



Thèse en cotutelle

entre

l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès (Algérie)

et

l'Université de Reims Champagne-Ardenne (France)

En vue d'obtenir le titre de

Docteur en Sciences
Spécialité : Mécanique

**Docteur de l'Université de Reims
Champagne-Ardenne**
Spécialité : Mécanique

Présentée par

Abdelkader-Djillali HAMMOU

Contribution à l'étude et à la modélisation du comportement dynamique des emballages

Thèse soutenue le 19/12/ 2012, devant le jury composé de :

Abdelkader MEGUENI Professeur, LMSD-Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes, Algérie	Président
Xiao Lu GONG Professeur, LASMIS-Université de Technologie de Troyes, France	Examineur/Rapporteur*
Abbes BACHIR BOUIADJRA Professeur, LMPM-Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes, Algérie	Examineur/Rapporteur*
Ying-Qiao GUO Professeur, GRESPI/MPSE-Université de Reims Champagne-Ardenne, France	Examineur
Boussad ABBÈS Maître de Conférences-HDR, GRESPI/MPSE-Université de Reims Champagne-Ardenne, France	Directeur de thèse
Mohammed MAKHLOUF Maître de Conférences, LMSR-Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes, Algérie	Directeur de thèse

* selon les règles et dispositifs de l'établissement partenaire.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'Equipe Matériaux, Procédés et Systèmes d'Emballage du Groupe de Recherche en Sciences Pour l'Ingénieur (GRESPI/MPSE) de l'Université de Reims Champagne-Ardenne, au Laboratoire de Génie des Procédés de L'Université Ammar Telidji de Laghouat et au Laboratoire de Matériaux et Systèmes Réactifs de l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès.

Tout d'abord, je tiens à remercier mon directeur de thèse en France Monsieur Boussad ABBES qui a beaucoup contribué dans la réalisation de ce travail par son assistance, ses conseils et ses encouragements. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude.

Mes remerciements s'adressent également à mon directeur de thèse en Algérie Monsieur Mohammed MAKHLOUF, pour avoir accepté de m'encadrer en premier lieu ainsi que pour ses conseils et son assistance.

Je tiens à exprimer mes respects les plus distingués ainsi que ma gratitude au Professeur Ying-Qiao GUO, Directeur de l'Equipe Matériaux, Procédés et Systèmes d'Emballage du Groupe de Recherche en Sciences Pour l'Ingénieur, qui m'a fort bien accueilli au sein de son. Je le remercie pour son aide efficace et pour ses conseils toujours pertinents.

Que Monsieur Abdelkader MEGUENI, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès soit assuré de ma profonde reconnaissance pour avoir bien voulu me faire l'honneur de présider ce jury et d'analyser ce travail.

Je voudrais également remercier très sincèrement Messieurs Abbes BACHIR BOUIADJRA, Professeur à l'Université Djillali Liabès de Sidi-Bel-Abbès et Xiao Lu GONG, Professeur à Université de Technologie de Troyes qui ont bien voulu juger ce travail en tant que rapporteurs.

Un grand merci à toute l'équipe de l'Ecole Supérieurs d'Ingénieur de Reims, spécialement Monsieur Damien ERRE (Directeur ESIREims) pour m'avoir gentiment accueilli au sein de l'école et Jean-Baptiste NOLOT (Ingénieur ESIREims) pour son assistance durant les essais aux laboratoires de l'ESIREims.

Mes remerciements s'adressent aussi aux responsables de l'Université de Laghouat pour le financement des déplacements et séjours à Reims.

Merci à tous.

Résumé

Cette thèse présente une étude expérimentale et numérique d'essais de chute libre et de vibration aléatoire d'emballages en carton ondulé contenant différents calages en mousse. Un modèle d'homogénéisation efficace pour le carton ondulé a été développé. Dans ce modèle homogénéisé, le carton ondulé est représenté par une plaque 2D. Au lieu d'utiliser une loi de comportement locale (reliant les déformations aux contraintes) à chaque point d'intégration, l'homogénéisation conduit aux rigidités globales (reliant les déformations généralisées aux forces résultantes) pour la plaque équivalente homogène. Ce modèle a été implémenté dans le logiciel Abaqus. Le comportement de la mousse a été déterminé expérimentalement et modélisé avec un modèle de mousse déformable d'Abaqus. Les emballages sont soumis à des tests de chute libre d'une hauteur donnée sur un sol rigide et des essais de vibration aléatoire type bruit blanc sur table vibrante. Les résultats numériques obtenus en utilisant la simulation avec le modèle homogénéisé concordent bien avec les résultats expérimentaux. Nous avons également montré que la contribution de la caisse en carton ondulé à la réponse au choc et à la vibration aléatoire ne pouvait pas être négligée dans la conception des calages.

Mots clés : modèle d'homogénéisation, plaques en sandwich orthotropes, rigidité de torsion, rigidité de cisaillement dans un plan, rigidité de cisaillement transverse, essais de chute, carton ondulé, simulation par Eléments Finis, mousses de calage, vibration aléatoire, Densité Spectral de Puissance.

Abstract

This thesis presents experimental and numerical studies of drop tests and random vibration of corrugated cardboard packaging containing different foam cushions. An efficient homogenization model for the corrugated cardboard has been developed. In this homogenized model, the corrugated cardboard is represented by a 2D plate. Instead of using a local constitutive law (relating the strains to the stresses) at each material point, the homogenization gives the global rigidities (relating the generalized strains to the resultant forces) for the equivalent homogeneous plate. This model was implemented into the FE software Abaqus. The foam behaviour was experimentally determined and modelled using a crushable foam model of Abaqus. The packages are tested in free fall from a given height on a rigid floor and white noise random vibration. The numerical results obtained using the FE simulation with the homogenized model agree well with the experimental results. We have also shown that the contribution of the corrugated cardboard box to the shock and random vibration responses could not be neglected in the design of cushioning package.

Keywords : homogenization model, orthotropic sandwich plates, torsion rigidity, in-plane shear rigidity, transverse shear rigidity, drop tests, corrugated cardboard, Finite Element simulation, cushions foam, random vibration, Power Spectral Density.

Table des matières

Remerciements	2
Résumé	3
Table des matières	4
Liste des tableaux	7
Liste des figures	8
Introduction générale.....	13
Chapitre I : Etude bibliographique	17
Introduction	18
I. Effets des vibrations sur les produits emballés	19
II. Vibrations liées au transport.....	19
III. Les chocs pendant le transport	29
III.1. Formes des chocs	29
III.2. Conséquences des chocs.....	30
III.3. Protection des produits emballés contre les chocs	32
Chapitre II : Le modèle d'homogénéisation du carton ondulé.....	34
Introduction	35
I. Le carton ondulé.....	36
II. Rappels théoriques	38
II.1. Rappel de la théorie des plaques de Mindlin	38
II.2. Rappel de la théorie des stratifiés	41
II.3. Rappel de la théorie des sandwichs	43
III. Adaptation de la théorie des stratifiés au carton ondulé.....	44
III.1. Travaux antérieurs sur le carton ondulé au sein du GRESPI	44
III.1.1. Transformation des propriétés mécaniques de la cannelure dans le repère global	46
III.1.2. Homogénéisation suivant l'épaisseur	49
III.1.3. Homogénéisation le long de la direction MD-x	50
III.1.4. Rigidité de cisaillement dans le plan xy relative à N_{xy} ou N_{yx}	51

III.1.5. Rigidité de cisaillement transverse sur section CD relative à T_y	52
III.1.6. Rigidité de cisaillement transverse sur section MD relative à T_x	54
III.1.7. Décomposition de la rigidité de torsion en 2 rigidités de torsion de poutre.....	54
III.1.8. Rigidité de torsion sur section MD ou CD relative à M_{xy} ou M_{yx}	58
III.1.9. Homogénéisation de la masse volumique du carton ondulé	60
Chapitre III : Implémentation du modèle d'homogénéisation dans le code de calcul ABAQUS	
.....	62
Introduction	63
I. Description du sous-programme UGENS	63
I.1. Définitions de la structure de la matrice de rigidité.....	63
I.2. Structure du fichier de données et rigidités de cisaillement transverse	64
I.3. Structure du sous-programme UGENS.....	66
II. Validation numérique de l'implémentation dans UGENS du modèle d'homogénéisation en statique	66
II.1. Validation du modèle d'homogénéisation en traction	67
II.2. Validation du modèle d'homogénéisation en flexion.....	69
III. Validation numérique de l'implémentation dans UGENS du modèle d'homogénéisation en dynamique.....	71
III.1. Fréquences et modes propres d'une plaque encadrée.....	71
III.2. Vibrations d'une plaque en flexion	73
III.3. Validation sur un test de choc	75
Chapitre IV : Caractérisation expérimentale du comportement statique et dynamique du système d'emballage étudié	77
Introduction	78
I. Matériaux et systèmes d'emballage étudiés	78
I.1. Le carton ondulé	78
I.2. La mousse de calage	79
I.3. Les systèmes d'emballage.....	79
II. Caractérisation expérimentale du système d'emballage	81
II.1. Caractérisation expérimentale des constituants du carton ondulé	81
II.2. Caractérisation expérimentale de la mousse de calage.....	88
II.3. Essais de choc vertical par chute libre.....	90

II.4. Essais de vibrations aléatoires	97
Chapitre V : Comparaison des résultats expérimentaux et numériques.....	104
Introduction	105
I. Validation du modèle sur les tests de chocs par chute libre.....	105
I.1. Le modèle en éléments finis	105
I.2. Le modèle de comportement élasto-plastique pour la mousse	107
I.3. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour le choc vertical par chute libre.....	108
II. Validation du modèle sur les tests de vibrations aléatoires.....	115
II.1. Analyse de la réponse aléatoire par la méthode des éléments finis.....	115
II.2. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour les réponses aléatoires	117
Conclusions et perspectives	121
Bibliographie.....	124

Liste des tableaux

Tableau 1 : Estimation des fréquences de vibrations par modes de transport [8].	20
Tableau 2 : Les niveaux de référence de fragilité de certains produits.	32
Tableau 3 : Ordre des composantes du vecteur des forces et moments internes.	64
Tableau 4 : Exemple du fichier de données d'Abaqus contenant l'instruction qui fait appel à UGENS.	65
Tableau 5: L'interface en fortran 77 du sous-programme UGENS.	66
Tableau 6 : Propriétés mécaniques et épaisseurs des constituants du carton ondulé.	67
Tableau 7 : Comparaison entre Abaqus_3D et UGENS_2D pour la traction selon MD.	68
Tableau 8 : Comparaison entre Abaqus_3D et UGENS_2D pour la traction selon CD.	69
Tableau 9 : Comparaison entre Abaqus_3D et UGENS_2D pour la flexion selon MD.	70
Tableau 10 : Comparaison entre Abaqus_3D et UGENS_2D pour la flexion selon CD.	71
Tableau 11 : Fréquences propres calculées par Abaqus_3D et UGENS_2D.	73
Tableau 12 : Comparaison de l'amplitude de l'accélération sur MD pour les deux modèles.	74
Tableau 13 : Comparaison de l'amplitude de l'accélération sur CD pour les deux modèles.	75
Tableau 14 : Comparaison entre les deux modèles pour le test de choc.	76
Tableau 15 : Epaisseurs et grammages des papiers constituant le carton ondulé.	82
Tableau 16 : Propriétés élastiques des papiers constituant le carton.	87
Tableau 17 : Comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour les accélérations maximales et les durées des chocs.	114
Tableau 18 : Fichier de données ABAQUS pour définir les fonctions de fréquence et de corrélation.	116
Tableau 19 : Comparaison des fréquences de résonances et des amplifications pour la vibration aléatoire.	120

Liste des figures

Figure 1 : Signal aléatoire typique d'excitation type bruit blanc (haut) et la réponse correspondante d'un emballage (bas).....	21
Figure 2 : Fonction de densité de probabilité d'un profil de route (Victoria en Australie) avec la distribution gaussienne équivalente ; (a) échelle linéaire, (b) échelle logarithmique [9].	22
Figure 3 : Distribution de probabilité de profils de route de l'amplitude avec les distributions gaussiennes [11].	23
Figure 4 : La variation du RMS d'un profil de route.	24
Figure 5 : La PSD des accélérations verticales des véhicules de transport [12].	25
Figure 6 : PSD typiques ASTM, ISTA et ISO utilisées en laboratoire [13-14].	25
Figure 7 : Réponse fréquentielle pour une excitation d'un bruit blanc à bande limitée (frottement non modélisé) [16].	27
Figure 8 : Réponse temporelle d'une excitation à bande limitée d'un bruit blanc (frottement non modélisé) [16].	27
Figure 9 : Réponse fréquentielle pour une excitation d'un bruit blanc à bande limitée (frottement modélisé) [16].	28
Figure 10 : Réponse temporelle d'une excitation à bande limitée d'un bruit blanc (frottement modélisé) [16].	28
Figure 11 : Interprétation standard d'une impulsion de choc [3].	30
Figure 12 : Formes typiques de chocs.	30
Figure 13 : Courbe typique de la limite d'endommagement.	31
Figure 14 : Constituants du carton ondulé.	36
Figure 15 : Assemblage des constituants du carton ondulé sous forme de panneaux (réf. Site Ondulys).	37
Figure 16 : Paramètres géométriques du carton ondulé simple cannelure [34].	37
Figure 17 : Efforts de membrane, moments de flexion et de torsion et efforts de cisaillement transverse.	40
Figure 18 : Représentation d'une plaque stratifiée.	43

Figure 19 : Représentation d'une plaque sandwich.	44
Figure 20 : Volume élémentaire représentatif pour le carton ondulé.	45
Figure 21 : Modèle équivalent pour le cisaillement de la cannelure dans le plan xy.	52
Figure 22 : Modèle équivalent pour le cisaillement transverse T_y	53
Figure 23 : Cisaillement horizontal d'un carton ondulé.	54
Figure 24 : Forces et moments internes dans une surface élémentaire d'une plaque.	55
Figure 25 : Modèle de torsion pour une plaque avec armatures croisées de Timoshenko.	56
Figure 26 : Flux de contrainte de cisaillement sur une section de paroi mince de n cellules. .	58
Figure 27 : Flux relatifs de la contrainte tangentielle sur une section à 10 cellules.	59
Figure 28 : Élément dx du carton ondulé.	60
Figure 29 : Iso-déplacements en traction MD pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. 68	
Figure 30 : Iso-déplacements en traction CD pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. 69	
Figure 31 : Iso-déplacements en flexion MD pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. 70	
Figure 32 : Iso-déplacements en flexion CD pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. . 71	
Figure 33 : Premier mode propre de la plaque en carton ondulé obtenu par Abaqus_3D et UGENS_2D.	72
Figure 34 : Deuxième mode propre de la plaque en carton ondulé obtenu par Abaqus_3D et UGENS_2D.	72
Figure 35 : Troisième mode propre de la plaque en carton ondulé obtenu par Abaqus_3D et UGENS_2D.	73
Figure 36 : Excitation sur MD et réponses pour les deux modèles.	74
Figure 37 : Excitation sur CD et réponses pour les deux modèles.	75
Figure 38 : Plaque en carton ondulé soumise à un test de choc.	76
Figure 39 : Iso-déplacements des deux modèles pour le test de choc.	76
Figure 40 : Caisse à rabats recouvrant en carton ondulé.	79
Figure 41 : Dimensions de la masse parallélépipédique.	80
Figure 42 : Calage en mousse Ethafoam 400 recouvrant la masse.	80
Figure 43 : Calage en mousse Ethafoam 400 recouvrant les coins de la masse.	80
Figure 44 : Dimensions d'une éprouvette de traction d'une feuille de carton suivant la norme NF T 51-034.	82
Figure 45 : Table à découpe ELCEDE MFT20.	83
Figure 46 : Eprouvettes découpées suivant les trois directions MD, CD et 45°.	83

Figure 47 : Machine de tests mécaniques MTS Adamel Lhomargy DY35XL.....	84
Figure 48 : Courbes de traction de la peau supérieure suivant les trois directions.	86
Figure 49 : Courbes de traction de la peau inférieure suivant les trois directions.	86
Figure 50 : Courbes de traction de la cannelure suivant les trois directions.....	87
Figure 51 : Machine de tests mécaniques INSTRON 4204 avec le montage en compression.	89
Figure 52 : Comportement de la mousse en compressions simple et confinée.....	90
Figure 53 : Caisse en carton ondulé à rabats recouvrant.....	91
Figure 54 : Calage en mousse recouvrant la masse placé dans la caisse en carton.....	91
Figure 55 : Calage en mousse recouvrant les coins de la masse placé dans la caisse en carton.	92
Figure 56 : Machine de test de choc par chute libre.....	93
Figure 57 : Accéléromètre triaxial.	93
Figure 58 : Console d'enregistrement des accélérations.....	94
Figure 59 : Les trois types d'essais de choc par chute libre.....	94
Figure 60 : Résultats de choc par chute libre sur la base pour la configuration du calage recouvrant la masse.....	95
Figure 61 : Résultats de choc par chute libre sur la base pour la configuration du calage sur les coins de la masse.....	95
Figure 62 : Résultats de choc par chute libre sur le côté pour la configuration du calage recouvrant la masse.....	96
Figure 63 : Résultats de choc par chute libre sur le côté pour la configuration du calage sur les coins de la masse.....	96
Figure 64 : Les différentes configurations d'emballage testées en vibrations aléatoires.....	97
Figure 65 : Emballage étudié avec la masse au dessus simulant un empilement d'emballage.	98
Figure 66 : Table vibrante hydraulique LANSMONT.....	98
Figure 67 : Excitation et réponse pour la mousse recouvrant la masse sans la caisse.	99
Figure 68 : Excitation et réponse pour la mousse recouvrant la masse avec la caisse.	100
Figure 69 : Excitation et réponse pour la mousse aux coins de la masse sans la caisse.	100
Figure 70 : Excitation et réponse pour la mousse aux coins de la masse avec la caisse.....	101
Figure 71 : Excitation et réponse pour la mousse recouvrant la masse avec la caisse et une masse de 10.95 kg au dessus.....	101

Figure 72 : Excitation et réponse pour la mousse aux coins de la masse avec la caisse et une masse de 10.95 kg au dessus.	102
Figure 73 : Courbes de Gain pour les systèmes d’emballage étudiés.	103
Figure 74 : Modèle en éléments finis.	106
Figure 75 : Orientations matérielles sur la caisse en carton ondulé.	106
Figure 76 : Surfaces de plasticité et d’écoulement pour le modèle « Crushable foam ».	108
Figure 77 : Comparaison des courbes expérimentale et numérique de l’accélération en fonction du temps pour le choc sur la base de la caisse avec le calage recouvrant la masse.	109
Figure 78 : Isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur la base de la caisse avec le calage recouvrant la masse.	110
Figure 79 : Comparaison des courbes expérimentale et numérique de l’accélération en fonction du temps pour le choc sur la base de la caisse avec le calage aux coins de la masse.	111
Figure 80 : Isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur la base de la caisse avec le calage aux coins de la masse.	111
Figure 81 : Isovaleurs des contraintes de von Mises pour la mousse seule dans le cas du choc sur la base de la caisse avec le calage aux coins de la masse.	112
Figure 82 : Comparaison des courbes expérimentale et numérique de l’accélération en fonction du temps pour le choc sur le côté de la caisse avec le calage aux coins de la masse.	113
Figure 83 : Isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur le coté de la caisse avec le calage aux coins de la masse.	113
Figure 84 : Isovaleurs des contraintes de von Mises sur la mousse seule pour le choc sur le coté de la caisse avec le calage aux coins de la masse.	114
Figure 85 : Fonctions de transfert pour le calage en mousse entourant la masse sans la caisse en carton.	117
Figure 86 : Fonctions de transfert pour le calage en mousse aux coins de la masse sans la caisse en carton.	118
Figure 87 : Fonctions de transfert pour la configuration de la mousse entourant la masse avec la caisse. (0-200Hz).	119

Figure 88 : Fonctions de transfert pour la configuration de la mousse entourant la masse avec la caisse + la masse de 10.95kg au dessus (0-200Hz)..... 119

Introduction générale

L'emballage est un système ingénieux et très utile dans la vie courante. Il permet de protéger les produits finis des aléas de l'environnement, de la sortie des usines jusqu'aux consommateurs finaux en passant par le stockage et la commercialisation.

Les premiers emballages datent de la préhistoire. Mais c'est en 1746 qu'est apparu le premier produit emballé sous une marque en Angleterre. Depuis, l'emballage et sa technologie ne cessent d'évoluer jusqu'à occuper une place non négligeable dans la recherche scientifique. Il y a même des écoles et instituts spécialisés en emballage, à l'instar de la Michigan State University (MSU) aux Etats Unis d'Amérique, de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Reims (ESIREims ex ESIEC) et de l'Ecole Supérieure Européenne de Packaging (ESEPAC) en France.

Pour que l'emballage puisse remplir pleinement son rôle de protection, il doit être bien conçu. A cet effet, il faut prendre en considération toutes les sollicitations extérieures qui peuvent endommager l'emballage. Ces sollicitations peuvent être thermique, chimique, ou mécaniques (chocs, vibrations...). Sachant que les produits finis avec leur emballage sont transportés et manutentionnés, il faudrait donc étudier et ainsi prévoir leur comportement pendant les chocs, chute libre, et vibrations dus au transport et à la manutention.

La majeure partie des consommateurs se sont sûrement confronté à un ou plusieurs cas où les produits sont suremballés, et se sont posé la question sur son intérêt et pourquoi un tel gaspillage. En plus du caractère attractif d'un emballage excessif (design, présentation...), il fournit au produit une plus grande protection lors de la manutention et du transport. Mais en contre partie un suremballage a plusieurs effets négatifs du point de vue financier et environnemental. Une modélisation théorique et numérique du comportement dynamique des emballages est alors nécessaire pour minimiser les suremballages tout en gardant leur caractère attractif.

Le carton occupe une place très importante dans l'industrie de l'emballage. En effet, on le trouve dans la deuxième position avec le papier et après les plastiques avec 32% des facturations des matériaux d'emballage (SESSI 2006), et en première position des matériaux utilisés avec 4.2 millions de tonnes (ADEME 2002). Son coût, sa recyclabilité et sa biodégradation lui donne une préférence remarquable dans le monde de l'emballage.

Le type de carton le plus utilisé dans l'industrie de l'emballage est le carton ondulé. Il a été utilisé pour la première fois aux Etats Unis en 1871, alors qu'en 1888 une machine onduleuse anglaise est installée en France à la Société Française de Papiers Ondulés. En 1914,

la première machine française de fabrication de caisses en carton ondulé a été fabriquée. Depuis, le carton ondulé est devenu le matériau le plus utilisé dans le domaine de l'emballage et du conditionnement en France et dans le monde entier. Le carton ondulé est constitué par une ou plusieurs feuilles de papier cannelées collées sur une ou plusieurs feuilles de papier plan.

Le carton ondulé est un matériau peu cher, par ce fait on constate une préférence des tests expérimentaux sur les emballages en carton ondulé au détriment de la modélisation théorique et numérique. Les travaux de recherche sur le comportement mécanique, surtout dynamique, du carton ondulé sont très limités malgré les nombreux atouts et potentiel industriel qu'il présente.

Le carton ondulé composé de plusieurs strates (simple, double ou triple cannelure) peut être modélisé comme une structure 3D, mais cela exige beaucoup de ressources humaine (pour la création de la géométrie) et informatique (taille mémoire et temps CPU). L'équipe MPSE (Matériaux, Procédés et Systèmes d'Emballage) du GRESPI (Groupe de Recherche En Sciences Pour l'Ingénieur) a développé un modèle d'homogénéisation analytique pour modéliser le carton ondulé comme une plaque 2D homogène qui rend la création de la géométrie moins fastidieuse et qui réduit le temps CPU.

Le travail de thèse présenté dans ce mémoire est une continuité des travaux réalisés dans l'équipe MPSE. L'objectif de la thèse est d'étudier le comportement dynamique des emballages lors des chocs et des vibrations aléatoires dus au transport. Cette thèse est subdivisée en cinq chapitres :

- Le chapitre I est consacré à l'étude bibliographique. Les phénomènes de chocs et vibrations aléatoires sont rencontrés lors du stockage, de la manutention et du transport des produits emballés. Les travaux des différentes équipes de recherche dans le monde sont présentés et analysés.
- Dans le chapitre II, le modèle d'homogénéisation analytique du carton ondulé en élasticité linéaire, développé par l'équipe GRESPI/MPSE, est présenté. Ce modèle a pour but de calculer les rigidités équivalentes pour tout type de sollicitations extérieures statiques à partir des propriétés mécaniques des papiers constituants mesurées expérimentalement. Les différentes théories utilisées sont rappelées et les adaptations au cas du carton ondulé sont développées.

- Le chapitre III présente d'abord l'implémentation du modèle d'homogénéisation du carton ondulé dans le logiciel ABAQUS à l'aide du sous-programme utilisateur UGENS. Ensuite, une validation du modèle est effectuée en statique (traction, flexion...etc.) et en dynamique (fréquences et modes propres, vibrations...etc.).
- Dans le chapitre IV, nous présentons d'abord les systèmes d'emballage étudiés (caisse en carton ondulé et calages en mousse) et les techniques et méthodes expérimentales utilisées. Les essais expérimentaux réalisés pour la caractérisation des papiers constituant le carton ondulé et la mousse polyéthylène sont présentés et analysés. Les essais de chute libre et de vibrations aléatoires réalisés sur les systèmes d'emballage (caisse en carton ondulé et calages en mousse) sont également présentés et analysés.
- Le chapitre V est consacré à la simulation numérique par éléments finis, à l'aide du modèle d'homogénéisation, des différents tests effectués sur les systèmes d'emballage et à la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques.

Enfin, le mémoire de thèse s'achèvera par une conclusion générale qui rappellera les travaux accomplis et les résultats obtenus, et par des perspectives envisagées pour les travaux futurs.

Chapitre I :

Etude bibliographique

Introduction

Un des rôles de l'emballage est de protéger le produit contre les chocs et les vibrations excessives qui peuvent se produire pendant la distribution et le transport. Le niveau de protection requis est déterminé par la fragilité (sensibilité à la détérioration) du produit emballé, ainsi que par la sévérité des risques auxquels il peut être exposé. La conception d'un emballage exige l'examen soigneux de la nature des chocs et des vibrations auxquels le produit est susceptible d'être soumis en plus la connaissance complète de la fragilité du produit lui-même. La conception des systèmes d'emballage ou de calage s'est jusqu'ici fondée sur les modèles simplifiés et sur des hypothèses simplificatrices sur la nature des chocs et des vibrations lors de la distribution et du transport [1]. Ces modèles et hypothèses simplifiés ont conduit à la conception d'emballages le plus souvent surdimensionnés et des fois en utilisant des suremballages [1].

L'insuffisance ou l'inefficacité de l'emballage est facilement identifiable, car elle se manifeste par l'apparition de dégâts et de défauts pendant l'expédition, au cours du transport et lors de la manutention. Un suremballage peut être défini comme étant l'excédent de l'amortissement de protection à l'égard des risques de dommages attendus.

Il a été estimé que le coût associé au suremballage, dans l'Europe seulement, est 20 fois plus élevé que le coût excessif des matériaux d'emballage et a été évalué à 130 milliards d'euros/an [2]. Ces coûts, non apparents, comprennent ceux qui sont associés au ramassage, à l'augmentation du trafic, à la pollution et à la dégradation accélérée des infrastructures de transport, en raison de la quantité excessive des produits sur-emballés. Il est donc évident que la réduction du suremballage peut entraîner d'importantes économies.

Il y a de solides arguments pour effectuer des recherches visant à mettre au point de meilleures techniques pour optimiser la conception des systèmes d'emballage et de réduire la quantité de matériaux nécessaires pour protéger les produits lors du transport et la distribution. Afin d'atteindre un niveau d'optimisation bénéfique lors de la conception d'emballages, une compréhension approfondie de la nature des chocs et des vibrations se produisant au cours du transport et leurs effets sur le produit est essentielle.

I. Effets des vibrations sur les produits emballés

Durant le transport, la manutention et le stockage, les emballages et les produits emballés sont soumis à des contraintes mécaniques telles que : les vibrations, les chocs, les chutes, les accélérations, les décélérations...

Les vibrations produites pendant le transport et la distribution sont toujours indésirables. Elles peuvent influencer les produits emballés au point de causer des dommages physiques ou la détérioration du produit. Des études ont prouvé que les vibrations lors du transport dans les véhicules peuvent causer, par exemple, la séparation de phase des produits émulsionnés, meurtrissures sur les fruits et légumes, des dommages physiques dans les produits mécaniques et électroniques, et des dommages aux étiquettes en raison du frottement [3]. En Chine, on a estimé que la perte des fruits et légumes frais pendant le transport et la distribution est au dessus de 30% [4]. Le coût économique de dommages mécaniques aux pommes en Belgique, causé par les forces dynamiques durant le transport et la distribution, a été également estimé. Le pourcentage des pommes dégradées identifiées pendant le tri étaient de 15% et 8% en 2000 et 2001 respectivement. Sur le marché Belge le prix des pommes dégradées est de 1/3 du prix normal. Une réduction de 10% seulement des pommes dégradées pouvait augmenter le gain des arboriculteurs de 892000€ en 2000 et de 595000€ en 2001 [5]. Pendant l'expédition des réfrigérateurs résidentiels par chemin de fer aux Etats Unis, deux défaillances furent détectées à cause des vibrations aléatoires répétitives [6]. Il s'agit notamment de la rupture des tubes entre le compresseur et le condenseur ainsi que les silentblochs en caoutchouc des compresseurs. Selon les conditions de transport, l'affaissement prématuré des caisses en carton dû à l'excès de vibrations a été également observé [7]. Beaucoup de matériaux, qui sont utilisés dans les systèmes d'emballage, montrent un comportement ductile et sont affectés par les applications répétées des tensions dynamiques, même aux amplitudes relativement faibles.

II. Vibrations liées au transport

Les sources de vibration durant le transport sont multiples, on trouve l'état de la chaussée, des voies ferroviaires, les vagues dans les océans ainsi que les turbulences dans le ciel. Les véhicules eux-mêmes génèrent des vibrations par les parties tournantes, tel que le déséquilibre des roues. Dans un camion de transport, par exemple, les roues du véhicule reprennent les oscillations de la chaussée (de haut en bas) ; la suspension et la structure

transmettent ces dernières, avec d'autres vibrations internes, au plancher du véhicule. Les produits emballés placés sur le plancher du véhicule recevront alors ces vibrations. Elles sont associées à une fréquence estimée en Hz selon le mode de transport (Tableau 1).

Modes de transport	Conditions/source de vibration	Fréquence (Hz)
Camion	Type de route normal	
	- Suspension	2-10
	- Pneus	15-20
Train	- Structures	20-70
	Wagon de fret	
	- Suspension	2-7
Bateau	- Structure	50-70
	- Discontinuité des rails	30-300
	- moteur/ propulseurs	2-7
	- tangage (vagues)	0.06-0.12
Avion	- cargaison en cale	2-200
	- changements climatiques	très faible
	- atterrissage	2
	- structure	1-10
	- plancher de cargaison	2-200
	- équipements montés	<2000

Tableau 1 : Estimation des fréquences de vibrations par modes de transport [8].

Traditionnellement, les signaux vibratoires utilisés pour exciter une structure afin de déterminer les fréquences caractéristiques de la réponse peuvent être classés en deux catégories principales. La première concerne les signaux connus, qui peuvent être définis par des fonctions mathématiques explicites ; l'excitation sinusoïdale est la forme la plus utilisée des signaux périodiques. La seconde catégorie concerne les signaux aléatoires, qui sont caractérisés par leurs propriétés statistiques. Chaque segment de ce signal est unique et ne peut être formulé mathématiquement.

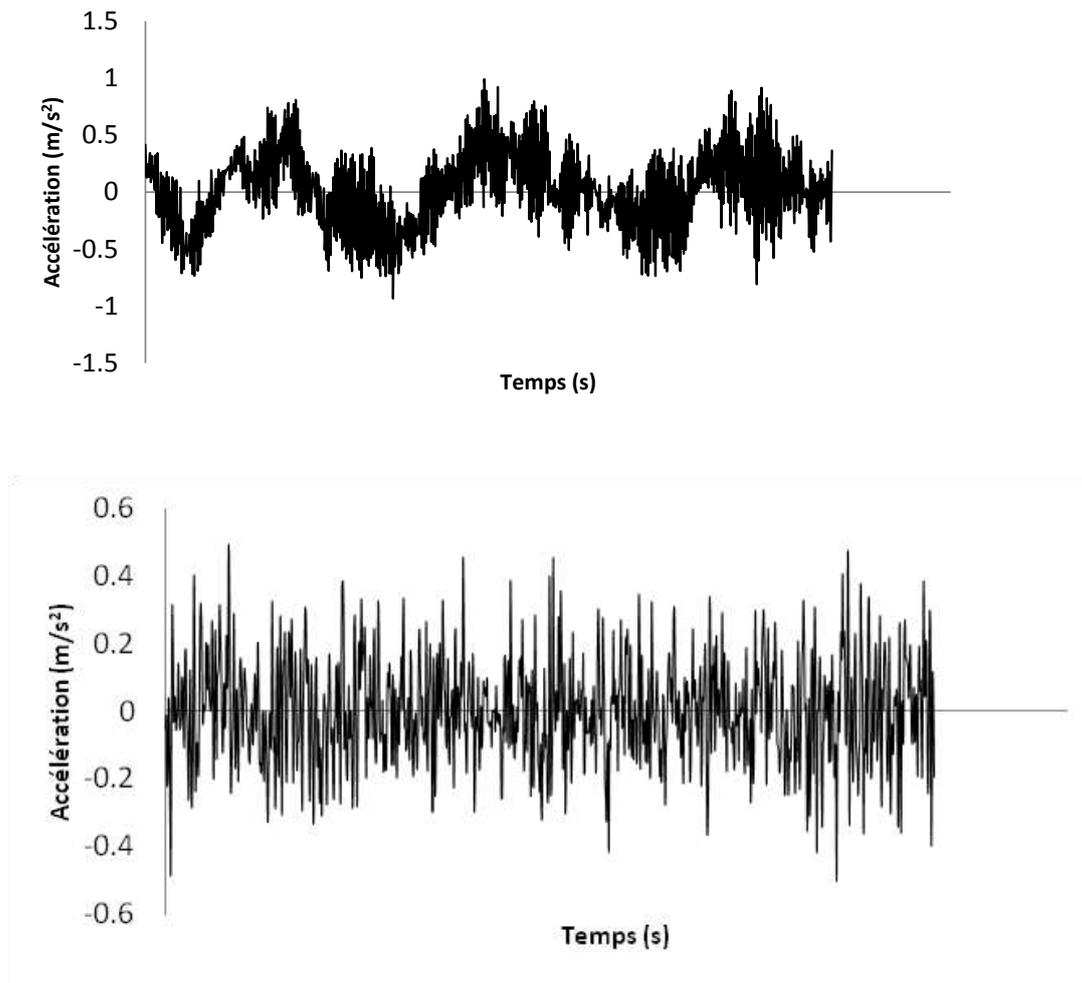


Figure 1 : Signal aléatoire typique d'excitation type bruit blanc (haut) et la réponse correspondante d'un emballage (bas).

Dodds et Robson [9] ont été les premiers à faire une étude détaillée sur les profils des routes. D'après leurs travaux : si une route est considérée comme un ensemble homogène d'un processus aléatoire de distribution gaussienne, alors une estimation unique de la densité spectrale de puissance (PSD) pourrait être utilisée pour générer une description complète de cette route (Figure 2). Ils ont constaté que la forme de la densité spectrale de puissance est indépendante de la surface de la route, mais est une fonction de la moyenne quadratique (RMS) [10].

La densité spectrale de puissance est utilisée pour mesurer l'intensité de la vibration aléatoire en termes de la moyenne quadratique de l'accélération par unité de fréquence (g^2/Hz) [11].

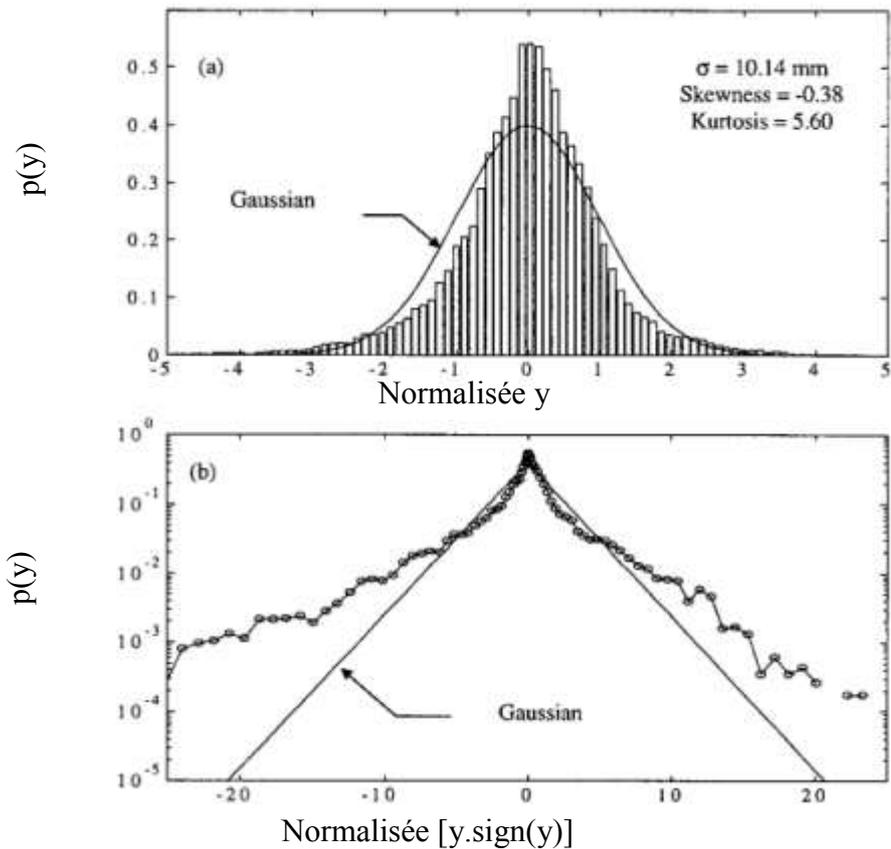


Figure 2 : Fonction de densité de probabilité d'un profil de route (Victoria en Australie) avec la distribution gaussienne équivalente ; (a) échelle linéaire, (b) échelle logarithmique [10].

Heath [12] a conclu que, bien que les routes ne soient pas totalement homogènes ou régulières, certaines de leurs sections se sont avérées stationnaires. Des modèles multiples de corrélation ont été introduits comme modifications à la supposition de rugosité isotrope de la route. Ceci a permis de trouver des évaluations spectrales croisées et une évaluation unique de densité spectrale de puissance si on connaît la géométrie du véhicule et en supposant que l'amplitude de profil de route suit la distribution gaussienne. Heath et Rouillard et al. [10] ont montré comment la distribution des surfaces typiques de routes dévie de la gaussienne et ont indiqué l'intérêt d'avoir une description plus précise et plus appropriée pour l'analyse dynamique du véhicule (Figure 3).

