

UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE
L'ADOUR

UNIVERSITÉ IBN ZOHR-AGADIR

THÈSE En Cotutelle

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : **Physique**

présentée et soutenue publiquement

par

Lahcen BAMMOU

le 13 Décembre 2012

Titre:

**Instabilité thermoconvective d'un écoulement
Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni dans un canal
ouvert à surface libre**

Directeurs de thèse: **Yves Le Guer et Brahim Benhamou**

Co-directeurs de thèse: **Serge Blancher et Touria Mediouni**

Jury

M.	Mustapha EL ALAMI, Pr. Univ. Hassan II, Casablanca,	Rapporteur
M.	Abdelkader MOJTABI, Pr. Univ. Paul Sabatier, Toulouse,	Rapporteur
M.	Hassan HAMDI, Pr. Univ. Cadi Ayyad, Marrakech,	Examineur
M.	Xavier NICOLAS, M.C. Univ. Paris-Est, Paris,	Examineur
M.	Yves Le GUER, M.C. HdR UPPA, Pau,	Directeur de thèse
M.	Brahim BENHAMOU, Pr. Univ. Cadi Ayyad, Marrakech,	Directeur de thèse
M.	Serge BLANCHER, M.C. UPPA, Pau ,	Co-directeur de thèse
Mme.	Touria MEDIOUNI, Pr. Univ Ibn Zohr, Agadir,	Co-directeur de thèse

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et au génie Electrique (SIAME), de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour et au Laboratoire de Mécanique, Procédés de l'Energie et de l'Environnement (LMP2E), de l'Université Ibn Zohr d'Agadir-Maroc. Il a été réalisé dans le cadre d'une cotutelle entre l'Université de Pau et des Pays de l'Adour et l'Université Ibn Zohr. Son financement a été assuré par le projet d'action intégrée Maroc-France "Volubilis" n° MA/09/213.

Je tiens à remercier vivement mes directeurs et co-directeurs de thèse :

M. Yves Le Guer, maître de conférences-HDR et M. Serge Blancher, maître de conférences, de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, qui ont accepté de m'intégrer dans leur laboratoire et qui ont participé à ma formation. Leurs conseils avisés ainsi que leur ouverture d'esprit ont largement contribué à l'aboutissement de ce travail. J'ai pu par ailleurs apprécier au cours de notre collaboration leurs qualités humaines et leurs encouragements constants ont été d'un grand soutien. Je les remercie par ailleurs pour la confiance qu'ils m'ont accordée, leur disponibilité ainsi que l'amitié qu'ils m'ont témoignée tout au long de ce travail.

M. Brahim Benhamou, professeur à l'Université Cadi Ayyad, Marrakech et Mme Touria Mediouni, professeur à l'Université Ibn Zohr qui n'ont jamais épargné un effort pour m'aider sur tous les plans.

Je souhaite remercier M. Mustapha El Alami, professeur à l'Université Hassan II, Casablanca et M. Abdelkader Mojtabi, professeur à l'Université Paul Sabatier,

Toulouse, qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail en tant que rapporteurs pour l'examen de ce manuscrit, ensuite pour leur aide fournie au travers des questions et conseils judicieux.

Je tiens de même à remercier M. Hassan Hamdi, professeur à l'Université Cadi Ayyad, Marrakech et M. Xavier Nicolas, maître de conférences à l'Université Paris-Est, pour avoir bien voulu participer au jury de cette thèse.

Ma reconnaissance s'adresse également à M. Kamal El Omari, Maître de Conférences-HDR à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour pour son généreux soutien moral et son aide précieuse, en particulier dans le domaine de la simulation numérique.

Je voudrais ensuite remercier tous les membres du Laboratoire SIAME pour l'amitié qu'ils m'ont témoignée tout au long de ces années de thèse. Mes remerciements s'adressent également aux enseignants et personnels du département Génie Thermique et Energie de l'IUT des Pays de l'Adour pour leur accueil et leur soutien.

Je remercie très cordialement la coopération universitaire franco-marocaine pour avoir financé mes séjours à Pau durant mon parcours de thèse.

Comment oublier mes grands amis avec qui j'ai accumulé de bons souvenirs durant mes trois années de thèse, je les remercie infiniment. Enfin un grand merci aux membres de ma famille qui m'ont soutenus tout au long de ma formation et qui ont largement contribué à créer une atmosphère sereine de travail. Je leur dédie ce travail.

Résumé

Plusieurs études tant numériques qu'expérimentales font état de la présence d'instabilités thermiques dans des films liquides chauffés uniformément par le bas pour des conditions aux limites et d'écoulements particuliers. La présence de ces instabilités modifiera les transferts thermiques associés. Le sujet de ce travail de thèse consiste à étudier numériquement les instabilités thermoconvectives d'un écoulement laminaire tridimensionnel de convection mixte dans un canal horizontal à surface libre. Les variations de la tension de surface avec la température (effet Marangoni ou effet thermocapillaire) sont prises en compte. Bien que d'un intérêt certain pour de nombreuses applications industrielles, cette situation a été très peu étudiée d'un point de vue académique dans la configuration considérée ici. Dans cette configuration plusieurs types de structures thermoconvectives sont susceptibles d'apparaître. Lorsque les forces induites par les courants de convection naturelle, forcée et thermocapillaire sont du même ordre de grandeur, les premiers résultats montrent un développement des instabilités sous forme de rouleaux convectifs longitudinaux stationnaires semblables à ceux rencontrés pour des écoulements de type Poiseuille-Rayleigh-Bénard. A notre connaissance, c'est la première fois que l'écoulement de convection de type Poiseuille-Rayleigh-Bénard associé aux effets Marangoni est étudié. Le nombre et la distribution spatiale des rouleaux convectifs le long du canal dépendent des conditions de l'écoulement. Nous proposons une étude numérique pour ces conditions particulières d'écoulement pouvant conduire à des instabilités avec une évaluation de leur effet sur les transferts de chaleur.

Les équations de Navier-Stokes et de l'énergie sont résolues numériquement par la méthode de volumes finis en prenant en compte les effets thermocapillaires. Les résultats présentés concernent l'influence des paramètres contrôlant l'écoulement (nombres de Reynolds, de Rayleigh, de Biot, de Marangoni et le rapport de forme) sur les motifs de l'écoulement et les échanges thermiques. Dans une seconde partie du travail, complémentaire à la première, une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement dans un canal ouvert à surface libre d'extension latérale infinie est réalisée en utilisant la méthode spectrale de type collocation Chebyshev pour résoudre un système aux valeurs propres. Les diagrammes de stabilité déterminant les seuils des paramètres conduisant à l'instabilité thermoconvective ont été obtenus et analysés, ainsi que les structures spatiales associées.

Abstract

Several studies both numerical and experimental have reported the presence of thermal instabilities in liquid films uniformly heated from below for specific boundary conditions and flows. The presence of these instabilities modifies the associated heat transfer. The subject of this PhD thesis is to study numerically the instability of three-dimensional laminar mixed convection within a liquid flowing on a horizontal channel heated uniformly from below. The upper surface is free and assumed to be flat. The variations of the surface tension with the temperature (Marangoni effect or thermocapillary effect) are taken into account. Although of great interest for many industrial applications, this problem has received little attention from an academic point of view. In this configuration, several types of thermoconvective structures may appear. When the strength of the buoyancy, thermocapillary effects and forced convective currents are comparable, the results show the development of instabilities in the form of steady longitudinal convective rolls similar to those encountered in the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flow. To our knowledge, this is the first time that the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flow associated to the Marangoni effects has been investigated. The number and spatial distribution of the convective rolls along the channel depend on the flow conditions. We propose a numerical study on the flow conditions that could lead to thermal instabilities with an evaluation of their effect on the heat transfer. The coupled Navier-Stokes and energy equations are solved numerically by the finite volume method taking into account the thermocapillary effects. The results presented concern the influence of several control

parameters (the Reynolds, Rayleigh, Biot and Marangoni numbers and the aspect ratio of the channel) on the flow patterns and heat transfer characteristics. In the second part of this work, complimentary to the first, a linear stability analysis of a horizontal liquid film flowing in an open channel, with infinite lateral extension and uniform heating from below, is carried out. An eigenvalue problem is obtained in the course of this analysis which is solved numerically using the Chebyshev collocation spectral method. The stability diagrams determining the threshold parameters leading to thermoconvective instabilities were obtained and analyzed as well as the associated spatial patterns.

Table des figures

I.1	<i>Illustration de l'expérience de Bénard.</i>	34
I.2	<i>Schéma du principe de la convection Marangoni thermique</i>	39
I.3	<i>Représentation schématique de deux types de rouleaux dans l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard : (a) Rouleaux transversaux ; (b) Rouleaux longitudinaux. (figure tirée de Nicolas et al. (2000))</i>	40
I.4	<i>Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB entre deux plaques horizontales infinies : $Ra_{\perp}^c$ nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux transversaux ; $Ra_{//}^c$ nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux longitudinaux. (figure tirée de Nicolas (2002)).</i>	41
I.5	<i>Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale finie. (tiré et modifié de Nicolas et al. (2000))</i> .	42
I.6	<i>Rouleaux longitudinaux de première (à gauche) et de deuxième espèce (à droite) (figure tirée de Yasuo et Yutaka (1966a)).</i>	44
I.7	<i>Courbes de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille vis à vis des rouleaux transversaux et des rouleaux longitudinaux dans la zone d'entrée thermique d'un canal d'extension latérale infinie chauffé uniformément par le bas pour $1 \leq Pr \leq 100$ et $Pe = 0.5$ (tiré de Nicolas (2002) d'après Cheng et Wu (1976)).</i>	49

I.8	<i>Evolution axiale du nombre de Nusselt moyenné transversalement pour un écoulement de rouleaux longitudinaux (- - - : écoulement forcé sans rouleaux) (tiré de Nicolas (2002) d'après Nonino et Giudice (1991)).</i>	51
II.1	<i>Géométrie de la configuration retenue et conditions aux limites.</i>	62
II.2	<i>Une cellule de calcul C et une de ses cellules voisines N_b.</i>	71
II.3	<i>Solution numérique du problème. a) Champ de température dans le plan médian horizontal. b) Champs de température et vecteurs vitesse dans la section transversale à $X = 30$. (figure tirée de Nicolas et al. (2011))</i>	75
II.4	<i>Profils longitudinaux des grandeurs adimensionnées V_X, V_Z et θ (lignes) le long de l'axe ($Y = 5$, $Z = 0.5$) comparés avec la solution de référence de Nicolas et al. (2011) (symboles)..</i>	76
II.5	<i>Profils de température au niveau de la surface libre d'une cavité carrée 2D pour deux nombres de Marangoni ($Ma = 10^3$ et $Ma = 10^4$). Résultats comparés avec ceux donnés par Zebib et al. (1985). Le nombre de Prandtl est fixé à $Pr = 1$.. . . .</i>	77
II.6	<i>Profil longitudinal de la température réduite le long de l'axe $(Y, Z) = (5, 0.5)$ pour différents maillages et pour $Ra = 5000$.</i>	80
II.7	<i>Profil longitudinal de la température réduite le long de l'axe $(Y, Z) = (5, 0.5)$ pour différents maillages et pour $Ra = 12500$.. . . .</i>	80
III.1	<i>Visualisation de l'initiation et du développement des rouleaux longitudinaux pour différentes sections transversales du canal ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Bi = 15$ et $Ma = 500$).</i>	83
III.2	<i>Champ de la température réduite θ au niveau de la surface libre pour différents nombres de Reynolds Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).. . . .</i>	85
III.3	<i>Champ de la température réduite θ au niveau de la surface libre pour différents nombres de Rayleigh Ra ($Bi = 15$, $Re = 15$, $Ma = 0$).</i>	85

III.4	<i>Champ de la température réduite θ au niveau de la surface libre dans un canal de longueur $X = 80$ pour $Ra = 2500$ ($Bi = 15$, $Re = 15$, $Ma = 0$).</i>	86
III.5	<i>Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} pour différents nombres de Reynolds Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).</i>	88
III.6	<i>Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} pour différents nombres de Rayleigh Ra ($Bi = 15$, $Re = 15$, $Ma = 0$).</i>	88
III.7	<i>Variation transversale du nombre de Nusselt local Nu_l à la section droite $X = 25$ pour différents nombres de Biot ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).</i>	90
III.8	<i>Variation transversale du nombre de Nusselt local Nu_l à la section droite $X = 40$ pour différents nombres de Biot ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).</i>	91
III.9	<i>Variation longitudinal du nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} pour différents nombres de Biot ($Ra = 5000$, $Re = 15$ et $Ma = 0$).</i>	93
III.10	<i>Evolution des rouleaux longitudinaux dus aux effets Marangoni dans la section transversale à la position $X = 40$ ($Re = 15$, $Bi = 15$ et $Ra = 0$).</i>	94
III.11	<i>Coupes transversales de l'écoulement à $X = 5$, $X = 8$, $X = 15$ et $X = 40$ ($Ra = 0$, $Re = 15$, $Bi=15$ et $Ma = 3000$). Les vecteurs vitesse sont représentés ainsi que le champ de la température. Seulement les rouleaux au voisinage de la paroi verticale sont représentés.</i>	96
III.12	<i>Variation de la vitesse transversale V_y au niveau de la surface libre ($Z = 1$) et à $X = 30$ pour différents nombres de Marangoni Ma ($Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).</i>	97
III.13	<i>Coupe transversale de l'écoulement à $X = 30$ pour différents nombres de Marangoni Ma ($Ra = 5000$, $Re = 15$ et $Bi = 15$).</i>	98
III.14	<i>Variation du nombre de Nusselt moyen Nu_m au niveau de la paroi inférieure chauffée en fonction du nombre de Marangoni Ma ($Ra = 5000$, $Re = 15$ et $Bi = 15$).</i>	99

III.15	<i>Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal pour $Ma = 800$ et $Ma = 1100$ ($Ra = 5000$, $Re = 15$ et $Bi = 15$).</i>	100
III.16	<i>Lignes de courant au niveau de la section droite située dans la région convectivement développée pour différents rapports de forme ($Ma = 0$, $Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).</i>	101
III.17	<i>Lignes de courant au niveau de la section droite située dans la région convectivement développée pour différents rapports de forme ($Ma = 500$, $Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).</i>	101
III.18	<i>Lignes de courant au niveau de la section droite située dans la région convectivement développée pour différents rapports de forme ($Ma = 2000$, $Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).</i>	102
III.19	<i>Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal pour différents rapports de forme Γ et pour $Ma = 0$ ($Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).</i>	102
III.20	<i>Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal pour différents rapports de forme Γ et pour $Ma = 2000$ ($Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).</i>	103
III.21	<i>Evolution du nombre de Nusselt moyen N_m en fonction du nombre de Marangoni pour différents rapports de forme Γ ($Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).</i>	103
IV.1	<i>Représentation schématique de la configuration d'étude et des conditions aux limites.</i>	108
IV.2	<i>Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c d'apparition des rouleaux transversaux en fonction du nombre de Reynolds pour un écoulement de PRB. Comparaison avec les résultats numériques obtenus par Nicolas (2002) ($Pr = 1$).</i>	119
IV.3	<i>Comparaison des résultats numériques obtenus pour la courbe de stabilité marginale avec la solution analytique (Colinet et al. (2001)) pour $Ra = 0$, $Bi = 2$ et $Pr = 7$.</i>	121

IV.4	<i>Courbes de stabilité marginale obtenues dans le plan $(Ra-k_y)$ pour le développement des rouleaux longitudinaux en fonction de différents nombres de Biot et pour $Ma = 0$, $Pr = 7$ and $Re = 15$.</i>	124
IV.5	<i>Nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Biot pour $Ma = 0$, $Pr = 7$ et $Re = 15$.</i>	124
IV.6	<i>Nombre d'onde critique transversal en fonction du nombre de Biot pour $Ma = 0$, $Pr = 7$ et $Re = 15$.</i>	126
IV.7	<i>Composantes transversales de la vitesse $(\hat{V}_y, \hat{V}_z)$ (flèches) et isothermes de la température $\hat{\theta}$ (lignes) pour le mode propre des rouleaux longitudinaux le plus instable ($Ra_c = 1247$, $k_c = 1.2$, $Ma = 0$, $Bi = 2$, $Pr = 7$ et $Re = 15$).</i>	127
IV.8	<i>Composantes transversales de la vitesse $(\hat{V}_y, \hat{V}_z)$ (flèches) et isothermes de la température $\hat{\theta}$ (lignes) pour le mode propre le plus instable des rouleaux longitudinaux de Poiseuille-Rayleigh-Bénard ($Ra_c = 1707.8$, $k_c = 1.558$, $Pr = 7$ et $Re = 15$).</i>	128
IV.9	<i>Evolution du nombre de Marangoni critique en fonction du nombre de Biot pour $Ra = 0$, $Pr = 7$ et $Re = 15$.</i>	129
IV.10	<i>Nombre d'onde critique transversal en fonction du nombre de Biot pour $Ra = 0$, $Pr = 7$ et $Re = 15$.</i>	131
IV.11	<i>Composantes transversales de la vitesse $(\hat{V}_y, \hat{V}_z)$ (flèches) et isothermes de la température $\hat{\theta}$ (lignes) pour le mode propre le plus instable des rouleaux longitudinaux.</i>	132
IV.12	<i>Composantes transversales de la vitesse $(\hat{V}_y, \hat{V}_z)$ (flèches) et isothermes de la température $\hat{\theta}$ (lignes) pour le mode propre le plus instable des rouleaux longitudinaux induits par la convection de Marangoni seule pour différents nombres de Biot. (a) $Bi = 0.5$, (b) $Bi = 2$ et (c) $Bi = 100$.</i>	133
IV.13	<i>Evolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Biot pour différents nombres de Marangoni ($Pr = 7$ et $Re = 15$).</i>	135

IV.14	<i>Evolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Marangoni pour différents nombres de Biot ($Pr = 7$ et $Re = 15$).</i>	135
IV.15	<i>Spectre des plus grandes valeurs propres dans le cas $Re = 1$, $Pr = 7$, $Bi = 2$ et $Ma = 0$. La plus grande valeur est indiquée par une flèche.</i>	136
IV.16	<i>Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Biot Bi pour l'instabilité sous forme de rouleaux longitudinaux et pour l'instabilité sous forme de rouleaux transversaux ($Pr = 7$, $Re = 1$ et $Ma = 0$).</i>	138
IV.17	<i>Evolution du nombre d'onde critique k_x^c associé aux rouleaux transversaux en fonction du nombre de Biot Bi ($Pr = 7$, $Re = 1$ et $Ma = 0$).</i>	139
IV.18	<i>Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Reynolds Re pour différentes valeurs de Bi ($Pr = 7$, $Ma = 0$). Comparaison au cas de l'écoulement PRB.</i>	140
IV.19	<i>Structure de l'écoulement représentée pour les modes critiques ($\hat{V}_x, \hat{V}_z$) (vecteurs) et $\hat{\theta}$ (contours) dans le cas de l'écoulement à surface libre ($Ra_c = 1133.9$, $k_x^c = 1.33$, $Re = 1$, $Pr = 7$, $Bi = 100$ et $Ma = 0$).</i>	142
IV.20	<i>Structure de l'écoulement représentée pour les modes critiques ($\hat{V}_x, \hat{V}_z$) (vecteurs) et $\hat{\theta}$ (contours) dans le cas de l'écoulement de PRB ($Ra_c = 1729.7$, $k_x^c = 1.56$, $Re = 1$, $Pr = 7$ et $Ma = 0$).</i>	142
IV.21	<i>Evolution du nombre de Marangoni critique Ma_c d'apparition des rouleaux transversaux en fonction du nombre pour $Re = 1$ et $Re = 15$. Comparaison avec le cas de l'instabilité donnant des rouleaux longitudinaux.</i>	143
IV.22	<i>Evolution du nombre de Marangoni critique Ma_c d'apparition des rouleaux transversaux en fonction du nombre de Reynolds pour $Bi = 20$, $Pr = 7$ et $Ra = 0$.</i>	144
IV.23	<i>Evolution du nombre d'onde critique k_x^c en fonction du nombre de Reynolds pour $Bi = 20$ et $Pr = 7$.</i>	145

