels situés sur une normale à la surface xy avant déformation restent sur une normale à la surface moyenne déformée. Ce qui permet alors de considérer que la rigidité de cisaillement est très grande par rapport à la rigidité de flexion.

Ainsi, les déformations de cisaillement transversal sont négligeables par rapport aux autres composantes :

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + \beta_x = 0 ; \quad \gamma_{yz} = w_{,y} + \beta_y = 0 \quad (2.36)$$

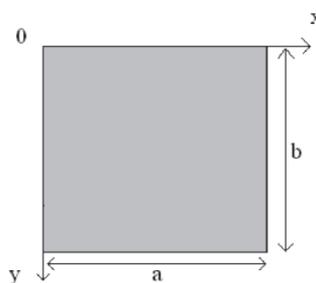
Cette théorie de Kirchhoff traitant du cas de plaques minces peut être interprétée comme un cas particulier de la théorie de Reissner-Mindlin qui, elle, s'intéresse au cas de plaques épaisses.

2.7. Modélisation du chargement

La solution analytique de flexion de plaque pour le cas d'un chargement quelconque peut s'exprimer sous la forme d'une expansion en séries de Fourier [38]. Ainsi, le chargement s'écrit :

$$f_{az} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \quad (2.37)$$

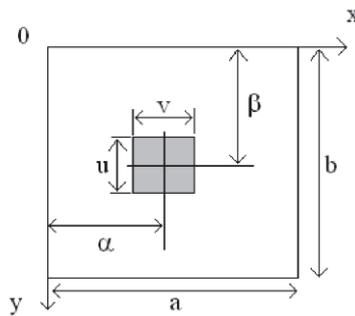
Dans le cas d'une charge constante et uniforme sur toute la surface, P_{mn} s'écrit :



$$P_{mn} = \frac{16P_0}{\pi^2 mn} \text{ avec } n \text{ et } m \text{ impairs}$$

Figure 13 : schéma d'un chargement homogène

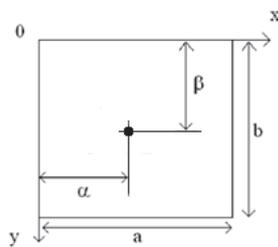
Dans le cas d'une charge constante et uniforme sur une zone réduite uv de centre $(\alpha ; \beta)$:



$$P_{mn} = \frac{16P_0}{abuv} \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi u}{2a}\right) \sin\left(\frac{n\pi v}{2b}\right)$$

Figure 14 : schéma d'un chargement sur une zone de la plaque

Dans le cas d'une charge concentrée en un point $(\alpha ; \beta)$:



$$P_{mn} = \frac{4P_0}{ab} \sin\left(\frac{m\pi\alpha}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\beta}{b}\right)$$

Figure 15 : schéma d'un chargement en un point

L'ensemble de ces modèles permettent de couvrir l'ensemble des chargements envisagés dans ce travail.

3. Conditions aux limites généralisées

Il existe dans la littérature de nombreux modèles analytiques avec des conditions aux limites fixées (encastrement, simplement appuyé, ...) [99]. L'objectif du travail est de permettre tous les choix possibles à l'utilisateur, il faut donc développer un modèle avec des conditions aux limites variables. Plusieurs travaux utilisent des fonctions caractéristiques (trigonométriques ou hyperboliques) issues de modèles poutres ayant des conditions aux limites similaires à la plaque considérée mais cette méthode n'est valable que pour un type de conditions aux limites données [100], [101], [102]. Pour notre problématique, cela nous obligerait à considérer plusieurs dizaines de possibilités pour rendre la méthode générale du point de vue de l'utilisateur. D'autres méthodes, plus généralisables, utilisent des fonctions caractéristiques qui sont une combinaison de fonctions polynomiales et trigonométriques [103], [104]. Mais

elles ont besoin d'avoir des fonctions d'ordre élevé pour avoir un résultat correct et cela génère des instabilités [105]. Les récents travaux de Li utilisent des conditions aux limites modélisées avec des ressorts permettant d'avoir des conditions aux limites avec une bonne convergence des solutions lorsqu'elles sont couplées avec une solution en série de Fourier modifiées. Cette méthode étant la plus adaptée à notre cas, nous nous basons donc sur elle.

D'après Li [40], les conditions aux limites d'une plaque peuvent s'écrire sous forme générale avec des ressorts linéaires et des ressorts de rotations sur la plaque, représentés par la Figure 16. Dans la direction transversale, la plaque est maintenue par quatre ressorts linéaires k_{x0} , k_{x1} , k_{y0} , k_{y1} . La plaque est maintenue également par des ressorts de torsion K_{x0} , K_{x1} , K_{y0} , K_{y1} . Les valeurs des constantes des ressorts permettent de simuler les conditions aux limites que l'on souhaite sur chaque coté (encastrée, simplement appuyée, libre).

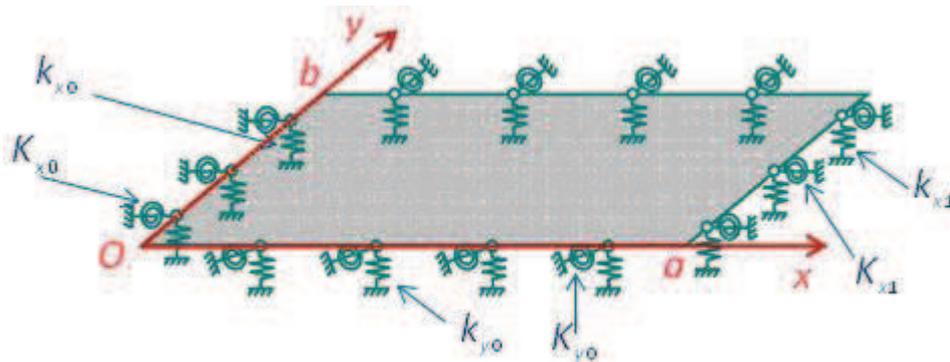


Figure 16 : représentation des conditions aux limites

Dans ce cas les conditions d'équilibre des forces et des moments des ressorts sur tout le contour de la plaque peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}
 k_{x0}w &= T_x; & K_{x0}w_{,x} &= -M_x & \text{pour } x &= 0 \\
 k_{x1}w &= -T_x; & K_{x1}w_{,x} &= M_x & \text{pour } x &= a \\
 k_{y0}w &= T_y; & K_{y0}w_{,y} &= -M_y & \text{pour } y &= 0 \\
 k_{y1}w &= -T_y; & K_{y1}w_{,y} &= M_y & \text{pour } y &= b
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

En mettant les valeurs appropriées aux raideurs des ressorts, toutes les conditions aux limites homogènes sur chaque cotés peuvent être représentées. Le Tableau 3 présente les valeurs à donner aux ressorts pour les cas de conditions aux limites classiques.

Condition aux limites	Valeurs des raideurs des ressorts
Encastrée	$k = \infty$ et $K = \infty$
Simplement appuyée	$k = \infty$ et $K = 0$
Libre	$k = 0$ et $K = 0$
Fondation élastique	Valeurs fixées par l'utilisateur

Tableau 3 : Valeurs des raideurs des ressorts des conditions aux limites

Dans la pratique des ressorts ayant pour valeur « ∞ » sont fixés à une valeur de l'ordre de 10^{10} comme le montre Li dans ses travaux [39]. Cette valeur est choisie de telle sorte que l'influence d'une valeur supérieure sur le résultat soit négligeable.

4. Solution de flexion de plaque avec CL généralisées

4.1. Expression fondamentale du champ de déplacement

Dans le cas de flexion pure de plaques sandwichs, les équations d'équilibre (2.6-2.10) se réduisent à :

$$T_{x,x} + T_{y,y} + f_z = \rho_m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.39)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x = \rho_f \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \quad (2.40)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - T_y = \rho_f \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \quad (2.41)$$

En utilisant les relations (2.20) donnant les moments fléchissant et des efforts tranchants :

$$h^m G_{23}^m (\beta_{x,x} + w_{,xx}) + h^m G_{13}^m (\beta_{y,y} + w_{,yy}) + f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.42)$$

$$D_{11} \beta_{x,xx} + (D_{12} + D_{66}) \beta_{y,yy} + D_{66} \beta_{x,yy} - h^m G_{23}^m (\beta_x + w_{,x}) = \rho_f \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \quad (2.43)$$

$$D_{66} \beta_{y,xx} + (D_{12} + D_{66}) \beta_{x,xy} + D_{22} \beta_{y,yy} - h^m G_{13}^m (\beta_y + w_{,y}) = \rho_f \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \quad (2.44)$$

Pour résoudre le problème constitué des équations (2.42-2.44), ainsi que des huit équations (2.38) des conditions aux limites, on adopte une solution de champ de déplacement $w(x, y)$ en double série de cosinus [41].

La solution fondamentale de (2.42) s'écrit sous la forme :

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \quad (2.45)$$

Avec $\xi_b^l(y)$ et $\xi_a^l(x)$ des fonctions définies de telle sorte qu'elles n'influent pas sur les opérations de dérivations. En effet, on peut vérifier que $\xi_a^1(0) = \xi_a^2(a) = \xi_a^3'''(0) = \xi_a^4'''(a) = 1$ et toutes les autres dérivées sont nulles aux bords. Elles permettent ainsi de prendre en compte le fait qu'il est possible d'avoir des discontinuités aux bords de la plaque.

$$\begin{aligned} \xi_a^1 &= \frac{9a}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a}{12\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right); & \xi_a^2 &= -\frac{9a}{4\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a}{12\pi} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \\ \xi_a^3 &= \frac{a^3}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a^3}{3\pi^3} \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right); & \xi_a^4 &= -\frac{a^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) - \frac{a^3}{3\pi^3} \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

En s'inspirant de la même idée que pour $w(x, y)$, nous proposons des solutions de champs de rotations $\beta_x(x, y)$ et $\beta_y(x, y)$ en double série de cosinus :

$$\beta_x(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \quad (2.47)$$

$$\beta_y(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \quad (2.48)$$

4.2. Equations d'équilibre

4.2.1. Equilibre autour de l'axe x

En combinant (2.43) avec les solutions (2.45), (2.47) et (2.48), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} (-\lambda_{am}^2) \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) + \right. \\
 & \left. \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l (-\lambda_{am}^2) \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^{l'}(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right) + (D_{12} + \\
 & D_{66}) \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} (\lambda_{am} \lambda_{bn}) \sin(\lambda_{am}x) \sin(\lambda_{bn}y) + \right. \\
 & \left. \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^{l'}(y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) + \xi_a^{l'}(x) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right) + \\
 & D_{66} \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} (-\lambda_{bn}^2) \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^{l''}(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l \cos(\lambda_{am}x) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l (-\lambda_{bn}^2) \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right) - h^m G_{23}^m \left(\left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) + \xi_a^{l'}(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right) \right) - \\
 & \frac{\rho l}{12} \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \ddot{I}_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M \ddot{C}_{m/2}^l \cos(\lambda_{am}x) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N \ddot{d}_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right) = 0 \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

Pour simplifier l'écriture précédente, on écrit la fonction ξ_b^l de façon générale :

$$\xi_b^l(y) = t_1^l \sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right) + t_2^l \cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right) + t_3^l \sin\left(\frac{3\pi y}{2a}\right) + t_4^l \cos\left(\frac{3\pi y}{2a}\right)$$

Où t_1^l, t_2^l, t_3^l , et t_4^l sont des constantes définies en fonction de la fonction ξ_b^l choisie.

La fonction ξ_b^l peut alors se mettre sous la forme de :

$$\xi_b^l(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^l \cos(\lambda_{bn}y) \text{ avec } \beta_n^l = \sum_{q=1}^4 t_q^l K_{bn}^l$$

Avec :

$$K_{bn}^1 = \begin{cases} n=0 & 2/\pi \\ n \neq 0 & \frac{4}{(1-4n^2)\pi} \end{cases}, K_{bn}^2 = \begin{cases} n=0 & 2/\pi \\ n \neq 0 & \frac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi} \end{cases}$$

$$K_{bn}^3 = \begin{cases} n=0 & 2/3\pi \\ n \neq 0 & \frac{12}{(9-4n^2)\pi} \end{cases} \text{ et } K_{bn}^4 = \begin{cases} n=0 & -2/3\pi \\ n \neq 0 & \frac{12(-1)^{n+1}}{(9-4n^2)\pi} \end{cases}$$

Pour les fonctions ξ_a^l , on procède la même manière que pour ξ_b^l .

On obtient une somme de termes qui sont facteurs d'une combinaison de sinus et de cosinus. Pour que cette somme soit nulle, il faut que chaque terme soit nul. Ce qui donne un système de $3 \cdot M \cdot N$ équations pour m variant de 0 à M et n variant de 0 à N :

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \left(I_{mn}(-\lambda_{am}^2) + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l C_{m/2}^l(-\lambda_{am}^2) + \alpha_m^l(-\lambda_{am}^2) d_{n/2}^l \right) \right) \\
 & + D_{66} \left(I_{mn}(-\lambda_{bn}^2) + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l(-\lambda_{bn}^2) C_{m/2}^l + \alpha_m^l d_{n/2}^l(-\lambda_{bn}^2) \right) \right) \\
 & - h^m G_{23}^m \left(I_{mn} + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l C_{m/2}^l + \alpha_m^l d_{n/2}^l \right) \right) \\
 & - \frac{\rho l}{12} \left(\ddot{I}_{mn} + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l \ddot{C}_{m/2}^l + \alpha_m^l \ddot{d}_{n/2}^l \right) \right) = 0 \\
 & (D_{12} + D_{66}) \left(J_{mn}(\lambda_{am} \lambda_{bn}) + \sum_{l=1}^4 \left(C_{m/3}^l \beta_n^l(-\lambda_{bn})(-\lambda_{am}) + \alpha_m^l(-\lambda_{am}) d_{n/3}^l(-\lambda_{bn}) \right) \right) = 0 \\
 & - h^m G_{23}^m \left(A_{mn}(-\lambda_{am}) + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l C_{m/1}^l(-\lambda_{am}) + \alpha_m^l(-\lambda_{am}) d_{n/1}^l \right) \right) = 0
 \end{aligned}$$

Les équations peuvent se mettre sous forme matricielle, ce qui donne, en utilisant une notation générale qui sera utilisée pour la résolution globale :

$$([K1]\{A\} + [B1]\{P\}) + ([M1]\{\ddot{A}\} + [C1]\{\ddot{P}\}) = [E1]\{F\} \quad (2.50)$$

avec :

$$[K1] = \begin{bmatrix} [K11] \\ [K12] \\ [K13] \end{bmatrix} \quad [B1] = \begin{bmatrix} [B11] \\ [B12] \\ [B13] \end{bmatrix} \quad [M1] = \begin{bmatrix} [M11] \\ [M12] \\ [M13] \end{bmatrix} \quad [C1] = \begin{bmatrix} [C11] \\ [C12] \\ [C13] \end{bmatrix} \quad [E1] = [0] \quad (2.51)$$

$$\text{et} \quad \{A\} = \begin{Bmatrix} A_{00} \\ A_{01} \\ \vdots \\ A_{MN} \\ I_{00} \\ \vdots \\ I_{MN} \\ J_{00} \\ \vdots \\ J_{MN} \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{00} \\ F_{01} \\ \vdots \\ F_{MN} \end{Bmatrix} \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} C_{0/1}^1 \\ \vdots \\ d_{N/1}^4 \\ C_{0/2}^1 \\ \vdots \\ d_{N/2}^4 \\ C_{0/3}^1 \\ \vdots \\ d_{N/3}^4 \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Le détail du remplissage des matrices $[K1]$, $[B1]$, $[M1]$ et $[C1]$ est donné dans l'annexe 1.

4.2.2. Equilibre autour de l'axe y

De la même façon que précédemment, en combinant (2.44) avec les solutions (2.45), (2.47) et (2.48), on obtient de nouveau un système de $3 \cdot M \cdot N$ équations. Ces équations peuvent se mettre sous forme matricielle :

$$([K2]\{A\} + [B2]\{P\}) + ([M2]\{\ddot{A}\} + [C2]\{\ddot{P}\}) = [E2]\{F\} \quad (2.53)$$

Avec :

$$[E2] = [0]$$

$$[K2] = \begin{bmatrix} [K21] \\ [K22] \\ [K23] \end{bmatrix} \quad [B2] = \begin{bmatrix} [B21] \\ [B22] \\ [B23] \end{bmatrix} \quad [M2] = \begin{bmatrix} [M21] \\ [M22] \\ [M23] \end{bmatrix} \quad [C2] = \begin{bmatrix} [C21] \\ [C22] \\ [C23] \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$[K23] = [M22] = [M23] = 0$$

Le détail des matrices est donné dans l'annexe 2.

4.2.3. Equilibre suivant l'axe normal z

Pour la résolution de l'équation d'équilibre des efforts sur l'axe z, on combine (2.42) et les solutions (2.45), (2.47) et (2.48). On obtient ainsi un système de $3 \cdot M \cdot N$ équations :

$$h^m G_{23}^m \left(A_{mn}(-\lambda_{am}^2) + \sum_{l=1}^4 \left[\overline{\alpha}_m^l d_{n/2}^l + \beta_n^l C_{m/1}^l (-\lambda_{am}^2) + \overline{\alpha}_m^l d_{n/1}^l \right] \right) + h^m G_{13}^m \left(A_{mn}(-\lambda_{bn}^2) + \sum_{l=1}^4 \left[\overline{\beta}_n^l C_{m/3}^l + \overline{\beta}_n^l C_{m/1}^l + \alpha_m^l d_{n/1}^l (-\lambda_{bn}^2) \right] \right) + F_{mn} - \rho h \left(\ddot{A}_{mn} + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l \dot{C}_{m/1}^l + \alpha_m^l \ddot{d}_{n/1}^l \right) \right) = 0 \quad (2.55)$$

$$h^m G_{23}^m \left(I_{mn}(-\lambda_{am}) + \sum_{l=1}^4 \beta_n^l C_{m/2}^l (-\lambda_{am}) \right) = 0 \quad (2.56)$$

$$h^m G_{13}^m \left(J_{mn}(-\lambda_{bn}) + \sum_{l=1}^4 \left(\alpha_m^l d_{n/3}^l (-\lambda_{bn}) \right) \right) = 0 \quad (2.57)$$

Les équations peuvent se mettre sous la forme de matrices comme précédemment :

$$([K3]\{A\} + [B3]\{P\}) + ([M3]\{\ddot{A}\} + [C3]\{\ddot{P}\}) = [E3]\{F\} \quad (2.58)$$

Le détail des matrices est donné dans l'annexe 3.

Les 3 systèmes matriciels (2.52), (2.55), et (2.60) peuvent s'écrire sous forme d'un seul système :

$$([\tilde{K}]\{A\} + [B]\{P\}) + ([\tilde{M}]\{\ddot{A}\} + [C]\{\ddot{P}\}) = [E]\{F\} \quad (2.59)$$

avec

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} [K1] \\ [K2] \\ [K3] \end{bmatrix}, [\tilde{M}] = \begin{bmatrix} [M1] \\ [M2] \\ [M3] \end{bmatrix}, \text{ et } [E] = \begin{bmatrix} [E1] \\ [E2] \\ [E3] \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

4.3. Prise en compte des conditions aux limites généralisées

Les solutions décrites en partie 4.1 devant aussi être solution des équations des conditions aux limites, ces dernières sont donc réécrites.

4.3.1. Equilibre des efforts tranchants en $x=0$

Tout d'abord pour le ressort linéaire, au coté $x=0$, issu des équations (2.38) et en combinant avec les efforts issus de (2.20) et la solution (2.45), on obtient :

$$\begin{aligned} k_{x0} & \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos(\lambda_{bn}y) + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l + \xi_a^l(0) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \\ & = h^m G_{23}^m \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\ & \quad + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \\ & \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_a^{l'}(0) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \end{aligned}$$

Ce qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[H1]\{P\} = [Q1]\{A\}$$

Le détail de la mise sous forme matricielle est détaillé dans l'annexe 4.

4.3.2. Equilibre des moments fléchissants en $x=0$

Pour le ressort de rotation au coté $x=0$, issu des équations (2.38) et en combinant avec les moments issus de (2.20) et la solution (2.45), on obtient :

$$\begin{aligned}
 K_{x0} & \left[\sum_{l=1}^4 \left(\xi_a^{l'}(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \\
 & = - \left(D_{11} \left[\sum_{l=1}^4 \left(\xi_a^{l'}(0) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \right. \\
 & \quad + D_{12} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn}(-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^{l'}(y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l + \xi_a^l(0) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right] \right)
 \end{aligned}$$

Ce qui peut se mettre de la même façon que précédemment sous la forme matricielle suivante (annexe 4) :

$$[H2]\{P\} = [Q2]\{A\}$$

En procédant d'une façon analogue pour les autres cotés de la plaque, on obtient les six autres systèmes d'équations représentant les conditions aux limites issus de (2.38).

$$[H3]\{P\} = [Q3]\{A\}$$

$$[H4]\{P\} = [Q4]\{A\}$$

$$[H5]\{P\} = [Q5]\{A\}$$

$$[H6]\{P\} = [Q6]\{A\}$$

$$[H7]\{P\} = [Q7]\{A\}$$

$$[H8]\{P\} = [Q8]\{A\}$$

Le détail du calcul de ces systèmes et le remplissage des différentes matrices $[H]$ et $[P]$ sont donnés dans l'annexe 4.

Les équations des conditions aux limites peuvent donc se mettre sous la forme de l'écriture matricielle suivante :

$$[H]\{P\} = [Q]\{A\} \quad (2.61)$$

avec

$$[H] = \begin{bmatrix} [H1] \\ [H2] \\ [H3] \\ [H4] \\ [H5] \\ [H6] \\ [H7] \\ [H8] \end{bmatrix} \text{ et } [Q] = \begin{bmatrix} [Q1] \\ [Q2] \\ [Q3] \\ [Q4] \\ [Q5] \\ [Q6] \\ [Q7] \\ [Q8] \end{bmatrix}$$

On a obtenu pour les conditions aux limites, le système d'équations mis sous forme matricielle (2.63), et pour les équations d'équilibre, on a obtenu le système d'équations (2.61).

En les combinant, on obtient le système suivant :

$$[K_p]\{X\} + [M_p]\{\ddot{X}\} = \{F_p\}$$

$$\text{Avec : } [K_p] = [\tilde{K}] + [B][H]^{-1}[Q] \text{ et } [M_p] = [\tilde{M}] + [C][H]^{-1}[Q]$$

Ce système doit maintenant être intégré temporellement pour être résolu.

5. Modélisation de l'impact

5.1. Equilibre du projectile

Le projectile est supposé comme un corps rigide ponctuel de masse m , ayant une vitesse initiale V_0 . Son équation de mouvement dynamique est la suivante :

$$\sum F_{ext} = m \frac{\partial^2 u_{proj}}{\partial t^2} \rightarrow m \frac{\partial^2 u_{proj}}{\partial t^2} + P(t) = 0 \quad (2.62)$$

u_{proj} est le déplacement du projectile et $P(t)$ est la force de contact de type Hertz du projectile contre la plaque. La solution du problème d'impact consiste en la résolution du système dynamique augmenté

$$[K]\{X\} + [M]\{\ddot{X}\} = \{F\} \quad (2.63)$$

avec

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_p] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [M] = \begin{bmatrix} [M_p] & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \{F\} = \begin{Bmatrix} F_p \\ P(t) \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

et

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} A \\ x_{proj} \end{Bmatrix} \{\ddot{X}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{A} \\ \ddot{x}_{proj} \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

5.2. Traitement du contact

Dans la modélisation qui nous intéresse, le comportement du projectile n'a pas d'importance, il est donc choisi de le modéliser indéformable. Le projectile a comme géométrie une sphère ou un cône. En effet, une sphère permet de modéliser les impacts de boules de pétanque ou de bowling. Le cône permet de modéliser les impacts d'objets plus incisifs tels que les coins de parpaings ou de machine à laver.

Pour modéliser l'impact d'une sphère de diamètre D , on peut se baser sur la modélisation d'un contact de Hertz [36], qui est utilisé dans de nombreux travaux d'impact [95]-[98]. Cette modélisation est définie pour un contact entre 2 sphères élastiques mais elle reste valable dans le cas d'impacts sur plaques.

L'effort d'impact $P(t)$ est donc obtenu en utilisant la loi de contact non linéaire proposée par Hertz :

$$P(t) = k_h * \delta^{3/2} \quad (2.66)$$

avec k_h la rigidité du contact de Hertz et δ l'indentation de la sphère sur la plaque. L'indentation est définie comme étant la différence entre le déplacement de la plaque w_g et le déplacement du projectile w_p . La Figure 17 présente le schéma d'un impact d'une sphère sur une plaque.

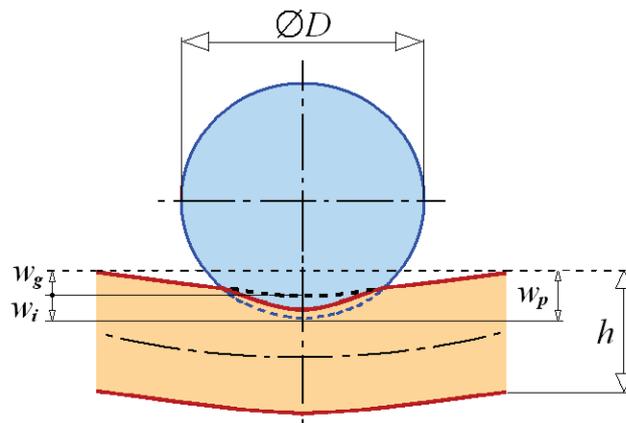


Figure 17 : impact d'une sphère sur une plaque

Le contact de Hertz intervient uniquement entre le projectile et la plaque en contact. Par conséquent, le contact pour le projectile conique est identique à celui de la sphère avec cependant un rayon faible correspondant au rayon à l'extrémité du cône.

6. Algorithme de résolution

Le système dynamique (2.65) peut être résolu de plusieurs façons. De façon implicite, ce qui permet d'avoir des grands pas de temps et donc une résolution rapide. Mais lors des calculs d'impacts, des problèmes de convergences peuvent survenir. De façon explicite, cela permet d'avoir un résultat sans problèmes de convergence mais demande des petits pas de temps afin de respecter la stabilité du calcul. Il est choisi d'utiliser un algorithme de résolution explicite afin d'éviter les problèmes de convergence.

Le système à l'instant n s'écrit :

$$[K]\{X\}_n + [M]\{\ddot{X}\}_n = \{F\}_n \quad (2.67)$$

Les conditions initiales en déplacement et vitesse sont

$$\{X_0\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \{\dot{X}_0\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

L'accélération est approximée en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1. Ainsi, $\{\ddot{X}\}$ à l'instant n vaut :

$$\{\ddot{X}\}_n = \frac{1}{\Delta t^2} (\{X\}_{n+1} - 2\{X\}_n + \{X\}_{n-1}) \quad (2.69)$$

En remplaçant (2.71) dans (2.69), on obtient $\{X\}$ à l'instant $n+1$, à partir des valeurs à l'instant n et $n-1$. On obtient :

$$\{X\}_{n+1} = 2\{\ddot{X}\}_n - \{X\}_{n-1} + \Delta t^2 [M]^{-1} \{F\}_n - \Delta t^2 [M]^{-1} [K] \{X\}_n \quad (2.70)$$

Pour initialiser la résolution temporelle, il faut $\{X\}_{-1}$. Cette valeur est obtenue en combinant les conditions initiales (2.70) à l'équation précédente. Ce qui donne :

$$\{X\}_{-1} = -\Delta t \{\dot{X}_0\} \quad (2.71)$$

La résolution temporelle du problème représenté par (2.69) est faite par la résolution à chaque pas de temps de (2.72) qui est initialisé par (2.70) et (2.73).

La connaissance du vecteur $\{X\}_n$ permet de déterminer le vecteur $\{P\}$ avec (2.65) et d'en déduire les valeurs du déplacement transversal de la plaque avec (2.45). Le dernier terme du vecteur $\{X\}$ donne directement la valeur du déplacement du projectile.

Il est à noter que pour optimiser la vitesse de résolution du calcul, le problème matriciel est résolu par bloc. De plus, les matrices ont été conditionnées à cause des instabilités dans la résolution. La Figure 18 présente l'organigramme de résolution de ce problème.

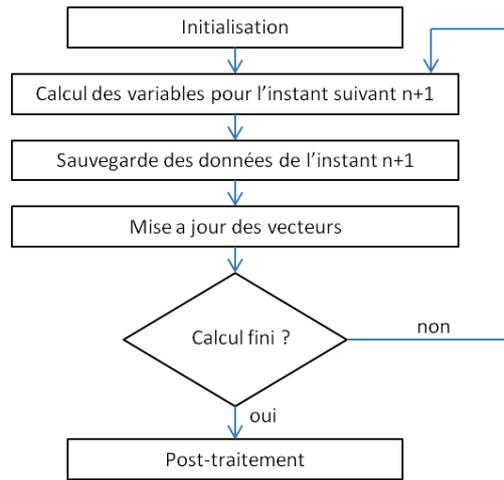


Figure 18 : Organigramme de résolution

7. Applications numériques

7.1. Validation du modèle de flexion isotrope

Dans le but de valider le modèle à base de séries de Fourier proposé dans les sections précédentes, nous proposons d'évaluer la solution d'une plaque carrée [38],[42], formée d'un matériau homogène et isotrope, encadrée à ses quatre bords et soumise à une charge uniformément répartie.

La plaque a pour dimension ($a=0,1$ m, $b=0,1$ m, $h=0,001$ m), elle est en acier ($E=210.10^9$ Pa, $\nu=0,3$ et $\rho=7800$ kg.m⁻³) et l'effort global imposé vaut $F= 1$ N réparti sur toute la surface de la plaque. Pour ce problème, la flèche maximale ainsi que les moments de flexion, basés sur la solution de superposition de Levy sont utilisés comme référence [38], [42]. Une solution obtenue par éléments finis en utilisant le logiciel ABAQUS Standard est aussi utilisée avec un maillage en coque S4R de 2500 éléments.

Les résultats obtenus par notre modèle, en utilisant différents termes de série de Fourier [93] sont résumés dans le Tableau 4.

	m=5	m=7	m=9	ABAQUS	Ref [38]
$(D/q_0 a^4) w$ au centre	0.000781	0.001215	0.001267	0.001268	0.001265
Erreur en %	38	3.9	0.15	0.23	
$M_x/q_0 a^2$ à $(0, a/2)$	-0.025000	-0.048013	-0.051571	-0.047078	-0.051333
Erreur en %	51	6.46	0.46	8.28	
$M_x/q_0 a^2$ au centre	0.016250	0.022333	0.022925	0.022894	0.022905
Erreur en %	29	2.5	0.08	0.05	
$M_{xy}/q_0 a^2$ à $(a/4, a/4)$	-0.002285	-0.005854	-0.006525	-0.007731	-0.006527
Erreur en %	65	10.3	0.03	18.4	

Tableau 4 : Validation du modèle - cas d'une plaque carrée isotrope

Comme nous pouvons le remarquer, le modèle proposé converge vers la solution analytique (et celle obtenue par ABAQUS) en augmentant le nombre de termes de la série de Fourier. La Figure 19 montre l'allure de la déformée obtenue par notre modèle qui est très proche de celle du modèle d'ABAQUS.

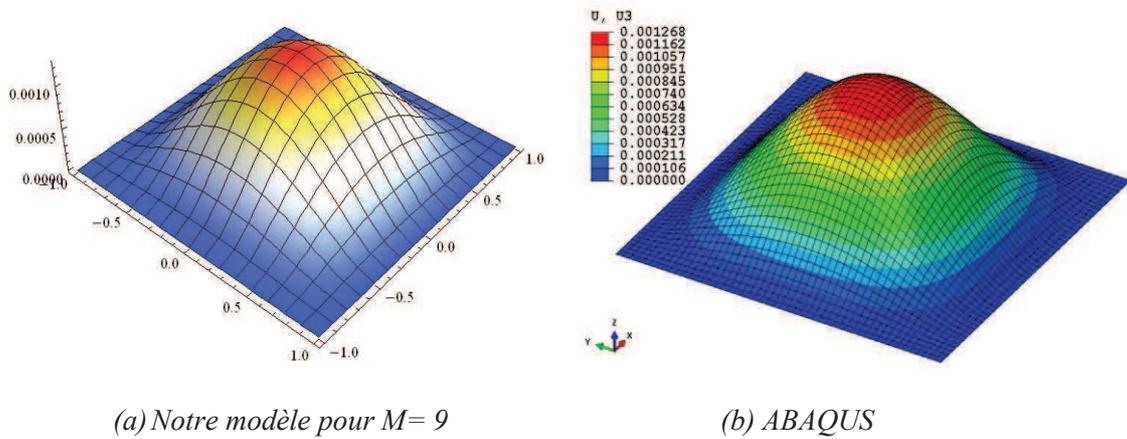


Figure 19 : Déformée normalisée de la plaque $(D/q_0 a^4) w$

Dans un souci de comparaison quantitative des résultats obtenus par notre modèle, nous donnons sur la Figure 20, la distribution des moments de flexion M_x et sur la Figure 21 la distribution des moments de flexion M_{xy} en comparaison avec ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Nous pouvons remarquer la très bonne concordance de nos résultats comparés à ceux obtenus par ABAQUS.

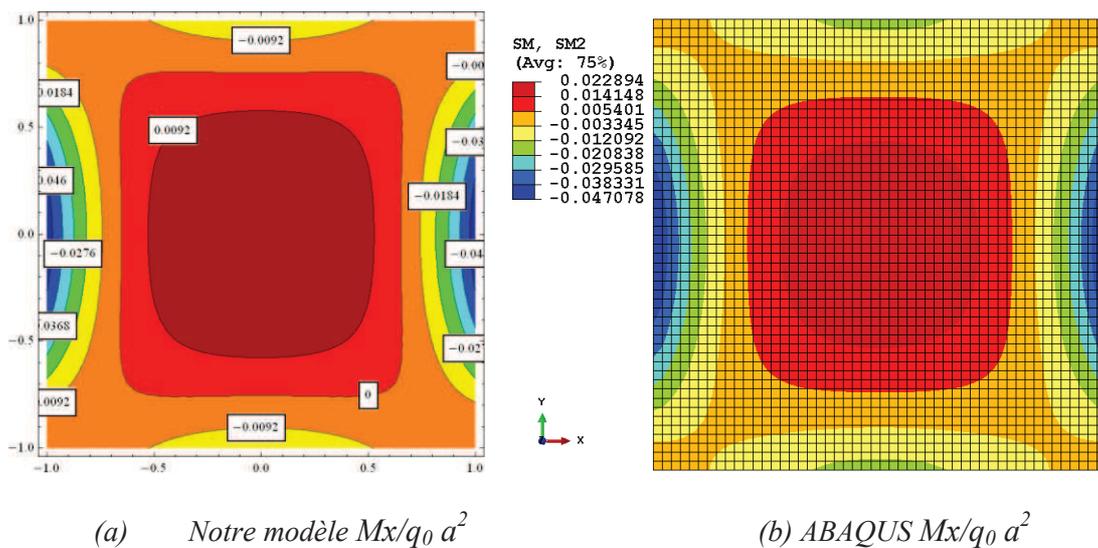


Figure 20 : Répartition des moments de flexion cas de plaque encastree $M_x/q_0 a^2$

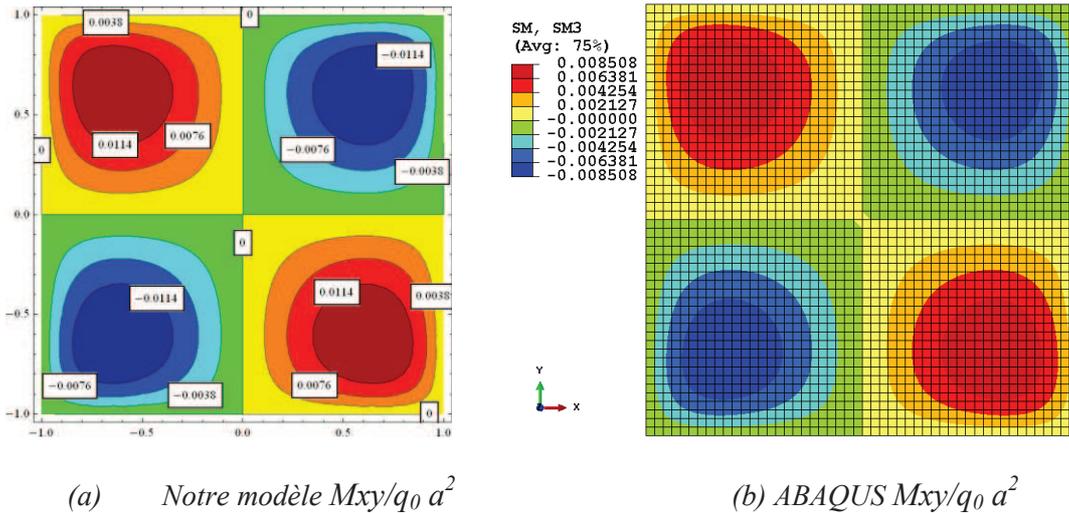


Figure 21 : Répartition des moments de flexion cas de plaque encastreee $M_{xy}/q_0 a^2$

7.2. Validation du modèle de flexion composite multicouche

Des résultats ont été obtenus pour le cas de plaques carrées encastrees, d'épaisseur totale $h=2,69$ mm, de dimension $200*200$ mm avec les empilements suivants [42], [94] : (0°) , $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ et $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$. Les propriétés du matériau sont telles que : $E_L/E_T=25$, $G_{LT}/E_T=0,5$ et $\nu_{LT}=0,25$. Le chargement réparti vaut $F=1,2$ MPa. Une solution éléments finis sur ABAQUS est utilisée comme référence avec un maillage en coque S4R de 1600 éléments.

Le Tableau 5 résume l'ensemble des résultats obtenus par notre modèle. Nous pouvons observer une très bonne concordance de nos résultats avec ceux d'ABAQUS.

	$(E_T h^3/q_0 a^4) w$ au centre	$M_x/q_0 a^2$ au centre	$M_x/q_0 a^2$ à $(0, a/2)$	$M_{xy}/q_0 a^2$ à $(a/4, a/4)$	ABAQUS $(E_T h^3/q_0 a^4) w$
(0°)	0.001308	0.043892	-0.087077	-0.010949	0.001339
Erreur en%	2.3				
$(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$	0.001370	0.044452	-0.088110	-0.008488	0.001426
Erreur en%	3.9				
$(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$	0.001462	0.039108	-0.079604	-0.004909	0.001503
Erreur en%	2.7				

Tableau 5 : Validation du modèle - cas d'une plaque composite multicouche

La Figure 22 montre l'allure de la déformée obtenue par notre modèle qui est très proche de celle du modèle d'ABAQUS.

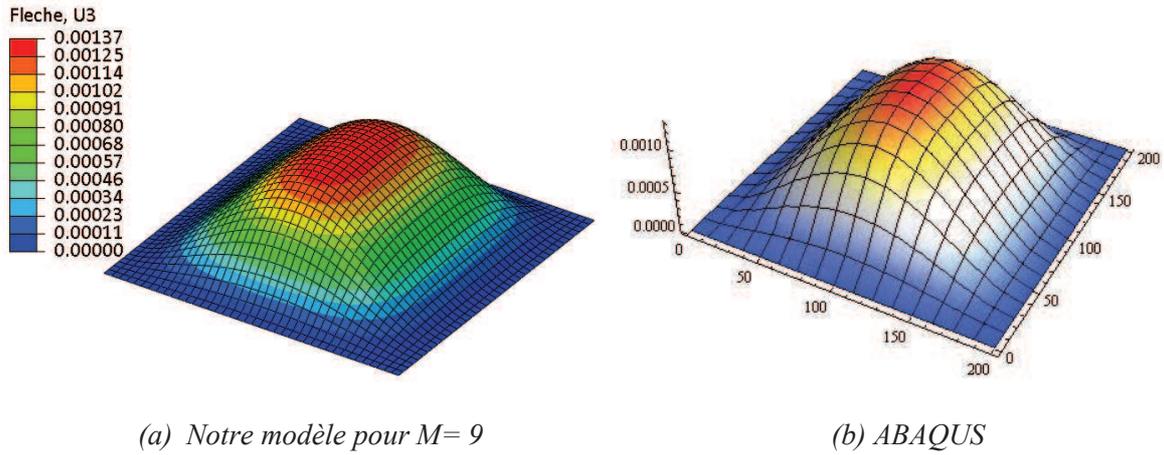


Figure 22 : Déformée normalisée de la plaque $(D/q_0 a^4) w$

Pour comparer les résultats obtenus par notre modèle, nous donnons sur la Figure 23, la distribution des moments de flexion M_x et sur la Figure 21 la distribution des moments de flexion M_{xy} en comparaison avec ceux obtenus par ABAQUS. Nous pouvons remarquer la bonne concordance de nos résultats comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis.

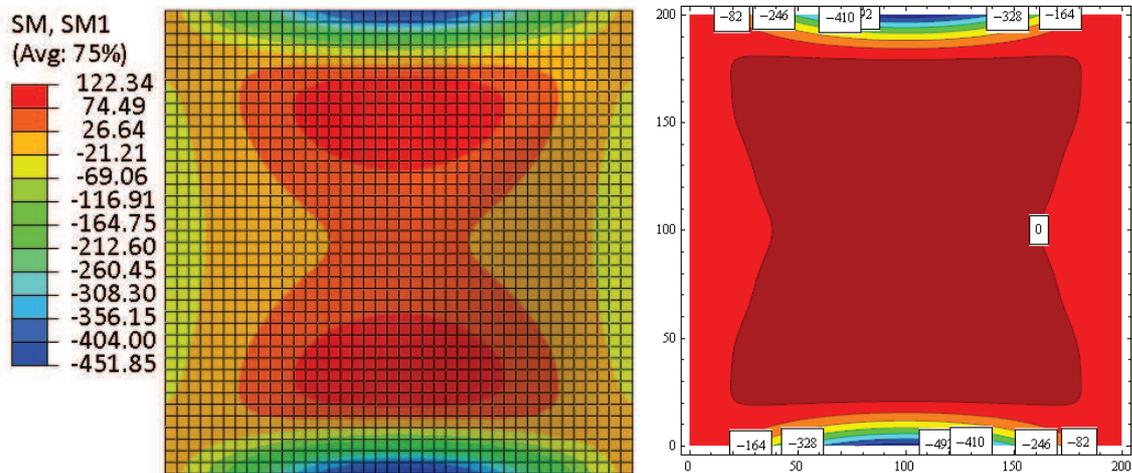


Figure 23 : Répartition des moments de flexion cas de plaque encastree M_x

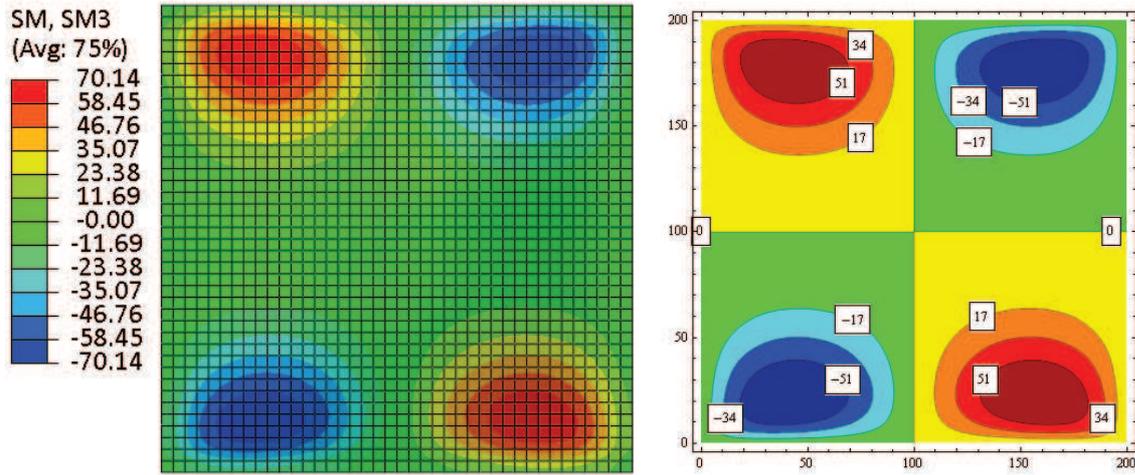


Figure 24 : Répartition des moments de flexion cas de plaque encadrée M_{xy}

7.3. Validation du modèle d'impact isotrope

Afin de valider le modèle d'impact développé, nous nous intéressons tout d'abord à la résolution du problème d'une plaque carrée de 200 mm de largeur et de 8 mm d'épaisseur, formée en acier et encadrée à ses bords, impactée par une balle en acier de diamètre 20 mm. Ce problème a été proposé par Mahajan et Dutta [97], où une étude de convergence de la solution obtenue par éléments finis a été faite, trois maillages ont été étudiés. Nous considérons ici la solution obtenue par [97] avec le maillage le plus fin (2276 éléments sur le logiciel LS DYNA avec des éléments coques de type Belytshko-Tsay).

Les paramètres géométriques et de matériau de ce problème sont récapitulés dans le Tableau 6.

Données	
Plaque	Plaque en acier Taille : 200 x 200 x 8 mm Paramètres matériau: $E_p=210$ GPa, $\nu_p=0.3$, $\rho_p=7800$ kg/m ³
	Projectile
	Balle en acier : $E_b=210$ GPa, $\nu_b=0.3$, $\rho_b=7800$ kg/m ³ Diamètre : 20 mm Masse : 32.67 g → balle pleine Vitesse d'impact: 1 m/s Rigidité de Hertz : $K_h = \frac{4}{3} \sqrt{R_b} / \left(\frac{(1-\nu_p^2)}{E_p} + 1/E_b \right)$

Tableau 6 : Données du problème

La rigidité du contact de Hertz pour ce problème est calculée en utilisant la relation de rigidité

de Hertz [36] définie par : $K_h = \frac{4}{3} \sqrt{R_b} \left(\frac{1}{(1-\nu_p^2)/E_p + 1/E_b} \right)$. Nous avons utilisé notre modèle

en faisant varier le nombre de termes de la série de Fourier M de la valeur 4 à 20. La résolution est faite par l'algorithme dynamique explicite en utilisant un pas de temps de 0,01 ms. D'après la Figure 25, nous observons que la solution analytique obtenue par notre modèle est en très bon accord avec les résultats de référence [97] pour un nombre M supérieur ou égal à 8.