Il a été démontré à maintes reprises que la forme des estimations des données spectrales de la route est indépendante du type de route, et que c'est une fonction de la RMS (Figure 4) (Dodds et Robson [9], Xu et al. [13], Hegmon [14], Rouillard et al. [15]).

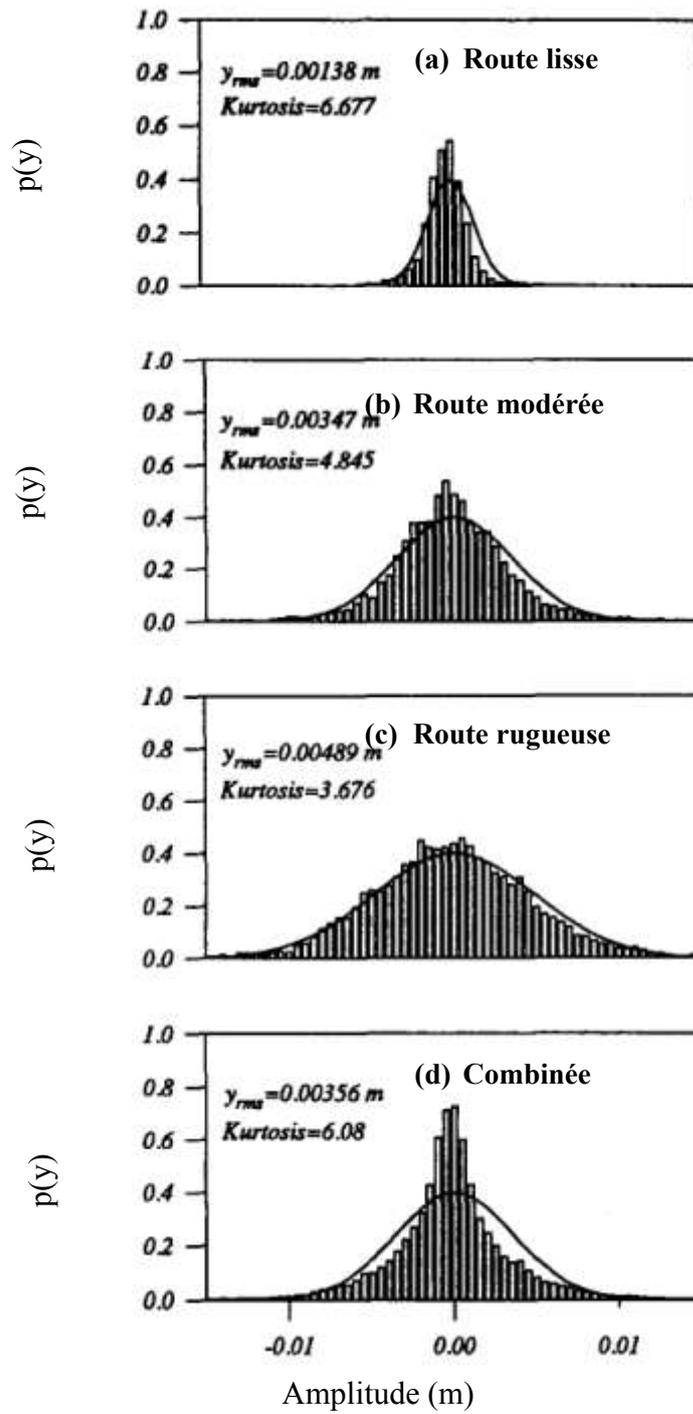


Figure 3 : Distribution de probabilité de profils de route de l'amplitude avec les distributions gaussiennes [15].

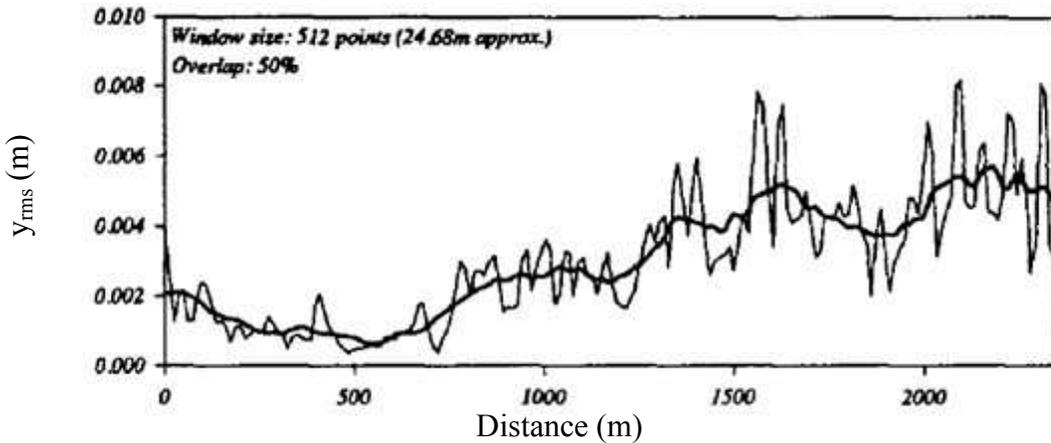


Figure 4 : La variation du RMS d'un profil de route.

Lorsque la densité spectrale de puissance est utilisée comme la seule description des profils routiers, le signal est supposé avoir une répartition gaussienne, et les événements statistiquement rares, comme les irrégularités, sont perdus. Par conséquent, les valeurs extrêmes (ceux dépassant l'écart-type) doivent être analysées séparément afin de décrire les caractéristiques de la route.

La Figure 5 montre quelques exemples de PSD des accélérations verticales des véhicules de transport. La Figure 6 montre un nombre de fonctions de densité spectrale typiques d'un camion qui sont utilisées dans les laboratoires d'aujourd'hui. Les différences entre ces fonctions sont apparentes car elles représentent les spécificités de l'environnement de distribution qu'elles sont censées représenter. Chacun de ces spectres est associé à un niveau moyen RMS qui est utilisé pour générer des vibrations avec un niveau constant du RMS.

L'objectif des essais de performance et de modélisation en laboratoire est de simuler les environnements de distribution. C'est-à-dire, reproduire les mêmes dommages potentiels que les produits emballés vont rencontrer sur le terrain. Au fil des années, les techniques de laboratoire de simulation ont été considérablement améliorées.

Diverses expériences ont été menées en appliquant des forces de compression dynamiques. Certains résultats montrent que l'utilisation de charges statiques peut être un moyen efficace et économique pour tester la compression dynamique du carton ondulé si la force, plutôt que l'accélération, est utilisée pour piloter une table vibrante [19].

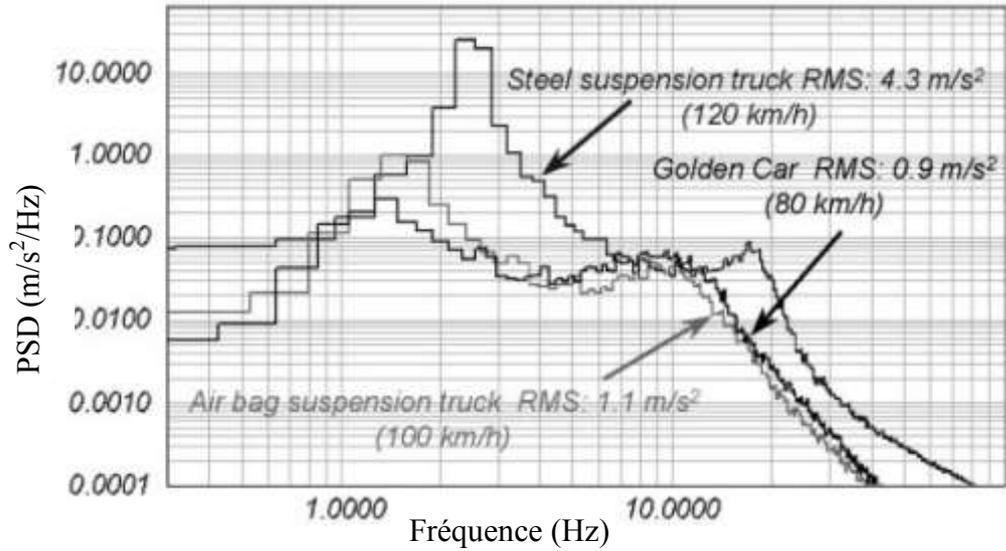


Figure 5 : La PSD des accélérations verticales des véhicules de transport [16].

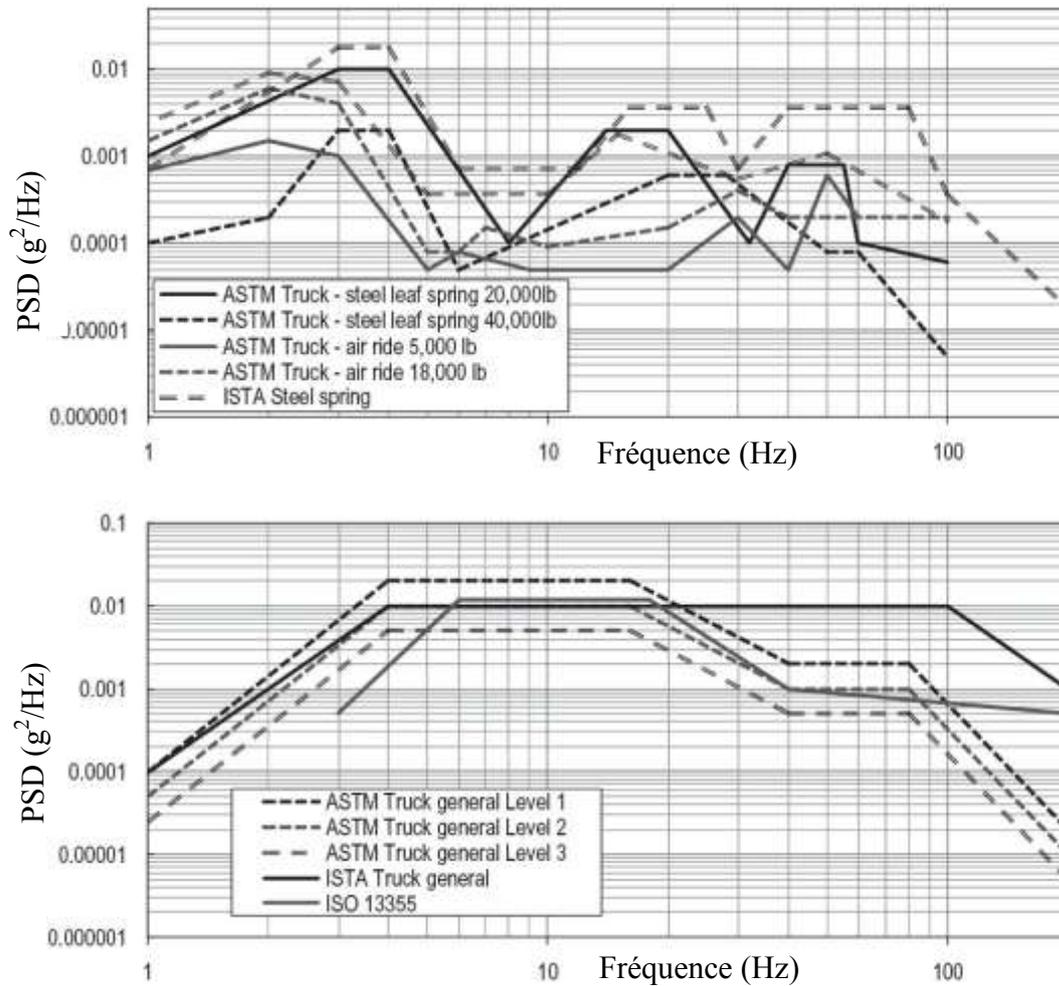


Figure 6 : PSD typiques ASTM, ISTA et ISO utilisées en laboratoire [17-18].

Godshall [20] a identifié la résonance d'un empilement de caisses en carton pleines entre 8Hz et 18Hz avec une résonance transmissible bien au-dessus de 6Hz. Pang et Thakur [21] ont mis au point un modèle théorique visant à simuler le comportement d'un empilement de colis pendant le transport [22]. Leur modèle a inclus des caractérisations non linéaires de la rigidité et des fonctions d'amortissement employées pour décrire les unités d'emballage. Leur modèle théorique a été comparé aux résultats obtenus par un autre outil de simulation numérique développé à l'origine pour la dynamique de véhicules. En raison des approximations des non-linéarités une solution exacte du problème n'est pas possible. Leur étude met en évidence l'importance des effets des efforts de choc entre les unités dans l'empilement et le comportement dynamique des différentes unités. Une limitation importante de leur travail est que la fonction d'excitation a été basée sur la force plutôt que le mouvement de la base de vibration, qui est habituellement représentée par l'accélération verticale du véhicule. Leur travail a été limité à la comparaison avec des simulations numériques et ne s'étend pas à la validation expérimentale.

Plus récemment, Marcondes et Schueneman [23] ont effectués des travaux expérimentaux pour mesurer et analyser les forces dynamiques entre des emballages d'expédition lorsqu'ils sont soumis à des vibrations aléatoires verticales. Leurs travaux ont révélé que le niveau de la force dynamique à l'intérieur des piles dépend de la fréquence des vibrations. Ils ont conclu que, dans certaines circonstances, la force imposée par une caisse peut être équivalente à celle générée par six caisses équivalentes.

Rouillard et Sek [22] ont développé un modèle numérique représentant trois emballages indépendantes et identiques, chaque emballage et modélisé par deux masses identiques reliées par un ressort et un amortisseur visqueux. Le contact entre les emballages est représenté par une combinaison d'un ressort/amortisseur visqueux pour représenter le contact au cours de la collision. Le modèle développé dans Simulink[®] permet de calculer la réponse de chaque masse pour différentes fonctions d'excitation arbitraire.

Dans une première approche, ils ont négligés dans du modèle numérique l'effet du frottement des barres de soutien (Figure 7 et Figure 8) pour l'introduire ensuite dans le modèle (Figure 9 et Figure 10). On remarque bien dans les figures précédentes que lorsque le frottement est pris en compte dans le modèle numérique le résultat s'approche beaucoup du modèle physique.

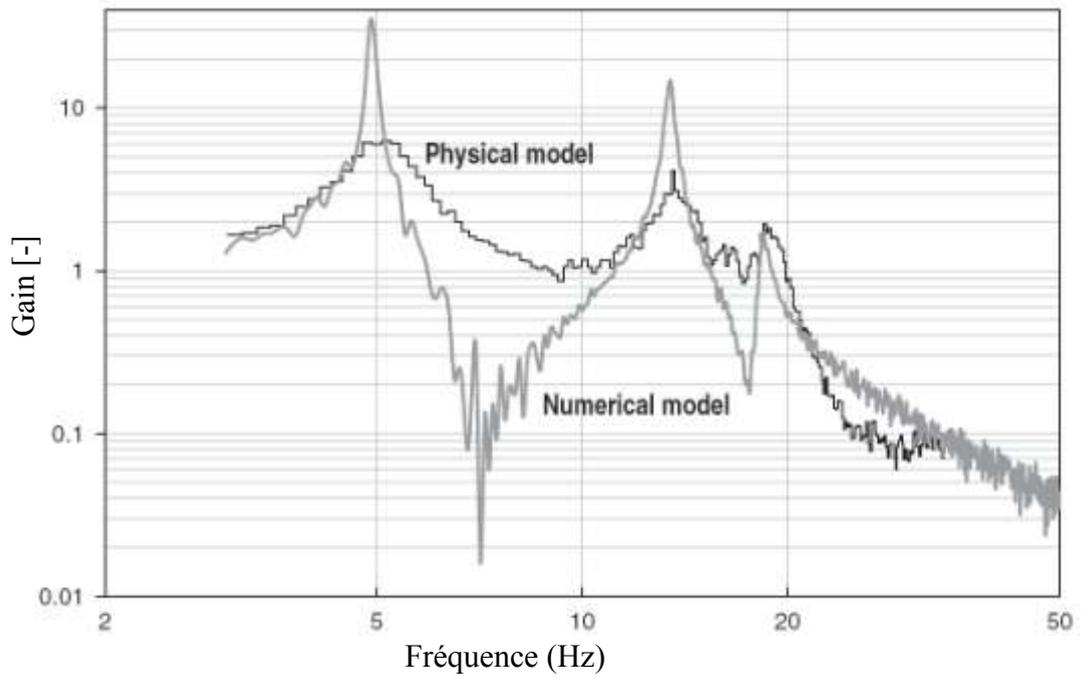


Figure 7 : Réponse fréquentielle pour une excitation d'un bruit blanc à bande limitée (frottement non modélisé) [22].

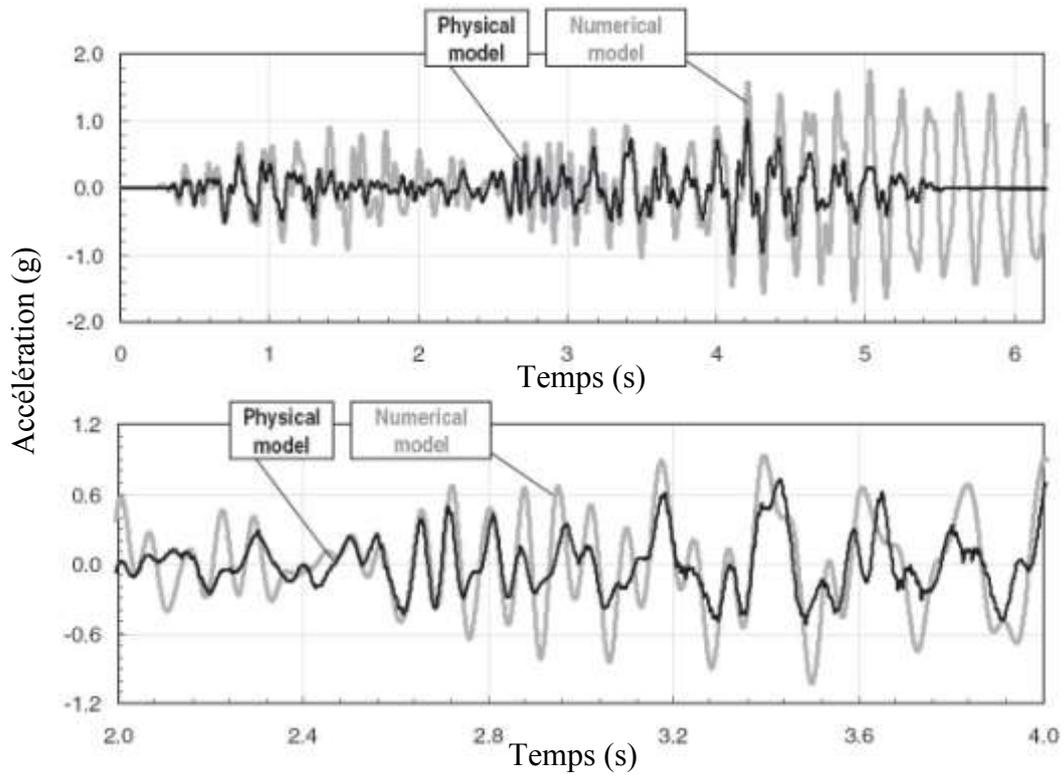


Figure 8 : Réponse temporelle d'une excitation à bande limitée d'un bruit blanc (frottement non modélisé) [22].

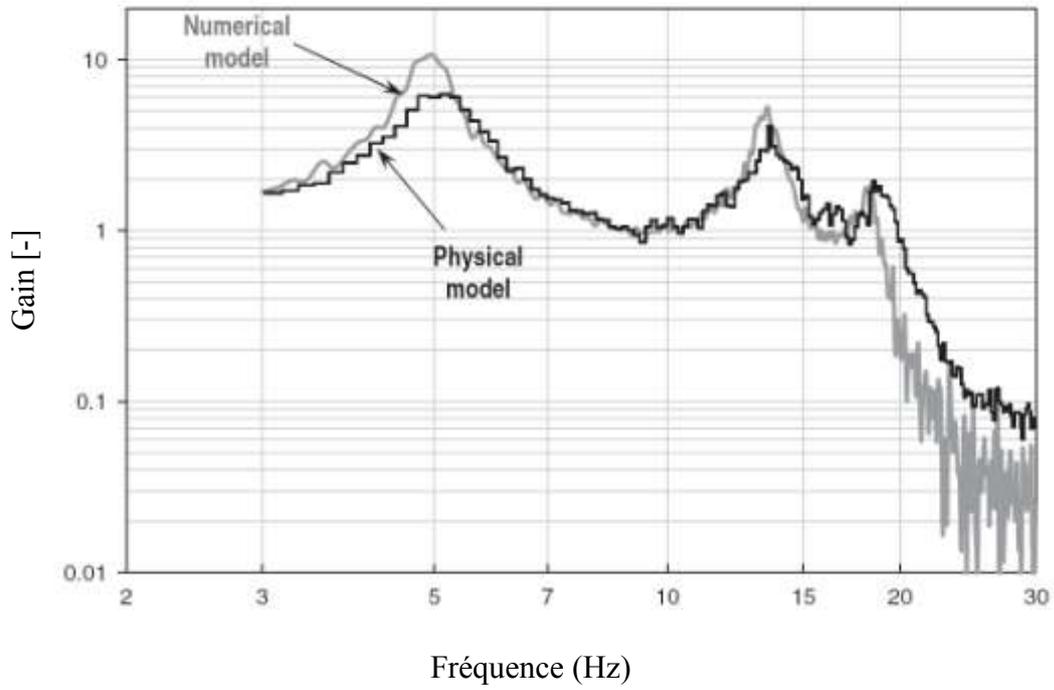


Figure 9 : Réponse fréquentielle pour une excitation d'un bruit blanc à bande limitée (frottement modélisé) [22].

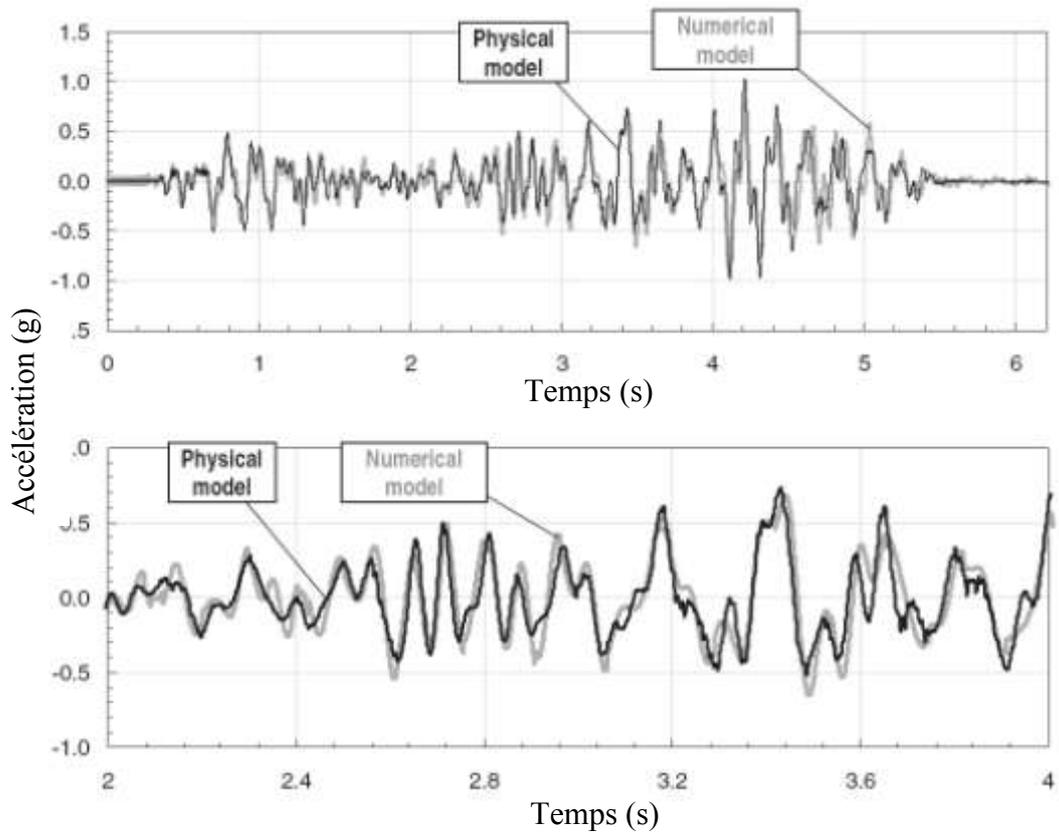


Figure 10 : Réponse temporelle d'une excitation à bande limitée d'un bruit blanc (frottement modélisé) [22].

III. Les chocs pendant le transport

Le terme choc décrit un changement rapide d'un événement sur une période de temps très court. Dans le domaine de l'emballage, ceci se traduit par des mouvements mécaniques, des arrêts brusques, des chutes, ou encore des changements rapides des conditions environnementales telles que le choc thermique. Nous nous intéresserons uniquement aux chocs mécaniques liés à la manutention et au transport des produits emballés.

Les chocs les plus couramment rencontrés lors du transport sont souvent dus à des chutes libres pendant les manipulations. Ce n'est pas la chute qui peut endommager l'emballage ou le produit, mais l'arrêt brusque et l'impact avec le sol rigide. La durée de l'impact n'excède pas quelques millisecondes. Elle dépend principalement de la quantité d'amortissement fournie par les matériaux d'emballage employés pour protéger le produit et dans une certaine mesure de la rigidité de la surface [3]. Le terme amortissement est utilisé ici pour décrire l'effet de ralentir le taux de changement du choc en augmentant la durée de cet événement. Ceci est possible en permettant un arrêt progressif du produit en commençant à le freiner à un niveau plus haut au-dessus du point d'arrêt final. Le choc se réfère au maximum de l'accélération qui est observé lors d'un impact. Evidemment, un produit emballé peut subir des chocs mécaniques résultant de plusieurs autres types d'événements (chocs entre différents produits, chocs produit par un engin de manutention...etc.).

III.1. Formes des chocs

La Figure 11 montre une forme d'onde typique d'accélération de choc résultant de l'impact. La première constatation est celle du niveau de l'accélération maximale enregistrée au cours de l'événement de choc.

La seconde observation est celle de la période durant laquelle l'événement s'est produit, appelé la durée de l'impulsion de choc. Par convention, la durée d'une impulsion de choc est mesurée à partir des points où l'enregistrement de l'accélération en fonction du temps est à un niveau de 10% du niveau de l'accélération maximale [3]. Ceci est fait en raison de la difficulté de déterminer avec précision quand la forme d'onde coupe l'axe des abscisses pour démarrer et arrêter la mesure de la durée du choc.

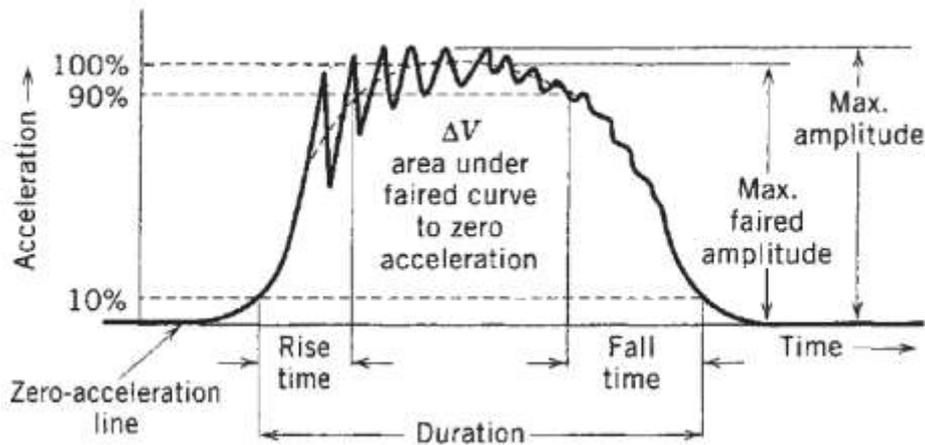


Figure 11 : Interprétation standard d'une impulsion de choc [3].

La forme d'un choc peut être très instructive quant au type d'impact qui a eu lieu et qui dépend de la performance du système d'amortissement de l'emballage. Un amortissement élastique agissant comme un ressort linéaire donne une forme en demi-sinus. Les chocs avec non rebondissement, peuvent présenter une forme en dent de scie. Le choc peut avoir une forme trapézoïdale dans laquelle l'accélération atteint un niveau maximal pendant une certaine période lorsque l'emballage continu à s'écraser (Figure 12). Cette forme d'onde trapézoïdale est le plus souvent créée par des structures en nid d'abeille ou lorsque le système d'amortissement est essentiellement en mousse.

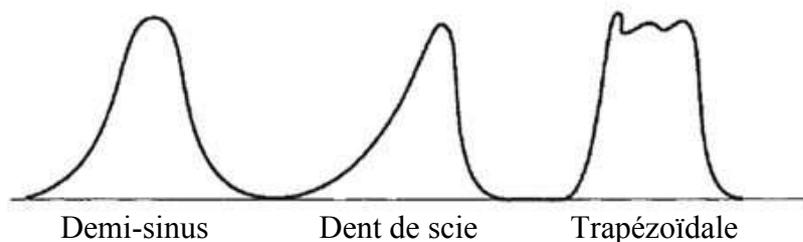


Figure 12 : Formes typiques de chocs.

III.2. Conséquences des chocs

L'utilisation de tests de fragilité est le moyen le plus courant pour déterminer la résistance d'un produit à des chocs mécaniques. Pour qu'un produit puisse être endommagé par un choc mécanique, deux conditions doivent se produire simultanément. La première est que les chocs

mécaniques doivent avoir une énergie suffisante pour causer des dommages. La deuxième condition requise est que l'énergie soit transmise au produit à un taux excédant la capacité du produit à absorber cette énergie sans se rompre. Les deux limites d'endommagement sont définies par une courbe de la variation de la vitesse en fonction du pic d'accélération (Figure 13).

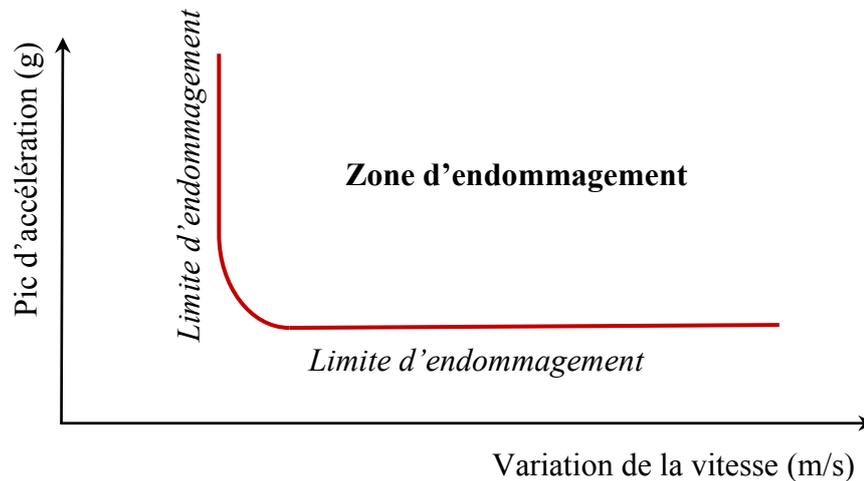


Figure 13 : Courbe typique de la limite d'endommagement.

Bien que les deux limites d'endommagement soient toutes les deux essentielles dans la détermination de la fragilité des produits, celle de la variation de vitesse est souvent considérée comme suffisamment faible pour les produits normalement amortis dans l'emballage, de sorte qu'elle sera dépassée lors des conditions de manutentions normales. Pour cette raison, souvent seule la limite d'accélération maximale est mentionnée quand on parle la fragilité d'un produit. Il est très difficile de déterminer la fragilité des produits à travers des observations ou même des calculs. Il est essentiel d'effectuer des tests pour évaluer la fragilité d'un produit donné. Cependant, il y a certaines catégories de produits qui, en raison de la sévérité de leurs environnements d'utilisation, ont des niveaux de fragilité typiques qui atteignent un niveau minimum de fragilité indiqué par le pic d'accélération (Tableau 2).

Pic d'accélération (g)	Classification	Exemples
15-25	Extrêmement fragile	Instruments de précision, disques durs...
25-40	Fragile	Instruments de paillasse et l'électronique
40-60	Stable	Caisses enregistreuses, équipement de bureau, ordinateurs de bureau
60-85	Durable	Téléviseurs, appareils électroménagers, imprimantes
85-110	Robuste	Machines, appareils durables, alimentations d'énergie, moniteurs vidéo...
110	Transportable	Les ordinateurs portables, les lecteurs optiques
150	Tenu dans la main	Calculatrices, téléphones, microphones, radios

Tableau 2 : Les niveaux de référence de fragilité de certains produits.

III.3. Protection des produits emballés contre les chocs

Beaucoup de travaux traitent la protection des produits emballés contre les chocs et les impacts. Mais la majorité de ces travaux se sont focalisés sur les calages en mousse en négligeant l'effet de l'emballage contenant le produit et son calage. Incontestablement, la mousse protectrice a un effet d'amortissement non négligeable sur les produits transportés, mais l'effet de la caisse qui est souvent en carton ondulé ne peut pas être mis à l'écart dans les études de l'amortissement des chocs.

Les modèles actuellement utilisés pour simuler le comportement sous impact de la mousse polymérique aux vitesses de déformation élevées utilisent des données des essais mécaniques. La compression uniaxiale est l'essai mécanique le plus communément utilisé, mais les résultats de cet essai seul sont insuffisants pour caractériser la réponse des mousses aux états contraintes tridimensionnels. Un nombre de nouveaux appareils expérimentaux pour l'étude du comportement des mousses sous compression hydrostatique ont été développés.

Philippe Viot [24] a développé un volant pour effectuer des essais de compressibilité aux vitesses de déformation élevées, et a conçu une chambre hydrostatique pour obtenir la variation de la contrainte volumétrique, en fonction du taux de densité et de déformation. Les clichés obtenus à grande vitesse de déformation d'échantillons sous pression ont été analysés par traitement d'images.

Dong-Mei Wang et al. [25] ont essayé d'évaluer les propriétés d'amortissement des structures sandwichs en nid d'abeilles en étudiant l'absorption de l'énergie de déformation et en développant des diagrammes d'absorption d'énergie de ces structures pour optimiser la conception des emballages.

Mills [26], Mills et Masso-Moreu [27-28] et Loveridge et Mills [29] ont essayé de modéliser différentes mousses utilisées dans les emballages par la méthode des éléments finis et en comparant leurs modélisations avec les essais expérimentaux.

Mills et Masso-Moreu [30] ont modélisé par la méthode des éléments finis l'impact d'une masse rigide de 5.6 kg entourée d'une mousse de polyéthylène (PE) le tout contenu dans une caisse en carton ondulée. Ils ont comparé les résultats obtenus par la modélisation avec des tests de chute libre de 1 mètre du produit sur une surface plane rigide où ils ont mesuré l'accélération en fonction du temps. Les mesures ont été traitées pour calculer la force d'impact en fonction de la déformation de l'emballage. Ils ont estimé que les résultats de l'analyse par éléments finis, après comparaison avec les courbes d'amortissements (*cushion curves*), peuvent être utilisés dans la conception des mousses de calage. La caisse n'étant utilisée que dans les tests pratiques et non dans le modèle numérique, ils ont conclu que la contribution de la caisse en carton ondulée est très petite et elle ne sert qu'à contenir l'ensemble produit et calage.

Chapitre II :
Le modèle d'homogénéisation du carton
ondulé

Introduction

Il a été démontré dans plusieurs études que le transport et la manutention ont un effet très important sur la qualité des marchandises. Il est évident que l'emballage joue un rôle non négligeable dans la protection des produits transportés.

Tous les produits transportés sont emballés. La grande majorité des emballages sont constitués de caisses en carton ondulé. Le carton ondulé est utilisé pour la production de caisses depuis 1897. Actuellement, il est assez difficile d'imaginer le monde sans emballage en carton ondulé. Ce matériau très écologique est largement utilisé dans l'industrie de l'emballage en raison de sa recyclabilité et de son bas coût. L'utilisation de ce matériau augmente constamment chaque année. Il est très important de connaître ses propriétés mécaniques pour la conception et l'optimisation des structures d'emballage [31].

Un panneau en carton ondulé est une structure 3D qui peut être modélisée par des éléments coques en représentant les faces et la cannelure. Dans le but de réduire le temps de calcul et de préparation de la géométrie, il est important de chercher un modèle numérique qui traite ce panneau comme une plaque homogène équivalente. Le principe est de déterminer un modèle d'homogénéisation qui consiste à remplacer le carton ondulé (structure 3D) par une plaque homogénéisée 2D ayant les mêmes rigidités globales.

Plusieurs travaux ont traité ce sujet du point de vue analytique, numérique ou expérimental. En considérant le carton ondulé comme une plaque sandwich, Nordstrand et al. [32-35] ont obtenu par une méthode analytique les propriétés équivalentes. Dans cette méthode, ils ont proposé une solution analytique pour le cisaillement transverse sous l'effort tranchant et l'ont appliqué au flambement et post-flambement d'une plaque. Qingxi et al. [36] ont présenté un modèle constitutif tridimensionnel et anisotrope pour modéliser la déformation plane élastoplastique du papier carton. Buannic et al. [37] ont présenté un modèle d'homogénéisation basé sur la méthode asymptotique. Dans cette étude, ils ont déterminé une plaque équivalente de Love-Kirchhoff. Le calcul des propriétés mécaniques équivalentes par la méthode des éléments finis a été présenté. Biancolini et al. [38-39] ont présenté une approche d'homogénéisation numérique par la méthode des éléments finis pour évaluer la matrice de rigidité du carton ondulé. Allaoui et al. [40-42] ont développé un modèle numérique d'homogénéisation basé sur la théorie classique des stratifiés, ils ont comparé leurs résultats avec ceux des tests expérimentaux qu'ils ont réalisés.

I. Le carton ondulé

Le carton est un papier plus rigide et plus épais que le papier ordinaire. Le papier a un grammage inférieur à 224 g/m^2 alors que le carton a un grammage entre 224 et 500 g/m^2 . Le carton ondulé est un carton constitué par une ou plusieurs feuilles de papier cannelé collées sur une ou plusieurs feuilles de papier plan (peaux) (Figure 144).

Le rôle des peaux d'un carton ondulé est multiple. Elles participent à la rigidité de traction aussi bien qu'à celle de flexion. Elles servent aussi de support d'impression ou de protection contre les agressions mécaniques et climatiques. Les peaux sont généralement constituées de papier kraft (et non pas de papier recyclé) qui est plus solide.

Le rôle de la cannelure est principalement mécanique. Elle sert à écarter les deux peaux qui a pour effet d'augmenter considérablement la rigidité de flexion de toute la structure. De plus, la cannelure offre une résistance en cisaillement. Elle est très souvent constituée de papier de recyclage.

On adopte généralement de l'amidon de maïs pour la fabrication de la colle qui est utilisée pour assembler les constituants du carton ondulé au niveau de l'onduleuse. Notons que cette matière à l'avantage de ne pas être chère et elle est d'origine renouvelable.