IV.24	<i>Evolution du nombre de Marangoni critique Ma_c en fonction du nombre de Prandtl pour $Bi = 20$, $Re = 1$ et $Ra = 0$.</i>	145
IV.25	<i>Evolution du nombre d'onde critique k_x^c en fonction du nombre de Prandtl pour $Bi = 20$ et $Re = 1$.</i>	146
IV.26	<i>Structure de l'écoulement représentée pour les modes critiques $(\hat{V}_x, \hat{V}_z)$ (vecteurs) et $\hat{\theta}$ (contours) dans le cas de l'écoulement à surface libre pour différents nombres de Biot ($Ra = 0$).</i>	147
IV.27	<i>Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Biot pour différents nombres de Marangoni ($Re = 1$, $Pr=7$).</i>	148
IV.28	<i>Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Marangoni ($Pr = 7$ et $Bi = 5$).</i>	149

Liste des tableaux

I.1	<i>Synthèse des principales conclusions trouvées de la revue bibliographique de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard.</i>	53
II.1	<i>Résultats du cas test de l'écoulement de PRB comparés avec les solutions de référence du Benchmark de Nicolas et al. (2011)</i>	75
II.2	<i>Résultats du cas test de validation pour un écoulement thermocapillaire dans une cavité carrée 2D. Comparaison avec les résultats de la littérature (Carpenter et Homsy, 1990; Kuhlmann et Albensoeder, 2008; Xu et Zebib, 1998; Carpenter et Homsy, 1989). $u(0,0.5)$ est la vitesse au centre de la surface libre, $Nu_{x=0.5}$ et $Nu_{x=-0.5}$ sont les valeurs moyennes de nombre de Nusselt sur les deux parois latérales de la cavité.</i>	78
II.3	<i>Comparaison du nombre de Nusselt moyen Nu_m pour différentes résolutions du maillage et un nombre de Rayleigh $Ra = 5000$.</i>	79
III.1	<i>Evolution du nombre de Nusselt moyen Nu_m pour différents nombres de Reynolds Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).</i>	89
III.2	<i>Evolution du nombre de rouleaux pour différentes valeurs du rapport de forme Γ et du nombre de Marangoni Ma.</i>	101
IV.1	<i>Valeurs numériques des nombres de Rayleigh critique en fonction du nombre de Reynolds pour l'écoulement de PRB. Comparaison avec les résultats numériques obtenus par Nicolas (2002) ($Pr = 1$).</i>	119

IV.2	<i>Comparaison des nombres de Rayleigh critiques obtenus dans cette étude avec ceux obtenus sans convection forcée par Nield (1964).</i>	125
IV.3	<i>Comparaison des nombres de Rayleigh critique Ra_c et des nombres d'onde associés k_y^c pour l'apparition des rouleaux longitudinaux obtenus dans le cadre de cette étude avec ceux obtenus pour l'écoulement de PRB.</i>	126
IV.4	<i>Comparaison des nombres de Marangoni critiques obtenus dans cette étude avec ceux obtenus sans convection forcée par Nield (1964).</i>	130
IV.5	<i>Valeurs numériques des nombres de Rayleigh critique en fonction du nombre de Biot pour l'instabilité donnant des rouleaux transversaux et l'instabilité donnant des rouleaux longitudinaux ($Re = 1$, $Pr = 7$ et $Ma = 0$).</i>	138
IV.6	<i>Comparaison des nombres de Rayleigh critiques obtenus pour l'écoulement à surface libre avec rouleaux transversaux ($Bi = 100$) avec ceux obtenus pour l'écoulement de PRB.</i>	141

Table des matières

Nomenclature	23
Introduction	27
I Revue bibliographique	31
I.1 Introduction	31
I.2 Phénomènes physiques étudiés	32
I.2.1 Convection naturelle, forcée et mixte	32
I.2.2 Effet thermocapillaire	37
I.3 Ecoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard	39
I.4 Convection de Marangoni : effet thermocapillaire	52
I.5 Combinaison de la convection naturelle et de l'effet thermocapillaire	57
I.6 Conclusion	60
II Modélisation physique et méthode numérique	61
II.1 Configuration de l'écoulement et hypothèses simplificatrices	62
II.2 Equations de l'écoulement	65
II.3 Conditions aux limites	65
II.4 Adimensionnement du modèle	67
II.5 Méthode numérique	69
II.6 Validation	74
II.6.1 Cas de l'écoulement Poiseuille-Rayleigh-Bénard	74

II.6.2	Cas de la convection thermocapillaire	76
II.7	Etude de l'influence du maillage	78
III	Résultats de la simulation numérique tridimensionnelle	81
III.1	Formation et évolution spatiale des rouleaux longitudinaux	82
III.2	Compétition entre la flottabilité et l'écoulement forcé	84
III.3	Effet du nombre de Biot	89
III.4	Effet du nombre de Marangoni	92
III.5	Effet du rapport du forme du canal	99
III.6	Conclusion	104
IV	Analyse de stabilité linéaire	107
IV.1	Calcul de l'état de base	108
IV.2	Adimensionnement du modèle	110
IV.3	Stabilité linéaire	111
IV.4	Méthode numérique	115
IV.5	Validation	117
IV.5.1	Cas test Poiseuille-Rayleigh-Bénard (parois rigides)	118
IV.5.2	Cas de la convection de Marangoni	120
IV.6	Résultats de l'analyse de stabilité	121
IV.6.1	Instabilité donnant des rouleaux longitudinaux	122
IV.6.2	Instabilité donnant des rouleaux transversaux	136
IV.7	Conclusion	149
	Conclusion et perspectives	153
	Bibliographie	169
A	Liste des publications	171
B	Publication	173

Nomenclature

Caractères latins

A_f	aire de la face f	m^2
c_p	chaleur spécifique	$Jkg^{-1}K^{-1}$
$\vec{d}$	vecteur joignant les centres de deux cellules voisines	
E_c	énergie cinétique	j
$\vec{g}$	accélération de pesanteur	$m.s^{-2}$
h	coefficient de transfert thermique	$W.m^{-2}.K^{-1}$
H	hauteur du canal	m
$\vec{k}$	vecteur unitaire selon l'axe $\vec{z}$	
k	nombre d'onde	
k_x	nombre d'onde longitudinal	
k_y	nombre d'onde transversal	
$\vec{n}$	vecteur unitaire normale	
N_b	nombre de cellules environnantes	
p	pression	Pa
P	pression adimensionnée	
S	surface	
t	temps adimensionné	
T	température	K
T_0	température de l'air ambiant	K
$\vec{U}$	vecteur vitesse	$m.s^{-1}$

U_m	vitesse moyenne d'entrée	$m.s^{-1}$
$\vec{v}$	vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
$\vec{V}$	vecteur vitesse adimensionné	
V	volume de la cellule de calcul	m^3
v_x, v_y, v_z	composantes du vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
V_x, V_y, V_z	composantes adimensionnées du vecteur vitesse	
x, y, z	coordonnées spatiales	m
X, Y, Z	coordonnées spatiales adimensionnées	
ΔP_{io}	différence de pression entre les sections d'entrée et de sortie	Pa

Nombres adimensionnels

Bi	nombre de Biot	$Bi = \frac{hH}{\lambda}$
Bd	nombre de Bond dynamique	$Bd = \frac{\rho g H^2}{\sigma}$
Cr	nombre de Crispation	$Cr = \rho \nu \alpha / \sigma H \ll 1$
Ga	nombre de Galilée	$Ga = g H^3 / \nu \alpha \gg 1$
Ma	nombre de Marangoni	$Ma = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\Delta T H}{\mu \alpha}$
Nu	nombre de Nusselt	$Nu = -(\frac{\partial \theta}{\partial Z})_{Z=0}$
Pe	nombre de Peclet	$Pe = \frac{U_m H}{\alpha}$
Pr	nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
Ra	nombre de Rayleigh	$Ra = \frac{g \beta (T_h - T_0) H^3}{\nu \alpha}$
Re	nombre de Reynolds	$Re = \frac{U_m H}{\nu}$
Re_{th}	nombre de Reynolds thermocapillaire	$Re_{th} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\Delta T H}{\rho \nu^2}$
Ri	nombre de Richardson	$Ri = Ra / (Pr Re^2)$

Caractères grecques

α	diffusivité thermique	$m^2.s^{-1}$
β	coefficient dilatation thermique	K^{-1}

Γ	rapport de forme transversale	
λ	conductivité thermique	$W.m^{-1}K^{-1}$
Λ	coefficient généralisé de diffusion	
μ	viscosité dynamique	$Pa.s$
ν	viscosité cinématique	$m^2.s^{-1}$
ϕ	variable générale	
ρ	masse volumique	$kg.m^{-3}$
θ	température réduite	
σ	tension superficielle	$N.m^{-1}$

Indices/Exposants

0	valeurs de référence
c	valeur critique
C	noeud du centre
CD	valeur par différentiation centrée
f	face de la cellule
HR	haute résolution
l	local
m	moyen
mt	moyen transversal
N_b	les noeuds voisins
UP	valeur amont
'	perturbation
^	amplitude de la perturbation

Introduction

Les écoulements de films liquides avec transfert thermique sont omniprésents dans de nombreux phénomènes naturels et procédés industriels. Citons à titre d'exemple le refroidissement par écoulement de film liquide, les échangeurs de chaleur compacts, la réalisation de dépôts et de revêtements par séchage de solutions polymère/solvant. Une bonne connaissance de ces processus et de leurs conditions opératoires est nécessaire pour une approche efficace de la gestion énergétique ainsi que pour l'amélioration des transferts thermiques mis en jeu. La convection thermique étant le mode de transfert de chaleur le plus répandu, il reste néanmoins le moins bien connu par rapport aux deux autres modes de transfert thermique, à savoir la conduction et le rayonnement. Cela s'explique par le fait que ce mode de transfert de chaleur implique un mouvement de fluide dont la compréhension nécessite une bonne connaissance de la mécanique des fluides en plus de la compréhension de l'aspect énergétique des phénomènes physiques mis en jeu.

Dans certaines conditions d'écoulement, une perturbation très faible conduit à l'élaboration d'une série de comportements spatio-temporels hydrodynamiques rendant l'écoulement instable. Ainsi, la compréhension des différents mécanismes à l'origine d'instabilités hydrodynamiques revêt une importance capitale pour les sciences fondamentales ainsi que pour relever certains enjeux industriels. L'exemple le plus connu d'instabilités hydrodynamiques qui peuvent se développer dans les écoulements est celui de Rayleigh-Bénard pour lequel une couche horizontale de

liquide chauffée par le bas présente une stratification de densité potentiellement instable dans un champ de gravité vertical. Les premières études de ce type d'instabilité étaient les expériences d'Henri Bénard (1900), et très peu de temps après le développement de la théorie linéaire de Lord Rayleigh. Le système convectif expérimental étudié par Bénard était en réalité plus complexe qu'il ne le pensait. En effet, de nombreuses études et expériences menées par la suite ont démontré que les instabilités de Bénard étaient également liées à un autre mécanisme : la variation de la tension superficielle avec la température. Ce phénomène est appelé effet thermocapillaire ou effet Marangoni.

Lorsqu'un gradient de pression horizontal entraîne en écoulement le fluide chauffé uniformément par le bas et refroidi par le haut, on a affaire à un autre type d'instabilité connue sous le nom de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Dans cette configuration d'écoulement, plusieurs structures convectives peuvent apparaître sous la forme de rouleaux longitudinaux, de rouleaux transversaux ou de structures thermoconvectives plus complexes. Le développement de techniques mathématiques non-linéaires et de méthodes de calcul numérique performantes, couplés à une augmentation continue de la puissance des ordinateurs, a rendu notre compréhension de l'apparition et de l'évolution des structures thermoconvectives beaucoup plus étendue. Des progrès considérables ont été réalisés durant ces vingt dernières années dans ce domaine.

Ce travail de thèse est entrepris pour étudier numériquement la stabilité d'un écoulement thermoconvectif en convection mixte combiné aux effets thermocapillaires dans un canal horizontal à surface supérieure libre et chauffé uniformément par le bas. Lorsque les forces induites par les courants de convection naturelle et forcée sont du même ordre de grandeur, des instabilités se développent sous la forme de rouleaux convectifs semblables à ceux rencontrés pour des écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. L'étude des instabilités hydrodynamiques est essentielle dans la caractérisation de ces écoulements. Les écoulements instables, voire turbulents, peu-

vent présenter, dans le cas d’instabilités thermoconvectives par exemple, l’avantage d’offrir une meilleure homogénéisation et une amélioration des transferts thermiques au sein du fluide. L’originalité de ce travail réside dans la prise en compte des effets thermocapillaires (effet Marangoni) et l’étude de leur influence sur la génération et l’évolution des structures thermoconvectives créées dans l’écoulement ainsi que la prédiction des transferts thermiques associés. Quand une surface libre pour le liquide est présente, les variations de tension de surface résultant de l’existence de gradients de température au niveau de la surface peuvent induire un mouvement au sein du fluide, appelé écoulement thermocapillaire. A notre connaissance, l’étude de la combinaison entre convection mixte et effet thermocapillaire n’a pas été abordée dans la littérature (pour un écoulement de film liquide).

Dans cette perspective, nous allons nous intéresser à analyser numériquement l’influence des paramètres de contrôle du problème sur l’apparition et le développement des instabilités thermoconvectives et sur les transferts thermiques dans le fluide. La résolution numérique permettra, d’une part, une optimisation aisée des conditions opératoires, et d’autre part, la maîtrise de l’intensité des transferts de chaleur par la connaissance de l’impact du phénomène complexe d’instabilité sur l’écoulement. Pour étudier ce problème deux voies principales vont être suivies : celle de la simulation numérique tridimensionnelle directe et celle de l’analyse de la stabilité linéaire du système. Dans la partie simulation numérique seule l’instabilité donnant lieu à des rouleaux longitudinaux stationnaires sera étudiée, alors que dans la partie analyse de stabilité linéaire nous nous intéressons également, en plus des rouleaux longitudinaux, à l’instabilité donnant des rouleaux transversaux. Les principaux résultats obtenus dans cette étude vont être comparés au célèbre problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard que nous allons définir au premier chapitre.

Le premier chapitre de ce rapport est consacré à la littérature sur les instabilités thermoconvectives. L’accent sera mis sur trois points : l’étude des instabilités dues

aux effets thermogravitaires, l'étude des instabilités dues aux effets thermocapillaires et l'étude de la combinaison de ces deux effets sur la stabilité de l'écoulement (convection Rayleigh Bénard Marangoni).

Le deuxième chapitre développe la formulation mathématique du modèle physique de l'écoulement de convection mixte combiné aux effets thermocapillaires (écoulement Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni PRBM). Le comportement du fluide est modélisé par les équations de Navier-Stokes, de l'énergie et les conditions aux limites adéquates sont écrites. La méthode des volumes finies utilisée dans le code numérique est présentée. Les résultats obtenus par ce code sont comparés avec des travaux de la littérature afin d'assurer leur validité.

Le troisième chapitre est consacré aux résultats de la simulation numérique tridimensionnelle de l'écoulement PRBM. L'influence des différents paramètres de contrôle sur le développement spatial des rouleaux longitudinaux et les transferts thermiques est analysé.

Le dernier chapitre présente l'étude de la stabilité linéaire de l'écoulement dans un canal horizontal d'extension latérale infinie. La méthode de collocation Chebyshev utilisée pour résoudre le système aux valeurs propres est présentée et les résultats obtenus sont validés en les comparant avec ceux de la littérature. Cette analyse de stabilité a permis l'obtention de diagrammes de stabilité de l'écoulement vis-à-vis des rouleaux longitudinaux et transversaux ainsi que des structures spatiales associées.

Finalement, nous terminons par une conclusion générale et dressons plusieurs perspectives pour la poursuite de ce travail de recherche tant sur le plan numérique qu'expérimental.

CHAPITRE I

Ecoulement thermogravitaire et écoulement thermocapillaire : revue bibliographique

I.1. Introduction

Le transfert de chaleur par convection thermique occupe une place importante dans les activités de recherche de ces dernières années. En effet, de nombreux procédés industriels mettent en jeu des fluides qui peuvent être le siège de gradients thermiques. Dans certaines conditions particulières, les forces de flottabilité provoquent le développement d'instabilités thermoconvectives qui constituent la première étape de transition vers la turbulence et contribuent à l'amélioration du transfert de chaleur (Imura et al., 1978). Dans cette thèse, nous considérons le cas de la convection mixte dans l'écoulement d'un film liquide avec surface libre où les effets thermocapillaires sont présents. Cette configuration originale d'écoulement est la combinaison de deux autres configurations qui sont largement étudiées. La première

configuration est celle de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard, la seconde configuration correspond à l'écoulement thermocapillaire sans convection forcée. L'objectif de ce chapitre est de recenser les principaux travaux disponibles dans la littérature concernant les instabilités thermoconvectives. Nous allons d'abord rappeler les notions physiques spécifiques liées aux phénomènes pris en compte dans cette étude : convection naturelle, forcée, mixte et effet thermocapillaire. Nous présenterons ensuite, en nous basant sur une étude bibliographique, plus en détail les deux configurations de l'écoulement qui constituent la base de notre étude à savoir l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard et l'écoulement thermocapillaire. Nous présentons aussi les travaux qui ont traité la combinaison entre la convection naturelle et les effets thermocapillaires.

I.2. Phénomènes physiques étudiés

I.2.1. Convection naturelle, forcée et mixte

La convection est une notion très ancienne remontant au moins au XVIII^{ème} siècle puisqu'elle était évoquée par Lomonossov et Hadley pour expliquer les mouvements atmosphériques. La convection thermique caractérise la propagation de la chaleur dans un fluide, gaz ou liquide, dont les molécules sont en mouvement macroscopique. Les applications du transfert de chaleur par convection sont très nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur. On distingue trois types de convection : la convection naturelle qui est occasionnée par la poussée d'Archimède, la convection forcée qui

est due à une force extérieure et la convection mixte qui est due aux effets couplés de la poussée d'Archimède et de la force extérieure.