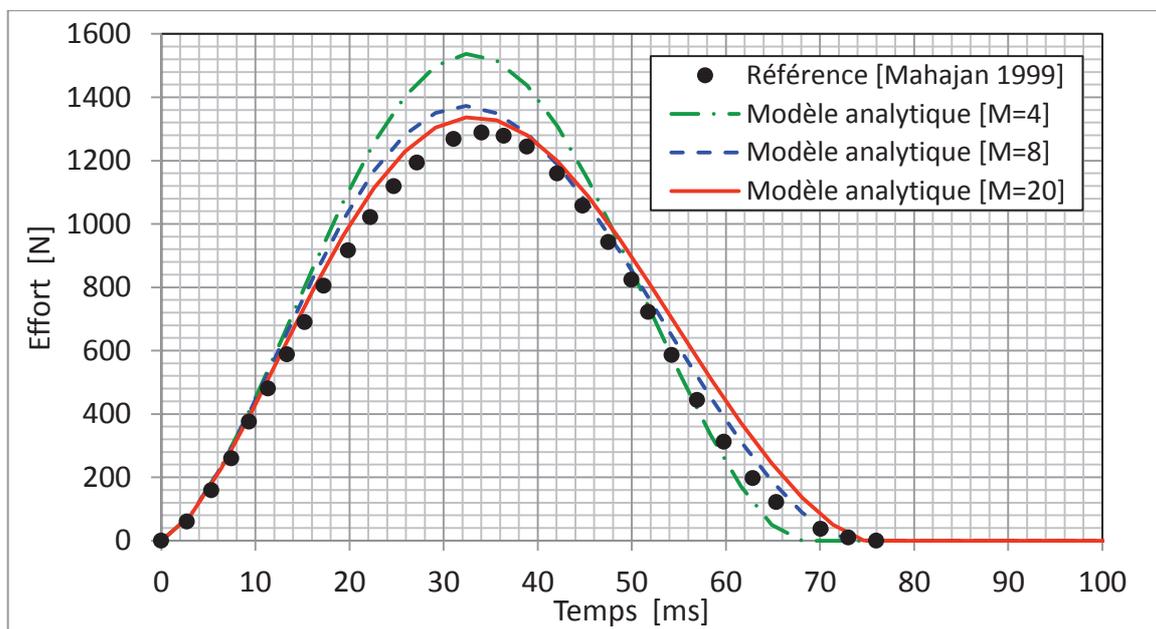


Figure 25 : Evolution de la force d'impact

En effet, lorsque $M=4$, notre modèle génère une erreur de 19 % par rapport à la référence sur l'effort maximal. Lorsque $M=8$, cette erreur diminue à 7 % et se réduit à 4 % si $M=20$. Pour la durée de l'impact, elle passe de 68 ms lorsque $M=4$ à 71 ms lorsque $M=8$ et 75 ms si $M=20$, pour une durée de référence de 76 ms. L'augmentation du nombre de termes de la série de Fourier nous rapproche donc bien de la référence.

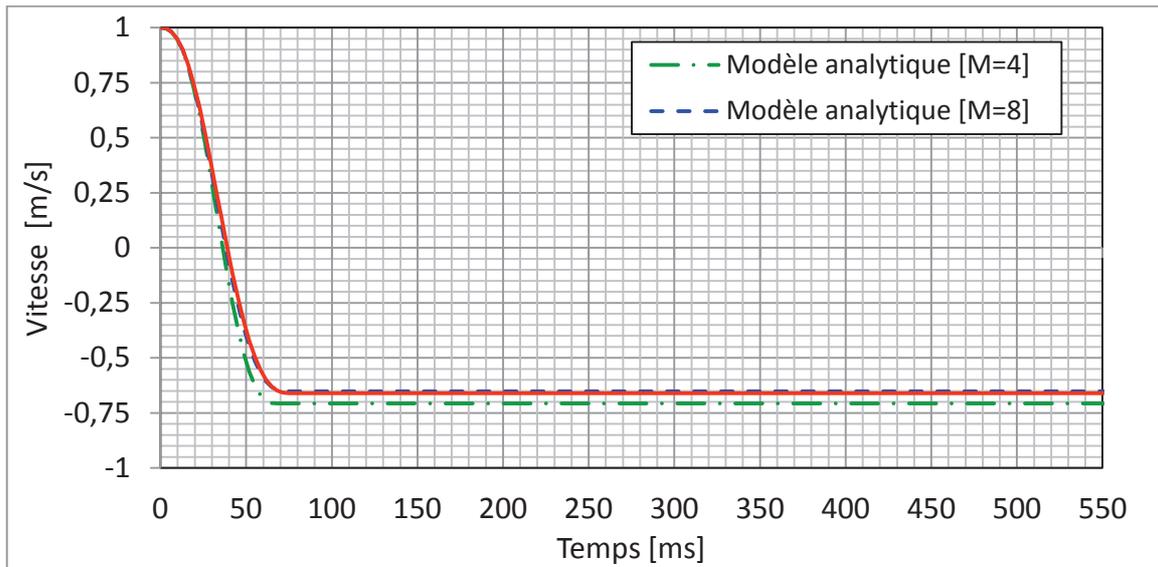


Figure 26 : Evolution de la vitesse du projectile

La Figure 26 montre que l'évolution de la vitesse converge et que la modélisation analytique donne un même résultat pour $M=8$ et pour $M=20$. Pour l'évolution de la flèche, présentée en Figure 27, cette dernière converge mais il y a encore une légère différence sur le premier pic obtenu.

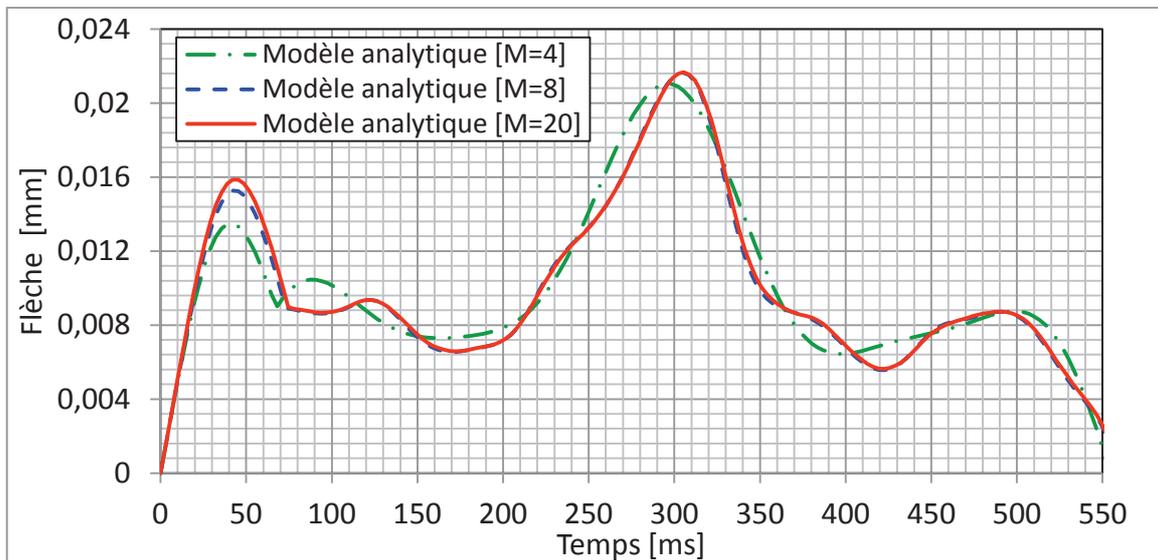


Figure 27 : Evolution de la flèche de la plaque

Pour l'évolution du déplacement du projectile, présentée en Figure 28, on observe aussi une convergence du résultat entre $M=8$ et $M=20$.

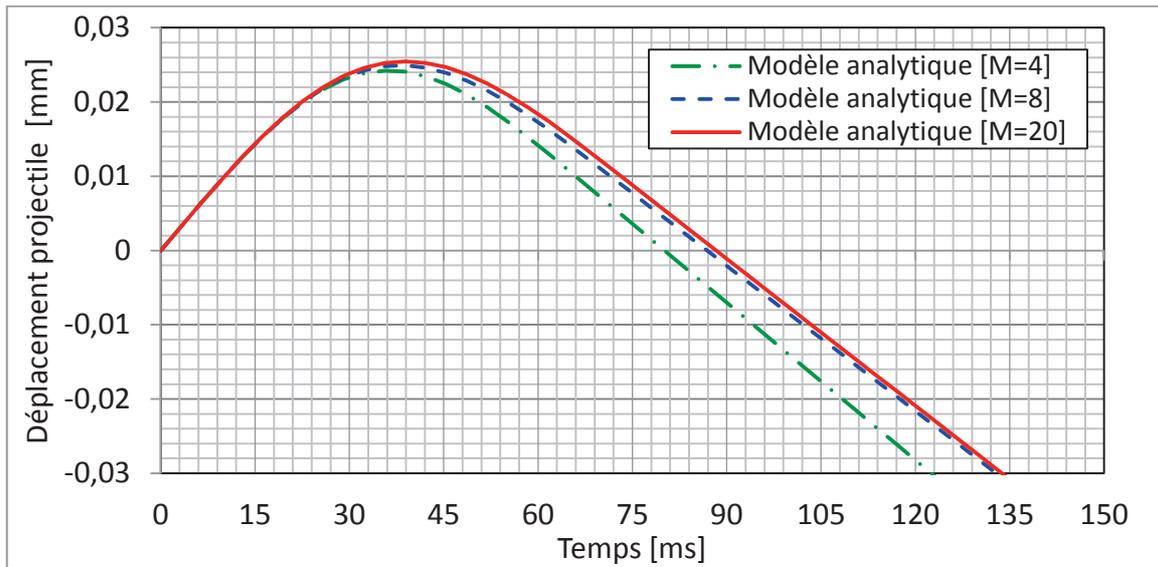


Figure 28 : Evolution du déplacement du projectile

7.4. Validation du modèle d'impact composite

L'exemple académique choisi pour mettre en évidence la technique proposée est celui proposé par Qian et Swanson [44]. Il s'agit de l'impact d'une plaque stratifiée composée d'un empilement de dix couches de carbone-epoxy T300/934, par une balle d'acier. Les propriétés du matériau et de la géométrie de la plaque, ainsi que les conditions d'impact, sont résumées dans le Tableau 7.

Plaque
$[0,90,0,90,0]_{\text{sym}}$ T300/934 carbone-epoxy
Taille : 200 x 200 x 2,69 mm
Paramètres matériau: $E_{11}=120$ GPa, $E_{22}=7.9$ GPa, $G_{12}=G_{23}=G_{13}=5,5$ GPa
$\nu_{12}=\nu_{23}=0,30$, $\rho=1580$ kg/m ³
Conditions aux limites : Simplement appuyées
Projectile
Balle en acier : $E=210$ GPa, $\nu=0,30$, $\rho=7960$ kg/m ³
Diamètre : 25,4 mm
Masse : 8,537 g → Epaisseur : 0,552864 mm
Vitesse d'impact: 3 m/s
Rigidité du contact de Hertz : $k_h=26544,15$ N/mm ^{3/2}

Tableau 7 : Données du problème

La solution analytique obtenue par notre modèle est en bon accord avec les résultats de référence ainsi qu'avec la solution que nous avons obtenue par le logiciel LS-DYNA dont la modélisation de la plaque est constituée de 1600 éléments coques de type Belytshko-Tsay à intégration réduite, avec 10 points d'intégration dans l'épaisseur (un point par couche). La balle en acier est modélisée indéformable et le contact est un contact de type *Contact_ automatic_surface_to_surface, sans frottement.

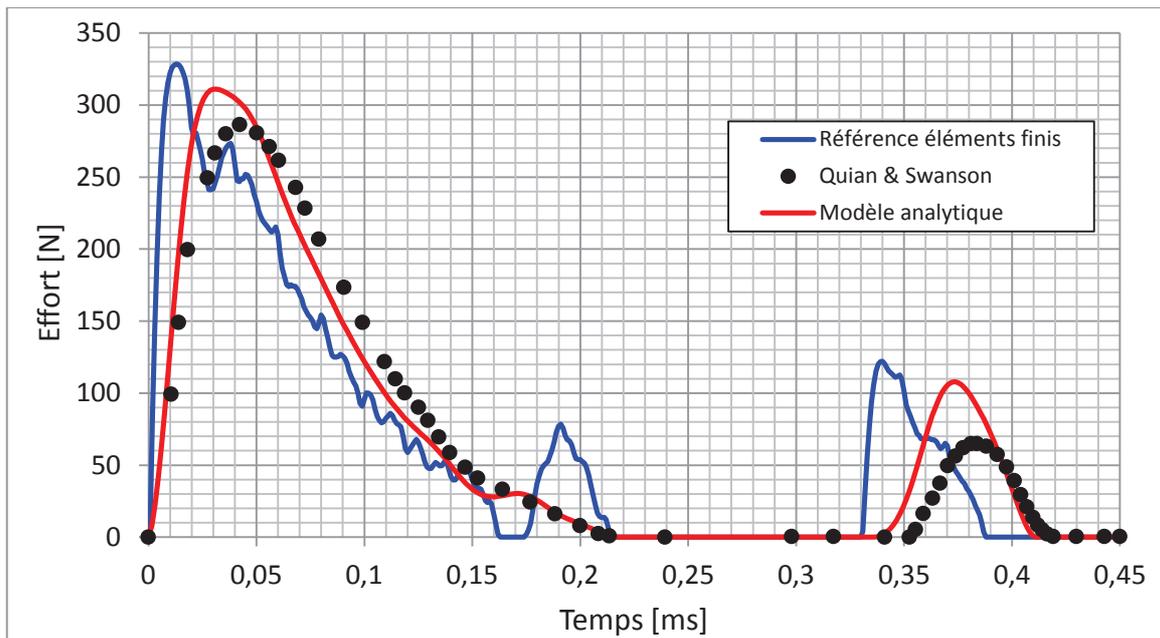


Figure 29 : Evolution de la force d'impact

Notre modèle donne un résultat qui est compris entre la référence éléments finis et le résultat obtenu par la méthode de Rayleigh-Ritz de Quian et Swanson. Notre modèle adouci le second pic obtenu par la modélisation éléments finis et nous obtenons bien le second pic de la référence issu de la littérature ou le troisième pic issu de la référence éléments finis. Ce pic représente un second contact entre la plaque et le projectile. Ce dernier à une vitesse de retour plus faible que la vitesse de la plaque qui revient en contact. C'est ce contact qui explique le brusque changement au niveau de la flèche (voir Figure 30) au même instant.

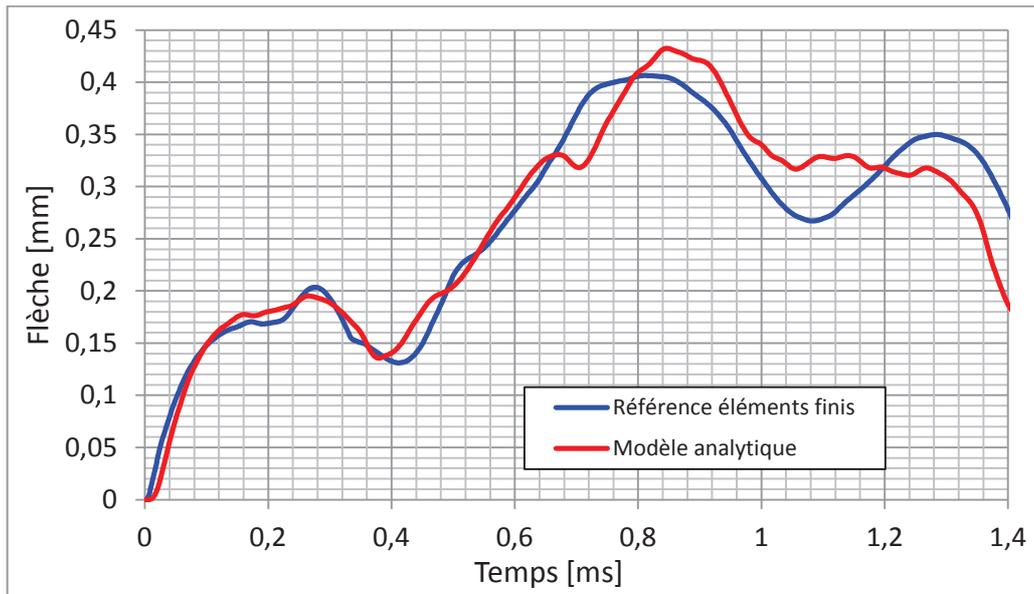


Figure 30 : Evolution de la flèche de la plaque

Notre modèle détermine bien l'évolution de la flèche, avec une légère surestimation de 6 % par rapport au pic maximal obtenu par la référence éléments finis et un léger déphasage sur l'oscillation de la plaque.

7.5. Comparaison des temps de calcul

Un paramètre important à prendre en compte est le temps nécessaire à l'obtention d'un résultat. En effet, la modélisation d'un nouveau problème avec un logiciel d'éléments finis demande plusieurs heures.

Avec le modèle analytique présenté ici, une simulation peut être lancée en quelques minutes. Il est donné en annexe 5, un fichier de données utilisé par le modèle analytique et l'interface utilisateur.

	Mise en donnée		Temps de calcul		Récupération des données	
	AN	MEF	AN	MEF	AN	MEF
Cas d'une plaque isotrope	5 min	2 h	2 s	30 min	0 s	5 min
Cas d'une plaque multicouches	10 min	2,5 h	3 s	35 min	0s	5 min

Tableau 8 : Données du problème

Le Tableau 8 montre le temps nécessaire pour obtenir un résultat. Le temps de mise en données représente le temps mis pour préparer un calcul. Cela correspond au temps mis pour entrer les paramètres matériaux dans le cas du modèle analytique. Dans le cas d'un modèle éléments finis, cela correspond au temps mis pour créer un modèle (géométrie, contact, maillage, etc...) et pour rentrer les différents paramètres. Le temps pour récupérer les données correspond au temps mis pour obtenir les courbes exploitables pour l'utilisateur. Ce qui est instantané dans le cas du modèle analytique mais pour un modèle éléments finis, il faut aller chercher les résultats parmi tous ceux disponibles.

Pour les deux cas présentés, le gain de temps est non négligeable lorsque l'on modélise un impact sur une plaque rectangulaire.

8. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle numérique permettant une solution exacte basée sur les séries de Fourier pour la modélisation de l'impact de plaques composites multicouches avec des conditions aux limites générales. Les équations gouvernantes qui permettent de décrire la réponse transitoire élastique de plaques stratifiées orthotropes avec prise en compte d'une loi non linéaire de contact hertzien ont été présentées en utilisant un schéma de discrétisation temporelle explicite. Pour les conditions aux limites générales, la solution en séries de Fourier est complétée par une série mixte de polynômes-cosinus, qui permet d'aboutir à la solution tout en permettant à la série de satisfaire les équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites de façon exacte. Les exemples numériques présentés lors de la modélisation de chargement statique sont en bon accord avec la littérature. L'extension à l'impact de ce modèle analytique avec conditions aux limites généralisées, conduit là encore à des résultats en très bon accord avec les simulations éléments finis.

Chapitre III

Introduction du comportement local dans la flexion globale

1. Introduction

CONFIDENTIEL

Dans ce chapitre, on propose une amélioration du modèle de flexion globale de plaques présenté dans le chapitre précédent en y incluant les phénomènes physiques locaux qui sont apparus expérimentalement. Tout d'abord, un modèle simplifié pour la prise en compte de la plasticité, pour le matériau de la plaque anti-perforation, est ajouté en utilisant une loi de comportement élastoplastique de type Ludwig. L'écrasement de l'âme du sandwich est ensuite pris en compte dans l'équation d'équilibre dynamique du projectile ainsi que dans l'évolution de l'effort de contact. Enfin, un modèle simplifié de prise en compte de la rupture dans la plaque anti-perforation est introduit dans l'évolution de l'effort de contact.

L'ensemble des paramètres des modèles développés sont obtenus à partir des caractéristiques matériaux sauf pour la rupture où une procédure spécifique a été mise en place.

Finalement, le modèle global mis au point est validé par étapes en comparaison avec les solutions obtenues par des simulations éléments finis en utilisant les logiciels ABAQUS et LS-DYNA, puis validé expérimentalement dans le cadre d'essais d'impact sur plaques carrées avec des structures sandwich préalablement définies.

2. Modèle élastoplastique d'impact

Lors des essais physiques d'impact sur les plaques carrées, il a été constaté que la plaque anti-perforation ne revient pas à son état initial après impact. Cela met en évidence l'apparition de déformations permanentes amenant même dans certains cas, à la rupture de la plaque anti-perforation.

Pour les matériaux ductiles tels que les matériaux métalliques, il s'agit d'une déformation plastique et parfois d'une rupture. Dans le cas des matériaux fragiles ou avec peu de plasticité, tels que les composites, il s'agit soit de rupture, soit d'un endommagement suivi d'une rupture.

Dans tous les cas ces déformations permanentes sont toujours localisées sous le projectile et ne peuvent être pris en considération dans la formulation analytique de flexion globale de la plaque.

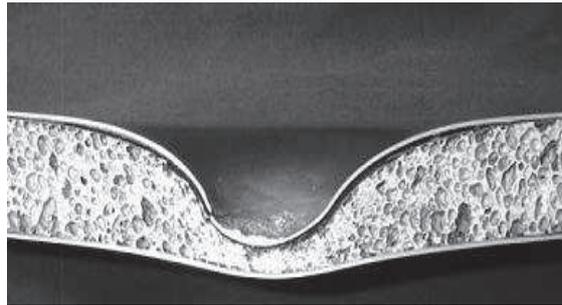


Figure 31 : Exemple de zone plastifiée sous impact

Dans les cas de plaques que l'on cherche à modéliser, les niveaux de déformations sont relativement importants. Le comportement du matériau ne reste plus élastique et devient souvent élastoplastique. La prise en compte de la plasticité s'avère donc nécessaire [119].

Lorsque la plasticité apparaît, l'hypothèse de linéarité des contraintes dans l'épaisseur de la théorie de Reissner-Mindlin n'est plus valable. Une intégration des contraintes dans l'épaisseur semble donc naturelle et nécessaire [116], [117]. Pour ce faire l'une des techniques les plus courantes dans le cadre de la méthode des éléments finis appliqués aux plaques, consiste à réaliser une intégration à l'aide d'un certain nombre de points de Lobatto supplémentaires (généralement de l'ordre de 5) répartis à travers l'épaisseur de la plaque [116], [117], [122].

Ainsi, dans le cas d'un matériau plastique parfait on peut écrire le critère de plasticité de la plaque anti-performation, sous la forme suivante :

$$f(\{\sigma\}, \sigma_y) = \sigma_{VM}^2 - \sigma_y^2 \leq 0 \quad (3.1)$$

avec σ_{VM} et σ_y respectivement les contraintes de von-Mises et la contrainte limite élastique actualisée. Ce modèle classique de plasticité, nécessite un stockage mémoire des variables internes (contraintes, déformations plastiques) dans chaque point d'intégration dans l'épaisseur, ce qui le rend lourd d'utilisation dans le contexte de notre objectif, sans parler des problèmes de convergence qui pourraient surgir durant la résolution.

Une approche plus simple et moins coûteuse permet de calculer directement les contraintes plastiques à l'aide des éléments de réductions en membrane et flexion. Cette approche a été initiée par Ilyushin [118], [120], [122] et se base sur l'hypothèse que toute la section de la plaque plastifie en même temps : cette hypothèse est exacte lorsque la plaque voit seulement des efforts de membrane. Dans le cas d'un matériau plastique parfait le critère de plasticité des plaques s'écrira donc non plus sur les contraintes, mais sur les efforts généralisés du modèle de plaque.

$$f(\{N\}, \{M\}, \{T\}) \leq 0 \quad (3.2)$$

avec $\{N\}$, $\{M\}$ et $\{T\}$ les efforts de membrane, les moments fléchissants et les efforts tranchants respectivement.

Malheureusement, ces critères généralisés ne sont pas toujours faciles à expliciter, même pour des critères simples de type von-Mises, notamment quand il s'agit de plaques multicouches.

Dans le cas d'une plaque isotrope, Ilyushin [118], [121] a établi une surface de charge simple ne prenant pas en compte les efforts tranchants qui s'écrit :

$$Q_n + Q_m + \frac{1}{\sqrt{3}} |Q_{nm}| \leq 1 \quad (3.3)$$

avec

$$\begin{cases} Q_n = n_{xx}^2 + n_{yy}^2 + 3n_{xy}^2 - n_{xx}n_{yy} \\ Q_m = m_{xx}^2 + m_{yy}^2 + 3m_{xy}^2 - m_{xx}m_{yy} \\ Q_{nm} = n_{xx}m_{xx} + n_{yy}m_{yy} + 3n_{xy}m_{xy} - \frac{1}{2}n_{xx}m_{yy} - \frac{1}{2}n_{yy}m_{xx} \end{cases} \quad (3.4)$$

et $n_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{h \sigma_y}$; $m_{\alpha\beta} = \frac{4M_{\alpha\beta}}{h^2 \sigma_y}$ où h étant l'épaisseur et σ_y la contrainte limite de plasticité en

flexion.

Malgré les nombreux avantages de la formulation de la plasticité en efforts globaux, cette approche est malheureusement inadaptée dans notre cas. Ceci est du principalement au fait que le développement analytique de la solution de flexion de plaques (chapitre II) a été fait dans la base d'expansion en séries de Fourier et des transformations inverses relativement complexes seront nécessaires afin de pouvoir intégrer le critère (3.3), ce qui alourdirai les calculs.

Le modèle semi-analytique que nous proposons, se doit d'être rapide et simple d'utilisation, pour cela, en se basant sur les travaux de Chen et al. [123], nous proposons un modèle d'impact élastoplastique, le modèle est basé sur le principe de minimum d'accélération de milieux continus élastoplastiques en déformations finies.

Généralement, lors d'impact à grandes vitesses, la réponse globale de la structure consiste en une perforation de la cible et la déformation du projectile reste faible et peut être négligée. Sous ces conditions, le comportement local de la déformée peut être complètement découplé de la réponse globale de la structure. Plusieurs travaux de recherche [124], [125] ont traité ce sujet et ont proposé des modèles de réponses locales tels que : modèle de rupture en cisaillement, modèle de rupture en forme de fleur, modèle d'expansion de cavité initiale, etc.

Cependant, dans le cas de faibles vitesses d'impact, une déformation localisée peut apparaître et les effets sur la déformée globale ne peuvent être négligés. Le problème devient beaucoup plus complexe.

Malheureusement, la plupart des études publiées se sont restreintes à la réponse dynamique des structures en plasticité [126]. Récemment Yang et ses collaborateurs [127] ont proposé un modèle théorique de contact dans lequel le processus de retrait, processus de récupération et de séparation ont été étudiés sur une poutre encastree soumise à l'impact d'un projectile et les résultats théoriques ont été comparés avec succès aux résultats expérimentaux.

Dans notre travail, nous proposons un modèle de contact-impact pour les plaques soumises à la collision d'un projectile rigide. Toutefois, afin d'estimer avec précision l'histoire de la force d'impact qui est associé à la fois la déformation localisée dans la région de contact et à la réponse globale de la plaque, nous utiliserons le principe du minimum d'accélération pour les milieux continus en déformations finies avec prise en compte des grands déplacements.

Cette analyse est basée sur quatre hypothèses principales :

- Le projectile est considéré comme rigide, la déformation plastique de ce dernier peut être négligée.
- Le frottement n'est pas pris en compte.
- Pas de prise en compte de la rupture ou perforation de la plaque cible.

2.1. Phase d'indentation élastique

Au début du contact entre le projectile et la plaque, cette dernière subit une déformation élastique jusqu'à ce que la déformation plastique se produise dans la zone de contact. La force de contact à ce stade peut être évaluée approximativement par le théorie de contact de Hertz, à savoir :

$$P(t) = \frac{4}{3} \sqrt{R_{proj}} \delta(t)^{3/2} \left/ \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_{proj}^2}{E_{proj}} \right) \right. \quad (3.5)$$

avec E et ν , respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson de la plaque. $\delta(t) = w_{proj}(t) - w_1(t)$ représente l'indentation dans la plaque, $w_{proj}(t)$ et R_{proj} représentent respectivement le déplacement et le rayon au nez du projectile, et $w_1(t)$ représente la flèche de la plaque sous le projectile à chaque instant t .

L'équation (3.5) est représentée par la première zone OA dans la Figure 32, qui représente l'effort de contact élastique modélisé par la loi de Hertz jusqu'à l'effort élastique maximal P_e , qui peut être estimé par la théorie du contact entre une sphère et un plan et correspond à l'effort nécessaire à l'apparition de la plasticité. Il est calculé à l'aide du critère de von Mises ou de Tresca et d'une pression limite $P_0 = 1.6 \sigma_s$ [128]

$$P_e = \frac{\pi^3 R_{proj}^2}{6E^{*2}} (1.6 \sigma_s)^3 \quad (3.6)$$

où $1/E^* = (1-\nu^2)/E + (1-\nu_{proj}^2)/E_{proj}$ et σ_s la limite élastique du matériau de la plaque anti-perforation. Il est à noter, que la valeur de P_e est très faible et la durée d'indentation élastique est extrêmement courte comparée avec celle de l'étape indentation plastique.

2.2. Phase d'indentation plastique

La seconde zone AB, représente l'effort lorsque le matériau se comporte de manière plastique. Dans ce cas, l'effort de contact peut être considéré comme le contact d'un corps « dur » avec un corps « mou ». Il s'exprime de la façon suivante :

$$P(t) = 2\pi R_{proj} \sigma_F(t) \delta(t) \quad (3.7)$$

avec $\sigma_F(t)$ la contrainte limite élastique actualisée tenant compte de l'écroutissage du matériau de la plaque anti-perforation, elle peut être exprimée par une loi de Ludwig :

$$\sigma_F(t) = A + B \varepsilon_z^n(t) \quad (3.8)$$

avec A, B et n la limite élastique initiale, la rigidité d'écroutissage et l'exposant de puissance du matériau de la plaque anti-perforation. $\varepsilon_z(t)$ est la déformation dans l'épaisseur de la couche anti-perforation, calculée par

$$\varepsilon_z(t) = \ln \left(1 - \frac{\delta(t)}{\tilde{h}_0} \right) \quad (3.9)$$

où \tilde{h}_0 est l'épaisseur initiale de la plaque anti-perforation avant impact. Quand la vitesse du projectile sera égale à la vitesse de la plaque sous le projectile, alors l'étape d'indentation sera achevée.

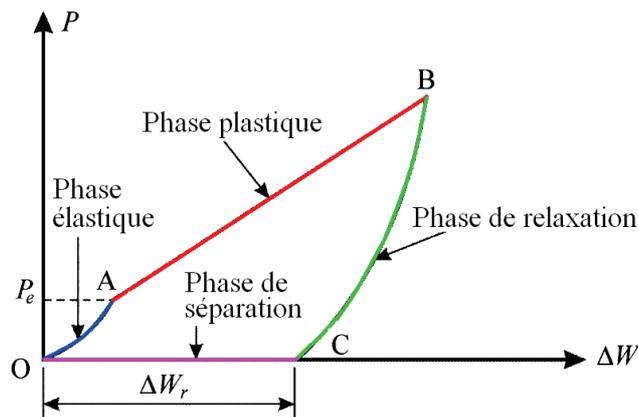


Figure 32 : Modèle élastoplastique d'impact : force en fonction de l'indentation

2.3. Phase de relaxation

Après l'étape d'indentation, la vitesse du projectile devient inférieure à celle de la plaque sous le projectile, et la partie élastique de déformation locale de la plaque sera progressivement relaxée. La force de contact entre le projectile et la plaque continue de diminuer progressivement jusqu'à ce qu'elle devienne nulle lorsque le retour élastique est achevé.

Par conséquent, on suppose que la force de contact entre le projectile et la plaque obéisse à la loi de contact de Hertz [128] puisque seule la déformation élastique est relaxée, c'est à dire :

$$P(t) = \frac{4}{3} \sqrt{R_{proj}} (\delta(t) - \Delta w_r)^{3/2} \left/ \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_{proj}^2}{E_{proj}} \right) \right. \quad (3.10)$$

avec Δw_r la variation de l'indentation due au retour élastique. Quand $\delta(t) - \Delta w_r \leq 0$, la force de contact disparaît et la séparation entre le projectile et la plaque est enregistrée.

Il est à noter que dans le cas d'une sphère, le rayon du projectile est celui de la sphère tandis que dans le cas d'un projectile conique, le rayon du projectile considéré est celui de la tête du cône.

2.4. Phase de séparation

Avec la disparition de la force de contact, le projectile se déplace maintenant comme un corps libre à nouveau, tandis que la plaque subit un mouvement décéléré, du fait de sa résistance à la déformation. Lorsque le projectile rattrape le point de la plaque sous le projectile et provoque un second impact, la phase de séparation se termine.

En conclusion, le processus de contact entre le projectile et la plaque anti-perforation lors d'impact peut être décrit par

$$P(t) = \begin{cases} \frac{4}{3} \sqrt{R_{proj}} \delta(t)^{3/2} \left/ \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_{proj}^2}{E_{proj}} \right) \right. & \text{si } \dot{\delta}(t) > 0, P(t) < P_e \\ 2\pi R_{proj} \sigma_F(t) \delta(t) & \text{si } \dot{\delta}(t) > 0, P(t) \geq P_e \\ \frac{4}{3} \sqrt{R_{proj}} (\delta(t) - \Delta w_r)^{3/2} \left/ \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_{proj}^2}{E_{proj}} \right) \right. & \text{si } \dot{\delta}(t) < 0, \delta(t) \geq \Delta w_r \\ 0 & \text{si } \delta(t) < \Delta w_r \end{cases} \quad (3.11)$$

Dans cette approche simplifiée, la dissipation d'énergie sous forme thermique est négligée par rapport aux énergies mécaniques.

2.5. Correction plastique de la flèche

Le modèle élastoplastique présenté dans les sections précédentes permet une correction locale de l'effort d'impact, cependant des comparaisons avec des solutions de références montrent que ce modèle sous-estime la flèche maximale au point d'impact. Ceci est dû au fait que la solution de flexion de plaque obtenue par développement en séries de Fourier (exposée en chapitre II) ne tient pas compte de la plastification de manière directe (méthode d'intégration par couches) car le modèle serait lent, avec risque de non convergence de l'algorithme de plasticité, ce qui compromettrait une utilisation aisée du code dans un milieu industriel.

C'est dans cet esprit que nous avons développé une technique de correction de la flèche élastoplastique basée sur les étapes suivantes :

- Dans un premier temps, un calcul élastique est lancé et les quantités cinématiques telles que : la flèche de plaque $w_1^e(t)$, la vitesse du projectile $v_{proj}^e(t)$, ainsi que l'effort d'impact $P^e(t)$ sont déterminés en fonction du temps.
- Ensuite un calcul élastoplastique est entrepris, ce qui permet d'avoir une première estimation des quantités cinématiques telles que : la flèche de plaque $w_1^p(t)$, la vitesse du projectile $v_{proj}^p(t)$, ainsi que la distribution de l'effort d'impact $P(t)$ en fonction du temps.
- Pour apporter la correction plastique de la flexion localisée de la plaque, qui est due à la déformation plastique sous le projectile, on considère localement un sous-problème de flexion plastique de plaque circulaire encastrée ayant pour rayon la valeur du rayon du projectile R_{proj} (voir Figure 33).

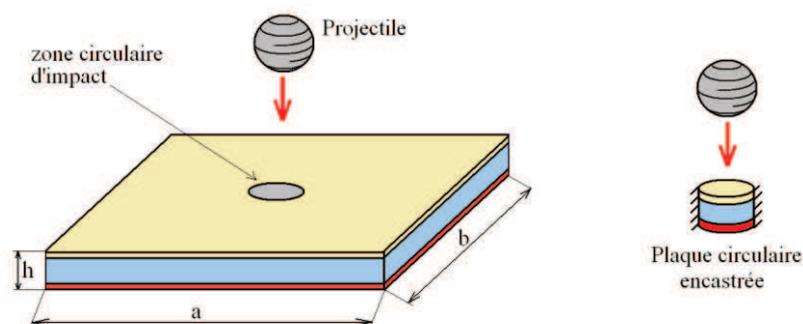


Figure 33 : Correction de la flexion plastique localisée

La solution de flexion de la plaque circulaire est obtenue, en prenant en compte la plastification de la plaque anti-perforation. De la relation (3.8) on peut calculer les modules élastoplastiques tangent par :

$$E_T(t) = nB \varepsilon_z^{n-1}(t) \quad (3.12)$$

Une fois le module tangent de la plaque anti-perforation obtenu, un nouveau calcul d'homogénéisation est opéré pour l'actualisation des matrices de rigidité intégrée de flexion et de cisaillement transverse.

Une solution analytique de flexion de la plaque circulaire encastree est alors obtenue [38], permettant la correction $\Delta w_c(t)$ locale de la flèche :

$$\Delta w_c(t) = \frac{\Delta P(t)}{2\pi H_c} \ln R_{proj} + \frac{\Delta P(t)}{16\pi D} R_{proj}^2 \quad (3.13)$$

avec H_c et D les modules équivalents de cisaillement et de flexion respectivement.

ΔP est la part de l'effort nécessaire pour produire la déformation plastique localisée sous le projectile au centre de plaque

- d) Le calcul du différentiel d'effort ΔP pour la correction élastoplastique de la déflexion localisée sous le projectile ne peut se faire directement car les deux réponses élastique et plastique ne sont pas liées. C'est pour cette raison, que nous avons choisi comme référence de mesure, l'énergie cinétique du projectile qui est conservée entre les deux calculs élastique et élastoplastique.

Cette différence peut être exprimée par :

$$\text{si } v_{proj}^e(t_j) = v_{proj}^p(t_i) \rightarrow \Delta P(t_i) = P^e(t_j) - P(t_i) \quad (3.14)$$

La correction de la flexion sous projectile est à chaque instant t_i donnée par :

$$w_{plaque}(t_i) = w_1(t_i) + \Delta w_c(t_i) \quad (3.15)$$

3. Modélisation de l'écrasement d'un matériau cellulaire

Dans le cas où la protection contient un matériau cellulaire tel qu'une mousse métallique, son comportement spécifique doit être modélisé. La loi de comportement typique d'un matériau cellulaire est présentée en Figure 34.

Elle peut se décomposer en trois parties : une première partie élastique, une seconde partie où la contrainte est constante et une troisième partie où il y a densification.

La partie élastique est principalement due à la prédominance des mécanismes de flexion des arêtes des cellules. Le plateau de contrainte des mousses métalliques est dû au flambage plastique des cellules de la mousse. L'énergie de plateau est complètement dissipée sous forme de déformation plastique ou d'énergie de rupture ou de friction entre les fragments cassés des cellules. La densification est due à l'entassement des cellules écrasées les unes sur les autres. Le comportement du matériau cellulaire se rapproche alors du comportement de son matériau constitutif [5].

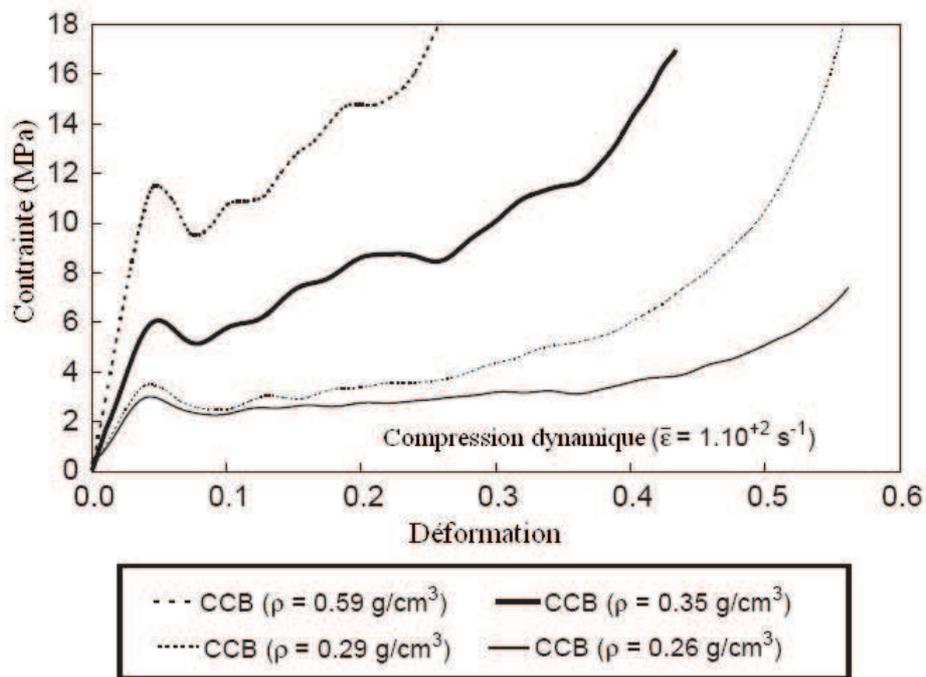


Figure 34 : Loi de comportement d'une mousse métallique [130]

Pour caractériser ce comportement, de nombreux travaux existent. On peut citer les travaux de Rizov [131] qui caractérise le comportement d'une mousse expérimentalement avec des essais d'indentation statiques, et notamment le comportement obtenu avec un indenteur sphérique.

Ces essais servent ensuite à alimenter les modèles éléments finis. Lu & al [132] ont travaillé sur l'indentation dynamique d'une mousse en aluminium pour déterminer les phénomènes de dissipation de l'énergie et pour ensuite faire une modélisation éléments finis de l'impact d'un cylindre. Les travaux de Ramamurty [129], portent sur l'indentation expérimentale d'un projectile conique. Ces essais permettent de mettre en avant les mécanismes d'absorption d'énergie et de les modéliser analytiquement.

Gibson [5] propose de modéliser la compression d'une mousse sous chargement uni-axial, en étant encadrée à l'arrière. Cette modélisation est néanmoins limitée à un chargement statique réparti sur la mousse.

HooFatt [24] propose de modéliser l'écrasement de mousse en modifiant l'effort de contact entre le projectile et la mousse. Cette modification a été obtenue par le principe de minimisation de l'énergie. La modification apportée, représente la résistance de la mousse à l'effort généré par l'impact. Cette méthode est validée pour l'impact d'un projectile sphérique et pour des conditions aux limites fixées. Cette modélisation revient à modéliser l'écrasement de mousse via un modèle de ressort linéaire et uniquement lorsque le comportement de la mousse travaille en compression constante.

Afin de tenir compte de l'écrasement de l'âme du sandwich, il est nécessaire de modéliser la partie élastique et la partie plastique du comportement. Pour cela, un modèle de ressort est utilisé et l'écrasement du matériau de l'âme est effectué en utilisant la théorie des ressorts non linéaire [116] sous le projectile. Cela consiste à faire l'approximation que l'écrasement du matériau de l'âme a lieu dans une seule direction.

Pour déterminer cet écrasement dans la partie élastique, on calcule le travail intérieur, qui est défini par :

$$W_{int} = \int_V \delta \varepsilon_m \sigma_m dV \quad (3.16)$$

avec $\delta \varepsilon_m$ la déformation infinitésimale virtuelle, σ_m la contrainte uni-axiale

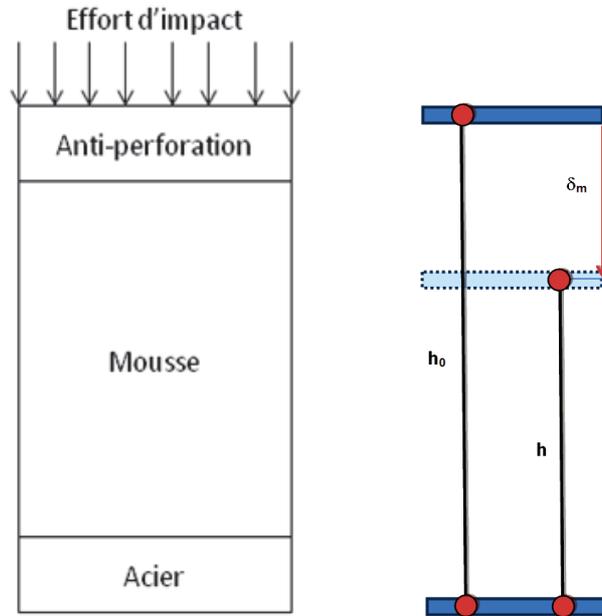


Figure 35 : Modèle de mousse basé sur les ressorts non linéaires

En supposant un matériau élastique défini par un module équivalent E , l'écrasement du matériau de l'âme étant important, la mesure logarithmique est utilisée pour décrire la déformation vraie ε_m de la mousse. Elle est définie par :

$$\varepsilon_m = \ln \left(1 + \frac{\delta_m}{h_0} \right) \quad (3.17)$$

avec δ_m le déplacement correspondant à l'indentation dans le matériau cellulaire et h_0 l'épaisseur du matériau de l'âme (Figure 35).

Le travail interne devient :

$$W_{int} = \int_0^{L_0} \Delta \delta_{,x} E \ln \left(1 + \frac{\delta_m}{h_0} \right) A dx \quad (3.18)$$

avec A : aire de la section de la barre définie par $\pi(R + h_0)^2$ où R représente le rayon du projectile et h_0 est l'épaisseur de la plaque anti-perforation de la structure impactée.

L'écrasement est considéré comme étant linéaire. Soit $\delta_m(x) = \left(1 - \frac{x}{h_0} \right) u_1 + \frac{x}{h_0} u_2$ avec u_1 et u_2 les déplacements nodaux de la poutre considérée.

Le travail interne devient donc :

$$W_{int} = \langle u_1 ; u_2 \rangle \int_0^{h_0} \begin{Bmatrix} -1/h_0 \\ 1/h_0 \end{Bmatrix} E \ln \left(1 + \frac{\delta_m}{h_0} \right) A dx = \langle u_1 ; u_2 \rangle \{f_{int}\}$$

Avec

$$\{f_{int}\} = E A \ln\left(1 + \frac{\delta_m}{h_0}\right) \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R \\ +R \end{Bmatrix}$$

f_{int} représente les forces intérieures s'appliquant sur la barre. Cette force peut s'écrire sous la forme d'un ressort non linéaire de raideur k , placé sous le projectile.

$$R = k \delta_m$$

Avec :

$$k = \frac{E A}{\delta_m} \ln\left(1 + \frac{\delta_m}{h_0}\right)$$

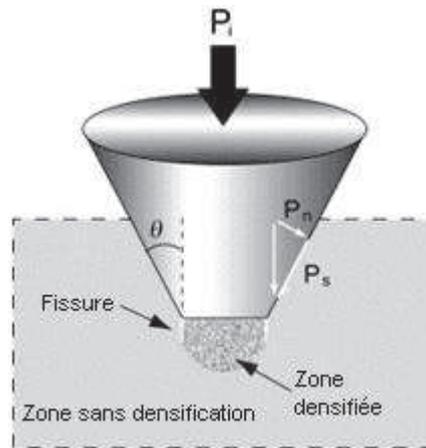


Figure 36 : Impact d'un cône

Cette rigidité k est alors prise en compte dans l'équation d'équilibre dynamique du projectile. Néanmoins, cette formulation permet uniquement de modéliser la rigidité due à la présence du matériau cellulaire sous un rayon de projectile défini dans la partie élastique. Il faut introduire les déformations plastiques observées dans le matériau cellulaire. Les phénomènes de déformation pour l'indentation d'un cône dans une mousse aluminium ont été décrits par Ramamurty [129] notamment. Il montre ainsi que l'indentation conique peut être décomposée en trois efforts résultants.