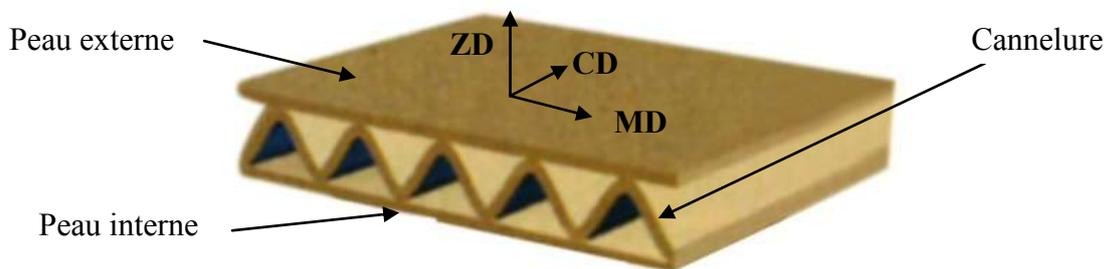


Figure 14 : Constituants du carton ondulé.

Les différents constituants du carton ondulé (peaux et cannelure) sont assemblés par une machine appelée « onduleuse » (Figure 15). La colle est d'abord déposée au sommet des cannelures. Les tables chauffantes permettent ensuite la bonne prise de la colle. La mitrailleuse permet de découper les panneaux en carton ondulé selon les dimensions souhaitées.

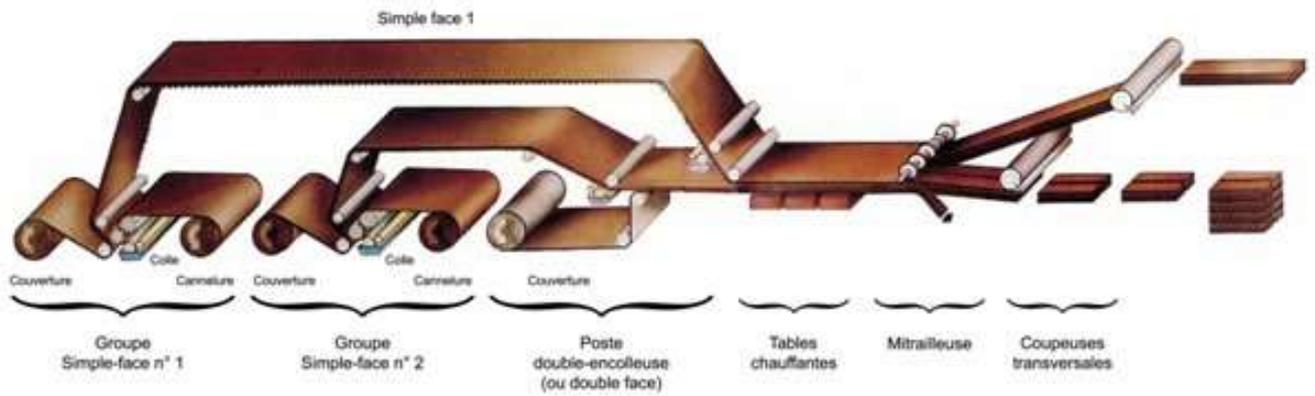


Figure 15 : Assemblage des constituants du carton ondulé sous forme de panneaux (réf. Site Ondulys).

Les paramètres géométriques du carton ondulé simple cannelure représentés dans la Figure 1616 sont :

- h_c hauteur de la cannelure.
- P pas de la cannelure.
- e_i , e_c et e_s sont respectivement les épaisseurs de la peau inférieure, de la cannelure et de la peau supérieure.
- H hauteur totale du carton ondulé.

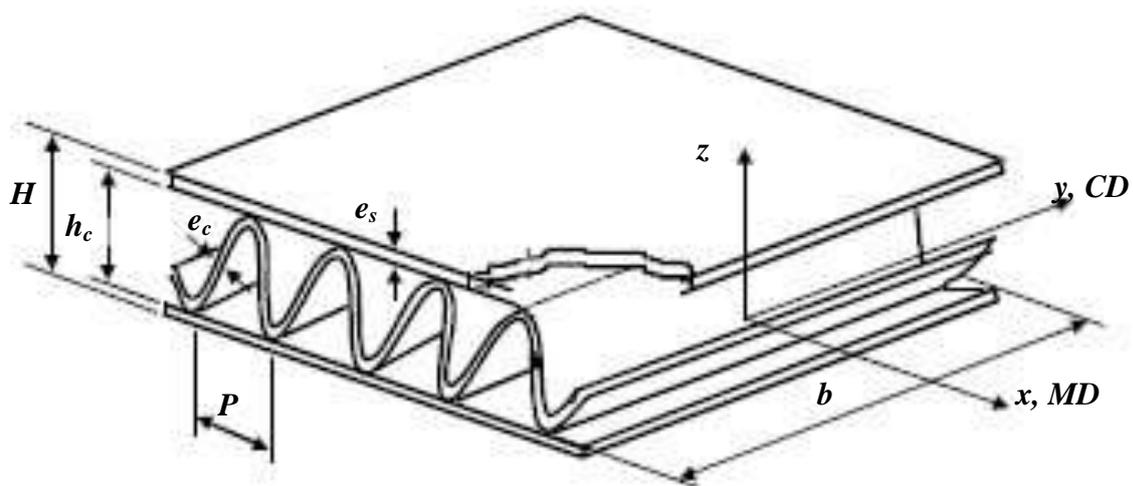


Figure 16 : Paramètres géométriques du carton ondulé simple cannelure [43].

Sachant que le papier qui constitue le carton ondulé est orthotrope ; alors on définit pour le carton la direction MD (Machine Direction) comme celle qui correspond à la direction d'ondulation de la cannelure, et la direction CD (Cross Direction) comme celle correspondant à la direction transversale à l'ondulation.

Concernant le papier, la direction MD correspond à celle des fibres. La direction CD est celle correspondant à la direction transverse aux fibres. On note que les directions MD et CD du carton ondulé correspondent forcément aux directions MD et CD du papier. En effet, dans une structure d'un panneau en carton ondulé, la direction machine des fibres des papiers des différents constituants correspond systématiquement à la direction machine de l'ondulation. L'onduleuse utilise des rouleaux de papier enroulés dans la direction machine pour assembler les papiers constituants et créer du carton ondulé dans la direction machine.

II. Rappels théoriques

II.1. Rappel de la théorie des plaques de Mindlin

La théorie de Love-Kirchhoff, appliquée aux plaques minces, suppose que la section droite et normale à la surface moyenne reste droite et normale après déformation. Ceci conduit à négliger le cisaillement et les déformations dans le sens de la faible épaisseur. Par contre, pour les plaques épaisses ou composites, cette hypothèse ne peut être utilisée. Dans ce cas on applique la théorie de Mindlin. Elle suppose que la section est non-normale à la surface moyenne après déformation, ce qui permet la prise en compte des déformations de cisaillement transverse.

Sur la surface moyenne d'une plaque, les axes x et y sont sur le plan de la surface et l'axe z perpendiculaire à la surface. Dans la théorie de Mindlin, on définit le champ de déplacements suivant :

$$\begin{aligned} u_q &= u + z\beta_x \\ v_q &= v + z\beta_y \\ w_q &= w \end{aligned} \tag{1}$$

où u_q , v_q et w_q sont les déplacements d'un point $q(x, y, z)$, u , v et w sont les déplacements du point $p(x, y, 0)$ sur la surface moyenne, β_x est l'angle de rotation de la normale de z vers x où

l'angle de rotation autour de y ($\beta_x = \theta_y$), β_y est l'angle de rotation de la normale de z vers y ou l'angle de rotation autour de x ($\beta_y = -\theta_x$).

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= u_{q'x} = u_{,x} + z\beta_{x'x} \\
 \varepsilon_y &= v_{q'y} = v_{,y} + z\beta_{y'y} \\
 \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = u_{q'y} + v_{q'x} = u_{,y} + v_{,x} + z(\beta_{x'y} + \beta_{y'x}) \\
 \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = u_{q'z} + w_{q'x} = w_{,x} + \beta_x \\
 \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = v_{q'z} + w_{q'y} = w_{,y} + \beta_y \\
 \varepsilon_z &= w_{q'z} = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Les déformations planes peuvent être décomposées en déformations de membrane et de flexion :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_m\} + z\{\kappa\} \tag{3}$$

où $\{\kappa\}$ est le vecteur des courbures.

La loi de comportement pour un matériau orthotrope s'écrit :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

$$\{\sigma_\gamma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Les efforts de membrane $\{N(x,y)\}$, les moments de flexion et de torsion $\{M(x,y)\}$ et les efforts de cisaillement transverse $\{T(x,y)\}$ sont obtenus par une intégration des contraintes suivant l'épaisseur (Figure 17) :

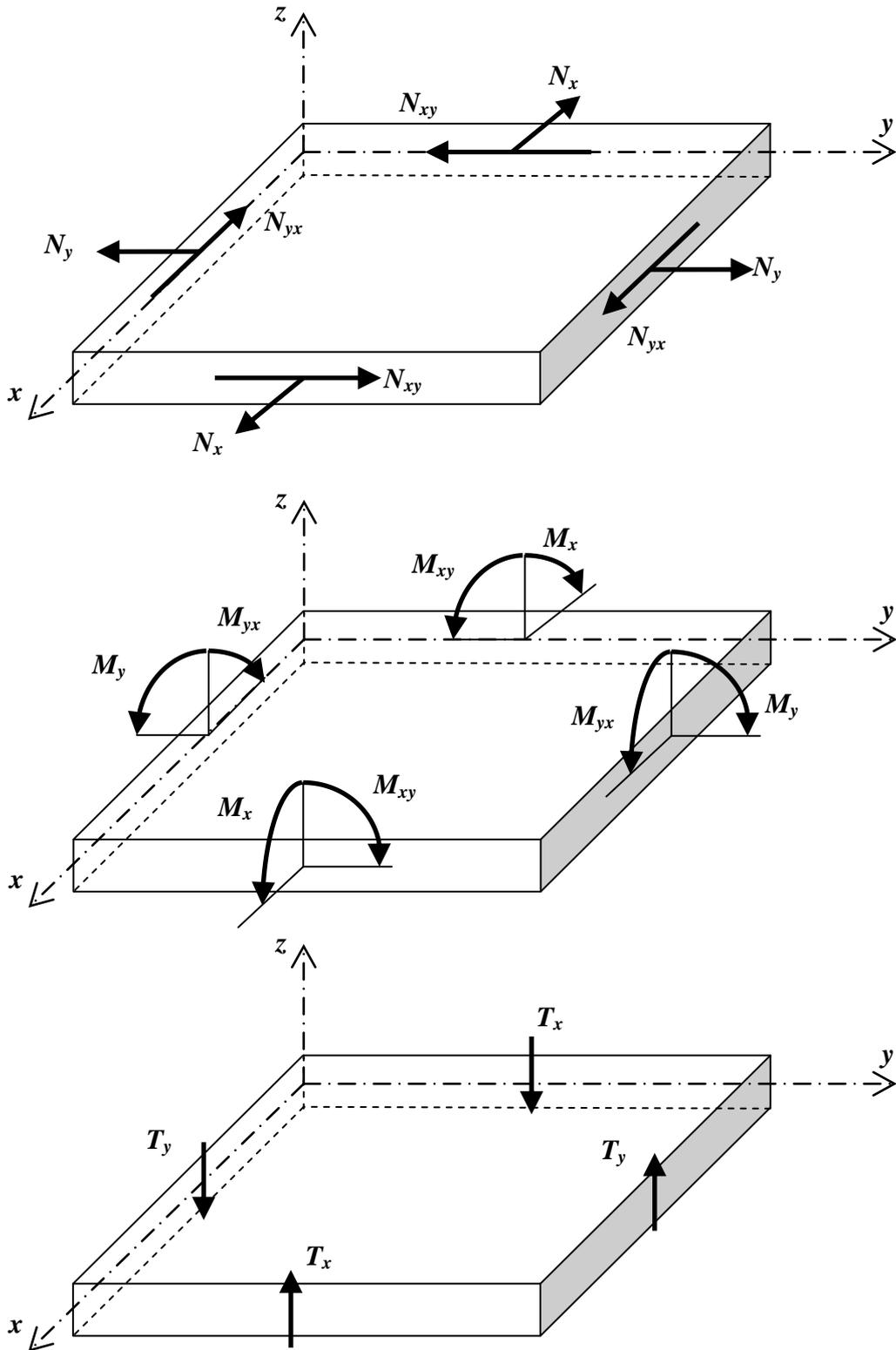


Figure 17 : Efforts de membrane, moments de flexion et de torsion et efforts de cisaillement transverse.

$$\{N(x, y)\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (6)$$

$$\{M(x, y)\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (7)$$

$$\{T(x, y)\} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (8)$$

II.2. Rappel de la théorie des stratifiés

Un stratifié est constitué de plusieurs couches dans la direction de l'épaisseur. La théorie des stratifiés permet de calculer les contraintes et les déformations dans chaque couche d'une structure composite stratifiées.

Considérons une plaque composite constituée de plusieurs couches (Figure 18), on définit ci-dessous les efforts résultants pouvant être cumulés couche par couche :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}_k \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_m + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}_k \left(z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}_m + z^2 \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (11)$$

La matrice de rigidité globale qui lie les déformations généralisées aux efforts résultant est obtenue après l'intégration analytique suivant l'épaisseur :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xm} \\ \varepsilon_{ym} \\ \gamma_{xym} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n [h^k - h^{k-1}] Q_{ij}^k = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k e^k \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(h^k)^2 - (h^{k-1})^2] Q_{ij}^k = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k e^k z^k \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [(h^k)^3 - (h^{k-1})^3] Q_{ij}^k = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k \left[e^k (z^k)^2 + \frac{(e^k)^3}{12} \right] \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^n [h^k - h^{k-1}] C_{ij}^k = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e^k \end{aligned} \quad (13)$$

La loi de comportement global ci-dessus peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_m\} \\ \{\kappa\} \\ \{\gamma_c\} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

où $[A]$ représente les rigidités de membrane, $[D]$ représente les rigidités de flexion et de torsion, $[F]$ représente les rigidités de cisaillement transverse, $[B]$ représente le couplage entre membrane et flexion-torsion. Si la plaque composite est symétrique par rapport à sa surface moyenne, ce couplage disparaît et $[B] = 0$.

Dans le cas du carton ondulé, la théorie des stratifiés ne peut être appliquée directement, car cette théorie n'est valable que pour les cas des milieux continus ce qui n'est pas le cas du carton ondulé qui présente des cavités.

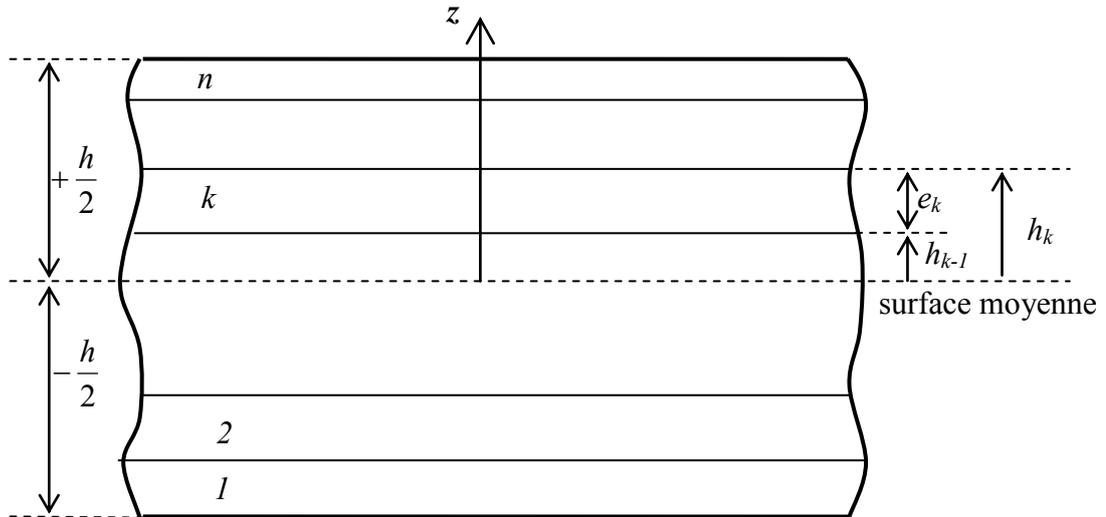


Figure 18 : Représentation d'une plaque stratifiée.

II.3. Rappel de la théorie des sandwichs

Une plaque sandwich est constituée d'un matériau de faible densité et rigidité appelé âme sur lequel sont collées des plaques de forte rigidité (peaux). La fonction principale de l'âme d'un sandwich est de supporter les efforts tranchants transverses et d'augmenter la rigidité de flexion en écartant au maximum les deux peaux.

La théorie des plaques sandwich repose sur les hypothèses fondamentales suivantes [44] :

- L'épaisseur de l'âme est bien plus élevée que celle des peaux.
- Les déplacements de l'âme suivant les directions x et y (Figure 19) sont des fonctions linéaires de la coordonnée z .
- Les déplacements suivant les directions x et y sont uniformes dans l'épaisseur des peaux. Ceci conduit aux hypothèses suivantes pour les déplacements dans les peaux :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, \pm \frac{h}{2}) &= u \pm \frac{h}{2} \beta_x \\
 v(x, y, \pm \frac{h}{2}) &= v \pm \frac{h}{2} \beta_y
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

- Le déplacement transverse est indépendant de z :

$$w(x, y, z) = w(x, y)
 \tag{16}$$

- L'âme ne supporte que les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} , σ_{yz} . Les contraintes σ_x , σ_y , σ_{xy} et σ_z sont négligeables.
- Les contraintes de cisaillement transverse σ_{xz} et σ_{yz} sont négligées dans les peaux.

La loi de comportement de la plaque sandwich diffère légèrement de celle de la plaque stratifiée. La sous-matrice $[B]$ en dessous de la diagonale sera différente dans l'équation (14), cela rendra la matrice de rigidité globale non symétrique.

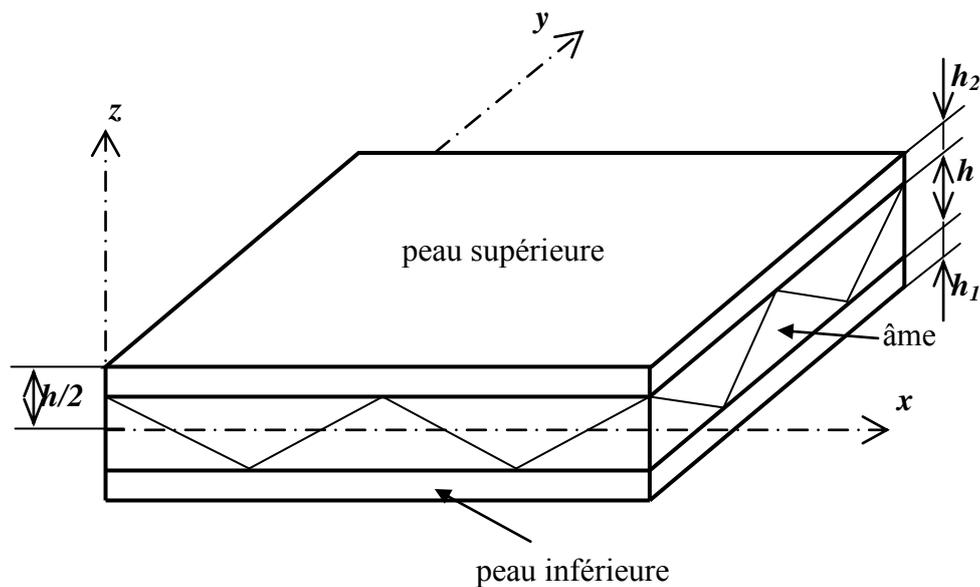


Figure 19 : Représentation d'une plaque sandwich.

III. Adaptation de la théorie des stratifiés au carton ondulé

III.1. Travaux antérieurs sur le carton ondulé au sein du GRESPI

L'homogénéisation du carton ondulé a fait l'objet de plusieurs travaux au sein de l'équipe MPSE du laboratoire GRESPI [31,45-50].

L'adaptation de la théorie des stratifiés au carton ondulé a été développée dans la thèse de A. Batti [45], nous présenterons ici brièvement cette adaptation. En s'inspirant des travaux d'Aboura et al. [42] et en comparant les deux théories des stratifiés et de sandwich l'équipe de recherche du laboratoire a adopté celle des stratifiés pour l'homogénéisation du carton ondulé.

La cannelure et les peaux sont considérées comme des strates, mais la cannelure est une feuille ondulée alors qu'une strate classique est une plaque dans le plan (O,x,y) . Pour

adapter la théorie des stratifiés au cas spécifique du carton ondulé, il est alors nécessaire d'effectuer quelques modifications.

Pour homogénéiser un panneau en carton ondulé, on prend un volume élémentaire représentatif, qui doit être assez petit par rapport aux dimensions du panneau entier. Vu la périodicité de la cannelure, on peut prendre une période sinusoïdale de la cannelure comme la longueur caractéristique du volume élémentaire (Figure 20). Par la suite les propriétés mécaniques homogénéisées du volume sont calculées et utilisées pour modéliser la structure 3D par une plaque 2D homogénéisée.

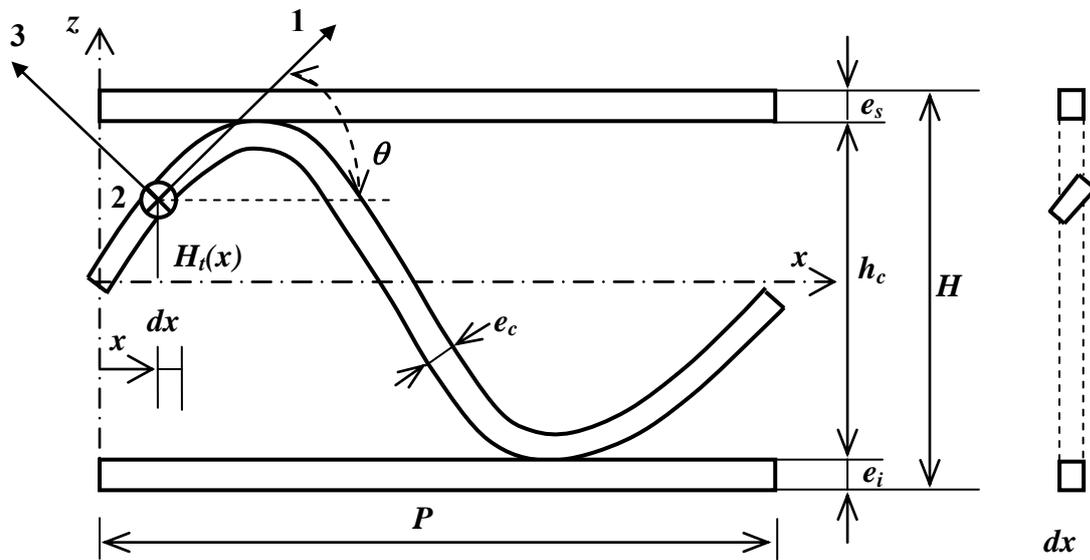


Figure 20 : Volume élémentaire représentatif pour le carton ondulé.

Pour pouvoir appliquer la théorie des stratifiés, on découpe le volume élémentaire en petites tranches de longueur dx et on intègre suivant l'épaisseur sur chaque tranche. Puisque la tranche de la cannelure est inclinée et que ses propriétés mécaniques obtenues expérimentalement sont valables uniquement dans le plan de la feuille, il est donc nécessaire de transformer ces propriétés dans le plan horizontal.

Après avoir défini les propriétés mécaniques des trois strates dans le plan (O, x, y) , on peut appliquer la théorie des stratifiés dans la tranche dx pour obtenir les rigidités globales de cette tranche.

III.1.1. Transformation des propriétés mécaniques de la cannelure dans le repère global

Les propriétés mécaniques de la cannelure sont obtenues à partir des essais expérimentaux dans le plan de la feuille. Il faut donc transformer ces propriétés du repère de la feuille 123 au repère global du carton xyz (Figure 20). L'angle d'inclinaison θ peut être exprimé par :

$$\theta(x) = \tan^{-1}\left(\frac{dH_t(x)}{dx}\right) \text{ avec } H_t(x) = \frac{h}{2} \sin\left(2\pi \frac{x}{P}\right) \quad (17)$$

La transformation des contraintes et des déformations entre les deux repères est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_{xyz} &= [T_\varepsilon] \{\varepsilon\}_{123} \\ \{\sigma\}_{123} &= [T_\sigma] \{\sigma\}_{xyz} \end{aligned} \quad (18)$$

où $[T_\varepsilon]$ et $[T_\sigma]$ sont respectivement les matrices de transformation des déformations et des contraintes.

Les lois de comportement dans les repères global (xyz) et local (123) sont écrites comme suit :

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}_{xyz} &= [S]_{xyz} \{\sigma\}_{xyz} \\ \{\varepsilon\}_{123} &= [S]_{123} \{\sigma\}_{123} \end{aligned} \quad (19)$$

avec $[S]_{xyz}$ et $[S]_{123}$ sont les matrices de flexibilité dans les repères global et local respectivement.

La transformation de la matrice de flexibilité du repère local au repère global s'obtient, en utilisant les équations (18) et (19) :

$$\{\varepsilon\}_{xyz} = [T_\varepsilon] \{\varepsilon\}_{123} = [T_\varepsilon] [S]_{123} \{\sigma\}_{123} = [T_\varepsilon] [S]_{123} [T_\sigma] \{\sigma\}_{xyz} \quad (20)$$

ce qui donne :

$$[S]_{xyz} = [T_\varepsilon] [S]_{123} [T_\sigma] \quad (21)$$

Les matrices de transformation et de flexibilité de l'équation (21) sont données ci-dessous :

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & s^2 & 0 & -sc & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & c^2 & 0 & sc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & -s \\ 2sc & 0 & -2sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & s^2 & 0 & 2sc & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & c^2 & 0 & -2sc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & -s \\ -sc & 0 & sc & 0 & c^2 - s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$[S]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$[S]_{123} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

avec : $s = \sin \theta$ et $c = \cos \theta$.

La loi de comportement de la cannelure dans le repère global est :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [Q](\theta) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{yx}E_x}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$\{\sigma_\gamma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = [C](\theta) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{xz} & 0 \\ 0 & G_{yz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

On trouve les coefficients du matériau de la cannelure dans le repère global (xyz) de la plaque utilisés dans les équations (26) et (27) en calculant la matrice de flexibilité $[S]_{xyz}$.

$$E_x(\theta) = \left(\frac{c^4}{E_1} + \frac{s^4}{E_3} + s^2c^2 \left(\frac{1}{G_{13}} - \frac{2\nu_{13}}{E_1} \right) \right)^{-1}$$

$$E_y(\theta) = E_2$$

$$\nu_{yx}(\theta) = c^2\nu_{21} + s^2\nu_{23} ; \quad G_{xy}(\theta) = \left[\frac{c^2}{G_{12}} + \frac{s^2}{G_{23}} \right]^{-1} \quad (28)$$

$$G_{xz}^c(\theta) = \left[4s^2c^2 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{2\nu_{13}}{E_1} + \frac{1}{E_3} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{13}} \right]^{-1}$$

$$G_{yz}^c(\theta) = \left[\frac{c^2}{G_{23}} + \frac{s^2}{G_{12}} \right]^{-1}$$

III.1.2. Homogénéisation suivant l'épaisseur

Au lieu d'utiliser une loi comportement locale en tout point (reliant les contraintes aux déformations), le processus d'homogénéisation permet d'aboutir à une loi de comportement généralisée pour une plaque équivalente homogène (reliant les efforts internes aux déformations généralisées). L'intégration suivant l'épaisseur et le long de la direction MD-x est requise.

Les contraintes planes peuvent être décomposées en parties de membrane et de flexion :

$$\{\sigma\} = [Q(\theta)](\{\varepsilon_m\} + z\{\kappa\}) \quad (29)$$

L'intégration suivant l'épaisseur des équations (26) et (27) donne les efforts et moments internes résultants :

$$\{N\} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \{\sigma\} dz = [A(\theta)]\{\varepsilon_m\} + [B(\theta)]\{\kappa\} \quad (30)$$

$$\{M\} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \{\sigma\} z dz = [B(\theta)]\{\varepsilon_m\} + [D(\theta)]\{\kappa\} \quad (31)$$

$$\{T\} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \{\sigma_\gamma\} dz = [F(\theta)]\{\varepsilon_m\} \quad (32)$$

avec :

$$[A(x)] = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} [Q] dz = [Q_s] e_s + [Q_i] e_i + [Q_c] e_{cv} \quad (33)$$

$$[B(x)] = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} [Q]z dz = [Q_s]z_s e_s + [Q_i]z_i e_i + [Q_c]z_c e_{cv} \quad (34)$$

$$[D(x)] = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} [Q]z^2 dz = [Q_s] \left(z_s^2 e_s + \frac{1}{12} e_s^3 \right) + [Q_i] \left(z_i^2 e_i + \frac{1}{12} e_i^3 \right) + [Q_c] \left(z_c^2 e_c + \frac{1}{12} e_c^3 \right) \quad (35)$$

$$[F(x)] = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} [G]z dz = k \left([G_s]e_s + [G_i]e_i + [G_c]e_{cv} \right) \quad (36)$$

où $e_{cv} = \frac{e_c}{\cos \theta}$ est l'épaisseur de la cannelure suivant le plan vertical. $k = \frac{6}{5}$ est le coefficient de correction de cisaillement.

III.1.3. Homogénéisation le long de la direction MD-x

L'homogénéisation le long de la direction $MD-x$ consiste à calculer les rigidités moyennes de toutes les tranches dx sur une période sinusoïdale P :

$$\begin{aligned} [A] &= \frac{1}{P} \int_0^P [A(x)] dx \\ [B] &= \frac{1}{P} \int_0^P [B(x)] dx \\ [D] &= \frac{1}{P} \int_0^P [D(x)] dx \\ [F] &= \frac{1}{P} \int_0^P [F(x)] dx \end{aligned} \quad (37)$$

Selon les équations (30) à (36), la loi de comportement généralisée peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Le carton ondulé est plus complexe qu'une plaque stratifiée en raison de la feuille ondulée et des cavités entre les deux peaux. La matrice de rigidités globales obtenue par la théorie des plaques stratifiées doit être corrigée, particulièrement pour les efforts et les moments suivant la direction MD. En effet, la cannelure n'a pas de contribution à la rigidité de traction suivant MD et ne peut pas supporter l'effort normal. De même, elle n'a pas de contribution à la rigidité de flexion MD sous un moment de flexion M_x autour de y . Dans ces cas, c'est la théorie des sandwichs qui doit être utilisée [45,46].

Des modifications des matrices $[A]$, $[B]$ et $[D]$ sont apportées afin d'annuler les rigidités de traction et de flexion de la cannelure relatives à N_x et M_x respectivement sur une section MD [45].

$$N_x^c = 0 \Rightarrow A_{11}^c = A_{12}^c = A_{13}^c = B_{11}^c = B_{12}^c = B_{13}^c = 0 \quad (39)$$

$$M_x^c = 0 \Rightarrow B_{11}^c = B_{12}^c = B_{13}^c = D_{11}^c = D_{12}^c = D_{13}^c = 0 \quad (40)$$

La nouvelle loi de comportement mécanique de la cannelure s'écrit alors :

$$[Q^c(\theta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}(\theta) \end{bmatrix} \quad (41)$$

III.1.4. Rigidité de cisaillement dans le plan xy relative à N_{xy} ou N_{yx}

On considère la cannelure d'un carton ondulé de longueur $P/2$ (suivant x) et de largeur b (suivant y) (Figure 21). Un couple d'efforts de cisaillement par unité de largeur N_{xy} (suivant y) appliqué sur la section MD donne un déplacement v . Le cisaillement de la cannelure peut être facilement traité par la mise à plat de la cannelure (Figure 21b) :

$$\tau_{12} = \frac{N_{xy}}{e} = G_{12}\gamma_{12} = G_{xy} \frac{v}{0.5l} \quad (42)$$

où N_{xy} est l'effort tranchant supporté par la cannelure, G_{xy} est le module de cisaillement dans le plan de la cannelure.

La déformation de cisaillement dans le plan xy de la cannelure 3D est définie par :

$$\gamma_{xy} = \frac{v}{0.5P} \quad (43)$$

Ainsi on obtient la loi de comportement pour le cisaillement dans le plan xy :

$$N_{xy} = \frac{G_{xy} e P}{l} \gamma_{xy} \quad (44)$$

Pour un carton simple cannelure, la rigidité de cisaillement dans le plan du carton est donnée par la somme des rigidités des 3 couches :

$$N_{xy} = A_{33} \gamma_{xy} \quad ; \quad A_{33} = G_{xy}^s e^s + \frac{G_{xy}^c e^c P^c}{l^c} + G_{xy}^i e^i \quad (45)$$

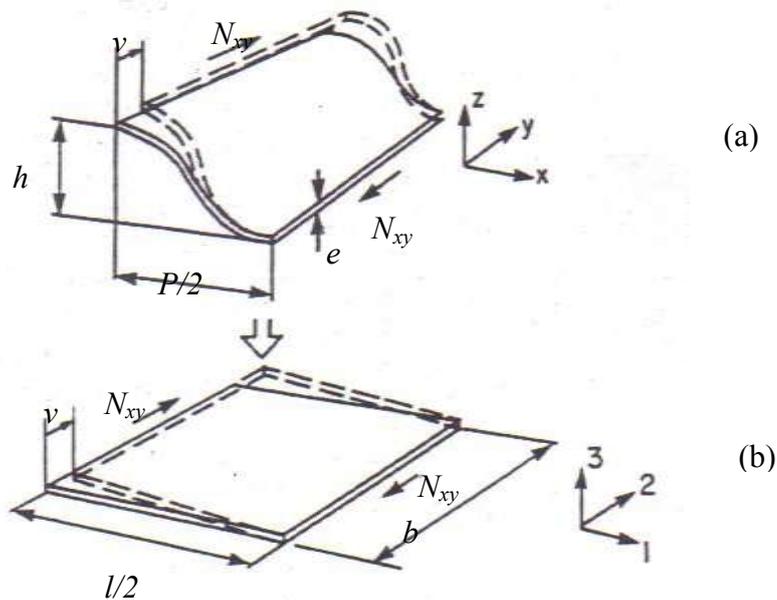


Figure 21 : Modèle équivalent pour le cisaillement de la cannelure dans le plan xy .

III.1.5. Rigidité de cisaillement transverse sur section CD relative à T_y

Il est difficile de déterminer directement la rigidité de cisaillement transverse sur une section CD relative à T_y à cause du couplage flexion-cisaillement transverse. Selon le théorème de réciprocité, Nordstrand a proposé de remplacer le cisaillement transverse sous l'effort T_y (effort suivant z et par unité de longueur suivant x) par un cisaillement sur l'épaisseur sous l'effort suivant y $T_{zy} = T_y$ (Figure 22a).

On considère une demi-période de cannelure soumise à un couple d'efforts tranchants T_{zy} qui donne le glissement du côté supérieur par rapport au côté inférieur égale à v . Le cisaillement de la plaque homogène de dimension $l/2 \times b \times h$ peut être défini par :

$$\tau_{zy} = \frac{T_{zy}}{0.5P} = G_{zy} \frac{v}{h} \quad (46)$$

Le cisaillement dans la cannelure 3D (Figure 22a) est équivalent au cisaillement dans la cannelure mise à plat (Figure 22b). Cela nous donne :

$$\tau_{12} = \frac{T_{zy}}{e} = G_{xy} \frac{v}{0.5l} \quad (47)$$

Les deux équations ci-dessus permettent d'obtenir le module de cisaillement de la plaque homogène :

$$G_{zy}^* = G_{xy} \frac{4eh}{Pl} \quad (48)$$

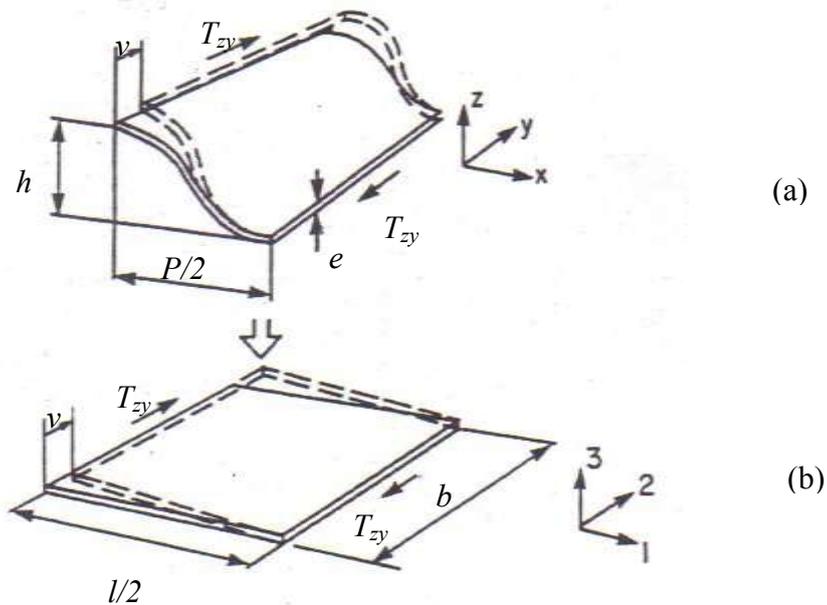


Figure 22 : Modèle équivalent pour le cisaillement transverse T_y .

Ainsi, pour un carton de simple cannelure, la rigidité de cisaillement transverse relative à T_y s'écrit :

$$F_{22} = G_{xy}^s e^s + G_{xy}^c \frac{4e^c (h^c)^2}{P^c l^c} + G_{xy}^i e^i \quad (49)$$

III.1.6. Rigidité de cisaillement transverse sur section MD relative à T_x

Il est encore plus difficile de déterminer la rigidité de cisaillement transverse sur une section MD relative à T_x . Selon le théorème de réciprocité, Nordstrand a proposé de remplacer le cisaillement transverse sous l'effort T_x (suivant z) par un cisaillement sous l'effort suivant x $T_{zx} = T_x$. En fait, ce problème de cisaillement n'est pas vraiment un problème de cisaillement des 3 couches, il est dominé par la flexion des 2 faces planes et surtout par la flexion de la cannelure. La formulation analytique basée sur la théorie de poutre courbe est longue et complexe, elle a été déjà programmée par A. Batti dans sa thèse.