La convection naturelle ou libre est le régime d'écoulement obtenu lorsque l'on chauffe un fluide sans qu'il n'y ait d'écoulement extérieur imposé. C'est donc la force d'Archimède provoquée par les variations de densité induites par le chauffage qui fait se déplacer le fluide. La thermique et la dynamique sont alors très fortement couplées. Les écoulements de convection naturelle se répartissent en quatre grandes catégories : panaches lorsqu'il n'y a pas de parois à proximité, convection naturelle externe en présence d'une paroi, convection naturelle interne dans des espaces confinés comportant une entrée et une sortie distinctes, et enfin convection naturelle dans des enceintes closes ou partiellement ouvertes. De nombreuses recherches sont effectuées sur les cellules de convection thermique dans les films liquides connues sous le nom de cellules de Bénard en l'honneur d'Henri Bénard qui les a observés pour la première fois en 1900. Bénard a observé des cellules de convection ayant la forme de cylindres verticaux de base polygonale, qui prennent naissance après la perte de stabilité de la solution de diffusion pure. Peu après Lord Rayleigh a donné une première interprétation physique des résultats de Bénard. Selon Rayleigh, l'apparition de la convection naturelle dans une couche infinie est liée au dépassement d'une valeur critique du gradient thermique imposé. Ce problème, appelé problème de Rayleigh-Bénard, concerne la stabilité et le mouvement d'un fluide, visqueux et incompressible, confiné entre deux plaques horizontales qui sont maintenues à des températures uniformes distinctes tel qu'illustré à la Figure I.1.

La convection Rayleigh-Bénard peut se produire quand une couche de fluide est chauffée par le bas et refroidie par le haut. Un gradient vertical de température est alors créé, avec des couches supérieures de fluide plus lourdes que les couches inférieures. Lorsqu'un fluide est chauffé par le bas : la partie inférieure du fluide se dilate et devient moins dense que les couches qui la surplombent. La partie inférieure

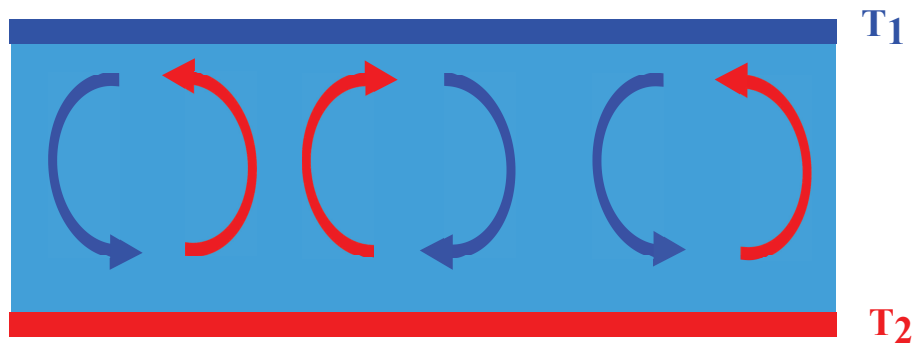


Figure I.1.: *Illustration de l'expérience de Bénard.*

plus chaude et plus légère a tendance à s'élever tandis que la partie supérieure plus froide et dense a tendance à s'enfoncer. La force qui induit le mouvement convectif est la poussée d'Archimède, et l'intensité de cette force est déterminée par la différence de température entre le haut et le bas de la couche de fluide considérée. Toute la complexité du phénomène vient du fait que le champ de température est fortement modifié par le mouvement convectif lui-même, qui transporte la chaleur de bas en haut dans le système que l'on considère. Ainsi, la force qui produit le mouvement est modifiée par le mouvement lui-même. Ceci est caractéristique d'un système non-linéaire, qui est bien souvent synonyme de nombreuses difficultés. La situation dans laquelle le fluide reste immobile et sa densité stratifiée, est appelé l'état conductif. Si $T_1 > T_2$, la poussée d'Archimède a tendance à maintenir le liquide froid vers le bas (surface froide). Dans ce cas, la gravité a une fonction stabilisante et les effets de la poussée d'Archimède sont nuls. Au contraire, si $T_1 < T_2$, la poussée d'Archimède a tendance à faire monter le liquide; la gravité est alors déstabilisante et des tourbillons, dit tourbillons convectifs de Rayleigh-Bénard, peuvent apparaître sous certaines conditions. Dans ce dernier cas, à partir d'un certain écart de température $\Delta T = T_2 - T_1$, les forces de poussée deviennent suffisamment importantes pour vaincre les forces d'origine visqueuse et induire un mouvement ascendant des particules chaudes et descendant des particules froides. La diffusion thermique tend aussi à limiter le déplacement des particules. La compétition en-

tre ces différentes forces est mise en évidence à travers un nombre sans dimension appelé nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{\text{Poussée d'Archimède}}{\text{Force visqueuse} \times \text{Diffusion thermique}} = \frac{g\beta(T_2 - T_1)H^3}{\nu\alpha} \quad (\text{I.1})$$

Le nombre de Rayleigh permet de déterminer la transition entre un régime purement conductif (pour lequel il n'y a pas apparition des rouleaux de convection) et un régime convectif. Lorsque ce nombre est supérieur à une valeur critique Ra_c , la convection entre en jeu et des structures tourbillonnaires peuvent apparaître. Plusieurs études, théoriques, expérimentales et numériques, de la convection de Rayleigh Bénard ont été réalisées afin de déterminer le nombre de Rayleigh critique. Pour une couche infinie de fluide entre deux plaques infinies, les mouvements convectifs apparaissent au-dessus du nombre critique $Ra_c = 1707.8$ (Chandrasekhar, 1961; Drazin et Reid, 2004). Si le fluide est confiné latéralement par des parois rigides et parfaitement isolantes, le nombre de Rayleigh critique augmente généralement en raison de l'effet stabilisant du confinement (Segel, 1969; Venturi et al., 2010).

La convection forcée est la convection pour laquelle le mouvement est provoqué par un procédé mécanique indépendant des phénomènes thermiques (pompes, ventilateurs, etc...). C'est donc un gradient de pression extérieur qui provoque les déplacements des particules du fluide. Ce mouvement de fluide est responsable du transport de la chaleur. L'écoulement de la convection forcée d'un fluide incompressible peut être résolu sans faire référence à la distribution de la température dans le fluide. Ainsi, on peut d'abord établir le champ de la vitesse et ensuite l'utiliser dans l'équation de l'énergie comme information connue pour trouver la distribution de la température. La convection forcée est caractérisé par des forces d'Archimède négligeables. Cela se traduit par un nombre de Richardson très faible :

$$Ri = \frac{g\beta(T_2 - T_1)H}{V^2} \quad (\text{I.2})$$

Selon la géométrie de l'écoulement, on distingue deux types de configurations : la convection forcée externe (écoulement le long d'une plaque plane par exemple) et la convection forcée interne (écoulement dans les conduites).

La convection mixte est la convection pour laquelle les mécanismes de la convection forcée et de la convection libre coexistent avec des ordres de grandeur comparables. Le principal effet des forces de flottabilité est de modifier les distributions de vitesse et de température ainsi que d'autres paramètres physiques de leurs valeurs dans le cas de convection forcée pure. Par conséquent, le transfert de chaleur par convection mixte a des caractéristiques et des propriétés qui sont complètement différentes de celles du cas de la convection forcée pure ou du cas de la convection libre. Les deux mécanismes de la convection forcée et naturelle vont s'aider ou se contrarier selon le sens relatif du mouvement forcé par rapport au mouvement gravitaire, qui jouera donc un rôle essentiel. Si les effets de la pesanteur s'opposent au mouvement forcé, l'écoulement est freiné, le transfert thermique a tendance à diminuer et on parle de convection mixte contrariée. Si l'écoulement forcé est de même sens que l'écoulement libre (cas de la plaque verticale chauffée, dans un fluide lui-même en mouvement ascendant) il se produit une amplification des transferts par rapport à la convection forcée seule et on parle alors de convection mixte aidée.

Parmi les exemples de la convection mixte, on peut citer : les écoulements lents en canalisation (comme dans les radiateurs à eau) ou le long d'une paroi, les jets anisothermes (chauffage ou climatisation des locaux, panaches de fumée,...), les écoulements atmosphériques et les courants marins (qui sont importants pour les questions de climatologie et de pollution), et plus généralement beaucoup d'écoulements fortement anisothermes.

Plusieurs travaux analytiques, numériques et expérimentaux impliquant le transfert de chaleur par convection mixte dans des géométries différentes ont été rapportées dans la littérature. Par exemple, les transferts de chaleur et de masse par

convection mixte d'un écoulement laminaire dans une conduite verticale mouillée a été analysée par Lin et al. (1988) et Tsay et Yan (1991). Ils ont montré que les forces de flottabilités thermiques et massiques ont un grand effet pour de faibles nombres de Reynolds dans le cas de températures d'entrée élevées. La convection mixte dans un écoulement pleinement développé dans des conduits rectangulaires horizontaux a été étudiée par Cheng et Hwang (1969) et Chou et Hwang (1984). Un important intérêt dans la convection mixte est donné au développement de structures thermoconvectives dans des canaux horizontaux chauffés uniformément par le bas. Ce problème est connu sous le nom d'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard qui fera l'objet d'une étude bibliographique détaillée dans ce qui suit.

I.2.2. Effet thermocapillaire

Les molécules d'une phase liquide au repos (phase condensée) sont soumises à des forces cohésives avec leurs voisines. Dans le cas où le liquide possède une surface libre, les molécules loin de la surface possèdent de nombreuses voisines et donc une énergie d'interaction importante. Par contre, les molécules à la surface ont beaucoup moins d'énergie d'interaction. Créer une interface revient donc à perdre une partie de cette énergie de cohésion. Pour pallier ce déficit d'énergie, une énergie de surface entre en jeu. Cette énergie est appelée énergie de surface ou tension superficielle, elle est proportionnelle à l'aire de l'interface S et à un coefficient dénommé tension de surface :

$$E = \sigma S \quad (\text{I.3})$$

On retiendra donc qu'on associe à une interface entre deux milieux une énergie potentielle surfacique d'interface, proportionnelle à l'aire de celle-ci. La tension de surface est à l'origine des phénomènes capillaires qui sont omniprésents à l'échelle sub-millimétrique : formation des gouttes de pluie, imprégnation de matériaux poreux

ou sustentation d'insectes à la surface d'une mare.

La tension superficielle est une propriété intensive, qui représente une valeur caractéristique pour chaque liquide. Lorsque l'interface est isotherme, elle a la même valeur en tout point de l'interface, et elle s'exprime, dans le système SI, en Nm^{-1} . En plus d'être propre à chaque liquide, la tension superficielle dépend de la température et, dans le cas de mélanges, de la concentration. Ces variations peuvent être à la base de mouvements de convection, qui sont également susceptibles d'entraîner des instabilités. On parle d'effet Marangoni thermique (ou de thermocapillarité) lorsqu'elles sont provoquées par un gradient de température, et d'effet Marangoni solutal si elles sont dues à la formation d'un gradient de concentration. Dans ce travail, seul l'effet Marangoni thermique sera étudié. Le principe de l'effet Marangoni peut être expliqué à l'aide de la figure I.2. Celle-ci représente une couche de liquide chauffée par le bas, qui est en contact avec de l'air. Lorsqu'une petite perturbation provoque l'augmentation localisée de la température au point A par rapport à celle du point B , la tension de surface (dépendant de la température) au point A diminue, induisant un écart de tension de surface $\Delta\sigma$ entre les points A et B à l'origine d'une variation de pression $P_A > P_B$, qui se traduit par un mouvement du fluide de A vers B . Par conservation de la masse, c'est le liquide se situant au niveau de la paroi chauffée qui va se diriger verticalement vers le point A de l'interface. L'arrivée de ce liquide encore plus chaud, va accentuer davantage la différence de température entre A et B et le gradient de tension de surface augmente encore, perpétuant ainsi la circulation du fluide, et créant un mouvement convectif du fluide qui va engendrer des tourbillons.

La convection thermocapillaire, comme pour la convection de Rayleigh-Bénard, est caractérisée par un nombre adimensionnel, le nombre de Marangoni, noté Ma . Ce nombre est le rapport de la vitesse de convection thermocapillaire à la surface libre sur la vitesse de diffusion thermique. Il est en général dépendant de l'échelle

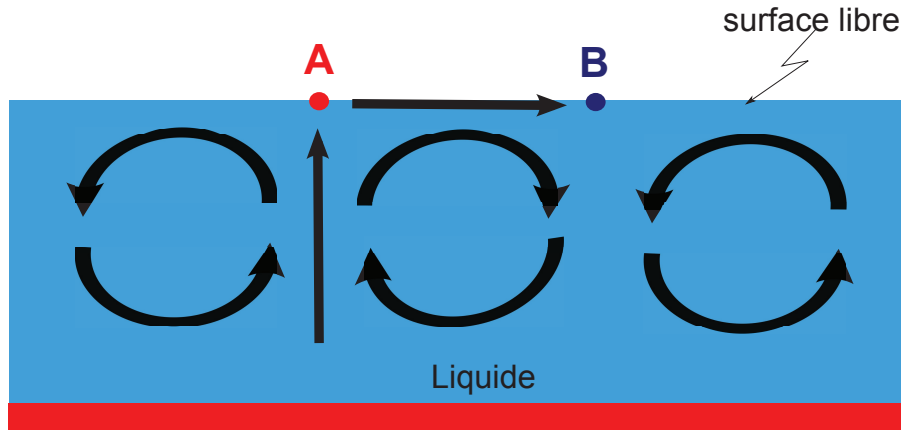


Figure I.2.: Schéma du principe de la convection Marangoni thermique

de température au niveau de la surface libre. Le nombre de Marangoni est défini par :

$$Ma = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\Delta T H}{\mu \alpha} \quad (\text{I.4})$$

I.3. Écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard

Les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) sont des écoulements laminares de convection mixte en conduite de section rectangulaire¹ horizontale chauffée uniformément par le bas et refroidie uniformément par le haut. Ils résultent de la superposition de deux sources convectives : un gradient de pression horizontal entraîne le fluide dans la conduite (moteur de la convection forcée) et un gradient de température vertical (moteur de la convection naturelle) est à l'origine de la formation de structures thermoconvectives. L'écoulement de PRB a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche vu son importance dans de nombreuses applications industrielles, comme les dépôts de vapeurs chimiques (CVD) pour lesquels un gaz inerte chargé en réactifs est injecté entre des substrats chauffés sur lesquels se dépose alors une mince couche par pyrolyse. Les phénomènes d'instabilité thermoconvec-

1. C'est souvent le cas mais la conduite pourrait avoir une section transversale d'une autre forme.

tive, qui peuvent se développer dans l'écoulement de gaz, influent directement sur l'épaisseur de la couche de dépôt. Le refroidissement ou la fabrication des composants électroniques est un autre champ d'application de l'écoulement de PRB. Des explications et analyses plus complètes de ces applications sont données par Nicolas (2002). La configuration PRB est riche en types de structures thermoconvectives susceptibles d'apparaître sous forme de rouleaux longitudinaux, transversaux, sinueux, variqueux, etc. L'écoulement de Poiseuille thermiquement stratifié reste stable tant que le nombre de Rayleigh Ra ne dépasse pas une certaine valeur critique, c'est à dire, $Ra_c = 1708$. Au-delà de cette valeur, l'écoulement de base devient instable et deux types de structures thermoconvectives peuvent apparaître, les rouleaux transversaux d'axes perpendiculaires à l'axe de la conduite, qui apparaissent pour des faibles nombres de Reynolds et les rouleaux longitudinaux, d'axes parallèles à l'axe de la conduite, qui apparaissent pour des nombres de Reynolds relativement élevés. Une représentation schématique de ces deux types de rouleaux est présentée sur la Figure I.3.

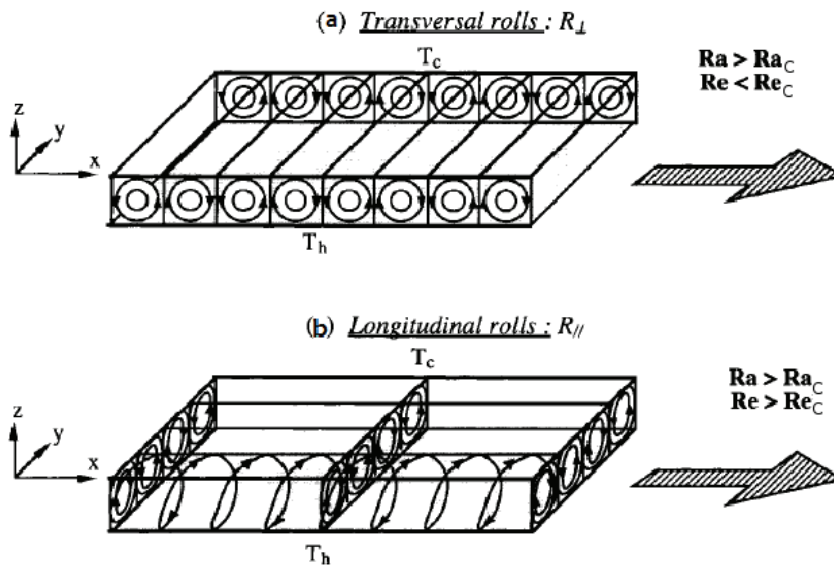


Figure I.3.: Représentation schématique de deux types de rouleaux dans l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard : (a) Rouleaux transversaux ; (b) Rouleaux longitudinaux. (figure tirée de Nicolas et al. (2000))

Les premières études de stabilité pour l'écoulement de type PRB datent du début des années 60 avec Velte (1962) et Sani (1964). Depuis lors, les recherches sur ce type de problème se sont poursuivies et ont été complétées par des expériences et des simulations numériques dans des canaux d'extension transversale infinie et finie. Un important travail résumant les travaux de recherche sur les instabilités de PRB, peut être trouvé dans la revue bibliographique de Nicolas (2002). Cette revue couvre la période 1920-2001 et comporte 154 références. La gamme des paramètres concernés est : $0 < Pr < 1000$, $0 < Re < 1000$ et $0 < Ra < 10^6$.

Dans le cas d'un écoulement entre deux plaques infinies, Gage et Reid (1968) montrent que les rouleaux longitudinaux sont toujours plus instables que les rouleaux transversaux comme l'indique la Figure I.4 et que le problème 3D peut se ramener à un problème 2D par une transformation de Squire.