Un effort de compression plastique pure sous le rayon du cône, un effort de cisaillement pour représenter la déchirure des cellules à la transition géométrique du rayon du cône et de la face inclinée du cône et enfin un effort de compaction latéral sur la face inclinée. L'expression de ces efforts est donnée par :

$$F_T = \pi R_{proj}^2 \sigma_F + 2\pi\Gamma + \frac{\tau^*}{\cos(\theta)} \pi \delta_m (\delta_m \tan \theta + 2R_{proj}) \quad (3.19)$$

avec σ_F le plateau de contrainte du matériau cellulaire, Γ l'énergie de déchirement, τ^* la contrainte de cisaillement, et θ l'angle du cône défini comme le montre la Figure 36. Les paramètres Γ et τ^* sont obtenus expérimentalement lors d'essais d'indentation avec différents angles pour le cône et lors d'essai ASTM C-273 pour déterminer les propriétés de cisaillement des mousses. Ces paramètres sont donnés pour exemple (Figure 37) dans le cadre d'une mousse ALPORAS avec une densité relative de 10,5 %. Dans le cas de la structure sandwich, le rayon du projectile pour l'écrasement de mousse est modifié en ajoutant l'épaisseur h_0 de la plaque anti-perforation et devient $R_{Projm} = R_{Proj} + h_0$.

Dans le cas d'un projectile sphérique, seul le terme de compression plastique pure intervient alors dans la formule.

$$F_T = \pi R_{Projm}^2 \sigma_F \quad (3.20)$$

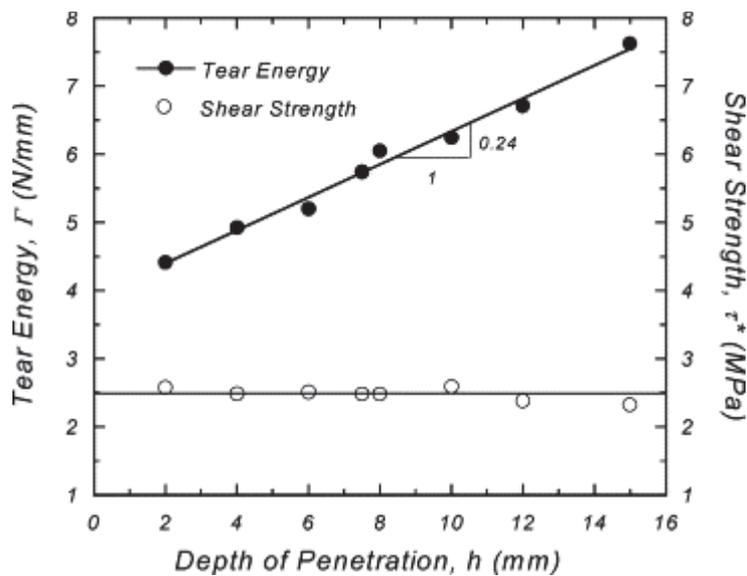


Figure 37 : Méthode d'obtention de Γ et de τ^* [129]

Au final, lorsqu'il y a déformation plastique de la plaque anti-perforation et aussi déformation plastique du matériau cellulaire avec un projectile conique, l'effort de contact s'écrit alors :

$$P(t) = 2\pi R_{proj} \sigma_F \delta + \pi R_{Projm}^2 \sigma_F + 2\pi \Gamma + \frac{\tau^*}{\cos(\theta)} \pi \delta_m (\delta_m * \tan(\theta) + 2R_{proj}) \quad (3.21)$$

4. Modélisation de la rupture

Sur les essais préliminaires, il est apparu sur certains essais une fissuration de la plaque anti-perforation. Il y a donc un phénomène de dissipation de l'énergie due à la création et à la propagation de fissures (Figure 38). Cette dissipation d'énergie est très locale et ne peut être prise en compte qu'au travers de l'effort de contact.



Figure 38 : Exemple de fissuration et ruptures

La modélisation la plus simple de la rupture consiste à utiliser un critère de déformation maximale à partir de laquelle il y a rupture. Cependant, il est nécessaire de relâcher les contraintes dans la matière avant rupture afin d'éviter des problèmes numériques. Un endommagement est donc introduit dans le comportement mécanique de la plaque anti-perforation du modèle de plasticité présenté précédemment.

4.1. Principe

La rupture est modélisée en modifiant la loi de plasticité précédente avec une phase d'endommagement. Ainsi, la loi (3.8) devient :

$$\sigma_F = (A + B\varepsilon^n)(1 - D) + \bar{\sigma}_{ame} \quad (3.22)$$

Le paramètre D représente l'endommagement dans la plaque anti-perforation. Lorsque l'endommagement est complet, il n'y a plus que la résistance du matériau cellulaire, ce qui est pris en compte par le paramètre $\bar{\sigma}_{ame}$. L'erreur commise en prenant en compte $\bar{\sigma}_{ame}$ dès le début du calcul est négligeable car la contrainte de ce matériau est faible par rapport à celle de la plaque anti-perforation.

La loi d'endommagement est choisie de forme quadratique afin de respecter les conditions suivantes :

$$\begin{cases} D = 0 & \text{si } \varepsilon < \varepsilon_{r1} \\ D = a\varepsilon^3 + b\varepsilon^2 + c\varepsilon + d & \text{si } \varepsilon_{r1} < \varepsilon < \varepsilon_{r2} \\ D = 1 & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_{r2} \end{cases} \quad (3.23)$$

avec ε_{r1} la déformation à rupture, ε_{r2} la déformation ultime. Les paramètres a, b, c et d sont déterminés de manière à assurer une continuité C^1 de la courbe contrainte-déformation. Ces conditions sont exprimées par :

$$\begin{cases} \text{si } \varepsilon = \varepsilon_{r1} \rightarrow D = 0, & \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = 0 \\ \text{si } \varepsilon = \varepsilon_{r2} \rightarrow D = 1, & \frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Cette modélisation de la rupture est schématisée sur la Figure 38.

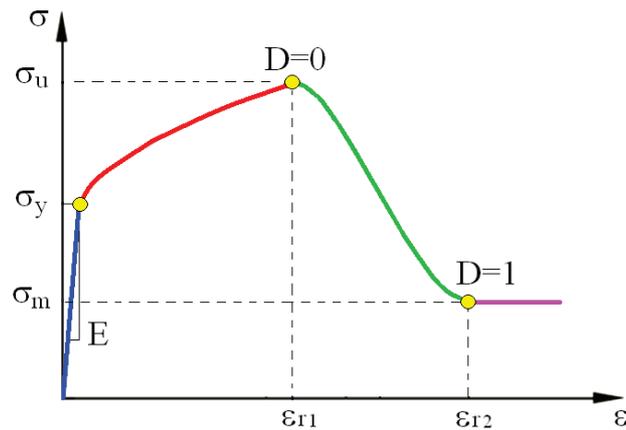


Figure 39 : Loi de comportement du matériau anti perforation.

4.2. Identification de la rupture

Comme expliqué dans le précédent chapitre, il est nécessaire de connaître un certain nombre de paramètres afin d'utiliser un modèle de rupture dans notre modèle analytique. Ces paramètres peuvent soit être donnés par le fabricant du matériau, soit disponibles dans la littérature et dans certains cas inexistantes. Dans ces derniers cas il devient alors nécessaire de développer une méthode de caractérisation de ces paramètres. La méthode que nous avons développée pour cette identification est basée sur la comparaison de résultats expérimentaux et numériques afin de déterminer la déformation à rupture.

4.2.1. Protocole expérimental

L'essai d'identification que nous avons développé, a pour objectif de pouvoir perforer le matériau tout en suivant son comportement au cours de la rupture. Il est donc nécessaire de mesurer l'effort et le déplacement d'un échantillon pendant la perforation. Nous nous sommes donc basés sur le principe des barres de Hopkinson pour réaliser des essais de perforation inversé. Ce test est basé sur l'essai expérimental proposé dans la thèse de Elnasri [9]. L'essai de perforation inversé est donc basé sur une utilisation dérivée de l'essai aux barres de Hopkinson. L'essai aux barres de Hopkinson existe depuis un siècle [109] et il est couramment utilisé dans la caractérisation dynamique des matériaux. L'analyse du dispositif faite par Davier [111] a permis l'amélioration du procédé pour aboutir au montage à deux barres développé par Kolsky [112]. Actuellement, on distingue deux configurations distinctes : les barres par impact classique SHPB (Split Hopkinson Pressure Bar) et les barres par impact direct DHPB (Direct Hopkinson Pressure Bar). Leur principe d'utilisation réside dans l'analyse de la modification d'une onde élastique produit par un choc lors de son passage à travers un échantillon. D'un point de vue théorique le fonctionnement de base repose sur l'étude de la propagation d'ondes élastiques. Le montage de jauges de déformation sur les barres permet une mesure de déformation entrante, réfléchi et sortante. Ces mesures permettent ensuite de remonter à l'état de contrainte et de vitesse en posant l'hypothèse d'une propagation d'onde unidimensionnelle ([113], [114], [115]).

Dans le cas d'un essai SHPB, présenté en Figure 40, l'analyse du signal transmis et réfléchi dans la barre entrante et du signal transmis dans la barre sortante permet d'en déduire les déformations associées à chaque signal : $\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_r(t)$ et $\varepsilon_t(t)$ respectivement la déformation

associée à l'onde incidente et à l'onde réfléchie dans la barre entrante et la déformation associée à l'onde transmise dans la barre sortante.

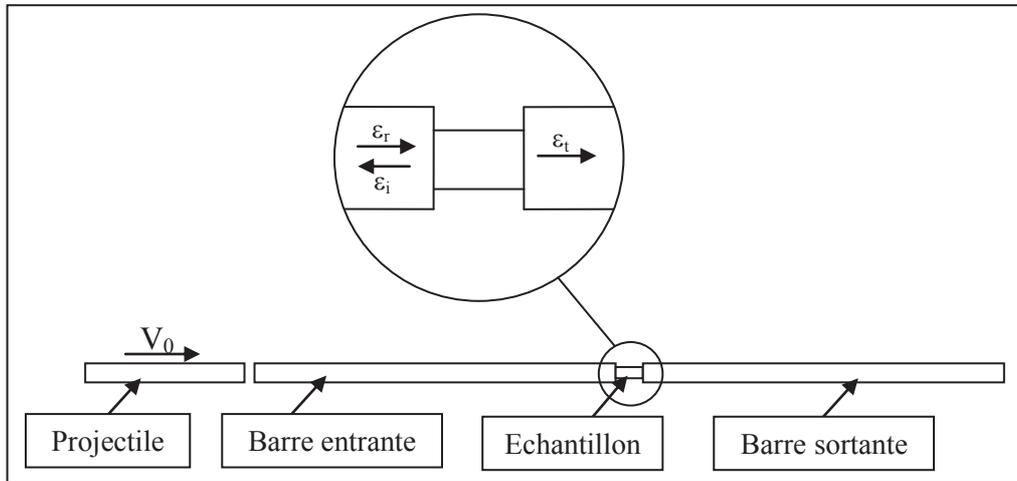


Figure 40 : Principes des Barres de Hopkinson classique SHPB

La mesure de ces déformations permet ensuite de calculer d'un point de vue global les forces et vitesses au niveau des interfaces d'entrée et de sortie et d'en déduire les grandeurs nominales recherchées pour la caractérisation du matériau :

$$\sigma_{nom} = \frac{F_e + F_s}{2S_e}$$

$$\varepsilon_{nom}(t) = \frac{U_s(t) - U_e(t)}{l_e}$$

$$\dot{\varepsilon}_{nom}(t) = \frac{V_s(t) - V_e(t)}{l_e}$$

Où σ_{nom} , $\varepsilon_{nom}(t)$, $\dot{\varepsilon}_{nom}(t)$ sont respectivement la contrainte, la déformation et la vitesse de déformation nominales, S_e et l_e sont respectivement la section et la longueur de l'échantillon, F_e , F_s , U_e , U_s , V_e , V_s sont les efforts, les déplacements et les vitesses de la barre entrante (indice e) et sortante (indice s). Dans le cas de l'essai en impact direct ou de perforation inversé ce principe théorique reste la base de l'analyse mais est simplifié. En effet, il n'y a plus que le signal d'onde transmis dans la barre à analyser.

Le principe de l'essai de perforation inversé, présenté en Figure 41, est donc de projeter sur une barre instrumentée de jauges de déformation, un support d'échantillon cylindrique. Le montage expérimental est donc composé de :

- un lanceur à air comprimé
- un tube de guidage
- un projectile porte-échantillon
- un embout impacté d'une géométrie définie en fonction de la sollicitation principale de perforation désirée (dans notre cas une pyramide à 3 cotés)
- une barre instrumentée

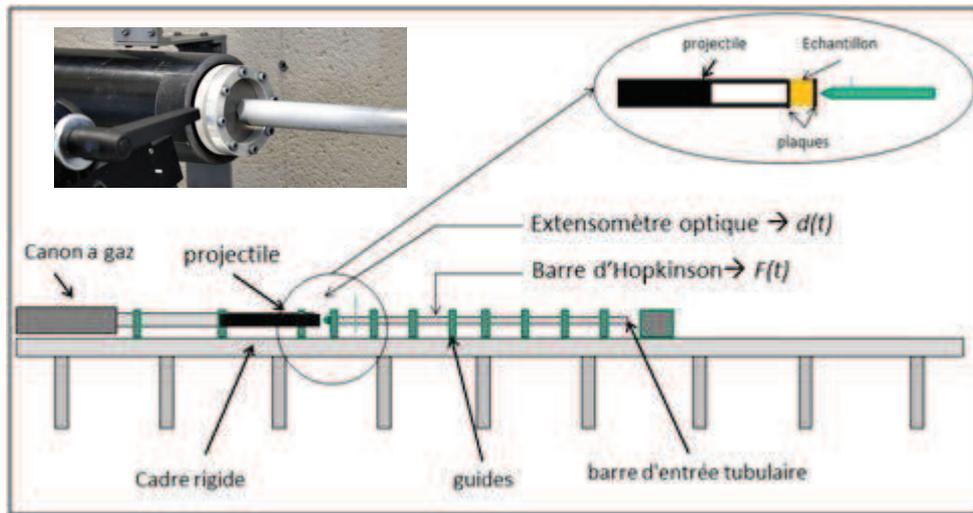


Figure 41 : Banc de perforation inversé

Le déplacement du projectile est mesuré par un extensomètre optique. Une cellule optique mesure le déplacement de la barre impactée. Il est ainsi possible de calculer de déplacement réel de l'échantillon (Figure 42) au cours de la perforation par :

$$U_e(t) = U_P(t) - U_b(t)$$

Avec $U_e(t)$, $U_P(t)$ et $U_b(t)$ les déplacements respectifs de l'échantillon, du projectile et de la barre.

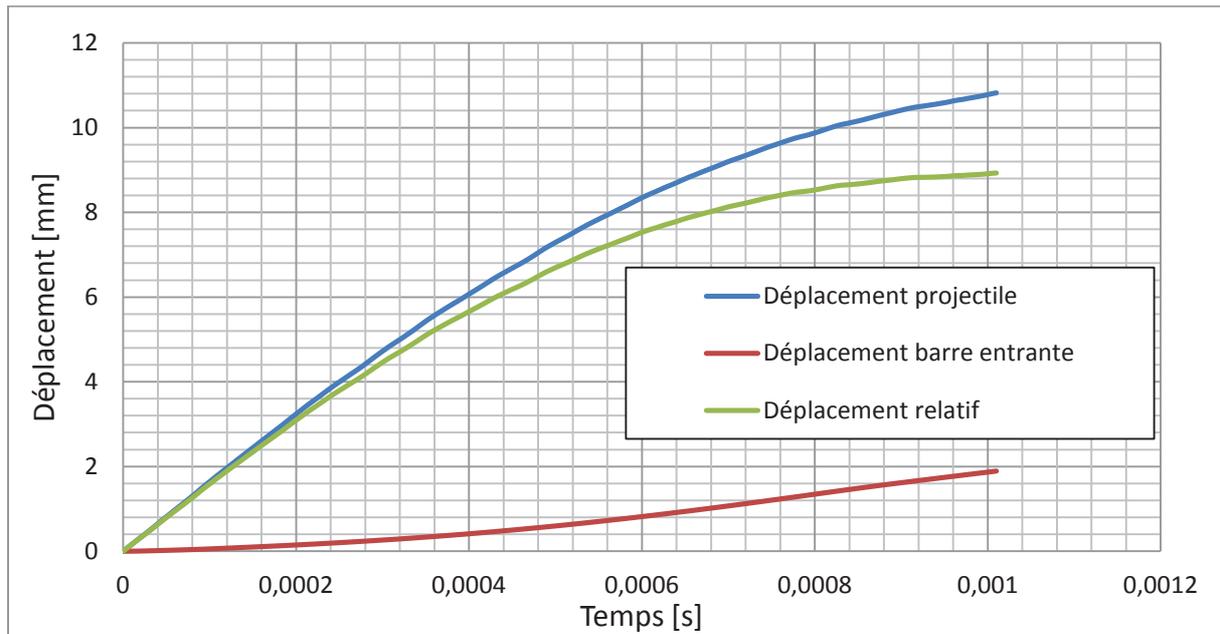


Figure 42 : Déplacements relatif d'un échantillon

Les jauges de déformations montées sur la barre permettent de déterminer l'effort $F_e(t)$ durant l'impact :

$$F_e(t) = SE\varepsilon_t(t)$$

Ce couple de données est ensuite utilisé pour tracer la courbe de force/déplacement adjointe au matériau pour une vitesse d'impact donnée. Cette courbe nous servira de référence pour déterminer la limite de déformation avant rupture.

Pour chaque matériau, des essais sont réalisés pour des vitesses où il y a un début d'initiation de la rupture et pour des vitesses où il y a rupture complète de l'échantillon. L'ensemble de ces résultats sera utilisé pour appréhender au mieux l'initiation de l'endommagement et son évolution avant d'atteindre la rupture totale de l'échantillon.

4.2.2. Détermination de la rupture par corrélation expérimentale et numérique

Le principe utilisé pour déterminer la limite de déformation à rupture peut s'apparenter à une méthode inverse : déterminer un paramètre matériau par recalage d'une solution numérique sur une solution expérimentale. C'est pourquoi il nous est nécessaire de connaître parfaitement le comportement en déformation du matériau pour déterminer le plus précisément possible l'instant de rupture.

L'ensemble des simulations éléments finis de l'essai est réalisé sur le logiciel Abaqus. Les modélisations utilisées sont soit en éléments 3D solides et coques ou 3D solides seuls. La Figure 43 présente une vue du modèle 3D solide et coque. L'objectif étant de comparer l'effort d'impact, la barre n'a pas entièrement été modélisée. Elle a été simplifiée à une barre courte de masse équivalente. De la même manière, le porte échantillon a été simplifié à un cylindre court de masse équivalente.

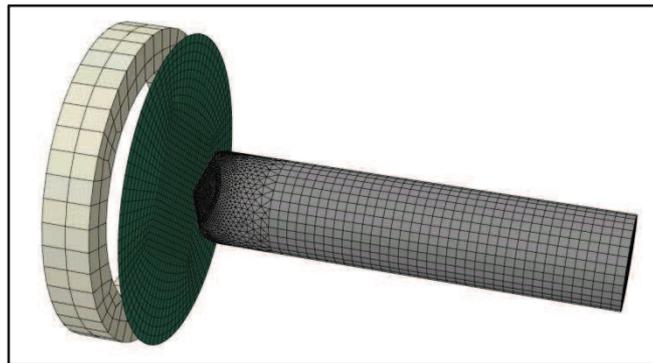


Figure 43 : Modèle éléments finis de l'essai de perforation inversé

La vitesse donnée à l'ensemble porte-échantillon et échantillon est celle mesurée juste avant l'impact. La barre et le porte-échantillons sont modélisés glissants. L'échantillon est lié au porte-échantillon par un contact collant.

En fonction du matériau testé, un type d'éléments finis est choisi (solides ou coques) et une loi de comportement implémentée dans le modèle d'échantillon, la réussite de l'identification réside dans la qualité de cette loi de comportement.

En sortie de la simulation, deux paramètres sont récupérés :

- l'effort par concaténation des pressions au contact entre l'échantillon et l'embout impacté,

- la déflexion de l'échantillon par soustraction du déplacement du porte-échantillon et de la barre.

Ce sont ces données qui sont comparés aux résultats expérimentaux afin de déterminer la déformation à rupture.

L'identification du critère de rupture est réalisée en deux étapes. La première étape consiste à déterminer la déformation à rupture ε_f atteinte pour des essais à basse vitesse ou il n'apparaît qu'un début d'initiation de la rupture. Dans ce cas une loi de comportement matériau sans critère d'endommagement ni de rupture est utilisée pour ce modèle éléments finis. La seconde étape consiste en une validation numérique du critère de déformation retenu. Dans ce cas, en fonction des matériaux à tester (fragile ou ductile) un modèle de rupture avec ou sans endommagement est introduit au modèle éléments finis. Une dernière comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques permet de valider la déformation à la rupture retenue.

5. Validation

Cette partie présente les étapes de validation du modèle analytique. Le modèle est validé dans un premier temps en utilisant la solution d'un modèle éléments finis 3D comme référence. Les étapes de validation sont les suivantes : tout d'abord un modèle élastique, ensuite un modèle avec de la plasticité pour la plaque anti-perforation et un modèle d'écrasement pour le matériau cellulaire, et enfin un modèle avec le critère de rupture simplifié de la plaque anti-perforation. Les corrélations sont effectuées par rapport à l'effort d'impact et au déplacement du point central de la cible (flèche).

Au final, le modèle analytique complet est validé par comparaison à des résultats obtenus à l'aide d'essais sur différentes structures sandwich.

5.1. Solution obtenue par éléments finis 3D

Les simulations éléments finis sont réalisées avec le logiciel commercial LS DYNA. Le modèle choisi est l'impact d'une sphère de diamètre 25,4 mm sur une structure carrée de un mètre de côté. Cette structure est un empilement de trois couches dont la couche inférieure représente la structure à protéger et les deux couches supérieures représentent la protection. Le modèle étant dans ces deux cas symétrique, seul un quart du problème est modélisé. La

Figure 44, représente la modélisation géométrique du quart du problème pour l'impact d'une sphère.

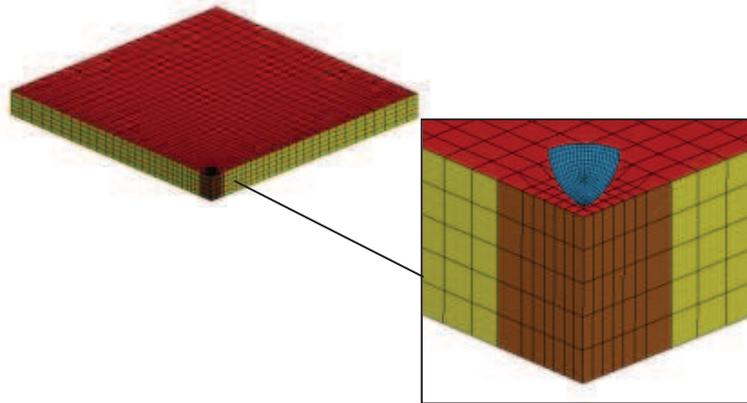


Figure 44 : Représentation géométrique du modèle éléments finis d'impact d'une sphère

Le projectile est constitué de 600 éléments coques indéformables, il possède une masse de 50 kg et une vitesse d'impact de $17\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. La couche inférieure du sandwich est constituée de 900 éléments coques de type Belytschko – Tsay. La couche médiane de la structure est modélisée en 4420 éléments 3D C3D8R (élément solide à contrainte constante et intégration réduite). La couche supérieure est modélisée de la même manière que la couche inférieure. Le contact entre le projectile et la protection est réalisé avec un contact sans frottement de type *Contact_ automatic_surface_to_surface. Les couches sont liées entre elles par un contact collant. L'impact de la zone centrale étant très agressif, les éléments de la mousse situés sous le cône se déforment énormément. Pour palier à ce problème, sans être obligé de remailler, nous utilisons un « maillage adaptatif » basé sur une formulation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) disponible dans LS Dyna. Le principe de la méthode ALE est de rendre indépendant le déplacement du maillage par rapport au matériau et donc d'autoriser de très grande déformation sans risquer une divergence du calcul. La durée de simulation est choisie à 20 ms, ce qui permet d'avoir un impact complet jusqu'au rebond du projectile.

La protection choisie est constituée d'une couche de 3mm d'épaisseur en aluminium 5754 et d'une couche centrale de 50mm de mousse en aluminium Cymat Smartmetal. La couche inférieure est une couche de 0,8mm d'épaisseur, en acier ES 04. Les bords de la plaque de inférieure sont encastés.

Pour valider le modèle analytique, trois simulations sont réalisées. La première est une modélisation où tous les matériaux sont élastiques. Leur comportement est donc pris en compte avec une loi de Hooke. Les paramètres associés sont résumés dans le Tableau 10 pour l'aluminium, dans le Tableau 11 pour la mousse en aluminium et dans le Tableau 9 pour l'acier.

Densité (kg/m3)	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson
7800	210	0,3

Tableau 9 : principaux paramètres de l'acier ES04 utilisé

Densité (kg/m3)	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson
2660	68	0,3

Tableau 10 : principaux paramètres de l'aluminium 5754 utilisé

Densité (kg/m3)	Module d'Young (MPa)	Coefficient de Poisson
410	200	0

Tableau 11 : principaux paramètres de la mousse en aluminium Cymat utilisée

La seconde simulation est une simulation auquel on a ajouté au modèle précédent un comportement plastique de la couche anti-perforation en aluminium et le comportement spécifique de la mousse d'aluminium. La modélisation plastique de la couche anti-perforation est réalisée avec une loi de Ludwig. Les paramètres associés à ce modèle sont présentés dans le Tableau 12 et l'équation suivante :

$$\bar{\sigma} = [A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^n] \cdot$$

Avec A la limite élastique, B et n les paramètres d'écrouissage du matériau.

Paramètres de la loi de Ludwig		
A (MPa)	B (MPa)	n
67,456	471,24	0,4241

Tableau 12 : paramètres de la loi de Ludwig de l'aluminium 5754

Le comportement spécifique de la mousse est modélisé par un modèle « crushable foam », qui est le modèle 63 dans LS Dyna [106]. Cette modélisation utilise un comportement élastique (voir Tableau 11), parfaitement plastique avec une limite élastique $\sigma_y = 2$ MPa.

La troisième simulation est une simulation auquel on a ajouté un critère de rupture pour la couche anti-perforation au modèle précédent. Ce critère de rupture est modélisé par une

déformation limite à la rupture $\varepsilon_f = 0,415$. Dans ce cas, nous utilisons un projectile conique afin d'éviter les problèmes numériques éléments finis (Figure 45). Ce cône à une tête hémisphérique de 6 mm de diamètre, un angle de 90° et une hauteur de 14 cm.

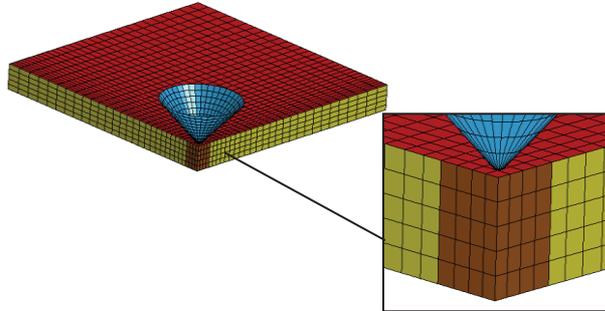


Figure 45 : Modélisation éléments finis d'un cône

Les paramètres qui sont résumés dans les tableaux 9 et 11 sont des données des fabricants et ceux résumés dans les tableaux 10 et 12 sont issus des travaux de Smerd [107].

Les résultats issus de ces trois simulations sont utilisés pour valider le modèle semi-analytique. La Figure 46 résume les résultats obtenus en termes d'effort à l'impact, mesuré au niveau du projectile. La Figure 47 résume les réponses obtenues en termes de flèche, mesurées au centre de la cible.

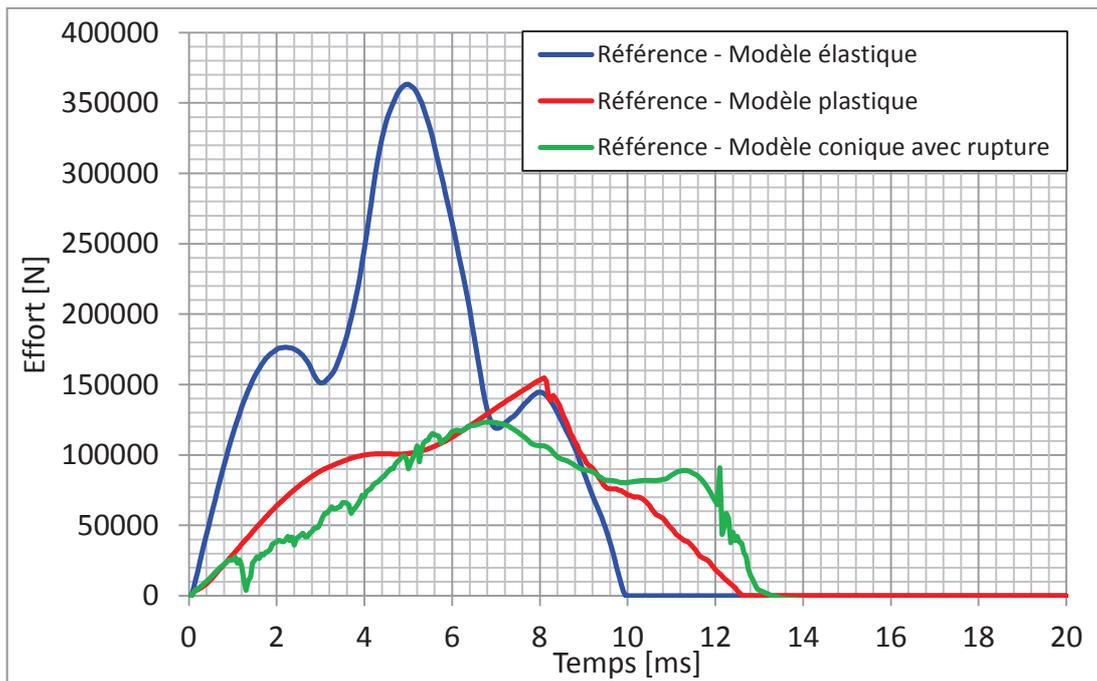


Figure 46 : Efforts d'impact obtenus par simulations éléments finis

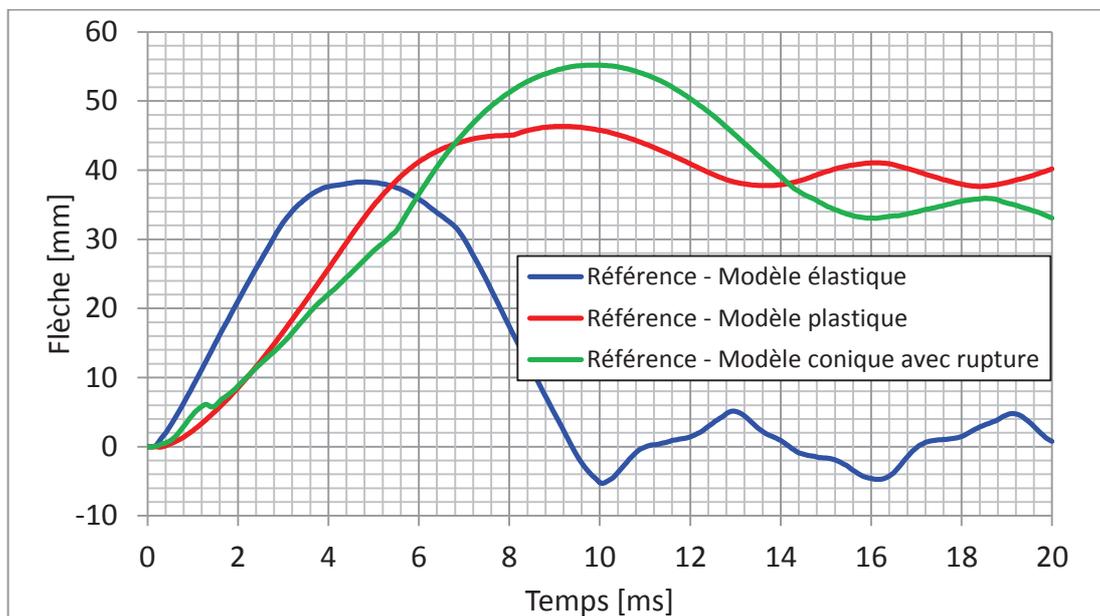


Figure 47 : Flèches obtenues par simulations éléments finis

5.2. Résultats obtenus par le modèle analytique

L'impact d'une sphère sur un assemblage de trois couches a été effectué avec le modèle semi-analytique. La modélisation géométrique est la même que celle présentée dans la partie

précédente. Dans un premier temps, une modélisation d'impact sur la structure tri-couches complètement élastique a été réalisée. Les paramètres matériaux utilisés sont les mêmes que pour la simulation éléments finis (tableaux 1 à 3). La constante du contact de Hertz utilisée pour modéliser le contact, le coefficient de correction du cisaillement et les paramètres de résolutions sont présentés dans le Tableau 13.

Nombre de termes de la série de Fourier	Temps total de la simulation (ms)	Nombre de pas de temps	Coefficient de correction du cisaillement	Constante du contact de Hertz ($N \cdot mm^{-3/2}$)
20	20	8000	0,04228	360000

Tableau 13 : paramètres de la simulation semi-analytique élastique

Pour valider la modélisation plastique de la couche anti-perforation, le modèle présenté en partie 2 a été ajouté. Les paramètres utilisés pour cette modélisation sont présentés dans le Tableau 14.

A (Mpa)	B (Mpa)	n
67,456	471,242	0,4241

Tableau 14 : Paramètres de la modélisation plastique de la peau supérieure

Le modèle d'écrasement de mousse présenté en partie 3 a ensuite été ajouté. Les paramètres utilisés pour cette modélisation sont résumés dans le Tableau 15 suivant :

σ_f (MPa)	Γ_f	τ_f
2	$3,7 + 0,24 \delta$	2,5

Tableau 15 : Paramètres de la modélisation analytique de la mousse

Finalement, le critère de rupture de la couche anti-perforation est pris en compte. Ce critère de rupture est le même que celui utilisé pour la simulation éléments finis et a pour valeur $\varepsilon_f = 0,415$.

Les résultats analytiques obtenus de ces trois simulations sont rassemblés sur Figure 48 pour l'effort impact et sur la Figure 49 pour la flèche.

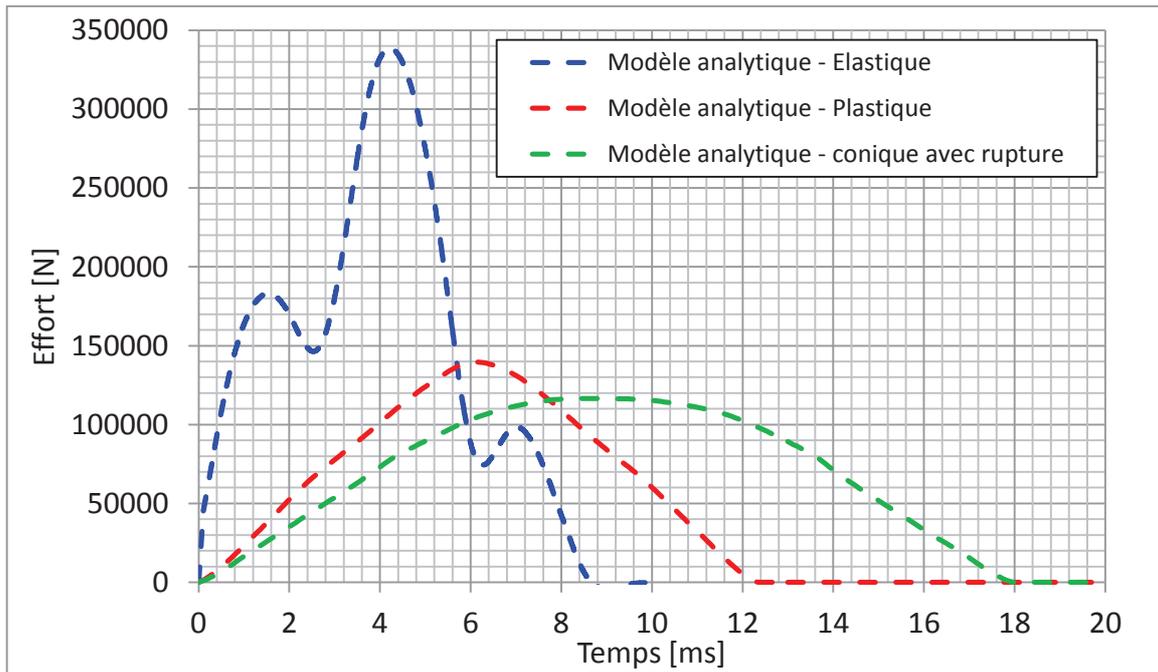


Figure 48 : Efforts d'impact obtenus par modélisation analytique

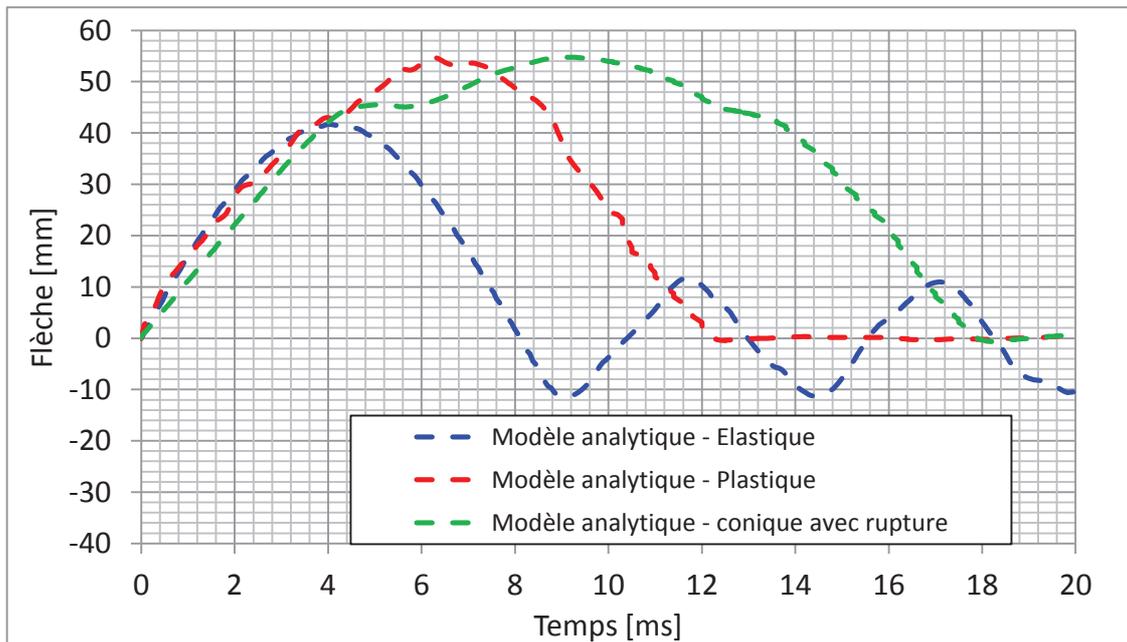


Figure 49 : Flèches obtenues par modélisation analytique

5.3. Comparaisons et exploitations

Il est synthétisé en Figure 50, les résultats sur l'effort d'impact obtenus par les modélisations éléments finis et analytique. Sur la Figure 51, il est synthétisé les résultats sur la flèche obtenus par les modélisations éléments finis et analytique.

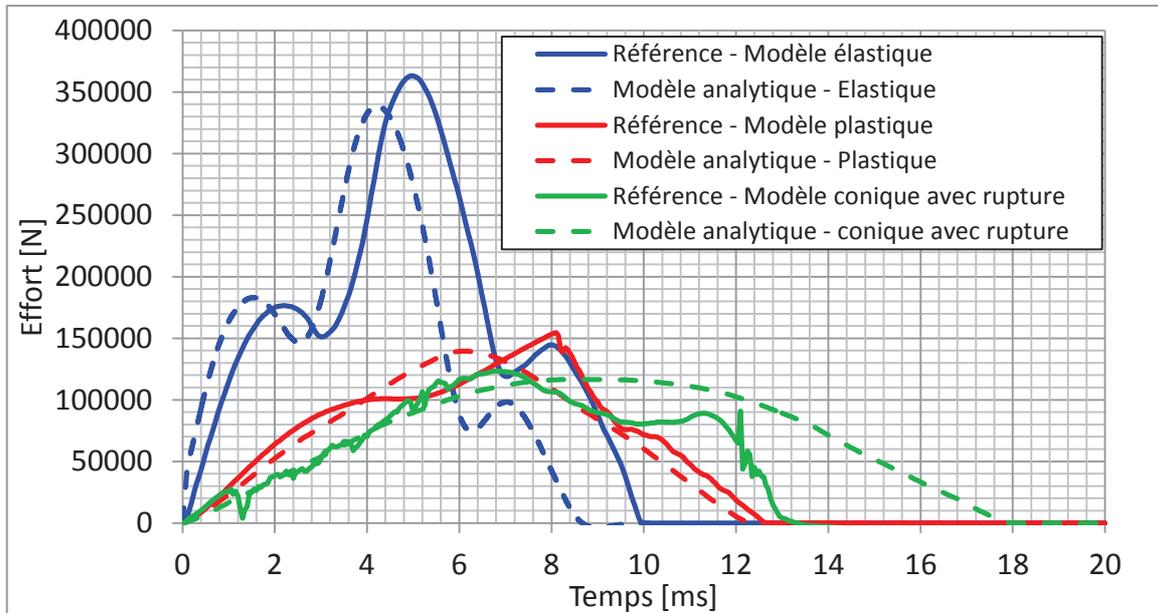


Figure 50 : Comparaison des efforts d'impacts

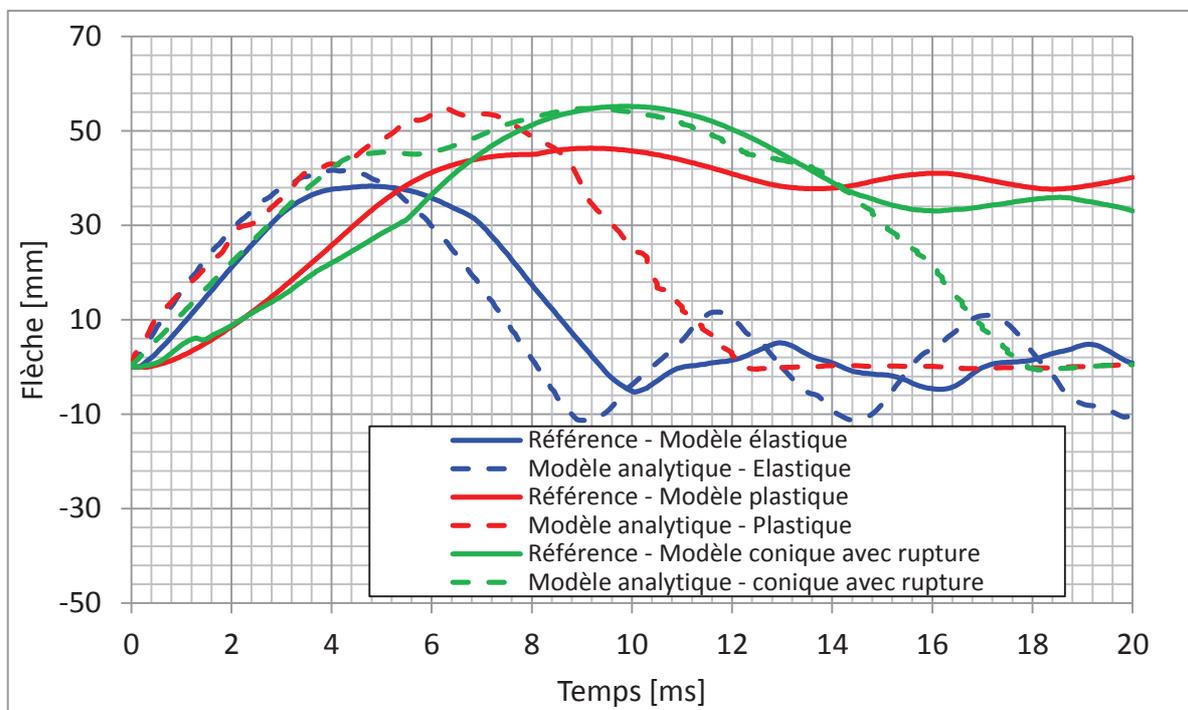


Figure 51 : Comparaison des flèches

5.3.1. Validation de l'élasticité

Pour le cas élastique, la courbe d'effort obtenue par modélisation analytique a été filtrée avec un filtre de type SAE. Notre modèle sous estime l'effort maximal obtenu par simulation éléments finis avec une erreur de 7 % par rapport à ce dernier. De même pour la durée de l'impact qui est sous estimée avec une différence de 11 %. Pour la flèche maximale, notre modèle sous estime légèrement le résultat éléments finis avec une erreur de 9 %.

Ces différences sont notamment dues au fait que la modélisation analytique homogénéise la structure tri-couche. La Figure 52 présente le résultat en effort d'une simulation éléments finis avec cette plaque tri-couche homogénéisée, avec les mêmes paramètres que les simulations précédentes. On constate que le modèle analytique donne de très bons résultats. L'erreur se réduit ainsi à moins de 1 % de différence sur l'effort maximal et sur la durée d'impact.