La rigidité de cisaillement peut être également déterminée numériquement, le modèle équivalent de Nordstrand est représenté sur la Figure 23. Le module de cisaillement horizontal (valable aussi pour le cisaillement transversal) pour la plaque homogénéisée est défini comme suit :

$$G^* = \frac{\sigma_{zx}}{\gamma_{zx}} = \frac{F/bL}{u/h} = \frac{F}{u} \frac{h}{bL} \quad (50)$$

Le problème revient à déterminer le rapport $\frac{F}{u}$ numériquement. Afin d'éliminer l'effet de bord, il vaut mieux prendre une période au milieu du carton. Finalement, la rigidité de cisaillement transverse de la plaque en carton ondulé est obtenue :

$$F_{11} = G^* h = \frac{\Delta F}{\Delta u} \frac{h^2}{bP} \quad (51)$$

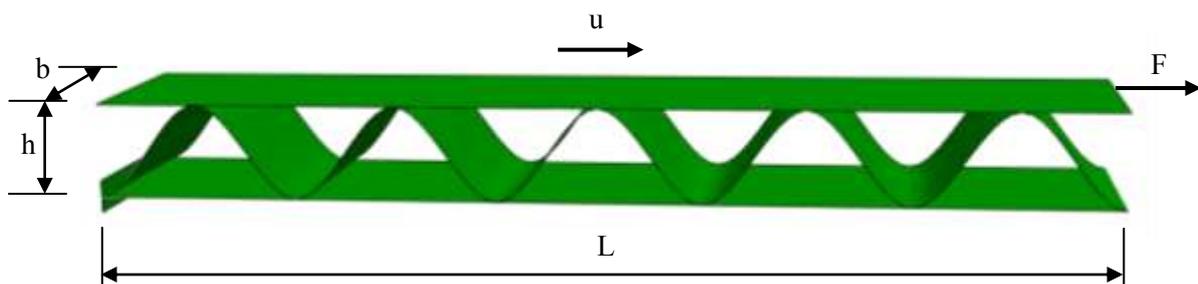


Figure 23 : Cisaillement horizontal d'un carton ondulé.

III.1.7. Décomposition de la rigidité de torsion en 2 rigidités de torsion de poutre

Considérons une plaque sous une charge distribuée verticale q (Figure 24). L'équation d'équilibre est :

$$M_{x'xx} + M_{yx'xy} + M_{y'y'y} - M_{xy'xy} = -q \quad (52)$$

Pour une plaque orthotrope, les trois contraintes planes et les moments de flexion et de torsion correspondants sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E'_x \varepsilon_x + E'' \varepsilon_y = -z(E'_x w_{,xx} + E'' w_{,yy}) \\ \sigma_y &= E'_y \varepsilon_y + E'' \varepsilon_x = -z(E'_y w_{,yy} + E'' w_{,xx}) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -2Gz w_{,xy} \end{aligned} \quad (53)$$

avec :

$$E'_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad E'_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad E'' = \frac{E_x\nu_{yx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad E_x\nu_{yx} = E_y\nu_{xy}$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D_x w_{,xx} - D_1 w_{,yy}; \quad D_x = \frac{E'_x h^3}{12}; \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12} \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D_y w_{,yy} - D_1 w_{,xx}; \quad D_y = \frac{E'_y h^3}{12}; \quad D_{xy} = \frac{Gh^3}{12} \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = 2D_{xy} w_{,xy} \end{aligned} \right. \quad (54)$$

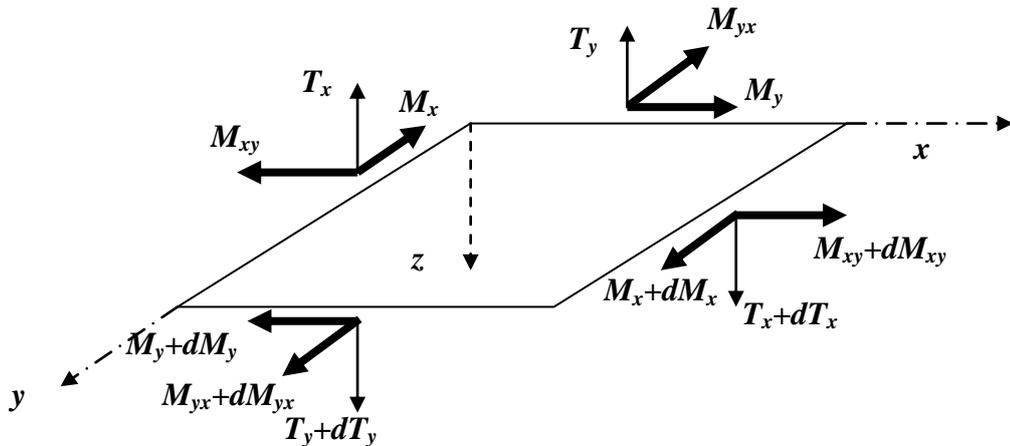


Figure 24 : Forces et moments internes dans une surface élémentaire d'une plaque.

Par substitution de l'équation (54) dans l'équation différentielle d'équilibre (52), on obtient l'équation suivante pour les plaques orthotropes :

$$D_x w_{xxxx} + 2(D_1 + 2D_{xy}) w_{xxyy} + D_y w_{yyyy} = q \quad (55)$$

où $2D_1$ représente l'effet de Poisson des moments de flexion sur la courbure de torsion, et D_{xy} est la rigidité de torsion de la plaque.

La théorie des plaques orthotropes avec armatures croisées est proposée par Timoshenko et Woinowski-Krieger [54] (Figure 25). La courbure de torsion de la plaque est décomposée en deux taux de torsion de poutre égaux suivant les directions x et y , et les moments de torsion sont calculés conformément à la théorie classique de torsion de poutre et puis uniformément distribués sur les intervalles a_1 et b_1 , d'une plaque homogénéisée, respectivement.

$$M_{xy} = \frac{Gj_x}{b_1} \theta_{x,x} = \frac{Gj_x}{b_1} w_{yx} ; M_{yx} = \frac{Gj_y}{a_1} \theta_{y,y} = -\frac{Gj_y}{a_1} w_{xy} ; w_{yx} = w_{xy} \quad (56)$$

où Gj_x et Gj_y sont les rigidités de torsion de chaque poutre autour de x et y respectivement, $\theta_{x,x}$ et $\theta_{y,y}$ taux de torsion autour de x et y , $-2w_{xy}$ est la courbure de torsion, M_{xy} et M_{yx} sont les moments de torsion par unité de longueur de la plaque, a_1 est l'intervalle entre deux poutres suivant x , b_1 suivant y .

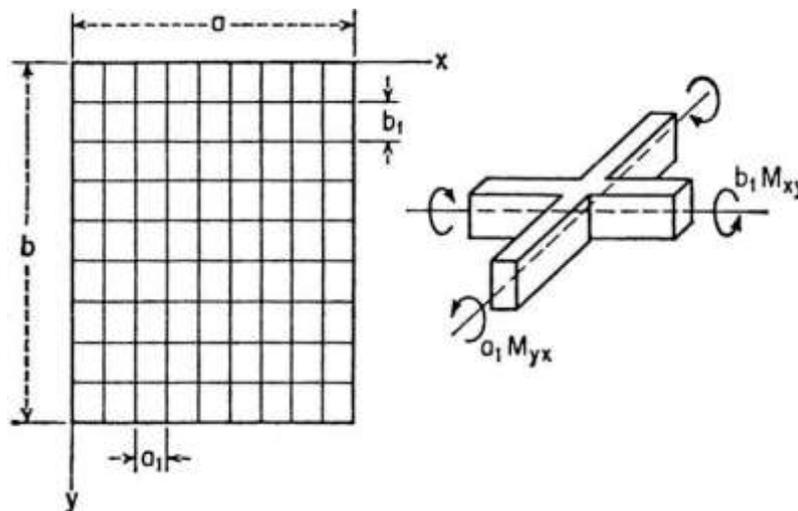


Figure 25 : Modèle de torsion pour une plaque avec armatures croisées de Timoshenko.

En substituant les expressions (56) dans l'équation (55) on a :

$$\frac{E_x i_x}{b_1} w_{xxxx} + \left(\frac{Gj_x}{b_1} + \frac{Gj_y}{a_1} \right) w_{xyyy} + \frac{E_y i_y}{a_1} w_{yyyy} = q \quad (57)$$

où $E_x i_x$ et $E_y i_y$ sont les rigidités de flexion de chaque poutre le long de x et y respectivement.

En comparant les équations (57) et (55), on trouve la relation ci-dessous pour calculer la rigidité de torsion de la plaque équivalente (avec $D_I=0$) :

$$D_{xy} = \frac{1}{4} \left(\frac{Gj_x}{b_1} + \frac{Gj_y}{a_1} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{GJ_x}{b} + \frac{GJ_y}{a} \right) \quad (58)$$

où GJ_x et GJ_y sont les rigidités de torsions totales de toutes les poutres le long de x et y respectivement.

On note que le facteur $1/4$ s'obtient du couplage des deux torsions de poutres. Si on impose un angle de torsion θ_x autour de l'axe x dans la plaque à armatures croisées (longueur $L=a$ suivant x , largeur $B=b$ suivant y), on obtient le taux de torsion $\theta_{x,x} = w_{yx} = \theta_x / L$ autour de x et également un taux de torsion égal $\theta_{y,y} = -w_{xy} = -\theta_x / B$ autour de y . En utilisant le théorème de Clapeyron, on obtient l'équation de l'énergie pour cette structure de poutre :

$$M_t \theta_x = \int_0^L GJ_x (\theta_{x,x})^2 dx + \int_0^B GJ_y (\theta_{y,y})^2 dy = \int_A \left(\frac{GJ_x}{B} + \frac{GJ_y}{L} \right) (w_{xy})^2 dA \quad (59)$$

avec $GJ_x = \sum_i (Gj_x)_i$ et $GJ_y = \sum_j (Gj_y)_j$.

Dans la plaque homogène équivalente, l'équation de l'énergie peut être écrite comme suit :

$$M_t \theta_x = \int_A D_{xy} (-2w_{xy})^2 dA \quad (60)$$

où $(-2w_{xy}) = \kappa_{xy}$ est la courbure de torsion de la plaque, qui peut être décomposée en deux taux de torsion de poutre égales ($w_{yx} = \theta_{x,x} = w_{xy} = -\theta_{y,y}$).

En comparant les 2 équations ci-dessus, on obtient la formule suivante similaire pour le calculer la rigidité de torsion équivalente :

$$D_{xy} = \frac{1}{4} \left(\frac{GJ_x}{B} + \frac{GJ_y}{L} \right) \quad (61)$$

III.1.8. Rigidité de torsion sur section MD ou CD relative à M_{xy} ou M_{yx}

En absence d'une solution exacte pour le calcul de la rigidité de torsion de la structure 3D du carton ondulé, B. Abbès et al [46,49] ont essayé de chercher une solution approximative en utilisant le modèle de décomposition précédent et la théorie de torsion de poutre.

Sur la section CD du carton ondulé, la torsion autour de y peut être considérée comme la torsion d'une poutre ayant une section à paroi mince avec plusieurs cellules fermées. La théorie de torsion de Bredt fondé sur l'analogie de la membrane sous pression introduite par Prandtl (1903) donne les équations suivantes pour une section de n cellules [46] (Figure 26) :

$$\begin{aligned} q_1 \oint_1 \frac{ds}{e} - q_2 \int_{1,2} \frac{ds}{e} &= \frac{2M_t}{J} S_1 \\ -q_1 \int_{2,1} \frac{ds}{e} + q_2 \oint_2 \frac{ds}{e} - q_3 \int_{2,3} \frac{ds}{e} &= \frac{2M_t}{J} S_2 \dots \\ -q_{n-1} \int_{n,n-1} \frac{ds}{e} + q_n \oint_n \frac{ds}{e} &= \frac{2M_t}{J} S_n \end{aligned} \quad (62)$$

où J est le moment d'inertie de torsion de la section de la cellule, q_i est le flux de contrainte de cisaillement inconnu dans les parois de chaque cellule, M_t est le moment de torsion, e est l'épaisseur de la paroi, s est la longueur curviligne médiane de la paroi de la cellule, S_i est l'aire de la surface enveloppé par la courbe s de la cellule.

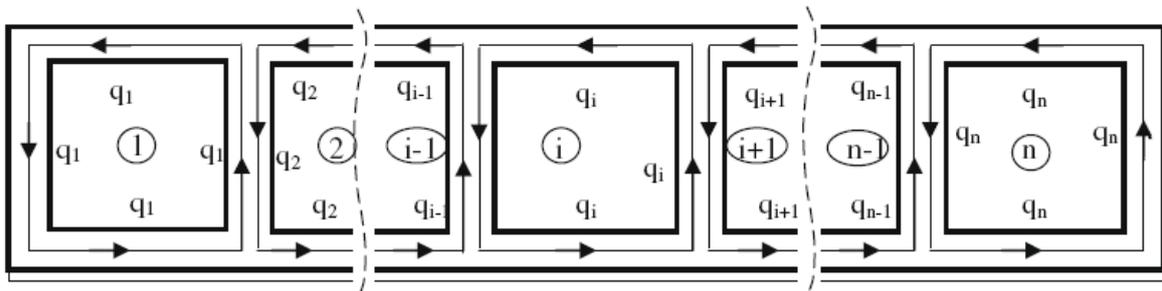


Figure 26 : Flux de contrainte de cisaillement sur une section de paroi mince de n cellules.

En prenant $2M_t/J = 1$, la résolution de ces n équations donne les flux relatifs \bar{q}_i de la contrainte tangentielle à un coefficient près. Ensuite, le moment d'inertie de torsion J et les vrais flux q_i sont calculés comme suit :

$$J = 4 \sum_{i=1}^n \bar{q}_i F_i ; q_i = \bar{q}_i \frac{2M_t}{J} \quad (63)$$

En utilisant le système d'équations linéaires (62), le problème de torsion d'un panneau de carton ondulé composé de 10 cellules est résolu, et alors l'équation (63) est utilisée pour calculer J et q_i . Sur la Figure 27, on observe que les flux relatifs de la contrainte tangentielle dans une paroi interne (entre deux cellules) sont très petits comparés à ceux dans les parois externes. Plus le nombre de cellules augmente, plus les flux relatifs de la contraintes tangentielles dans les parois internes sont négligeables. Dans la pratique, un panneau de carton ondulé a souvent plus de 50 cellules, les flux deviennent quasiment nuls sur la plupart des parois de la cannelure, cela permet de négliger ces parois et de calculer la rigidité de torsion avec la formule de Bredt pour une section mono-cellulaire [46]:

$$J = \frac{4s^2}{\oint_s \frac{ds}{e}} \quad (64)$$

$$GJ = \frac{4S^2}{\oint_s \frac{ds}{Ge}} = \frac{4L^2 h^2}{\frac{L}{G^s e^s} + \frac{L}{G^i e^i} + \frac{2l}{G^c e^c}} \approx \frac{4Lh^2 G^s e^s G^i e^i}{G^s e^s + G^i e^i} \quad (l \ll L) \quad (65)$$

où h est la hauteur du carton ondulé, L la longueur du panneau, et l est la demi longueur de la cannelure.

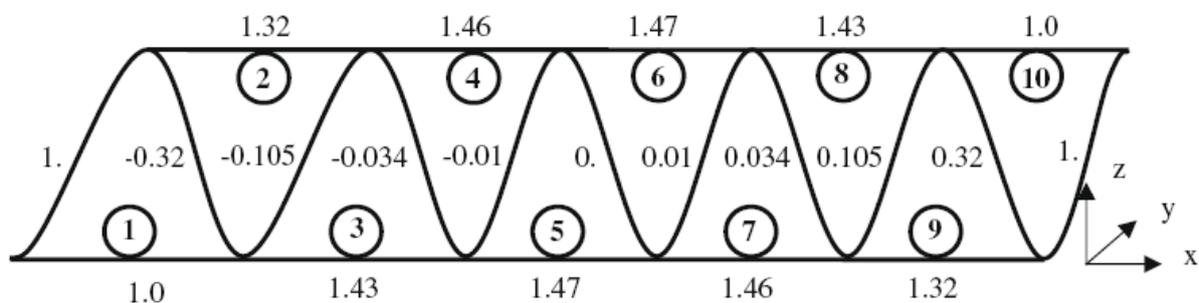


Figure 27 : Flux relatifs de la contrainte tangentielle sur une section à 10 cellules.

La formule simplifiée a donné de très bons résultats par rapport à la formule de Bredt pour plus de 50 cellules [45,46]. Il est très difficile d'obtenir une solution analytique du problème de torsion selon MD. Nous avons utilisé la simulation par la méthode des éléments finis pour déterminer la rigidité de torsion MD avec des éléments poutres pour éviter le couplage entre la torsion MD et la torsion CD.

La simulation utilisant les éléments poutres donne le moment de torsion résultant et par conséquent la rigidité de torsion est calculée avec la formule suivante :

$$GJ_{MD} = \frac{M_{tx}}{\theta_{x,x}} \quad (66)$$

Les résultats de ces simulations donnent une rigidité de torsion MD très petite comparée avec celle de torsion CD. Ainsi, dans l'expression (61), on peut négliger la contribution de la rigidité de torsion MD pour obtenir la formule simplifiée suivante :

$$D_{xy} = \frac{1}{4} \left(\frac{GJ_{MD}}{B} + \frac{GJ_{CD}}{L} \right) \approx \frac{GJ_{CD}}{4L} \quad (67)$$

III.1.9. Homogénéisation de la masse volumique du carton ondulé

Un élément de carton ondulé dx d'épaisseur H (Figure 28) constitué de trois strates d'épaisseurs et de densités différentes est homogénéisé pour obtenir une plaque de densité équivalente.

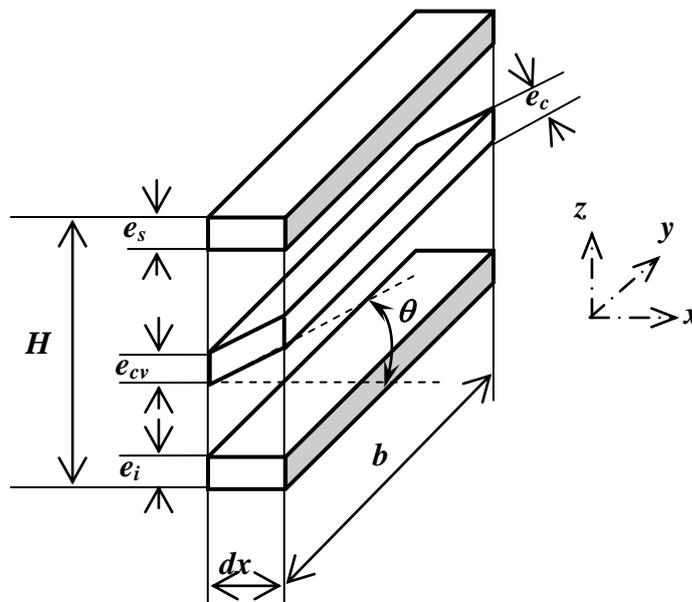


Figure 28 : Élément dx du carton ondulé.

L'homogénéisation de la densité suivant l'épaisseur z est obtenue d'après la formule suivante :

$$d = \frac{\int_{-H/2}^{H/2} d_z dz}{\int_{-H/2}^{H/2} dz} \quad (68)$$

Pour les trois strates cette expression peut être écrite sous la forme suivante :

$$d = \frac{d_s e_s + d_c e_{cv} + d_i e_i}{H} \quad (69)$$

avec d_s , d_c , d_i densités de la peau supérieure, de la cannelure et de la peau inférieure respectivement.

$e_{cv} = \frac{e_c}{\cos \theta(x)}$ est l'épaisseur de la cannelure suivant le plan vertical.

Chapitre III :
Implémentation du modèle
d'homogénéisation dans le code de calcul
ABAQUS

Introduction

Développer un logiciel de calcul des structures est une tâche difficile et fastidieuse. De plus, Il existe actuellement plusieurs logiciels de calcul des structures qui sont validés et utilisés partout dans le monde aux niveaux académique et industriel. Parmi les plus connus, on peut citer Abaqus, Ansys, Cosmos/M...etc. Ces codes de calcul permettent en plus d'implémenter le plus souvent de nouvelles lois de comportement ou de nouveaux éléments finis à l'aide de sous-programmes utilisateurs. Cette implémentation permet de profiter de toutes les fonctionnalités du logiciel utilisé telles que le pré et le post-traitement, les algorithmes de résolutions, les différents types d'éléments finis...etc. Le fait d'utiliser ces sous-programmes permet au chercheur de se concentrer sur l'essentiel de son travail et de s'affranchir des difficultés liées à l'implémentation complète d'un code.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'utiliser le logiciel Abaqus qui est utilisé par l'équipe Matériaux, Procédés et Systèmes d'Emballage du GRESPI. En effet, l'élément fini T3 γ 18 avec le modèle d'homogénéisation du carton ondulé a été implémenté dans Abaqus dans le cadre de la thèse de Anis BATTI [45]. Cependant, il s'est avéré que son utilisation pratique n'était pas optimale car le pré et le post-traitement est difficile du fait que l'élément ne soit pas dans la bibliothèque d'Abaqus et son utilisation dans des problèmes de traitement du contact nécessitait des développements supplémentaires.

Dans cette thèse le modèle d'homogénéisation présenté dans le chapitre précédent a été implémenté dans Abaqus par l'intermédiaire du sous-programme UGENS qui permet de définir la matrice de rigidité d'une coque mince ou épaisse.

I. Description du sous-programme UGENS

I.1. Définitions de la structure de la matrice de rigidité

Le sous-programme UGENS est utilisé pour définir le comportement linéaire ou non-linéaire dans la section d'une coque en définissant directement les rigidités de membre, de flexion et torsion et les différents couplages éventuels. UGENS est appelé pour tous les points d'intégration pour tous les types d'éléments coques présents dans Abaqus et peut être utilisé dans les cas statique et dynamique.

Dans le vecteur des forces et moments internes, des déformations et dans la matrice de rigidité (notée DDNDDE), les termes sont stockés dans un ordre bien défini. Ces termes

dépendent du type d'élément utilisé (voir Tableau 3). Les déformations d'ingénieur sont utilisées pour définir le cisaillement de membrane (γ_{12}) et la courbure de cisaillement (κ_{12}).

Type d'élément	Composantes
Coques 3D (S3R, S4R, S8R, S8R5...etc.)	$N_{11}, N_{22}, N_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}$
Coques axisymétriques (SAX1, SAX2...etc.)	$N_{11}, N_{22}, M_{11}, M_{22}$

Tableau 3 : Ordre des composantes du vecteur des forces et moments internes.

La matrice de rigidité DDNDDE doit être définie de façon précise si l'on veut une convergence rapide de l'algorithme de Newton utilisé par Abaqus pour l'équilibre global. Dans la plupart des cas, la précision de la définition de cette matrice est le facteur le plus important pour la convergence. D'autre part, la résolution globale d'une matrice non-symétrique est environ 4 fois plus chère que pour une matrice symétrique. Alors, si la matrice de rigidité (DDNDDE) n'est que légèrement non-symétrique, il est conseillé d'utiliser une approximation symétrique de cette matrice.

I.2. Structure du fichier de données et rigidités de cisaillement transverse

Quand on utilise UGENS, on doit indiquer à dans le fichier de données d'Abaqus d'une part le nouveau type de section utilisé ainsi que toutes les propriétés nécessaires au calcul des rigidités. On doit utiliser alors de mot-clé « *SHELL GENERAL SECTION » à la place de « *SHELL SECTION » suivi des propriétés.

D'autre part, dans le cas du carton ondulé, le cisaillement transverse est important. Les rigidités de cisaillement transverse ne sont pas définies dans le sous-programme UGENS. Elles doivent figurées dans le fichier de données Abaqus. L'utilisateur utilise alors le mot-clé « *TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS » suivi des 3 rigidités : T_{11} , T_{22} et T_{12} . Un exemple de structure de fichier de donnés est donné dans le Tableau 4.

```

*Heading
** Job name: traction Model name: Model-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name=eprouvette
*Node
...
*Nset, nset=_PickedSet2, internal, generate
...
*Elset, elset=_PickedSet2, internal, generate
...
** Section: Section-1
*SHELL GENERAL SECTION, ELSET=_PickedSet2, DENSITY=0.033,
USER, PROPERTIES=42, VARIABLES=105
*Include, Input=MDX-CDY.sec
*TRANSVERSE SHEAR STIFFNESS
651.0E6, 714.0E6, 0.0
*End Part
** ASSEMBLY
*Assembly, name=Assembly
*Instance, name=eprouvette-1, part=eprouvette
*End Instance
*Nset, nset=_PickedSet2, internal, instance=eprouvette-1
...
*End Assembly
**
** STEP: Step-1
*Step, name=Step-1
*Static
0.1, 20., 0.0002, 20.
**
** BOUNDARY CONDITIONS
** Name: BC-1 Type: Symmetry/Antisymmetry/Encastre
...
** OUTPUT REQUESTS
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step

```

Tableau 4 : Exemple du fichier de données d'Abaqus contenant l'instruction qui fait appel à UGENS.

I.3. Structure du sous-programme UGENS

L'interface du sous-programme UGENS est indiquée dans le Tableau 5.

```

SUBROUTINE UGENS (DDNDDE, FORCE, STATEV, SSE, SPD, PNEWDT,
1 STRAN, DSTRAN, TSS, TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, PREDEF, DPRED,
2 NDI, CELENT, CENAME, SHR, NSECV, NSTATV, PROPS, JPROPS,
3 NPROPS, NJPROP, COORDS, THICK, DFGRD, CURV, BASIS, NOEL, NPT,
4 KSTEP, KINC, NIT, LINPER)
C
INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
CHARACTER*80 CENAME
DIMENSION DNDDE (NSECV, NSECV), FORCE (NSECV),
1 STATEV (NSTATV), STRAN (NSECV), DSTRAN (NSECV), TSS (2),
2 TIME (2), PREDEF (*), DPRED (*), PROPS (*), JPROPS (*), COORDS (3),
3 DFGRD (3, 3), CURV (2, 2), BASIS (3, 3)

Définir DDNDDE, FORCE, STATEV, SSE.

RETURN
END
```

Tableau 5: L'interface en fortran 77 du sous-programme UGENS.

Les principales variables à définir sont :

- $DDNDDE (n, n) = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{E}}$ est la matrice de rigidité de la section, où le vecteur \mathbf{N} représente les forces et les moments internes de la section et le vecteur \mathbf{E} représente les déformations généralisées de section.
- $FORCE (n)$: sont les forces et les moments par unité de longueur qui sont mis à jour à chaque fin de l'incrément.
- $STATEV (m)$: est le vecteur des variables d'état sauvegardées à l'incrément précédent et recalculées dans l'incrément actuel.
- SSE : est l'énergie de déformation élastique calculée à chaque incrément.

II. Validation numérique de l'implémentation dans UGENS du modèle d'homogénéisation en statique

Pour valider le modèle d'homogénéisation, le carton ondulé est modélisé de deux manières différentes : soit comme une plaque 2D homogénéisée par le modèle proposé, soit comme une structure 3D composée de deux faces et de la cannelure. Dans les deux cas,

l'élément de coque général « S3 » d'Abaqus qui est valable pour les coques épaisses et minces est utilisé. La comparaison des résultats permet d'évaluer l'efficacité et la précision du modèle d'homogénéisation implémenté dans Abaqus à l'aide du sous-programme UGENS. Les dimensions du panneau en carton ondulé utilisé dans les calculs sont $L=100\text{mm}$ et $B=100\text{mm}$. L'épaisseur totale du panneau est $h=4\text{mm}$ et la période de la cannelure est $p=8\text{mm}$. Les propriétés mécaniques et les épaisseurs des constituants du carton ondulé sont données dans le Tableau 6.

	Peau supérieure	Cannelure	Peau inférieure
Epaisseur	0.216 mm	0.191 mm	0.282 mm
$E_x=E_{MD}$	1913.7 MPa	463.3 MPa	1006.8 MPa
$E_y=E_{CD}$	526.2 MPa	355.9 MPa	279.7 MPa
G_{xy}	322.0 MPa	93.0 MPa	214.0 MPa
ν_{xy}	0.56	0.33	0.56

Tableau 6 : Propriétés mécaniques et épaisseurs des constituants du carton ondulé.

La structure 3D et la plaque homogénéisée sont sollicitées en traction et en flexion selon les directions MD et CD. Une des extrémités de la structure et de la plaque est fixe et sur l'autre extrémité on a collé une plaque rigide sur la quelle une force concentrée est appliquée.

La plaque homogénéisée est discrétisée en 24864 éléments triangulaires et 12656 nœuds. La structure 3D est discrétisée en 89152 éléments triangulaires et 42375 nœuds. Pour bien décrire la géométrie de la cannelure, nous avons utilisé 16 éléments sur une période de la cannelure.

Notons que les calculs ont été réalisés à l'aide PC avec un processeur Intel Core 2 Duo de 2.2GHz et de 2Go de RAM.

II.1. Validation du modèle d'homogénéisation en traction

II.1.1. Validation en traction suivant MD

Une force $F=1000\text{N}$ est appliquée sur une extrémité suivant la direction MD alors que l'autre extrémité est encastree. La rigidité de traction A_{11} suivant MD est calculée par :

$$\begin{cases} A_{11} = \frac{FL}{u_{MD}B} \\ N_x = A_{11}\varepsilon_x \end{cases} \quad (70)$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 7. La Figure 29 représente les iso-déplacements pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. On remarque une bonne concordance entre les deux modèles et l'écart n'est que de 2%. Cependant, le temps CPU est 5 fois plus important pour le modèle Abaqus_3D.

	Abaqus_3D	UGENS_2D	Ecart
Déplacement u_{MD}	1.41 mm	1.38 mm	-2.12%
Rigidité de traction A_{11}	709 N/mm	724 N/mm	2.11%
Temps CPU	76.5 s	14.8 s	

Tableau 7 : Comparaison entre Abaqus_3D et UGENS_2D pour la traction selon MD.

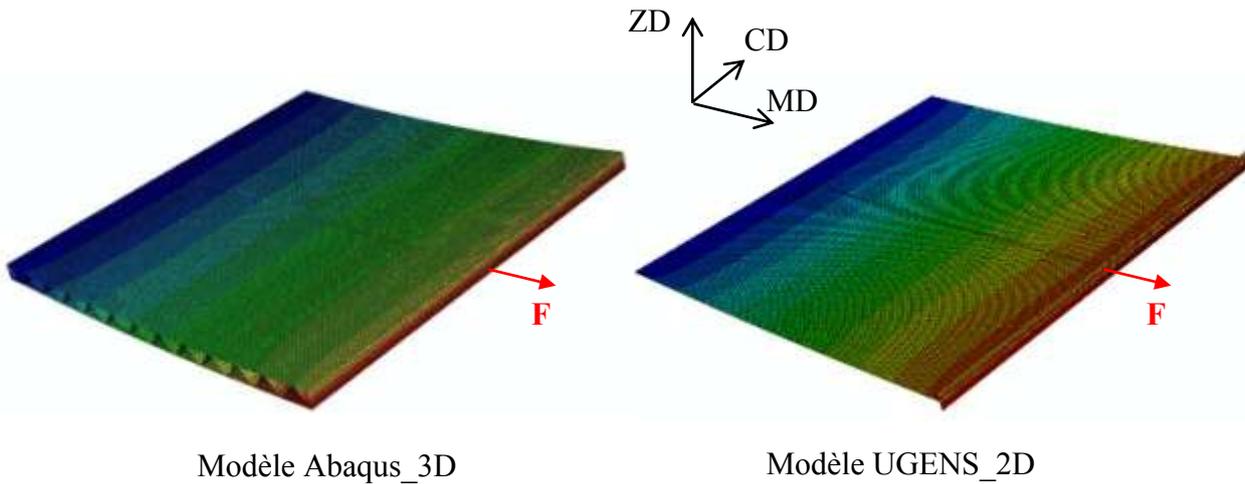


Figure 29 : Iso-déplacements en traction MD pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D.

II.1.2. Validation en traction suivant CD

De même que précédemment, une force $F=1000N$ est appliquée sur une extrémité suivant la direction CD alors que l'autre extrémité est encastree. La rigidité de traction A_{22} suivant MD est calculée par :

$$\begin{cases} A_{22} = \frac{FB}{u_{CD}L} \\ N_y = A_{22}\varepsilon_y \end{cases} \quad (71)$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 8. La Figure 30 représente les iso-déplacements pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. On remarque une bonne concordance entre les deux modèles et l'écart n'est que de 6%. Cependant, le temps CPU est 5 fois plus important pour le modèle Abaqus_3D.

	Abaqus_3D	UGENS_2D	Ecart
Déplacement u_{CD}	3.23mm	3.44mm	6.5%
Rigidité de traction A_{22}	309 N/mm	291 N/mm	-5.8%
Temps CPU	78.4 s	14.6 s	

Tableau 8 : Comparaison entre Abaqus_3D et UGENS_2D pour la traction selon CD.

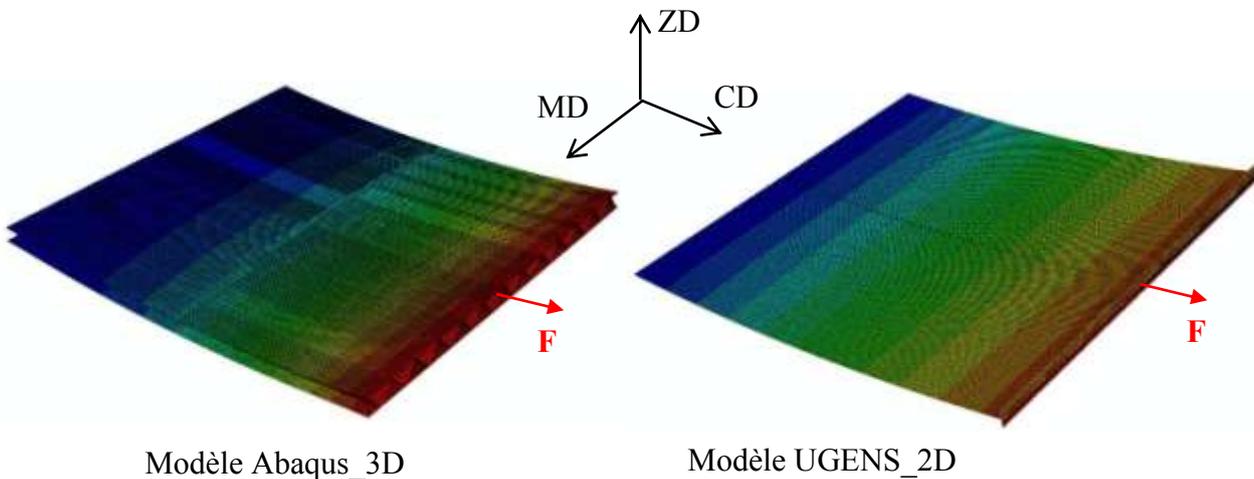


Figure 30 : Iso-déplacements en traction CD pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D.

II.2. Validation du modèle d'homogénéisation en flexion

II.2.1. Validation en flexion suivant MD

Dans cette partie un moment de flexion ($M=500\text{N}\cdot\text{mm}$) est appliqué sur une extrémité de la section MD autour de l'axe CD alors que l'autre extrémité est encastree. La rigidité de flexion D_{11} suivant MD est calculée par :

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{ML^2}{2Bv_{MD}} \\ M_x = D_{11}\kappa_x \end{cases} \quad (72)$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 9. La Figure 311 représente les iso-déplacements pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. On remarque une bonne concordance entre les deux modèles et l'écart n'est que de 4% au maximum. Cependant, le temps CPU est 5 fois plus important pour le modèle Abaqus_3D.

	Abaqus_3D	UGENS_2D	Ecart
Déplacement v_{MD}	8.76mm	8.4mm	-4.1%
Rigidité de flexion MD	2873.8 N.mm	2976.8 N.mm	3.5 %
Temps CPU	51 s	10.1 s	

Tableau 9 : Comparaison entre Abaqus_3D et UGENS_2D pour la flexion selon MD.

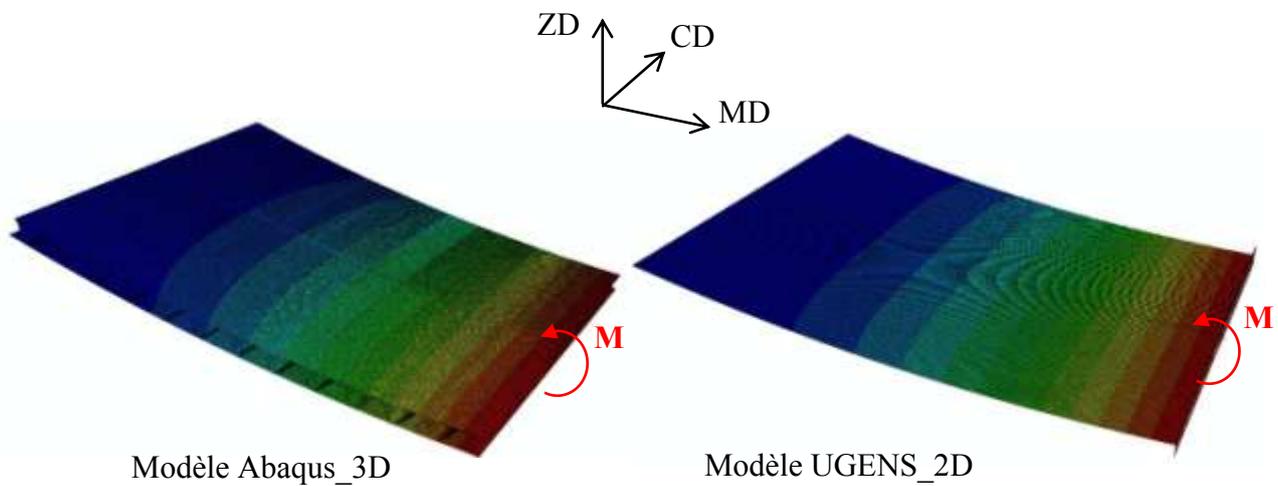


Figure 31 : Iso-déplacements en flexion MD pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D.

II.2.2. Validation en flexion suivant CD

Un moment de flexion ($M=500\text{N.mm}$) est appliqué sur une extrémité de la section CD autour de l'axe MD alors que l'autre extrémité est encastree. La rigidité de flexion D_{22} suivant CD est calculée par :

$$\begin{cases} D_{22} = \frac{MB^2}{2Lv_{CD}} \\ M_y = D_{22}\kappa_y \end{cases} \quad (73)$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 910. La

Figure 32 représente les iso-déplacements pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. On remarque une bonne concordance entre les deux modèles et l'écart n'est que

de 5.6% au maximum. Cependant, le temps CPU est 4 fois plus important pour le modèle Abaqus_3D.

	Abaqus_3D	UGENS_2D	Ecart
Déplacement v_{CD}	26.17mm	27.72mm	5.6%
Rigidité de flexion CD	955.3 N.mm	902 N.mm	3.5 %
Temps CPU	55.2 s	14.6 s	

Tableau 10 : Comparaison entre Abaqus_3D et UGENS_2D pour la flexion selon CD.