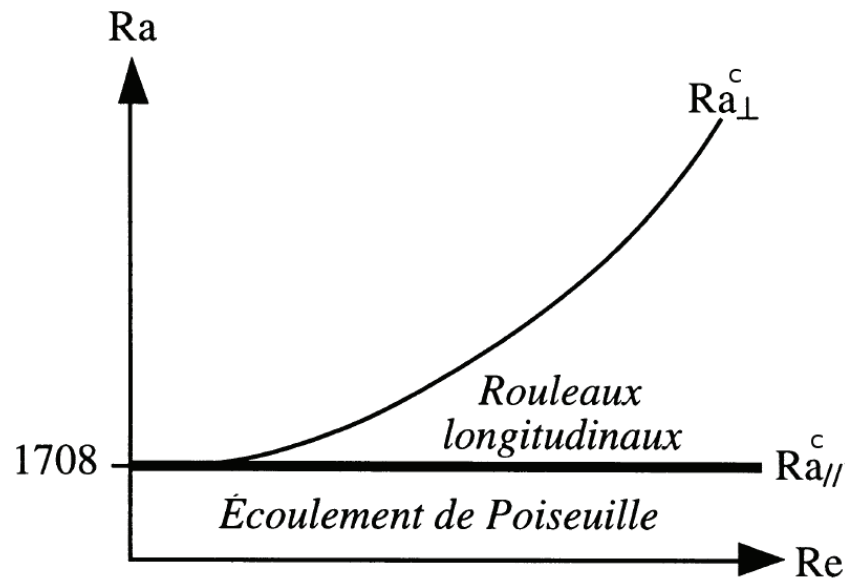


Figure I.4.: Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB entre deux plaques horizontales infinies : $Ra_{\perp}^c$ nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux transversaux ; $Ra_{//}^c$ nombre de Rayleigh critique pour les rouleaux longitudinaux. (figure tirée de Nicolas (2002)).

L'apparition d'un écoulement secondaire, sous la forme de rouleaux longitudinaux,

aux pour des conduites d'extension infinie, a lieu autour du nombre critique de Rayleigh $Ra_c = 1708$ (Akiyama et al., 1971; Yasuo et Yutaka, 1966b). Le diamètre de ces rouleaux est à peu près égal à la hauteur du canal. Yasuo et Yutaka (1966b), ont étudié les rouleaux longitudinaux dans un conduit d'extension latérale infinie. Ils ont montré que le nombre de Rayleigh critique et le nombre d'onde critique sont indépendants de Re . Ces résultats théoriques sont cohérents avec les résultats obtenus pour des études expérimentales menées dans des canaux d'extension transversale importante et pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés (Akiyama et al., 1971; Fukui et al., 1983).

Dans le cas d'une conduite d'extension latérale finie (Luijckx et al., 1981), le confinement a deux effets. Il stabilise l'écoulement de base puisque, quand le rapport du forme du canal décroît, le nombre de Rayleigh critique $Ra_c = \min(Ra_{\perp}^c, Ra_{\parallel}^c)$ croît. De plus, lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique Re_c , les parois verticales favorisent l'apparition des rouleaux transversaux. Par contre, quand $Re > Re_c$, l'écoulement moyen favorise les rouleaux longitudinaux. La Figure I.5 montre bien l'effet du confinement.

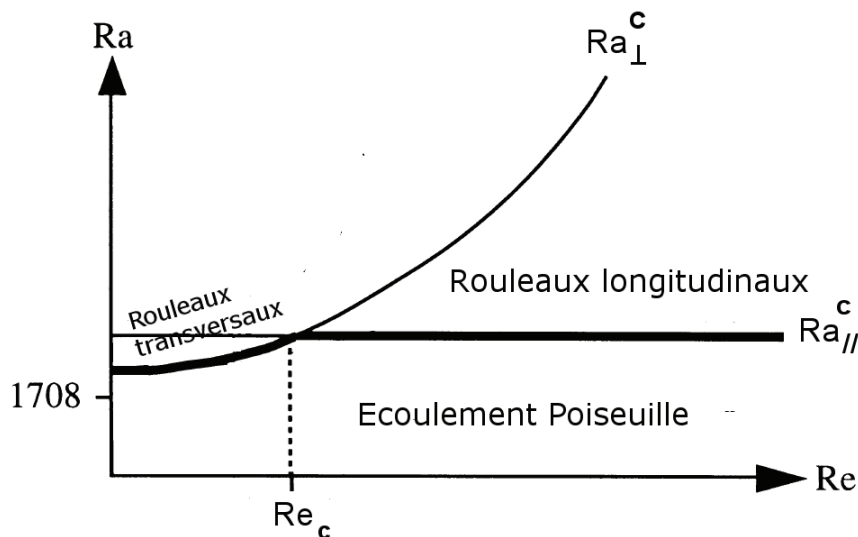


Figure I.5.: Diagramme de stabilité linéaire temporelle de l'écoulement de PRB pour une conduite d'extension latérale finie. (tiré et modifié de Nicolas et al. (2000))

Yasuo et Yutaka (1966a) ont montré, en étudiant la stabilité linéaire de l'écoulement de PRB, qu'au-delà d'une valeur critique $Ra = 18352$, une nouvelle bifurcation a lieu, cette nouvelle transition donne naissance à des rouleaux longitudinaux du second ordre comme schématisé sur la Figure I.6. Ostrach et Kamotani (1975) ont effectué des expériences d'écoulement d'air complètement développé entre deux plaques isothermes et ont noté que les rouleaux deviennent irréguliers pour $Re = 38$ et $Ra > 8000$. Les rouleaux longitudinaux ne restent pas tout le temps stationnaires pendant toute la phase du changement de Ra et Re , ils peuvent être déstabilisés. Une analyse théorique et numérique de la stabilité linéaire temporelle de ces rouleaux stationnaires, pris comme écoulement de base et soumis à des perturbations 3D, a été effectuée par Clever et Busse (1991) dans le cas d'un écoulement entre deux plaques infinies. Cette étude a montré l'existence d'une instabilité sinueuse dans une zone définie par : $Re > 75$ et $Ra > 2200$, et d'une instabilité oscillatoire dans une zone définie par : $Re < 100$ et $Ra > 6000$. Récemment, Pabiau et al. (2005) ont mené une étude expérimentale dans un canal rectangulaire rempli d'air portant sur les rouleaux sinueux. Dans cette étude, il a été détecté une forte sensibilité de l'état de base en rouleaux longitudinaux aux conditions aux limites, qui s'est avérée très difficile à contrôler expérimentalement. Cette expérience a montré aussi le caractère convectif de cette instabilité secondaire qui nécessite d'être constamment perturbée pour rester dans le canal.

Gage et Reid (1968), Platten (1971) et Luijckx et al. (1981) ont démontré l'existence des rouleaux thermoconvectifs transversaux $Ra_{\perp}$ stationnaires dont les axes sont perpendiculaires à l'écoulement principal. Le nombre de Rayleigh critique correspondant à l'apparition des rouleaux transversaux a été trouvé comme étant une fonction du rapport de la forme du canal et aussi du nombre de Prandtl. Platten et Lefebvre (1971) ont étudié expérimentalement l'action de la vitesse de l'écoulement sur le nombre de Rayleigh critique et en particulier sur son augmen-

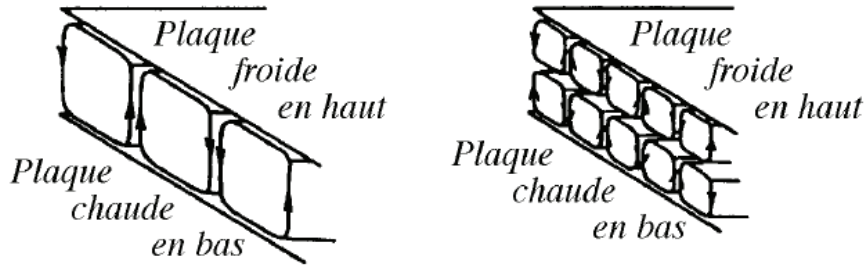


Figure I.6.: Rouleaux longitudinaux de première (à gauche) et de deuxième espèce (à droite) (figure tirée de Yasuo et Yutaka (1966a)).

tation avec le nombre de Reynolds. En réalisant une expérience de type Schmidt-Milverton (Schmidt et Milverton, 1935) avec de l'eau dans une conduite de rapports de forme $A = L/h = 150$ et $B = l/h = 80$, Platten et Lefebvre (1971) montrent que Ra_c croît de 1708 à 2063 lorsque l'on passe de $Re = 0$ à $Re = 28$. Ils apportent ainsi la preuve expérimentale de l'augmentation de $Ra_{\perp}^c$ avec Re , montrée théoriquement par Platten (1971). Cependant, dans le cas d'un écoulement d'eau ($Pr = 6,4$), Ouazzani et al. (1990) trouvent que dans une conduite de rapport de forme transversal $A_y = 80$, pour un nombre de Reynolds plutôt élevé pour ce type d'écoulement ($Re = 28$), les structures thermoconvectives ne sont pas des rouleaux transversaux mais des rouleaux longitudinaux pour lesquels le nombre de Rayleigh critique ne varie pas avec Re . Donc la variation du nombre de Rayleigh critique dans l'expérience de Platten et Lefebvre a une autre cause qui provient du non établissement de l'écoulement. La mise en évidence de l'augmentation du nombre de Rayleigh critique des rouleaux transversaux $Ra_{\perp}^c$ avec Re a été réalisée par Luijckx et al. (1981) grâce à une expérience de visualisation dans de l'huile de silicone. Cette expérience a montré que les rouleaux transversaux disparaissent de plus en plus de la conduite quand Re augmente. Le canal utilisé est très long (rapport de forme transversal $A_x \simeq 100$) et plus de 90 rouleaux transversaux peuvent s'y développer. Une analyse de stabilité linéaire temporelle en conduite d'extension latérale finie a

été réalisée aussi par Kato et Fujimura (2000). Ils ont trouvé que les rouleaux longitudinaux correspondent à des bifurcations supercritiques¹ alors que les rouleaux transversaux correspondent à des bifurcations subcritiques² ou supercritiques en fonction du nombre de Prandtl, du rapport de forme du canal et des conditions aux limites sur les parois latérales. En se basant sur l'analyse de stabilité linéaire, Hamed et al. (2008) ont étudié la transition vers les rouleaux transversaux dans un canal horizontal de longueur finie dans le sens de l'écoulement. Ils ont montré que le nombre de Rayleigh critique dépend du nombre de Péclet et de la longueur du domaine.

Nicolas et al. (2000) ont présenté une analyse de stabilité linéaire d'un écoulement de Poiseuille totalement développé dans un canal horizontal d'extension latérale finie et chauffé uniformément par le bas. Leurs résultats concernent une large gamme de nombre de Prandtl ($10^{-6} \leq Pr \leq 10^5$) et de rapports de forme B du canal ($0.1 \leq B \leq 5.4$ et $B \rightarrow \infty$). Ils ont montré que le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des rouleaux longitudinaux augmente considérablement avec la diminution du rapport de forme. Des tendances similaires ont été observées aussi pour le développement des rouleaux transversaux. Cette étude a indiqué clairement que l'amortissement visqueux fort au voisinage des parois latérales d'un canal étroit produit des effets stabilisants sur l'écoulement. Ce phénomène a été observé expérimentalement par Chang et Lin (1998) en examinant les effets du rapport de forme sur les rouleaux longitudinaux. Mais comme dans la plupart des études expérimentales rapportées dans la littérature, la dimension longitudinale de la zone chauffée est trop courte pour que les rouleaux se répartissent sur toute la longueur de la section d'essai et un établissement complet de rouleaux longitudinaux est rarement observé. En effet, la longueur d'entrée L , pour que les rouleaux longitudinaux stationnaires soient complètement développés, augmente avec l'augmentation

1. L'apparition du nouveau mode est continue, c'est à dire que son amplitude est continue au passage de la bifurcation.

2. L'apparition du nouveau mode est discontinue (i.e. brutale).

du nombre de Reynolds ou la diminution du nombre de Rayleigh (diminution du nombre de Richardson) (Chiu et Rosenberger, 1987; Kamotani et Ostrach, 1976; Pabiau et al., 2005). Par conséquent, l'observation du développement des rouleaux dans des canaux très courts conduit à considérer des grandes valeurs de Ri . L'inconvénient de ceci est que les structures instables peuvent facilement se développer, affectant ainsi l'analyse détaillée de l'évolution des rouleaux longitudinaux. Plus récemment, Mergui et al. (2011) ont étudié expérimentalement et numériquement l'effet du rapport de forme transversal, et des conditions thermiques à l'entrée, de la nature des parois verticales et de la paroi supérieure du canal sur l'apparition et le développement des rouleaux longitudinaux stationnaires. Le dispositif expérimental utilisé est caractérisé par une zone chauffée de grande étendue longitudinale, ce qui a permis d'observer des rouleaux longitudinaux complètement développés dans une large gamme de nombres de Reynolds et de nombres de Rayleigh ($3500 < Ra < 6000$ et $20 < Re < 200$).

Bonnefoi et al. (2004) ont monté une expérience d'écoulement d'eau en convection mixte dans un conduit horizontal rectangulaire uniformément chauffé par le bas avec un flux de chaleur imposé et dont le rapport de forme est voisin de deux. La structure de l'écoulement du fluide observée est principalement composée de deux rouleaux longitudinaux qui interagissent dynamiquement une fois que le seuil d'instabilité est atteint. Pour un rapport de forme plus grand de 10, Benderradji et al. (2008) ont réalisé des expériences dans un canal rectangulaire chauffé uniformément par le bas avec un flux de chaleur constant. Dans ce travail, les auteurs ont montré l'existence de deux mécanismes d'initiation des rouleaux. Le premier mécanisme se produit pour les faibles nombres de Rayleigh où les rouleaux longitudinaux sont initiés par l'effet des parois latérales dans la zone d'entrée de l'écoulement et ensuite se développent progressivement vers le centre au fur et à mesure qu'ils apparaissent vers la sortie du canal. Le deuxième mécanisme se produit pour des

nombres de Rayleigh élevés, il s'agit de la combinaison du premier mécanisme avec un gradient de température vertical dans la couche limite inférieure qui induit simultanément l'apparition de paires de rouleaux dans toute la zone entre les deux rouleaux latéraux. Ce dernier mécanisme a été aussi observé par Incropera et al. (1987) dans un écoulement d'eau et par Gau et al. (1999) dans un écoulement d'air.

Plusieurs auteurs ont étudié spécifiquement la zone d'entrée thermique pour déterminer les conditions marquant la naissance des instabilités. En effet, à partir de l'abscisse $x = 0$ pour laquelle on commence à chauffer, un écoulement pleinement développé hydrodynamiquement a besoin d'une certaine distance pour s'établir thermoconvectivement. Hwang et Cheng (1973) ont réalisé une étude de stabilité linéaire en zone d'entrée thermique pour un écoulement entre deux plaques infinies. Les modes normaux introduits dans les équations de perturbations linéarisées se rapportent uniquement aux $R_{//}$ stationnaires, ils sont de la forme $f(x, y, z) = \hat{z}e^{c_x x}e^{ik_y y}$. La stabilité marginale est obtenue lorsque le coefficient d'amplification spatial dans la direction longitudinale c_x s'annule. Le profil thermique de l'écoulement de base est tel qu'en $x = 0$ (là où commence le chauffage) la température du fluide est uniforme et égale à la température de la plaque supérieure froide ; c'est à dire que la conduction axiale de la chaleur vers l'amont est négligée dans l'écoulement de base. Pour un nombre de Prandtl $Pr \geq 0.7$ et à grand nombre de Péclet¹, il est montré que l'écoulement de base est plus stable dans la zone d'entrée que vers l'aval, le résultat est inverse pour $Pr \leq 0.2$. Dans les deux cas, lorsqu'on s'éloigne de l'entrée, on retrouve que Ra_c tend vers 1708. Plus tard, Cheng et Wu (1976) généralisent l'étude de Hwang et Cheng (1973) en considérant des perturbations 3D (les rouleaux transversaux ne sont donc pas écartés) et en rendant aussi la conduction de la chaleur vers l'amont possible en considérant un canal allant de $x = -\infty$ à $x = +\infty$. L'étude montre que, pour $Pe \leq 25$, l'hypothèse de fluide à température uniforme en $x = 0$ est erronée et que la conduction axiale de la chaleur ne peut pas être négligée. A

1. Nombre de Péclet thermique : $Pe = RePr$

faible nombre de Péclet, la courbe $Ra_{jj}^c = f(x)$ est nettement en dessous de celle obtenue par Hwang et Cheng (1973) car le problème est elliptique et les perturbations remontent vers l'amont. D'autre part, les rouleaux transversaux sont plus stables que les rouleaux longitudinaux pour $Pe \leq 0,5$ et $Pr \geq 1$ et ils se développent uniquement en amont et juste en aval de $x = 0$ (cf. Figure I.7). Plus loin en aval, on retrouve les rouleaux longitudinaux. Expérimentalement la zone d'entrée thermique a été étudiée par Kamotani et Ostrach (1976) puis Kamotani et al. (1979) dans des écoulements d'air. Les auteurs constatent que la longueur d'entrée thermique décroît lorsque Ra croît ou lorsque Re^2/Gr décroît. L'expérience de Kamotani et al. (1979) montre aussi que Ra_c décroît en s'éloignant de la zone d'entrée, ce résultat est trouvé aussi par Lee et Hwang (1991) quel que soit le nombre de Prandtl. Plusieurs études ont proposé des formules de corrélation en fonction des paramètres de l'écoulement donnant les longueurs d'apparition et d'établissement des rouleaux longitudinaux et des rouleaux transversaux. Par exemple, Chiu et Rosenberger (1987) ont déterminé expérimentalement la longueur L_1 d'apparition des instabilités au début de la zone chauffée et la longueur L_2 d'établissement complet des rouleaux longitudinaux dans un écoulement d'azote. Les corrélations trouvées sont en fonction de la hauteur du canal H , de Re et du paramètre $\varepsilon = (Ra - 1708)/1708$. Les formules sont corrélés pour $1300 < Ra < 8300$ et $15 < Re < 170$ et elles ont la forme : $L_1 \approx 0.65H\varepsilon^{-0.44}Re^{0.76}$ et $L_2 \approx 0.68H\varepsilon^{-0.69}Re^{0.96}$. Les expériences de Chiu et Rosenberger (1987) ont été reproduites numériquement par Narusawa (1998) avec un très bon accord. Ils ont étudié aussi l'influence de la température d'entrée du fluide et les conditions aux limites thermiques adiabatiques et isothermes des parois verticales sur les longueurs d'établissement des rouleaux longitudinaux et sur le nombre de Nusselt. Yu et al. (1997) localisent par simulation numérique la naissance des instabilités comme étant la position x où le nombre de Nusselt moyen dans la direction transverse augmente de 3% par rapport au cas de l'écoulement forcé. Cette position est donnée par une formule de corrélation

pour $20 \leq Re \leq 50$ et $6000 \leq Ra \leq 31000$ et elle est liée au nombre de Rayleigh : $Ra = 1672(x/Pe)^{-1.1}$. Récemment, Nicolas et al. (2012) ont analysé l'influence de Re et de Ra sur la longueur d'établissement des rouleaux longitudinaux et sur le nombre de Nusselt moyen $Nu(x)$. Ils ont donné des corrélations pour un rapport de forme $B = 10$, $Pr = 0.7$ et une large gamme de Re et de Ra : $100 \leq Re \leq 200$ et $4500 \leq Ra \leq 15000$. Ils définissent la longueur d'établissement comme une distance entre l'entrée et le point où la composante verticale de la vitesse atteint le minimum $w_m(y = B/2, z = 0.5)$ et qui s'écrit sous la forme : $L = 0.578[(Ra - 1708)/1708]^{-0.41} Re^{0.922}$.