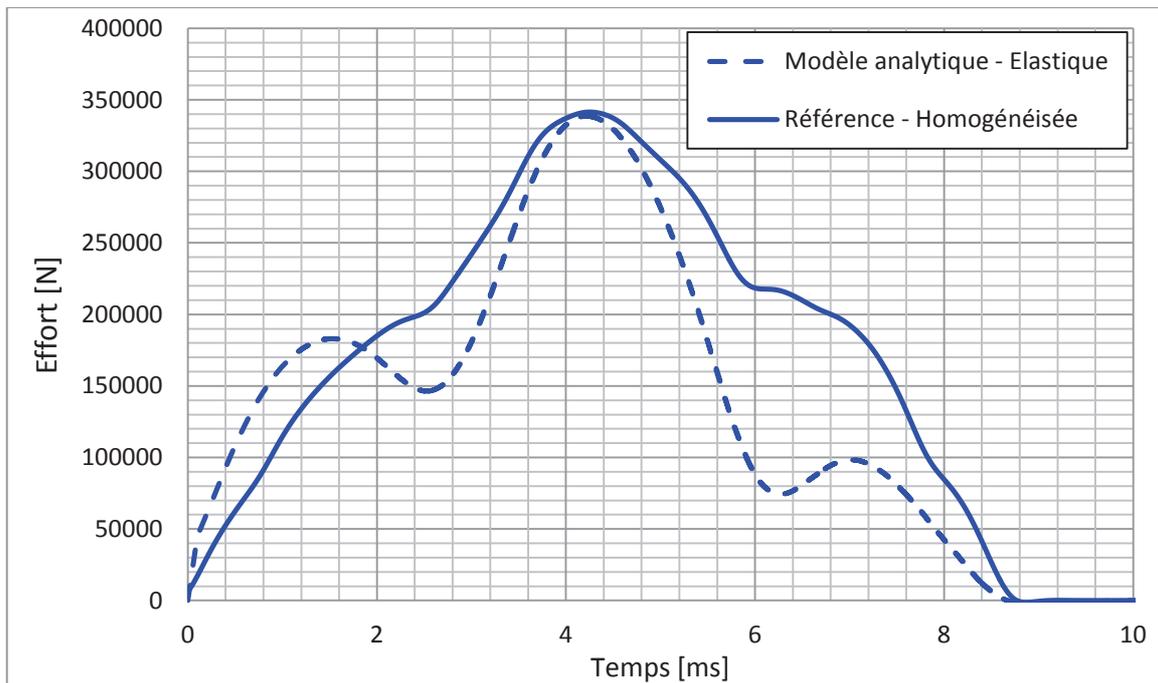


Figure 52 : Résultat d'une corrélation entre modèle analytique et référence homogénéisée

5.3.2. Validation de la plasticité et de l'écrasement

Avec l'ajout d'un modèle de plasticité et d'un modèle d'écrasement de mousse, notre modélisation analytique donne une bonne estimation de l'effort maximal avec une différence

de 9,5% par rapport au résultat de référence associé. Pour la durée de l'impact, notre modèle donne encore une bonne estimation avec une erreur de moins de 2 % par rapport à la simulation éléments finis. Cependant, la flèche maximale obtenue par la modélisation analytique est sous estimée, avec une différence de 18 % par rapport à la référence. Cette différence peut s'expliquer par le fait que le modèle de référence a un maillage trop peu raffiné au niveau du lieu d'impact, et que la plasticité locale et l'écrasement de mousse ne sont de ce fait pas correctement pris en compte.

L'ajout de ces deux modèles locaux a pour conséquence de diminuer l'effort d'impact et d'allonger la durée du contact entre le projectile et la cible. La perte d'effort maximal lorsque l'on passe d'une modélisation élastique à une modélisation avec plasticité et écrasement est du même ordre de grandeur entre les modèles de référence et les modèles analytiques. Il en est de même pour l'augmentation de la durée d'impact et l'évolution de la flèche.

5.3.3. Validation de la rupture

Le résultat obtenu par la modélisation analytique de l'impact d'un cône estime bien l'effort maximal, avec une légère différence de 5% par rapport au résultat de référence. Néanmoins, la durée d'impact est surestimée avec une erreur de 35 %. Dans le cas de la flèche maximale, nous obtenons une différence de moins de 1 %. Ces différences s'expliquent par le fait que notre modèle homogénéise la plaque contrairement à la référence élément finis.

5.4. Validation expérimentale

Des campagnes expérimentales sur plaques sandwich carrées de 1m de coté ont été réalisées. Elles avaient pour but de compléter les études préliminaires, de permettre de déterminer la phénoménologie lors de l'impact, de permettre de corrélérer avec les modélisations analytiques, de valider le choix des catégories de matériaux.

Les impacts sont réalisés sur une catapulte horizontale pour atteindre des énergies de l'ordre de 7 kJ. Les éprouvettes soumises aux essais sont fixées sur un cadre rigide. Le montage est encastré à la verticale au moyen de brides sur le marbre de choc. Un chariot bélier guidé par rail, muni d'un projectile mobile sur un second chariot, a été conçu (Figure 53). L'impact peut ainsi être positionné au point d'impact voulu et à la vitesse voulue. Un système d'arrêt est

installé derrière l'éprouvette pour stopper le chariot bélier dans le cas où il perforerait complètement l'éprouvette. L'annexe 6 présente les différents éléments du montage expérimental.



Figure 53 : Banc d'essais – projectile et montage pour les éprouvettes

Lors de ces essais, plusieurs moyens de mesures ont été utilisés :

- trois caméras rapides dont une permettant de faire du tracking de mire mesurant le déplacement de la face arrière de l'éprouvette,
- une cellule d'effort pour mesurer l'effort à l'impact,
- deux accéléromètres permettant de connaître l'enfoncement du projectile,
- une barrière de vitesse mesurant la vitesse du projectile à l'impact.

Un grand nombre d'essais ont été effectués [108], [109] et seuls les résultats principaux ayant permis de valider la modélisation analytique complète, sont présentés. Tout d'abord, l'impact sur une protection en aluminium et mousse d'aluminium. Puis l'impact sur une protection en acier et mousse d'aluminium et enfin, l'impact sur une protection en composite et mousse en aluminium.

5.4.1. Phénoménologie type

La Figure 54, présente le chronographe phénoménologique de l'impact d'une éprouvette type composée d'une surface anti-perforation et d'une mousse de haute densité.

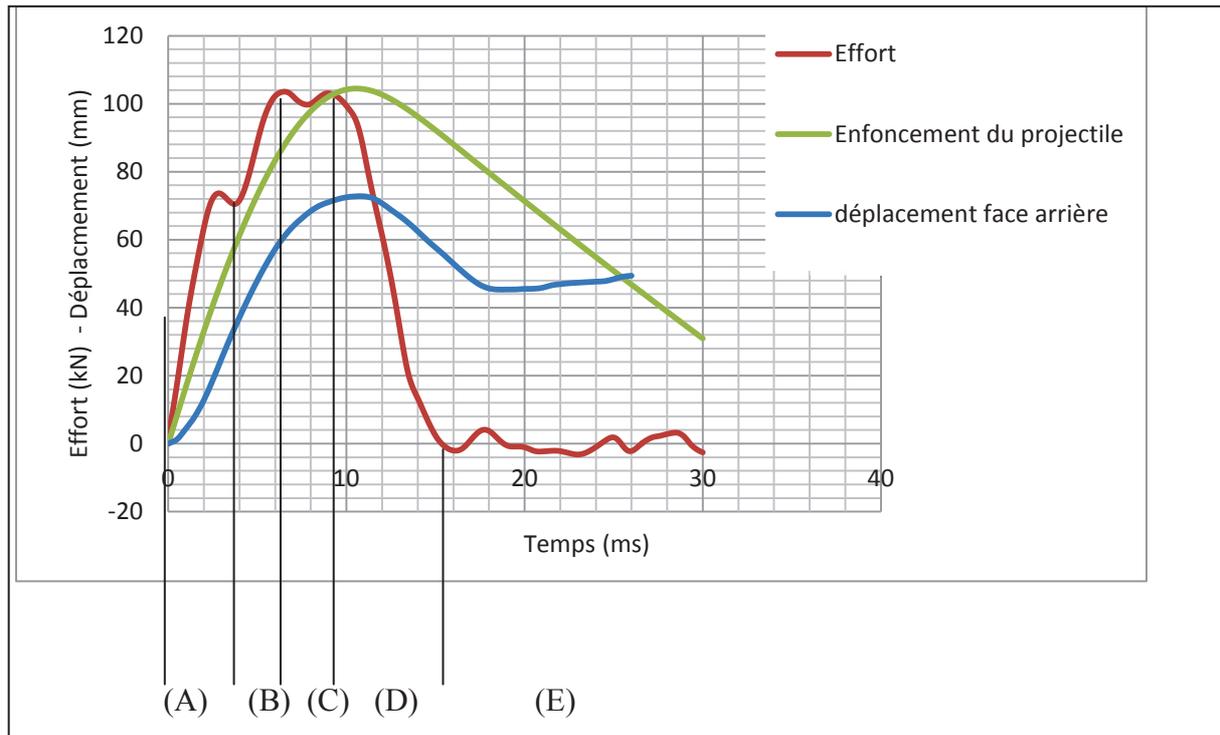


Figure 54 : Chronographe phénoménologique d'une éprouvette type

- (A) : Début de l'impact (contact entre l'éprouvette et le projectile),
- (AB) : Absorption d'une partie de l'énergie par la surface anti-perforation et compression globale de la mousse,
- (B) : Perforation de la surface anti-perforation,
- (BD) : Compression localisée de la mousse au contact du projectile,
- (C) : Perforation de la mousse,
- (D) : Fin de compression de la mousse,
- (DE) : Fin d'intrusion du projectile dans l'éprouvette,
- (E) : Perte du contact entre le projectile et l'éprouvette.

On remarque que le déplacement de la face arrière intervient quelques millisecondes après le début de l'impact et qu'il est moins important que celui de la face avant. On a donc bien un phénomène de compression de la mousse. De plus, l'énergie totale de l'impact est absorbée lorsque le déplacement de la face avant est maximal.

5.4.2. Critère de rupture des matériaux

Trois types de matériaux ont été testés afin d’identifier leur critère de rupture par l’essai de perforation : un aluminium 5754, un acier DP1200 et un composite, le paralite. L’acier et l’aluminium nécessitant le même de type de modélisation, nous décrirons précisément la détermination du critère de rupture pour l’aluminium, et ne donnerons que les résultats pour l’acier. Pour l’aluminium, neuf échantillons ont été testés. Sur les neuf, trois ont servi à calibrer le banc d’essai et déterminer la vitesse minimum pour obtenir la rupture de l’échantillon. Les six autres ont été utilisés en vue de la détermination du critère de rupture. Le Tableau 16 récapitule les paramètres d’essais pour chaque échantillon et la Figure 55 présente les échantillons perforés.

Essais	Vitesse barre entrante (m.s ⁻¹)	Masse projectile (kg)	Energie absorbée (J)
1	24.7	0.672	141.4
2	24.9	0.672	147.3
3	25.3	0.672	151.9
4	20.5	0.672	80.16
5	17.3	0.672	56.83
6	16.9	0.672	55.05

Tableau 16 : Paramètres des essais de perforation inverse de l’aluminium



Figure 55 : Les six échantillons perforés

Les résultats obtenus en effort/ déplacement, pour ces six essais, sont présentés en Figure 56. Ils serviront de référence expérimentale pour l'identification du critère de rupture

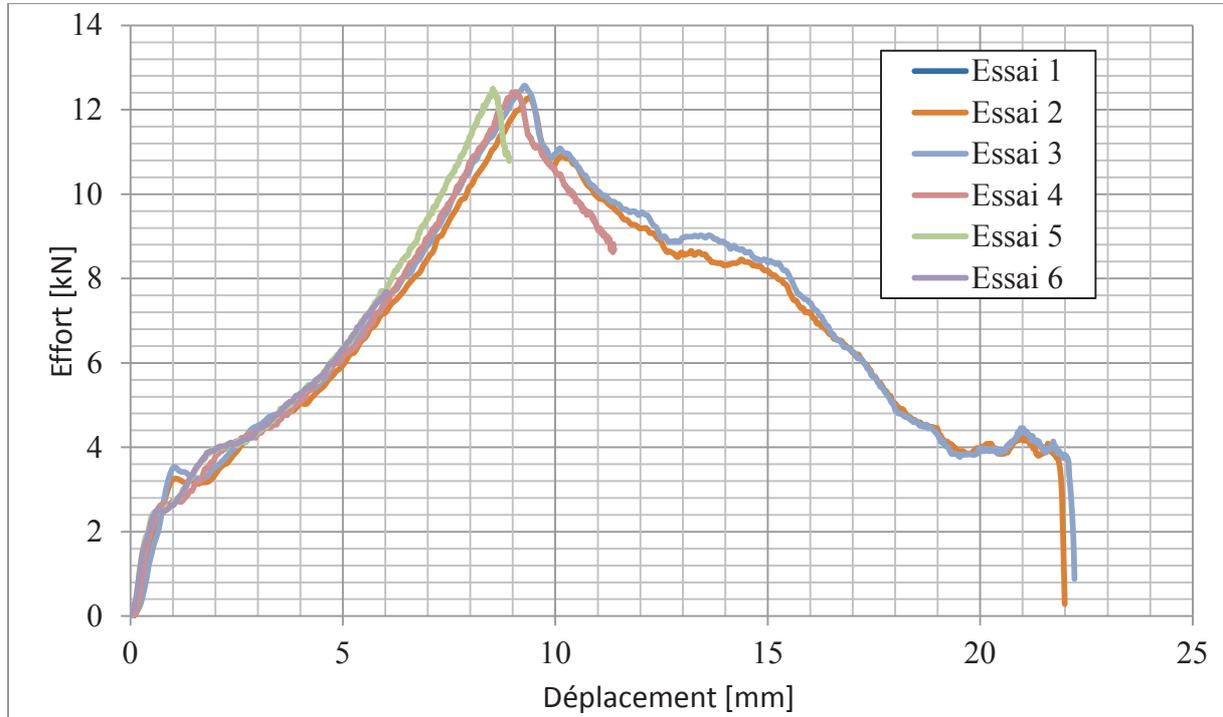


Figure 56 : Résultats des essais de perforation inverse de l'aluminium

Les courbes obtenues peuvent être décomposées en 4 zones (Figure 57):

- Zone I : Comportement élastique
- Zone II: Comportement plastique
- Zone III : Comportement plastique + endommagement
- Zone IV : Comportement plastique + endommagement + rupture

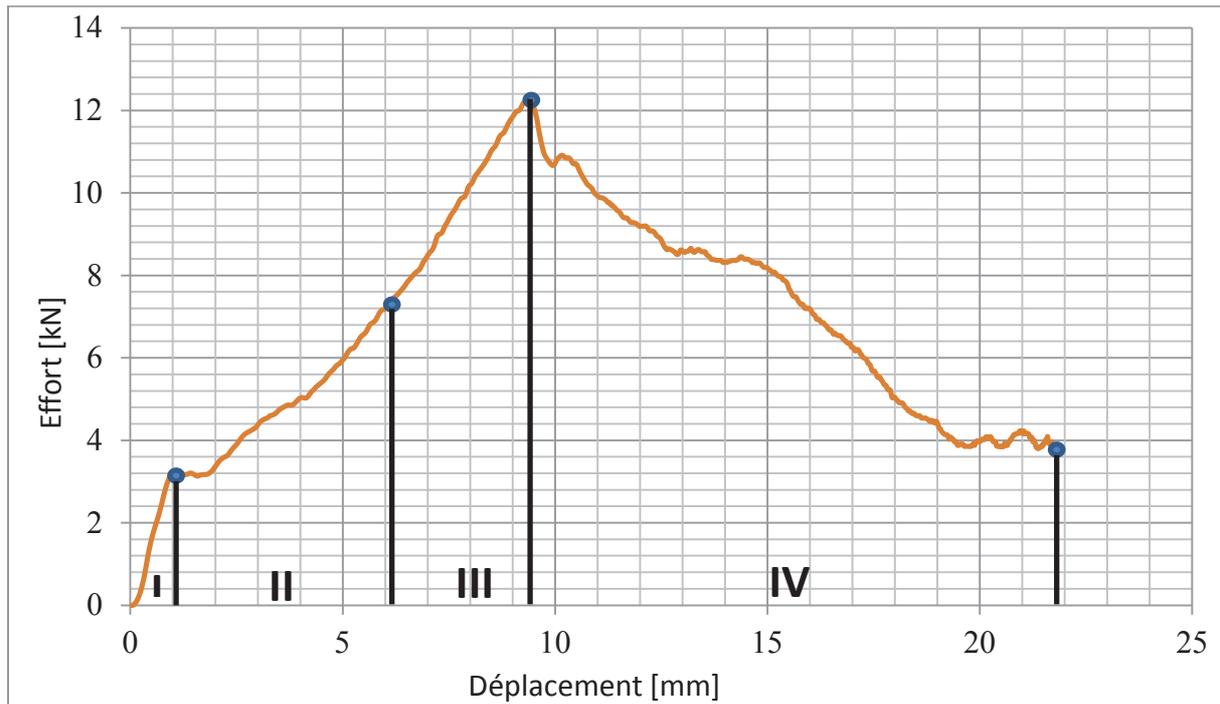


Figure 57 : Décomposition d'une courbe type de résultats

Les parties I et II de la courbe nous permettront de vérifier l'exactitude de la loi de comportement utilisé pour le matériau. En effet une mauvaise corrélation de la solution éléments finis sur cette partie de la courbe ne nous permettrait pas une détermination fiable du critère de perforation. Les parties III et IV seront quant à elles utilisées pour la détermination du critère de rupture.

La première phase de la méthodologie a donc été de déterminer le critère d'initiation de l'endommagement à l'instant où l'échantillon passe d'un comportement plastique à plastique avec endommagement. Dans ce cas nous n'avons utilisé que les résultats pour un échantillon ne présentant qu'un début d'initiation de la rupture (échantillon 6). Pour déterminer l'état de déformation à l'instant de changement de comportement, nous avons relevé la déformation obtenue dans notre simulation éléments finis, pour un état de contrainte maximum dans la plaque, à l'instant de changement de comportement (passage de la zone II à III).

Le modèle utilisé dans ce cas est un modèle 3D avec plaque en coque. La loi de comportement utilisée pour l'aluminium est une loi de type Ludwig :

$$\bar{\sigma} = [67,456 + 471,242(\bar{\varepsilon}^{pl})^{0.4241}]$$

La Figure 58 représente la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques obtenus pour l'échantillon 6.

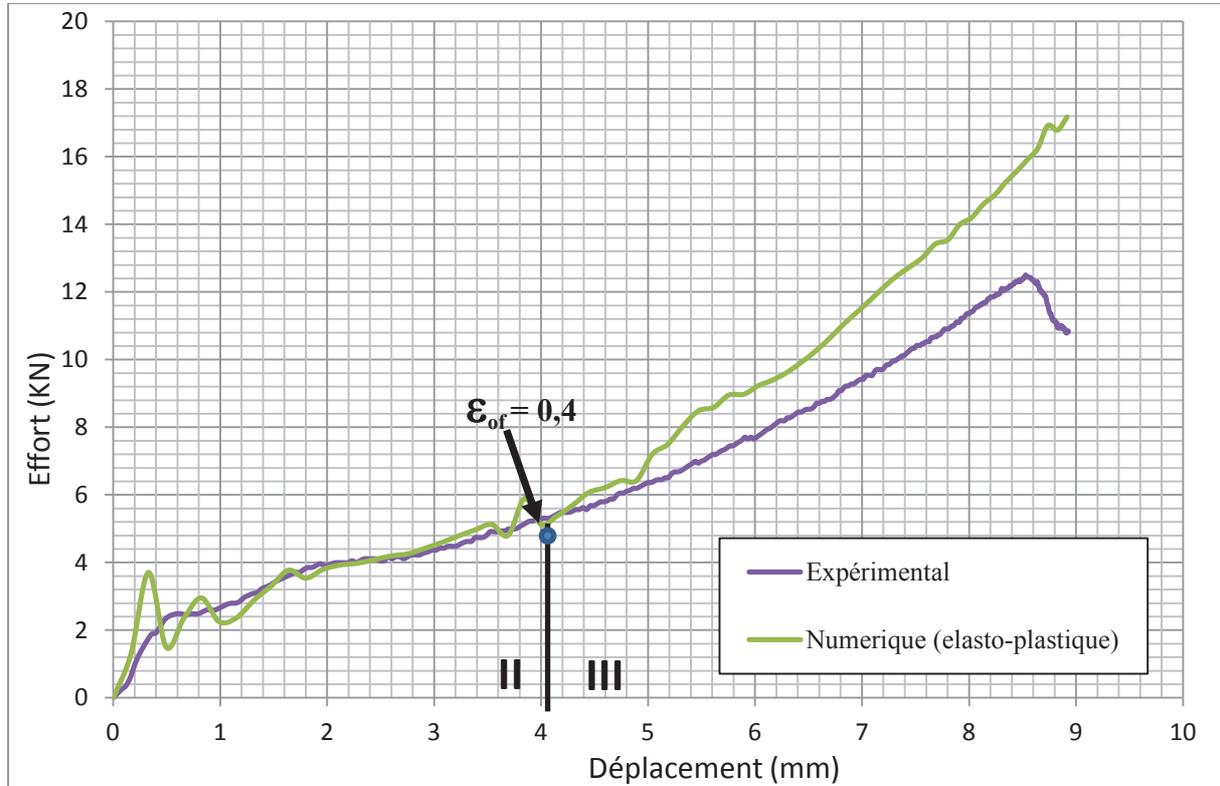


Figure 58 : comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques pour l'essai 6

Dans ce cas la déformation ϵ_{0f} trouvée est égale à 0,4.

Pour la phase 2 de l'identification nous avons introduit dans notre simulation éléments finis un modèle d'endommagement pour matériaux ductiles :

$$\sigma = (1 - D) \cdot \bar{\sigma}$$

Avec D la variable d'évolution de l'endommagement (si D=1 il n'y a pas d'endommagement) et $\bar{\sigma}$ le tenseur de contrainte non-endommagé.

La variable d'endommagement sera calculée en fonction d'un modèle d'évolution linéaire basé sur un critère d'initiation en déformation ($\bar{\epsilon}_D^{pl}$) et un critère d'évolution (rupture totale).

Afin d'avoir un critère d'évolution indépendant du maillage, il est proposé sous Abaqus de donner un critère en déplacement $\bar{\mu}_f^{pl}$. L'évolution de l'endommagement a donc été introduit dans notre modèle et nous l'avons fait varier jusqu'à corrélérer les résultats expérimentaux et

numériques. Enfin, le critère d'évolution est recalculé en déformation suivant l'équation suivante :

$$\bar{\varepsilon}_f^{pl} = \frac{\bar{\mu}_f^{pl}}{l_f}$$

Avec l_f la longueur de l'élément le plus endommagé à l'instant de rupture.

La Figure 59 montre le résultat obtenu pour l'aluminium avec un critère d'évolution de l'endommagement $\bar{\mu}_f^{pl}$ égal 0,0001m soit $\bar{\varepsilon}_f^{pl}$ de 0,43.

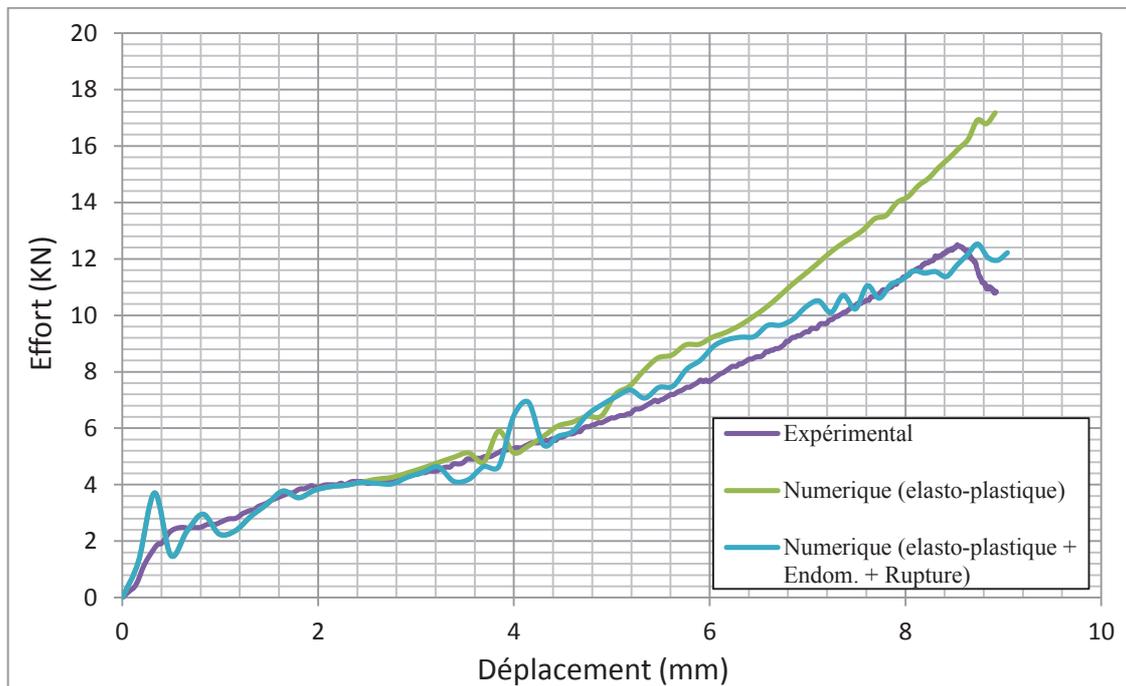


Figure 59 : Décomposition d'une courbe type de résultats

Nous pouvons donc déterminer, à partir de $\lambda=0.015$, un critère de rupture en déformation $\bar{\varepsilon}_r$ pour l'aluminium égal à 0,415.

Nous avons appliqué la même procédure à l'acier DP1200. Vingt échantillons ont été testés. Nous avons trouvé dans ce cas un critère de rupture en déformation de 0,34.

Pour le paralite qui est un composite polyester, fibre de verre tissé, nous n'avons pas pu appliquer la même méthode que pour les deux précédents matériaux. En effet, le paralite est un matériau fragile très rigide. La perforation apparaît comme un endommagement localisé et une rupture successive de chaque couche. N'ayant aucune information sur le mode de dégradation des couches, nous avons décidé de modéliser le paralite par un matériau

homogène avec un endommagement que nous assimilons à une pseudo plasticité des couches, qui se traduit par une limitation de la contrainte équivalente dans l'élément. Pour cela nous avons donc utilisé une loi de comportement élastique plastique parfait.

La procédure a consisté dans ce cas à déterminer la contrainte seuil pour laquelle le comportement peut être assimilé à un comportement dégradé de type pseudo-ductile. Puis trouver la déformation dans le cas de la perforation complète de l'échantillon. Dans ce cas, nous ne déterminons plus qu'une déformation de rupture globale moyenne quand la perforation totale de l'échantillon a été constatée.

Pour les essais paralite, parmi onze échantillons testés, seulement quatre ont permis d'atteindre la perforation. Le Tableau 17 récapitule les paramètres d'essais pour chaque échantillon et la Figure 60 présente les échantillons perforés.

Essais	Vitesse du projectile (m.s ⁻¹)	Masse projectile (kg)	Energie absorbée (J)
1	29.4	0.689	144.1
2	33.3	0.689	247.1
3	32.7	0.689	199.1
4	32.4	0.689	202.7

Tableau 17 : Paramètres des essais de perforation inverse du paralite

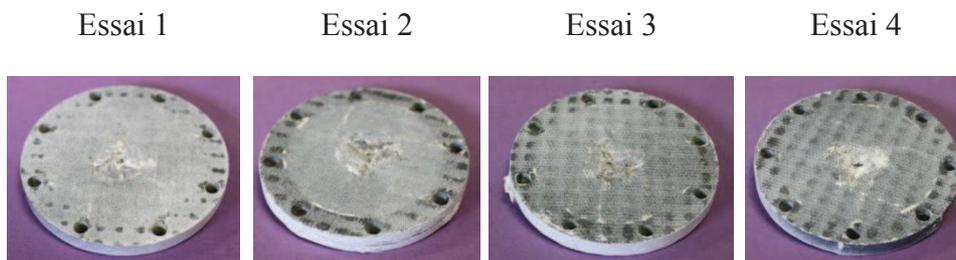


Figure 60 : Les 4 échantillons de paralite perforés

Les résultats obtenus en effort/déplacement, pour ces essais, sont présentés sur la Figure 61. Ils serviront de référence expérimentale pour l'identification du critère de rupture

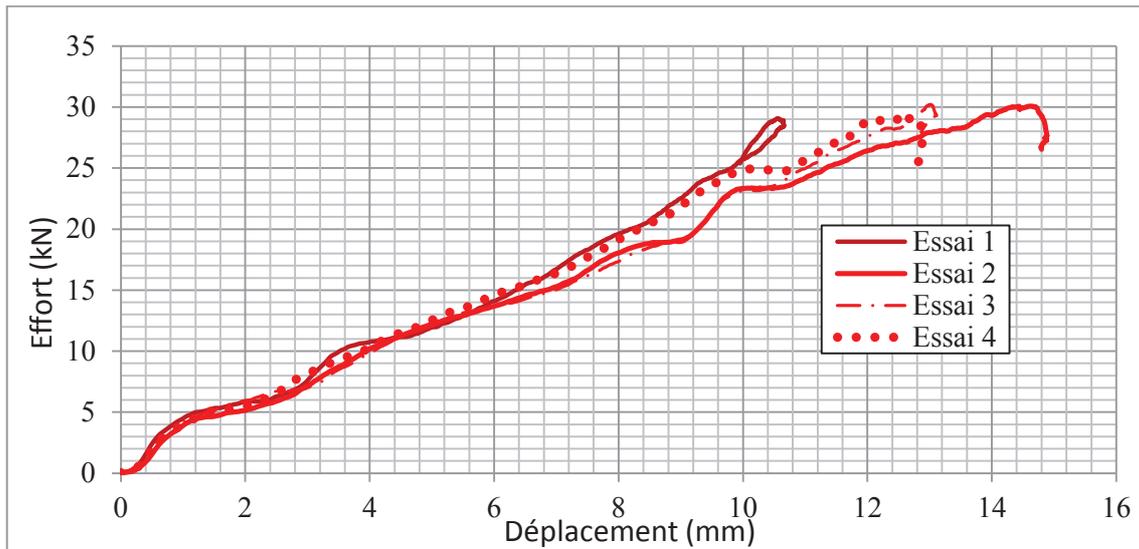


Figure 61 : Résultats des essais de perforation inverse du paralite

La modélisation éléments finis utilisée est une simulation avec des éléments 3D solides. La Figure 62 présente les résultats obtenus pour l'utilisation d'une loi de comportement élastique ($E=25000$ MPa), et une loi de comportement élastique plastique parfait avec une contrainte seuil de 100MPa.

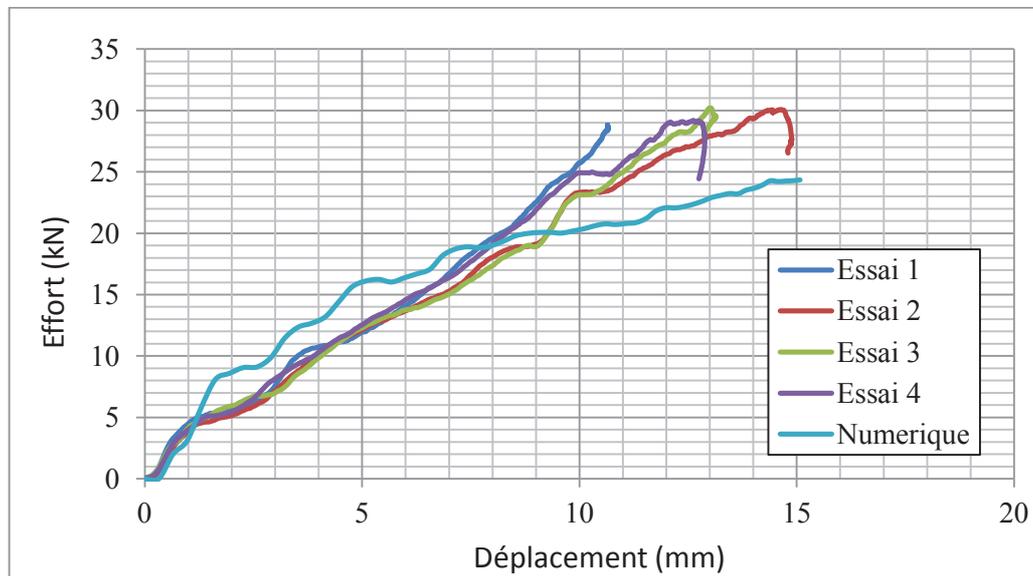


Figure 62 : Résultats des modélisations de perforation inverse du paralite

Cette dernière simulation nous a permis de déterminer une déformation à la rupture globale $\bar{\epsilon}_r$ dans l'échantillon de 0,43.

5.4.3. Cas de l'impact sur une protection avec couche anti-perforation en aluminium

Cet essai a été réalisé à une vitesse de $17,15 \text{ m.s}^{-1}$ et le projectile de forme pyramidale avait une masse de 48,3 kg. Le sandwich était encastré au niveau de la couche arrière. Il était constitué d'une plaque anti-perforation en aluminium 5754 de 3mm d'épaisseur. Les paramètres élastiques de ce matériau sont résumés dans le Tableau 10 et les paramètres de la loi de plasticité sont résumés dans le Tableau 12. L'âme de 50 mm d'épaisseur était en mousse Cymat Smartmetal. Les paramètres de la mousse sont résumés dans le Tableau 11. Et enfin, la couche arrière est une plaque de 0,8 mm d'épaisseur en acier ES04 dont les paramètres élastiques sont résumés dans le Tableau 9.

La Figure 63 montre le sandwich post-impact et l'on peut constater que la plaque supérieure est perforée, ainsi que la mousse en aluminium qui est écrasée localement sous le projectile et que la face arrière est déformée plastiquement.

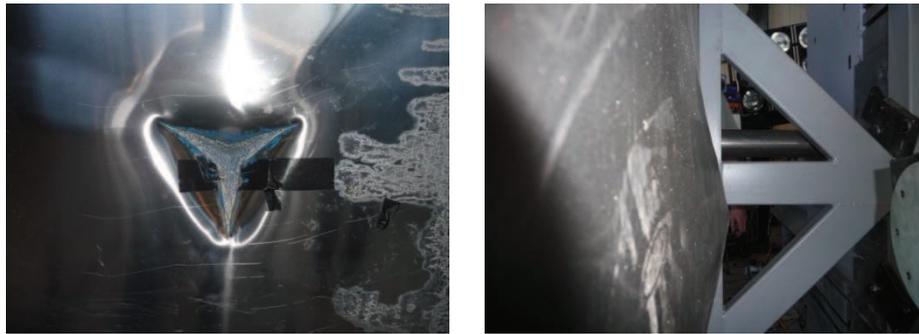


Figure 63 : Résultat expérimental – face avant – face arrière

Pour déterminer le critère de rupture de l'aluminium, nous avons utilisé la méthode inverse présentée précédemment. Le critère utilisé est donc $\varepsilon_f=0,415$.

La Figure 64 présente le résultat obtenu en termes d'effort d'impact et la Figure 65, le résultat obtenu en termes de flèche. Il est à noter que le moyen de mesure de la flèche n'a permis d'avoir cette dernière que sur une durée de 10,5 ms.

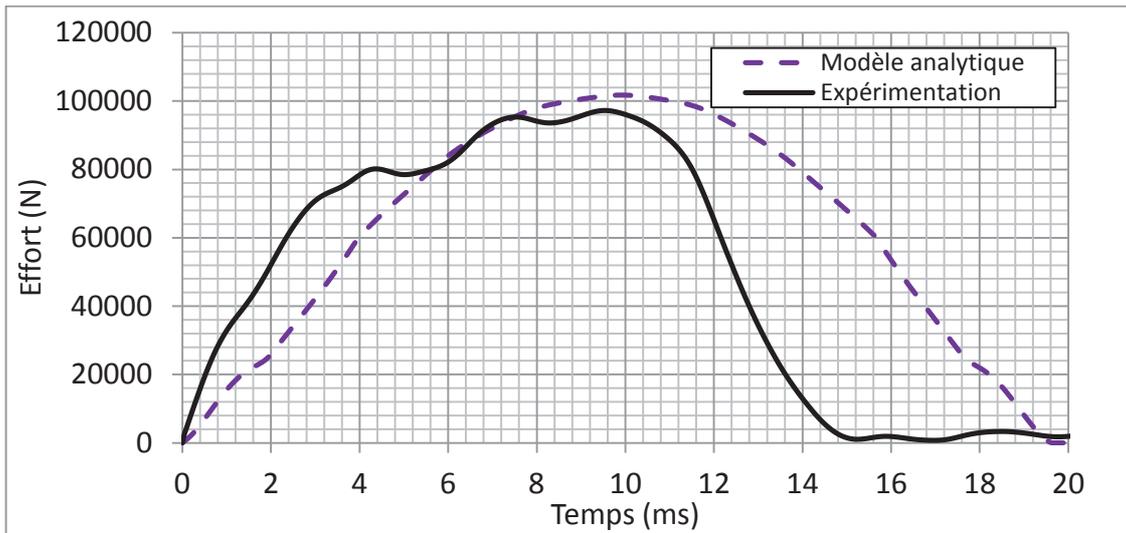


Figure 64 : Evolution de l'effort à l'impact

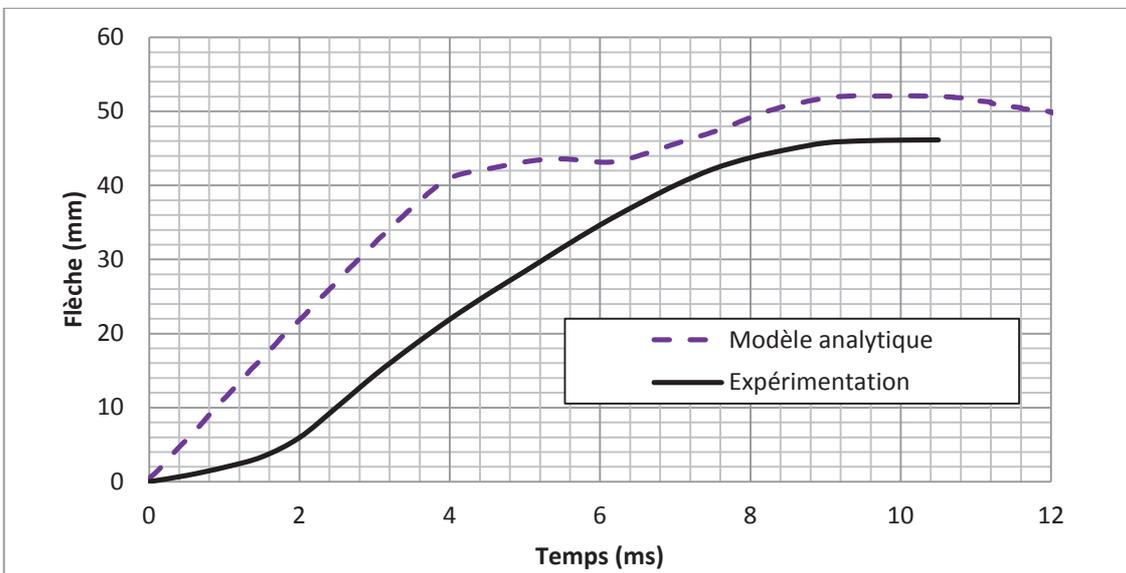


Figure 65 : Evolution de la flèche

Notre modèle surestime légèrement l'effort maximal avec une différence de moins de 5 %. La flèche maximale est surestimée de 13 % par rapport au résultat d'essai tandis que la durée de l'impact est surestimée de 28 %. Ces différences sont dues au fait que le modèle analytique ne prend pas en compte la rupture de la mousse et la plasticité de la plaque arrière qui est importante comme le montre les photos en Figure 63. En effet lors de ces phénomènes, une partie de l'énergie est absorbée ce qui réduit l'effort d'impact et augmente le déplacement en face arrière.

5.4.4. Cas de l'impact sur une protection avec couche anti-perforation en acier

Cet essai a été réalisé à une vitesse de $17,06 \text{ m.s}^{-1}$ et le projectile avait une masse de 48,3 kg. Le sandwich était comme précédemment encastré au niveau de la couche arrière. Il était constitué d'une plaque anti-perforation en acier DP1200 de 1,5 mm d'épaisseur. Les paramètres élastiques de ce matériau sont présentés dans le Tableau 18 et les paramètres de la loi plastique de Ludwig sont résumés dans le Tableau 19. L'âme est la même que dans l'essai précédent, ainsi que la plaque arrière.

Densité (kg/m3)	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson
7800	210	0,3

Tableau 18 : principaux paramètres de l'acier DP 1200

Paramètres de la loi de Ludwig		
A (MPa)	B (MPa)	n
1002,5	645,7	0.25

Tableau 19 : paramètres de la loi de Ludwig de l'acier DP 1200

La Figure 66 présente le résultat expérimental obtenu. On peut constater une fois encore que la plaque supérieure et l'âme sont perforées et la face arrière déformée plastiquement.



Figure 66 : Résultat expérimental – face avant – face arrière

Le critère de rupture de l'acier, est aussi obtenu par la méthode inverse de la partie 5.4.2 précédente. Soit $\epsilon_f = 0,34$.

La Figure 67 présente le résultat obtenu en terme d'effort d'impact et la Figure 68, le résultat obtenu en terme de flèche.

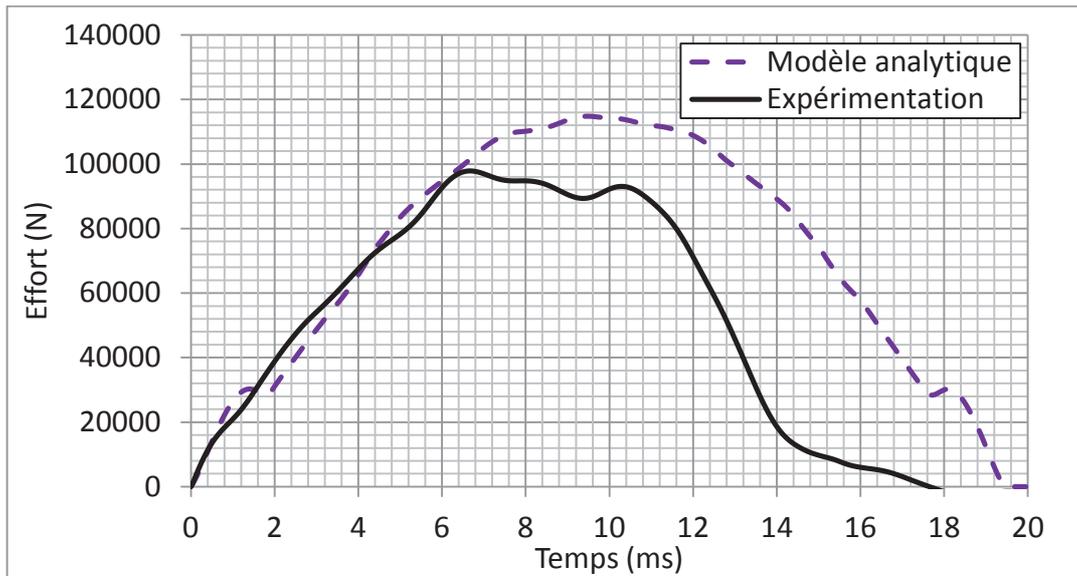


Figure 67 : Evolution de l'effort à l'impact

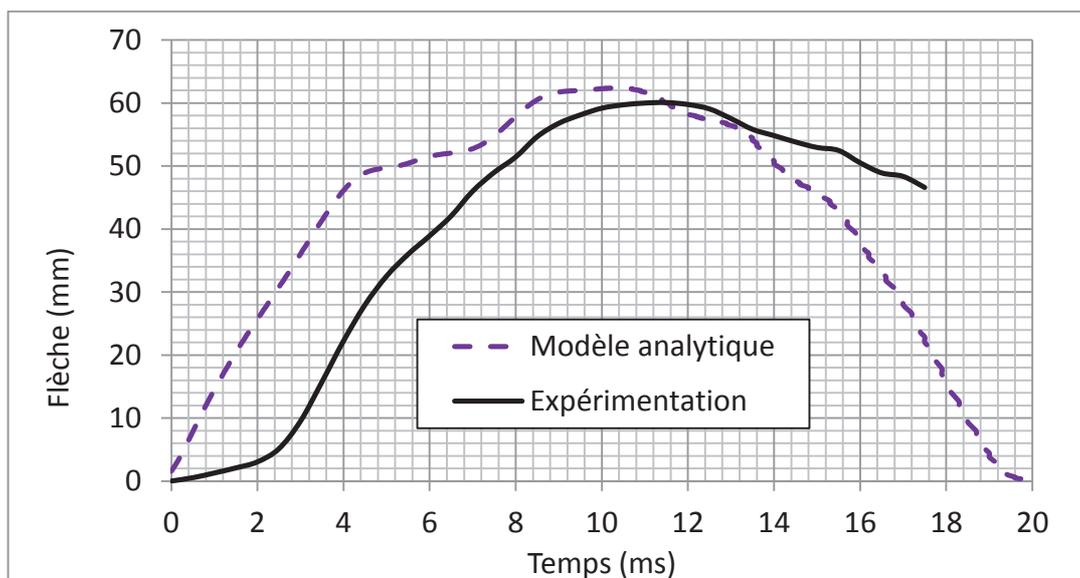


Figure 68 : Evolution de la flèche

Notre modèle surestime l'effort maximal de 17 % par rapport à l'expérimentation et la durée de l'impact de 9 %. La flèche maximale est aussi surestimée de 5 % par rapport au résultat d'essai. De la même manière que pour l'essai précédent, les différences entre l'expérience et notre modèle s'expliquent par le fait que le modèle est simplifié (non prise en compte de la rupture de la mousse et plasticité de la plaque inférieure).

5.4.5. Cas de l'impact sur une protection avec couche anti-perforation en composite

Cet essai a été réalisé à une vitesse de $17,04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et le projectile avait une masse de 48,3 kg. Le sandwich était encastré au niveau de la couche arrière. Il était constitué d'une plaque anti-perforation en paralite 65340 de 6,5 mm d'épaisseur. Le paralite est un composite verre polyester tissé avec 2 plis par millimètre. Les paramètres de ce matériau sont résumés dans le Tableau 20. L'âme et la plaque arrière sont inchangées par rapport aux essais précédents.

Densité (kg/m^2)	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson
2	25	0,3

Tableau 20 : principaux paramètres du composite Paralite

La Figure 69 présente le résultat expérimental obtenu. Le composite est perforé et les pétales sont revenues quasiment à leur position initial du fait du comportement élastique du composite. L'âme est aussi perforée et la face arrière est déformée plastiquement.



Figure 69 : Résultat expérimental – face avant – face arrière

Le critère de rupture utilisé est celui qui a été déterminé par perforation inverse, il vaut $\varepsilon_f=0,43$.

La Figure 70 présente le résultat obtenu en termes d'effort d'impact. L'évolution de la flèche n'ayant pas pu être mesurée car le moyen de mesure a dysfonctionné, seule la flèche maximale obtenue en comparant l'enfoncement maximal du projectile et l'éprouvette post-impact est comparée. Ce résultat est présenté en Figure 71.