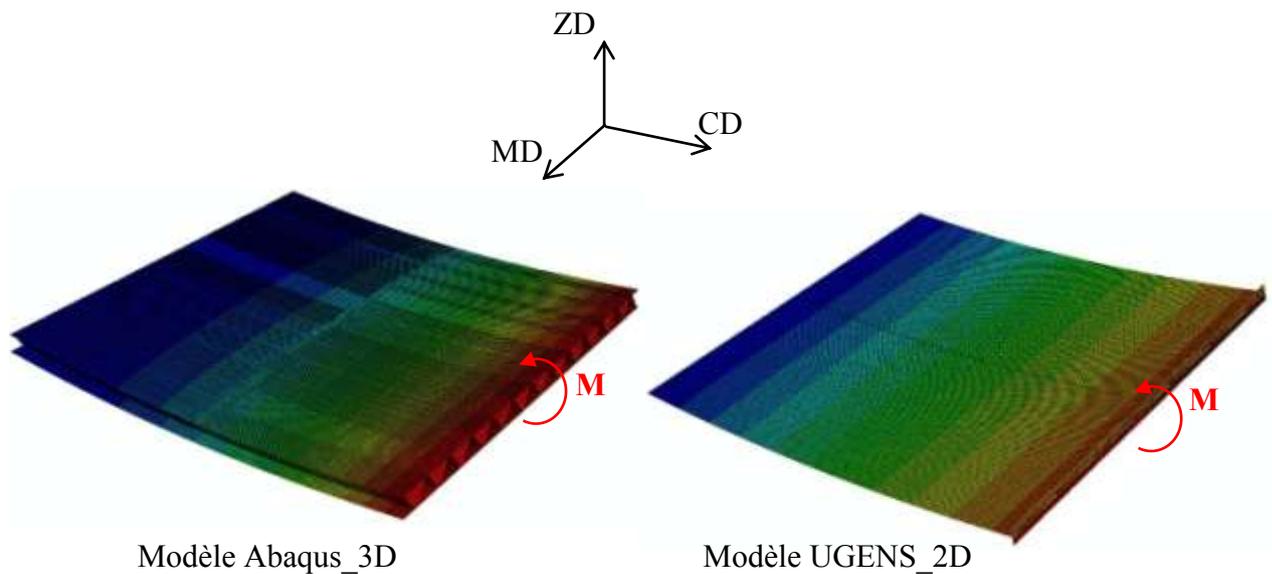


Figure 32 : Iso-déplacements en flexion CD pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D.

III. Validation numérique de l'implémentation dans UGENS du modèle d'homogénéisation en dynamique

III.1. Fréquences et modes propres d'une plaque encadrée

Pour vérifier la validité de notre modèle d'homogénéisation implémenté dans le sous-programme UGENS d'Abaqus, nous avons calculé numériquement les trois premiers modes et fréquences propres de la plaque en carton ondulé définie dans le paragraphe précédent. La plaque est encadrée sur son contour. L'analyse utilisée dans Abaqus dans ce cas est de type « FREQUENCY ».

Nous avons représenté sur les figures (Figure 33, Figure 34, Figure 35) les trois premiers modes propres obtenus par les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D. Nous notons que les modes ainsi obtenus sont comparables. Nous avons également donné dans le Tableau 11, les fréquences propres calculées. Nous remarquons que les deux premières fréquences propres sont bien approchées par notre modèle d'homogénéisation alors que la troisième fréquence propre est 16.9% plus importante que celle donnée par Abaqus_3D. Cependant, dans une structure c'est les premiers modes qui sont les plus importants. Le temps CPU nécessaire à Abaqus_3D pour calculer les trois premiers modes propres est 22 fois plus important que celui de UGENS_2D.

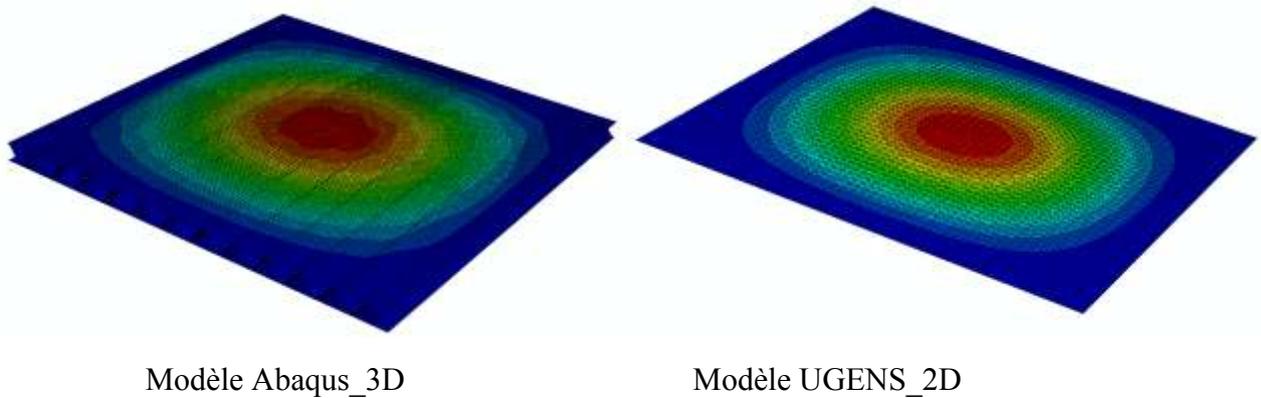


Figure 33 : Premier mode propre de la plaque en carton ondulé obtenu par Abaqus_3D et UGENS_2D.

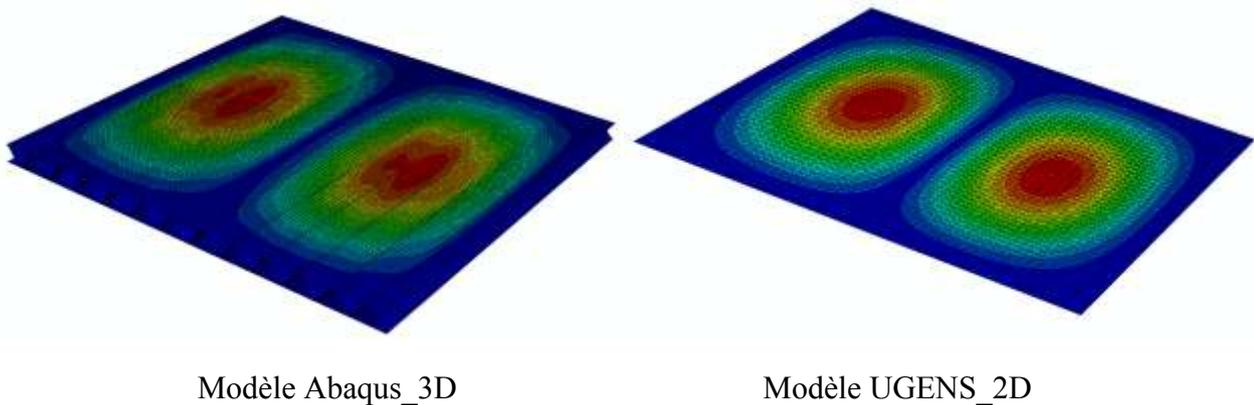


Figure 34 : Deuxième mode propre de la plaque en carton ondulé obtenu par Abaqus_3D et UGENS_2D.

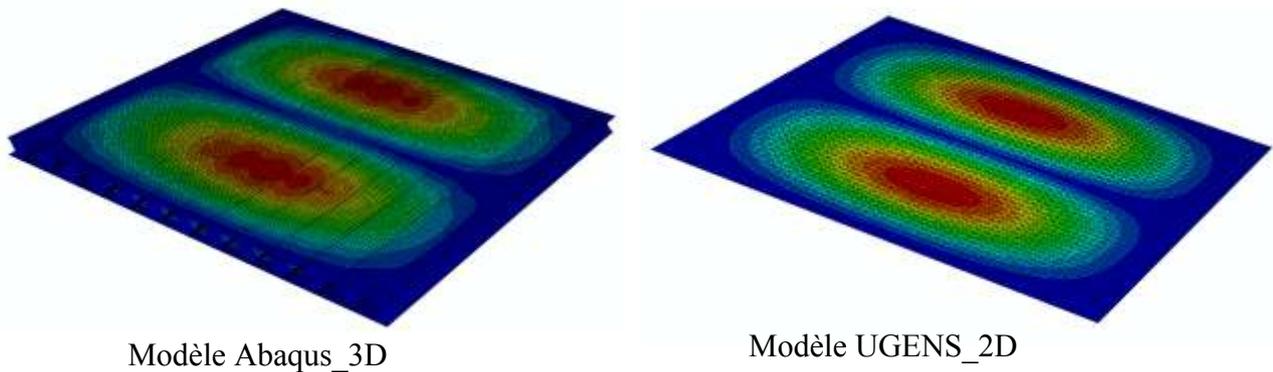


Figure 35 : Troisième mode propre de la plaque en carton ondulé obtenu par Abaqus_3D et UGENS_2D.

	1 ^{er} mode	2 ^{ème} mode	3 ^{ème} mode	Temps CPU
Abaqus_3D	40Hz	65Hz	71Hz	101 s
UGENS_2D	37Hz	61Hz	83Hz	4.6 s
Ecart	-7.5 %	-6.2 %	16.9%	

Tableau 11 : Fréquences propres calculées par Abaqus_3D et UGENS_2D.

III.2. Vibrations d'une plaque en flexion

Il s'agit dans ce test à soumettre une extrémité de la plaque à une accélération verticale périodique (direction ZD) d'amplitude $A=1$ g et à une fréquence $f=0.8$ Hz. L'autre extrémité de la plaque est encastree. On suit la réponse à cette accélération dans un nœud situé au milieu de la plaque. L'analyse utilisée dans Abaqus dans ce cas est de type « DYNAMIC IMPLICIT ».

III.2.1. Accélération sur la section MD

L'accélération périodique d'une amplitude $A=1g$ a été appliquée sur une extrémité de la section MD. La Figure 36 représente l'excitation ainsi que les réponses obtenues sur un nœud du milieu de la plaque pour les modèles Abaqus_3D et UGENS_2D respectivement. La corrélation entre les deux modèles est remarquable après la phase transitoire au début de la simulation. L'écart entre les amplitudes de la réponse est de l'ordre de 13% comme indiqué dans le Tableau 12 et le temps CPU est 12 fois plus important pour Abaqus_3D.

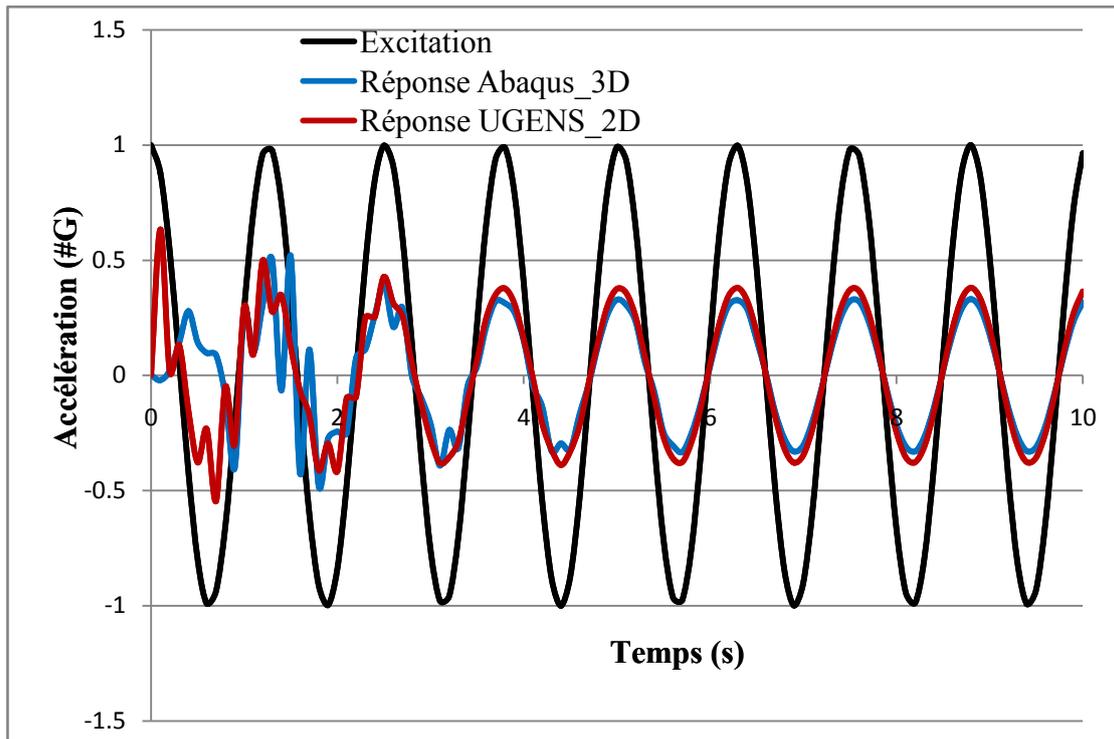


Figure 36 : Excitation sur MD et réponses pour les deux modèles.

	Amplitude de la réponse (#g)	Temps CPU (s)
Abaqus_3D	0.380	932
UGENS_2D	0.331	74.6
Ecart	-12.9%	

Tableau 12 : Comparaison de l'amplitude de l'accélération sur MD pour les deux modèles.

III.2.2. Accélération sur la section CD

Le même test est réalisé mais sur une extrémité de la section CD, l'autre extrémité étant encastree. On a représenté sur Figure 37 l'excitation et les réponses de l'accélération sur un nœud au milieu de la plaque pour les deux modèles Abaqus_3D et UGENS_2D.

Dans ce cas également, on a une bonne concordance entre les réponses des deux modèles. L'écart entre les amplitudes de la réponse n'est que de 2% comme indiqué dans le Tableau 13 et le temps CPU est 12 fois plus important pour Abaqus_3D.

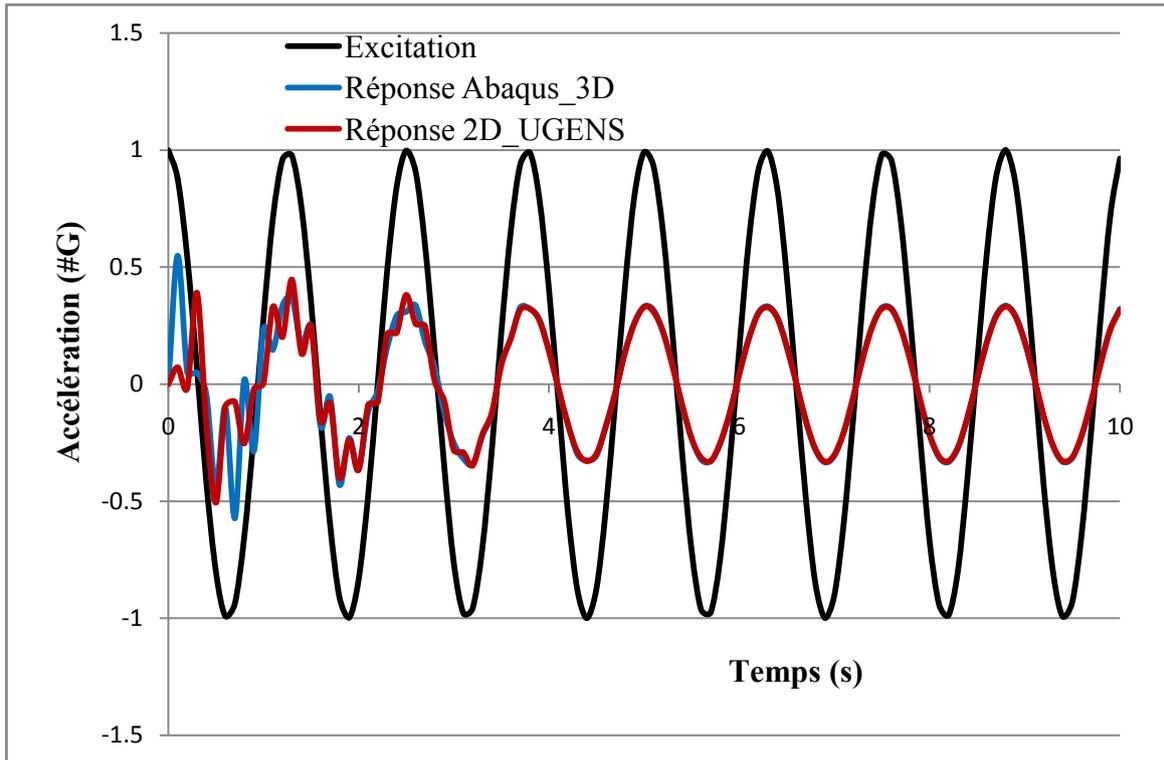


Figure 37 : Excitation sur CD et réponses pour les deux modèles.

	Amplitude de réponse (#g)	Temps CPU (s)
Abaqus_3D	0.335	952
UGENS_2D	0.330	85
Ecart	2%	

Tableau 13 : Comparaison de l'amplitude de l'accélération sur CD pour les deux modèles.

III.3. Validation sur un test de choc

Dans ce test numérique, on soumet la même plaque en carton à un test de choc, qui consiste à faire tomber une plaque rigide (30mm×30mm) de masse 15g en chute libre d'une hauteur de 10cm sur la plaque (Figure 38).

Dans le but de réduire le temps de calcul, on positionne la plaque rigide 1 mm au dessus de la plaque en carton ondulé et on lui applique une vitesse initiale calculée suivant l'expression suivante :

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (74)$$

avec $h=9.9\text{cm}$ la hauteur de chute et g l'accélération de la pesanteur.

Dans le Tableau 14, nous avons donné les valeurs maximales des accélérations ainsi que les temps CPU. L'écart entre Abaqus_3D et UGENS_2D est inférieur à 3% pour les accélérations maximales et le temps CPU est 8 fois plus important pour Abaqus_3D. La Figure 39 représente les iso-valeurs des déplacements sur les plaques pour les deux modèles.

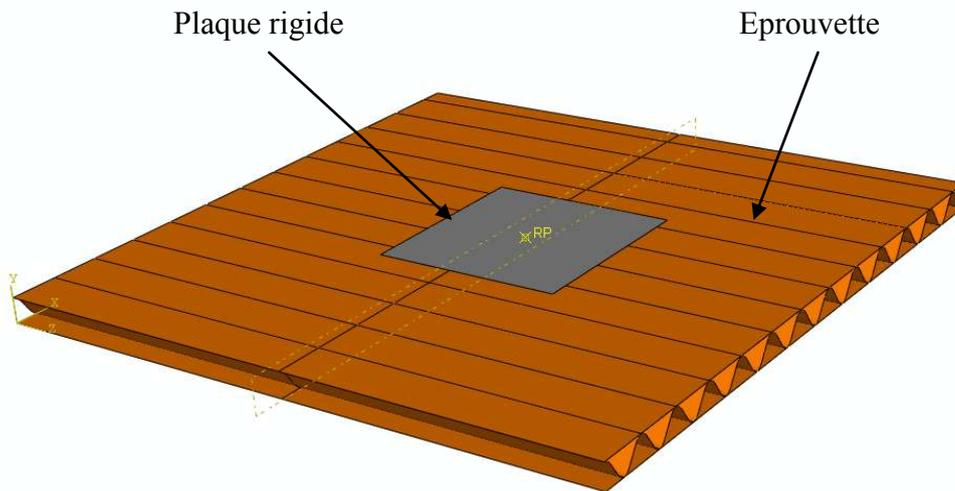


Figure 38 : Plaque en carton ondulé soumise à un test de choc.

	Accélération maximale (#g)	Temps CPU (s)
Abaqus_3D	4.12	1361.2
UGENS_2D	4.0	165.6
Ecart	-2.9%	

Tableau 14 : Comparaison entre les deux modèles pour le test de choc.

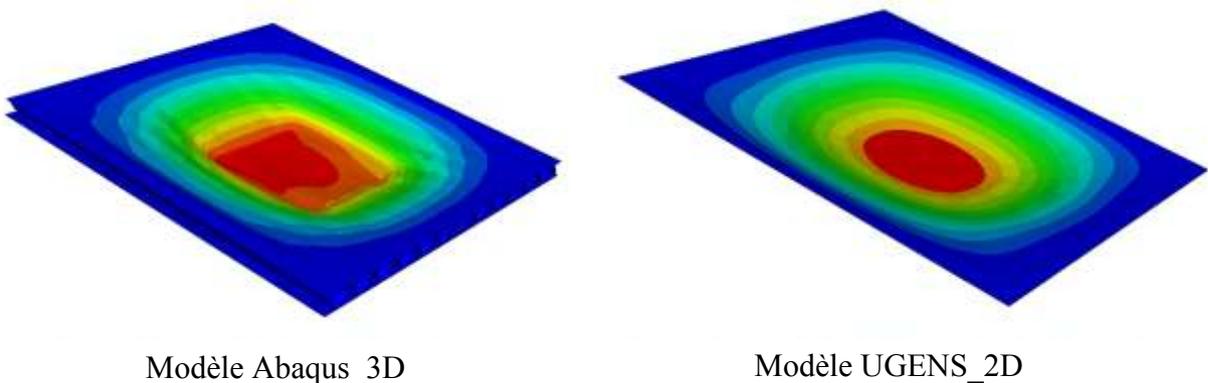


Figure 39 : Iso-déplacements des deux modèles pour le test de choc.

Chapitre IV :
Caractérisation expérimentale du
comportement statique et dynamique du
système d'emballage étudié

Introduction

Effectuer des essais expérimentaux lors d'un travail de recherche permet d'atteindre différents objectifs. Certains essais permettent d'obtenir les caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés afin de les utiliser dans les modèles numériques développés. D'autres essais permettent de définir la validité et la limite de ces modèles.

Dans ce chapitre, nous présentons les matériaux étudiés, les techniques expérimentales utilisées ainsi que les résultats issus des essais réalisés. Dans notre cas, les données d'entrée de notre modèle d'homogénéisation sont les propriétés mécaniques et géométriques de chacune des feuilles constituant (la peau supérieure, la cannelure et la peau inférieure). L'expérimentation peut partiellement les déterminer à partir des essais expérimentaux de traction sur les papiers dans les directions MD , CD et 45° . D'autre part, les essais doivent être réalisés rigoureusement à l'aide d'extensomètre ou de jauges ou mieux encore à l'aide de systèmes de mesures sans contact (Aramis® ou VidéoTraction® par exemple). Ces mesures locales permettraient alors de définir les déformations longitudinales et transversales et même dans certains cas la déformation dans la troisième direction. Il faut signaler également que la mesure des propriétés mécaniques dans l'épaisseur est très délicate et rare sont les laboratoires qui y arrivent. Le comportement élastoplastique de la mousse de calage est caractérisé à l'aide d'essais de compression.

Des systèmes d'emballage constitués de différentes configurations de caisses en carton ondulé et de mousse de calage ont été testés pour étudier leur comportement aux chocs et aux vibrations.

Tous les essais ont été réalisés dans les laboratoires de l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Reims (ESIREims, ex ESIEC).

I. Matériaux et systèmes d'emballage étudiés

I.1. Le carton ondulé

Le premier matériau étudié est un carton ondulé simple cannelure de type C double face fourni par la Cartonnerie de l'Espérance basée à Reims. Il est composé d'une peau supérieure notée « S » en Kraft, d'une cannelure en papier recyclé notée « C » et d'une peau

inférieure en Kraft notée « I ». La période de la cannelure est de $P=8.0$ mm et sa hauteur est de $h=4.0$ mm.

I.2. La mousse de calage

La mousse ETHAFOAM 400 fournie par la société DOW est une mousse en polyéthylène réticulé. Elle est résiliente, robuste et constituée de cellules fermées. Elle est utilisée comme matériau de protection et de calage dans les produits pouvant résister à des chocs ou supporter des charges statiques jusqu'à 35 kPa. Cette mousse est extrudée durable et légère avec une densité de 58 kg/m^3 . Les plaques de mousse sont livrées avec les dimensions $50 \times 600 \times 2750$ mm.

I.3. Les systèmes d'emballage

Les systèmes d'emballage étudiés sont constitués d'une caisse en carton ondulé à rabats recouvrant (Figure 40) enveloppant une masse parallélépipédique en acier de 1.686 kg comme produit à emballer (Figure 41) et des calages en une mousse Ethafoam 400. Deux configurations de calage en mousse sont utilisées : une première configuration où la mousse recouvre complètement la masse (Figure 42), et une deuxième où la mousse recouvre uniquement les coins de la masse (Figure 43).

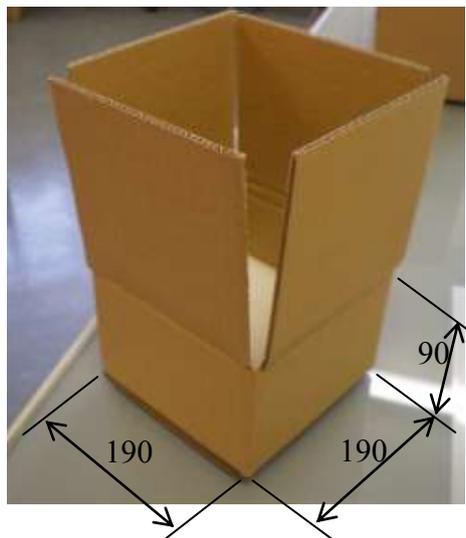


Figure 40 : Caisse à rabats recouvrant en carton ondulé.

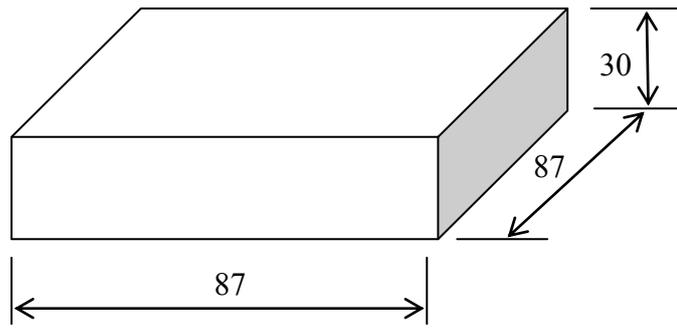


Figure 41 : Dimensions de la masse parallélépipédique.

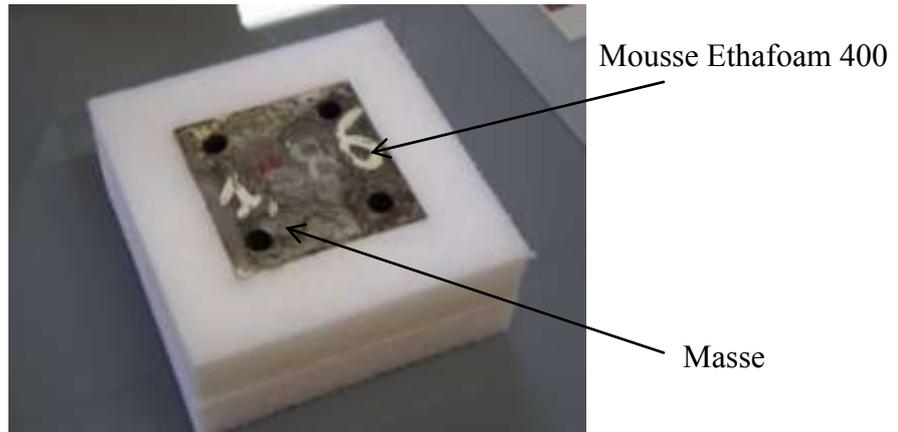


Figure 42 : Calage en mousse Ethafoam 400 recouvrant la masse.

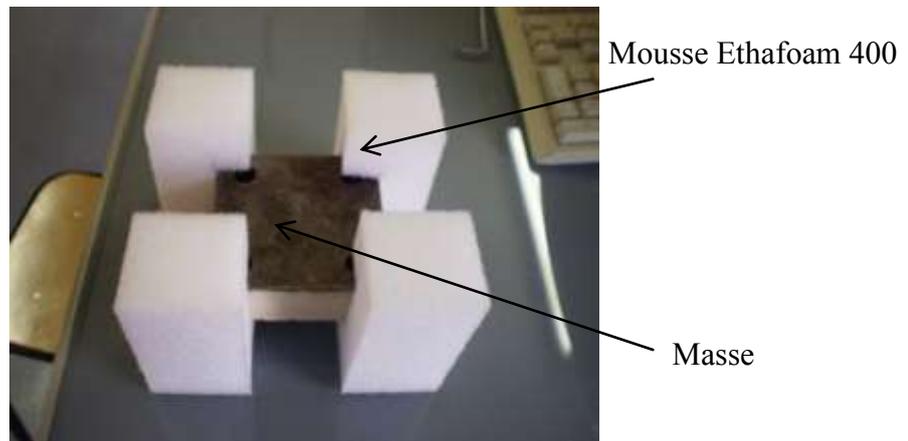


Figure 43 : Calage en mousse Ethafoam 400 recouvrant les coins de la masse.

II. Caractérisation expérimentale du système d'emballage

II.1. Caractérisation expérimentale des constituants du carton ondulé

Le carton ondulé a un comportement mécanique complexe, qui est régie par plusieurs phénomènes, plusieurs travaux expérimentaux ont été réalisés pour le caractériser. Allaoui et al. [40,41] ont réalisé des essais de tractions uni-axiales sous différentes configurations sur les constituants du carton et sur le carton ondulé. Des observations au microscope électronique à balayage ont ensuite été réalisées afin d'identifier les phénomènes microscopiques qui se produisent dans le matériau. Deux techniques de mesure de la déformation ont été utilisées, l'une d'elle est un système de mesure sans contact (Vidéo-Traction®) et l'autre permet de mesurer l'allongement à l'aide d'extensomètres ou de jauges. Les auteurs ont constaté que la deuxième technique est en bonne corrélation avec la première et cela dans les deux directions (MD et CD). Bien que très difficile à réaliser, vu que l'épaisseur est très mince, d'autres chercheurs ont essayé de déterminer les propriétés mécaniques dans la troisième direction suivant l'épaisseur (ZD) [52].

Dans notre cas, les données nécessaires au modèle d'homogénéisation sont : le module d'élasticité longitudinal, le module d'élasticité transversal, le module de cisaillement et le coefficient de poisson pour chaque feuille du carton. Des essais de tractions uni-axiales sur chaque feuille dans les directions MD, CD et à 45° sont suffisants pour déterminer ces paramètres.

II.1.1. Grammages et épaisseurs

Tout d'abord les trois feuilles de papier constituant le carton ondulé doivent être séparées en les plongeant dans de l'eau suffisamment longtemps pour qu'elles se décollent d'elles-mêmes. Chacune des feuilles est séchée dans un four à une température ne dépassant pas 105°C. La feuille de cannelure doit être aplanie pour retrouver sa forme initiale selon la norme NFQ 03-043.

Le grammage des papiers composant le carton ondulé a été déterminé avec la balance METTLER (TYPE AJ100) selon la norme NFQ 03-031. Pour la pesée on découpe des éprouvettes carrées de 100 cm². Les épaisseurs des différents constituants ont été mesurées avec un micromètre Thickness Tester 89-100 selon la norme NFQ 03-016.

Les résultats obtenus sont regroupés dans le Tableau 15.

	Peau supérieure	Cannelure	Peau inférieure
Grammage (g/m^2)	185.9 \pm 3.3	135.1 \pm 2.5	190.0 \pm 5.0
Epaisseur (μm)	216.5 \pm 24.2	191.0 \pm 10.6	282.4 \pm 6.6

Tableau 15 : Epaisseurs et grammages des papiers constituant le carton ondulé.

II.1.2. Préparation des éprouvettes de traction

Les différentes éprouvettes des tests de traction ont été conçues, en respectant la norme NF T 51-034, à l'aide du logiciel ArtiosCAD. Les dimensions sont représentées sur Figure 44.

Les éprouvettes sont ensuite sectionnées suivant trois directions (MD, CD et 45°) à l'aide d'une table à découpe ELCEDE MFT20 (voir Figure 45). Nous avons découpé plusieurs éprouvettes identiques pour réaliser une série d'essais de traction et assurer la reproductibilité des résultats.

Afin d'assurer une meilleure prise des éprouvettes au niveau des mors de la machine de traction lors du serrage, nous avons collé aux extrémités de celles-ci des morceaux de carton compact rigide avec une colle forte spéciale pour assurer une bonne adhérence (voir Figure 46).

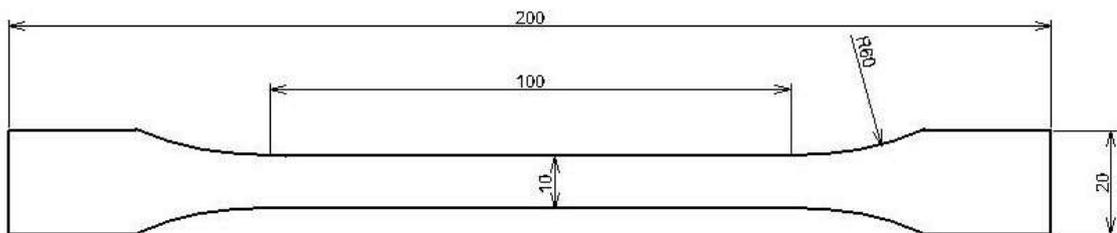


Figure 44 : Dimensions d'une éprouvette de traction d'une feuille de carton suivant la norme NF T 51-034.



Figure 45 : Table à découpe ELCEDE MFT20.

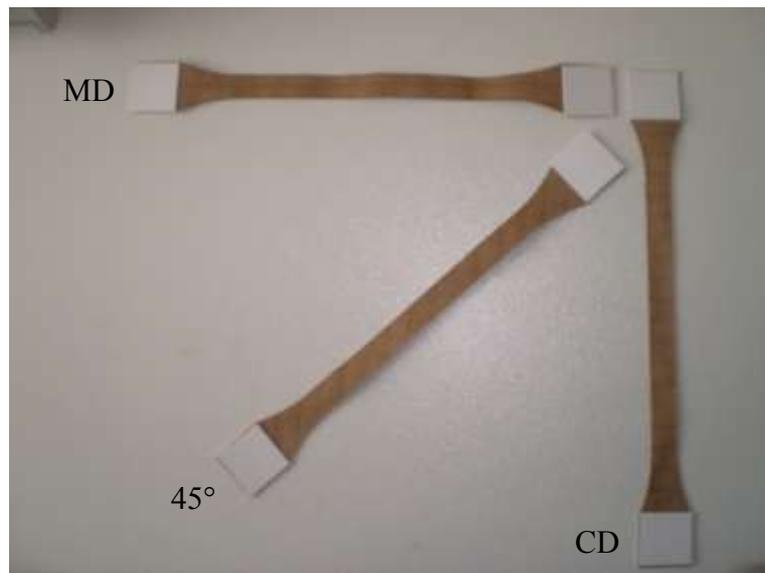


Figure 46 : Eprouvettes découpées suivant les trois directions MD, CD et 45°.

Les éprouvettes sont ensuite stockées dans une enceinte climatique de marque BINDER réglée aux conditions de température et d'humidité relative souhaitées au minimum 24 heures pour atteindre l'équilibre. Dans les conditions d'essais standards selon la norme NF Q 03-010, la température est de 23 °C et l'humidité relative est de 50%. Nous nous sommes

assuré que le test sur chaque éprouvette soit réalisé rapidement après l'avoir extrait de l'enceinte de conditionnement pour ne pas affecter sa teneur en humidité et donc les résultats.

En effet, le papier est un matériau très sensible aux influences extérieures, alors plusieurs précautions doivent être prises lors des manipulations expérimentales.

II.1.3. Matériels d'essais

Les essais expérimentaux de traction sur les papiers du carton ont été réalisés sur une machine de tests mécaniques MTS Adamel Lhomargy DY35XL (Figure 47), équipée d'une cellule de charge de 500 N et de deux jeux de mors l'un pneumatique et l'autre manuel autoserrant. Les essais de traction ont été réalisés selon la norme NF Q 03-002.

Sur cette machine, le mors inférieur est fixé au bâti tandis que le mors supérieur est solidaire de la traverse qui se déplace à une vitesse que l'utilisateur spécifie. Dans notre cas les essais sont réalisés à une vitesse de 10 mm/min. Une chaîne d'acquisition reliée à un ordinateur permet d'enregistrer le déplacement de la traverse ainsi que la force mesurée par la cellule de charge. Les résultats sont ensuite traités par le logiciel de pilotage TestWorks4.

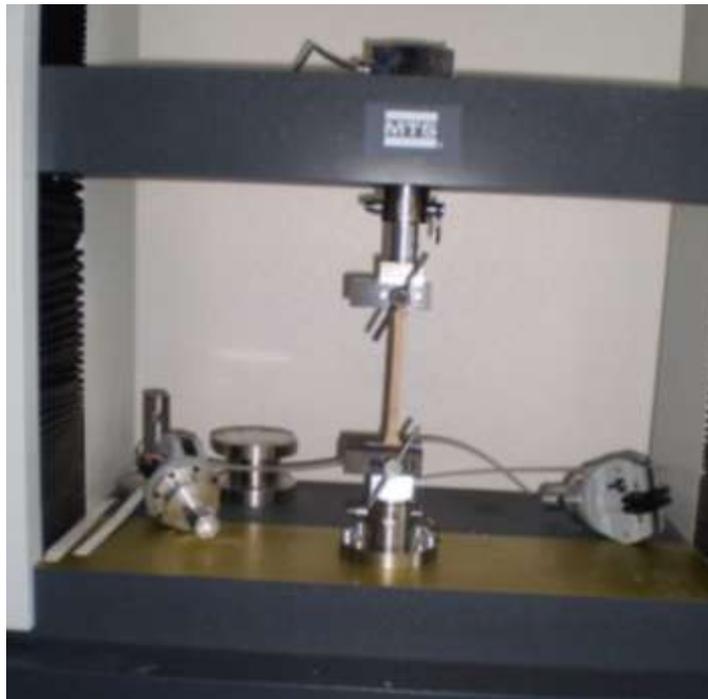


Figure 47 : Machine de tests mécaniques MTS Adamel Lhomargy DY35XL.

II.1.4. Résultats des d'essais de traction des papiers constituant le carton

Une série de cinq tests a été réalisée sur chaque feuille de papier carton dans chaque direction. Pour minimiser l'influence de la température ambiante et du taux d'humidité du laboratoire, chaque éprouvette est retirée de la salle de conditionnement, rapidement amarrée sur la machine de tests et aussitôt sollicitée par traction à une vitesse de 10 mm/min.

Les courbes moyennes de traction sont représentées pour la peau supérieure, la peau inférieure et la cannelure sur la Figure 48, la Figure 49 et la Figure 50 respectivement. Sur chacune de ces figures, les moyennes des résultats de la contrainte nominale en fonction de la déformation nominale dans les directions MD, CD et 45° sont représentées.

Les courbes contraintes-déformations obtenues sont comparables à celle obtenues dans la littérature par Batti [45] et Allaoui & al [41,42]. Ces courbes montrent que le comportement mécanique dans les trois directions est composé d'une partie linéaire, suivi par une partie non-linéaire. Ce phénomène dépend des fibres de cellulose, des liaisons hydrogène et du taux de la teneur en humidité [41]. La non-linéarité est accentuée dans la direction CD. Le comportement dans la direction des fibres MD est plus rigide que dans la direction CD.

A partir de ces résultats nous avons déterminé les propriétés élastiques des feuilles papier constituant le carton ondulé. Ces caractéristiques sont ensuite utilisées dans le modèle d'homogénéisation du carton ondulé.

Les modules de Young sont obtenus à partir des pentes des courbes de traction dans les zones linéaires. Pour déterminer le module de cisaillement et le coefficient de Poisson dans le plan du papier, nous avons utilisé d'une part la relation liant les modules dans les 3 directions (75) [44] et la formule empirique de Baum (76) [53].