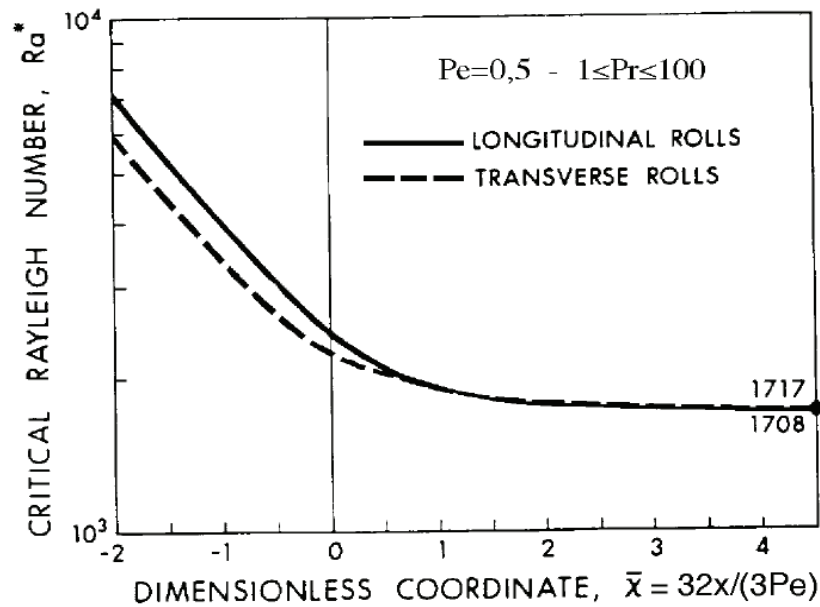


Figure I.7.: Courbes de stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille vis à vis des rouleaux transversaux et des rouleaux longitudinaux dans la zone d'entrée thermique d'un canal d'extension latérale infinie chauffé uniformément par le bas pour $1 \leq Pr \leq 100$ et $Pe = 0.5$ (tiré de Nicolas (2002) d'après Cheng et Wu (1976)).

Müller et al. (1992); Ouazzani et al. (1995) et Nicolas et al. (1997) ont déterminé la longueur d'établissement des $R_{\perp}$ à partir de l'enveloppe stationnaire $W_{max}(x)$ de la composante de vitesse verticale maximale le long de l'axe de la conduite. Les rouleaux transversaux sont poussés de plus en plus vers l'aval du canal lorsque le

débit augmente ou lorsque le gradient de température diminue. Ce résultat a été montré expérimentalement pour la première fois par Luijckx et al. (1981).

D'un point de vue thermique, la plupart des travaux sur les écoulements de PRB ont étudié l'influence des instabilités thermoconvectives sur les transferts thermiques en évaluant le nombre de Nusselt (Kamotani et Ostrach, 1976; Incropera et al., 1987; Tseng et al., 2000). Le résultat qualitatif principal, commun à l'ensemble de ces travaux, est résumé sur la Figure I.8. Il donne l'évolution du nombre de Nusselt Nu en fonction de $x/(PeD_h)$. Dans ce graphe, où la courbe en trait discontinu correspond au cas de l'écoulement forcé, on peut distinguer trois régions lors de l'apparition du régime thermoconvectif :

- la région (1) d'écoulement forcé. La longueur de cette région augmente lorsque Re augmente ou Gr diminue.
- la région (2) où la convection mixte se développe (la courbe $Nu = f(x)$ continue à diminuer, puis augmente brutalement en raison de l'apparition des rouleaux, l'augmentation étant éventuellement suivie d'oscillations amorties).
- la région (3) où le régime thermoconvectif est parfaitement établi ($Nu = f(x)$ garde une valeur constante)

Dans le cas d'un écoulement de PRB pleinement établi, le nombre de Nusselt Nu ne dépend pas de Re et il croît avec Ra . Cela vaut aussi bien pour les écoulements de rouleaux longitudinaux (Fukui et al., 1983; Narusawa, 1998; Nicolas et al., 2012) que pour les écoulements de rouleaux transversaux (Chen et Lavine, 1996; Nicolas et al., 1997). Autrement dit, selon toutes ces études, dans une conduite rectangulaire chauffée par le bas, le nombre de Nusselt reste le même qu'il y ait un écoulement (convection mixte) ou qu'il n'y en ait pas (convection naturelle). Ce résultat est vrai à tous nombres de Reynolds pour les écoulements de rouleaux longitudinaux mais il n'est valable qu'à petits nombres de Reynolds pour les écoulements de rouleaux transversaux. Nicolas et al. (2012) ont montré que pour le même Re et Ra , le

nombre de Nusselt moyen en présence des rouleaux longitudinaux oscillants est plus petit que celui calculé en présence des rouleaux longitudinaux stationnaires, ce qui explique la différence entre le nombre de Nusselt moyen calculé dans quelques études numériques pour $Re < 100$ et $Ra > 8000$ et celui déterminé à partir d'études expérimentales. En effet, les rouleaux longitudinaux sont considérés stationnaires dans ces études numériques alors qu'ils bifurquent vers des structures oscillantes dans le cas des expériences.

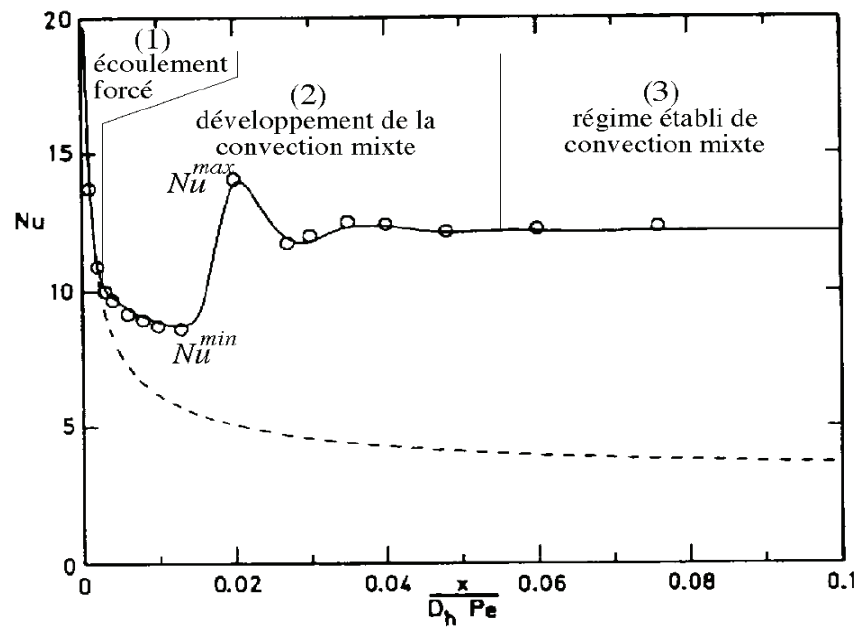


Figure I.8.: Evolution axiale du nombre de Nusselt moyenné transversalement pour un écoulement de rouleaux longitudinaux (- - - : écoulement forcé sans rouleaux) (tiré de Nicolas (2002) d'après Nonino et Giudice (1991)).

Dans les études de l'écoulement de PRB, on distingue deux caractères d'instabilité : instabilité convective et instabilité absolue. L'étude des instabilités convectives et absolues considère à la fois des analyses temporelles et spatiales de perturbations. Il s'agit dans ces études d'examiner la réponse du système à un pic de type Dirac en espace et en temps. La compétition entre la croissance de l'instabilité en espace et en temps et son advection donne naissance à des instabilités

absolues lorsque la croissance en espace et en temps l'emporte sur l'advection par l'écoulement et donne naissance à des instabilités convectives dans le cas contraire. Carrière et Monkewitz (1999) ont montré que seuls les rouleaux transversaux sont susceptibles de devenir absolument instables.

Certains de ces comportements rencontrés pour les écoulements de PRB se retrouveront pour les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni (PRBM) que nous étudions par la suite. Dans le Tableau I.1 nous fournissons une synthèse des principales conclusions tirées de la revue bibliographique de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard.

I.4. Convection de Marangoni : effet thermocapillaire

La convection de Marangoni ou thermocapillaire suscite un grand intérêt dans les activités de recherche en raison de son importance dans les phénomènes naturels et aussi dans de nombreuses applications industrielles telles que l'évaporation, le séchage des solutions polymère/solvant, la croissance cristalline, les procédés de bombardement électronique d'un métal liquide, etc ...

L'écoulement de liquide le long de l'interface de zones de faible tension superficielle vers les zones de forte tension superficielle porte le nom du physicien italien Carlo Marangoni (1840-1925) qui a décrit ce phénomène pour la première fois dans les années 1870 (Marangoni, 1871). Depuis l'observation des structures hexagonales par Bénard (1901) qui sont dues non seulement aux effets thermogravitaires mais aussi aux effets thermocapillaires, de nombreuses études ont été menées sur la stabilité des écoulements convectifs d'origine thermocapillaire. Ces écoulements sont caractérisés par une multitude de mécanismes physiques interactifs et montrent une grande variété de structures régulières ou complexes.

	Rouleaux longitudinaux	Rouleaux transversaux
Définition	Rouleaux contra-rotatifs d'axe parallèle à l'axe du canal	Rouleaux contra-rotatifs d'axe perpendiculaire à l'axe du canal
	Le diamètre de ces rouleaux est à peu près égal à la hauteur du canal	
Nombre de Rayleigh critique Ra_c	– $Ra_c = 1708$ (canal d'extension latérale infinie). – Il ne dépend ni de Re ni de Pr. – les rouleaux longitudinaux sont plus instables que les rouleaux transversaux dans le cas du canal à extension latérale infinie. – Ra_c croît lorsque le rapport de forme diminue. – les parois verticales favorisent l'apparition des rouleaux longitudinaux pour les grands Re ($Re > Re_c$).	– $Ra_c = 1708$ pour Re petit (canal d'extension latérale infinie). – Il dépend de Re et de Pr. – Ra_c croît lorsque le rapport de forme diminue. – les parois verticales favorisent l'apparition des rouleaux transversaux pour les faibles Re ($Re < Re_c$).
Longueur d'établissement L	L décroît lorsque Ra croît ou lorsque Re décroît.	
Transfert thermique	– Dans la région convectivement développée, Nu ne dépend pas de Re et croît avec Ra .	– Dans la région convectivement développée, Nu ne dépend pas de Re et croît avec Ra pour les faibles valeurs de Re .

Table I.1.: Synthèse des principales conclusions trouvées de la revue bibliographique de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard.

Un film liquide borné supérieurement par un gaz et inférieurement par une paroi chauffée peut, sous l'effet des forces thermocapillaires, subir deux types d'instabilités (Goussis et Kelly, 1990, 1991), une instabilité de petite longueur d'onde et une instabilité de grande longueur d'onde.

Pour le premier type d'instabilité (petite longueur d'onde), la déformation de la surface libre n'est pas nécessaire. Le mécanisme responsable de cette instabilité est

lié à l'interaction de la température de base avec le champ de la vitesse perturbé et génère des perturbations dont la longueur d'onde est de l'ordre de l'épaisseur du film liquide. Une publication clé concernant ce type d'instabilité est celle de Pearson (1958). Dans cet article, Pearson a étudié le transfert de chaleur dans une couche de liquide infinie, homogène, d'épaisseur constante, chauffée uniformément par le bas. Il suppose que l'interface est plane et indéformable, et il néglige la gravité. La phase liquide est modélisée grâce aux équations classiques de la mécanique des fluides, tandis que la phase gazeuse est incluse dans le modèle à travers une condition aux limites à l'interface liquide-gaz, dans laquelle intervient un coefficient de transfert constant, le nombre de Biot. Symbolisé généralement par Bi , ce nombre compare la résistance thermique de conduction à l'intérieur de la couche fluide d'épaisseur H et la résistance thermique de convection entre la surface de cette couche fluide et l'air ambiant. Il est défini comme :

$$Bi = \frac{hH}{\lambda} \quad (\text{I.5})$$

Pearson détermine l'existence d'un seuil critique, qu'il quantifie par un nombre de Marangoni critique, à partir duquel la couche de liquide devient instable en raison du mouvement convectif de Marangoni qui apparaît spontanément. Selon Goussis et Kelly (1990), pour que ce type d'instabilité existe, la condition suivante doit être satisfaite :

$$\left[-\frac{d\sigma}{dT}\Delta T\right]\frac{\rho c_p}{\mu h} > 32.073 \quad (\text{I.6})$$

Les aspects physiques liés à ce type d'instabilité apparaissent tous dans la condition ci-dessus. Le produit dans les parenthèses représente les forces thermocapillaires, tandis que ρc_p représente les effets de convection dans l'extraction de l'énergie à partir de l'état de base. Les grandes valeurs de ces deux quantités sont favorables à l'instabilité. La viscosité dynamique μ et le coefficient de transfert thermique h

représentent respectivement les pertes de l'énergie dues à la dissipation visqueuse et les pertes de chaleur à travers la surface libre. Pour que l'instabilité puisse se produire, l'énergie transférée à la perturbation et le travail effectué par les forces thermocapillaires doivent être suffisantes pour surmonter ces deux types de pertes (dissipation visqueuse et échange via la surface libre).

Le deuxième type d'instabilité (grande longueur d'onde) est lié à la modification de la température de base de la surface libre par la déformation de la surface. Dans ce cas la tension de surface tend à stabiliser les petites longueurs d'ondes ce qui permet à l'instabilité de prendre la forme de perturbations de grandes longueur d'onde. Ce type d'instabilité se produit quand les forces thermocapillaires l'emportent sur les forces hydrodynamiques. Cet équilibre est exprimé par (Smith, 1966) :

$$H^2 \rho g = \frac{3 \left[-\frac{d\sigma}{dT} \Delta T \right]}{2 \left[1 + \frac{hH}{\lambda} \right]} \quad (\text{I.7})$$

Si la hauteur H de la couche liquide est inférieure à la valeur donnée par la dernière équation, la couche liquide devient instable vis-à-vis des perturbations de grande longueur d'onde.

Scriven et Sternling (1964) ont étendu l'étude de Pearson en considérant une surface libre déformable. Ils ont montré que les perturbations de grande longueur d'onde sont toujours instables alors que les perturbations de petite longueur d'onde subissent le comportement décrit par Pearson.

Cette instabilité de Marangoni de grande longueur d'onde a été mise en évidence expérimentalement par VanHook et al. (1995). Ils ont conclu que celles-ci se développent dans le film liquide lorsque la différence de température entre le solide et le gaz environnant dépasse un seuil critique. Supplantant les instabilités de Bénard pour les films assez minces, ces instabilités accentuent les déformations locales de l'interface, et peuvent provoquer la rupture de la couche liquide. Beaucoup d'études

concernant le démouillage s'intéressent à ce type d'instabilité.

La convection thermocapillaire a été aussi bien étudiée dans des films liquides s'écoulant le long d'une paroi inclinée chauffée uniformément pas le bas (Bankoff, 1971; Thiele et Knobloch, 2004; Hu et al., 2008). Dans ces études, l'épaisseur du film est mince et les instabilités thermocapillaires se présentent sous la forme de perturbations de grande longueur d'onde. L'instabilité résultant de l'effet Marangoni évolue selon une équation simplifiée de l'épaisseur du film $H(x, t)$ qui peut être dérivée de l'équation de Stokes en utilisant l'approximation de la théorie de la lubrification (long wave approximation) (Burelbach et al., 1988; Oron et Rosenau, 1992). Oron et al. (1997) ont proposé une étude détaillée des phénomènes dynamiques qui se manifestent au sein d'un film liquide mince soumis à l'action de contraintes mécaniques et thermiques. Les phénomènes rencontrés peuvent se traduire par la propagation d'ondes et des ruptures locales du film dans le sens de l'épaisseur qui sont prédites par l'équation d'évolution de l'épaisseur du film. Ces approches sont menées pour des écoulements bidimensionnels (film 2D fin) pour lesquelles il ne sera jamais possible de mettre en évidence des structures tourbillonnaires tridimensionnelles qui se développeraient au sein du film liquide.

Dans certaines situations, lorsque le film est assez épais, la poussée d'Archimède (théorie de Rayleigh) et la convection de Marangoni apparaissent simultanément. En effet, les gradients de température qui sont responsables des gradients de tension de surface peuvent aussi être à l'origine de gradients de densité. Ce cas d'étude porte souvent le nom d'instabilité de Rayleigh-Bénard-Marangoni.

I.5. Combinaison de la convection naturelle et de l'effet thermocapillaire

Le couplage entre les effets thermocapillaires et les effets de la poussée d'Archimède a été essentiellement lié à des configurations d'études ne prenant pas en compte la convection forcée (convection de Rayleigh-Bénard-Marangoni). Nield (1964) a démontré que, dans ce cas, la convection dans le film est due à la somme de ces deux mécanismes qui se renforcent l'un l'autre. Sur la base d'une étude numérique, Nield a établi un diagramme de stabilité linéaire, qui représente le rapport du nombre de Marangoni sur le nombre de Marangoni critique en fonction du rapport du nombre de Rayleigh sur le nombre de Rayleigh critique. Il a obtenu une variation pratiquement linéaire entre les deux rapports. En l'absence de variation de tension de surface ou d'effet de la gravité, les résultats confirment les conclusions déjà obtenues par Rayleigh et Pearson. La théorie linéaire de Nield a été validée ensuite par des mesures expérimentales de transfert de chaleur à travers des couches d'huile de silicone (Palmer et Berg, 1971; Pantaloni et al., 1979).

Gumerman et Homsy (1974a,b) ont étendu l'analyse de stabilité linéaire du problème de Rayleigh-Bénard-Marangoni au cas de deux phases en écoulement co-courant avec un gradient de température vertical constant. Puisque les auteurs ont supposé des profils de vitesse et de température linéaires, les paramètres critiques obtenus sont identiques à ceux prédits par l'analyse linéaire d'une couche plane de liquide stagnant.

La combinaison des effets de flottabilité et des effets thermocapillaires a aussi été étudiée par Gershuni et al. (1992) et Parmentier et al. (1993) en prenant un gradient de température horizontal. Dans le cas de surfaces horizontales conductrices, Gershuni et al. (1992) ont obtenu des perturbations tridimensionnelles sous

forme de rouleaux longitudinaux stationnaires pour $Pr > 1$. Dans le cas de surfaces horizontales adiabatiques, Parmentier et al. (1993) ont trouvé des perturbations instationnaires sous forme de vagues obliques. Mercier et Normand (1996) ont introduit le nombre de Biot pour décrire le transfert de chaleur à la surface supérieure libre. Ils ont montré l'existence d'une transition du mode oscillatoire au mode stationnaire lorsque le nombre de Bond (le rapport entre les nombres de Rayleigh et de Marangoni) est augmenté. Un nombre de Bond nul correspond à un système étudié en l'absence de gravité. Cette transition dépend du nombre de Biot. Une étude expérimentale sur les instabilités thermocapillaires combinées aux effets de flottabilités dans une couche de liquide soumise à un gradient horizontal de température a été menée par Burguete et al. (2001). Ils ont constaté que l'écoulement peut se déstabiliser sous la forme de différentes structures, en fonction de la différence de température et de la profondeur H du liquide. Pour les petites valeurs de H , le système présente des ondes hydrothermales, tandis que pour les grandes valeurs de H , des rouleaux longitudinaux stationnaires sont observés.