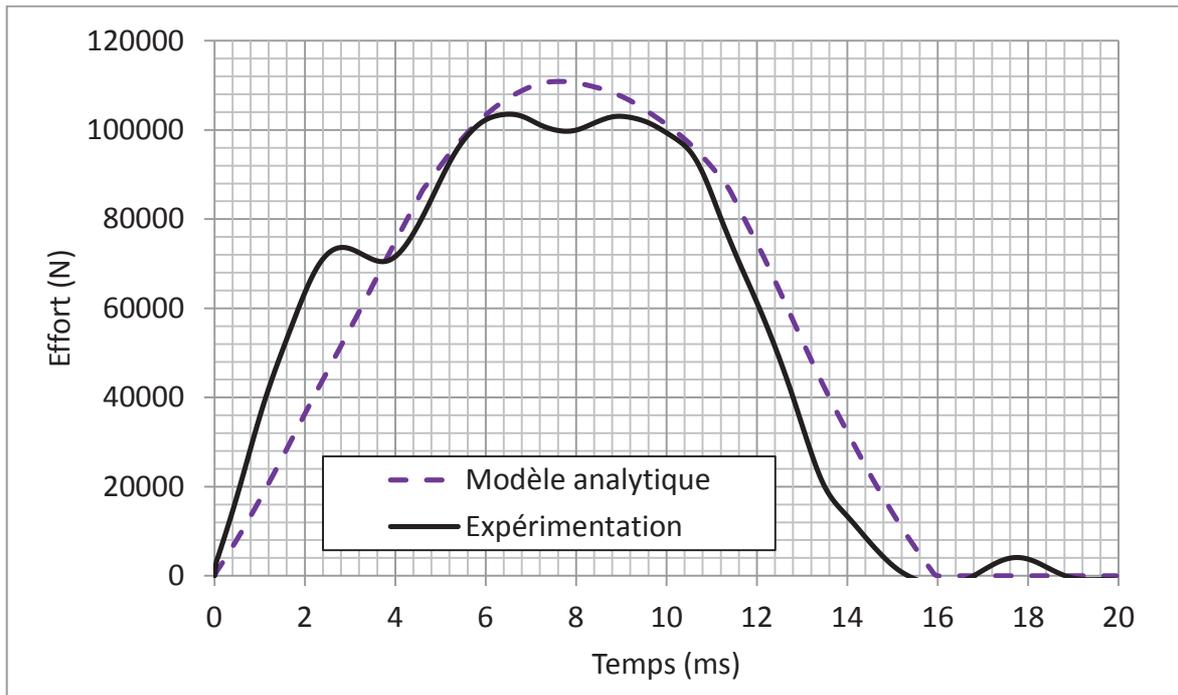


Figure 70 : Evolution de l'effort à l'impact

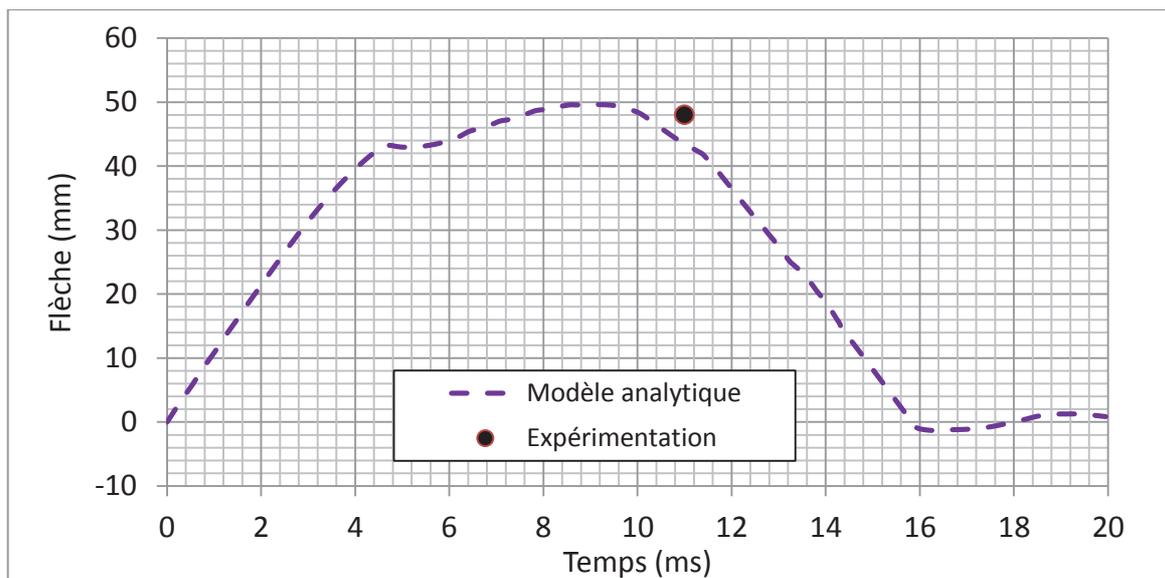


Figure 71 : Flèche en fonction du temps

Pour ce cas, notre modèle donne des résultats en bon accord avec l'expérience. En effet, le modèle surestime l'effort maximal de 7 % par rapport à l'expérimentation et la durée de l'impact est surestimée de 5 %. La flèche maximale est surestimée avec une différence de 4% par rapport à l'expérimentation.

5.4.6. Validation des catégories de choix de matériaux

La Figure 72, présente les résultats expérimentaux présentés précédemment en termes d'effort d'impact en fonction du temps. On remarque que les efforts sont du même ordre de grandeur avec une variation de moins de 6,3 kN sur la valeur de l'effort maximum. La durée de l'impact est la même pour l'éprouvette constituée d'une couche anti-perforation en aluminium et celle constituée d'une couche anti-perforation en Paralite. Dans le cas de l'éprouvette constituée d'une couche anti-perforation en acier, la durée d'impact est plus longue de 14 %. La montée en effort qui est légèrement différente entre les trois éprouvettes est due à la différence d'endommagement de chacune des couches anti-perforations.

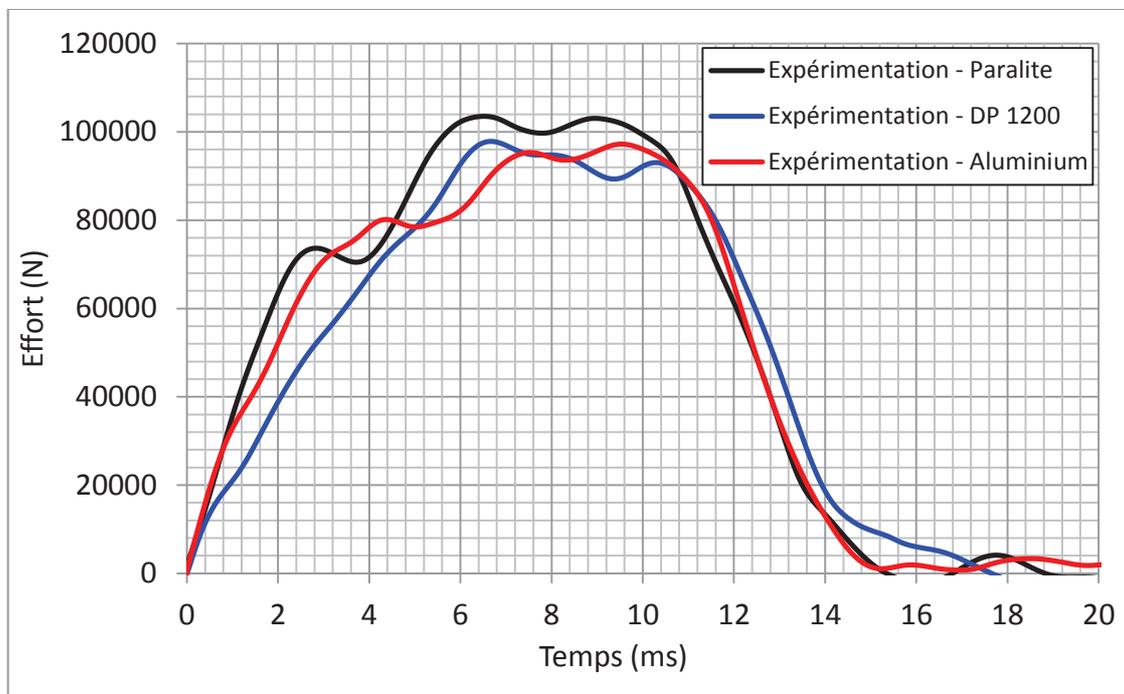


Figure 72 : Effort à l'impact

La Figure 73, présente les résultats obtenus en termes de flèche, en fonction du temps. On constate que la flèche minimale de 46 mm est obtenue pour une protection avec une couche anti-perforation en aluminium. La protection avec une couche supérieure en acier DP 1200, donne une augmentation de flèche maximale de 14 mm par rapport à la protection en aluminium et le paralite une légère augmentation de 2 mm.

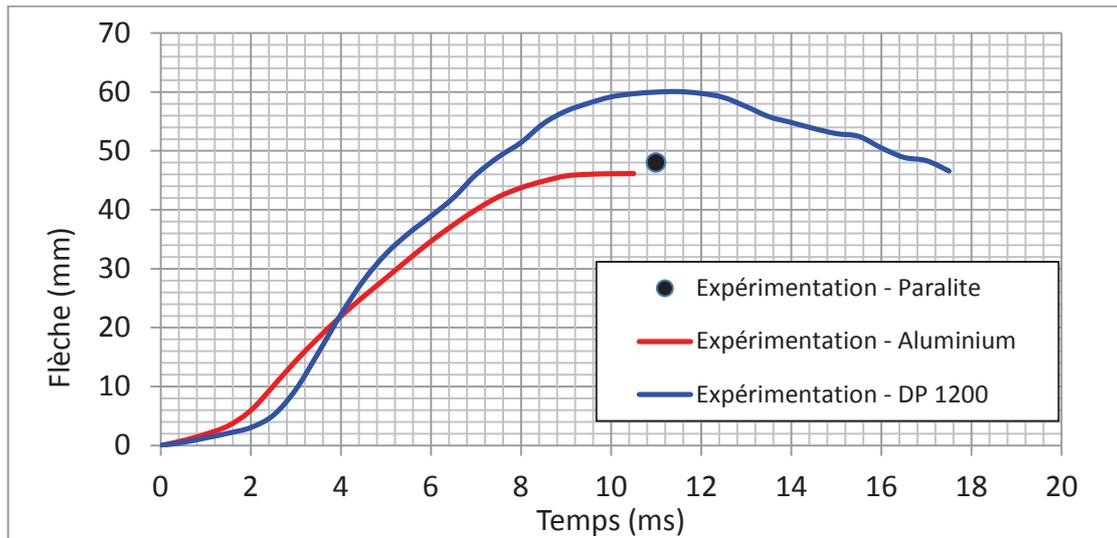


Figure 73 : Evolution de la flèche

Aucune de ses éprouvettes n'ayant été perforée en face arrière, on en conclut que la gamme de matériaux choisie pour la protection face à l'impact d'un projectile à tête pyramidale de 48,3 kg et ayant une vitesse d'impact de 17 m.s^{-1} est bonne. Le sandwich constitué d'une mousse en aluminium et d'une surface anti-perforation en aluminium donne le meilleur résultat par rapport au critère de flèche minimale.

6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une amélioration du modèle d'impact sur plaques élastiques avec la prise en compte de phénomènes locaux tels que la plasticité et la rupture de la couche supérieure impactée, et l'écrasement du matériau cellulaire. Le modèle de plasticité présenté est une modification directe de l'effort de contact. Le modèle de rupture présenté est un critère de déformation limite et le modèle d'écrasement de mousse est basé sur la théorie des barres. Une méthode de détermination expérimentale du critère de rupture est présentée. Elle utilise un système d'impact spécifique associé à une méthode inverse. Ces modèles locaux ajoutés sont corrélés par étapes à une référence éléments finis et à des essais expérimentaux. Ils mettent en valeur la qualité des résultats pour une méthode semi-analytique de pré dimensionnement. Les efforts et flèches ainsi déterminés sont en générales proches de la solution de référence avec une erreur moyenne autour de 10%. Ce modèle permet un gain de temps par rapport à une étude complète par éléments finis et permet de limiter les coûts par rapport à une étude basée sur des essais expérimentaux.

Chapitre IV

OPTIMISATION DES PARAMETRES MATERIAU

1. Introduction

Dans l'approche générale de conception de structures mécaniques soumises aux chocs, une structure est améliorée en évaluant sa réponse et en faisant changer des paramètres dits « *variables de conception* » en se basant sur l'expérience ou sur l'intuition. Cette approche dite "*ingénieur*" ne mène pas souvent au résultat escompté, qui est la meilleure conception, puisque les objectifs à minimiser sont souvent contradictoires, et ce n'est pas toujours aisé de trouver comment changer les paramètres de la structure pour aboutir à un meilleur compromis entre les différents objectifs visés. Une approche plus systématique peut être obtenue en utilisant le processus inverse, c'est à dire en spécifiant en premier les critères à minimiser puis on cherche la « *meilleure conception* » [139]. La procédure par laquelle les critères d'une conception sont traduits comme objectifs ou contraintes dans un problème d'optimisation qui sera ensuite résolu mathématiquement, est connue sous le nom de « *conception optimale* ».

Parmi les différentes méthodes d'optimisation existantes dans l'environnement de conception de structures mécaniques, la méthode de surface de réponse (MSR) [133],[141], qui est une méthode basée généralement sur des considérations statistiques, permettant de construire des approximations locales, par lissage de la vraie fonction (qui est inconnue) dans un espace multidimensionnel. Cette famille de méthodes a connue un grand essor cette dernière décennie. Plutôt que de se baser uniquement sur une information locale telle que le gradient, la MSR se base sur des jeux de variables ou « *plans d'expériences* » (PE) qui sont distribués de façon intelligente partout dans l'espace de conception pour construire des surfaces approchées. D'où, l'effet local causé par tout bruit numérique se trouve allégé, ainsi la MSR permet de trouver une représentation globale de la « *fonction objectif* » (FO) dans l'espace de conception généralement borné ou alors une représentation locale sur une plus petite région d'intérêt potentiel.

Cette extraction d'information globale permet à l'ingénieur d'explorer l'espace de conception, en utilisant des techniques alternatives basées sur des PE. Par exemple, le concepteur peut décider d'analyser l'effet de la variation d'une limitation sur la masse totale de la structure et étudier son effet sur le résultat de la conception optimale finale.

La conception de structures mécaniques soumises aux chocs est plus complexe, dans le sens où elle fait intervenir la notion du temps, avec des transformations mécaniques importantes (plasticité, grandes déformation, rupture, contact avec frottement) sur des durées de temps très courtes [133]-[138]. Afin de faciliter le processus d'optimisation, et permettre au concepteur de se concentrer sur sa mission initiale et d'affiner le résultat de conception, il devient

important de développer des outils et interfaces d'échanges de données pour l'exploitation facile et efficace des informations de communications entre les différents logiciels "boîtes noires".

2. Théorie d'optimisation

L'optimisation peut être définie comme une procédure numérique qui permet « *d'aboutir au meilleur résultat d'une opération donnée en respectant certaines restrictions* ». Cet objectif a toujours été central dans le processus de conception, mais il est devenu de nos jours d'une importance cruciale plus que jamais, à cause de la maturité des méthodes mathématiques et des outils de calculs de structures en comportement non linéaire.

Mathématiquement un problème d'optimisation pour l'ingénieur se présente sous la forme suivante :

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

avec

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4.2)$$

et

$$h_k(\mathbf{x}) \leq 0; \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (4.3)$$

où f , g et h sont des fonctions des variables indépendantes $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$. La fonction f , connue sous le nom de fonction coût ou fonction objectif (FO), identifie la quantité à minimiser ou à maximiser. Les fonctions g et h sont des limitations d'inégalité et d'égalité respectivement, elles représentent des restrictions physiques sur la conception. Les variables définies par le vecteur \mathbf{x} sont souvent connues sous le nom de « *variables de conception* » ou « *paramètres de conception* » [139].

Les deux ensembles de fonctions g_j et h_k définissent les contraintes du problème. Les contraintes d'égalité ne figurent pas dans la formulation ci-dessous car chaque limitation d'égalité peut être exprimée sous forme de deux limitations d'inégalité pour lesquelles les bornes supérieures et inférieures sont identiques.

Le problème d'optimisation devient alors,

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

avec

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0; \quad j=1,2,\dots,m \quad (4.5)$$

Les conditions nécessaires pour la solution optimale \mathbf{x}^* dans (4.4) sont les conditions classiques d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker [139] :

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^T \nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}^T \nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \\ g(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.6)$$

Ces conditions sont obtenues par différentiation de la fonction Lagrangienne du problème d'optimisation sous contraintes

$$L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T g(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

en appliquant les conditions suivantes

$$\nabla^T f \bullet \delta \mathbf{x}^* \geq 0 \quad (4.8)$$

et

$$\nabla^T g \bullet \delta \mathbf{x}^* \leq 0 \quad (4.9)$$

pour une perturbation $\delta \mathbf{x}^*$.

$\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, qui sont non nuls si les contraintes correspondantes sont actives. Pour \mathbf{x}^* un minimum local, le Hessien du Lagrangien doit être défini positif.

3. Résolution du problème d'optimisation

Résoudre le problème de l'optimisation d'une structure soumise aux chocs, exige un algorithme d'optimisation. La liste des méthodes d'optimisation et des différents algorithmes est longue et ne seront pas discutés ici. A cette fin, le lecteur pourra consulter les références et textes classiques sur la théorie d'optimisation, par exemple [133], [141], [143], [139]. Il est a

noté cependant que la méthode de programmation séquentielle quadratique (SQP) est probablement la technique la plus utilisée en optimisation dédiée à la mécanique des structures [143], [139]. Dans ce travail, nous avons utilisé l'algorithme génétique (AG) [144] et l'algorithme SQP pour la recherche de solution optimale. L'AG est très coûteux en temps de calcul, par contre comme il n'est pas basé sur la connaissance de gradients, cela lui permet généralement d'aboutir au minimum global de la fonction à minimiser. Il est de ce fait bien adapté au cas de fonctions très non linéaires. L'algorithme SQP quant à lui, est très rapide et robuste, par contre comme il est basé sur l'utilisation des gradients, il souffre (comme toutes les variantes quasi-newtoniennes) de stagnation autour de minima locaux si la fonction n'est pas convexe.

Ce type d'algorithme ainsi que d'autres ont en commun le fait qu'ils sont basés sur la théorie du premier ordre, c'est-à-dire, ils utilisent les dérivées premières des fonctions objectifs. Ces dérivées peuvent être calculées analytiquement ou numériquement. Pour assurer la convergence de ce type d'algorithmes (tel que SQP), les fonctions à minimiser doivent être continues dérivables.

La différenciation analytique exige la formulation et l'implémentation du calcul des dérivés de la fonction par rapport aux variables de conception directement dans le code de simulation. A cause de la complexité de cette tâche, les dérivées analytiques (ou sensibilités) ne sont pas toujours disponibles.

La différenciation numérique est basée essentiellement sur les méthodes de différences finies qui exigent l'évaluation d'au moins n conceptions perturbées, en plus de la conception initiale courante. Cette technique est simple à implémenter par contre elle reste coûteuse et hasardeuse à cause de la présence des erreurs de troncature. En conséquence, pour les problèmes pratiques, il est souvent difficile de choisir la valeur de la perturbation des variables de conception, sans risquer de grosses erreurs sur les dérivées (la valeur est de l'ordre 10^{-6} multipliée par la valeur de la variable).

C'est pour toutes ces raisons, que les chercheurs ont eu recours aux méthodes d'approximation globales pour lisser la réponse de la conception. La thématique de développement des approximations globales des réponses a connue un grand essor depuis la dernière décennie. Il existe deux grandes familles de méthodes d'approximations globales, à savoir les techniques de construction de surfaces de réponses [133], [141], [134] et la technique des réseaux neuronaux [138].

4. Méthodologie de surface de réponse

On peut définir la MSR comme « *une collection de techniques statistiques et mathématiques pour améliorer et optimiser un processus* ». Bien que les méthodes statistiques ont été établies il y a plusieurs décennies déjà, cependant elle n'ont fait l'objet d'applications concrètes que récemment de façon très active, notamment dans la conception optimale de structures mécaniques [133]. Du fait de l'importance de réduction de poids et la nature multidisciplinaire de la conception de structures aéronautiques complexes, l'application d'optimisation par MSR a connu ses premiers débuts dans l'industrie aérospatiale. Un grand nombre de travaux novateurs sur les MSR ont été menés dans cette discipline et dans d'autres domaines comme celui de la conception mécanique dans les années quatre-vingt-dix [141]. La MSR peut être classée parmi les techniques dites des « *métamodèles* ».

Bien que fondamentalement simple, l'application de la MSR en conception mécanique a été freinée par le coût excessif des simulations et le grand nombre d'analyses exigé dans le cas de plusieurs variables de conception. Au lieu de méthodes rigoureuses, les concepteurs ont traditionnellement eu recours pour améliorer leurs structures à l'intuition et aux essais-corrrections. Cette technique est bien évidemment peu efficace et nécessite souvent des essais manuels intensifs. De plus, les variables d'optimisation sont souvent conflictuelles par rapport aux différentes fonctions coûts, rendant ainsi les méthodes conventionnelles de l'ingénieur, difficiles à appliquer.

4.1. Techniques d'approximation des réponses

La méthode de surface de réponse s'appuie sur le fait que les jeux de variables initialement sélectionnés pour construire les réponses approchées ont été bien choisis. Des tirages aléatoires de jeux de données pour construire des surfaces de réponse, peuvent conduire souvent à de mauvaises réponses. Comme les simulations numériques sont souvent très gourmandes en temps CPU et peuvent dans certaines applications (par exemple la mise en forme) prendre des jours de calculs, l'efficacité du modèle de réponse approché est fortement dépendante des plans de répartition des jeux de variables pour réaliser la meilleure surface de réponse possible. Dans le but de déterminer les bonnes répartitions des jeux de variables, on fait recours généralement à la théorie dite des plan d'expérience (PE). Plusieurs plans d'expériences existent pour construire une réponse pour un jeu de variables. Parmi les PE les

plus populaires, on peut citer : le plan D-optimal, le plan factoriel, le plan latin Hypercube, le plan central composite, le plan Box-Behnken,...

Considérons une seule réponse $y(\mathbf{x})$ dépendante de plusieurs variables \mathbf{x} . La relation exacte entre ces quantités est

$$y = \eta(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

La réponse exacte est maintenant approchée par une nouvelle approximation (par exemple polynomiale) :

$$\eta(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

La fonction d'approximation $f(\mathbf{x})$ est supposée être une somme de plusieurs fonctions de base

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^L a_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

avec L le nombre de fonctions de base ϕ_i utilisées pour approximer le modèle.

Les constantes a_i peuvent être déterminées de façon à minimiser l'erreur quadratique entre la 'vraie' fonction $y(\mathbf{x})$ et le modèle approché $f(\mathbf{x})$ telle que :

$$\sum_{p=1}^P \left\{ \left(y(x_p) - f(x_p) \right)^2 \right\} = \sum_{p=1}^P \left\{ \left(y(x_p) - \sum_{i=1}^L a_i \phi_i(x_p) \right)^2 \right\} \quad (4.13)$$

où P est le nombre de points expérimentaux.

La solution de (4.13) peut être donnée par :

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (4.14)$$

avec \mathbf{X} la matrice suivante :

$$\mathbf{X} = [X_{ui}] = [\phi_i(\mathbf{x}_u)] \quad (4.15)$$

L'étape suivante qui est fondamentale est le choix des fonctions de base appropriées. Un choix très largement utilisé est celui d'une approximation quadratique.

$$\phi = [1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1 x_n, \dots, x_n^2]^T \quad (4.16)$$

4.2. Facteurs influents la précision des SR

Plusieurs facteurs déterminent la précision d'une surface de réponse [141].

- La taille du domaine : la taille du domaine influe beaucoup sur la précision d'une réponse, plus le domaine est petit, mieux est l'approximation. Dans le problème général, il y a une limite minimale en dessous de laquelle il n'y a plus aucun gain de précision sur la fonction. En dessous de cette valeur, la variabilité de la réponse devient insensible à la présence de bruit numérique.
- Le choix des fonctions d'approximation : les fonctions de haut degré d'approximation sont généralement plus précises que les fonctions d'ordre inférieur. Dans la pratique, l'usage de fonctions de haut degré polynomial peut produire des résultats néfastes, dans le sens où toute extrapolation peut donner des résultats catastrophiques.
- Le nombre et la distribution des points d'évaluation : pour la plupart des problèmes, plus le nombre de points du PE est important plus la précision de la prédiction de la surface de réponse est meilleure.

4.3. Méthode de SR basée sur les Moindres Carrés

La méthode de SR basée sur les Moindres Carrés (SR-MC), comme toutes les autres méthodes de SR, est basée sur l'approximation de la fonction implicite (inconnue) qui provient de calculs EF souvent très coûteux, par une fonction réponse ou surface de réponse polynomiale le plus souvent quadratique de la forme :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{a} \quad (4.17)$$

Ici $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ représente le vecteur de la base d'approximation polynomiale, qui peut être linéaire, quadratique, etc. Dans le cas quadratique il s'écrit :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \left\{ 1, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_1 \Delta x_2, \Delta x_1 \Delta x_3, \dots, \frac{\Delta x_1^2}{2}, \frac{\Delta x_2^2}{2}, \dots \right\}^T \quad (4.18)$$

avec $\Delta x_i = x_i - x$. Le vecteur \mathbf{a} dans (4.17) représente ce qu'on appelle les paramètres généralisés. Ils seront discutés plus tard. Dans le cas quadratique, l'expression (4.17) peut aussi se mettre sous la forme générale :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = c + \mathbf{b}^T \bullet \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} \quad (4.19)$$

avec $\Delta \mathbf{x} = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N\}^T$, \mathbf{b} représentant le gradient de $\tilde{f}(\mathbf{x})$ et \mathbf{H} son Hessien.

$$\mathbf{b} = \left\{ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_N} \right\}^T ; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_2^2} & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Les éléments qui constituent les opérateurs \mathbf{b} et \mathbf{H} sont tous rassemblés dans le vecteur \mathbf{a} .

Dans le cas de deux variables, la fonction $\tilde{f}(\mathbf{x})$ peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \left\langle 1 \quad \Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \frac{\Delta x_1^2}{2} \quad \Delta x_1 \Delta x_2 \quad \frac{\Delta x_1^2}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Les coefficients \mathbf{a} sont déterminés par la méthode des moindres carrés pondérée en minimisation l'erreur suivante :

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^L \omega_i [f_i - \mathbf{P}(x_i - x) \bullet \mathbf{a}]^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \mathbf{P} \mathbf{a})^T (\mathbf{F} - \mathbf{P} \mathbf{a}) \quad (4.22)$$

avec L le nombre de points expérimentaux du voisinage, ω_i sont des fonctions de pondération, elles jouent un rôle important dans le sens où elles permettent le lissage local de la surface de réponse de façon plus ou moins accentuée. Les fonctions ω_i assurent également la continuité de l'approximation et sont choisies telles que $\omega_i > 0$ à l'intérieur du domaine d'influence du point expérimental x_i et $\omega_i = 0$ ailleurs. Plusieurs expressions de fonctions de pondération ont été établies [133], elles peuvent être polynomiales, trigonométriques, exponentielles, etc.

Le domaine d'influence est choisi assez restreint pour assurer la localité de l'approximation, mais suffisamment grand pour que l'approximation soit définie en tout point en évitant ainsi les minimas locaux. Dans la pratique on prendra un domaine d'influence allant de $1/50^{\text{ème}}$ jusqu'au $1/10^{\text{ème}}$ du domaine total de recherche.

La minimisation de $J(\mathbf{a})$ donne : $\nabla J(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{z}$ (4.23)

avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{P}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T(x_1 - x) \\ \vdots \\ \mathbf{P}^T(x_L - x) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

4.4. Méthode de SR basée sur les Moindres Carrés Mobiles

Dans le cas d'utilisation de Surface de Réponse basée sur les Moindres Carrés Mobiles (SR-MCM), il devient nécessaire d'utiliser des fonctions de lissage pour permettre la continuité de la surface globale qui cette fois-ci est construite par morceaux en faisant bouger l'approximation locale dans l'espace des variables d'optimisation. Plusieurs fonctions poids $\omega(r)$ de lissage existent (polynomiales, gaussienne, etc.), cependant celle qui a été retenue dans notre travail est :

$$\omega(r, r_i) = \exp(-\beta(r - r_i)^2) \quad (4.25)$$

avec r_i la position du point actuel, r est la position d'un point d'échantillonnage se trouvant à l'intérieur du domaine local de construction de la surface mobile.

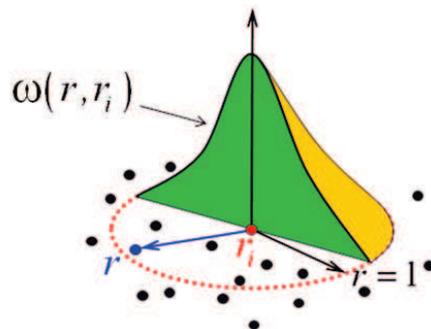


Figure 74 : Fonction poids (ou de lissage) utilisée dans la SR-MCM

Dans ce cas, l'équation (4.24) devient :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (4.26)$$

Avec :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \omega(r_1 - r) & & & 0 \\ & \omega(r_2 - r) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega(r_L - r) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

4.5. Méthode de SR basée sur le krigeage

Comme avec les précédentes techniques d'approximation par SR, la technique du krigeage consiste à construire des approximations en utilisant les valeurs de la fonction de réponse aux points d'échantillonnage du PE. La technique du krigeage a été initialement développée dans le domaine de la géostatistique par son inventeur, l'ingénieur minier sud-africain D.G. Krige [144]. Dans les années 50, Krige a développé une série de méthodes statistiques [146], afin de déterminer la distribution spatiale de minerais à partir d'un ensemble de forages. C'est cependant le français Matheron [147] qui a formalisé l'approche en utilisant les corrélations entre les forages pour en estimer la répartition spatiale. C'est lui qui a baptisé la méthode « Krigeage ». Il a aussi été le premier à utiliser le terme « géostatistiques » pour désigner la modélisation statistique de données spatiales.

Une fonction d'approximation, construit à l'aide du krigeage, a la propriété qu'elle respecte la fonction de réponse originale aux points d'échantillonnage du PE, puisque cette approche génère un modèle d'interpolation. Cela rend la technique appropriée pour la modélisation de problèmes dont les réponses sont fortement non linéaires qui ne contiennent pas de bruits numérique.

La Figure 75 compare le modèle de krigeage à celui d'une surface de réponse polynomiale quadratique, pour le cas une fonction à une variable. Comme nous pouvons le remarquer, une régression au sens des moindres carrés permet le lissage des données, tandis que le krigeage interpole les points de l'échantillonnage.

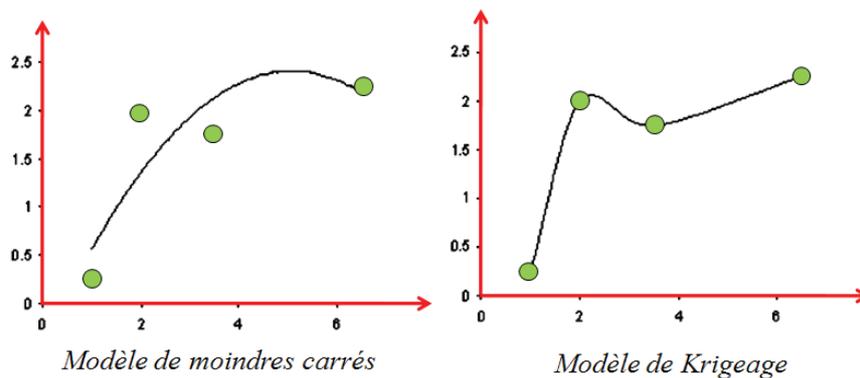


Figure 75 : Comparaison du modèle de Krigeage et celui des moindres carrés

Le krigeage peut être assimilé à l'interpolation par des fonctions de base radiales ou par des splines.

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(\mathbf{x}_i) \quad (4.28)$$

Le Krigage consiste alors à calculer les poids ω_i de l'équation (4.28) à l'aide des valeurs de la fonction semi-variogramme $\mathfrak{g}(h)$ correspondant aux $n(h)$ points choisis.

$$\mathfrak{g}(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} (x_i - y_i)^2 \quad (4.29)$$

Il existe trois types de Krigage : le Krigage simple (variable stationnaire de moyenne connue), le Krigage ordinaire (variable stationnaire de moyenne inconnue) et le Krigage universel (variable non-stationnaire). La différence entre ces types d'estimation réside dans la connaissance de la statistique de la variable à interpoler. Il existe une littérature abondante sur le sujet, le lecteur pourra trouver plus de détails dans le livre de J. Goupy [150].

5. Plans d'expériences

Le plan d'expérience est la procédure de sélection des points d'évaluation dans l'espace de conception. Plusieurs PE existent dans la littérature [150]. Le plan factoriel, central composite, Latin Hypercube, D-Optimal, Box-Behnken, etc. Nous donnons ici seulement un aperçu des PE factoriel, central composite et celui de latin Hypercube, pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la référence [150].

5.1. Plan factoriel complet 3^k

Ce plan est formé par toutes les combinaisons des niveaux : minimum, milieu et maximum de k facteurs. Le nombre d'essais est 3^k . Le PE factoriel complet est simple et possède de très bonnes propriétés statistiques par contre il est très coûteux, le nombre de calculs est toujours 3^k . Le PE factoriel complet est valable pour représenter tout modèle comprenant des termes du type $x_1^{a_1} \times x_2^{a_2} \times \dots \times x_k^{a_k}$ où a_i peut être 0, 1 ou 2. Par exemple : x_i , x_i^2 , $x_i x_j$, $x_i x_j x_k$, $x_i^2 x_j \dots$

La Figure 76 représente le PE factoriel en deux et en trois dimensions (2, 3 variables).

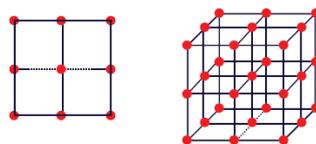


Figure 76 : Plan d'expérience factoriel à 2 et 3 variables

5.2. Plan central composite

Un plan composite centré à k facteurs est composé de (voir Figure 77) :

- N_f essais d'un plan factoriel complet ou fractionnaire 2^{k-r}
- $2k$ essais en étoile sur les axes à une distance du centre du domaine
- N_0 essais au centre du domaine

En général il est associé à des modèles quadratiques. Son coût est égal à : $N = 2^{k-r} + 2k + N_0$

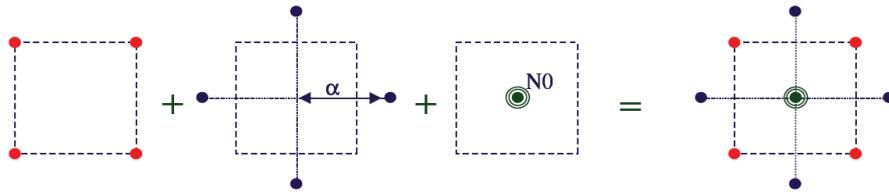


Figure 77 : Plan d'expérience central composite à 2 variables

Pour bien choisir les paramètres du PE central composite, on doit respecter quelques règles simples :

- Choisir un plan factoriel de résolution $r = 5$. Pour $k < 5$, mettre $r = 0$.
- Le choix du paramètre distance α dépend des propriétés statistiques désirées pour le plan (α peut être égal à 1 ou \sqrt{k} , ...).
- Choisir $N_0 > 1$ pour pouvoir estimer la variance expérimentale en fonction des propriétés statistiques désirées pour le plan.

Il est à noter également qu'un plan composite de base a ses essais sur les axes hors du domaine $(-\alpha, +\alpha)$. Il est d'usage de le remettre à l'échelle. Pour le choix du paramètre α plusieurs valeurs peuvent être prises, par exemple :

- $\alpha = 1$, les essais sont effectués sur les faces du cube. C'est un choix commode, les facteurs n'ont alors que trois niveaux de variation $(-1, 0, 1)$.
- $\alpha = \sqrt{k}$, les essais sont effectués sur une sphère de rayon \sqrt{k} .
- $\alpha = \sqrt[4]{N_f}$, ce choix est utilisé quand on est en phase de prédiction, il assure l'isovariance par rotation (rotabilité) du plan pour l'estimation d'un modèle d'ordre 2.

- $\alpha = \left(\frac{\sqrt{N_f \times N} - N_f}{2} \right)^{1/2}$, ce choix est utilisé quand on est en phase d'estimation, il assure l'orthogonalité des estimateurs.

Pour le choix du paramètre N_0 , deux possibilités existent :

- $N_0 > 1$, choisi par l'expérimentateur en fonction de ses ressources de calcul,
- $N_0 = 4\sqrt{N_f} + 4 - 2k$, ce choix permet d'assurer l'orthogonalité et la rotabilité.

5.3. Plan latins Hypercubes

La méthode d'échantillonnage par hypercube latin (Mac Kay, Conover, Beckman, 1979) a été introduite pour évaluer numériquement les intégrales multiples. Elle permet d'assurer la non redondance de l'information au travers d'une bonne répartition des projections sur les axes factoriels. En pratique, les hypercubes latins sont très utilisés en planification d'expériences numériques notamment pour leur simplicité d'usage et de construction.

Chaque axe $(0,1)$ du cube unité est découpé en n segments de même longueur de la façon suivante $\left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right), \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right), \dots, \left(\frac{n-1}{n}, 1 \right) \right\}$. En faisant le produit cartésien de ces intervalles, on obtient un maillage de n^d cellules de même taille. Ensuite, on choisit n cellules parmi les n^d possibles de telle manière que les cellules des marges de dimension 1 soient représentées une fois chacune. Enfin, on tire un point au hasard dans chaque cellule présélectionnée.

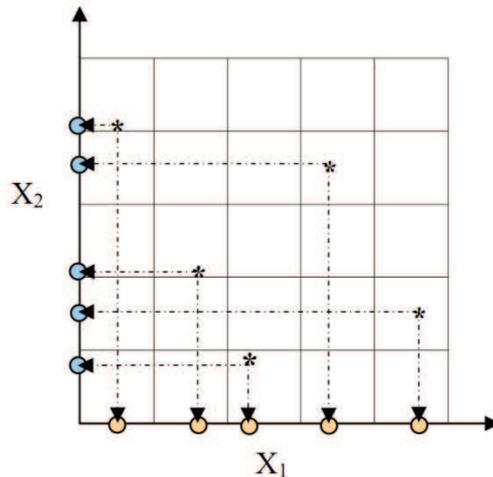


Figure 78 : Plan latin Hypercube à 5 points

Les points d'un hypercube latin ont la propriété intéressante d'être uniformément distribués sur les axes factoriels (voir Figure 78). Cependant, cette propriété n'assure pas l'uniformité des points sur tout le domaine expérimental. Pour n fixé, il existe $n!$ permutations possibles pour chacune des d colonnes, et donc $(n!)^{d-1}$ hypercubes latins éventuels qui n'assurent pas tous l'uniformité des points dans l'espace. C'est le cas par exemple de l'hypercube latin où les points sont placés sur l'une des diagonales du domaine expérimental. Si le processus réel est une fonction de $(x_2 - x_1)$, alors l'information donnée par ce plan d'expériences se réduit à 1 point au lieu de 5.

Dans le cas où le nombre de points du PE est réduit, il sera fréquent d'obtenir des plans où l'on peut observer des zones lacunaires et des agglomérats de points comme on peut l'observer sur la Figure 79.

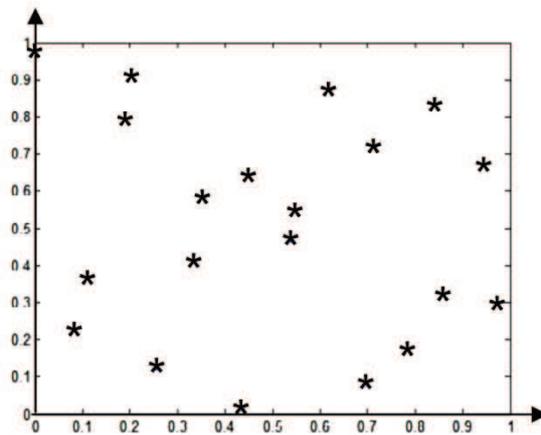


Figure 79 : Exemple de plan hypercube latin à 20 points

Pour pallier ces problèmes, il existe deux possibilités. La première consiste à construire les $(n!)^{d-1}$ hypercubes latins possibles et de choisir le meilleur à l'aide d'un critère de sélection. Cependant, cette méthode n'est pas envisageable du fait du grand nombre d'hypercubes latins à générer, même si construire un hypercube latin demande peu de temps d'exécution. La deuxième possibilité, plus réaliste, consiste à générer un hypercube latin et à lui appliquer un critère afin de le rendre meilleur au sens des exigences souhaitées.

On peut chercher par exemple à améliorer le critère de corrélation. L'objectif est alors de construire un hypercube latin orthogonal pour les effets principaux, voire plus si possible. On peut citer Kenny (1998), Tang (1998) et Owen (1994).

Il est aussi possible d'appliquer des critères d'uniformité, ce qui revient à sélectionner un hypercube latin ayant de bonnes propriétés d'uniformité. De nombreuses références sont disponibles sur ce sujet : Johnson et al. (1990), Fang et al. (1994), Fang et Zhu (1993). Park (1994) propose une construction, basée sur un algorithme d'échanges, d'hypercubes latins optimaux quel que soit le critère.

6. Application à l'optimisation d'une structure de protection

6.1. Position du problème

La structure étudiée est une plaque sandwich de $1m \times 1m$ d'épaisseur totale $53,8mm$ (Figure 80). La plaque inférieure est en acier doux d'épaisseur $h_3=0,8mm$, le cœur est en mousse d'aluminium $h_2=50mm$, la plaque anti-perforation d'épaisseur $h_1=3mm$ est en aluminium.

Les caractéristiques mécaniques des trois matériaux constituant la plaque sont récapitulées dans le Tableau 21.

Matériau	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)	A (MPa)	B (MPa)	n
Acier	210	0,3	7833	1002,5	645.7	0.250
Mousse d'aluminium	0,2	0	410	2,0	--	--
Aluminium	69	0,3	2600	67,45	471.24	0.424

Tableau 21 : Paramètres matériau de la plaque initiale

La structure est soumise à une charge d'impact de $50kg$ à une vitesse de $17m/s$ en son centre. Dans le modèle numérique utilisé, la structure est considérée comme simplement supportée sur ses quatre bords, puisque seule la plaque inférieure d'acier est fixée.

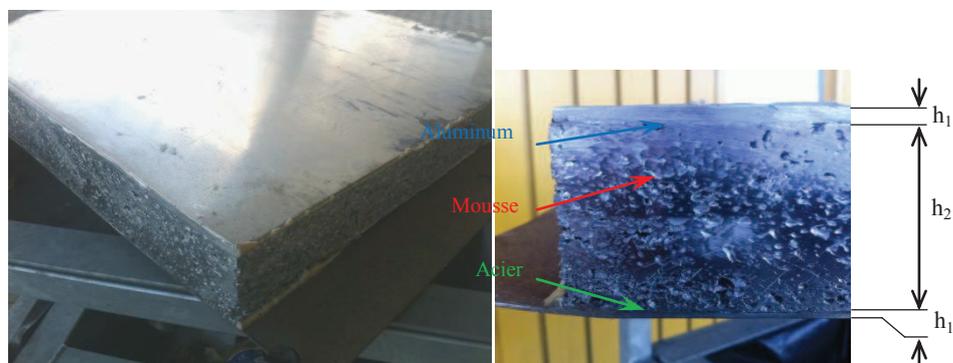


Figure 80 : Paramètres géométriques et de matériau de la plaque

La solution numérique a été obtenue au chapitre précédent, pour le jeu de paramètres de matériau initiaux donnés dans le Tableau 21. L'idée à travers ce chapitre est de chercher une solution optimale de paramètres matériau à utiliser afin de minimiser la flèche globale de la plaque au point d'impact tout en respectant trois contraintes : une masse maximale de 27 kg/m^2 , une épaisseur maximale du cœur et de la plaque anti-perforation de 55mm ainsi que la non perforation de la plaque d'acier.

Pour ce problème de conception, nous avons choisi 7 variables $\mathbf{x} = \{h_1, h_2, E_1, A_1, B_1, n_1, \varepsilon_{r1}\}$ d'optimisation qui sont : l'épaisseur h_1 de la plaque anti-perforation, l'épaisseur h_2 de la mousse d'aluminium, ainsi que les paramètres matériau de la plaque anti-perforation (module d'Young E_1 , limite d'élasticité A_1 , les paramètres d'érouissage B et n ainsi que la limite à la rupture ε_{r1}). Des bornes minimales et maximales ont été imposées pour chaque variable de conception $x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max}$, en se basant sur des considérations physiques. Les valeurs numériques de ces limitations sur les variables de conception sont résumées ci-dessous

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.5 \text{ mm} \leq h_1 \leq 10 \text{ mm} \\ 30 \text{ mm} \leq h_2 \leq 55 \text{ mm} \\ 20 \text{ GPa} \leq E_1 \leq 250 \text{ GPa} \\ 50 \text{ MPa} \leq A_1 \leq 120 \text{ MPa} \\ 10 \text{ MPa} \leq B_1 \leq 700 \text{ MPa} \\ 0.01 \leq n_1 \leq 0.5 \\ 0.01 \leq \varepsilon_{r1} \leq 0.5 \end{array} \right. \quad (4.30)$$

La fonction objectif choisie est la flèche maximale $w^p(\mathbf{x})$ de la plaque au point d'impact normalisée à sa valeur maximale sur tout le PE, le problème d'optimisation peut s'écrire :

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) = w^{\text{plaque}} / w^{\text{max}}$$

$$\mathbf{x} = \{h_1, h_2, E_1, A_1, B_1, n_1, \varepsilon_{r1}\}$$

avec les contraintes :

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = \text{masse}(\mathbf{x})/27 - 1 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) = (h_1 + h_2)/55 - 1 \leq 0 \\ g_3(\mathbf{x}) = \text{Indentation}(\mathbf{x})/55 - 1 \leq 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

et

$$\begin{cases} 0.5 \leq h_1 \leq 10 \\ 30 \leq h_2 \leq 55 \\ 20 \leq E_1 \leq 250 \\ 50 \leq A_1 \leq 120 \\ 10 \leq B_1 \leq 700 \\ 0.01 \leq n_1 \leq 0.5 \\ 0.01 \leq \varepsilon_{r1} \leq 0.5 \end{cases}$$

Notons également que pour le calcul de la première limitation $g_1(\mathbf{x})$ dans (4.31), nous introduisons une relation entre le module d'élasticité et la densité en se basant sur les données matériau que nous possédons, à savoir : le Paralite ($E=25\text{GPa}$, $d=2000\text{kg/m}^3$), l'aluminium ($E=69\text{GPa}$, $d=2600\text{kg/m}^3$) et l'acier DP1200 ($E=210\text{GPa}$, $d=7800\text{kg/m}^3$). La Figure 81 montre une relation quadratique obtenue par simple interpolation des trois valeurs physiques. Nous pouvons ainsi lier le module d'élasticité E (en GPa) à la densité de matériau d (en kg/m^3) par la relation :

$$d = 0.125E^2 + 1.826E + 1875 \quad (4.32)$$

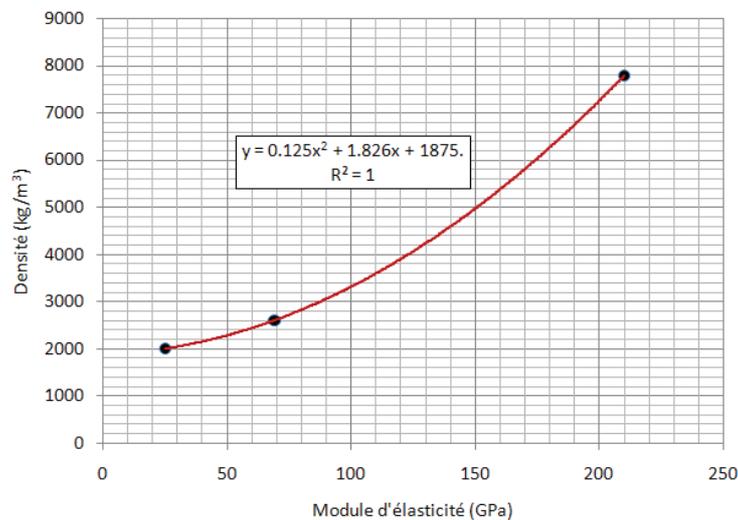


Figure 81 : Relation densité-module d'élasticité

6.2. Solution avec un PE hypercube latin à 200 points

Un premier PE de type hypercube latin à 200 points est généré. On donne sur la Figure 82 la matrice de corrélations linéaires des variables utilisées. Comme on peut l'observer les variables choisies $\{h_1, h_2, E_1, A_1, B_1, n_1, \varepsilon_{r1}\}$ n'ont pas de dépendances les unes avec les autres.