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{4}{E_{45^\circ}} - \frac{1}{E_1} - \frac{1-2\nu_{12}}{E_2} \quad (75)$$

$$G_{12} = 0.387\sqrt{E_1 E_2} \quad (76)$$

Où les indices 1, 2 et 45° représentent les directions MD, CD et 45° respectivement.

Les paramètres élastiques ainsi déterminés sont donnés dans le Tableau 16.

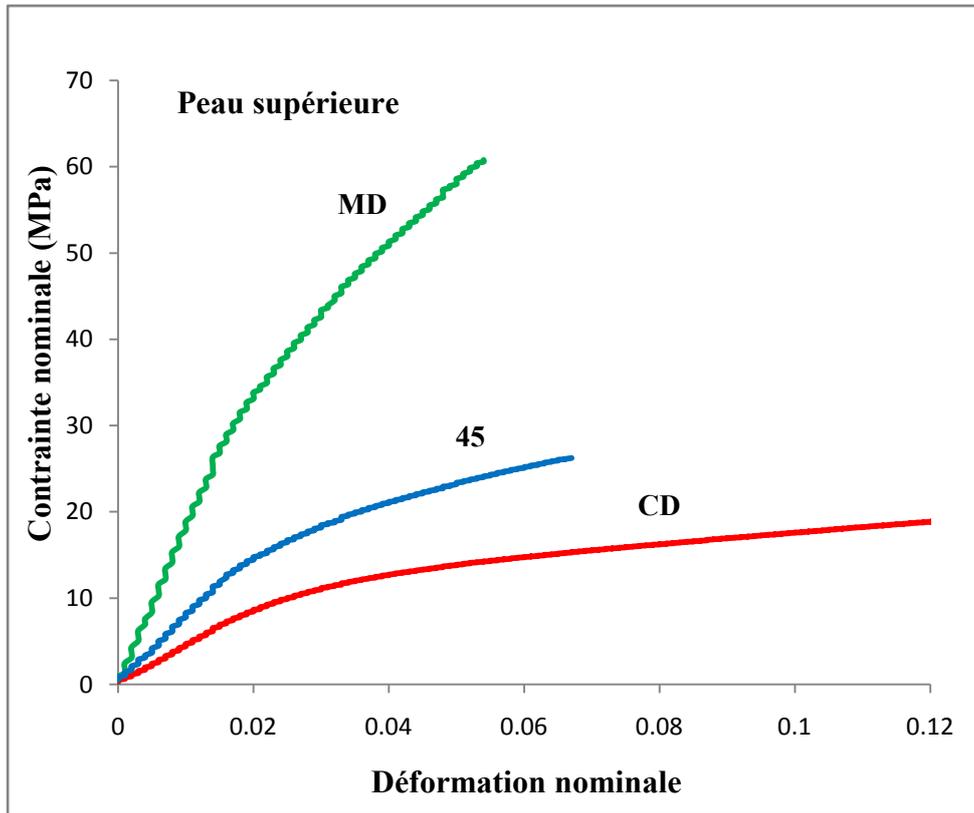


Figure 48 : Courbes de traction de la peau supérieure suivant les trois directions.

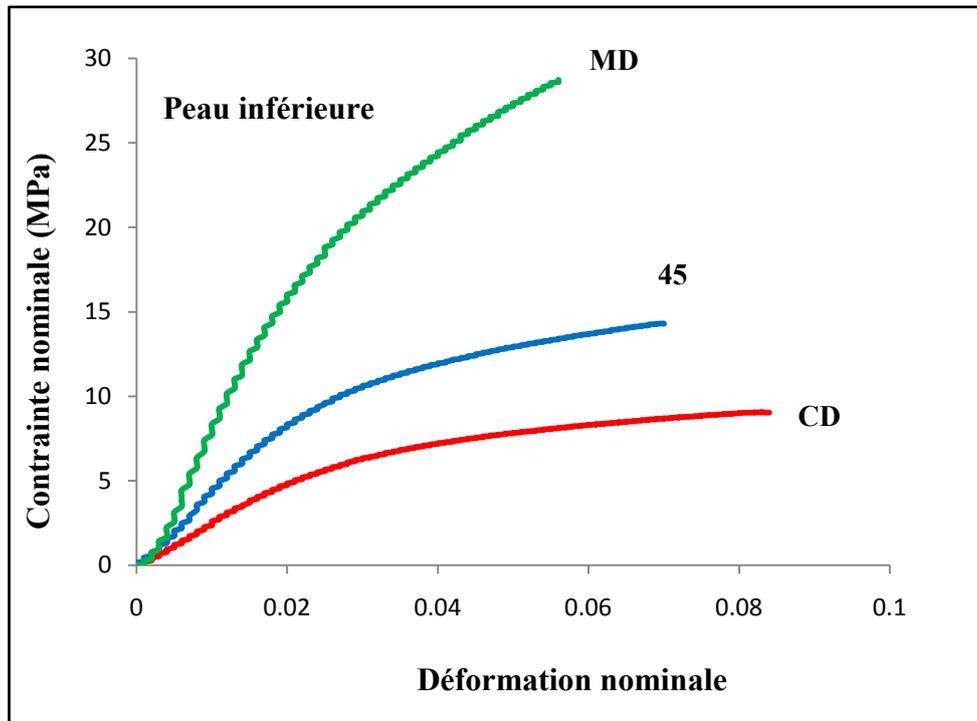


Figure 49 : Courbes de traction de la peau inférieure suivant les trois directions.

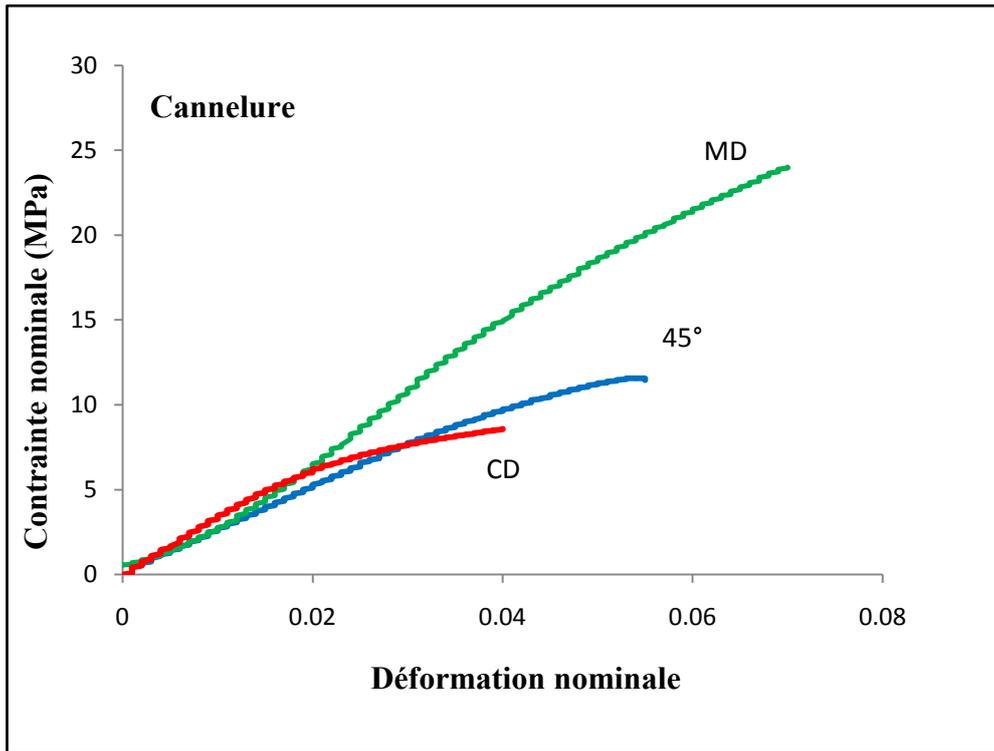


Figure 50 : Courbes de traction de la cannelure suivant les trois directions.

Papier	Direction	E (MPa)	G_{12} (MPa)	ν_{12}
Peau Supérieure	MD	1913.7±59.0	322.0	0.56
	CD	526.2±18.0		
	45°	808.2±63.0		
Peau inférieure	MD	1006.8±10.0	214.0	0.56
	CD	279.7±11.0		
	45°	491.1±9.0		
Cannelure	MD	464.3±44.0	93.0	0.33
	CD	355.9±7.0		
	45°	281.2±10.0		

Tableau 16 : Propriétés élastiques des papiers constituant le carton.

II.2. Caractérisation expérimentale de la mousse de calage

La mousse joue un rôle important dans le calage des produits. Pour étudier le comportement de systèmes d'emballages constitués de caisses en carton ondulé et de calage en mousse, nous avons caractérisé le comportement mécanique non-linéaire de cette mousse.

La compression uni-axiale est le test mécanique le plus souvent utilisé, mais les résultats de ce test ne suffisent pas à caractériser complètement la réponse de la mousse polymérique pour un état de contrainte tridimensionnelle. Plusieurs auteurs utilisent en plus des essais de compression hydrostatique [24-30]. Cependant, ces essais nécessitent un matériel spécifique dont nous ne disposons pas. Nous avons remplacé l'essai de compression hydrostatique par un essai de compression confinée. Afin d'identifier le comportement de la mousse nous avons utilisé une méthode d'identification inverse en couplant les logiciels SiDolo et Abaqus. Le modèle de comportement utilisé dans Abaqus est le modèle élasto-plastique « Crushable Foam ».

II.2.1. Préparation des éprouvettes de compression

Pour les essais de compression simple, nous avons découpé des éprouvettes parallélépipédiques en mousse ETHAFOAM 400 de dimensions $59 \times 59 \times 54 \text{ mm}^3$.

Pour les essais de compression confinée, nous avons découpé des éprouvettes cylindriques en mousse ETHAFOAM 400 de diamètre 100 mm et de hauteur 54 mm.

II.2.2. Matériels d'essais

Les essais expérimentaux de compression sur la mousse ont été réalisés sur une machine de tests mécaniques INSTRON 4204 (Figure 51), équipée d'une cellule de charge de 50 kN, d'un montage en compression simple et d'un autre montage en compression confinée.

L'essai de compression simple est réalisé en comprimant les éprouvettes parallélépipédiques entre deux plateaux horizontaux : le plateau inférieur est fixe alors que le plateau supérieur se déplace à une vitesse de 10 mm/min.

Pour l'essai de compression confinée, l'éprouvette cylindrique est introduite dans un cylindre afin d'empêcher les déformations transversales et avec un piston accroché à la traverse de la machine d'essai la mousse est comprimée à une vitesse de 10 mm/min.



Figure 51 : Machine de tests mécaniques INSTRON 4204 avec le montage en compression.

II.2.3. Résultats des essais de compressions sur la mousse

Une série de cinq tests a été réalisée pour les essais de compressions simple et confinée.

Les courbes moyennes de compressions simple et confinée sont représentées sur la Figure 52. Sur cette figure, les moyennes des résultats de la contrainte nominale en fonction de la déformation nominale sont représentées.

La courbe de compression simple est utilisée pour déterminer le module de Young qui est égal à 1.5 MPa, alors que la courbe de la compression confinée est utilisée pour déterminer les paramètres du modèle « Crushable Foam ».

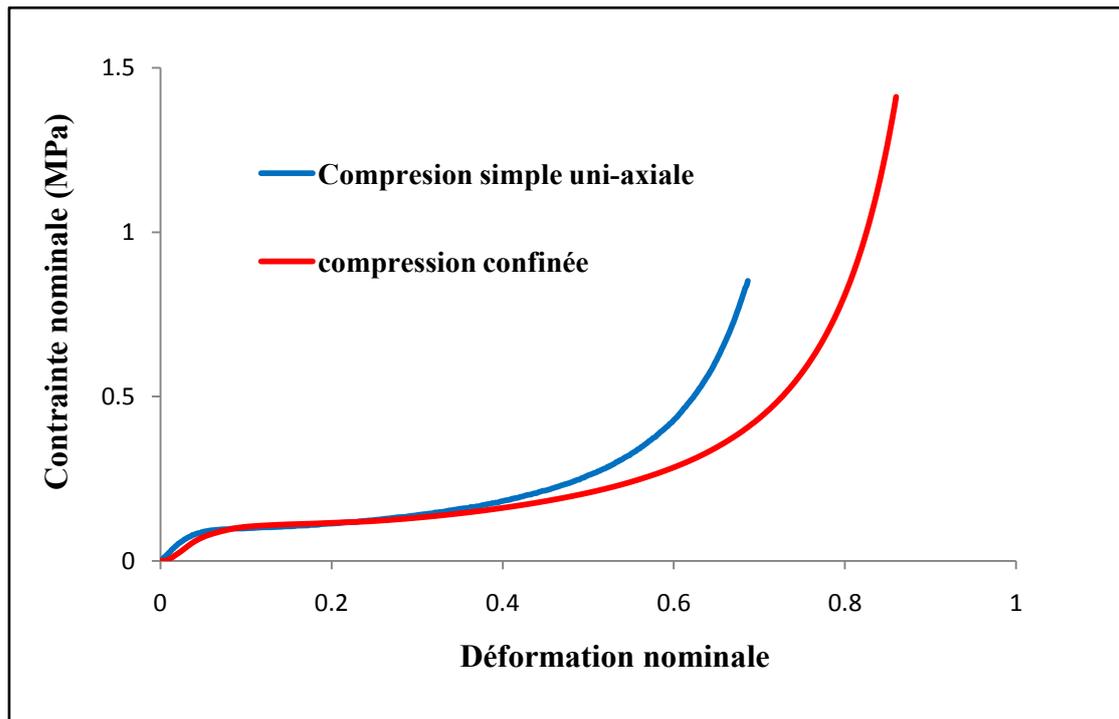


Figure 52 : Comportement de la mousse en compressions simple et confinée.

II.3. Essais de choc vertical par chute libre

Pour une validation du comportement dynamique du modèle d'homogénéisation, nous avons réalisé une série de tests de choc vertical par chute libre sur un système d'emballage constitué d'une caisse en carton ondulé et différentes configurations de mousse de calage. Lors du test, le système d'emballage est levé à une hauteur déterminée et lâché de façon à ce qu'il heurte une surface rigide : cette hauteur dépend de la masse de l'emballage et de la sévérité du test. Nous mesurons de cette manière l'efficacité du système d'emballage.

II.3.1. Préparation des configurations d'emballage à tester

Le premier constituant du système d'emballage est une caisse à rabats recouvrant en carton ondulé simple cannelure de type C (Figure 53). Ces caisses ont été découpées à l'aide de la table à découper ELCEDE MFT20 en suivant le standard FEFCO 0203. Après la découpe, les caisses sont stockées à 23°C et 50% HR pendant au moins 24h avant de les utiliser pour les tests de chute libre.

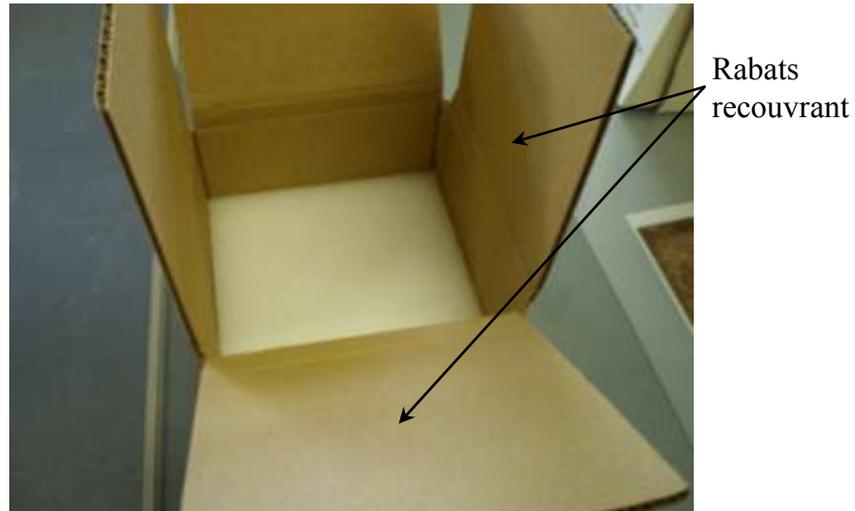


Figure 53 : Caisse en carton ondulé à rabats recouvrant.

Le deuxième constituant est le calage en mousse ETHAFOAM 400 qui entoure une masse indéformable. Deux configurations de calage ont été découpées, le premier calage enveloppe entièrement la masse (Figure 54) ; alors que le deuxième est constitué de 4 parties positionnées dans les coins de la caisse (Figure 55). Sur la partie supérieure de la première configuration, nous avons découpé un trou de 50 mm de diamètre pour placer un accéléromètre triaxial. Les quatre parties de la deuxième configuration sont maintenues à l'aide d'un ruban adhésif.

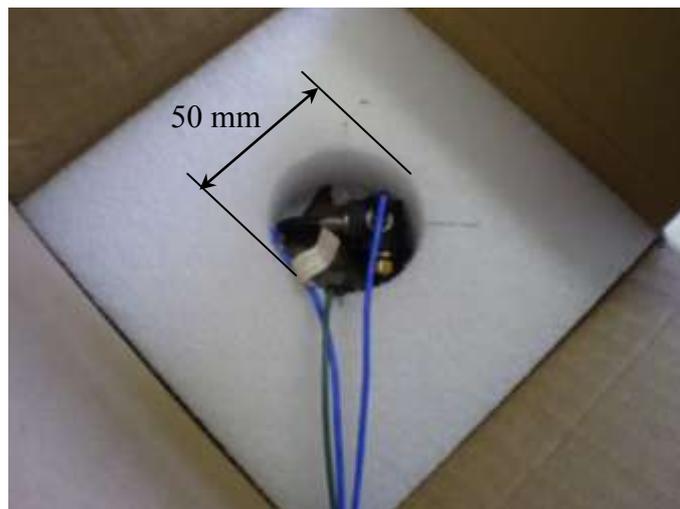


Figure 54 : Calage en mousse recouvrant la masse placé dans la caisse en carton.

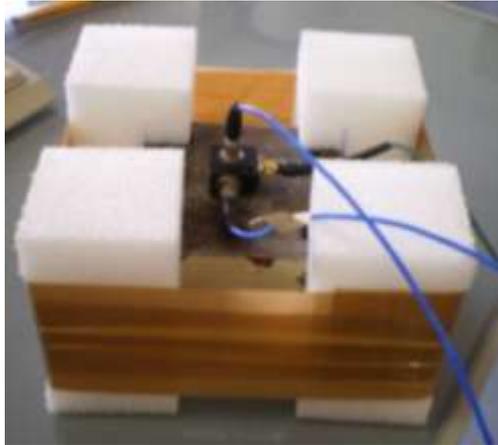


Figure 55 : Calage en mousse recouvrant les coins de la masse placé dans la caisse en carton.

II.3.2. Matériels d'essais

L'essai de choc vertical par chute libre est un essai simple qui a pour but d'examiner les effets d'un choc vertical sur la résistance d'un emballage dans un système de distribution. Ce test est réalisé à l'aide d'une machine AccruDrop de L.A.B. Equipment, Inc. (Figure 56).

Les systèmes d'emballage testés sont équipés d'un accéléromètre triaxial ENDEVCO ISOTRON modèle 2258A-10 (Figure 57). L'acquisition des accélérations en fonction du temps est réalisée à l'aide d'un ordinateur par l'intermédiaire d'une console d'enregistrement LANSMONT TP USB reliée au capteur (Figure 58). Le traitement et la visualisation des mesures se fait par l'intermédiaire du logiciel LANSMONT Test Partner 3 (version 3.3.9).

Le principe du test consiste à placer l'emballage à une hauteur déterminée $H=1.05$ m. En actionnant une pédale au plancher, la fourche effectue une rotation rapide lâchant ainsi l'emballage en chute libre. Nous avons réalisé trois différents essais (Figure 59) :

- Choc par chute libre de la masse avec les deux configurations du calage en mousse mais sans la caisse en carton ondulé.
- Choc par chute libre sur la base de la caisse en carton ondulé contenant les deux configurations de calage en mousse et la masse.
- Choc par chute libre sur le côté de la caisse en carton ondulé contenant les deux configurations de calage en mousse et la masse.

Une série de trois essais a été réalisée pour chacun des tests ci-dessus.

Le capteur qui est collé sur la surface supérieure de la masse, enregistre l'accélération suivant les trois directions pendant toute la durée de la chute libre jusqu'à la fin de l'impact sur le sol rigide.

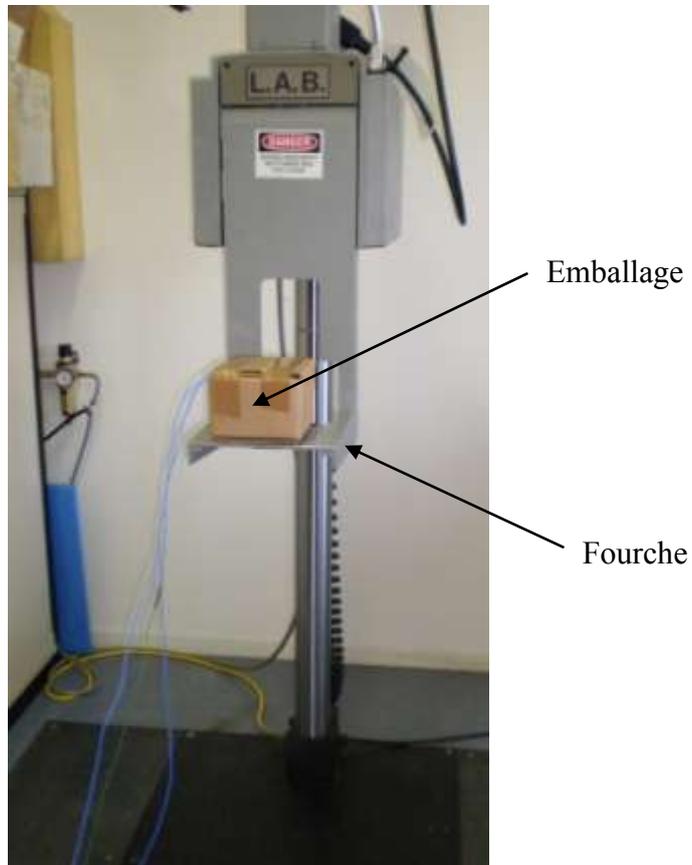


Figure 56 : Machine de test de choc par chute libre.



Figure 57 : Accéléromètre triaxial.

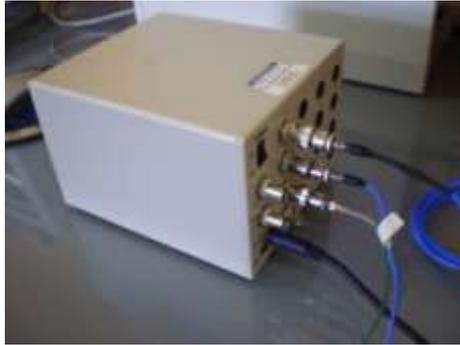


Figure 58 : Console d'enregistrement des accélérations.



Figure 59 : Les trois types d'essais de choc par chute libre.

II.3.3. Résultats des essais de chocs par chute libre

Les résultats des essais sont présentés sous forme de moyenne des courbes du module de l'accélération (en nombre de fois l'accélération de la pesanteur) en fonction du temps. La Figure 60 représente les résultats moyens des tests de choc par chute libre sur la base pour la configuration du calage recouvrant la masse avec ou sans caisse en carton. La Figure 61 représente les résultats moyens des tests de choc par chute libre sur la base pour la configuration du calage sur les coins de la masse avec ou sans caisse en carton. La Figure 62 représente les résultats moyens des tests de choc par chute libre sur le côté pour la configuration du calage recouvrant la masse avec ou sans caisse en carton. La Figure 63 représente les résultats moyens des tests de choc par chute libre sur côté pour la configuration du calage sur les coins de la masse avec ou sans caisse en carton.

Nous remarquons que la caisse en carton a une contribution non négligeable dans l'amortissement des chocs. Elle permet de réduire en général le niveau d'accélération de 20% à 40%. Cependant pour la dernière série de test, le phénomène inverse se produit. Lors des essais de choc par chute libre sur le côté de la masse avec le calage en coins seul, nous avons remarqué que la masse tournait lors de l'impact malgré le fait que les calages soient reliés par

un ruban adhésif. Pour les mêmes essais avec la caisse en carton, la masse restait droite. Ceci peut donc expliquer cet effet.

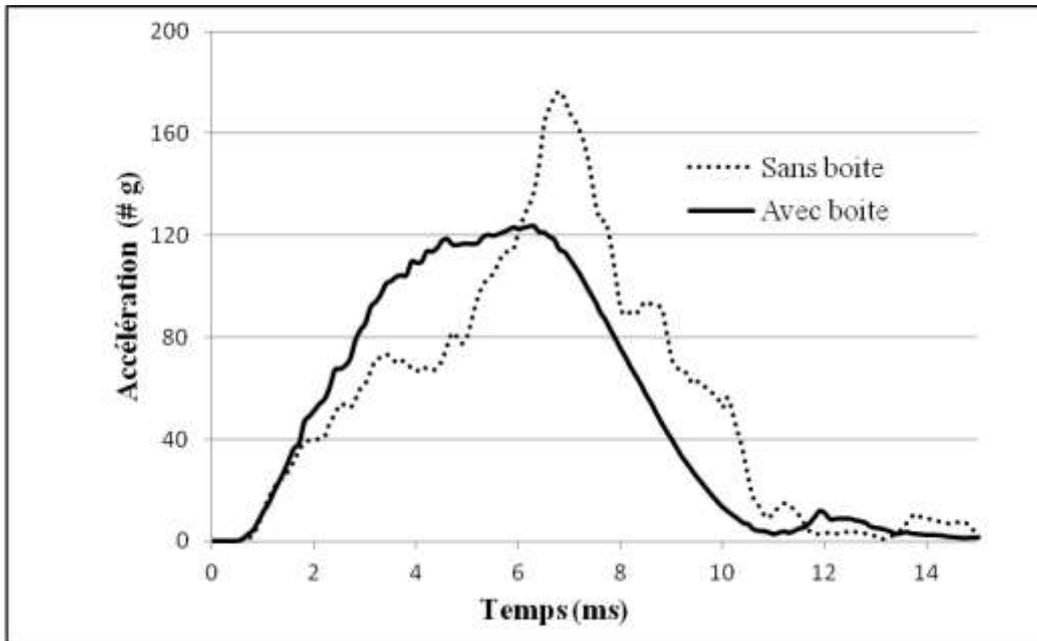


Figure 60 : Résultats de choc par chute libre sur la base pour la configuration du calage recouvrant la masse.

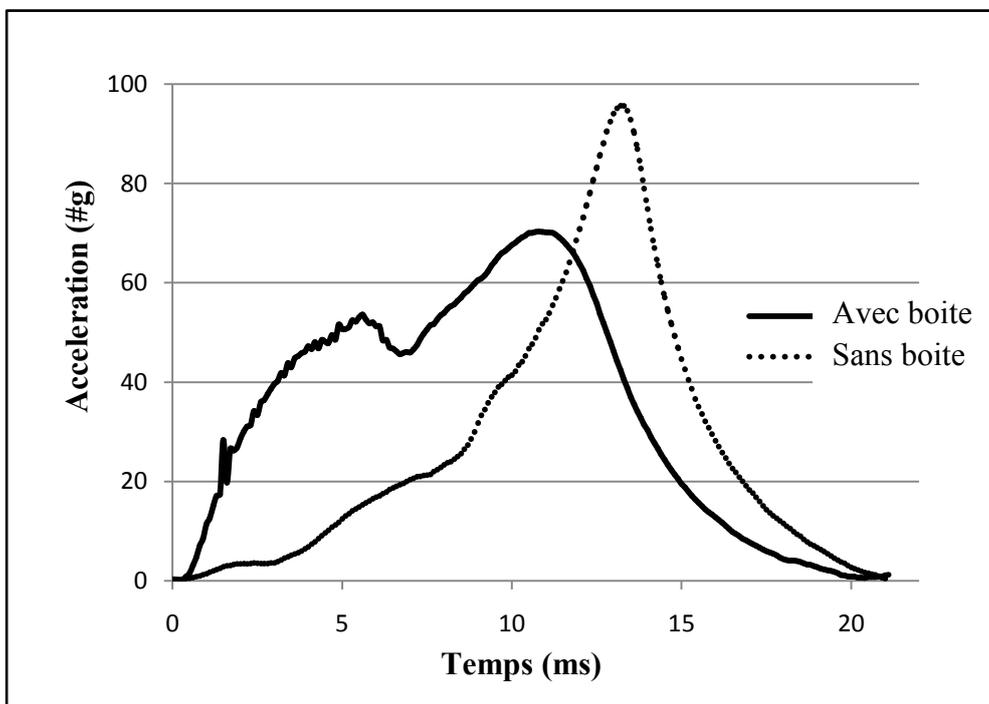


Figure 61 : Résultats de choc par chute libre sur la base pour la configuration du calage sur les coins de la masse.

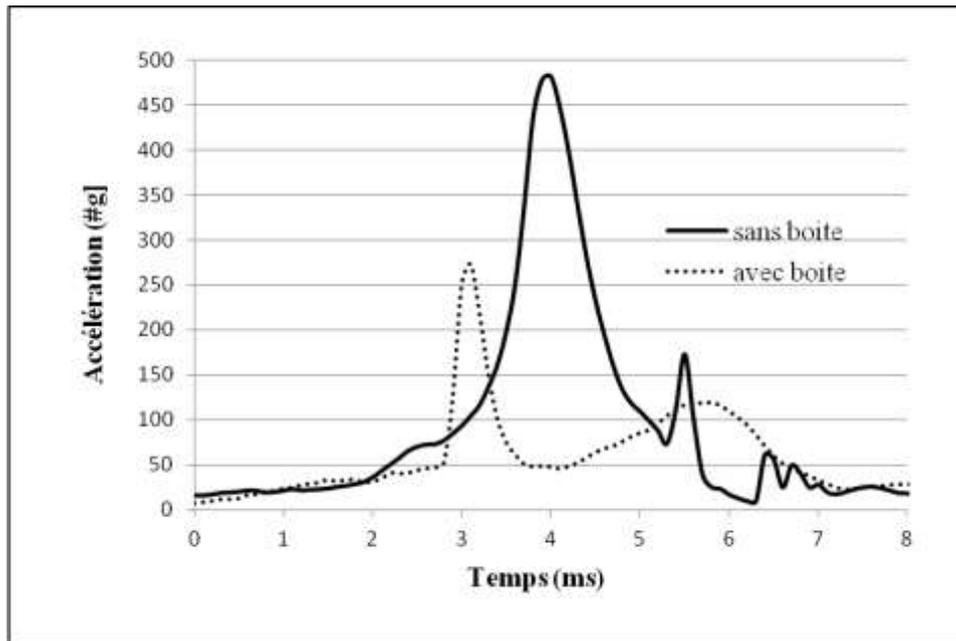


Figure 62 : Résultats de choc par chute libre sur le côté pour la configuration du calage recouvrant la masse.

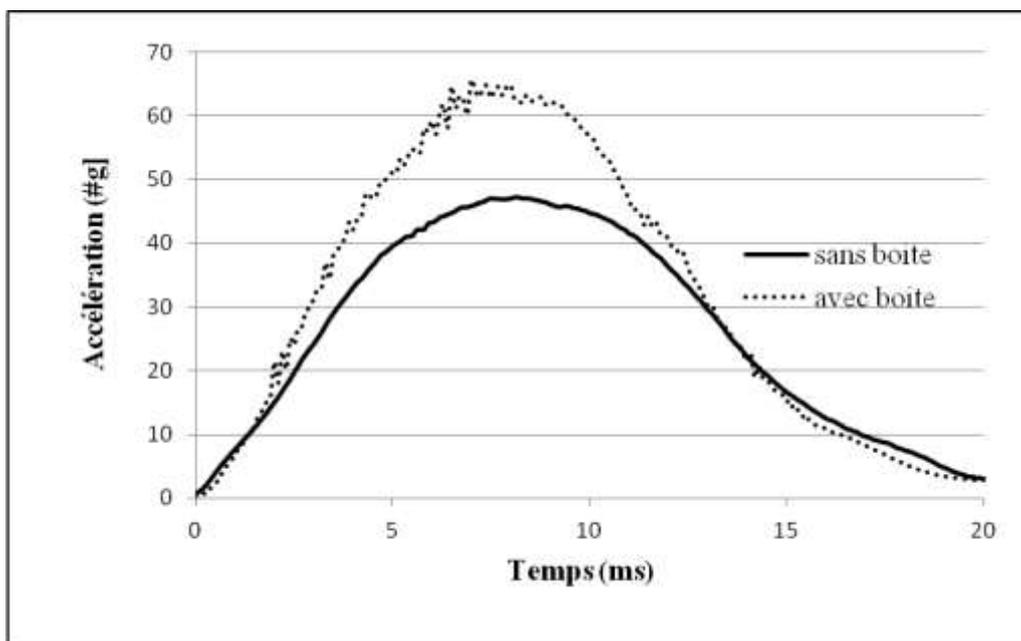


Figure 63 : Résultats de choc par chute libre sur le côté pour la configuration du calage sur les coins de la masse.

II.4. Essais de vibrations aléatoires

Lors du transport, un emballage est soumis à des vibrations. Les transports routiers, ferroviaires ou aériens produisent tous des vibrations dites aléatoires. Il s'agit d'un ensemble de fréquences et d'amplitudes variant constamment au cours du temps. Les essais de vibrations permettent de vérifier la résistance de l'emballage face à ces contraintes. Ils offrent aussi la possibilité de comparer la différence de comportement de différentes solutions d'emballage : soit de manière qualitative par un essai classique soit de manière quantitative en instrumentant le test. En effet l'emballage, par sa conception, peut amplifier ou atténuer les mouvements auxquels il est soumis.

En laboratoire, les tests sont réalisés par la mise en place de l'emballage sur une table vibrante. Les tests de mise en vibrations aléatoires sont les essais les plus proches des vibrations rencontrées lors des transports. Ces tests se réalisent sur des équipements de type électrodynamique avec un système de pilotage.

II.4.1. Préparation des configurations d'emballage à tester

Les configurations d'emballage utilisés pour les tests de vibration sont les même que celles utilisées dans les essais de choc vertical par chute libre. Il s'agit d'une caisse en carton ondulé qui contient une masse rigide en acier de 1.686kg calée à l'aide de deux configurations de mousse en polyéthylène Ethafoam 400 (Figure 64). Dans une série de tests, nous avons également ajouté une masse de 10.95 kg au dessus de la caisse pour simuler un empilement d'emballages (Figure 65).



Figure 64 : Les différentes configurations d'emballage testées en vibrations aléatoires.



Figure 65 : Emballage étudié avec la masse au dessus simulant un empilement d’emballage.

II.4.2. Matériels d’essais

La machine utilisée dans les tests de vibration est une table vibrante hydraulique LANSMONT (Figure 66). Cette table reproduit des vibrations aléatoires à partir d’une PSD. Le pilotage de celle-ci est assuré par le logiciel TouchTest de Lansmont qui permet notamment de définir la forme et le niveau de la PSD. L’enregistrement de la réponse du système d’emballage est assuré par un capteur Kistler 8076k collé sur le produit.

Pour les différents tests réalisés, les emballages sont soumis à des vibrations aléatoires de type bruit blanc avec un niveau de densité spectrale de puissance (PSD) constant et égal à $0.0001 \text{ g}^2/\text{Hz}$.



Figure 66 : Table vibrante hydraulique LANSMONT.

II.4.3. Résultats des essais de vibrations aléatoires

Les résultats des essais sont présentés sous forme de courbes du module de l'accélération (en nombre de fois l'accélération de la pesanteur) en fonction du temps pour l'excitation appliquée par la table et pour la réponse mesurée sur le produit à l'aide d'un accéléromètre. La Figure 67 représente l'accélération en fonction du temps de l'excitation et de la réponse pour le calage en mousse recouvrant la masse sans la caisse en carton. La Figure 68 représente l'accélération en fonction du temps de l'excitation et de la réponse pour le calage en mousse recouvrant la masse avec la caisse en carton. La Figure 69 représente l'accélération en fonction du temps de l'excitation et de la réponse pour le calage en mousse aux coins de la masse sans la caisse. La Figure 70 représente l'accélération en fonction du temps de l'excitation et de la réponse pour le calage en mousse aux coins de la masse avec la caisse en carton. La Figure 71 représente l'accélération en fonction du temps de l'excitation et de la réponse pour le calage en mousse recouvrant la masse avec la caisse et une masse de 10.95 kg au dessus. La Figure 72 représente l'accélération en fonction du temps de l'excitation et de la réponse pour le calage en mousse aux coins de la masse avec la caisse en carton et une masse de 10.95 kg au dessus.

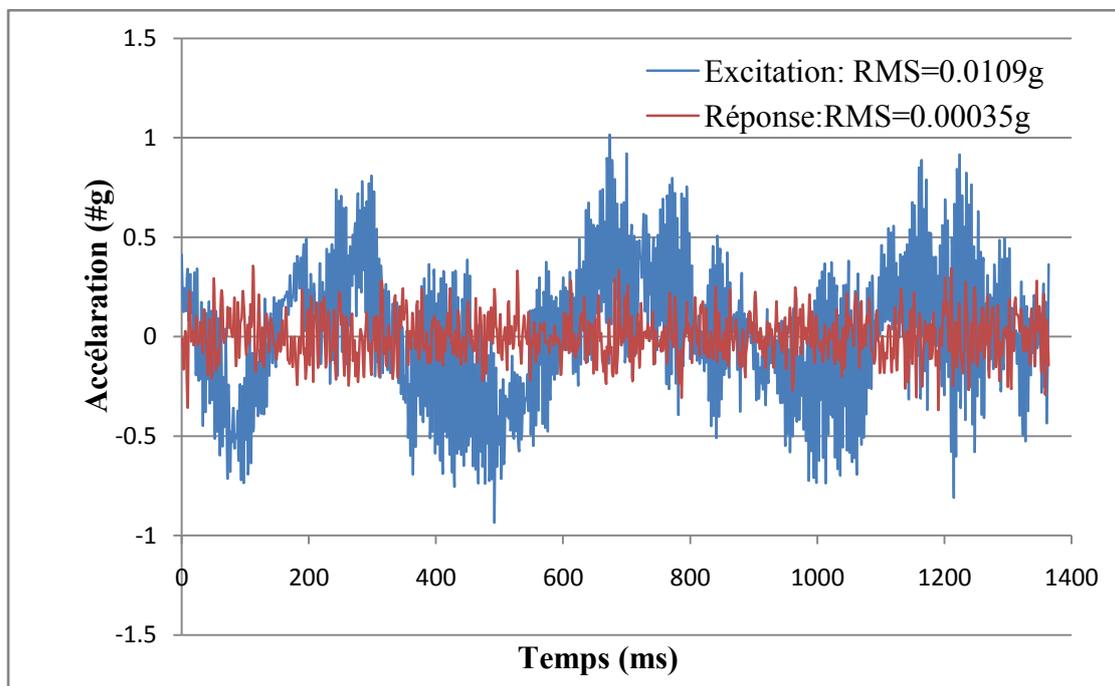


Figure 67 : Excitation et réponse pour la mousse recouvrant la masse sans la caisse.