Plusieurs études de la convection Rayleigh-Bénard-Marangoni ont été réalisées dans des géométries cylindriques. Vrentas et al. (1981) ont considéré une approche axisymétrique linéaire pour les problèmes de Marangoni pur et de Rayleigh pur. Ils ont déterminé les nombres de Marangoni et de Rayleigh critiques d'apparition de la convection dans des récipients cylindriques de différents rapports de forme. Dauby et al. (1997) ont réalisé une étude numérique de stabilité linéaire afin d'analyser les effets couplés de la flottabilité et de la thermocapillarité sur les seuils critiques. Ils ont montré que l'augmentation du rapport de forme provoque un changement de seuil, qui est dû à la fois au faible confinement et à une modification de l'instabilité qui passe de l'instabilité induite par la flottabilité à l'instabilité induite par les effets thermocapillaires. Kamotani et al. (1996) ont mesuré expérimentalement la différence de température critique dans des récipients cylindriques de différentes

tailles remplis par un liquide dont le nombre de Prandtl vaut $Pr = 27$. Ils ont trouvé que l'écoulement est dominé par les effets thermocapillaires pour des faibles nombres de Bond : $Bo \leq 0.24$. Récemment, Touihri et al. (2011) ont étudié les instabilités en cavité cylindrique chauffée par le bas avec la prise en compte des échanges de chaleur convectifs à la surface libre. L'effet stabilisant de la tension de surface ($Ma > 0$) induit une augmentation du seuil d'instabilité primaire, qui est amplifiée pour les faibles valeurs de Bi , mais peut également modifier la structure de l'écoulement en créant des rouleaux contrarotatifs à proximité de la surface libre.

Outre la détermination des seuils de transition, d'autres contributions portent notamment sur la structure de l'écoulement et les motifs convectifs observés au voisinage du seuil. Les cellules de Bénard hexagonales sont principalement la conséquence des gradients de tension de surface qui ne sont pas concernés par la flottabilité, tandis que les structures d'écoulement causées par des gradients de densité sont des rouleaux (Koschmieder, 1993). L'analyse non linéaire menée par Parmentier et al. (1996) a également conclu que lorsque la flottabilité est le moteur unique de la convection, seuls les rouleaux seront observés, alors que la présence des effets thermocapillaires, privilégie la formation de structures hexagonales. Cette étude a montré aussi que pour $Pr < 0.23$ la direction de l'écoulement au centre des cellules hexagonales est vers le bas quelle que soit la valeur de la force d'Archimède. Koschmieder et Prahl (1990) ont montré expérimentalement les différentes structures convectives selon que la cavité est cylindrique ou carrée. Ces résultats ont été retrouvés numériquement par Médale et Cerisier (2002) qui ont étendu l'étude pour des cavités triangulaires et hexagonales. Lorsque la cavité permet d'observer plusieurs rangées de cellules, les cellules internes ont une géométrie hexagonale. Une analyse expérimentale et numérique de la convection Bénard-Marangoni est également proposée par Pasquetti et al. (2002). Les auteurs mettent en évidence l'influence de la forme de la perturbation initiale sur les structures stables obtenues.

Sur la base des définitions des nombres de Rayleigh et de Marangoni (équations I.1 et I.4) nous constatons que la longueur caractéristique H joue un rôle considérable dans l'importance des mécanismes mis en jeu. Les expériences ont montré que la convection de Rayleigh domine l'effet Marangoni lorsque les couches de fluide ont une épaisseur de l'ordre du centimètre. Par contre, lorsque le film a une épaisseur inférieure au millimètre, celui-ci ne subit plus l'influence de la force d'Archimède, mais bien les effets thermocapillaires. Dans les cas intermédiaires, les deux mécanismes agissent simultanément.

I.6. Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire les principaux phénomènes physiques qui interviennent dans l'étude qui nous intéresse. Même si cette revue n'est pas exhaustive, elle permet de servir de base à la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu dans cette étude. Jusqu'à présent et à notre connaissance et comme constaté dans la revue bibliographie, il n'existe pas de travail théorique, numérique ou expérimental qui traite le problème de la convection mixte combiné aux effets thermocapillaires. En effet, lorsque les forces de flottabilité, les forces thermocapillaires et les courants de convection forcée sont comparables, les instabilités se développent sous forme de rouleaux convectifs longitudinaux semblables à ceux dans la configuration de Poiseuille-Rayleigh-Bénard. Pour cela nous avons choisi d'œuvrer pour apporter une contribution à la compréhension du problème de la combinaison de ces trois effets déjà bien étudiés séparément dans la littérature, sur la structure de l'écoulement et les transferts thermiques.

CHAPITRE II

Modélisation physique et méthode numérique

Pour atteindre les objectifs visés, il est nécessaire de définir un modèle physique bien approprié afin d'établir un programme numérique valide qui permettra de simuler tous les phénomènes mis en jeu. Nous présentons dans ce chapitre la formulation mathématique du modèle physique simplifié du problème de l'écoulement de convection mixte combiné aux effets thermocapillaires. Le comportement du fluide est modélisé par les équations de Navier-Stokes, de l'énergie et les conditions aux limites adéquates sont écrites. La méthode numérique de résolution utilisée est décrite en détail. Le code de calcul utilisé est testé par comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature pour des phénomènes similaires à ceux étudiés ici.

II.1. Configuration de l'écoulement et hypothèses simplificatrices

Nous considérons l'écoulement d'un liquide (pour un nombre de Prandtl $Pr = 7$) confiné dans un canal rectangulaire horizontal de hauteur H , de largeur $10H$, de longueur $50H$, et dont la surface supérieure est libre (Figure II.1). On définit le rapport de forme transversal comme le rapport entre la largeur et la hauteur du canal par $\Gamma = \text{largeur}/\text{hauteur}$ ($\Gamma = 10$ pour la majorité des cas étudiés). Les parois latérales du canal sont adiabatiques, la paroi horizontale du bas est adiabatique sur une longueur $2H$ mesurée à partir de la section d'entrée du canal. Au delà, la paroi est maintenue à une température uniforme T_c supérieure à la température d'entrée du liquide T_0 ($T_c > T_0$). La température de l'air ambiant au-dessus de l'écoulement de liquide est fixée à T_0 . L'origine du repère est placée à la distance $2H$ de la section d'entrée du canal. Cette géométrie est inspirée de celle qui a fait l'objet d'études récentes en configuration PRB (Nicolas et al., 2011; Rahli et al., 2011). La surface rigide étant remplacée par une surface libre.

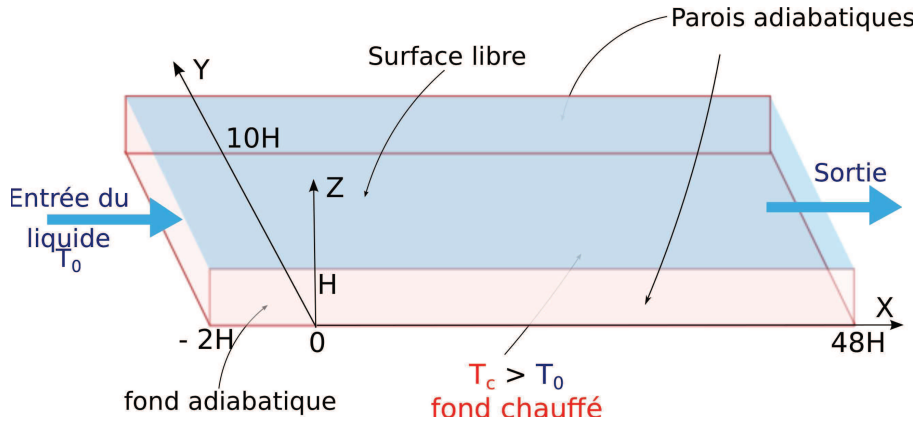


Figure II.1.: Géométrie de la configuration retenue et conditions aux limites.

Pour étudier les phénomènes complexes mis en jeu, nous avons pris en considération les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Le fluide est supposé newtonien, incompressible, en écoulement laminaire permanent.
- La dissipation d'énergie due au travail des forces visqueuses est négligée.
- Les propriétés thermophysiques sont considérées constantes à l'exception de la masse volumique dans le terme de la flottabilité et de la tension de surface.

La variation de la masse volumique dans le terme de la flottabilité est donnée par l'approximation de Boussinesq (Boussinesq, 1903). Cette approximation est fondée sur l'hypothèse de considérer la masse volumique comme constante sauf dans le terme de flottabilité. Elle fournit un modèle très utilisé, confirmé par une littérature abondante rapportant d'excellents accords entre calculs et expériences. La validité de cette approximation est justifiée néanmoins pour de faibles différences de température (Gray et Giorgini, 1976). La masse volumique est exprimée par la relation linéaire suivante :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \quad \text{avec} \quad \beta = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (\text{II.1})$$

où ρ_0 et T_0 représentent les valeurs de référence respectivement pour la masse volumique et la température. β représente le coefficient d'expansion thermique. La variation de la tension de surface est modélisée par le développement en série de Taylor au premier ordre de la tension de surface autour de la température de référence :

$$\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_0) \quad \text{avec} \quad \gamma = -\partial\sigma/\partial T \quad (\text{II.2})$$

où σ_0 est la tension de surface à la température T_0 . Pour la plupart des liquides ($\gamma > 0$), la tension de surface décroît avec la température. En effet, un accroissement de la température engendre une augmentation de l'agitation moléculaire, ce qui provoque une diminution de la cohésion entre les molécules et de ce fait, la tension entre les particules liquides est réduite.

- La surface libre est supposée plane et indéformable. La déformation de la sur-

face libre peut être négligée si le nombre de crispation $Cr = \rho\nu\alpha/\sigma H \ll 1$ (Davis, 1987) et le nombre de Galilée $Ga = gH^3/\nu\alpha \gg 1$ où ν , α et g sont respectivement la viscosité cinématique, la diffusivité thermique et l'accélération de pesanteur. La valeur élevée du nombre Galilée indique que la gravité stabilise les perturbations de grande longueur d'onde qui provoquent la déformation de la surface libre.

- Compte tenu de la faible viscosité dynamique liée au cisaillement de l'air au niveau de la surface libre, nous nous limitons dans cette étude à un modèle mono-couche (Nepomnyashchy et al., 2011), la phase gazeuse n'est pas modélisée et les échanges avec le milieu extérieur sont décrits par un coefficient d'échange thermique supposé connu et constant.
- L'épaisseur du film liquide est supposée constante. En effet, en considérant une couche d'eau d'une profondeur $H = 1 \text{ cm}$, pour laquelle nous avons calculé analytiquement la différence de pression entre l'entrée et la sortie du canal de 50 cm de longueur, et en tenant compte des frottements sur les parois du canal (un calcul similaire a également été réalisé par simulation numérique), nous avons déduit que la variation de la hauteur de la couche d'eau entre l'entrée et la sortie du canal est très faible et peut donc être négligée ($\Delta H = 2.6.10^{-4} \text{ cm}$ représentant 0.026% de la hauteur de la couche d'eau). L'écoulement dans un canal à surface libre (canal ouvert) a été étudié numériquement et expérimentalement dans la littérature mais sans la prise en compte des effets thermocapillaires. La variation de la profondeur de la couche de fluide est considérée comme négligeable dans la plupart des études de ce type d'écoulement (Wang et al., 1983; Komori et al., 1993; Taylor et al., 2005; Wang et Lu, 2005).

II.2. Equations de l'écoulement

Compte tenu des hypothèses simplificatrices signalées au paragraphe précédent, les équations régissant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent :

Equation de continuité :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Equation de la quantité de mouvement :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \beta \vec{g}(T - T_0) \quad (\text{II.4})$$

Equation de l'énergie :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \vec{\nabla}^2 T \quad (\text{II.5})$$

où $\vec{v}$ est la vitesse de composantes (v_x, v_y, v_z) , T et p sont respectivement les champs de la température et de la pression.

II.3. Conditions aux limites

Pour compléter le système d'équations (II.3-II.5), on lui associe les conditions aux limites suivantes :

- A la paroi horizontale inférieure, la vitesse satisfait la condition de non-glissement.

La paroi est adiabatique pour $x \in [-2H, 0[$ et elle est parfaitement conductrice pour $x \in [0, 48H]$.

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } x \in [-2H, 0[; \quad T = T_c \quad \text{pour } x \in [0, 48H] \quad \text{à } z = 0. \quad (\text{II.6})$$

- La vitesse satisfait également la condition de non-glissement pour les parois latérales, qui sont supposées être adiabatiques :

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{à } y = 0 \text{ et } y = 10H. \quad (\text{II.7})$$

- A la surface libre ($z = H$), la vitesse verticale v_z est nulle et l'équilibre entre les forces de tension de surface et les contraintes visqueuses dans le fluide donnent les conditions sur v_x et v_y :

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = - \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{II.8})$$

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial z} = - \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{II.9})$$

$$v_z = 0 \quad (\text{II.10})$$

- La condition à la limite thermique au niveau de la surface libre qui traduit la conservation de l'énergie s'écrit :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_0) \quad \text{à } z = H. \quad (\text{II.11})$$

Le premier terme représente la conduction de la chaleur dans le liquide, où λ désigne la conductivité thermique du fluide, tandis que le second terme exprime le transfert convectif entre la surface libre et l'air ambiant considéré à T_0 . Le coefficient d'échange convectif h entre la surface libre et l'air environnant est pris constant pour toute la surface.

- A l'entrée du canal, nous considérons un profil de vitesse pleinement développé maintenu par un gradient de pression constant. Ainsi, nous utilisons un profil de vitesse de type demi-Poiseuille tridimensionnel comme celui calculé analytiquement par Nicolas et al. (2000) pour le cas d'un canal rectangulaire avec des parois rigides, ce qui correspond dans notre cas à la solution de Navier-Stokes

avec une condition de glissement à la surface supérieure ($\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, v_z = 0$) et la condition de non-glissement au niveau des parois latérales. La température d'entrée est fixée à T_0 .

$$v_x = v_{\frac{1}{2}Pois(y,z)}; \quad v_y = v_z = 0; \quad T = T_0 \quad \text{à} \quad x = -2H. \quad (\text{II.12})$$

II.4. Adimensionnement du modèle

Pour donner une formulation générale au problème étudié, nous allons écrire les équations à résoudre et les conditions aux limites sous leur forme adimensionnelle en adoptant les grandeurs sans dimensions suivantes pour :

les coordonnées spatiales	$(X, Y, Z) = \frac{(x, y, z)}{H}$
la vitesse	$(V_x, V_y, V_z) = \frac{v_x, v_y, v_z}{U_m}$
la pression	$P = \frac{p}{\rho U_m^2}$
la température	$\theta = (T - T_0)/(T_c - T_0)$

où U_m est la vitesse moyenne à l'entrée du canal ouvert et ρU_m^2 représente la pression dynamique.

En introduisant ces nouvelles variables dans les équations du système (II.3-II.5), nous obtenons les équations adimensionnelles suivantes à résoudre qui décrivent respectivement, la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \frac{Ra}{Pr Re^2} \theta \vec{k} \quad (\text{II.14})$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta = \frac{1}{Pr Re} \vec{\nabla}^2 \theta \quad (\text{II.15})$$

Les nombres adimensionnels qui apparaissent dans les équations à résoudre sont définis comme suit :

- Le nombre de Reynolds $Re = \frac{U_m H}{\nu}$: il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité.
- Le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{g\beta(T_h - T_0)H^3}{\nu\alpha}$: c'est le rapport entre les forces d'Archimède thermiques et les forces de viscosité.
- Le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$: il représente le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement et la diffusivité thermique.

Les conditions aux limites (II.6-II.12) sous forme adimensionnelle deviennent :

$$\vec{V} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \quad \text{pour } X \in [-2, 0[, \quad \theta = 1 \quad \text{for } X \in [0, 48] \quad \text{à } Z = 0. \quad (\text{II.16})$$

$$\vec{V} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{à } Y = 0 \quad \text{and } Y = 10. \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial X}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial Y}, \quad V_z = 0 \quad \text{à } Z = 1. \quad (\text{II.18})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = -Bi \theta \quad \text{à } Z = 1. \quad (\text{II.19})$$

$$V_x = V_{\frac{1}{2}Pois(Y,Z)}, \quad V_y = V_z = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{à } X = -2. \quad (\text{II.20})$$

Cette nouvelle écriture des conditions aux limites fait apparaître trois nouveaux nombres adimensionnels qui sont définis comme suit :

- Le nombre de Marangoni $Ma = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\Delta T H}{\mu \alpha}$: il représente le rapport des forces de surfaces sur les forces visqueuses.
- Le nombre de Péclet $Pe = \frac{U_m H}{\alpha}$: il représente le rapport entre le transfert par convection et le transfert par conduction.
- Le nombre de Biot $Bi = \frac{hH}{\lambda}$: il représente le rapport entre la résistance thermique interne du film liquide et la résistance thermique entre la surface libre et l'air ambiant.

Le problème à résoudre pour obtenir les champs de vitesse et de température de l'écoulement, compte tenu des conditions aux limites choisies, est à six paramètres

(Re , Ra , Pr , Bi , Ma , Γ). Comme nous avons choisi un fluide qui a un nombre de Prandtl $Pr = 7$, le problème se réduit à cinq paramètres variables.

II.5. Méthode numérique

Pour un problème donné, les équations décrivant les transferts thermiques dans le fluide forment un système aux dérivées partielles qui n'admettent pas de solution analytique générale. Par conséquent, plusieurs méthodes numériques de résolution ont été développées. On peut citer par exemple : les méthodes utilisant des différences finies, des volumes finis, des éléments finis ou encore les méthodes spectrales. Ces méthodes permettent de transformer le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. La méthode des volumes finis présente des avantages considérables en raison de sa simplicité et de mise en œuvre numérique, et de son aptitude à traiter des géométries complexes. La caractéristique la plus importante de cette méthode est qu'elle est conservatrice par construction, ce qui signifie que tout le flux sortant d'un volume de contrôle entre dans les volumes voisins.

La résolution numérique de notre problème est faite à l'aide du code TAMARIS, développé au laboratoire SIAME par Kamal El Omari (El Omari et Le Guer, 2009; El Omari et al., 2011), au sein duquel ont été implémentées les conditions aux limites décrites à la section précédente. Le code Tamaris utilise la méthode des volumes finis tridimensionnels (3D) non structurés à maillages hybrides. Le domaine de calcul est divisé en un grand nombre de cellules élémentaires sur lesquelles les équations aux dérivées partielles sont intégrées. Les cellules de calcul peuvent être de différentes formes (tétraèdres, hexaèdres, prismes et pyramides), ce qui procure une grande flexibilité pour la géométrie étudiée tout en permettant de raffiner facilement et de manière régulière au voisinage des parois. Les variables ($\vec{v}$, p et T) sont toutes

stockées au centre des cellules de manière «non décalée».