On peut observer également à la première ligne de la matrice de corrélation, que les variables h_1, E_1 ont une grande influence sur la flèche maximale de la plaque. A la ligne 2 on peut remarquer que les variables h_1, h_2, E_1 ont comme prévu une influence importante sur la contrainte de masse. A la quatrième ligne on peut observer que h_1, E_1, A_1, n_1 influent énormément sur la contrainte de non perforation de la plaque. Ceci peut s'expliquer par le fait que justement le paramètre h_1 représente l'épaisseur de la plaque anti-perforation qui est la quantité de matière « à consommer » avant perforation.

	Flèche	Densité	Epaisseur	Indentation	h1	h2	E1	A1	B1	n1	Epsilon_r1
Flèche	1	0.7	0.2	-0.8	0.7	-0.06	0.6	0.1	-0.1	-0.05	-0.07
Densité	0.7	1	0.4	-0.5	0.7	0.2	0.7	-0.04	-0.1	0.07	0.02
Epaisseur	0.2	0.4	1	-0.2	0.4	0.9	0.1	-0.08	-0.006	0.04	-0.09
Indentation	-0.8	-0.5	-0.2	1	-0.7	0.05	-0.2	-0.4	-0.06	0.2	0.007
h1	0.7	0.7	0.4	-0.7	1	0.04	0.07	-0.05	-0.2	-0.05	-0.04
h2	-0.06	0.2	0.9	0.05	0.04	1	0.1	-0.07	0.05	0.06	-0.08
E1	0.6	0.7	0.1	-0.2	0.07	0.1	1	0.02	-0.08	0.1	0.01
A1	0.1	-0.04	-0.08	-0.4	-0.05	-0.07	0.02	1	-0.0007	-0.07	0.05
B1	-0.1	-0.1	-0.006	-0.06	-0.2	0.05	-0.08	-0.0007	1	0.02	0.05
n1	-0.05	0.07	0.04	0.2	-0.05	0.06	0.1	-0.07	0.02	1	0.05
Epsilon_r1	-0.07	0.02	-0.09	0.007	-0.04	-0.08	0.01	0.05	0.05	0.05	1

Figure 82 : Matrice des corrélations linéaires

Les autres paramètres constituent les données matériau qui rentrent dans la formule d'énergie de déformation plastique de la plaque anti-perforation.

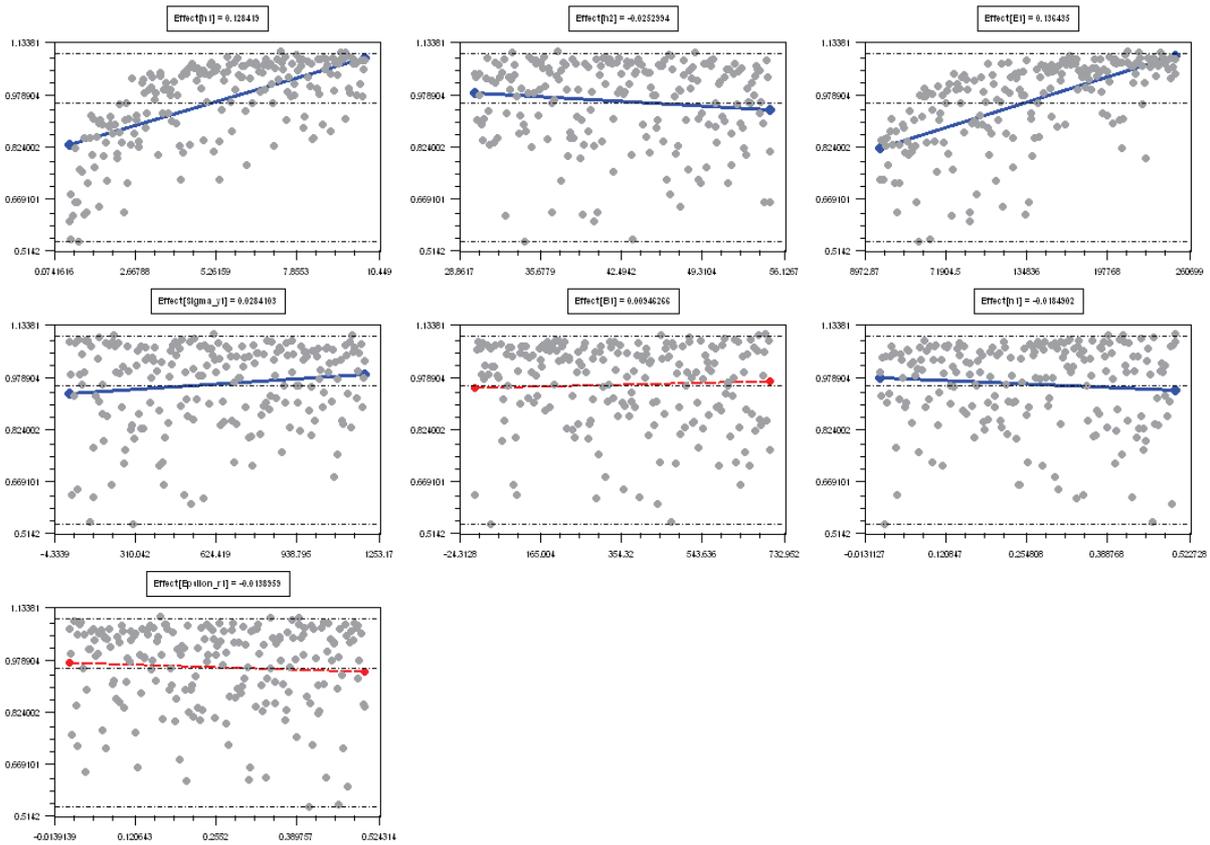


Figure 83 : Diagrammes des effets des variables sur la FO (flèche maximale)

Sur la Figure 83, on peut voir sur les diagrammes des effets des variables sur la flèche maximale de plaque que seules les variables h_1, E_1 ont une influence significative sur cette dernière. Ceci a été noté également sur la matrice de corrélations linéaires. On peut noter également que les variables B_1, ε_{r1} n'ont pratiquement pas d'influence sur la flèche maximale de la plaque.

On donne sur la Figure 84 les diagrammes des effets des variables $\{h_1, h_2, E_1, A_1, B_1, n_1, \varepsilon_{r1}\}$ sur la contrainte de non perforation de la plaque. Comme on peut le constater la variable h_1 (épaisseur de la plaque anti-perforation) a une influence énorme sur la contrainte de non perforation, plus cette dernière est petite est plus le risque de perforation de la plaque est grand. D'autres paramètres ont une influence non négligeable sur la contrainte de non perforation, à savoir E_1, A_1, B_1 qui sont, de plus, inversement proportionnels à cette même contrainte. La variable n_1 quant à elle est directement proportionnelle à la contrainte de non perforation de la plaque. Les variables h_2, ε_{r1} n'ont quasiment aucune influence sur la contrainte de non perforation de la plaque.

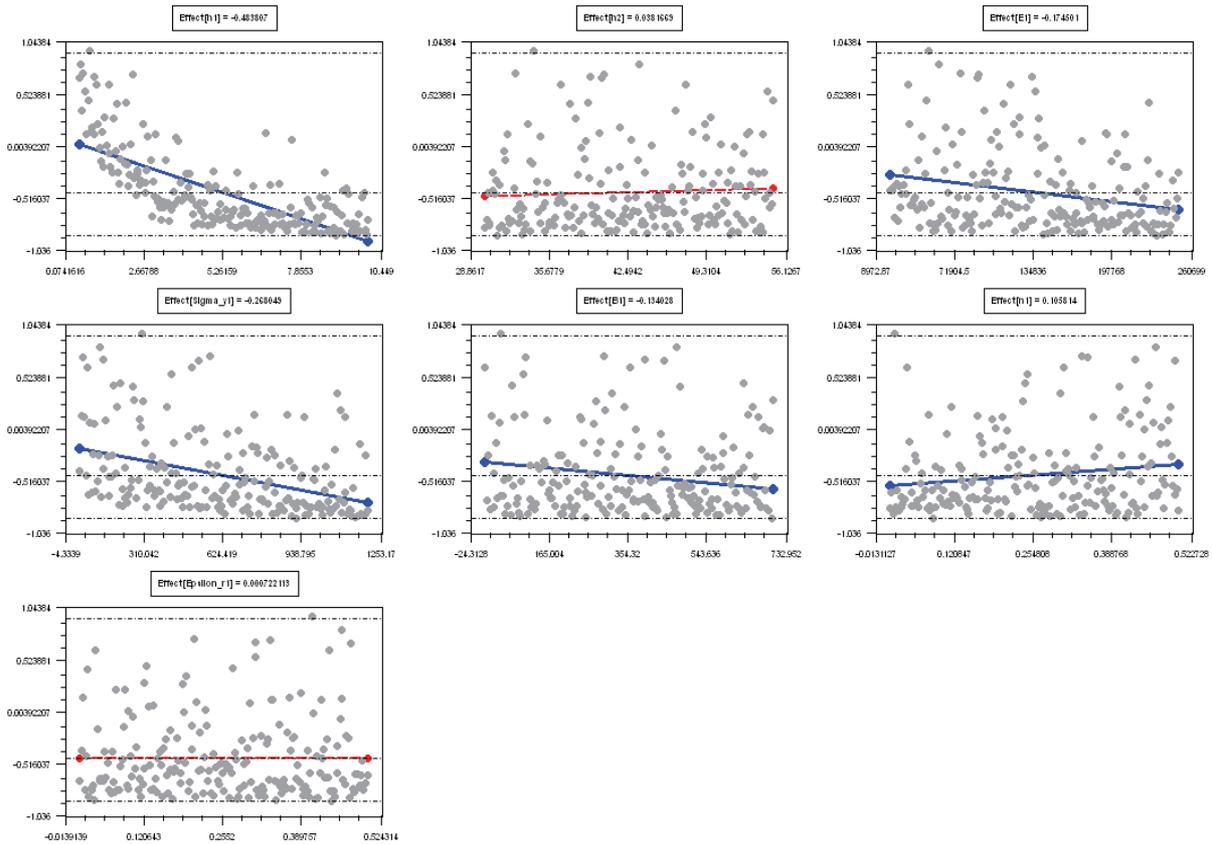


Figure 84 : Diagrammes des effets des variables sur la contrainte de non perforation

6.2.1. SR basée sur les Moindres Carrés (SR-MC)

Dans un premier temps des approximations par surfaces de réponse quadratiques basées sur la technique des moindres carrés (SRMC) ont été utilisées pour décrire la FO et la contrainte anti-perforation. Les contraintes sur la masse et sur l'épaisseur maximale quant à elles sont approchées par deux surfaces de réponses linéaires toujours en utilisant la technique des moindres carrés. Sur le Tableau 22 sont résumés les degrés d'approximation par surfaces de réponses les différentes contraintes ainsi le coefficient de corrélation global R^2 .

	Degré polynomial	coefficient de corrélation R^2
FO flèche maximale	2	0.9422
Contrainte de non perforation	2	0.9708
Contrainte de masse maximale	1	0.9973
Contrainte d'épaisseur maximale	1	1.0000

Tableau 22 : Niveau de corrélation des surfaces de réponses utilisées

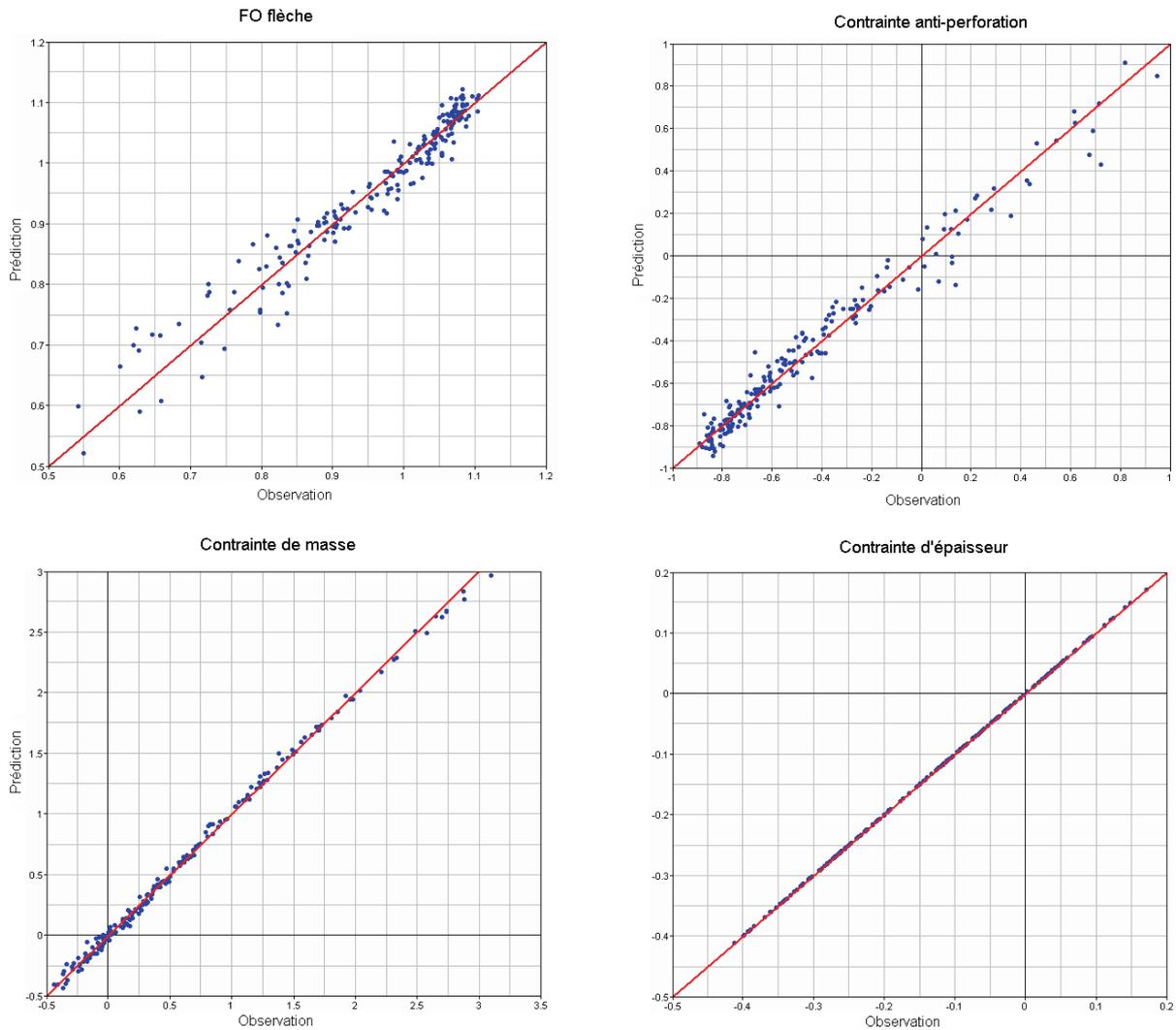


Figure 85 : Diagrammes de corrélations des quatre métamodèles utilisés

Sur la Figure 85 sont données les diagrammes de corrélations des quatre métamodèles utilisés pour approcher la fonction objectif et les 3 limitations. Nous remarquons que le niveau de corrélation est relativement correct, ce qui nous permet d'utiliser ces différents métamodèles avec confiance pour déterminer la solution optimale de notre problème.

Sur la Figure 86, sont représentées les évolutions de la fonction objectif et des trois limitations en fonction de la variable h_1 , tout en fixant les six autres paramètres aux valeurs numériques de l'aluminium. Comme nous pouvons le voir, les deux contraintes de masse maximale et de critère de non perforation sont antagonistes et théoriquement, il n'existe pas de solution optimale pour ce cas. Néanmoins si l'on admet une erreur de 10% sur la masse ainsi que sur le critère de non perforation, alors il existe une solution, représentée sur le graphique par

l'intersection des deux courbes de masse et du critère de non perforation (point rouge). Cette solution correspond à une épaisseur de plaque anti-perforation de 3,5 mm, valeur très proche de la valeur d'épaisseur choisie expérimentalement qui est de 3 mm. La flèche relative enregistrée pour le cas d'une épaisseur de 3.5mm est de 0,77.

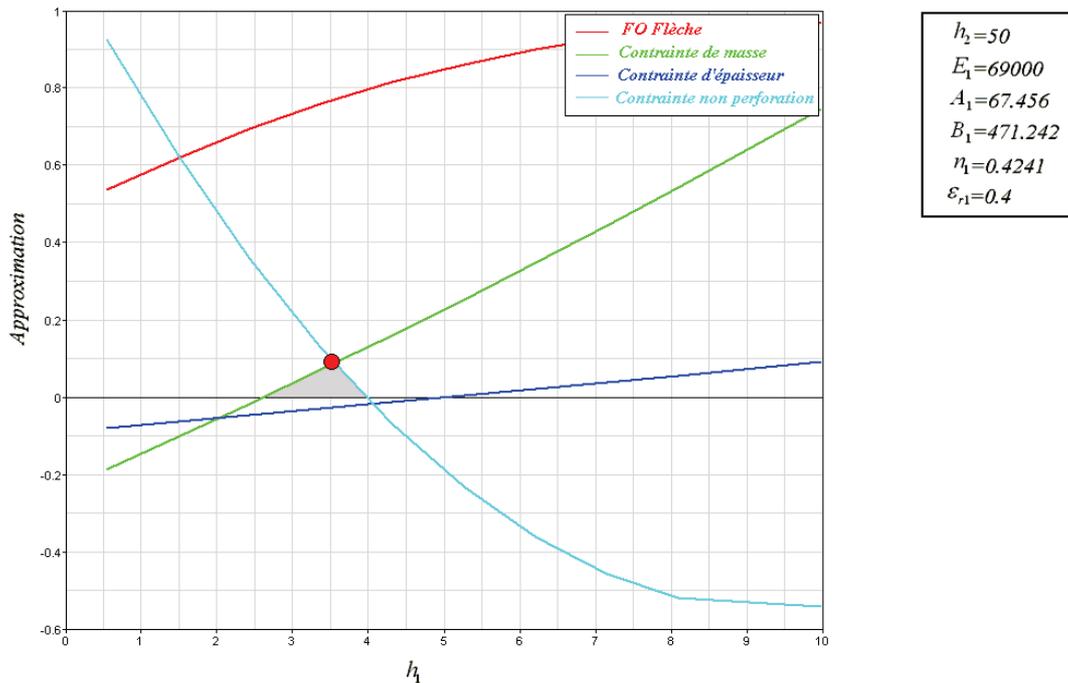


Figure 86 : Vérification de la solution initiale pour le cas d'aluminium (modèle de SRMC)

Il est à noter que le fait d'admettre une tolérance de 10% de violation des contraintes ne constitue pas une erreur en soit, il peut se justifier par le fait que dans le modèle analytique utilisé, la solution obtenue est plus contraignante car on ne tient pas compte de la plastification de la plaque d'acier, généralement absorbe de l'énergie d'après nos observations lors de la campagne d'essais menés.

Du point de vue théorique, si l'on veut trouver une solution optimale avec respect des contraintes, alors dans ce cas on fait varier l'épaisseur h_2 de la mousse jusqu'à ce que les deux limitations soient satisfaites. La solution dans ce cas correspond à une épaisseur de plaque d'aluminium $h_1 = 4.25mm$, ce qui donne une flèche relative de 0,81, donc plus importante que celle du cas précédent (0,77).

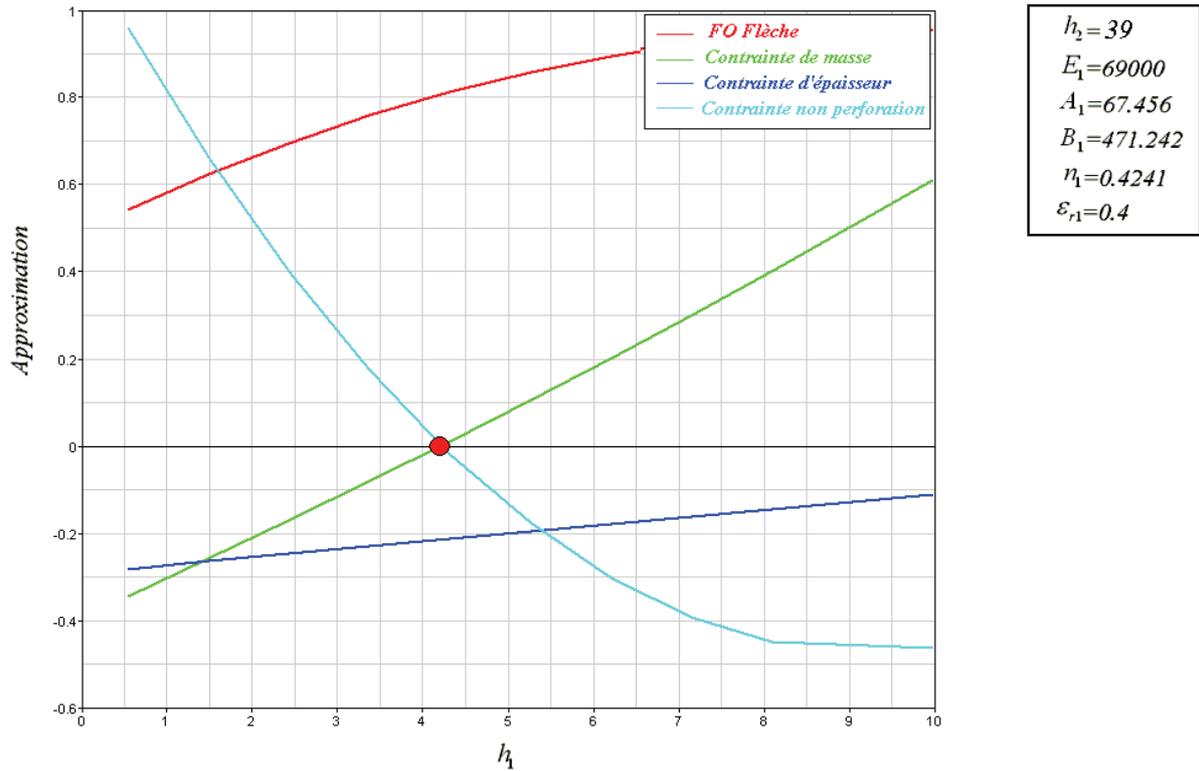


Figure 87 : Solution optimale de l'épaisseur h_1 pour le cas d'aluminium

Une représentation des surfaces de réponses dans l'espace des deux variables épaisseurs h_1, h_2 est donnée sur la Figure 88.

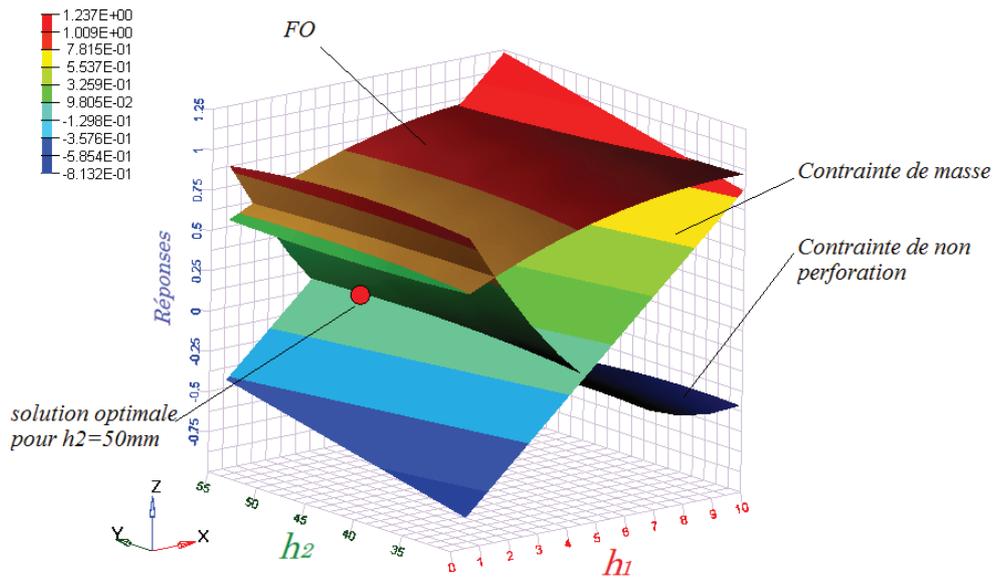


Figure 88 : Surfaces de réponses pour la FO et les limitations

Dans ce qui suit, nous nous sommes fixés la solution initiale d'aluminium, puis nous avons utilisé un algorithme de type SQP pour minimiser la fonction objectif tout en imposant les trois limitations. Nous avons fixé un nombre d'itération maximal à 25 avec une précision de convergence de l'algorithme SQP fixée à 10^{-6} sur la fonction objectif.

La solution optimale est obtenue au bout de 25 itérations d'optimisation, avec saturation des deux contraintes de la masse et de non perforation de la plaque, cette solution correspond à

$$\{h_1, h_2, E_1, A_1, B_1, n_1, \varepsilon_{r1}\}^{optimal} = \{3.37, 46.92, 79350, 78.05, 542.23, 0.256, 0.5\}.$$

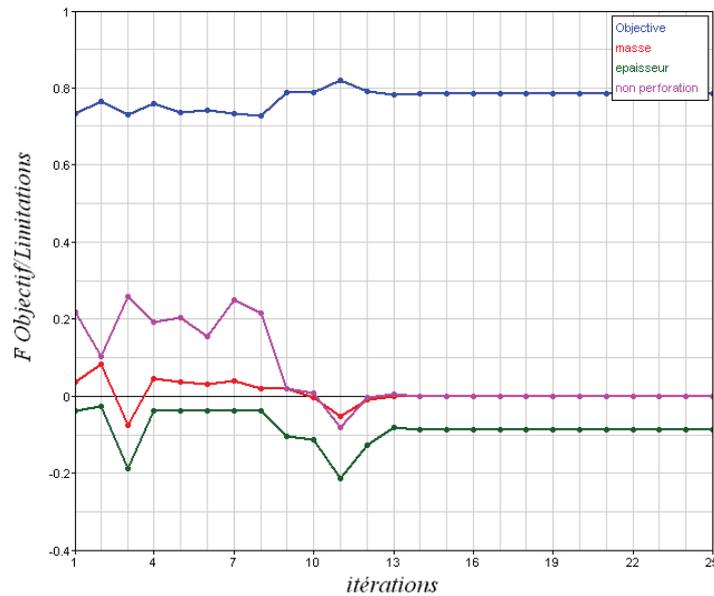


Figure 89 : Processus de convergence du problème d'optimisation

La solution optimale obtenue est testée afin d'étudier sa validité, comme nous pouvons le voir sur la Figure 90, la solution trouvée par l'optimiseur est bien meilleure que la solution que nous avons obtenu manuellement en réduisant simplement l'épaisseur de la mousse à 39 mm. Cette nouvelle solution fait intervenir des variations sur tous les sept paramètres et la flèche maximale relative dans ce cas n'est de 0.78 plus faible que celle obtenue avec l'aluminium et une épaisseur de mousse de 39 mm.

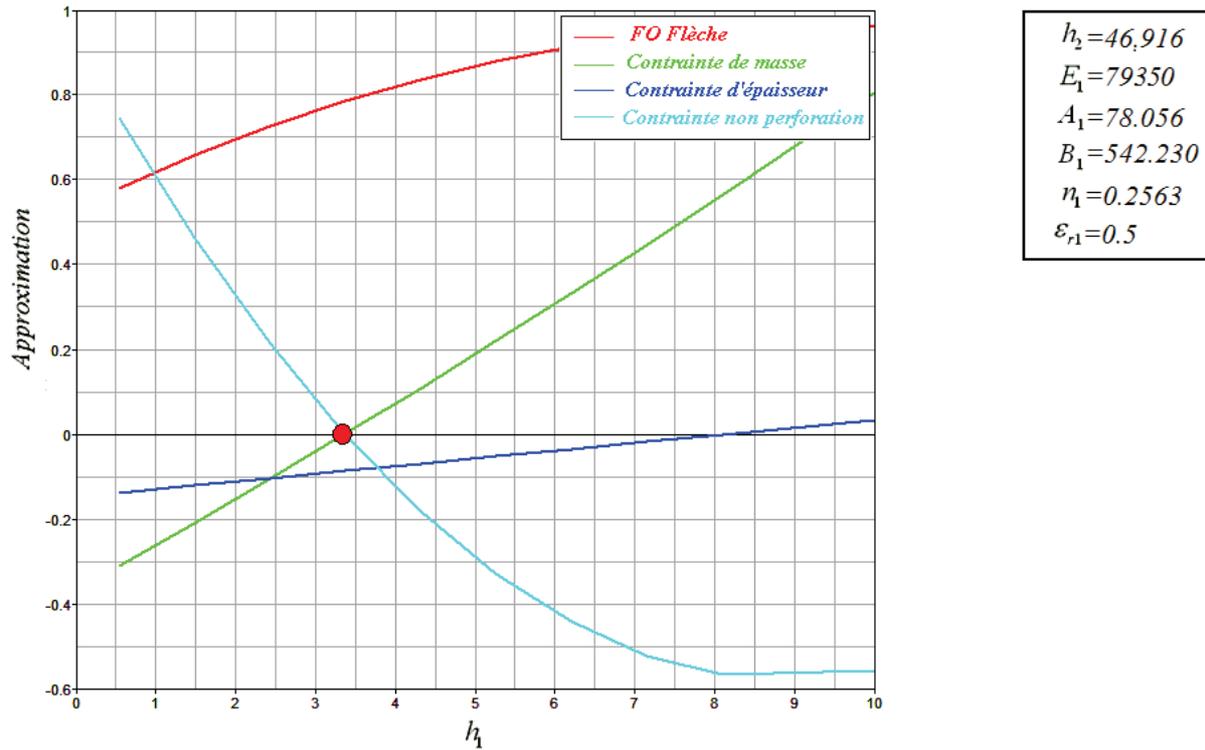


Figure 90 : Solution optimale obtenue par algorithme SQP

Notons également que le résultat obtenu numériquement et automatiquement avec l'optimiseur SQP, nous propose des caractéristiques nouvelles de matériau qui sont : $E_1 = 79350\text{MPa}$, $A_1 = 78.05\text{MPa}$, $B_1 = 542.23\text{MPa}$, $n_1 = 0.256$, $\varepsilon_{r1} = 0.5$

Cette solution originale, constitue à priori un matériau assez proche de l'aluminium, par contre avec une ductilité très étendue, ce qui signifie que ce choix peut être rendu possible en s'approchant de producteurs d'alliages d'aluminium.

6.2.2. SR basée sur les Moindres Carrés Mobiles (SR-MCM)

Dans cette deuxième approche des approximations par surfaces de réponse obtenues par méthode des moindres carrés mobiles ont été utilisées pour décrire la FO et les trois limitations.

Sur la Figure 91 sont données les diagrammes de corrélations des quatre métamodèles utilisés approcher la fonction objectif et les trois limitations. Nous remarquons le bon niveau de corrélation entre les valeurs estimées par les métamodèles et les valeurs issues du PE. Ceci nous permet d'utiliser ces quatre métamodèles obtenus par le modèle de SR-MCM avec plus

de confiance que ceux obtenus par la méthode des moindres carrés pour déterminer la solution optimale de notre problème.

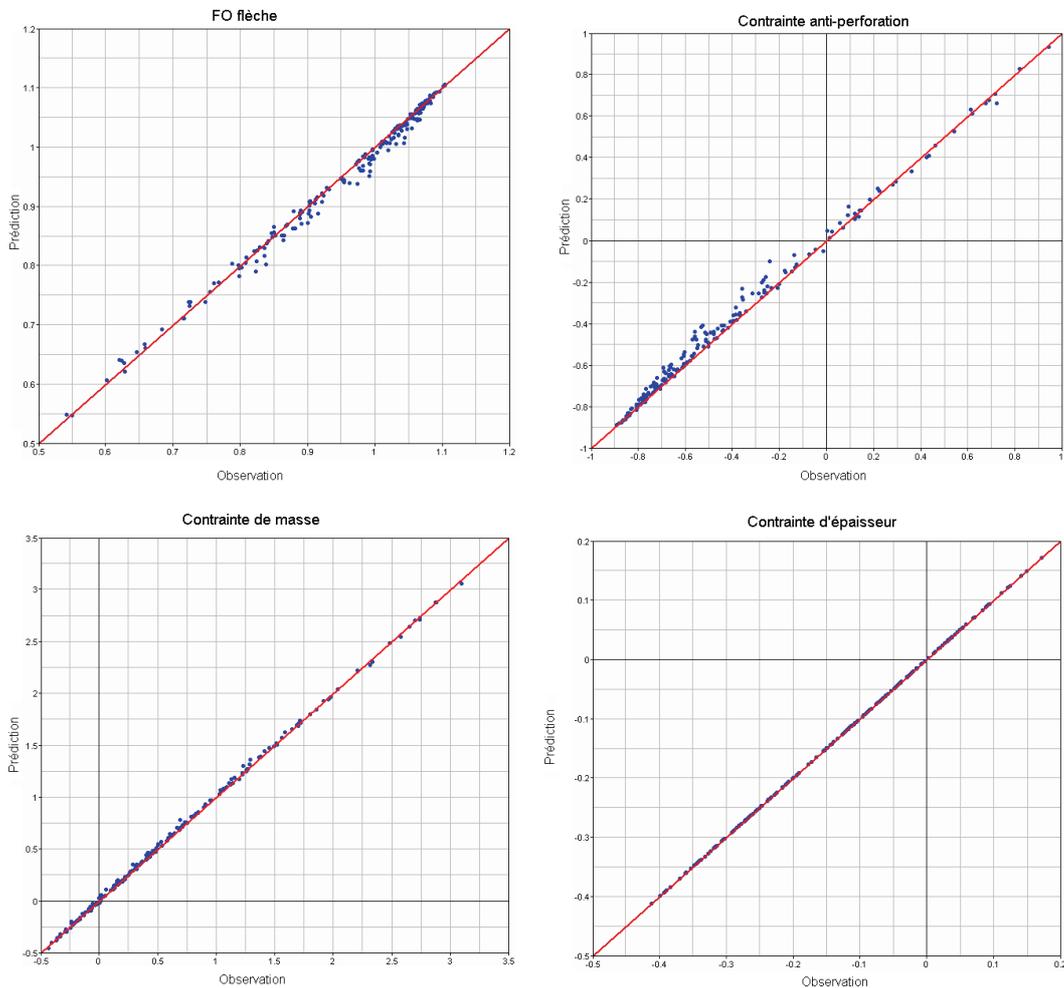


Figure 91 : Diagrammes de corrélations des quatre métamodèles utilisés (SR-MCM)

Comme pour la SR-MC, on donne sur la Figure 92 les évolutions de la fonction objectif et des trois limitations en fonction de la variable h_1 , tout en fixant les six autres paramètres aux valeurs numériques de l'aluminium.

Comme nous pouvons le constater, il n'existe pas de solution optimale dans ce cas-ci qui permet de satisfaire les deux limitations de la masse et le critère de non perforation. Le point minimisant les deux contraintes, point rouge sur le graphique de l'intersection des deux courbes, donne une épaisseur de plaque anti-perforation de 3,4 mm malheureusement les deux contraintes sont violées de presque 20%, ce qui ne serait pas une solution envisageable.

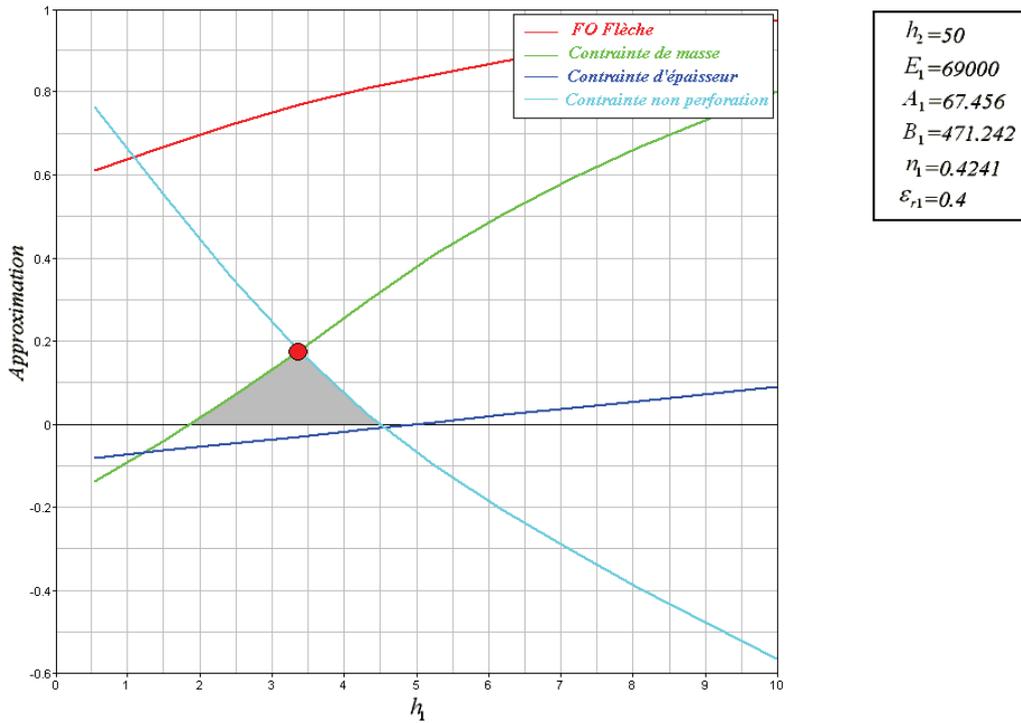


Figure 92 : Vérification de la solution initiale pour le cas d'aluminium (modèle de SR-MCM)

Une représentation des surfaces de réponses dans l'espace des deux variables épaisseurs h_1, h_2 est donnée sur la Figure 93.

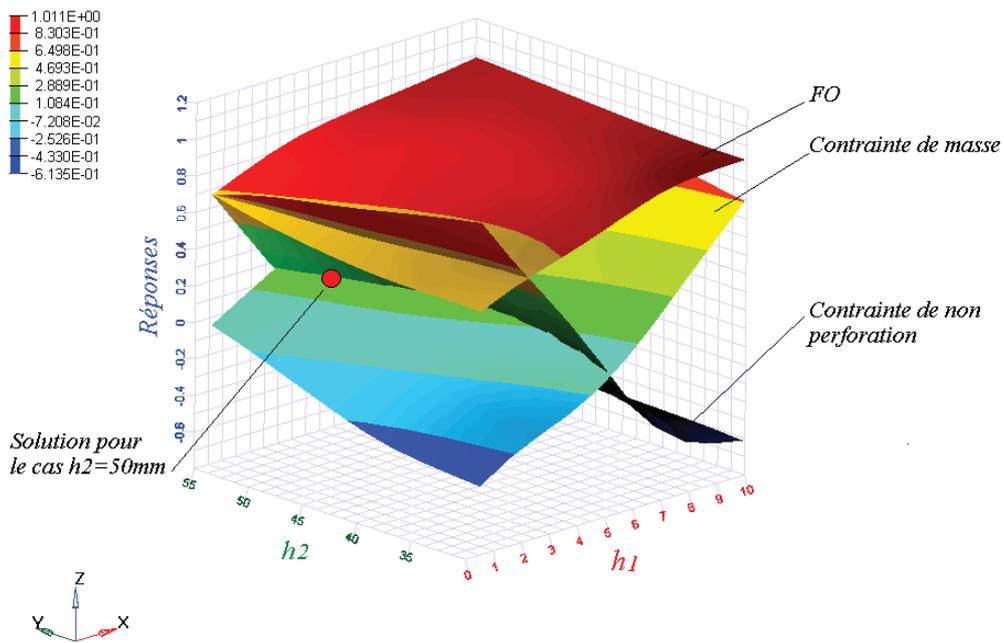


Figure 93 : Surfaces de réponses pour la FO et les limitations (modèle de SR-MCM)

Dans ce qui suit, nous nous sommes fixés la solution initiale d'aluminium, puis nous avons utilisé un algorithme de type SQP pour minimiser la fonction objectif tout en imposant les trois limitations. Nous avons fixé un nombre d'itérations maximal à 50 avec une précision de convergence de l'algorithme SQP fixée à 10^{-6} sur la fonction objectif.

La solution optimale est obtenue au bout de 50 itérations d'optimisation, avec saturation des deux contraintes de la masse et de non perforation de la plaque, cette solution correspond à

$$\{h_1, h_2, E_1, A_1, B_1, n_1, \varepsilon_{r1}\}^{optimal} = \{3.27, 47.78, 41527, 108.22, 700, 0.159, 0.5\} .$$

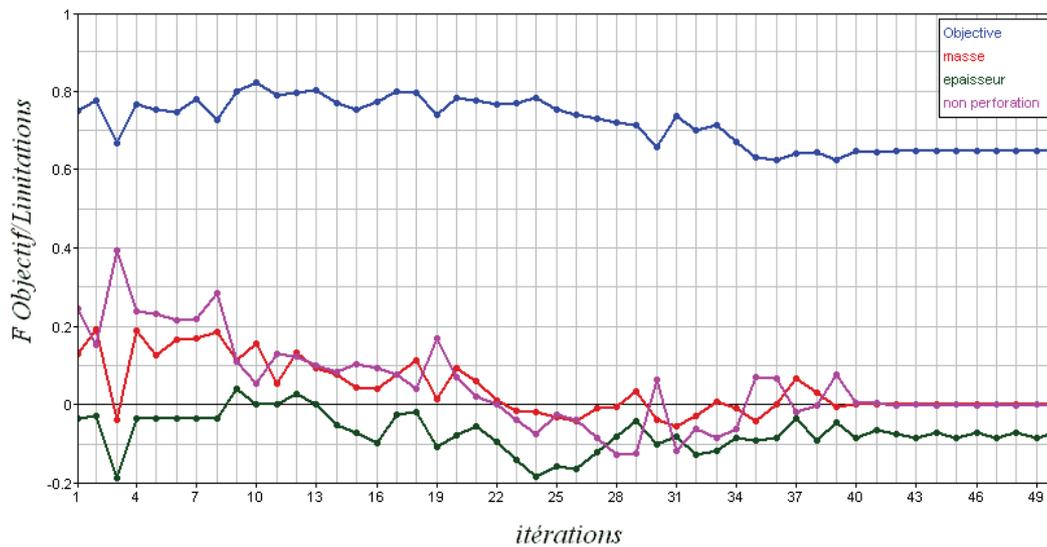


Figure 94 : Processus de convergence du problème d'optimisation

La solution optimale obtenue est testée afin d'étudier sa validité, comme nous pouvons le voir sur la Figure 95, la solution trouvée par l'optimiseur est assez différente de la solution initiale. Cette nouvelle solution optimale fait intervenir des variations sur tous les paramètres excepté la limite à la rupture. Notons également que la flèche maximale relative dans ce cas n'est de 0.65, donc plus faible que celle obtenue avec l'aluminium et une épaisseur de mousse de 50mm.

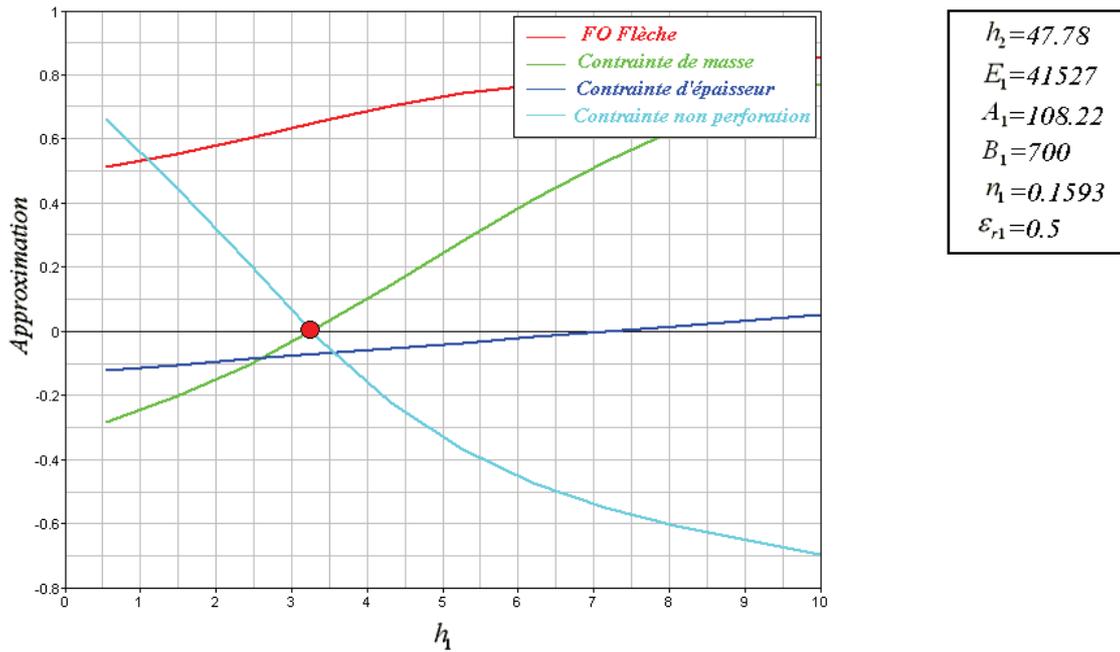


Figure 95 : Solution optimale obtenue par algorithme SQP

Remarquons enfin, que le résultat obtenu automatiquement avec l'optimiseur SQP, nous propose des caractéristiques assez éloignées de celles d'un alliage d'aluminium qui sont : $E_1 = 41527MPa$, $A_1 = 108.22MPa$, $B_1 = 700MPa$, $n_1 = 0,159$, $\varepsilon_{r1} = 0,5$

6.2.3. SR basée sur le krigeage

Dans cette deuxième approche des approximations par surfaces de réponse obtenues par krigeage ont été utilisées pour décrire la FO et les trois limitations. Sur la Figure 91 sont données les diagrammes de corrélations des quatre métamodèles utilisés approcher la fonction objectif et les 3 limitations. Nous remarquons le très bon niveau de corrélation entre les valeurs estimées par les métamodèles et les valeurs issues du PE. Ceci nous permet d'utiliser ces quatre métamodèles obtenus par krigeage avec plus de confiance que ceux obtenus par la méthode des moindres carrés pour déterminer la solution optimale de notre problème.