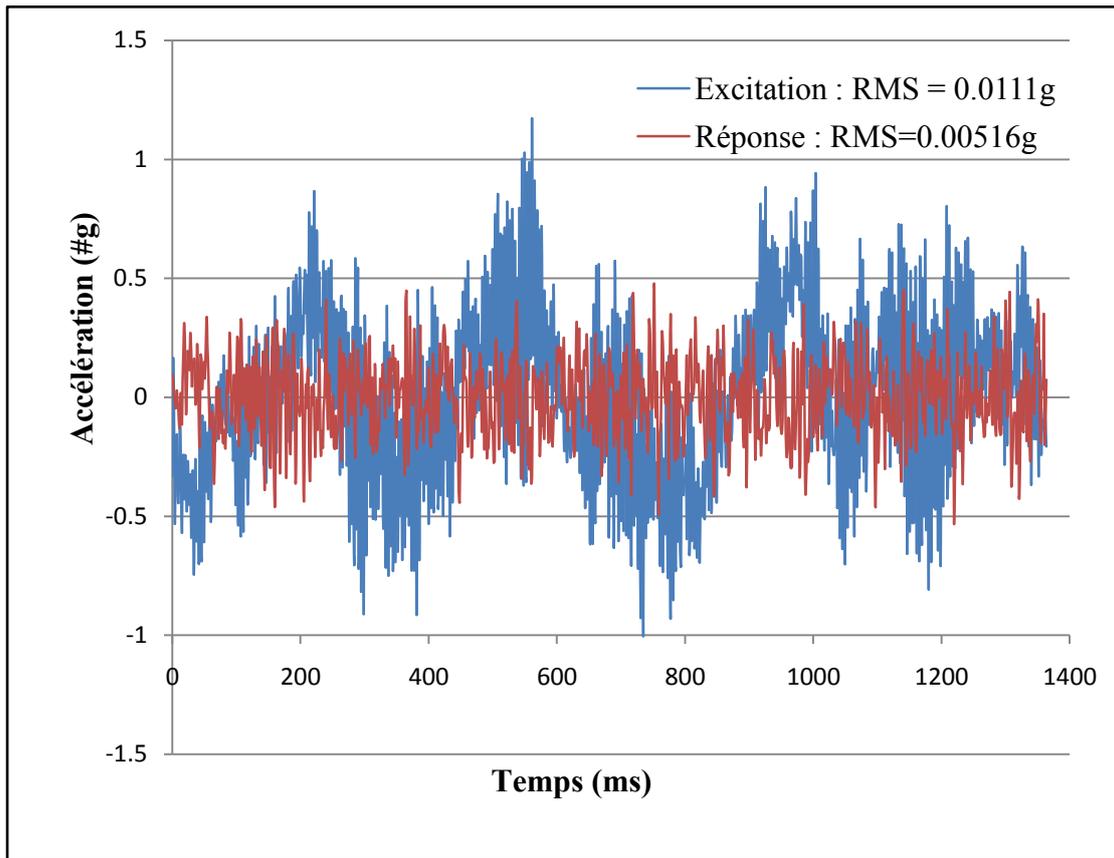


Figure 68 : Excitation et réponse pour la mousse recouvrant la masse avec la caisse.

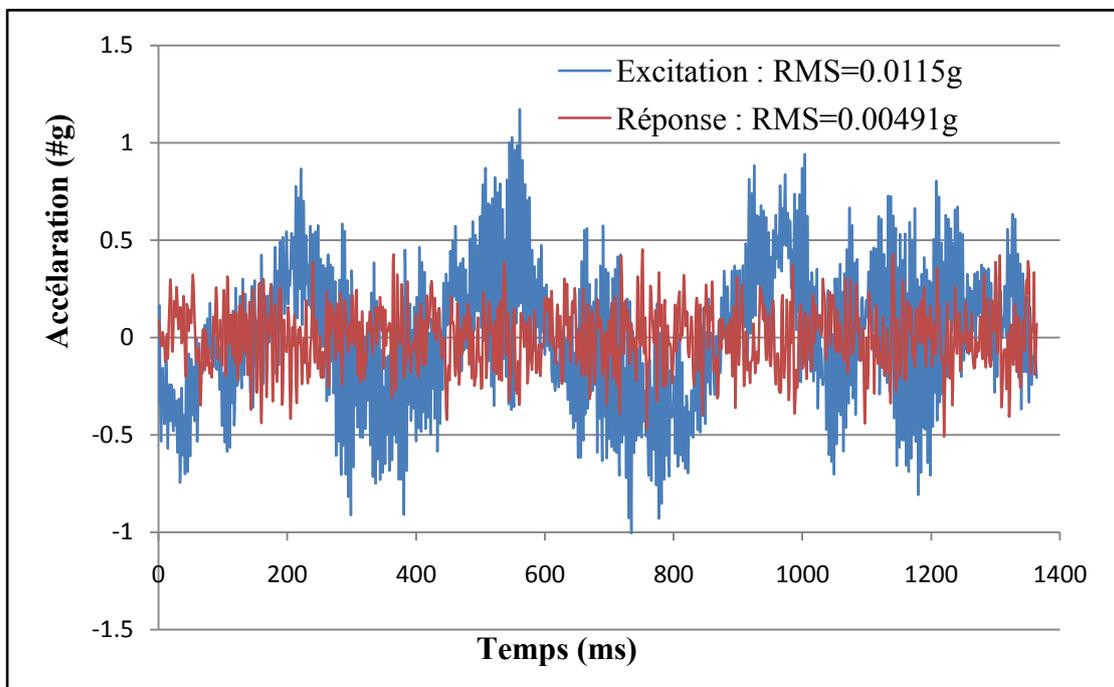


Figure 69 : Excitation et réponse pour la mousse aux coins de la masse sans la caisse.

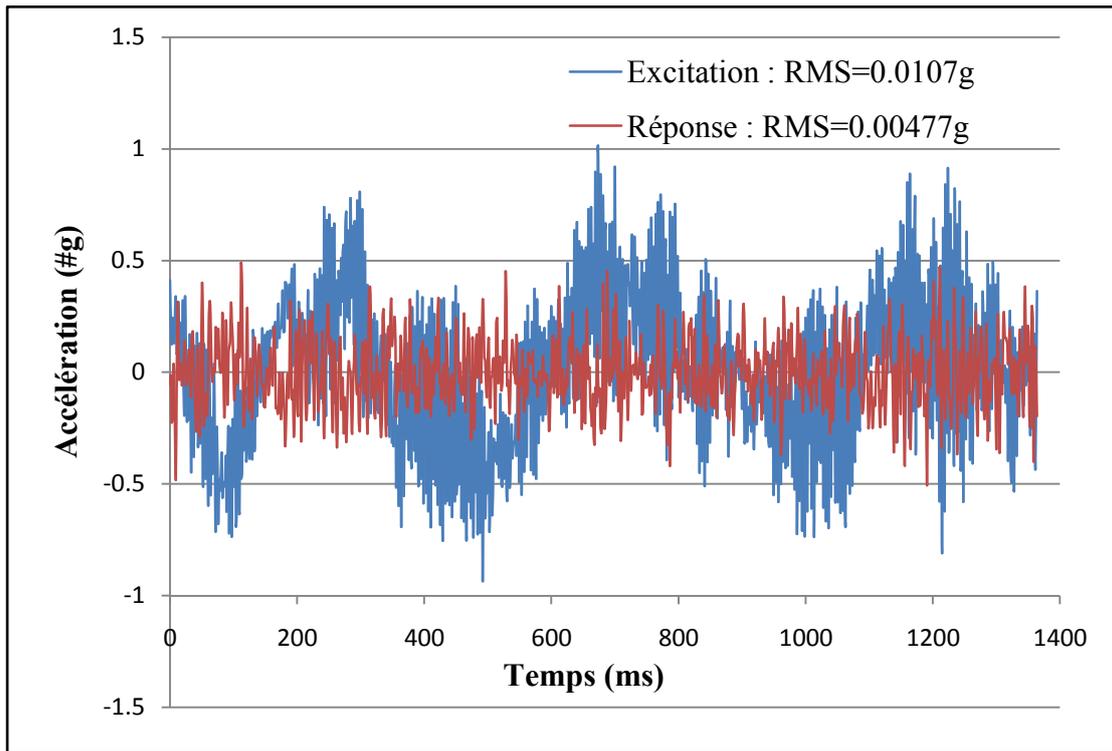


Figure 70 : Excitation et réponse pour la mousse aux coins de la masse avec la caisse.

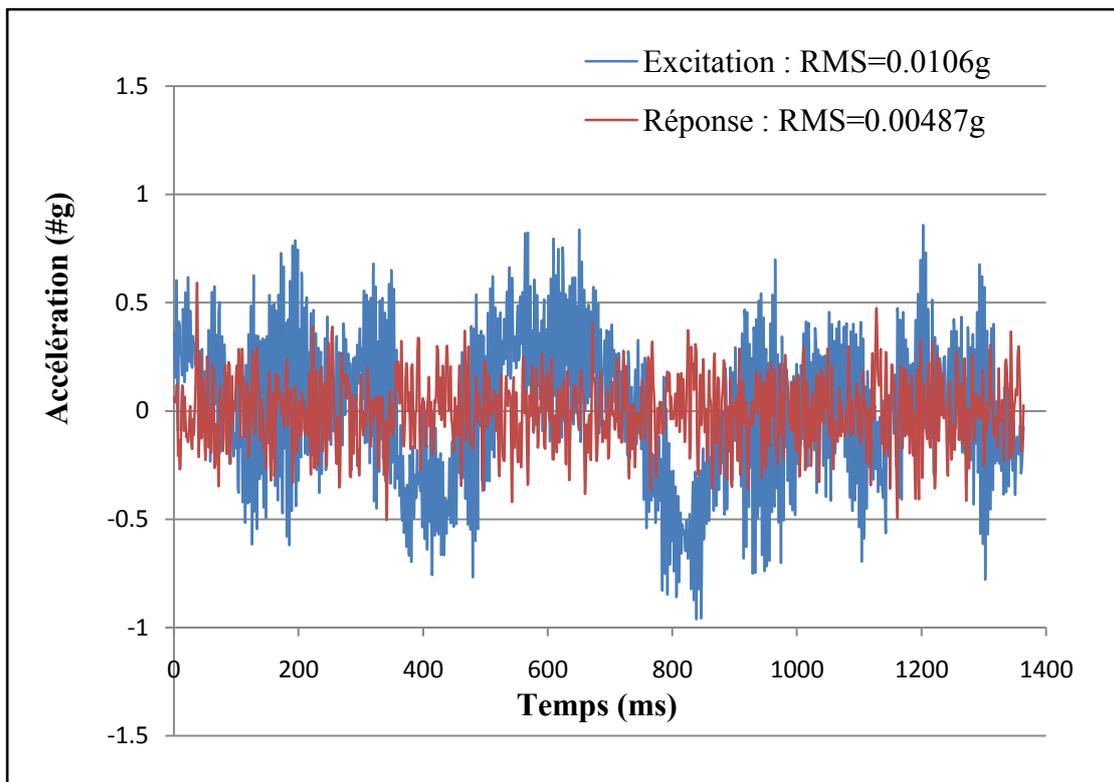


Figure 71 : Excitation et réponse pour la mousse recouvrant la masse avec la caisse et une masse de 10.95 kg au dessus.

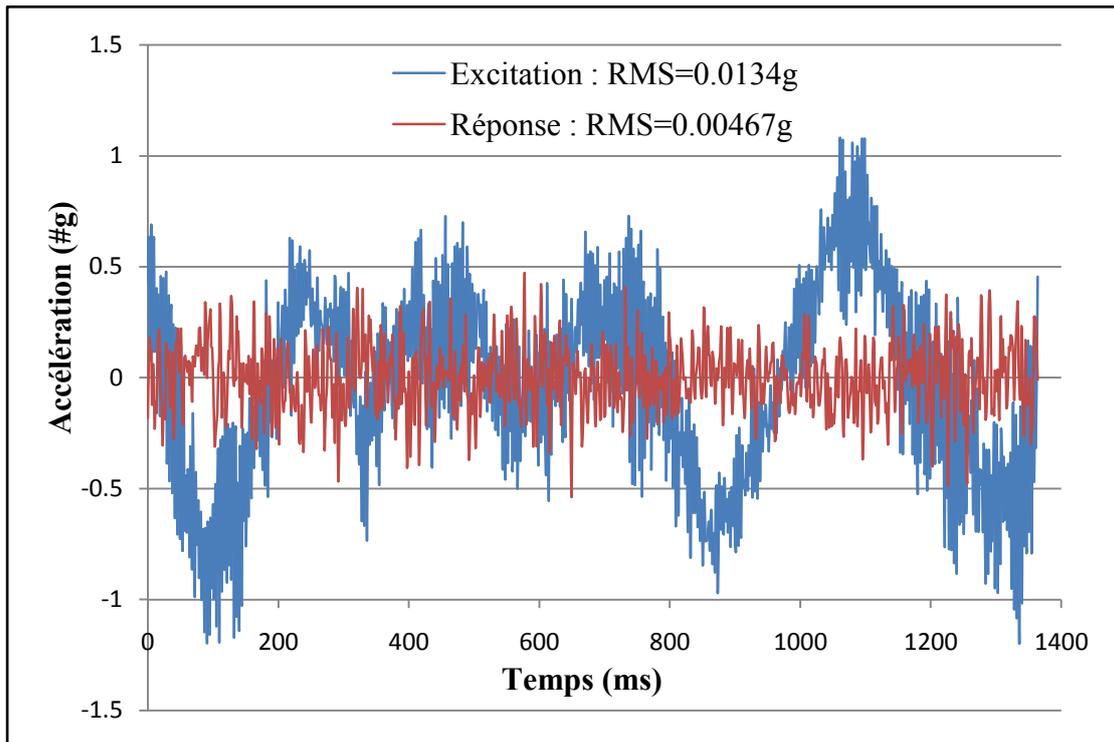


Figure 72 : Excitation et réponse pour la mousse aux coins de la masse avec la caisse et une masse de 10.95 kg au dessus.

Toutes les excitations ont des amplitudes maximales inférieures à 1g, ce qui correspond bien aux niveaux d'accélération mesurés lors des transports routiers et ferroviaires. Les amplitudes maximales des réponses sur toutes les configurations sont au maximum de 0.5g. Cependant, ces enregistrements présentés dans le domaine temporel ne permettent pas de juger de l'importance des différents éléments d'emballage sur la protection du produit.

Pour mieux interpréter ces résultats, nous définissons le gain par l'équation suivante :

$$Gain = \frac{PSD_r}{PSD_e} \quad (77)$$

où PSD_r est l'amplitude de la densité spectrale de puissance de la réponse et PSD_e est celle de l'excitation.

Nous avons alors tracé sur la Figure 73 le Gain en fonction de la fréquence. Plusieurs remarques peuvent être tirées de ces résultats. La première constatation est que la caisse en carton ondulé contribue à l'amortissement des vibrations, car elle réduit le gain de près de 20% (de 5.11 à 4.07) pour la mousse recouvrant la masse et de plus de 15% pour la mousse aux coins de la masse (de 6.83 à 5.75). L'effet de l'amortissement du calage en mousse est ici

évident, on remarque une réduction du gain plus importante dans le cas de la mousse recouvrant la masse que dans le cas de la mousse aux coins de la masse. On remarque également que la fréquence est décalée vers la droite (fréquence plus élevée) pour la mousse recouvrant la masse avec la caisse. Par contre pour la mousse aux coins de la masse, la fréquence est décalée vers la gauche (fréquence moins élevée) quand on ajoute la caisse. La caisse en carton modifie à la fois la masse et la rigidité du système, mais vu la géométrie des deux calages la caisse ne joue pas le même rôle. Dans le cas de l'ajout d'une masse au dessus de l'ensemble un deuxième pic apparaît dans les fréquences plus de 100Hz alors que le premier pic est décalée vers la gauche du fait de l'augmentation de la masse.

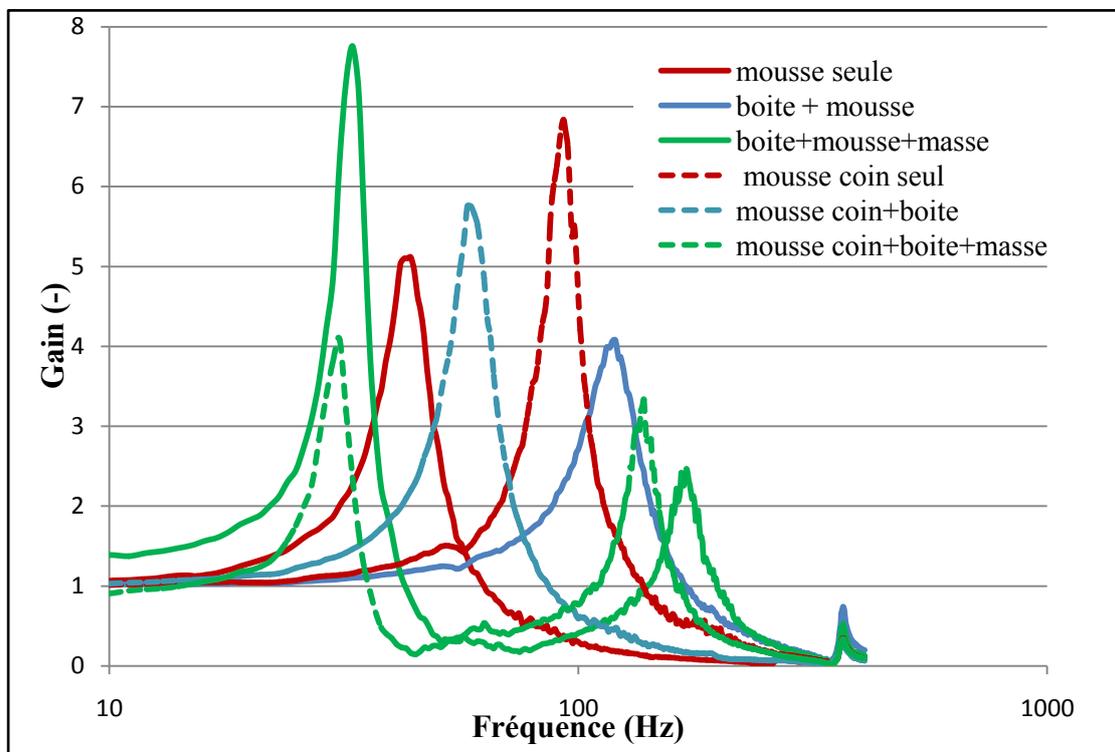


Figure 73 : Courbes de Gain pour les systèmes d'emballage étudiés.

Chapitre V :
Comparaison des résultats expérimentaux
et numériques

Introduction

Dans les précédents chapitres, nous avons implémenté dans le logiciel Abaqus un modèle d'homogénéisation du carton ondulé, nous avons également caractérisé son comportement élastique ainsi que le comportement d'une mousse de calage et enfin nous avons effectué des essais expérimentaux de chocs et de vibrations aléatoires représentatifs d'un circuit logistique. Dans ce chapitre, nous allons confronter le modèle développé aux différents essais expérimentaux pour valider son utilisation dans le contexte de la manutention et du transport de marchandises.

I. Validation du modèle sur les tests de chocs par chute libre

I.1. Le modèle en éléments finis

Pour les tests de chocs par chute libre, le modèle en éléments finis est constitué (Figure 74) : du produit modélisé comme une masse rigide, de la caisse en carton ondulé modélisée par 1024 éléments coques quadrilatéraux S4R homogénéisé et du calage en mousse modélisé par 4892 éléments tétraédriques C3D4 pour la configuration recouvrant la masse et 408 éléments hexaédriques C3D8R pour la configuration aux coins de la masse. Le sol est représenté par une plaque rigide fixe dans l'espace.

Le système d'emballage est positionné à une hauteur de 1.05 m du sol. Pour réduire le temps de calcul, dans le modèle numérique nous avons positionné le système d'emballage à une hauteur de 1 mm du sol avec une vitesse initiale de chute libre calculée d'après l'expression suivante :

$$v_0 = \sqrt{2gh} \quad (78)$$

où g est l'accélération de la pesanteur et $h=1.049$ m est la hauteur de chute avant l'impact.

Des conditions de contact sans frottement sont utilisées entre les différentes parties du modèle. L'algorithme « Contact Pair » du logiciel Abaqus/Standard est utilisé pour gérer le contact.

Le carton ondulé étant orthotrope, nous avons défini sur chacune des faces de la caisse l'orientation matérielle comme indiqué sur la Figure 75.

Tous les calculs ont été réalisés avec le module « Standard Dynamique » d'Abaqus qui consiste en un schéma d'intégration implicite en temps utilisant la formule de Newmark et une matrice masse diagonale « Lumped Mass Matrix » [54].

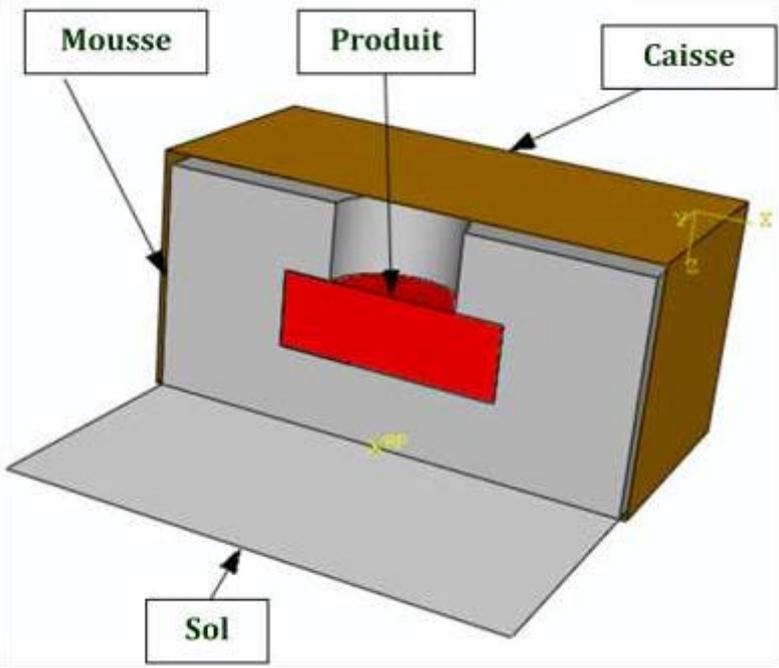


Figure 74 : Modèle en éléments finis.

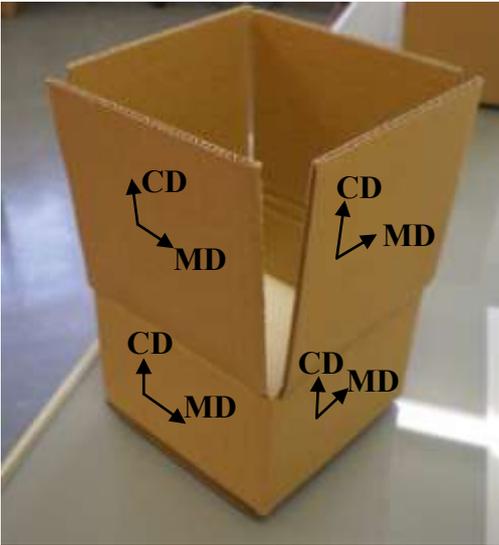


Figure 75 : Orientations matérielles sur la caisse en carton ondulé.

I.2. Le modèle de comportement élasto-plastique pour la mousse

Les mousses ont une structure cellulaire et par conséquent se comportent d'une façon complexe, particulièrement dans les conditions d'écrasement [55]. Une courbe contrainte-déformation pour une mousse polymérique présente différentes zones distinctes correspondant à différents mécanismes. Une zone linéaire élastique, suivie d'un plateau provoqué par l'affaissement des cellules. Lorsque les cellules s'affaissent complètement la contrainte augmente rapidement : c'est la densification du matériau [55-57].

Dans cette partie, nous présentons un modèle phénoménologique de plasticité pour les mousses utilisé dans le logiciel Abaqus « Crushable foam model ». Il s'agit d'un modèle de plasticité modifié qui représente une réponse différente en compression et en traction. Il utilise les courbes de compressions uni-axiale et hydrostatique.

Ce modèle avec durcissement volumétrique utilise une surface de plasticité avec une dépendance elliptique du tenseur déviateur des contraintes $[s]$ et de la pression p dans le plan méridien (Figure 76). Le comportement élastique de la mousse peut être considéré comme élastique isotrope. La surface de plasticité et le potentiel d'écoulement du modèle « Crushable Foam » sont définis en fonction de la pression $p = -\frac{1}{3} \text{trace}[\boldsymbol{\sigma}]$ et de la contrainte équivalente

de von Mises $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} [s] : [s]}$. La surface de plasticité est définie par la relation suivante :

$$f = \sqrt{\sigma_{eq}^2 + \alpha^2 (p - p_0)^2} - B = 0 \quad (79)$$

où le paramètre α représente la forme de l'ellipse dans le plan $p - \sigma_{eq}$.

Ce paramètre peut être calculé à l'aide de la limite élastique en compression uniaxiale (σ_c^0 considérée comme positive), la limite élastique en compression hydrostatique (p_c^0) et la limite élastique en traction hydrostatique (p_t) par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{3k}{\sqrt{(3k_t + k)(3 - k)}} \quad \text{avec} \quad k = \frac{\sigma_c^0}{p_c^0} \quad \text{et} \quad k_t = \frac{p_t}{p_c^0} \quad (80)$$

Le critère d'écoulement plastique g est défini par:

$$g = \sqrt{\sigma_{eq}^2 + \frac{9}{2} p^2} \quad (81)$$

Les paramètres de ce modèle ont été identifiés à partir des résultats expérimentaux de compressions uniaxiale et confinée de la Figure 52, tels que $k = 1.1$ and $k_t = 0.0$.

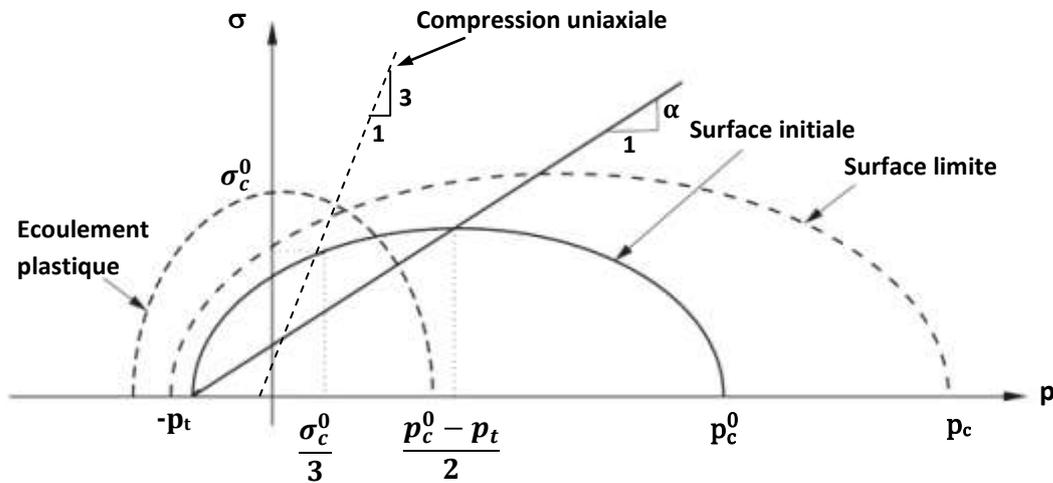


Figure 76 : Surfaces de plasticité et d'écoulement pour le modèle « Crushable foam ».

I.3. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour le choc vertical par chute libre

Nous allons confronter le modèle d'homogénéisation du carton ondulé, que nous avons implémenté dans le logiciel Abaqus à l'aide du sous-programme UGENS, aux résultats de chocs par chute libre présentés dans le chapitre IV. Trois essais ont été comparés :

- le choc par chute libre sur la base de la caisse en carton ondulé contenant le calage en mousse recouvrant la masse
- le choc par chute libre sur la base de la caisse en carton ondulé le calage en mousse aux coins de la masse,
- le choc par chute libre sur le côté de la caisse en carton ondulé contenant le calage en mousse aux coins de la masse.

I.3.1. Cas du choc sur la base de la caisse avec le calage en mousse recouvrant la masse

Sur la Figure 77, nous avons représenté les courbes expérimentale et numérique de l'accélération en fonction du temps lors de l'impact sur le sol de la caisse en carton ondulé avec le calage en mousse recouvrant la masse.

Les accélérations maximales sont très proches entre les résultats expérimentaux et numériques avec un écart inférieur à 3%. Cependant, la durée de l'impact est sous-estimée par notre modèle numérique de près de 30%. Cela est dû à la présence de l'air à l'intérieur des cellules de la mousse qui joue un rôle dans l'amortissement au début de l'impact et à sa relaxation à la fin lors de la décharge qui est plus lente par rapport à la simulation numérique.

Sur la Figure 78, on a représenté les isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur la base de la caisse avec le calage recouvrant la masse. Les contraintes maximales sont situées sur les arêtes et au centre de la face supérieure de la caisse. Pour les arêtes, c'est un comportement standard des caisses en carton. Mais, la concentration des contraintes au centre de la face supérieure de la caisse est due à la présence du trou du positionnement de l'accéléromètre dans la mousse de calage.

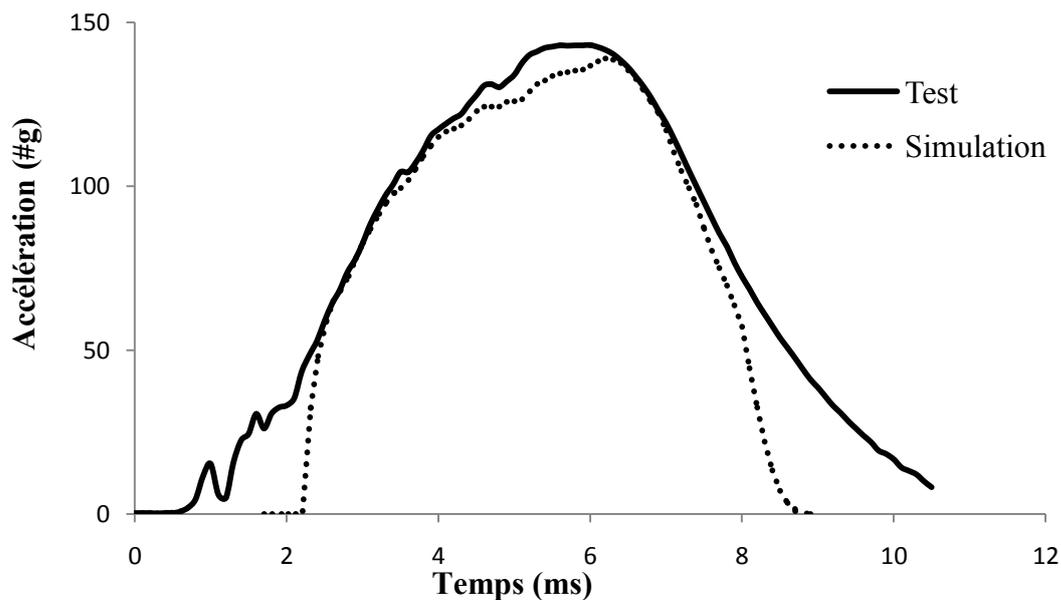


Figure 77 : Comparaison des courbes expérimentale et numérique de l'accélération en fonction du temps pour le choc sur la base de la caisse avec le calage recouvrant la masse.

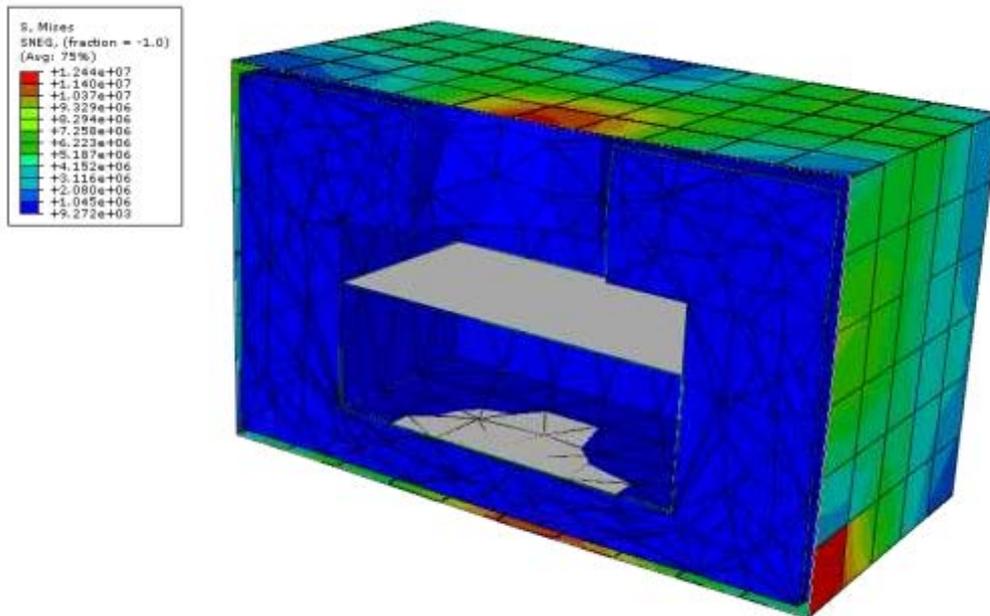


Figure 78 : Isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur la base de la caisse avec le calage recouvrant la masse.

I.3.2. Cas du choc sur la base de la caisse avec le calage aux coins de la masse

Sur la Figure 79, nous avons représenté les courbes expérimentale et numérique de l'accélération en fonction du temps lors de l'impact sur le sol de la caisse en carton ondulé avec le calage aux coins de la masse.

Pour les accélérations maximales, nous observons un écart de près de 13.9% entre les résultats expérimentaux et numériques. Pour la durée de l'impact on constate une différence de l'ordre de 16.9% entre les deux modèles. Au début de l'impact, l'allure des deux courbes est identique, cela conforte la supposition de l'amortissement de l'air dans les cellules de la mousse, car le volume de cette dernière soumis à la compression sous la masse est réduit dans cette configuration de calage. Pour la fin de l'impact et lors de la chute libre du système d'emballage, celui-ci ne tombe pas exactement sur sa base d'où l'apparition des deux pics sur la courbe expérimentale.

Sur la Figure 80, on a représenté les isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur la base de la caisse avec le calage aux coins de la masse. Les contraintes maximales sont situées principalement au centre de la face supérieure de la caisse. Cette concentration des contraintes est due à l'absence de mousse à cet endroit. La Figure 81 montre les contraintes de von Mises sur les quatre calages en mousse.

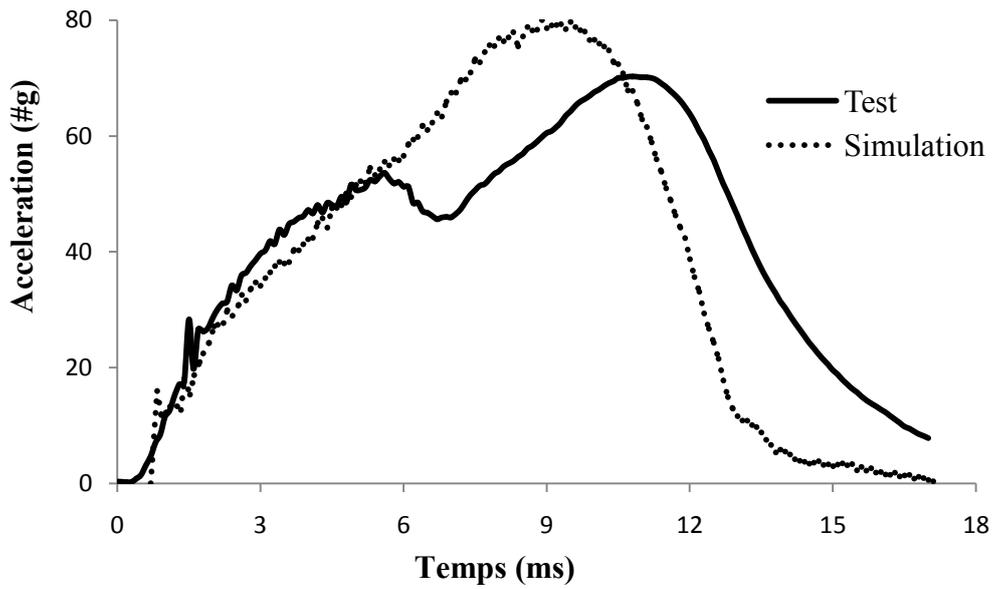


Figure 79 : Comparaison des courbes expérimentale et numérique de l'accélération en fonction du temps pour le choc sur la base de la caisse avec le calage aux coins de la masse.

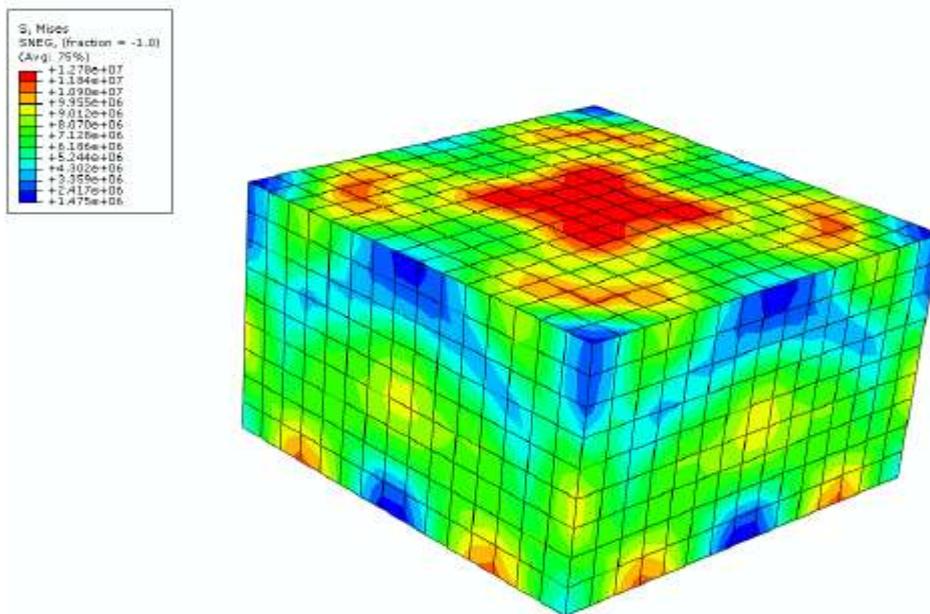


Figure 80 : Isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur la base de la caisse avec le calage aux coins de la masse.