Pour décrire la méthode numérique utilisée, nous pouvons écrire les Eqs. (II.4 et II.5) sous leur forme générique de convection-diffusion d'une variable ϕ :

$$\int_S \rho \phi \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \int_S \Lambda \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dS + \int_V S_\phi dV \quad (\text{II.21})$$

où $\vec{U}$ est le vecteur vitesse. Les trois termes de l'équation II.21 représentent respectivement le taux de transport convectif de la variable ϕ à travers les frontières du volume de contrôle, le taux de diffusion de ϕ caractérisé par le coefficient généralisé de diffusion Λ et enfin le terme source de ϕ qui englobe tous les effets non inclus dans les deux premiers termes.

Les schémas spatiaux utilisés pour approcher les flux convectifs et diffusifs sont tous les deux du second ordre de précision. Le terme diffusif est approximé en effectuant une somme sur toutes les faces f d'une cellule de calcul (Fig. II.2) :

$$\int_S \Lambda \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dS = \sum_f \Lambda_f A_f (\vec{\nabla} \phi)_f \cdot \vec{n}_f \quad (\text{II.22})$$

où A_f est l'aire de la face f . Pour traiter la non orthogonalité souvent inhérente aux maillages non structurés, le gradient normal $(\vec{\nabla} \phi)_f \cdot \vec{n}_f$ est décomposé en une contribution implicite qui utilise les valeurs de ϕ aux centres des cellules (la première partie du terme de droite de l'Eq. II.23) et une contribution explicite traitée par une approche de correction différée afin de préserver la précision du second ordre du schéma centré. Une décomposition par sur-relaxation de coefficient $\frac{\vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{n}_f}$ est utilisée, comme proposée par Jasak (1996), pour améliorer les propriétés de convergence de la discrétisation de ce terme diffusif. Ainsi :

$$(\vec{\nabla} \phi)_f \cdot \vec{n}_f = \frac{\phi_{N_b} - \phi_C}{\|\vec{d}\|} \frac{\vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{n}_f} + \overline{\vec{\nabla} \phi} \cdot \left(\vec{n}_f - \frac{\vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{n}_f} \right) \quad (\text{II.23})$$

où $\vec{d}(d_x, d_y, d_z)$ est le vecteur qui joint les centres de deux cellules voisines (voir Fig. II.2). Le gradient moyen $\overline{\vec{\nabla}\phi}$ est calculé par interpolation entre deux cellules voisines.

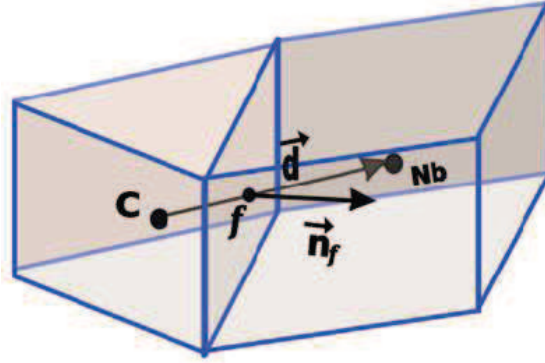


Figure II.2.: Une cellule de calcul C et une de ses cellules voisines N_b .

Les gradients des variables aux centres des cellules sont calculés par la méthode des moindres carrés. Cette méthode permet d'élargir la molécule de calcul au-delà des cellules voisines immédiates (celles partageant une face avec la cellule où le gradient est calculé). Ainsi, pour chaque cellule de calcul, le système linéaire 3×3 suivant est résolu :

$$\mathbf{M} \cdot \vec{\nabla}\phi = \vec{H} \quad (\text{II.24})$$

où les composantes de la matrice $\mathbf{M}$ et du vecteur $\vec{H}$ s'écrivent :

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{1}{\|\vec{d}_k\|^2} d_{k,j} d_{k,i} \text{ et } H_i = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{1}{\|\vec{d}_k\|^2} d_{k,i} (\phi_k - \phi_C)$$

où N_b est le nombre de cellules environnantes.

Dans notre cas, nous choisissons d'inclure toutes les cellules qui partagent un sommet avec la cellule C . Ainsi, dans le cas d'un maillage structuré formé par les cellules hexaédriques, N_b peut atteindre 26. La contribution de chaque cellule est pondérée par un facteur égal à l'inverse du carré de la distance entre les deux centres

de cellules $\frac{1}{\|\vec{d}_k\|^2}$.

Le terme convectif de l'Eq. II.21 est approximé par une somme sur les faces f qui constituent la surface S :

$$\int_S \rho \phi \vec{U} \cdot \vec{n} \, dS = \sum_f (\rho \phi A)_f \vec{U}_f \cdot \vec{n}_f \quad (\text{II.25})$$

Le calcul de la valeur à la face ϕ_f requiert une interpolation adéquate qui garantit à la fois un schéma précis et borné. Pour ce faire, nous avons implémenté le schéma non linéaire, haute résolution (HR) CUBISTA proposé par Alves et al. (2003) sous sa formulation Υ donnée par Ng et al. (2007). Ainsi, ϕ_f est exprimée en fonction de la valeur amont (UP) de ϕ et de sa valeur par différentiation centrée (CD) :

$$\phi_f^{HR} = \phi^{UP} + \Upsilon \left(\phi_f^{CD} - \phi^{UP} \right) \quad (\text{II.26})$$

Le coefficient Υ est déterminé à chaque face en tenant compte localement du profil de la solution, en utilisant l'approche NVD (Normalized Variable Diagram) et en respectant le critère CBC (Convection Boundedness Criterion) (Gaskell et Lau, 1988). Le premier terme du membre de droite de l'Eq. (II.26) est pris en compte implicitement, tandis que le second terme est pris en compte explicitement avec l'approche de correction différée (Ferziger et Perić, 1999). Cette pratique renforce le conditionnement de la matrice du système linéaire obtenu.

Le couplage vitesse-pression est assuré par l'algorithme SIMPLE (Patankar, 1980), tandis que le flux massique aux faces des cellules est calculé par l'interpolation de Rhie-Chow (Rhie et Chow, 1983), afin d'éviter l'effet de damier dans le champ de pression.

A chaque itération de l'algorithme SIMPLE, l'équation de l'énergie est résolue après la résolution de l'équation du mouvement et l'équation de Poisson pour la

correction de pression. La résolution de l'équation de l'énergie est intégrée dans l'itération SIMPLE pour tenir compte du niveau élevé de son couplage avec l'équation de la quantité de mouvement à travers le terme des forces de volume et le couplage avec les conditions aux limites thermocapillaires.

L'implémentation du code Tamaris est faite en langage C++ avec une approche orientée objets. Dans sa version séquentielle, le code utilise des solveurs de Krylov (BiCGStab, GMRES), avec préconditionnement ILU à travers l'implémentation de la librairie IML++ (Dongarra et al., 1994). La parallélisation du code est pour sa part basée sur le concept de décomposition de maillage sans chevauchement. La génération du maillage est réalisée généralement par le mailleur libre Gmsh (Geuzaine et Remacle, 2009) et les décompositions sont effectuées par les outils Metis (Karypis et Kumar, 1998) ou Chaco (Hendrickson et Leland, 1995). Le code Tamaris utilise la librairie parallèle Petsc (Balay et al., 1997), qui offre une multitude de solveurs optimisés pour le calcul parallèle utilisant l'interface d'échange de données MPI. Chaque partition du maillage est confiée à un seul processeur qui assemble une partie de la matrice distribuée du système linéaire avant qu'il ne soit résolu par des méthodes itératives de type Krylov, comme la méthode GMRES. La librairie Petsc fournit aussi une interface vers d'autres librairies, comme Hypre et son solveur multigrilles algébrique Boomer AMG, et elle fait l'objet d'optimisations et de développements continus. Afin de bénéficier des performances de Petsc, toutes les procédures parallélisées du code ont été implémentées à l'aide des outils fournis par cette librairie (les vecteurs distribués de stockage des variables et les appels de mise à jour des valeurs "ghost" par exemple). Toutes les tâches du code s'exécutent donc en parallèle. De plus, pour ne pas ralentir les calculs, la sauvegarde périodique des résultats intermédiaires est réalisée de façon fractionnée : chaque processeur écrit dans un fichier propre la partie des résultats dont il a la charge. Les résultats ne sont combinés que pendant la phase de post-traitement.

II.6. Validation

Afin de vérifier la fiabilité et la précision du code de calcul, il est nécessaire de le valider et de le tester en comparant les résultats obtenus en utilisant le code avec des résultats disponibles dans la littérature. Plusieurs études de validation du code dans différentes situations ont été précédemment menées (El Omari et Le Guer, 2010a,b). Deux autres configurations physiques plus proches de notre étude ont également servi à valider le code. Il s'agit du cas de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) et de celui de la convection thermocapillaire qui permet d'introduire les effets de la tension de surface.

II.6.1. Cas de l'écoulement Poiseuille-Rayleigh-Bénard

La première configuration test est celle d'un écoulement de type Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB). Une solution numérique tridimensionnelle de référence (benchmark) pour ce type de configuration a été obtenue par Nicolas et al. (2011). Il s'agit d'un écoulement tridimensionnel de convection mixte dans un canal horizontal rectangulaire chauffé uniformément par le bas et refroidi par le haut. La géométrie du domaine de calcul est définie par les rapports de forme longitudinal ($A = 50$) et transversal ($B = 10$). Les paramètres de l'écoulement sont fixés par l'intensité de la convection forcée ($Re = 50$) et naturelle ($Ra = 5000$), ainsi que les caractéristiques du fluide (air : $Pr = 0,7$). Ces valeurs des paramètres conduisent à une solution stationnaire à dix rouleaux longitudinaux, présentée sur la Figure II.3.

Dans ce cas test, nous avons utilisé un maillage non uniforme de résolution $n_x = 128$, $n_y = 176$ et $n_z = 50$. Dans la direction de l'écoulement, le maillage est raffiné au voisinage de la zone où l'on commence à chauffer et ensuite progresse d'une manière régulière jusqu'à la zone convectivement développée où il devient uni-

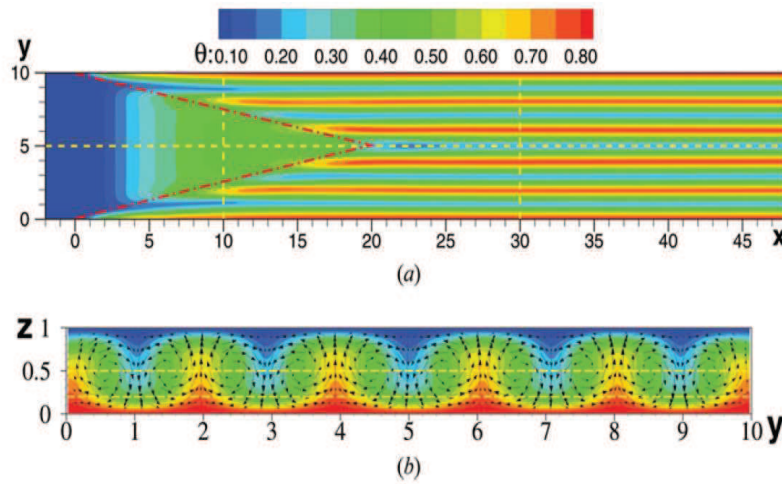


Figure II.3.: *Solution numérique du problème. a) Champ de température dans le plan médian horizontal. b) Champs de température et vecteurs vitesse dans la section transversale à $X = 30$. (figure tirée de Nicolas et al. (2011))*

forme. Nous présentons sur la Figure II.4 les profils longitudinaux des composantes adimensionnées de la vitesse (V_x et V_z) et de la température réduite θ obtenues par le code de calcul et les comparons aux résultats donnés par Nicolas et al. (2011). Le tableau II.1 donne les valeurs de l'énergie cinétique du fluide en écoulement $2E_c$ (multipliée par deux) et de la différence de pression entre les sections d'entrée et de sortie ΔP_{io} qui sont des quantités qui représentent l'écoulement dans son ensemble.

	$2E_c$	ΔP_{io}
Résultats de Nicolas et al. (2011)	1.292453	14.40670
Nos résultats	1.2915	14.3101
Ecart relatif	0,074%	0,68%

Table II.1.: *Résultats du cas test de l'écoulement de PRB comparés avec les solutions de référence du Benchmark de Nicolas et al. (2011)*

La Figure II.4 et le Tableau II.1 montrent que nos résultats sont en bon accord avec les résultats de Nicolas et al. (2011) puisque l'écart relatif entre les valeurs de $2E_c$ et ΔP_{io} ne dépasse pas 1%. Nous constatons que la validité du code de calcul

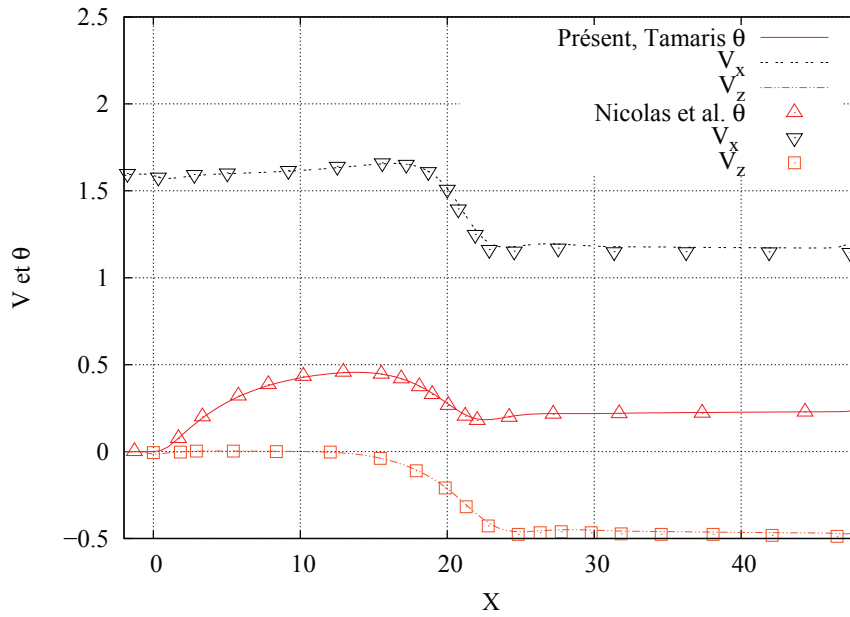


Figure II.4.: Profils longitudinaux des grandeurs adimensionnées V_X , V_Z et θ (lignes) le long de l'axe ($Y = 5$, $Z = 0.5$) comparés avec la solution de référence de Nicolas et al. (2011) (symboles).

pour ce type d'écoulement tridimensionnel de convection mixte est bien assurée.

II.6.2. Cas de la convection thermocapillaire

Le deuxième cas test pour valider le code de calcul concerne la convection thermocapillaire (ou convection de Marangoni). Nous considérons l'écoulement d'un fluide dans une cavité carrée $2D$ avec surface libre et de rapport de forme $\Gamma = \text{Largeur}/\text{hauteur} = 1$. La paroi horizontale du bas est supposée adiabatique et les parois verticales sont différentiellement chauffées à température uniforme. La gravité est perpendiculaire à la paroi horizontale. Les paramètres de contrôle du cas test sont : le nombre de Reynolds thermocapillaire défini par : $Re_{th} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\Delta T H}{\rho \nu^2}$, le nombre de Prandtl Pr , (le nombre de Marangoni étant $Ma = Re_{th} Pr$) et le nombre de Bond dynamique $Bd = \frac{\rho g H^2}{\sigma}$, qui caractérise l'importance des forces de flottabilité par rapport aux forces thermocapillaires.

Nous avons effectué des simulations numériques pour différentes combinaisons des paramètres de contrôle en utilisant un maillage uniforme de résolution 121×121 . Sur la Figure II.5, est représenté le profil de la température au niveau de la surface libre (pour un fluide avec $Pr = 1$) pour deux nombres de Marangoni ($Ma = 10^3$ et $Ma = 10^4$). Nos résultats sont comparés à ceux donnés par Zebib et al. (1985). Dans le Tableau II.2, nous présentons aussi les résultats des autres combinaisons de paramètres de contrôle comparés avec les données publiées précédemment par différents auteurs (Carpenter et Homsy, 1990; Kuhlmann et Albensoeder, 2008; Xu et Zebib, 1998; Carpenter et Homsy, 1989).

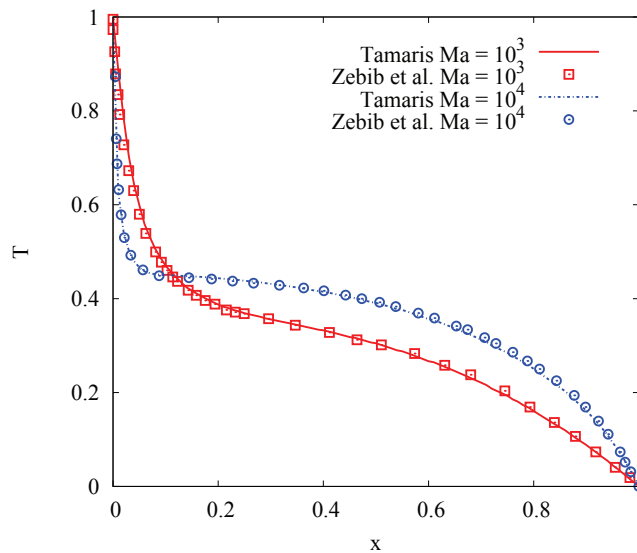


Figure II.5.: *Profils de température au niveau de la surface libre d'une cavité carrée 2D pour deux nombres de Marangoni ($Ma = 10^3$ et $Ma = 10^4$). Résultats comparés avec ceux donnés par Zebib et al. (1985). Le nombre de Prandtl est fixé à $Pr = 1$.*

La Figure II.5 et le Tableau II.2 montrent une bonne concordance entre les résultats obtenus à l'aide du code de calcul TAMARIS et les résultats publiés dans la littérature. La validité du code de calcul pour ce type d'écoulement thermocapillaire est donc bien assurée.

Parameters	Author/Grid	$u(0,0.5)$	$Nu_{x=0.5}$	$Nu_{x=-0.5}$
$Re_{th} = 10000$ $Pr = 1$ $Ma = 10000$ $Bd = 0$	Xu et Zebib (1998)	-305	4.36	4.36
	Carpenter et Homsy (1990)	-296	4.33	4.36
	Kuhlmann et Albensoeder (2008) (115x115)	-304.36	4.364	4.364
	Kuhlmann et Albensoeder (2008) (211x211)	-304.27	4.363	4.363
	Nos résultats (121x121)	-301.99	4.358	4.361
$Re_{th} = 5000$ $Pr = 1$ $Ma = 5000$ $Bd = 10$	Carpenter et Homsy (1989)	-179	4.17	4.14
	Kuhlmann et Albensoeder (2008) (115x115)	-175.90	4.546	4.545
	Kuhlmann et Albensoeder (2008) (211x211)	-175.97	4.545	4.545
	Nos résultats (121x121)	-174.38	4.543	4.543
$Re_{th} = 2000$ $Pr = 30$ $Ma = 60000$ $Bd = 0$	Xu et Zebib (1998)	-29.8	6.61	6.61
	Carpenter et Homsy (1990)	-37.2	6.60	6.42
	Kuhlmann et Albensoeder (2008) (115x115)	-24.22	6.26	6.26
	Kuhlmann et Albensoeder (2008) (211x211)	-23.98	6.234	6.234
	Nos résultats (121x121)	-24.64	6.135	6.235

Table II.2.: Résultats du cas test de validation pour un écoulement thermocapillaire dans une cavité carrée 2D. Comparaison avec les résultats de la littérature (Carpenter et Homsy, 1990; Kuhlmann et Albensoeder, 2008; Xu et Zebib, 1998; Carpenter et Homsy, 1989). $u(0,0.5)$ est la vitesse au centre de la surface libre, $Nu_{x=0.5}$ et $Nu_{x=-0.5}$ sont les valeurs moyennes de nombre de Nusselt sur les deux parois latérales de la cavité.