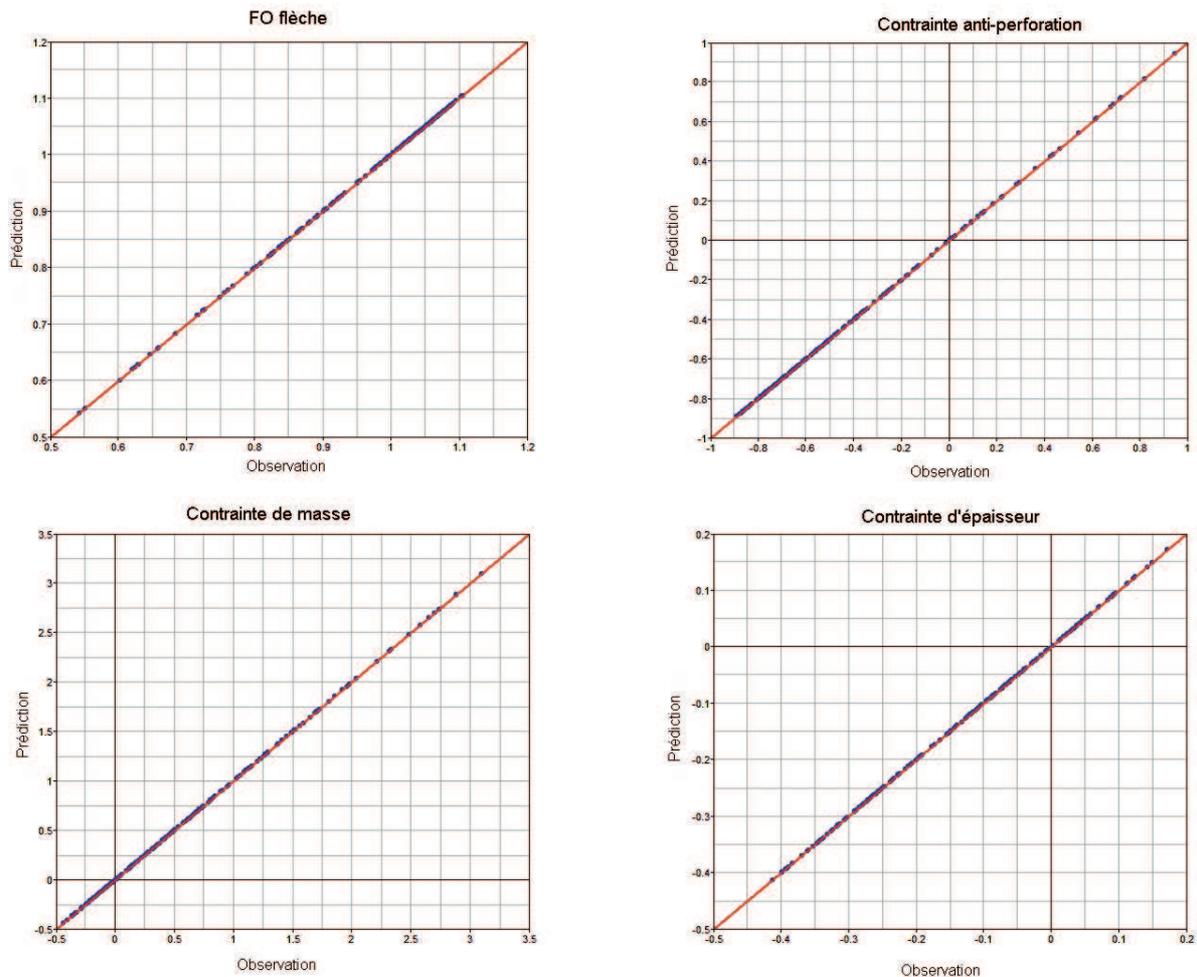


Figure 96 : Diagrammes de corrélations des quatre métamodèles utilisés

Comme pour la SRMC, on donne sur la Figure 92 les évolutions de la fonction objectif et des trois limitations en fonction de la variable h_1 , tout en fixant les six autres paramètres aux valeurs numériques de l'aluminium. Comme nous pouvons le voir, il existe une solution optimale qui satisfait les deux limitations de la masse et le critère de non perforation, représentée sur le graphique par l'intersection des deux courbes (point rouge). Cette solution correspond à une épaisseur de plaque anti-perforation de 2,47mm, valeur très proche de la valeur d'épaisseur choisie expérimentalement qui est de 3 mm. La flèche relative enregistrée pour le cas d'une épaisseur de 2,47mm par le modèle de krigeage est de 0,85 cette fois-ci, valeur plus élevée que celle prédite par le modèle de SRMC.

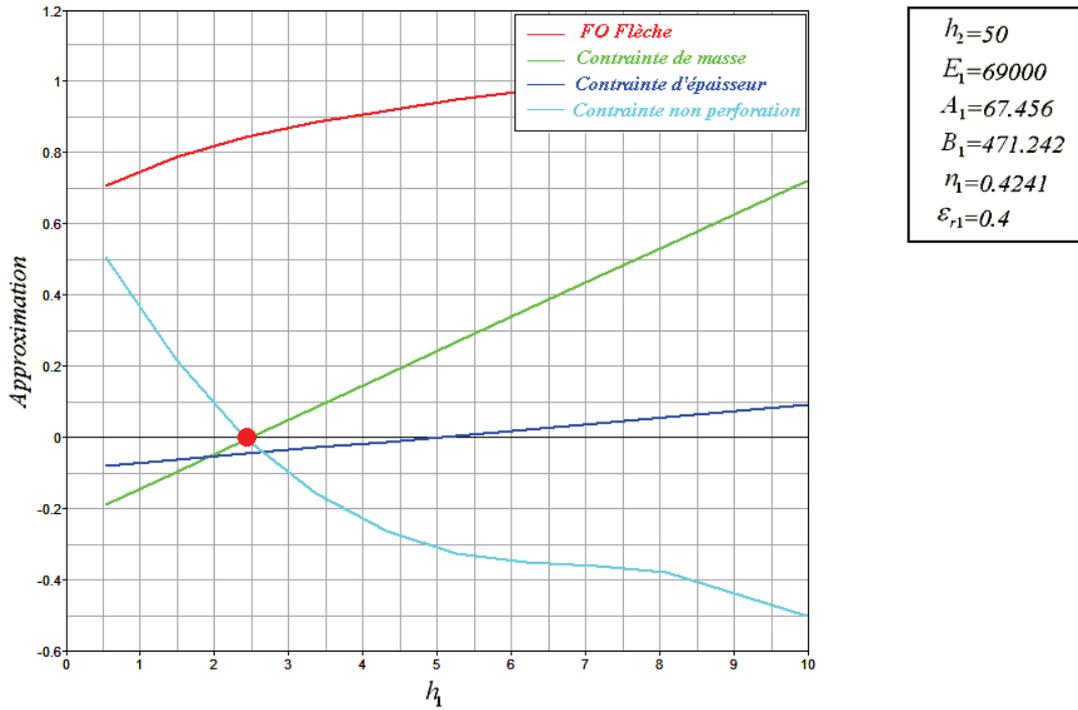


Figure 97 : Vérification de la solution initiale pour le cas d'aluminium (modèle de SR krigeage)

Une représentation des surfaces de réponses dans l'espace des deux variables épaisseurs h_1, h_2 est donnée sur la Figure 93.

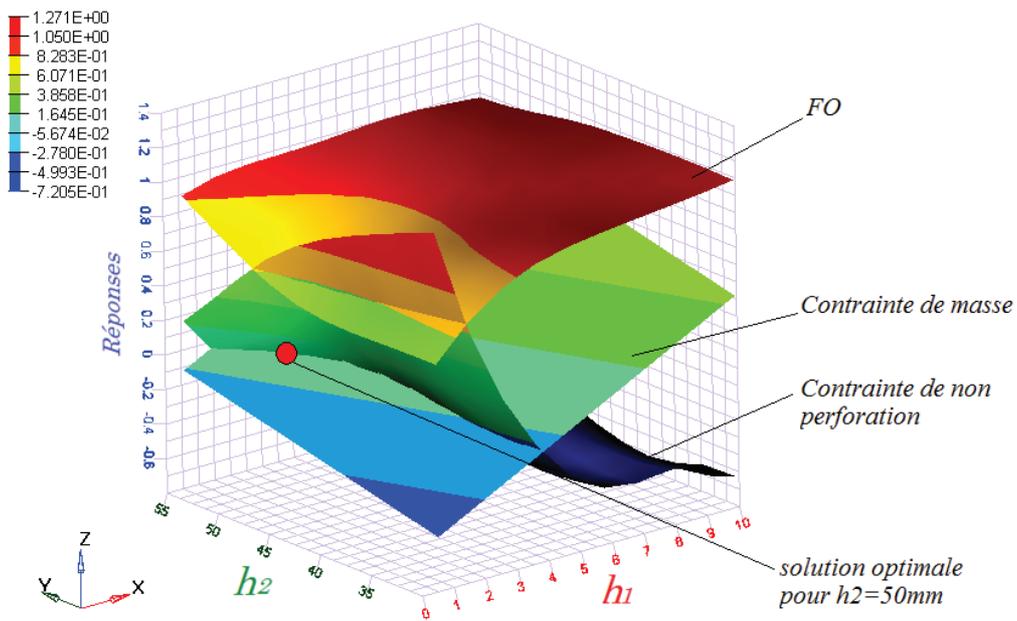


Figure 98 : Surfaces de réponses pour la FO et les limitations

Dans ce qui suit, nous nous sommes fixés la solution initiale d'aluminium, puis nous avons utilisé un algorithme de type SQP pour minimiser la fonction objectif tout en imposant les trois limitations. Nous avons fixé un nombre d'itérations maximal à 50 avec une précision de convergence de l'algorithme SQP fixée à 10^{-6} sur la fonction objectif.

La solution optimale est obtenue au bout de 50 itérations d'optimisation, avec saturation des deux contraintes de la masse et de non perforation de la plaque, cette solution correspond à

$$\{h_1, h_2, E_1, A_1, B_1, n_1, \varepsilon_{r1}\}^{optimal} = \{1.72, 42.16, 69000, 77.35, 641.34, 0.296, 0.5\}.$$

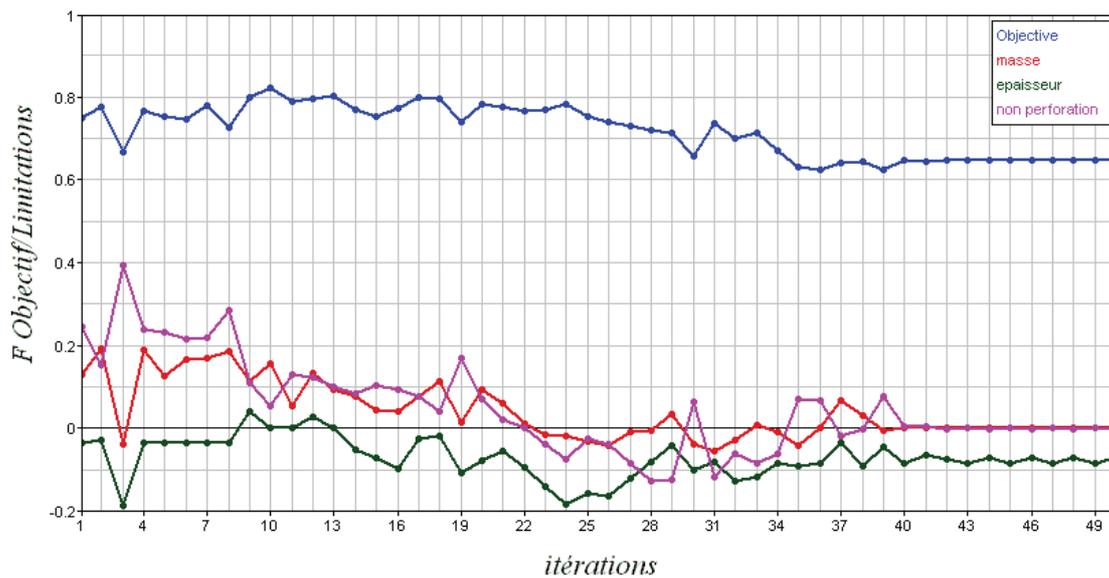


Figure 99 : Processus de convergence du problème d'optimisation

La solution optimale obtenue est testée afin d'étudier sa validité, comme nous pouvons le voir sur la Figure 95, la solution trouvée par l'optimiseur est assez différente de la solution initiale. Cette nouvelle solution fait intervenir des variations sur tous les paramètres excepté le module d'élasticité. Notons également que la flèche maximale relative dans ce cas n'est de 0,71, donc plus faible que celle obtenue avec l'aluminium et une épaisseur de mousse de 50 mm.

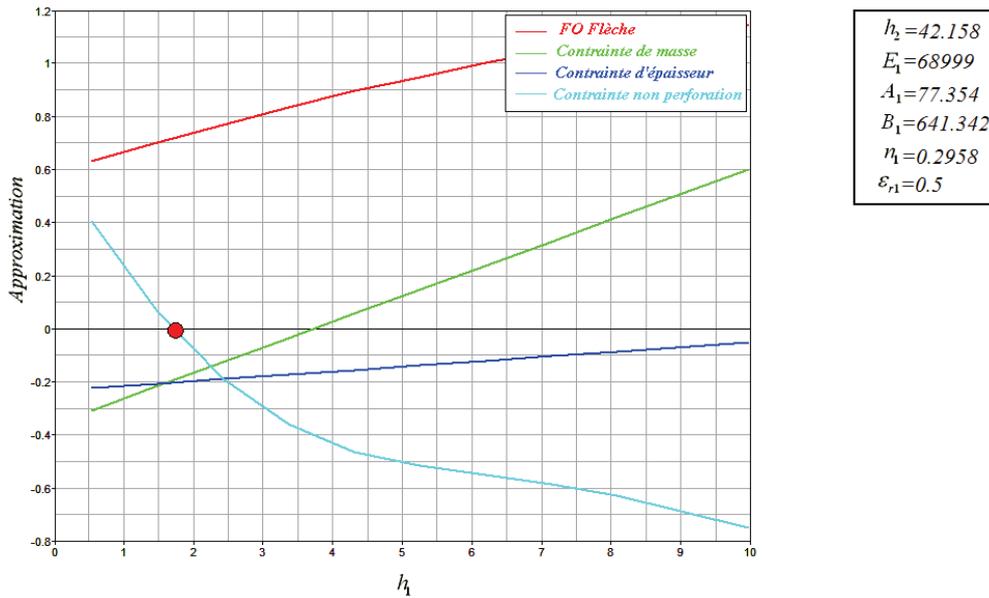


Figure 100 : Solution optimale obtenue par algorithme SQP

Notons également que le résultat obtenu numériquement et automatiquement avec l’optimiseur SQP, nous propose des caractéristiques proches d’un alliage d’aluminium qui sont : $E_1 = 69000MPa$, $A_1 = 77.35MPa$, $B_1 = 641.34MPa$, $n_1 = 0.296$, $\varepsilon_{r1} = 0.5$

6.2.4. Comparaison des trois métamodèles

Le tableau ci-dessous résume les trois solutions obtenues avec les trois métamodèles basés respectivement sur la méthode des moindres carrés, moindres carrés mobile et sur la technique du krigeage. Nous pouvons remarquer que malgré des solutions matériaux très voisines les trois métamodèles donnent deux solutions en épaisseurs assez différentes.

Variable de conception	Solution obtenue par SR par moindres carrés	Solution obtenue par SR par moindres carrés mobile	Solution obtenue par SR par krigeage
h_1	3.37	3.27	1.72
h_2	46.92	47.78	42.16
E_1	79350	41527	69000
A_1	78.05	108.22	77.35
B_1	542.23	700	641.34
n_1	0.256	0.159	0.296
ε_{r1}	0.5	0.5	0.5

Tableau 23 : Comparaison des trois solutions optimales obtenues

6.3. Solution avec un PE hypercube latin à 400 points

Afin d'étudier la sensibilité du nombre de points d'échantillonnage du PE hypercube latin, nous avons doublé le nombre de points, à savoir 400 expériences et nous avons repris la même étude que précédemment. Un bilan des principaux résultats obtenus avec les trois types de métamodèles est résumé dans le Tableau 24.

Variable de conception	Solution obtenue par SR par moindres carrés	Solution obtenue par SR par moindres carrés mobile	Solution obtenue par SR par krigeage
h_1	3.14	4.17	2.14
h_2	45.86	30	40.52
E_1	68999	79245	68999
A_1	74.59	85.93	50
B_1	473.83	546.45	614.13
n_1	0.20	0.50	0.171
ε_{r1}	0.24	0.47	0.095

Tableau 24 : Comparaison des trois solutions optimales obtenues

Les résultats obtenus dans ce dernier cas montrent que la méthode des moindres carrés et celle du krigeage sont peu sensibles à la densité de points du PE, cependant la technique des moindres carrés mobiles semble plus dépendante quant au nombre d'expériences choisies.

La solution obtenue par la SR-MC est assez proche de la solution initiale, l'outil numérique a permis d'affiner cette solution pour respecter au mieux les contraintes de masse (27 kg.m^{-2}) et le critère de non perforation.

Les deux autres métamodèles ont permis d'aboutir à des solutions différentes de celle proposée initialement, cependant elles constituent des solutions valides du point de vue théorique, mais peu réalistes au vue des paramètres matériaux obtenus.

7. Conclusion

Trois métamodèles couplés au solveur semi-analytique d'impact de plaques sandwichs ont été utilisés pour la conception de paramètres géométriques et de matériaux. Au travers de ce chapitre, nous avons montré que l'outil de conception permet de générer un ensemble de solutions théoriquement valides, qui minimise la flèche tout en respectant des contraintes sur la masse maximale et la non perforation de la structure.

Enfin, au regard des solutions proposés expérimentalement, dans le cadre de ce travail de recherche, à savoir le Paralite, l'acier et l'aluminium, l'outil de conception confirme que la solution « idéale » serait basée sur une plaque anti-perforation en aluminium, associée à une mousse d'aluminium haute densité.

Chapitre V

CONFIDENTIEL

Conclusions et perspectives

1. Conclusions

Confidentiel

Enfin, le cahier des charges imposait que l'outil numérique de pré-dimensionnement soit rapide et en même temps simple, pour qu'il soit facilement utilisable par des personnes travaillant en bureau d'études. Par conséquent la solution utilisant la méthode des éléments finis a été écartée (investissement important en coût licence et formation), et une solution basée sur les méthodes semi-analytiques a été privilégiée.

Etant donnée la valeur relativement importante de l'épaisseur de la structure de protection, comparée aux dimensions de la structure à protéger, nous avons orienté les travaux de thèse vers le développement d'un modèle semi-analytique basé sur la théorie des plaques épaisses multicouches. Pour commencer, un modèle de flexion de plaques multicouches élastiques, basé sur l'expansion de la solution en séries de Fourier, a été réalisé. Ensuite, une approche permettant d'intégrer analytiquement des conditions aux limites cinématiques variables de la structure, a été développée en prenant en compte des ressorts élastiques sur chacun des côtés de la plaque et la solution en séries en expansion de Fourier a été complétée par une série mixte de polynômes-cosinus. Ce qui a permis d'aboutir à la solution tout en permettant à la série de satisfaire les équations d'équilibre et les conditions aux limites de façon exacte. L'impact a été pris en compte par l'intégration d'une loi non linéaire de contact hertzien. La résolution du problème a été effectuée en utilisant un schéma de discrétisation temporelle explicite. Cette modélisation a été validée par corrélation à plusieurs exemples issus de la littérature ainsi qu'à des modèles numériques issus de calculs en éléments finis et les résultats obtenus sont en très bon accord avec les références.

Ce premier modèle a ensuite été amélioré, par la prise en compte des effets de comportements locaux (plasticité sous le nez du projectile, rupture), afin de mieux représenter les phénomènes physiques observés expérimentalement. Des modèles simplifiés, de plasticité, de rupture de la couche anti-perforation, et d'écrasement du matériau cellulaire ont donc été implémentés. Ainsi, la déformation plastique observée dans la plaque anti-perforation pour les matériaux ductiles a été introduite dans l'expression de l'effort de contact de la loi de Hertz. L'effort de contact évolue ainsi en fonction de la déformation calculée sous le projectile en prenant en compte la diminution de la rigidité locale à l'aide du comportement élastoplastique de type Ludwig. La rupture de la plaque anti-perforation a été introduite en modifiant à nouveau cet effort de contact pour permettre de passer d'un effort de résistance plastique de la plaque anti-perforation à un effort correspondant à la résistance du matériau cellulaire lorsque l'on atteint un seuil de déformation à rupture défini pour la plaque anti-perforation. Enfin, l'évolution de la résistance à l'écrasement du matériau cellulaire sous le projectile a été prise en compte en intégrant un modèle de comportement inspiré des éléments finis linéiques (ressorts non linéaires). L'ensemble des paramètres des modèles sont issus du comportement des matériaux cependant, pour déterminer le critère de rupture une procédure expérimentale spécifique a été mise en place. Elle utilise un système d'impact, basé sur les barres de Hopkinson mais adapté pour des structures de type plaques, afin d'obtenir une vitesse limite de perforation. Cet essai a été ensuite modélisé en éléments finis et la valeur de déformation plastique à rupture a été déterminée par méthode inverse. L'ajout de chacun des modèles locaux a été validé par rapport à une référence éléments finis et les résultats obtenus sont en bon accord avec cette référence.

Finalement, le modèle analytique a été comparé dans le cadre d'essais expérimentaux d'impact sur plaques carrées avec des structures sandwich préalablement définies. Il a permis de montrer la bonne qualité des résultats de cette modélisation d'impact avec un outil semi-analytique très rapide de pré-dimensionnement. L'erreur obtenue est en moyenne autour de 10% par rapport à la solution de référence pour les efforts et les flèches. Cette solution est donc efficace et permet un gain de temps considérable par rapport à une étude complète par éléments finis et bien évidemment un gain financier par rapport à une étude basée sur des essais expérimentaux.

Afin d'avoir une démarche intégrée de conception d'une structure d'absorption d'énergie, le modèle développé a été couplé à un optimiseur basé sur les techniques de plans d'expériences et de surfaces de réponses. Cet outil a permis de valider les résultats obtenus pour les

structures définies lors des essais expérimentaux et a mis en valeur, l'importance de l'épaisseur de la plaque anti-perforation ainsi que son comportement plastique. Des solutions optimales au regard du cahier des charges initial ont ainsi été trouvées et montre que l'une des configurations expérimentales initialement utilisées, est très proche de cet optimum.

Confidentiel

Les résultats concernant la flèche maximale, sont eux aussi assez proches de la solution obtenue par la méthode des éléments finis, ce qui témoigne de la robustesse de l'outil numérique développé.

2. Perspectives

Les perspectives de mes travaux de thèse sont tout d'abord d'améliorer le modèle pour que la précision des résultats soit accrue en y incluant les non linéarités géométriques. Les essais expérimentaux ont montré que la structure à protéger était plastiquement déformé. La plasticité locale de la plaque de la structure à protéger pourrait donc être prise en compte en utilisant une méthode analogue à celle utilisée pour la plasticité de la plaque anti-perforation.

De même, la loi de plasticité (de type Ludwig) utilisée ne prend pas en compte la vitesse de déformation. La prise en compte de ce paramètre supplémentaire améliorera le résultat obtenu pour des matériaux sensibles à la vitesse de déformation tels que les aciers. Ce travail peut se faire en utilisant par exemple une loi de type Johnson Cook.

Il peut aussi être envisagé de changer le comportement d'écrasement du matériau cellulaire en tenant compte de la rupture notamment par cisaillement de ce matériau. Cela peut se faire soit en modifiant le comportement de l'élément linéique non linéaire proposé, soit en intégrant ce phénomène à nouveau dans le contact de Hertz.

Confidentiel

Il serait aussi intéressant d'effectuer une démarche plus « choix des matériaux » pour optimiser la solution finale. En effet, la démarche actuelle d'optimisation permet de trouver la meilleure solution théorique possible, néanmoins cette solution n'est parfois pas réaliste au vue des matériaux existants. Le couplage avec une base de données matériaux pourrait apporter une référence de départ plus réaliste pour la construction des surfaces de réponse.

Confidentiel

Références

-
- [1]
- [2]
- [3] Guglielmino & al.–Semi-active suspension control, improved vehicle ride and road friendliness. Springer – 2008. p32.
- [4] Dixon – The Shock Absorber Handbook, second edition. John Wiley & Son, Ltd – 2007. p130.
- [5] Gibson – Cellular solids, structure and properties, second edition. Cambridge university press, 1997.
- [6] Thama & al – Ballistic impact of a KEVLARs helmet: Experiment and simulations – International Journal of Impact Engineering – 2008.
- [7] Ashby – Metal Foams: A Design Guide. Butterworth-Heinemann – 2000.
- [8] Hanssen – A numerical model for bird strike of aluminium foam-based sandwich panels. International Journal of Impact Engineering – 2006.
- [9] Elnasri – Comportement des matériaux cellulaires sous impact et de panneaux sandwichs sous perforation dynamique. Thèse de doctorat de l'école normale supérieure de Cachan – 2006.
- [10] Kurtaran & al – Ballistic impact simulation of GT model vehicle door using finite element method. Theoretical and Applied Fracture Mechanics – 2003.
- [11] Gama & al - Aluminum foam integral armor: a new dimension in armor design – Composite Structures – 2001.
- [12] Christoforou & al – Impact dynamics of composite beams - Composite Structures, Volume 32, Issues 1–4, Pages 187–195 – 1995.
- [13] Yoo & al – An experimental study on energy absorbing structures made of fabric composites– Composite Structures – 2008.
- [14] Shin & al – An experimental study of low-velocity impact responses of sandwich panels for Korean low floor bus - Composite Structures, Volume 84, Issue 3, Pages 228–240 – 2008.
- [15] Navarro - Experimental and numerical study of oblique impact on woven composite sandwich structure: Influence of the firing axis orientation - Composite Structures – 2012.

-
- [16] Mamivand & al - A model for ballistic impact on multi-layer fabric targets - International Journal of Impact Engineering – 2010.
- [17] Foo & al - A model to predict low-velocity impact response and damage in sandwich composites –Composites science and technology– 2008.
- [18] Foo & al - A modified energy-balance model to predict low-velocity impact response for sandwich composites – 2011.
- [19] Burlayenko & al - A numerical study of the dynamic response of sandwich plates initially damaged by low-velocity impact - Computational Materials Science – 2012
- [20] Feli & al - An analytical model for composite sandwich panels with honeycomb core subjected to high-velocity impact - Composites: Part B – 2011.
- [21] Parga-Landa – Analytical model to predict impact behavior of soft armours - International Journal of Impact Engineering – 1995.
- [22] Evci & al – An experimental investigation on the impact response of composite materials – International Journal of Impact Engineering – 2012.
- [23] Tiberkak & al – Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact – Composite Structures – 2008.
- [24] HooFatt – Dynamic models for low-velocity impact damage of composite sandwich panels – Part A: Deformation – Composite structures – 2001.
- [25] Gupta & al - Effect of projectile nose shape, impact velocity and target thickness on deformation behavior of aluminum plates - International Journal of Solids and Structures – 2007.
- [26] Borvik & al - Effect of target thickness in blunt projectile penetration of Weldox 460 E steel plates - International Journal of Impact Engineering – 2003.
- [27] Karger & al - Efficient simulation of low-velocity impacts on composite sandwich panels - Computers and Structures – 2008.
- [28] Malekzadeh & al – Response of composite sandwich panels with transversely flexible core to low velocity transverse impact : a new dynamic model - International Journal of Impact Engineering, Volume 34, Issue 3, Pages 522–543 – 2007.
- [29] Caprino & al – Impact and post-impact behavior of foam core sandwich structures - Composite Structures, Volume 29, Issue 1, Pages 47–55 – 1994.
- [30] Nia & al - Ballistic limit determination of aluminum honeycombs, Experimental study - Materials Science and Engineering – 2008.
-

-
- [31] Wildlife Strikes to civil aircraft in the United states 1990–2007 – Federal Aviation Administration, National Wildlife Strike Database Serial Report Number 14– 2008.
- [32] <http://www.birdstrike.org/commlink/birdrisk.htm>
- [33] Chuan - Finite element analysis of bird strikes on composite and glass panel – Department of mechanical engineering national university of Singapore – 2006.
- [34] Fredriksson & al. – Evaluation of a new pedestrian head injury protection system with a sensor in the bumper and lifting of the bonnet rear part - SAE n° 2001-06-0089 – 2001.
- [35] Mills - Polymer Foams Handbook : Engineering and Biomechanics Applications and Design Guide - Butterworth-Heinemann – 2007.
- [36] Abrate – Impact on composite structures – Cambridge university press – 1998.
- [37] Li & al – An elastic-plastic model on the dynamic response of composite sandwich beams subjected to mass impact – Composite structures – 2006.
- [38] Timochenko & al – Théorie des plaque et coques. Librairie polytechnique Ch. Béranger – 1961.
- [39] Li – Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports – Journal of sound and vibrations – 2004.
- [40] Li – Free vibrations of beams with general boundary conditions – Journal of sound en vibration – 2000.
- [41] Li & al – An exact series solution for the transverse vibration of rectangular plates with general elastic boundary supports – 2009.
- [42] Bhaskar& al – Analysis of clamped unsymmetric cross ply rectangular plates by superposition of simple exact double Fourier series solutions – Composite structures – 2005.
- [43] Türk & al – Localized damage response of composite sandwich plates – Composites : part B – 1999.
- [44] Qian & al – A comparison techniques for impact response of composite plates – Composite structures – 1990.
- [45] Christoforou & al – Analysis of impact response in composite plates – International journal of solids Structures, Volume 27, p161-170 – 1991.
- [46] HooFatt & al – Dynamic models for low-velocity impact damage of composite sandwich panels – Part B : Damage initiation – Composite structures – 2001.

-
- [47] Khov & al – An accurate solution method for the static and dynamic deflections of orthotropic plates with general boundary conditions – Composite structures – 2009.
- [48] Wang - Impact behavior and energy absorption of paper honeycomb sandwich panels - International Journal of Impact Engineering, Volume 36, Issue 1, Pages 110–114 - 2009.
- [49] Guimard – Contribution à la modélisation de l'absorption d'énergie dans les composites stratifiés par fragmentation et délaminage sous sollicitations dynamiques – thèse de doctorat – 2009.
- [50] Aminanda & al – Tolérance aux dommages des structures sandwichs simulation du comportement à l'impact et après endommagement – 2005.
- [51] Rahmé - Experimental investigation of impact on composite laminates with protective layers - Composites Science and Technology – 2012.
- [52] Mesko – M1 Abrams in action – Squadron/Signal publication, ISBN: 0897472225 – 1989.
- [53] <http://www.inetres.com/gp/military/cv/recon/AMX-10RC.html>
- [54] Held – Brassey's Essential Guide to Explosive Reactive Armour and Shaped Charges – Brassey's UK Ltd, ISBN: 1857532252 – 1999.
- [55] <http://pascalvillars.free.fr/secondeguerremondiale/0024.htm>
- [56] Zaloga & al – M1 Abrams Main Battle Tank 1982-92, New Vanguard – Osprey, ISBN: 1855322838 – 1993.
- [57] Karakuzu & al - Impact characterization of glass/epoxy composite plates: An experimental and numerical study - Composites: Part B– 2010.
- [58] Cho& al – Impact fracture behavior at the material of aluminum foam - Materials Science and Engineering A – 2012.
- [59] Whitney& al – Shear deformation heterogeneous anisotropic plates – Journal of applied science Mechanics – 1970.
- [60] Sun & al – Dynamic response of anisotropic laminated plates under initial stress to impact a mass - – Journal of applied science Mechanics – 1975.
- [61] Bhaskar & al – Simple and exact series solutions for flexure of orthotropic rectangular plates with any combination of clamped and simply supported edges – Composite Structures – 2004.

-
- [62] C. Mozumder, A. Tovar, J.E. Renaud, "Topology Design of Plastically Deformable Structures with a Controlled Energy Absorption for Prescribed Force and Displacement Response", 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization – 2009.
- [63] Carvalho & al – Optimization strategies for non-linear material parameters identification in metal forming problems – Computers and Structures 89 – 2011.
- [64] Xie & al – Evolutionary Structural Optimization – Springer-Verlag, ISBN 3-540-76153-5 – 1997.
- [65] Xie & al – A simple evolutionary procedure for structural optimization – Computers & Structures – 1993.
- [66] Delaméziere & al – A study on the optimization of material parameters to improve the formability of thin sheets obtained by deep drawing – 3rd ESAFORM Conference on Material Forming – 2000.
- [67] Naceur & al – Response surface methodology for design of sheet forming parameters to control spring back effects – Computers & Structures – 2006.
- [68] Zhi Guo An – Intelligent Multi-Objective Optimization for High Strength Sheet Metal Forming Process of Body Part – Advanced Materials Research – 2012.
- [69] Bouchard & al – Ductile damage parameters identification for cold metal forming applications – 14th International Esaform Conference on Material Forming: ESAFORM – 2011.
- [70] Lauro & al – Identification of the damage parameters for anisotropic materials by inverse technique: application to an aluminium – Journal of Materials Processing Technology – 2001.
- [71] Langrand & al – Identification technique of constitutive model parameters for crashworthiness modeling – Aerospace Science and Technology – 1999.
- [72] Che & al - Characterization and Modeling of Aluminum Extrusion Damage Under Crash Loading – Thin-Walled Structures – 2007.
- [73] Maier & al – Recent improvements in experimental investigation and parameter fitting for cellular materials subjected to crash loads – Composites Science and Technology – 2003.
- [74] Reid – Towards the understanding of material property influence on automotive crash structures – Thin-Walled Structures – 1996.
-

-
- [75] Yi & al – The impact response of clamped sandwich beams with ordinary and hierarchical cellular cores – International Journal of Impact Engineering – 2012.
- [76] Yu & al – Static and low-velocity impact behavior of sandwich beams with closed-cell aluminum-foam core in three-point bending – International Journal of Impact Engineering – 2008.
- [77] Torre & al. – Impact testing and simulation of composite sandwich structures for civil transportation. Composite structure – 2000.
- [78] Radford & al. – The response of clamped sandwich plates with metallic foam cores to simulated blast loading – International Journal of solids and structures – 2006.
- [79] Zhu & al. – A review of blast and impact of Metallic and sandwich structures – EJSE Special issue: Loading on structures – 2007.
- [80] Chi & al. – The influence of core height and face plate thickness on the response of honeycomb sandwich panels subjected to blast loading – 2010.
- [81] Nurick & al. – Behaviour of sandwich panels subjected to intense air blast – Part 1: experiments – Composite Structures – 2009.
- [82] Liu & al. – Design analysis of a sandwich hood structure for pedestrian protection – General Motors Research & development, Paper number 09-0356 – 2009.
- [83] Kolopp & al. Impact testing of composite sandwich structures for aircraft armor application – Compte rendu des JNC – 2011.
- [84] <http://www.leparisien.fr/essonne/des-parpaings-de-14-kg-lances-sur-des-policiers-20-05-2006-2007000969.php>
- [85] Chaffanjon – La grande peur des policiers – Article Le point.fr du 18 mai – 2009.
- [86] Andrieux – Un policier gravement blessé à la tête à Noisiel – Article Rmc.fr du 03 mars – 2011.
- [87] Masoumi & al - Comparison of steel, aluminum and composite bonnet in terms of pedestrian head impact - Safety Science - 2011
- [88] Belingardi & al - Development of an hybrid hood to improve pedestrian safety in case of vehicle impact - 2009
- [89] Obradovic & al - Lightweight design and crash analysis of composite frontal impact energy absorbing structures - Composite Structures - 2012

-
- [90] Salaorno & al - Model validation and FE analysis of the head bonnet impact - 16th ESB Congress, Posters Journal of Biomechanics 41 - 2008
- [91] Avasle & al - Numerical and experimental results on pedestrian head impact tests on an aluminum bonnet - University of Pitesti, Scientific bulletin, Faculty of mechanics and technology automotive series, Automotive series, year XVII, No.21 – 2011
- [92] Batoz & al – Modélisation des structures par éléments finis, tome 3 : coques – Hermes Sciences Publication, ISBN : 2866013042 – 1992.
- [93] Spiegel – Theory and problems of Fourier analysis – Shaum’s outline series, Mc Graw Hill – 1974.
- [94] Kant & al – Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory – Composite Structures – 2002.
- [95] Kwang-Hee & al - An analytical and experimental study of impulsive stress of square plates at an impact loading point by the 3-dimensional dynamic theory of elasticity - KSME Journal - 1994.
- [96] Sinisa & al - Frictionless indentation of dissimilar elastic-plastic spheres - International Journal of Solids and Structures - 2000.
- [97] Mahajan & al - Adaptive computation of impact force under low velocity impact - Computers and Structures - 1999.
- [98] Mesarovic & al - Spherical indentation of elastic-plastic solids - The Royal Society - 1999.
- [99] Leissa – Vibration of plates, Acoustical Society of America – 1993.
- [100] Dickinson & al – On the use of simply supported plate functions in the Rayleigh-Ritz method applied to the vibration of rectangular plate – Journal of Sound and Vibration – 1982.
- [101] Warburton – Response using the Rayleigh-Ritz method – Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics 7 – 1979.
- [102] Zhou – Natural frequencies of rectangular plate using a set of static beam functions in the Rayleigh-Ritz method – Journal of Sound and Vibration – 1996.
- [103] Cupial – Calculation of the natural frequencies of composite plates by the Rayleigh-Ritz method with orthogonal polynomials – Journal of Sound and Vibration – 1997.
- [104] Bhat – Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method – Journal of Applied Mechanics – 1985.
-

-
- [105] Beslin & al – A hierarchical functions set for very high order plate bending modes with any boundary conditions – Journal of Sound and Vibration – 1997.
- [106] Hallquist - Ls-dyna theoretical manual - 1998.
- [107] Smerd – Constitutive behavior of aluminum alloy sheet at high strain rates – Master of Applied Science Thesis, University of Waterloo – 2005.
- [108] Echevin – Rapport d’essais n° 2010CR1TTT0032 – Valutec, UVHC – 2010.
- [109] Fievet – Rapport d’essais n° 2011CR1TTT0115 – Valutec, UVHC – 2011.
- [110] Hopkinson – A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets. Philos. Trans. R. Soc. London – 1914.
- [111] Davies – A critical study of hopkinson pressure bar – Philosophical Transaction of Royal Society – 1948.
- [112] Kolsky – An investigation of the properties of materials at very high rates of loading. Proc.Phys. Soc. – 1949.
- [113] Graff – Wave motion in elastic solids – Ohio State University Press – 1975.
- [114] Achenbach – Wave propagation in elastic solids. North-Holland publishing company – 1978.
- [115] Meyers – Dynamic behaviour of materials – John Wiley and Sons Inc – 1994.
- [116] Bathe – Finite element procedures in engineering analysis - Prentice-Hall, New Jersey – 1982.
- [117] Hughes – The finite element method - Linear static and dynamic analysis – Englewoods-Cliffs New Jersey, Prentice Hall – 1987.
- [118] Ilyushin – Plasticité – Edition Eyrolles, Paris – 1956.
- [119] Lemaitre & al – Mécanique des matériaux solides – Dunod, Paris – 1985.
- [120] Dallot – Modélisation des structures multicouches en analyse limite. Application au renforcement de matériau quasi-fragile-acier – thèse de doctorat, ENPC – 2007.
- [121] Salençon – Calcul à la rupture et analyse limite – Presses de l’école nationale des Ponts et Chaussées, Paris – 1983.
- [122] Crisfield – Non linear finite element analysis *of* solids *and* structures, Volume I: Essentials – John Wiley & Sons, England – 1991.

-
- [123] Chen & al – Elastic–plastic contact force history and response characteristics of circular plate subjected to impact by a projectile" – *Acta Mechanica Sinica* – 2007.
- [124] Corbett & al – Impact loading of plates and shells by free-flying projectiles: A review – *International Journal of Impact Engineering* – 1996.
- [125] Goldsmith & al – Plate impact and perforation by projectiles – *Exp. Mech.* 5 – 1965.
- [126] Ning & al – Failure analysis of plastic spherical shells impacted by a projectile – *International Journal of Impact Engineering* – 2006.
- [127] Yang & al – Experimental and theoretical study of elastic-plastic impact force history – Zhang L.C. (ed.) *Engineering Plasticity and Impact Dynamics* – 2001.
- [128] Johnson – *Contact Mechanics* – Cambridge University Press, Cambridge – 1985.
- [129] Ramamurty & al – Mechanical property extraction through conical indentation of a closed-cell aluminum foam – *Acta materialia* – 2004.
- [130] Montanini – Measurement of strain-rate sensitivity of aluminium foams for energy dissipation – *International Journal of Mechanical Sciences* – 2005.
- [131] Rizov – Elastic–plastic response of structural foams subjected to localized static loads – *Materials and Design* – 2006.
- [132] Lu & al – Dynamic indentation and penetration of aluminium foams – *International Journal of Mechanical Sciences* – 2008.
- [133] Shokuhfar & al – Analysis and optimization of smart hybrid composite plates subjected to low-velocity impact using the response surface methodology (RSM) – *Thin-Walled Structures*, Volume 46, Issue 11 – 2008.
- [134] Forsberg & al – Evaluation of response surface methodologies used in crashworthiness optimization – *International Journal of Impact Engineering*, Volume 32, Issue 5 – 2006.
- [135] Shujuan Hou & al – Multiobjective optimization of multi-cell sections for the crashworthiness design", *International Journal of Impact Engineering*, Volume 35, Issue 11 – 2008.
- [136] Chang & al – Crushing analysis and multiobjective crashworthiness optimization of tapered square tubes under oblique impact loading – *Thin-Walled Structures*, Volume 59 – 2012.

-
- [137] Myungsoo Park & al – An optimization of a multi-layered plate under ballistic impact – International Journal of Solids and Structures, Volume 42, Issue 1 – 2005.
- [138] Wang & al – Extension neural network and its applications – Neural Networks, Volume 16, Issues 5-6 – 2003.
- [139] Vanderplaats – Numerical optimization techniques for engineering design – McGraw-Hill – 1984.
- [140] Roux – Response surface approximations for structural optimization – International Journal of Numerical Methods – 1998.
- [141] Myers & al – Response surface methodology process and product optimization using designed experiments – 2nd ed. New York: John Wiley – 2002.
- [142] Kurtaran – Crashworthiness design optimization using successive response surface approximations – Comput Mech – 2002.
- [143] The MathWorks, Inc. – MATLAB Optimization Toolbox – The MathWorks, Inc., Natick, MA 01760 – 2011.
- [144] Todoroki – Design of experiments for stacking sequence optimizations with genetic algorithm using response surface approximation – Composite Structures, Volume 64, Issues 3-4 – 2004.
- [145] http://en.wikipedia.org/wiki/Danie_G._Krige
- [146] Krige – A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand – J. of Chem., Metal. and Mining Soc. of South Africa – 1951.
- [147] Matheron – Principles of Geostatistics – Economic Geol – 1963.
- [148] Gratton & al – Le Matlab Kriging Toolbox Version 4.0 – Manuel de référence, INRS – 2001.
- [149] Dubrule – "Comparing Splines and Kriging – Computers & Geosciences – 1984.
- [150] Goupy & al – Introduction aux plans d'expériences – 3ème édition enrichie, Dunod – 2006

Annexes

Annexe 1 : Détail de la mise sous forme de matrice de l'équilibre autour de l'axe x

Dans le chapitre 2, la mise en équations de l'équilibre autour de l'axe x, a permis d'obtenir un système de $3 \cdot M \cdot N$ équations (pour m variant de 0 à M et n variant de 0 à N) qui sont rappelées si dessous :

$$D_{11} \left(I_{mn} (-\lambda_{am}^2) + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l C_{m/2}^l (-\lambda_{am}^2) + \alpha_m^l (-\lambda_{am}^2) d_{n/2}^l \right) \right) + D_{66} \left(I_{mn} (-\lambda_{bn}^2) + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l (-\lambda_{bn}^2) C_{m/2}^l + \alpha_m^l d_{n/2}^l (-\lambda_{bn}^2) \right) \right) - h^m G_{23}^m \left(I_{mn} + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l C_{m/2}^l + \alpha_m^l d_{n/2}^l \right) \right) - \frac{\rho I}{12} \left(\ddot{I}_{mn} + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l \ddot{C}_{m/2}^l + \alpha_m^l \ddot{d}_{n/2}^l \right) \right) = 0 \quad (\text{A. 1})$$

$$(\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{66}) \left(J_{mn} (\lambda_{am} \lambda_{bn}) + \sum_{l=1}^4 \left(C_{m/3}^l \beta_n^l (-\lambda_{bn}) (-\lambda_{am}) + \alpha_m^l (-\lambda_{am}) d_{n/3}^l (-\lambda_{bn}) \right) \right) = \mathbf{0} \quad (\text{A. 2})$$

$$-\mathbf{h}^m \mathbf{G}_{23}^m \left(\mathbf{A}_{mn} (-\lambda_{am}) + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l C_{m/1}^l (-\lambda_{am}) + \alpha_m^l (-\lambda_{am}) d_{n/1}^l \right) \right) = \mathbf{0} \quad (\text{A. 3})$$

L'équation (A.1) se décompose en une somme de termes qui ont pour facteurs I_{mn} , $C_{m/2}^l$ et $d_{n/2}^l$, \ddot{I}_{mn} , $\ddot{C}_{m/2}^l$ et $\ddot{d}_{n/2}^l$ qui vont ainsi se mettre sous forme de matrice. L'équation suivante représente la factorisation de l'équation (A.1) :

$$I_{mn} (-\lambda_{am}^2 D_{11} - \lambda_{bn}^2 D_{66} - h^m G_{23}^m) + \sum_{l=1}^4 \left(C_{m/2}^l \beta_n^l (D_{11} (-\lambda_{am}^2) + D_{66} (-\lambda_{bn}^2) - h^m G_{23}^m) + d_{n/2}^l \alpha_m^l (D_{11} (-\lambda_{am}^2) + D_{66} (-\lambda_{bn}^2) - h^m G_{23}^m) \right) - \frac{\rho I}{12} \left(\ddot{I}_{mn} - \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l \ddot{C}_{m/2}^l + \alpha_m^l \ddot{d}_{n/2}^l \right) \right) = 0$$

On peut ainsi en déduire les matrices [K11], [B11], [C11] et [M11] de l'équation (2.52). Pour cela, on écrit [K11] comme étant la combinaison de trois matrices :

$$[K11] = [[K11A] \quad [K11I] \quad [K11J]]$$

Avec $[K11A] = [K11J] = 0$

$$\text{Et } [K11I] = \begin{bmatrix} -\lambda_{a0}^2 D_{11} - \lambda_{b0}^2 D_{66} - h^m G_{23}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_{aM}^2 D_{11} - \lambda_{bN}^2 D_{66} - h^m G_{23}^m \end{bmatrix}$$

De la même manière, la matrice [B11] s'écrit comme étant la combinaison de six matrices :

$$[B11] = [[C11_{/1}] \quad [D11_{/1}] \quad [C11_{/2}] \quad [D11_{/2}] \quad [C11_{/3}] \quad [D11_{/3}]]$$

On en déduit que [C12] et [M12] sont des matrices nulles. La matrice [K12] s'écrit comme une combinaison de trois matrices : [K12] = [[K12A] [K12I] [K12J]]. Avec [K12A] = [K12I] = 0.

$$[K12J] = (D_{12} + D_{66}) \begin{bmatrix} (\lambda_{a0}\lambda_{b0}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_{aM}\lambda_{bN}) \end{bmatrix}$$

De la même façon, la matrice [B12] s'écrit :

$$[B12] = [[C12_{/1}] [D12_{/1}] [C12_{/2}] [D12_{/2}] [C12_{/3}] [D12_{/3}]]$$

Avec [C12_{/1}] = [D12_{/1}] = [C12_{/2}] = [D12_{/2}] = 0

$$[C12_{/3}] = (D_{12} + D_{66}) \begin{bmatrix} \beta_0^1 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 \lambda_{bN} \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \lambda_{bN} \lambda_{aM} \\ \\ \beta_0^3 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 \lambda_{bN} \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \lambda_{bN} \lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

$$[D12_{/3}] = (D_{12} + D_{66}) \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 \lambda_{bN} \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 \lambda_{bN} \lambda_{aM} \\ \\ \alpha_0^3 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 \lambda_{bN} \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \lambda_{bN} \lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

Pour l'équation (A.3), on factorise de la même manière que les équations précédentes :

$$h^m G_{23}^m \lambda_{am} A_{mn} + h^m G_{23}^m \left(\sum_{l=1}^4 (C_{m/1}^l \beta_n^l \lambda_{am} + d_{n/1}^l \alpha_m^l \lambda_{am}) \right) = 0$$

On en déduit que [C13] et [M13] sont des matrices nulles. La matrice [K13] s'écrit comme une combinaison de trois matrices : [K13] = [[K13A] [K13I] [K13J]]. Avec [K13I] = [K13J] = 0.

$$[K13A] = \begin{bmatrix} h^m G_{23}^m \lambda_{am} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h^m G_{23}^m \lambda_{am} \end{bmatrix}$$

De la même façon que précédemment, la matrice [B13] s'écrit :

$$[B13] = [[C13_{/1}] [D13_{/1}] [C13_{/2}] [D13_{/2}] [C13_{/3}] [D13_{/3}]]$$

Avec [C13_{/2}] = [D13_{/2}] = [C13_{/3}] = [D13_{/3}] = 0

$$[C13_{/3}] = h^m G_{23}^m \begin{bmatrix} \beta_0^1 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \lambda_{aM} \\ \\ \beta_0^3 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

$$[D13_{/3}] = h^m G_{23}^m \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 \lambda_{aM} \\ \\ \alpha_0^3 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

L'équation (2.52) est ainsi complètement définie.