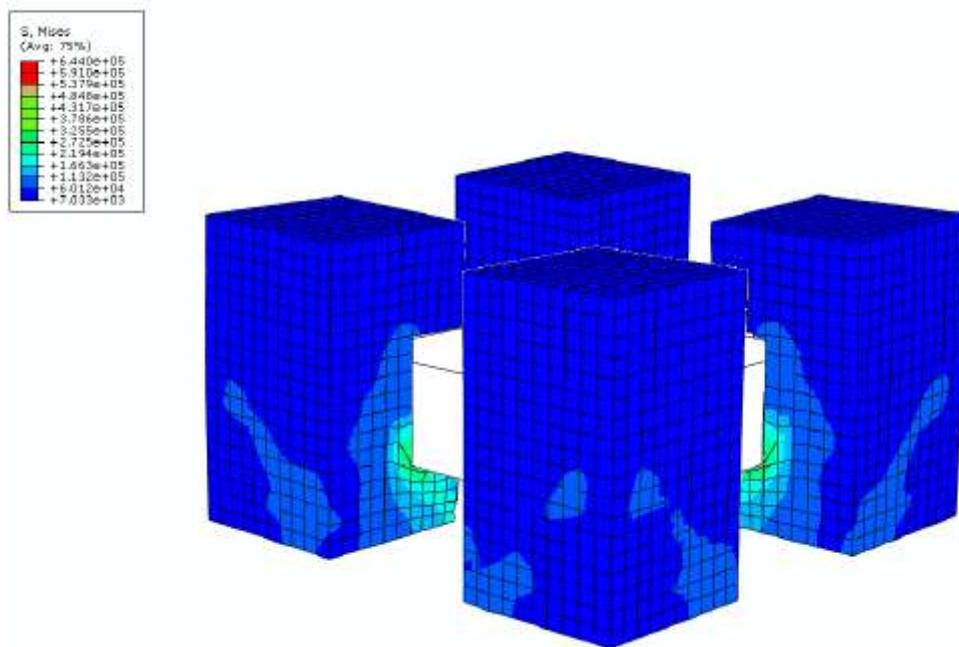


Figure 81 : Isovaleurs des contraintes de von Mises pour la mousse seule dans le cas du choc sur la base de la caisse avec le calage aux coins de la masse.

I.3.3. Cas du choc sur le côté de la caisse avec le calage aux coins de la masse

Sur la Figure 82, nous avons représenté les courbes expérimentale et numérique de l'accélération en fonction du temps lors de l'impact sur le sol du côté de la caisse en carton ondulé avec le calage aux coins de la masse.

Pour cette configuration, l'écart des valeurs des accélérations maximales entre les résultats expérimentaux et numériques est de 11.7%. L'écart pour la durée du choc entre l'expérience et la simulation est de 9.4%. Les calages en mousse aux coins de la masse ne sont pas réellement symétriques, i.e. le centre de gravité de l'ensemble est légèrement décalé, provoquent ainsi une rotation du système d'emballage lors de la chute libre. L'allure de la courbe expérimentale ne coïncide pas ainsi avec celle du modèle numérique.

Sur la Figure 83, on a représenté les isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur le côté de la caisse avec le calage aux coins de la masse. Les contraintes maximales sont situées principalement au centre de la face latérale de la caisse (représentée sur la figure en haut). Cette concentration des contraintes est due à l'absence de mousse à cet endroit. La Figure 84 montre les contraintes de von Mises sur les quatre calages en mousse.

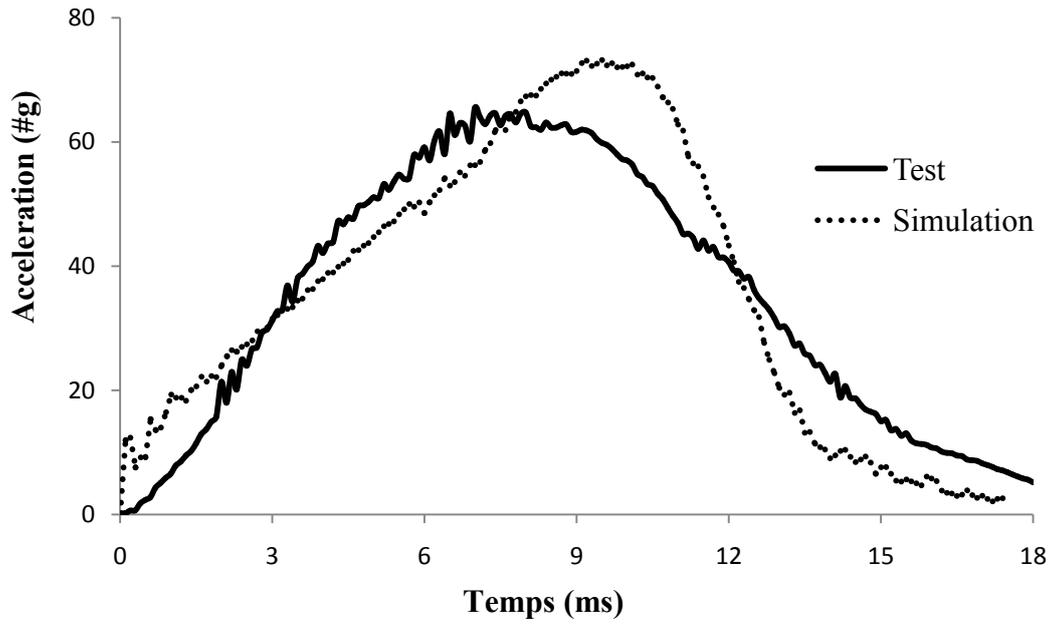


Figure 82 : Comparaison des courbes expérimentale et numérique de l'accélération en fonction du temps pour le choc sur le côté de la caisse avec le calage aux coins de la masse.

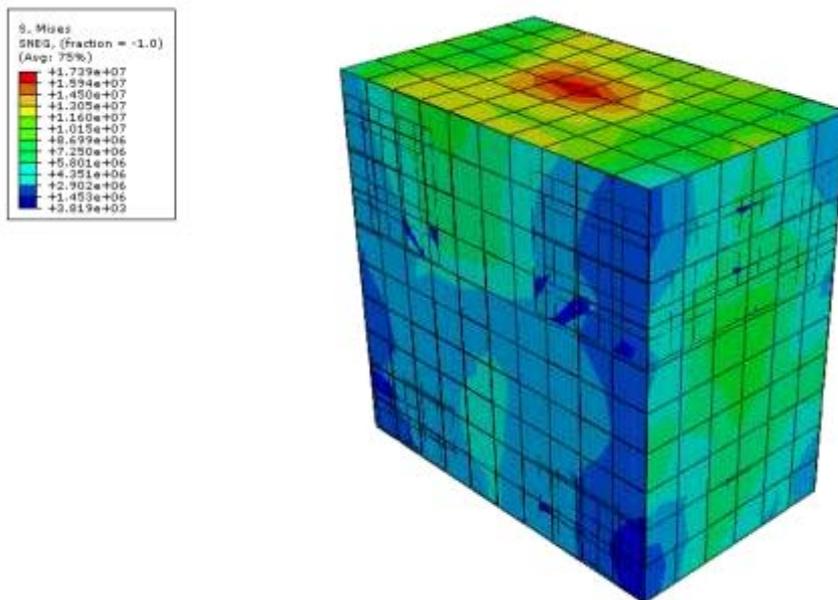


Figure 83 : Isovaleurs des contraintes de von Mises pour le choc sur le coté de la caisse avec le calage aux coins de la masse.

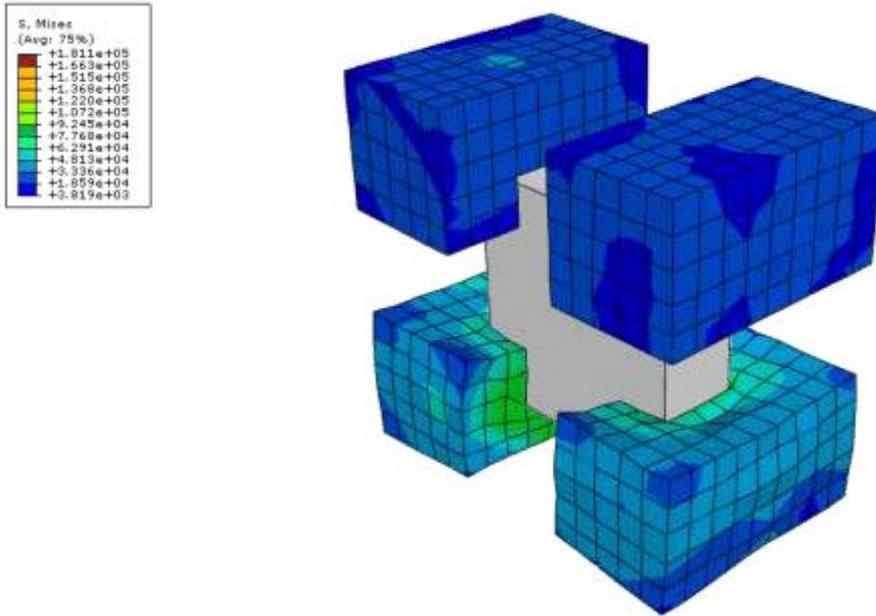


Figure 84 : Isovaleurs des contraintes de von Mises sur la mousse seule pour le choc sur le coté de la caisse avec le calage aux coins de la masse.

Le Tableau 17 résume les résultats pour les accélérations maximales et les durées des chocs pour les différents tests réalisés.

	Mousse recouvrant la masse (choc sur la base)		Mousse placée aux coins de la masse (choc sur la base)		Mousse aux coins de la masse (choc sur le côté)	
	Simulation	Test	Simulation	Test	Simulation	test
Accélération max. (#g)	139	143.12	80	70.2	73.2	65.5
Durée de l'impact (ms)	6.5	9.3	16.2	19.5	17.3	19.1
Ecart pour l'accélération	-2.9%		13.9%		11.7%	
Ecart pour la durée	-30%		-16.9%		-9.4%	

Tableau 17 : Comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour les accélérations maximales et les durées des chocs.

II. Validation du modèle sur les tests de vibrations aléatoires

II.1. Analyse de la réponse aléatoire par la méthode des éléments finis

Lors des tests expérimentaux, nous avons excité les différentes configurations d'emballage avec un signal vibratoire aléatoire de type bruit blanc avec une densité spectrale de puissance constante ($PSD=0.0001g^2/Hz$) correspondant à des niveaux rencontrés dans le transport des marchandises.

L'analyse de la réponse aléatoire prédit la réponse d'un système qui est soumis à une excitation non déterministe continu qui est exprimé dans un sens statistique par une matrice de densité spectrale croisée. Puisque le chargement est non déterministe, il ne peut être exprimé que dans un sens statistique.

Pour définir le chargement aléatoire, nous devons définir une fonction de fréquence et une fonction de corrélation croisée qui fait référence à la fonction de fréquence. Les fonctions de fréquence sont définies comme des données du modèle. Dans ABAQUS, une échelle logarithmique est utilisée dans l'interpolation entre les valeurs indiquées dans les fonctions de fréquence.

Pour définir les fonctions de fréquence dans ABAQUS, on utilise l'instruction « *PSD-DEFINITION ». Cette instruction doit être reliée à l'instruction « *CORRELATION » qui définit la corrélation de la fonction aléatoire. Un premier calcul permet de déterminer les fréquences propres du système étudié « FREQUENCY ». Un deuxième calcul permet de déterminer la réponse aléatoire du système « RANDOM RESPONSE ».

Tableau 18, présente le fichier de données des modèles numériques pour l'analyse en excitation aléatoire de type bruit blanc définie par l'intermédiaire des fonctions de fréquence et de corrélation.

```

*PSD-DEFINITION, NAME=PSD, TYPE=BASE
1.0E-4,0.0,0.1
1.0E-4,0.0,200.
** -----
**
** STEP: Step-1
**
*Step, name=Step-1, perturbation
*Frequency, eigensolver=Lanczos, acoustic coupling=on, normalization=mass,
number interval=1, bias=1.
, , 300., , ,
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
*End Step
** -----
**
** STEP: Step-2
**
*Step, name=Step-2, perturbation
*Random Response
1., 200., 200, 3.,
*Modal Damping
1, 20, 1.e-5
*CORRELATION, PSD=PSD, TYPE=CORRELATED, COMPLEX=NO
1,1
*BASE MOTION, DOF=3
**
** OUTPUT REQUESTS
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-2
**
*Output, field
*Node Output
A, U
*Output, history, frequency=0
*End Step

```

Tableau 18 : Fichier de données ABAQUS pour définir les fonctions de fréquence et de corrélation.

II.2. Comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour les réponses aléatoires

II.2.1. Cas du calage en mousse avec la masse sans la caisse en carton

Dans les premiers modèles simulés sous ABAQUS, nous avons pris en compte les calages en mousse avec la masse sans la caisse en carton. On a représenté sur la Figure 85 la fonction de transfert (rapport de la réponse de la PSD sur l'excitation) en fonction de la fréquence pour la mousse entourant la masse sans la caisse en carton. Sur la Figure 86, on a représenté la fonction de transfert pour le calage en mousse aux coins de la masse sans la caisse en carton.

Le but de ces simulations est de déterminer les amortissements modaux pour la masse avec les calages en mousse par identification inverse. Ces valeurs sont ensuite utilisées dans les modèles avec la caisse en carton. On a accepté les amortissements avec une erreur très petite (<1%). Les valeurs des fréquences de résonance et les amplifications sont indiquées dans le Tableau 19. Les écarts entre les résultats numériques et expérimentaux sont très faibles (< 3%) pour les fréquences de résonance et les amplifications.

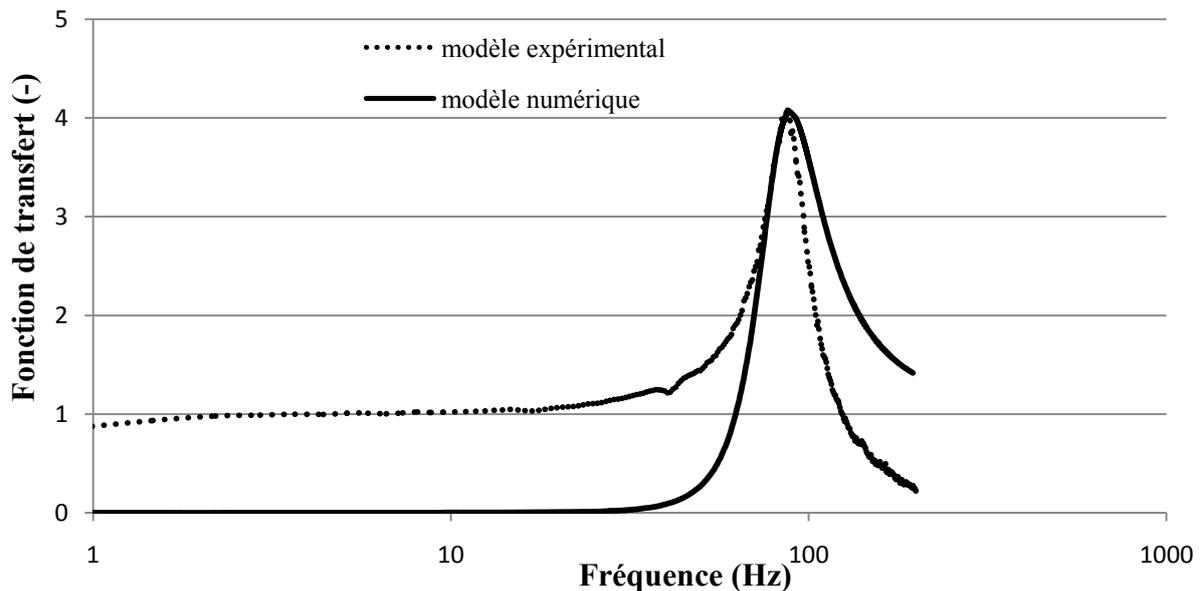


Figure 85 : Fonctions de transfert pour le calage en mousse entourant la masse sans la caisse en carton.

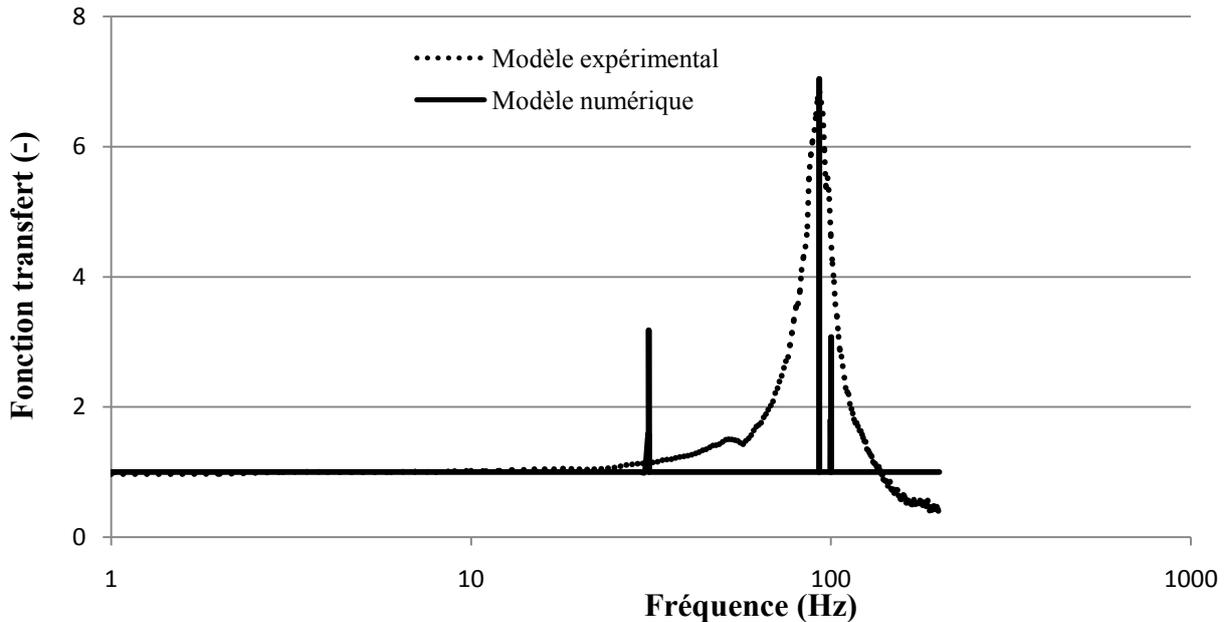


Figure 86 : Fonctions de transfert pour le calage en mousse aux coins de la masse sans la caisse en carton.

II.2.2. Cas de la caisse avec le calage en mousse recouvrant la masse

La simulation des vibrations aléatoires pour la caisse avec le calage en mousse recouvrant la masse en utilisant le sous programme UGENS a donné les résultats de la Figure 87. On remarque que les fréquences de résonance et les amplifications simulées sont relativement proches des résultats expérimentaux. L'écart entre l'expérience et la simulation sont respectivement de 13% pour la fréquence de résonance et de 6% pour l'amplification (Tableau 19).

II.2.3. Cas de la caisse avec le calage en mousse recouvrant la masse + masse au dessus

Pour une meilleure validation du modèle d'homogénéisation en vibrations aléatoires, nous avons ajouté à la configuration précédente une masse rigide de 10.95kg au dessus (Figure 65). Cette masse remplace un empilement d'emballages avec leurs produits dans une palette lors du transport. Les courbes de la fonction de transfert en fonction de la fréquence des résultats numérique et expérimental sont tracées sur la Figure 88. Les fréquences de résonance et les amplifications simulées sont relativement proches des résultats expérimentaux. L'écart entre l'expérience et la simulation sont respectivement de 6% pour la fréquence de résonance et de 4.7% pour l'amplification (Tableau 19).

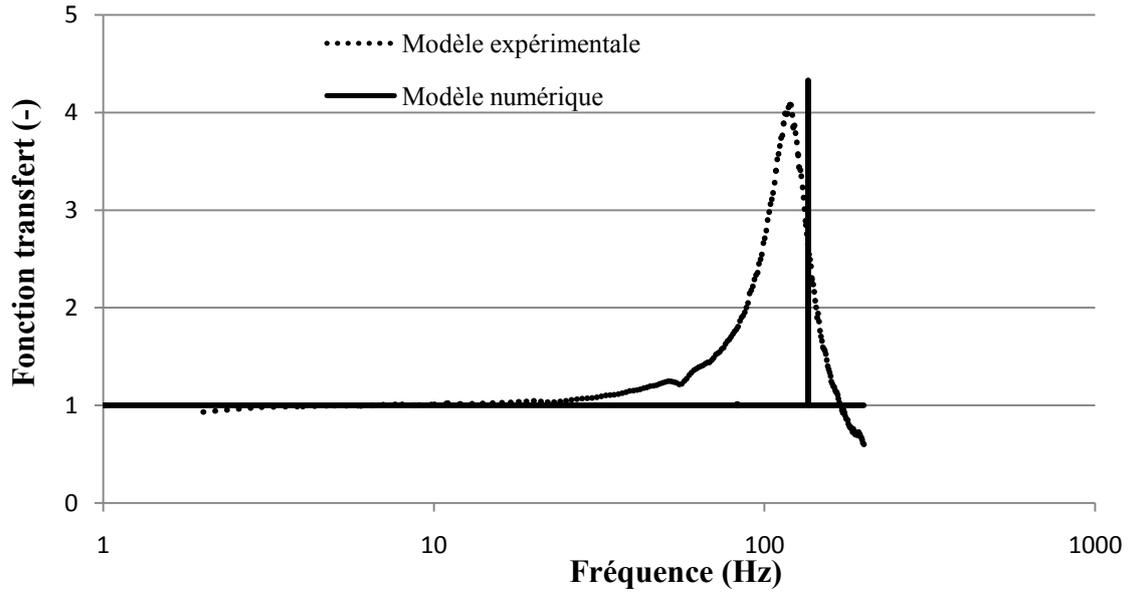


Figure 87 : Fonctions de transfert pour la configuration de la mousse entourant la masse avec la caisse. (0-200Hz).

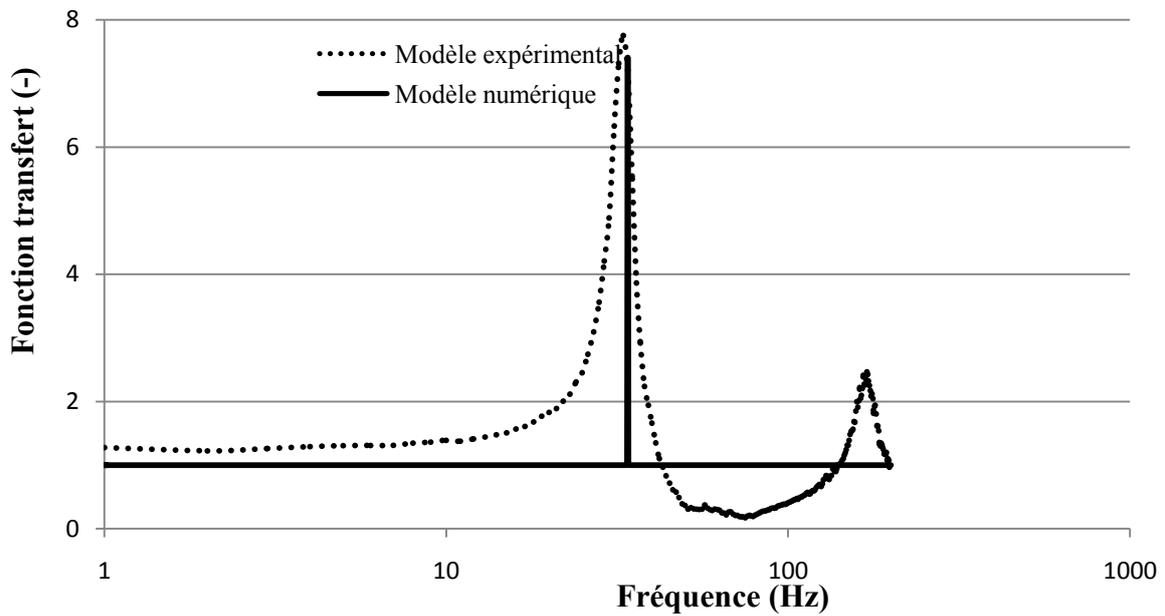


Figure 88 : Fonctions de transfert pour la configuration de la mousse entourant la masse avec la caisse + la masse de 10.95kg au dessus (0-200Hz).

Configurations	Type de résultat	Sim.	Test	Erreur
Mousse entourant la masse sans la caisse	Fréquence (Hz)	88.9	87.15	-1.9%
	Amplification	4.06	4.07	0.2%
Mousse aux coins de la masse sans la caisse	Fréquence (Hz)	92.85	92.97	-0.12%
	Amplification	7.03	6.83	2.9%
Mousse entourant la masse avec la caisse	Fréquence (Hz)	135.65	119.4	13%
	Amplification	4.32	4.07	6.1%
Mousse entourant la masse avec la caisse + masse au dessus	Fréquence (Hz)	33.99	32.99	3%
	Amplification	7.4	7.75	-4.7%

Tableau 19 : Comparaison des fréquences de résonances et des amplifications pour la vibration aléatoire.

Conclusions et perspectives

L'objectif de la thèse était de contribuer à la modélisation du comportement dynamique des systèmes d'emballage en carton ondulé et calage en mousse. Le choix du carton ondulé a été basé sur le fait que sa structure sandwich apporte une rigidité élevée avec un poids réduit. En plus le papier est un matériau peu cher, recyclable et biodégradable; ce qui lui a donné un avantage non négligeable dans le monde de l'emballage.

La modélisation du comportement dynamique peut être réalisée en considérant les caisses en carton ondulé comme des structures 3D. Opter pour cette solution, conduit inévitablement à la mobilisation de ressources humaine et informatique élevées et onéreuses (préparation de la géométrie en CAO, maillage, mémoire de stockage et temps CPU). Toutes ces considérations, nous ont orientés vers l'homogénéisation de la structure 3D en une plaque 2D. La différence entre les deux approches de modélisation en termes de temps CPU notamment est considérable. En effet, nous avons montré dans le chapitre II que la réduction du temps CPU pouvait atteindre 20 fois pour la modélisation de chute libre et plus de 12 fois pour la vibration et ceci pour des résultats comparables entre les deux approches.

Le modèle analytique d'homogénéisation de la structure complexe 3D par une plaque 2D simple, détaillé dans le chapitre II, a été initialement développé au sein de l'équipe Matériaux, Procédés et Systèmes d'Emballage du GRESPI et implémenté dans l'élément de coque T3γ18 qui a donné de bons résultats dans les différentes sollicitations statiques. Mais, il s'est avéré que son utilisation pratique n'était pas optimale car le pré et le post-traitement est difficile du fait que l'élément ne soit pas dans la bibliothèque d'Abaqus et son utilisation dans les problèmes dynamiques nécessitait le traitement du contact. Pour cela, nous avons opté pour l'utilisation des éléments de la bibliothèque d'Abaqus et le modèle d'homogénéisation a été implémenté au niveau des propriétés de la section. Ceci nous a permis d'utiliser les potentialités du logiciel Abaqus pour étudier le comportement dynamique des emballages avec contact.

Les essais expérimentaux nous ont permis de déterminer les propriétés élastiques orthotropes des constituants du carton ondulé. Pour la mousse, les essais expérimentaux nous ont permis d'identifier le modèle de comportement de la mousse « Crushable Foam » d'Abaqus. Les essais dynamiques réalisés sur les caisses en carton ondulé avec la masse en guise de produit et la mousse de calage nous ont permis d'arriver aux conclusions suivantes :

- Le carton ondulé a une influence non négligeable sur la protection des produits emballés lors des chocs en chute libre. Car l'accélération maximale qu'a subit la masse a été réduite de 20 à 40% lorsqu'elle est protégée par la caisse en carton ondulé. Ce qui lui attribue un caractère d'amortissement aux chocs important.
- La même constatation est enregistrée pour les tests de vibration, le carton ondulé joue un rôle important dans l'amortissement de l'amplitude lors du passage des emballages aux fréquences de résonance. Cette influence est de l'ordre de 20%.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous avons utilisé le modèle d'homogénéisation dans la modélisation numérique par éléments finis du comportement dynamique de la caisse en carton ondulé avec la masse et la mousse de calage lorsqu'elle est soumise à la chute libre et à des vibrations aléatoires. Les résultats numériques ont été confrontés aux essais expérimentaux. Les résultats sont comparables et les écarts sont raisonnables.

La simulation numérique du comportement dynamique dans la pratique est de pouvoir concevoir les systèmes d'emballage en un temps réduit tout en respectant les niveaux de référence de fragilité typiques des produits et les fréquences à éviter en fonction de chaque mode de transport.

Les perspectives pour ce travail sont nombreuses. Du point de vue pratique, nous pourrions étudier le comportement statique (gerbage) et dynamique (chocs, chutes, vibrations) de palettes de caisses en carton ondulé. Ces études peuvent intervenir pendant la conception de l'emballage pour tester les différentes solutions envisagées à moindre coût. Du point de vue théorique, dans le modèle d'homogénéisation actuel, les non linéarités matérielles (plasticité et endommagement) ne sont pas pris en compte. En effet, si la caisse en carton subit un impact sur l'un de ses côtés ou l'une de ses arêtes, les déformations sont irréversibles et la caisse peut être endommagée. Le carton ondulé peut subir également du flambement local qui n'est pas pris en compte dans le modèle d'homogénéisation actuel. Ces deux derniers points présentent des challenges scientifiques car il n'est pas évident le comportement non linéaire d'une structure 3D comme le carton ondulé.

Bibliographie

- [1] M.A. Sek, Optimization of packaging design through an integrated approach to the measurement and laboratory simulation of transportation hazards, Proceedings of the 12th International Conference on Packaging, International Association of Packaging Research Institutes, Warsaw, Poland, 2001.
- [2] V. Rouillard et R. Richmond, A Novel Approach to Analysing and Simulating Railcar Shock and Vibrations, *Packaging Technologie and Science*. 2007; 20: 17-26.
- [3] Kit L. Yam, *The Wiley encyclopedia of packaging technology*, Third edition, John Wiley & Sons 2009.
- [4] Ran Zhou & all, Effect of transport vibration levels on mechanical damage and physiological responses of Huanghua pears (*Pyrus pyrifolia* Nakai, cv. Huanghua), *Postharvest Biology and Technology* 46 (2007) 20–28.
- [5] M. Van Zeebroeck & all, Impact damage of apples during transport and handling, *Postharvest Biology and Technology* 45 (2007) 157–167.
- [6] Seong-Woo Woo & all, Reliability design of residential sized refrigerators subjected to repetitive random vibration loads during rail transport, *Engineering Failure Analysis* 2011 (18): 1322–1332.
- [7] O'brien M. & all, Causes of fruit bruising on transport trucks. *Hilgardia* 1963, 35(6): 113–124.
- [8] Walter Soroka, *Fundamentals of packaging technology*; Institute of Packaging Professionals, 1999.
- [9] CJ Dodds, JD. Robson, The description of road surface roughness. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, 31 (2): 175–183.
- [10] B. Bruscella, V. Rouillard et M.A. Sek, Analyse of road surface profiles; *Journal of Transportation Engineering*; Janvier/ Février, 1999 :55-59.
- [11] ASTM, Standard test methods for vibration testing of shipping containers; D999-01. American Society for Testing and Materials: West Conshohocken, PA, USA, vol 15.09; 2009.
- [12] A. N. Heath, Modelling and simulation of road surface roughness, *Vehicle System Dynamics*, 1989, 18, 275–284.
- [13] D. M. Xu, A. M. O. Mohamed, R. N. Yong, F. Caporuscio, Development of criterion for road surface roughness based on power spectral density function, *Journal of Terramechanics*, 1992, 29 (4-5), 477-486.

- [14] R. R. Hegmon, A close look at road surfaces, *Public Roads*, 1993, Summer 57 (1), 4-7.
- [15] V. Rouillard, M. Sek, T. Perry, Analysis and simulation road profiles; *Journal of Transportation Engineering*; Mai/ Juin 1996: 241-246.
- [16] V. Rouillard, M. Sek, Statistical modelling of predicted non-stationary vehicle vibration, *Packaging Technology and Science*, 2002, 15: 93-101.
- [17] V. Rouillard, Generating road vibration test schedules from pavement profiles for packaging optimization, *Packaging Technology and Science*, 2008, 21: 501-514.
- [18] ASTM. Standard test method for random vibration testing of shipping containers, D4728-01. American Society for Testing and Materials: West Conshohocken, PA, USA, 2001.
- [19] J. Marcondes, G. Batt, Update on dynamic compression measurement and testing, *Dimensions*. 2003, Clemson University.
- [20] W. D. Godshall, Frequency Response, Damping and transmissibility characteristics of top-loaded corrugated cases, U.S. Dept. of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory, 160, 1971.
- [21] K.P. Thakur, D. Pang, Simulation complex loading patterns in the stack of packages, *Proceedings of the 10th IAPRI World Conference on Packaging Melbourne*, 1997.
- [22] V. Vouillard, M. Sek, S. Crawford, The dynamic behaviour of stacked shipping units during transport. Part 1: model validation, *Packaging Technology and Science*, 2004, 17: 237-247.
- [23] V. Rouillard, M. Sek, The use of intrinsic mode functions to characterize shock and vibration in the distribution environment, *Packaging Technology and Science*, 2005;,18:39-51.
- [24] Phillipe Viot, Hydrostatic compression on polypropylene foam, *International Journal of Impact Engineering*, 2009 (36) 975–989.
- [25] Dong-Mei Wang & all, Energy Absorption Diagrams of Paper Honeycomb Sandwich Structures, *Packaging Technology and Science*, 2009, 22:63-67.
- [26] N. J. Mills, Improving the crushable foam model for low-density polystyrene foam, UK ABAQUS group conference 2003.
- [27] N. J. Mills, Y. Masso-Moreu, Impact compression of polystyrene foam pyramids, *International Journal of Impact Engineering*, 2003 (28) 653–676.

- [28] N. J. Mills, Y. Masso-Moreu, Rapid hydrostatic compression of low-density polymeric foams; *Polymer Testing*, 2004, (23) 313–322.
- [29] P. Loveridge, N. J. Mills, Prediction of packaging cushion curves and Helmet liner response, *Cellular Polymers II Conference*, 1993.
- [30] N. J. Mills, Y. Masso-Moreu, Finite element analysis (FEA) applied to Polyethylene foam cushions in package drop tests, *Packaging Technology and Science*, 2005, 18:29-38.
- [31] N. Talbi, A. Batti, R. Ayad, Y. Q. Guo, An analytical homogenization model for finite element modelling of corrugated cardboard, *Composite Structures*, 88, 280-289, 2009.
- [32] T. M. Nordstrand, Parametric study of the post-buckling strength of structural core sandwich panels, *Composite Structures*, 30, 441-451, 1995.
- [33] T. M. Nordstrand, L. A. Carlsson, Evaluation of transverse shear stiffness of structural core sandwich plates, *Composite Structures*, 37, 145-153, 1997.
- [34] P. Patel, T. Nordstrand, L. A. Carlsson, Local buckling and collapse of corrugated board under biaxial stress, *Composite Structures*, 39, 93-110, 1997.
- [35] T. Nordstrand, On buckling loads for edge-loaded orthotropic plates including transverse shear, *Composite Structures*, 65, 1-6, 2004.
- [36] S. X. Qingxi, M. C. Boyce, D. M. Parks, A constitutive model for the anisotropic elastic–plastic deformation of paper and paperboard, *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 4053-4071, 2002.
- [37] N. Buannic, P. Cartraud, T. Quesnel, Homogenization of corrugated core sandwich panels, *Composite Structures*, 59, 299-312, 2003.
- [38] M. E. Biancolini, C. Brutti, Numerical and Experimental Investigation of the Strength of Corrugated Board Packages, *Packaging Technology and Science*, 16, 47-60, 2003.
- [39] M. E. Biancolini, Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board, *Composite Structures*, 69, 322-328, 2005.
- [40] S. Allaoui & all, Effects of the environmental conditions on the mechanical behaviour of the corrugated cardboard ; *Composites Science and Technology*, 69 (2009) 104–110.
- [41] S. Allaoui & all, Phenomena governing uni-axial tensile behaviour of paperboard and corrugated cardboard ; *Composite Structures*, 87 (2009) 80–92.
- [42] Z. Aboura, N. Talbi, S. Allaoui, M. L. Benzeggagh, Elastic behavior of corrugated cardboard: experiments and modeling, *Composite Structures*, 63, 53-62, 2004.

- [43] T. M. Nordstrand, Parametric study of the post-buckling strength of structural core sandwich panels, *Composite Structures*, 30, 441-451, 1995.
- [44] J. M. Berthelot, *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*, Editions TEC & DOC Lavoisier, 4^{ème} édition, 2005.
- [45] A. Batti, *Modèle d'homogénéisation analytique et analyse non linéaire des structures d'emballage en carton ondulé*, Reims: Université de Reims Champagne-Ardenne, 2009.
- [46] B. Abbès, Y.Q. Guo, Analytic homogenization for torsion of orthotropic sandwich plates: Application to corrugated cardboard, *Composite Structures*, 92, 699-706, 2010.
- [47] A.D. Hammou, B. Abbès, Y.Q. Guo, M. Makhlof, Experimental and numerical simulation of drop tests of corrugated cardboard packaging using analytical homogenized model, *COMPADYN 2011*, Corfu, Greece, 26-28 May 2011.
- [48] P.T.M. Duong, B. Abbès, Y.M. Li, A.D. Hammou, A. Barraji, Y.Q. Guo, Un modèle analytique d'homogénéisation 3D complet pour les plaques composites orthotropes de type carton ondulé, 20^{ème} Congrès Français de Mécanique Besançon, 29 août-2 septembre 2011.
- [49] P.T.M. Duong, B. Abbès, Y.M. Li, A.D. Hammou, M. Makhlof, Y.Q. Guo, An Analytic Homogenisation Model for Shear-Torsion Coupling Problems of Double Corrugated-Core Sandwich Plates, *Journal of Composite Materials*, online 3 June 2012.
- [50] A. D. Hammou, P. T. M. Duong, B. Abbès, M. Makhlof, Y. Q. Guo, Finite element simulation with a homogenization model cardboard packaging, *Mechanics & Industry*, Accepted 4 June 2012.
- [51] SP. Timoshenko, S. Woinowski-Krieger, *Theory of plates and shell*. 2nd edition, McGraw-Hill International Editions ; 1959.
- [52] S. Xia Qingxi & all, A constitutive model for the anisotropic elastic-plastic deformation of paper and paperboard, *International Journal of Solids and Structures*, 39 (2002) 4053–4071.
- [53] G. A. Baum, D. C. Brennam, C. C. Habeger, Orthotropic elastic constants of papers. *Tappi Journal*, 64, 97-101, 1981.
- [54] *Abaqus reference manual v6.7*. Simulia, 2007.
- [55] L.J. Gibson, M. F. Ashby, The mechanics of three-dimensional cellular materials. *Proceeding of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 382, 43–59, 1982.

- [56] Q. M. Li, RAW Mines, Strain measures for rigid crushable foam in uniaxial compression. *Strain*, 38, 132–140, 2002.
- [57] G.C. Machado, M. K. Alves, R. Rossi, CRA Silva, Numerical modelling of large strain behaviour of polymeric crushable foams. *Applied Mathematical Modelling*, 35, 1271–1281, 2011.