Annexe 2 : Détail de la mise en équation de l'équilibre autour de l'axe y

La combinaison de l'équation (2.44) avec les solutions (2.45), (2.47) et (2.48), permet d'obtenir un système de $3 \cdot M \cdot N$ équations (pour n variant de 0 à N et m variant de 0 à M) qui est le suivant :

$$\mathbf{D}_{66} \left(\mathbf{J}_{mn}(-\lambda_{am}^2) + \sum_{l=1}^4 \left(\mathbf{C}_{m/3}^l \boldsymbol{\beta}_n^l(-\lambda_{am}^2) + \mathbf{d}_{n/3}^l \boldsymbol{\alpha}_m^l(-\lambda_{am}^2) \right) \right) + \mathbf{D}_{22} \left((-\lambda_{bn}^2) \mathbf{J}_{mn} + \sum_{l=1}^4 \left(\mathbf{C}_{m/3}^l \boldsymbol{\beta}_n^l(-\lambda_{bn}^2) + \mathbf{d}_{n/3}^l(-\lambda_{bn}^2) \boldsymbol{\alpha}_m^l \right) \right) - \mathbf{h}^m \mathbf{G}_{13}^m \left(\mathbf{J}_{mn} + \sum_{l=1}^4 \left(\mathbf{C}_{m/3}^l \boldsymbol{\beta}_n^l + \mathbf{d}_{n/3}^l \boldsymbol{\alpha}_m^l \right) \right) - \frac{\rho l}{12} \left(\ddot{\mathbf{J}}_{mn} + \sum_{l=1}^4 \left(\ddot{\mathbf{C}}_{m/3}^l \boldsymbol{\beta}_n^l + \ddot{\mathbf{d}}_{n/3}^l \boldsymbol{\alpha}_m^l \right) \right) = \mathbf{0} \quad (\text{A. 4})$$

$$(\mathbf{D}_{12} + \mathbf{D}_{66}) \left(\mathbf{I}_{mn} \lambda_{am} \lambda_{bn} + \sum_{l=1}^4 \left(\mathbf{C}_{m/2}^l \boldsymbol{\beta}_n^l \lambda_{am} \lambda_{bn} + \mathbf{d}_{n/2}^l \lambda_{am} \lambda_{bn} \boldsymbol{\alpha}_m^l \right) \right) = \mathbf{0} \quad (\text{A. 5})$$

$$-\mathbf{h}^m \mathbf{G}_{13}^m \left(\mathbf{A}_{mn}(-\lambda_{bn}) + \sum_{l=1}^4 \left(\mathbf{C}_{m/1}^l \boldsymbol{\beta}_n^l(-\lambda_{bn}) + \mathbf{d}_{n/1}^l(-\lambda_{bn}) \boldsymbol{\alpha}_m^l \right) \right) = \mathbf{0} \quad (\text{A. 6})$$

Ce système constitué de $M \cdot N$ équations (A.4), (A.5) et (A.6) peut se mettre sous la forme matricielle représentée par l'équation (2.54). En mettant en facteur les variables \mathbf{J}_{mn} , $\mathbf{C}_{m/3}^l$ et $\mathbf{d}_{n/3}^l$, $\ddot{\mathbf{J}}_{mn}$, $\ddot{\mathbf{C}}_{m/3}^l$ et $\ddot{\mathbf{d}}_{n/3}^l$, on peut en déduire les matrices [K21], [B21], [C21] et [M21] de l'équation (2.55). Pour cela, on écrit [K21] comme étant la combinaison de trois matrices :

$$[\text{K21}] = [[\text{K21A}] \quad [\text{K21I}] \quad [\text{K21J}]]$$

Avec $[\text{K21A}] = [\text{K21I}] = 0$ et :

$$[\text{K21J}] = \begin{bmatrix} -\lambda_{b0}^2 D_{22} - \lambda_{a0}^2 D_{66} - \mathbf{h}^m \mathbf{G}_{13}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_{bN}^2 D_{22} - \lambda_{aN}^2 D_{66} - \mathbf{h}^m \mathbf{G}_{13}^m \end{bmatrix}$$

De la même manière, on écrit la matrice [B21] comme étant la combinaison de six matrices :

$$[\text{B21}] = [[\text{C21}_{/1}] \quad [\text{D21}_{/1}] \quad [\text{C21}_{/2}] \quad [\text{D21}_{/2}] \quad [\text{C21}_{/3}] \quad [\text{D21}_{/3}]].$$

Avec $[\text{C21}_{/1}] = [\text{D21}_{/1}] = [\text{C21}_{/2}] = [\text{D21}_{/2}] = 0$

En définissant $\mathbf{Y}_{mn}^{ab} = (-\lambda_{bn}^2 D_{22} - \lambda_{am}^2 D_{66} - \mathbf{h}^m \mathbf{G}_{13}^m)$, on a :

$$[\text{C21}_{/3}] = \begin{bmatrix} \beta_0^1 \mathbf{Y}_{00}^{ab} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 \mathbf{Y}_{00}^{ab} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 \mathbf{Y}_{MN}^{ab} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \mathbf{Y}_{MN}^{ab} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccccccc} \beta_0^3 Y_{00}^{ab} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 Y_{00}^{ab} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 Y_{MN}^{ab} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 Y_{MN}^{ab} \end{array} \right] \\
[D21]_{/3} &= \left[\begin{array}{cccccccc} \alpha_0^1 Y_{00}^{ab} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 Y_{00}^{ab} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 Y_{MN}^{ab} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 Y_{MN}^{ab} \end{array} \right] \\
& \left[\begin{array}{cccccccc} \alpha_0^3 Y_{00}^{ab} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 Z_{00}^{ab} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 Y_{MN}^{ab} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 Y_{MN}^{ab} \end{array} \right] \\
[M21] &= \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\rho I}{12} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\rho I}{12} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

La matrice [C21] s'écrit comme une combinaison de six matrices :

$$[C21] = [[\check{C}21_{/1}] \quad [\check{D}21_{/1}] \quad [\check{C}21_{/2}] \quad [\check{D}21_{/2}] \quad [\check{C}21_{/3}] \quad [\check{D}21_{/3}]]$$

Avec $[\check{C}21_{/1}] = [\check{D}21_{/1}] = [\check{C}21_{/2}] = [\check{D}21_{/2}] = 0$

$$[\check{C}11_{/3}] = -\frac{\rho I}{12} \left[\begin{array}{cccccccccccc} \beta_0^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \end{array} \right]$$

$$[\check{D}11_{/3}] = -\frac{\rho I}{12} \left[\begin{array}{cccccccccccc} \alpha_0^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \end{array} \right]$$

De la même manière si l'on factorise l'équation (A.5), en fonction des facteurs I_{mn} , $C_{m/2}^l$ et $d_{n/2}^l$, on obtient les matrices [K22], [B22], [C22] et [M22] de l'équation (2.55) et on en déduit que [C22] et [M22] sont des matrices nulles. La matrice [K22] s'écrit comme une combinaison de trois matrices : $[K22] = [[K22A] \quad [K22I] \quad [K22J]]$. Avec $[K12A] = [K12J] = 0$.

$$[K22I] = (D_{12} + D_{66}) \begin{bmatrix} (\lambda_{a0}\lambda_{b0}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (\lambda_{aM}\lambda_{bN}) \end{bmatrix}$$

De la même façon, la matrice [B22] s'écrit :

$$[B22] = [[C22_{/1}] \quad [D22_{/1}] \quad [C22_{/2}] \quad [D22_{/2}] \quad [C22_{/3}] \quad [D22_{/3}]]$$

Avec $[C22_{/1}] = [D22_{/1}] = [C22_{/3}] = [D22_{/3}] = 0$

$$[C22_{/2}] = (D_{12} + D_{66}) \begin{bmatrix} \beta_0^1 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 \lambda_{bN} \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \lambda_{bN} \lambda_{aM} \\ \\ \beta_0^3 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 \lambda_{bN} \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \lambda_{bN} \lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

$$[D22_{/2}] = (D_{12} + D_{66}) \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 \lambda_{bN} \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 \lambda_{bN} \lambda_{aM} \\ \\ \alpha_0^3 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 \lambda_{b0} \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 \lambda_{bN} \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \lambda_{bN} \lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

Pour l'équation (A.6), on factorise en fonction des variables A_{mn} , $C_{m/1}^1$ et $d_{n/1}^1$ et on en déduit que [C32] et [M32] sont des matrices nulles. La matrice [K32] s'écrit comme une combinaison de trois matrices : $[K32] = [[K32A] \quad [K32I] \quad [K32J]]$. Avec $[K32I] = 0$ et $[K32J] = 0$.

$$[K32A] = \begin{bmatrix} h^m G_{13}^m \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h^m G_{13}^m \lambda_{bN} \end{bmatrix}$$

De la même manière, on écrit la matrice [B31] comme étant la combinaison de quatre matrices : $[B31] = [[C31_{/1}] [D31_{/1}] [C31_{/2}] [D31_{/2}] [C31_{/3}] [D31_{/3}]]$.

Avec $[C31_{/2}] = [D31_{/2}] = [C31_{/3}] = [D31_{/3}] = 0$

$$[C23_{/1}] = h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} \beta_0^1 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 \lambda_{bN} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \lambda_{bN} \\ \\ \beta_0^3 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 \lambda_{bN} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \lambda_{bN} \end{bmatrix}$$

$$[D23_{/1}] = h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 \lambda_{bN} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 \lambda_{bN} \\ \\ \alpha_0^3 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 \lambda_{bN} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \lambda_{bN} \end{bmatrix}$$

L'équation (2.54) est ainsi complètement définie.

Annexe 3 : Détail de la mise en équation de l'équilibre suivant l'axe normal z

La combinaison de l'équation (2.42) avec les solutions (2.45), (2.47) et (2.48), permet d'obtenir un système de $3 \cdot M \cdot N$ équations (pour n variant de 0 à N et m variant de 0 à M) qui est le suivant :

$$h^m G_{23}^m (A_{mn}(-\lambda_{am}^2) + \sum_{l=1}^4 (C_{m/1}^l(-\lambda_{am}^2)\beta_n^l + d_{n/1}^l \alpha_m^l(-\lambda_{am}^2))) + h^m G_{13}^m (A_{mn}(-\lambda_{bn}^2) + \sum_{l=1}^4 (C_{m/1}^l \beta_n^l(-\lambda_{bn}^2) + d_{n/1}^l(-\lambda_{bn}^2))) + F_{mn} - \rho h \ddot{w} (\ddot{A}_{mn} + \sum_{l=1}^4 (\ddot{C}_{m/1}^l \beta_n^l + \ddot{d}_{n/1}^l \alpha_m^l)) = 0 \quad (\text{A. 7})$$

$$h^m G_{23}^m (I_{mn}(-\lambda_{am}) + \sum_{l=1}^4 (C_{m/2}^l(-\lambda_{am})\beta_n^l + d_{n/2}^l \alpha_m^l(-\lambda_{am}))) = 0 \quad (\text{A. 8})$$

$$h^m G_{13}^m (J_{mn}(-\lambda_{bn}) + \sum_{l=1}^4 (C_{m/3}^l \beta_n^l(-\lambda_{bn}) + d_{n/3}^l \alpha_m^l(-\lambda_{bn}))) = 0 \quad (\text{A. 9})$$

Ce système constitué de $M \cdot N$ équations (A.7), (A.8) et (A.9) peut se mettre sous la forme matricielle représentée par l'équation (2.58). Les matrices [K3], [B3], [M3] et [C3] sont définies de la façon suivante :

$$[K3] = \begin{bmatrix} [K31] \\ [K32] \\ [K33] \end{bmatrix} \quad [B3] = \begin{bmatrix} [B31] \\ [B32] \\ [B33] \end{bmatrix} \quad [M3] = \begin{bmatrix} [M31] \\ [M32] \\ [M33] \end{bmatrix} \quad [C3] = \begin{bmatrix} [C31] \\ [C32] \\ [C33] \end{bmatrix}$$

En mettant en facteur les variables A_{mn} , A_{mn} , $C_{m/1}^l$ et $d_{n/1}^l$, \ddot{A}_{mn} , $\ddot{C}_{m/1}^l$ et $\ddot{d}_{n/1}^l$ de l'équation (A.7), on peut en déduire les matrices [K31], [B31], [C31], [M31] et [E3]. Pour cela, on écrit [K31] comme étant la combinaison de trois matrices :

$$[K31] = [[K31A] \quad [K31I] \quad [K31J]]$$

Avec $[K31I] = [K31J] = 0$ et :

$$[K21A] = - \begin{bmatrix} h^m G_{23}^m \lambda_{a0}^2 + h^m G_{13}^m \lambda_{b0}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h^m G_{23}^m \lambda_{aM}^2 + h^m G_{13}^m \lambda_{bN}^2 \end{bmatrix}$$

De la même manière, on écrit la matrice [B31] comme étant la combinaison de six matrices :

$$[B31] = [[C31_{/1}] \quad [D31_{/1}] \quad [C31_{/2}] \quad [D31_{/2}] \quad [C31_{/3}] \quad [D31_{/3}]]$$

Avec $[C31_{/2}] = [D31_{/2}] = [C31_{/3}] = [D31_{/3}] = 0$

De la même manière si l'on factorise l'équation (A.7), en fonction des facteurs I_{mn} , $C_{m/2}^l$ et $d_{n/2}^l$, on obtient les matrices [K32], [B32], [C32] et [M32] et on en déduit que [C32] et [M32] sont des matrices nulles. La matrice [K32] s'écrit comme une combinaison de trois matrices : $[K32] = [[K32A] \quad [K32I] \quad [K32J]]$. Avec $[K12A] = [K12J] = 0$.

$$[K32I] = h^m G_{23}^m \begin{bmatrix} -\lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

De la même façon, la matrice [B32] s'écrit :

$$[B32] = [[C32_{/1}] \quad [D32_{/1}] \quad [C32_{/2}] \quad [D32_{/2}] \quad [C32_{/3}] \quad [D32_{/3}]]$$

Avec $[C32_{/1}] = [D32_{/1}] = [C32_{/3}] = [D32_{/3}] = 0$

$$[C32_{/2}] = -h^m G_{23}^m \begin{bmatrix} \beta_0^1 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \lambda_{aM} \\ \\ \beta_0^3 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

$$[D22_{/2}] = -h^m G_{23}^m \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 \lambda_{aM} \\ \\ \alpha_0^3 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 \lambda_{a0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 \lambda_{aM} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \lambda_{aM} \end{bmatrix}$$

Pour l'équation (A.9), on factorise en fonction des variables J_{mn} , $C_{m/3}^l$ et $d_{n/3}^l$ et on en déduit que [C33] et [M33] sont des matrices nulles. La matrice [K33] s'écrit comme une

combinaison de trois matrices : $[K33] = [[K33A] \quad [K33I] \quad [K33J]]$. Avec $[K33A] = 0$ et $[K33I] = 0$.

$$[K33J] = - \begin{bmatrix} h^m G_{13}^m \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & h^m G_{13}^m \lambda_{bN} \end{bmatrix}$$

De la même manière, on écrit la matrice $[B33]$ comme étant la combinaison de six matrices : $[B33] = [[C33_{/1}] \quad [D33_{/1}] \quad [C33_{/2}] \quad [D33_{/2}] \quad [C33_{/3}] \quad [D33_{/3}]]$.

Avec $[C31_{/2}] = [D31_{/2}] = [C31_{/3}] = [D31_{/3}] = 0$

$$[C13_{/3}] = -h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} \beta_0^1 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 \lambda_{bN} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \lambda_{bN} \\ \\ \beta_0^3 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 \lambda_{bN} & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \lambda_{bN} \end{bmatrix}$$

$$[D13_{/3}] = -h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 \lambda_{bN} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 \lambda_{bN} \\ \\ \alpha_0^3 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 \lambda_{b0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 \lambda_{bN} & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \lambda_{bN} \end{bmatrix}$$

L'équation (2.58) est ainsi complètement définie.

Annexe 4 : Détail du calcul des matrices des conditions aux limites

4.1. Equilibre des efforts tranchants en $x=0$

L'équation ($k_{x0}w = T_x$) issue des équations (2.38), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& k_{x0} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \\
& = h^m G_{23}^m \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right]
\end{aligned}$$

Sachant que $x=0$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& k_{x0} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \beta_n^l \cos(\lambda_{bn}y) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \alpha_m^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \\
& = h^m G_{23}^m \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l \beta_n^l \cos(\lambda_{bn}y) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \alpha_m^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right]
\end{aligned}$$

On écrit [Q1] comme étant la combinaison de trois matrices :

$[Q1] = [[Q1A] \quad [Q1I] \quad [Q1J]]$. Avec $[Q1J] = 0$ et :

$$[Q1A] = k_{x0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Q1I] = -h^m G_{23}^m \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[H2D_{/3}] = \lambda_{bn} D_{12} \begin{bmatrix} \alpha_0^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 \\ & & & & & & & \\ & & & \alpha_0^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \end{bmatrix}$$

Pour cela, on écrit [Q2] comme étant la combinaison de trois matrices :

[Q2] = [[Q2A] [Q2I] [Q2J]]. Avec [Q2A] = [Q2I] = 0 et :

$$[Q2J] = \lambda_{bn} D_{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3. Equilibre des efforts tranchants en $x=a$

L'équation ($k_{x1}w = -T_x$) issue des équations (2.38), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& k_{x1} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \\
& = -h^m G_{23}^m \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right]
\end{aligned}$$

Sachant que $x=a$, et $\cos(m\pi)=(-1)^m$ et $\sin(m\pi)=0$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^4 \left(k_{x1} \beta_n^l C_{m/1}^l (-1)^m + d_{n/1}^l \alpha_m^l k_{x1} (-1)^m \right) \\
& \quad + \sum_{l=1}^4 \left(C_{m/2}^l \beta_n^l h^m G_{23}^m (-1)^m + d_{n/2}^l \alpha_m^l h^m G_{23}^m (-1)^m \right) \\
& = -A_{mn} k_{x1} (-1)^m - I_{mn} h^m G_{23}^m (-1)^m
\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[H3]\{P\} = [Q3]\{A\}$$

$$\text{Avec : } [H3] = \begin{bmatrix} [H3C_{/1}] & [H3D_{/1}] & [H3C_{/2}] & [H3D_{/2}] & [H3C_{/3}] & [H3D_{/3}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } [H3C_{/3}] = [H3D_{/3}] = 0$$

4.4. Equilibre des moments fléchissants en $x=a$

L'équation ($K_{x1}w_{,x} = \mathcal{M}_x$) issue des équations (2.38), s'écrit :

$$\begin{aligned}
K_{x1} & \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) + \xi_a^{l'}(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \Big] \\
& = \left(D_{11} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \right. \\
& + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) + \xi_a^{l'}(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \Big] \\
& + D_{12} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} (-\lambda_{bn}) \cos(\lambda_{am}x) \sin(\lambda_{bn}y) \right. \\
& + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^{l'}(y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \Big] \Big)
\end{aligned}$$

Sachant que $x=a$, et $\cos(m\pi)=(-1)^m$ et $\sin(m\pi)=0$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
0 = D_{12} & \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} (-\lambda_{bn}) (-1)^m \sin(\lambda_{bn}y) \right. \\
& + \sum_{l=1}^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l (-1)^m \right. \\
& \left. \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l (-1)^m \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right]
\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[H4]\{P\} = [Q4]\{A\}$$

$$\text{Avec : } [H4] = \begin{bmatrix} [H4C_{/1}] & [H4D_{/1}] & [H4C_{/2}] & [H4D_{/2}] & [H4C_{/3}] & [H4D_{/3}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } [H4C_{/1}] = [H4D_{/1}] = [H4C_{/2}] = [H4D_{/2}] = 0$$

$$\begin{aligned}
[H4C/3] &= \lambda_{bn} D_{12} \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^M \beta_N^1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^M \beta_N^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \beta_0^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^M \beta_N^3 & 0 & \dots & 0 & (-1)^M \beta_N^4 \end{bmatrix} \\
[H4D/3] &= \lambda_{bn} D_{12} \begin{bmatrix} \alpha_0^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^M \alpha_M^1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^M \alpha_M^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \alpha_0^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^M \alpha_M^3 & 0 & \dots & 0 & (-1)^M \alpha_M^4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On écrit [Q4] comme étant la combinaison de trois matrices :

[Q4] = [[Q4A] [Q4I] [Q4J]]. Avec [Q4A] = [Q4I] = 0 et :

$$[Q4J] = \lambda_{bn} D_{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^M \end{bmatrix}$$

4.5. Equilibre des efforts tranchants en $y=0$

L'équation ($k_{y0}w = T_y$) issue des équations (2.38), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& k_{y0} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \\
& = h^m G_{13}^m \left(\left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \right) \\
& \quad + \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} (-\lambda_{bn}) \cos(\lambda_{am}x) \sin(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right] \Big)
\end{aligned}$$

Sachant que $y=0$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& k_{y0} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^l \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l \cos(\lambda_{am}x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \right) \right] \\
& = h^m G_{13}^m \left(\left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^l \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l \cos(\lambda_{am}x) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l \cos(\lambda_{am}x) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

Ce qui se réduit à une somme de cosinus, il est donc nécessaire que chaque terme soit nul, d'où :

$$\sum_{l=1}^4 \left(k_{y0} \beta_n^l C_{m/1}^l + k_{y0} \alpha_m^l d_{n/1}^l - h^m G_{13}^m \beta_n^l C_{m/3}^l - h^m G_{13}^m \alpha_m^l d_{n/3}^l \right) = h^m G_{13}^m J_{mn} - k_{y0} A_{mn}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[H5]\{P\} = [Q5]\{A\}$$

$$\text{Avec : } [H5] = [[H5C_{/1}] \quad [H5D_{/1}] \quad [H5C_{/2}] \quad [H5D_{/2}] \quad [H5C_{/3}] \quad [H5D_{/3}]]$$

$$\text{Et : } [H5C_{/2}] = [H5D_{/2}] = 0$$

$$[H5C_{/1}] = k_{y0} \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \end{bmatrix}$$

$$[H5D_{/1}] = k_{y0} \begin{bmatrix} \alpha_0^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \end{bmatrix}$$

$$[H5C_{/3}] = -h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \end{bmatrix}$$

$$[H5D_{/3}] = -h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} \alpha_0^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_M^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_M^4 \end{bmatrix}$$

On écrit [Q5] comme étant la combinaison de trois matrices :

$$[Q5] = [[Q5A] \quad [Q5I] \quad [Q5J]]. \text{ Avec } [Q5J] = 0 \text{ et :}$$

$$[Q1A] = -k_{y0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[Q1I] = h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6. Equilibre des moments fléchissants en $y=0$

L'équation ($K_{y0}w_{,y} = -\mathcal{M}_y$) issue des équations (2.38), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& K_{y0} \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} (-\lambda_{bn}) \cos(\lambda_{am}x) \sin(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^{l'}(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right) \\
& = - \left(D_{12} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) + \xi_a^{l'}(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \right) \\
& \quad + D_{22} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} (-\lambda_{bn}) \cos(\lambda_{am}x) \sin(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^{l'}(y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right] \Big)
\end{aligned}$$

Sachant que $y=0$, on obtient l'équation suivante :

$$0 = \left(D_{12} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} (\lambda_{am}) + \sum_{l=1}^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^l \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l (\lambda_{am}) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^l (\lambda_{am}) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \right) \right] \right)$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[H6]\{P\} = [Q6]\{A\}$$

$$\text{Avec : } [H6] = \begin{bmatrix} [H6C_{/1}] & [H6D_{/1}] & [H6C_{/2}] & [H6D_{/2}] & [H6C_{/3}] & [H6D_{/3}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } [H6C_{/1}] = [H6D_{/1}] = [H6C_{/3}] = [H6D_{/3}] = 0$$

$$[H2C_{/2}] = \lambda_{am} D_{12} \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^2 \\ & & & & & & & \\ & & & \beta_0^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & \dots & 0 & \beta_N^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_N^4 \end{bmatrix}$$

4.7. Equilibre des efforts tranchants en $y=b$

L'équation ($k_{y1}w = -T_y$) issue des équations (2.38), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& k_{y1} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \\
& = -h^m G_{13}^m \left(\left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} \cos(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} (-\lambda_{bn}) \cos(\lambda_{am}x) \sin(\lambda_{bn}y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

Sachant que $y=b$, et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
& k_{y1} \left[A_{mn} (-1)^m + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l (-1)^m C_{m/1}^l + \alpha_m^l d_{n/1}^l (-1)^m \right) \right] \\
& = -h^m G_{13}^m \left(J_{mn} (-1)^m + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l (-1)^m C_{m/3}^l + \alpha_m^l d_{n/3}^l (-1)^m \right) \right)
\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[H7]\{P\} = [Q7]\{A\}$$

$$\text{Avec : } [H7] = \left[\begin{array}{cccccc} [H7C_{/1}] & [H7D_{/1}] & [H7C_{/2}] & [H7D_{/2}] & [H7C_{/3}] & [H7D_{/3}] \end{array} \right]$$

$$\text{Et : } [H7C_{/2}] = [H7D_{/2}] = 0$$

$$[H3C_{/1}] = k_{y1} \left[\begin{array}{cccccc} \beta_0^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^2 \\ & & & & & & & \\ & \beta_0^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^3 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^4 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
[H3D_{/1}] &= k_{y1} \begin{bmatrix} \alpha_0^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \alpha_0^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^3 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^4 \end{bmatrix} \\
[H3C_{/3}] &= h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \beta_0^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^3 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^4 \end{bmatrix} \\
[H3D_{/3}] &= h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} \alpha_0^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \alpha_0^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^3 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On écrit [Q7] comme étant la combinaison de trois matrices :

[Q7] = [[Q7A] [Q7I] [Q7J]]. Avec [Q7J] = 0 et :

$$\begin{aligned}
[Q7A] &= -k_{y1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^M \end{bmatrix} \\
[Q7I] &= -h^m G_{13}^m \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^M \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.8. Equilibre des moments fléchissants en $y=b$

L'équation ($K_{y1}w_{,y} = \mathcal{M}_y$) issue des équations (2.38), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& K_{y1} \left(\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} (-\lambda_{bn}) \cos(\lambda_{am}x) \sin(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^{l'}(y) \sum_{m=0}^M C_{m/1}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/1}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right) \\
& = \left(D_{12} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N I_{mn} (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) \cos(\lambda_{bn}y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^l(y) \sum_{m=0}^M C_{m/2}^l (-\lambda_{am}) \sin(\lambda_{am}x) + \xi_a^{l'}(x) \sum_{n=0}^N d_{n/2}^l \cos(\lambda_{bn}y) \right) \right] \right) \\
& \quad + D_{22} \left[\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N J_{mn} (-\lambda_{bn}) \cos(\lambda_{am}x) \sin(\lambda_{bn}y) \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l=1}^4 \left(\xi_b^{l'}(y) \sum_{m=0}^M C_{m/3}^l \cos(\lambda_{am}x) + \xi_a^l(x) \sum_{n=0}^N d_{n/3}^l (-\lambda_{bn}) \sin(\lambda_{bn}y) \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

Sachant que $y=b$, et $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$, on obtient l'équation suivante :

$$0 = D_{12} \left[\sum_{m=0}^M I_{mn} (-\lambda_{am}) (-1)^n + \sum_{l=1}^4 \left(\beta_n^l (-1)^n C_{m/2}^l (-\lambda_{am}) + \alpha_m^l (-\lambda_{am}) d_{n/2}^l (-1)^n \right) \right]$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[H8]\{P\} = [Q8]\{A\}$$

$$\text{Avec : } [H8] = \begin{bmatrix} [H8C_{/1}] & [H8D_{/1}] & [H8C_{/2}] & [H8D_{/2}] & [H8C_{/3}] & [H8D_{/3}] \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } [H8C_{/1}] = [H8D_{/1}] = [H8C_{/2}] = [H8D_{/2}] = 0$$

$$\begin{aligned}
[H8C_{/2}] = \lambda_{am} D_{12} & \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^2 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \beta_0^3 & 0 & \dots & 0 & \beta_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^3 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \beta_N^4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$[H8D_{/2}] = \lambda_{am} D_{12} \begin{bmatrix} \alpha_0^1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^2 \\ \alpha_0^3 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^3 & 0 & \dots & 0 & (-1)^N \alpha_M^4 \end{bmatrix}$$

On écrit [Q8] comme étant la combinaison de trois matrices :

[Q8] = [[Q8A] [Q8I] [Q8J]]. Avec [Q8A] = [Q8J] = 0 et :

$$[Q4I] = -\lambda_{am} D_{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^N \end{bmatrix}$$

Finalement, les matrices du système (2.61) sont complémentés définies.

Annexe 5 : Fichier de données du modèle analytique et interface graphique

5.1. Exemple de fichier de données

La Figure 101 présente un exemple de fichier de données, correspondant à l'impact d'un projectile conique sur une plaque tri-couches. Le début du fichier de données concerne les dimensions totales de la structure impactée (longueur, largeur et épaisseur). La seconde partie concerne la composition de la plaque, avec les différentes couches et les données matériaux (limites élastiques, modules de cisaillement, coefficients de poisson, masse volumique, orientation des matériaux, ratio de l'épaisseur totale, les paramètres plastiques de la loi de Ludwig et les paramètres de rupture). La troisième partie de ce fichier concerne le chargement, avec la position du point d'impact. La quatrième partie concerne les données de l'impact, avec le choix d'un projectile sphérique ou conique, la masse totale de ce dernier, le diamètre de la sphère ou de la tête conique, la vitesse d'impact et la constante du contact de Hertz. La dernière partie concerne les données de résolution du problème, avec le nombre de termes de la série de Fourier, la durée de simulation, le nombre de pas de temps, le choix d'une modélisation élastique ou plastique et le coefficient de cisaillement de la plaque.

```

^TITLE
IMPACT
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
$
$
GEOMETRICAL DATA
$
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
*GDATA
$
A      B      H
1000.  1000.  53.8
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
$
$
MATERIAL DATA
$
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
*MDATA
$
IC      E11      E22      G12      G23      NU12      RHO      THETA  TH/THICK  A      B      n      ALPHA  EPSF  LAMBDA
1  210000.  210000.  80769.23  80769.23  0.3  7.833E-3  0.  0.014869  0.  0.  0.  0.  0.  0.
2  200.  200.  100.  100.  0.0  4.100E-4  0.  0.929368  2.  0.  0.  0.  0.  0.
3  69000.  69000.  26538.46  26538.46  0.3  2.600E-3  0.  0.055762  67.456  471.242  0.4241  1.0  0.4  0.1
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
$
$
LOADING DATA
$
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
*LDATA
$
ITLOAD  P0      XSI      ETA      C      D
2  1.  500  500  1.  1.
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
$
$
PROJECTILE DATA
$
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
*PDATA
$
ITYPE  MASS  DIAMETER  VEL  KHERTZ
2  50000  6.0  17  48271.17
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
$
$
SOLVER DATA
$
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
*SDATA
$
ISOL  FREQ  NSERIES  TTIME  NSTEP  NITER  IFLAS  CSHBAR
1  300  20  30.0  8000  1  1  0.03081
$-----1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10-----11-----12-----13-----14-----15
*END

```

Figure 101 : Exemple de fichier de données

5.2. Interface graphique

L'interface utilisateur permettant de créer le fichier de données précédent, est présentée avec les figures suivantes. Elle a été créée sous forme d'onglets dont le premier présenté en Figure 102, sert à rentrer les données géométriques et matériaux de la structure qui sera impactée.

The screenshot shows the first tab of the graphical interface, titled 'Plaque'. The interface is divided into several sections:

- Top navigation:** A row of tabs: 'Plaque' (selected), 'Projectile', 'Conditions aux Limites', 'Paras Résolution', 'Post Traitement', and 'Autres options'.
- Geometric parameters:**
 - (a) coté plaque :
 - (b) coté plaque : Nombre couches :
 - (h) épaisseur totale :
- Material properties section:** A dropdown menu is set to '3 couches'. Below it, there are three identical sets of input fields for material properties:
 - Row 1: (E11) : (E22) : (G11) :
 - Row 2: (G22) : (nu) : (rho) :
 - Row 3: (ang) : (epp) :

Figure 102 : Interface graphique - premier onglet

La Figure 103, présente le second onglet, qui est consacré aux données du projectile et le troisième onglet qui est consacré aux ressorts des conditions aux limites.

The screenshot shows the second and third tabs of the graphical interface:

- Second tab (Projectile):**
 - Top navigation: 'Plaque', 'Projectile' (selected), 'Conditions aux Limites', 'Paras Résolution', 'Post Traitement', 'Autres options'.
 - Parameters:
 - (MassImp) Masse impac :
 - (D) Diamètre impacteur :
 - (V) Vitesse impacteur :
 - (kh) Constante Hertz :
- Third tab (Conditions aux Limites):**
 - Top navigation: 'Plaque', 'Projectile', 'Conditions aux Limites' (selected), 'Paras Résolution', 'Post Traitement', 'Autres options'.
 - Parameters:
 - Row 1: (KT1) : (KT2) : (KT3) : (KT4) :
 - Row 2: (KR1) : (KR2) : (KR3) : (KR4) :

Figure 103 : Interface graphique - second et troisième onglet

La Figure 104 présente le quatrième onglet qui est consacré aux paramètres de résolutions et sert ensuite à lancer une simulation.

Plaque Projectile Conditions aux Limites **Paras Résolution** Post Traitement Autres options

(M) M Fourier :

(nstep) Discretisation T :

(ttime) Temps de simulation :

Elasticité

Plasticité & ecrasement de mousse

Rupture

Actualiser

0 %

Figure 104 : Interface graphique - quatrième onglet

La Figure 105 présente l'onglet de post-traitement qui permet d'afficher les résultats du modèle sur deux écrans séparés. Actuellement, les résultats disponibles en post-traitement sont l'effort d'impact, la vitesse du projectile, le déplacement du projectile, le déplacement de la face arrière de la structure impactée, et l'indentation.

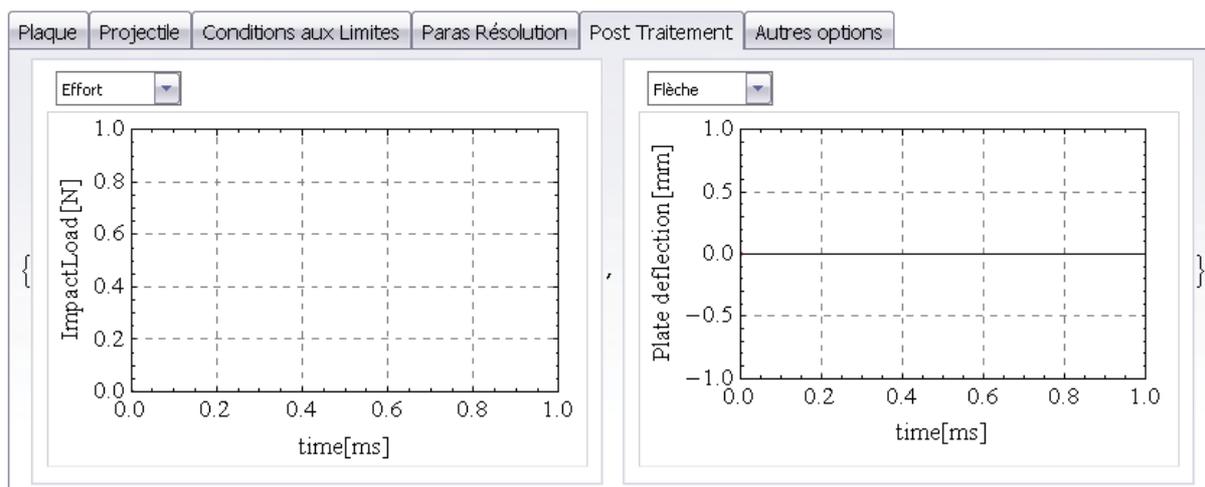


Figure 105 : Interface graphique - cinquième onglet

Annexe 6 : détail des éléments du montage expérimental.

Le banc d'essai utilisé pour les essais présentés dans les chapitres 3 et 5, est basé sur la catapulte de crash de la société Valutec. Elle est constituée d'un tunnel de mise en vitesse (Figure 106) et d'un marbre d'impact (Figure 109.a). La mise en vitesse est assurée par un câble sans fin relié au chariot. Le câble se désolidarise du système mis en vitesse quelques mètres avant le marbre.



Figure 106 : Tunnel de la catapulte de crash

Le système qui est mis en vitesse est un chariot qui a été conçu pour impacter une cible. Il est constitué d'une partie centrale réglable qui permet de régler la hauteur du point d'impact qui sera réalisé par un second chariot. Ce chariot principal (Figure 107) est arrêté par un ensemble de tubes de chocs, couplé à un système anti-retour sur le bas du chariot. Cela permet de ne pas créer de perturbations sur le second chariot.



Figure 107 : Chariot principal - vue avant (a) et vue arrière (b)

La Figure 108 présente le petit chariot qui sert à impacter les différentes éprouvettes. La tête d'impact est une pyramide à trois cotés de type « box corner ». Pour mesurer l'effort d'impact, une cellule d'effort est fixée entre la tête du projectile et le petit chariot.



Figure 108 : second chariot – vue de dessus (a) et vue de face (b)

La Figure 109 présente le marbre de la catapulte avec le montage servant à tenir les éprouvettes avec la caméra filmant l'essai en vue de dessus et la barrière de vitesse positionnée devant le montage.

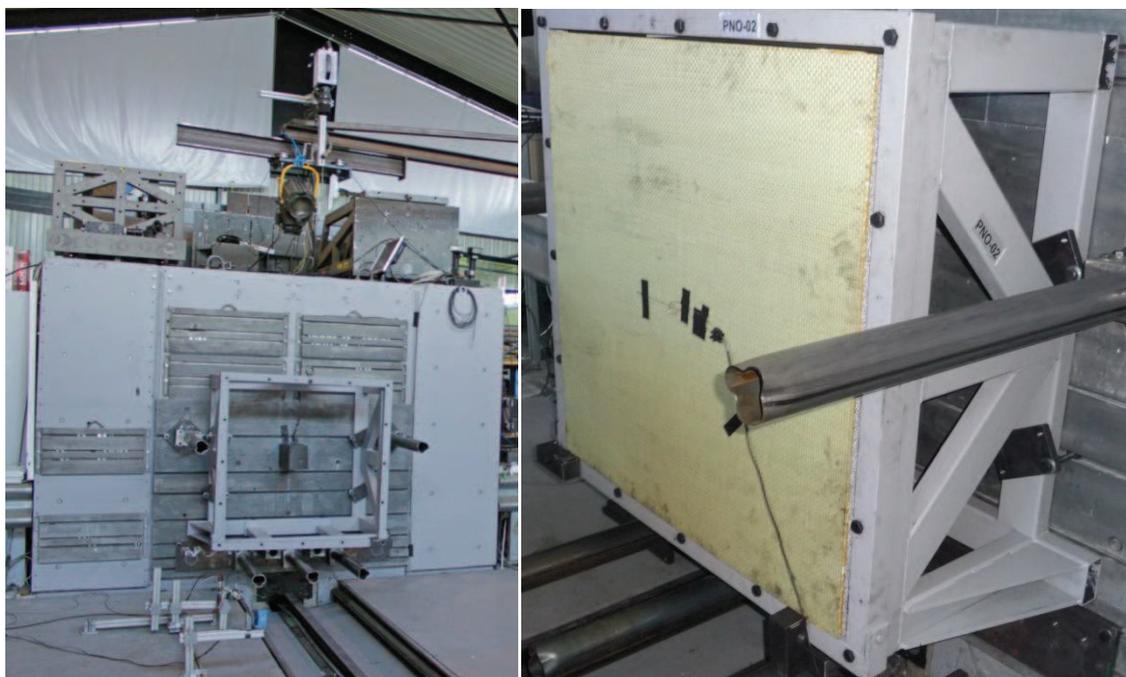


Figure 109 : marbre de la catapulte et montage (a) et détail du montage avec une éprouvette (b)

Annexe 7 : détail des pièces de la modélisation éléments finis

CONFIDENTIEL

Résumé

Dans le cadre du développement d'un outil semi-analytique de pré-dimensionnement de structures sandwich soumises à des impacts à vitesse intermédiaire ($<20\text{m.s}^{-1}$), nous proposons la détermination d'une solution efficace, basée sur les séries de Fourier avec des conditions aux limites générales. Les équations gouvernantes qui permettent de décrire la réponse transitoire élastique de plaques stratifiées orthotropes avec prise en compte d'une loi non linéaire de contact hertzien sont développées en utilisant un schéma de discrétisation temporelle explicite. Pour les conditions aux limites générales, la solution en séries de Fourier est complétée par une série mixte de polynômes-cosinus, qui permet d'aboutir à la solution, tout en permettant à la série de satisfaire les équations d'équilibres ainsi que les conditions limites, de façon exacte en augmentant le nombre de termes de la série. Afin de tenir compte des phénomènes physiques locaux lors de l'impact de structure sandwich, la plasticité et la rupture locale de la plaque anti-perforation sont introduites dans une formulation modifiée du contact de Hertz et l'écrasement de l'âme du sandwich est ajouté dans l'équation d'équilibre du projectile. Les solutions obtenues par cette méthode sont en accord avec les résultats par modélisation éléments finis de plaques composites multicouches impactées par un projectile. Une campagne expérimentale d'impact de type « box corner » sur des plaques sandwich de 1m^2 , a servi de référence expérimentale et permis la validation de ce modèle complet. Finalement, le couplage de ce modèle à un optimiseur basé sur les techniques de plans d'expériences et de surfaces de réponses (métamodèles), nous a permis de choisir la meilleure structure d'absorption d'énergie (matériaux et géométrie) pour des structures plaques soumises à des impacts de 7kJ . Un test sur un véhicule réel avec la configuration structurelle choisie, nous a permis de valider l'outil final de pré-dimensionnement et de confirmer la qualité des résultats numériques obtenus par ce modèle semi-analytique.

Abstract

A semi-analytical tool for the design of sandwich structures under intermediate speed loadings impact ($<20\text{m.s}^{-1}$) is proposed by using an efficient solution based on the Fourier series with general boundary conditions. The governing equations, which describe dynamic elastic response of orthotropic laminates and include the nonlinear Hertzian contact law, are derived by means of explicit time discretization. For the general boundary conditions, the Fourier series solution is supplemented with mixed polynomial-cosine series, which allows derivation of the classical solution by letting the series satisfy exactly the governing differential equation and the boundary conditions with increased values of terms series. To take local physical behavior during sandwich structure impact into account, local plasticity and failure of the protection plate are introduced in a modified form of the Hertzian contact and the compression of the foam is added in the equilibrium equation of the projectile. The solutions obtained with this new method are close to those found by finite element simulations for impact on multilayers composite structures. An experimental campaign with one square meter sandwich structures impacted by corner box projectile is then used to validate the whole model. Finally, the best sandwich structure for energy absorption under a 7kJ impact (material and geometry) is chosen by coupling the model with an optimizer based on the metamodel approach. This solution is applied to a real vehicle and the results confirm the quality of the design of the structure.