II.7. Etude de l'influence du maillage

A fin de s'assurer que les résultats ne dépendent pas du maillage choisi, une étude préliminaire du choix de maillage de calcul est nécessaire. Les maillages qui ne sont pas suffisamment fins génèrent des erreurs, notamment dans les zones à forts gradients. Pour cette raison, nous avons mené un test avec plusieurs maillages de taille différentes pour de faibles et grands nombres de Rayleigh. Les autres paramètres de contrôle sont fixés à $Pr=7$, $Re=15$, $Bi = 15$ et $Ma = 500$.

Pour $Ra = 5000$, le Tableau II.3 montre les résultats de l'évolution du nombre de Nusselt moyen calculé sur la surface inférieure du canal pour différentes résolutions de maillage. La Figure II.6 montre le profil longitudinal de la température réduite le long de l'axe $(Y, Z) = (5, 0.5)$ pour les quatre maillages étudiés. Nous remarquons

donc d'après le Tableau II.3 et la Figure II.6, un écart très important entre le maillage le plus grossier et le suivant dans l'ordre de raffinement. Ces écarts deviennent plus faibles ($< 1\%$) à partir du maillage de résolution $128 \times 176 \times 50$ mais avec des temps de calcul qui ont nettement augmentés. Nous concluons que pour $Ra = 5000$ le maillage de résolution $128 \times 176 \times 50$ constitue un bon compromis entre précision du résultat et coût de calcul.

D'autres tests de maillage ont été faits pour de grands nombres de Rayleigh. La Figure II.7 ainsi que les comparaisons quantitatives montrent que la résolution de maillage optimale (compromis précision-temps de calcul) pour le nombre de Rayleigh $Ra = 12500$ est $153 \times 211 \times 60$. Cela correspond à un maillage plus fin que dans le cas des nombres de Rayleigh plus petit.

Maillages	Temps de calcul (24 processeurs)	Nu_m
102x140x40	2 h, 36min	2.41663
115x158x45	4 h, 41min	2.43877
128x176x50	12 h, 35min	2.47479
153x211x60	51 h, 20min	2.47639

Table II.3.: Comparaison du nombre de Nusselt moyen Nu_m pour différentes résolutions du maillage et un nombre de Rayleigh $Ra = 5000$.

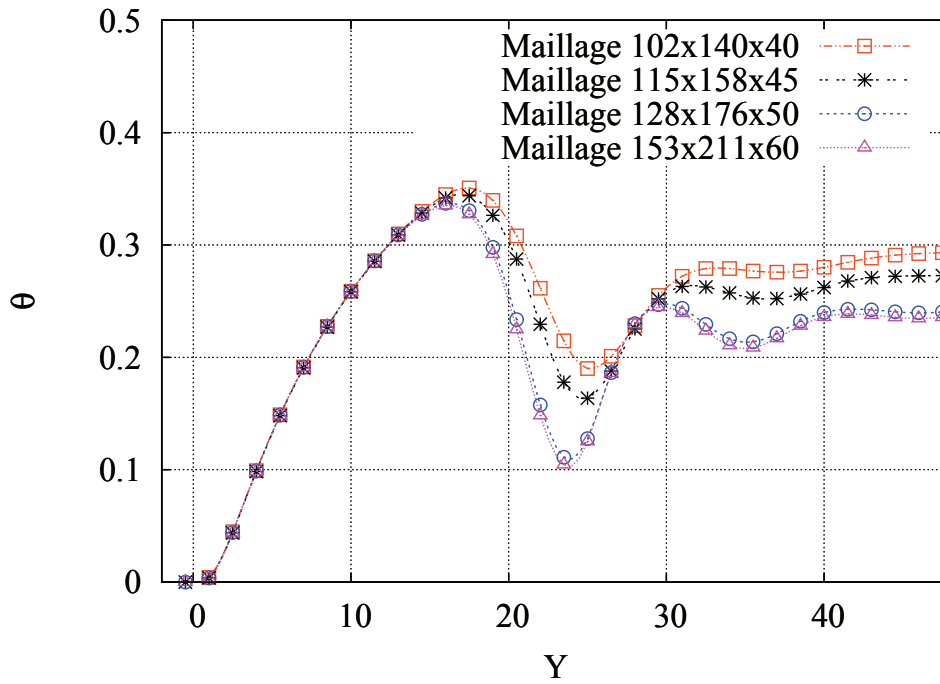


Figure II.6.: Profil longitudinal de la température réduite le long de l'axe $(Y, Z) = (5, 0.5)$ pour différents maillages et pour $Ra = 5000$.

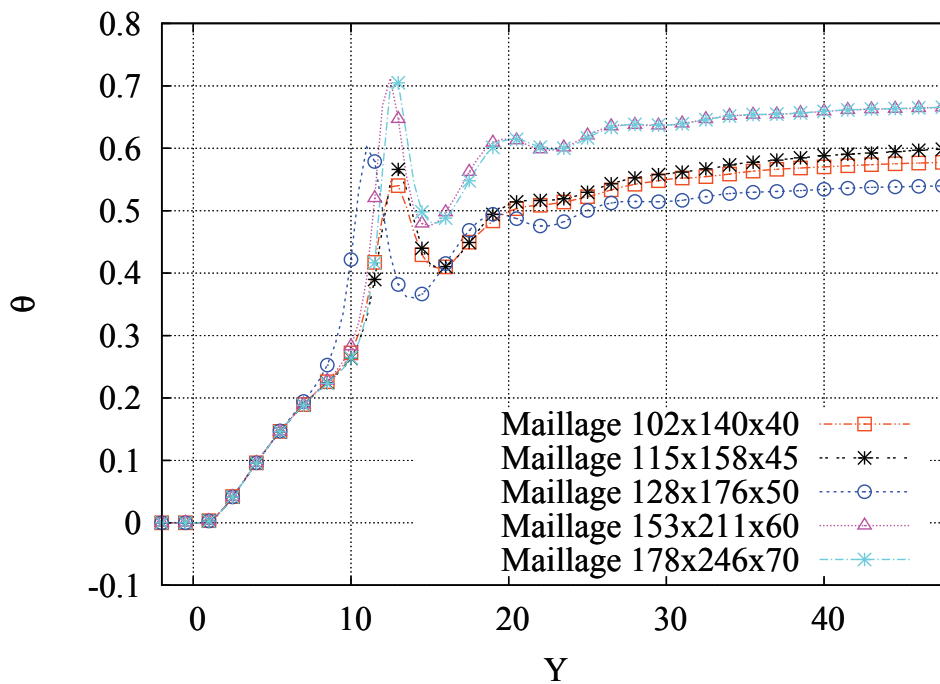


Figure II.7.: Profil longitudinal de la température réduite le long de l'axe $(Y, Z) = (5, 0.5)$ pour différents maillages et pour $Ra = 12500$.

CHAPITRE III

Résultats de la simulation numérique tridimensionnelle

Ce chapitre est dédié à la présentation des résultats numériques de l'étude de la convection mixte combinée aux effets thermocapillaires dans un canal horizontal ouvert (à surface libre) tridimensionnel chauffé uniformément par le bas (écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni (PRBM)). Pour étudier l'influence des instabilités thermiques sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur, nous examinons plusieurs résultats numériques pour différents paramètres adimensionnels qui contrôlent la physique du problème. Ces paramètres sont le nombre de Reynolds, le nombre de Rayleigh, le nombre de Biot, le nombre de Marangoni et le rapport de forme. Le nombre de Prandtl sera fixé à $Pr = 7$ dans toute ce chapitre. Nous limitons, également dans ce chapitre, l'étude au développement des rouleaux longitudinaux stationnaires. Ainsi, la gamme couverte par les paramètres de contrôle est ($10 \leq Re \leq 20$, $2500 \leq Ra \leq 12500$, $0 \leq Bi \leq 20$ et $0 \leq Ma \leq 3000$). La combinaison (Re, Ra) est choisie de manière à avoir une valeur modérée du nombre de Richardson ($Ri < 8$) qui donne une solution de rouleaux longitudinaux stationnaires que l'on trouve également dans la configuration de PRB (Chang et al., 1997;

(Chang et Lin, 1998; Mergui et al., 2011).

Pour quantifier le transfert thermique, nous définissons les nombres de Nusselt local, moyen et moyen transversal respectivement par :

$$Nu_l(X, Y) = - \left(\frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)_{Z=0} \quad (\text{III.1})$$

$$Nu_m = \frac{1}{S} \int_S Nu_l \, dS \quad (\text{III.2})$$

$$Nu_{mt}(X) = \frac{1}{10} \int_0^{10} Nu_l \, dY \quad (\text{III.3})$$

où S est la surface de la paroi inférieure chauffée du canal.

III.1. Formation et évolution spatiale des rouleaux longitudinaux

Dans la gamme de nombres adimensionnels étudiée, les structures d'écoulement dans le canal ouvert se présentent sous la forme de rouleaux longitudinaux stationnaires. Ces structures sont similaires à celles observées dans le cas de l'écoulement de PRB (parois horizontales rigides). Nous présentons sur la Figure III.1, une visualisation de l'initiation et du développement des rouleaux longitudinaux pour différentes sections du canal (selon la direction X). Les paramètres de contrôle de l'écoulement sont fixés à $Pr = 7$, $Ra = 5000$, $Re = 7$, $Bi = 15$ et $Ma = 500$. Pour ce cas, nous observons que les rouleaux longitudinaux sont d'abord initiés près des parois latérales et se propagent progressivement vers le centre du canal pour envahir finalement toute la section droite. En effet, le mécanisme de transfert de chaleur prédominant au voisinage des parois latérales est la conduction thermique conduisant à une augmentation locale de la température en raison de la faible vitesse

de l'écoulement liée au frottement. Ce chauffage du fluide induit des courants de convection naturelle à proximité de ces parois latérales, ce qui provoque l'apparition des premiers rouleaux longitudinaux. Le transport transversal de la quantité de mouvement provoque alors la formation progressive des autres rouleaux vers le centre du canal dans le sens de l'écoulement (les rouleaux longitudinaux forment un V dans la zone d'établissement thermique). Le mécanisme de formation des rouleaux longitudinaux dans ce cas d'étude est du même type que celui rencontré dans le cas de la configuration de PRB, et cela est plus particulièrement vrai lorsque les forces thermocapillaires sont faibles. Ce mécanisme d'initiation a été décrit pour le cas de PRB par exemple par Benderradji et al. (2008) et Mergui et al. (2011). La dimension des rouleaux est de même ordre de grandeur que celle de la hauteur du canal. La région convectivement développée contient 10 rouleaux longitudinaux.

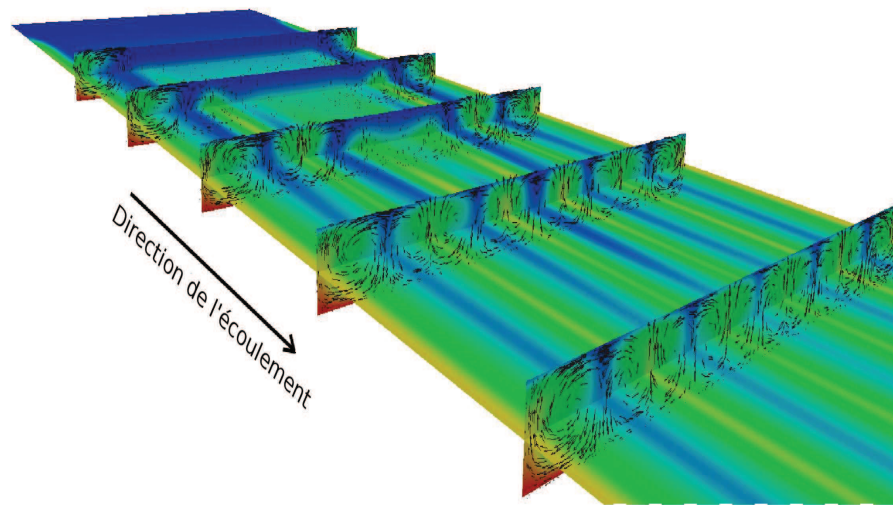


Figure III.1.: *Visualisation de l'initiation et du développement des rouleaux longitudinaux pour différentes sections transversales du canal ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Bi = 15$ et $Ma = 500$).*

III.2. Compétition entre la flottabilité et l'écoulement forcé

Pour mettre en évidence l'effet des nombres de Reynolds et de Rayleigh sur le développement spatial des rouleaux longitudinaux, nous présentons sur la Figure III.2 le champ de température au niveau de la surface libre pour différentes valeurs du nombre de Reynolds $10 \leq Re \leq 20$ et pour $Ra = 5000$ et sur la Figure III.3 le champ de température au niveau de la surface libre pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh $2500 \leq Ra \leq 12500$ et pour $Re = 15$. Les autres paramètres sont fixés ($Bi = 15$, $Ra = 5000$ et $Ma = 0$). Nous sommes dans le cas de la convection thermogravitaire avec surface libre mais sans prise en compte des effets liés à la variation de la tension de surface en fonction de la température. Nous observons, sur la Figure III.2, que l'augmentation du nombre de Reynolds provoque le déplacement vers l'aval de la position à laquelle apparaissent les rouleaux longitudinaux. Cet effet est particulièrement vrai pour les rouleaux centraux, qui apparaissent à la position $X = 17$ pour $Re = 10$, alors qu'ils apparaissent à une position $X = 33$ pour $Re = 20$. Les rouleaux près des parois latérales se forment presque à la même position, quel que soit le nombre de Reynolds. Par contre, nous pouvons observer sur la Figure III.3, que l'augmentation du nombre de Rayleigh décale la position de l'apparition des rouleaux longitudinaux centraux vers l'entrée du canal. Comme constaté pour le cas de l'étude portant sur l'effet du nombre de Reynolds, la position de naissance des rouleaux près des parois latérales n'est pas affectée par le changement du nombre de Rayleigh et les rouleaux se forment presque à la même position longitudinale X . On en conclue que l'évolution spatiale des rouleaux longitudinaux est régie par le rapport des forces de flottabilité et d'inertie caractérisé par le nombre de Richardson $Ri = Ra/(Pr Re^2)$. Comme cela a déjà été observé dans la configuration de PRB, augmenter Re ou diminuer Ra déplace en aval la région pleinement développée des

rouleaux longitudinaux (Kamotani et Ostrach, 1976; Chang et al., 1997).

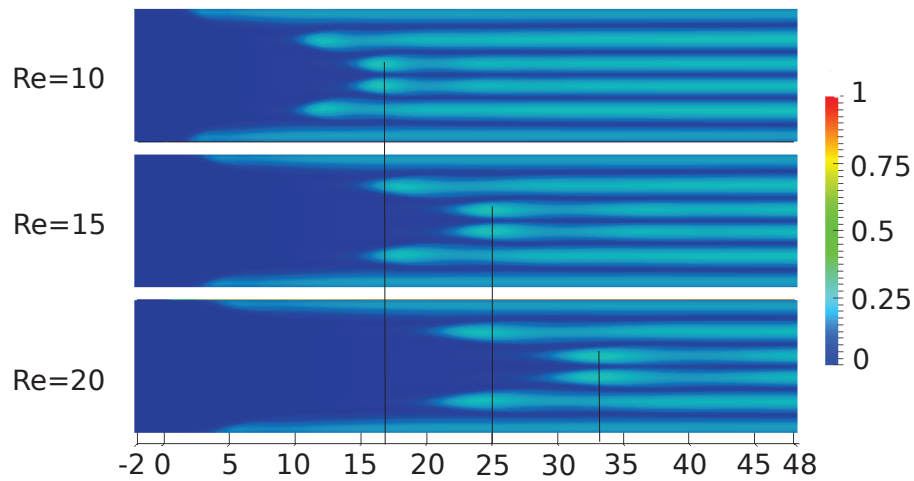


Figure III.2.: Champ de la température réduite θ au niveau de la surface libre pour différents nombres de Reynolds Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).

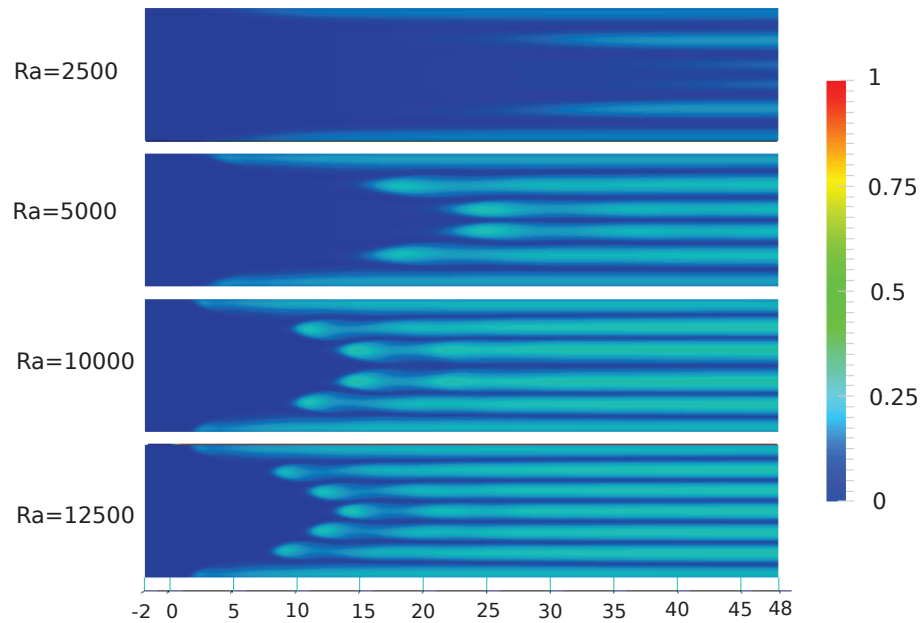


Figure III.3.: Champ de la température réduite θ au niveau de la surface libre pour différents nombres de Rayleigh Ra ($Bi = 15$, $Re = 15$, $Ma = 0$).

Le nombre de rouleaux n'est pas affecté par la variation du nombre de Reynolds (10 rouleaux), alors qu'il est passé de 10 rouleaux pour les faibles valeurs du nombre

de Rayleigh à 12 rouleaux pour $Ra = 12500$, puisque leur formation est liée à la convection naturelle. Il est à noter que nous avons simulé le cas particulier de $Ra = 2500$ avec un canal de longueur $X = 80$ (cf. Figure III.4). En effet, dans ce cas de faible nombre de Richardson, la longueur d'établissement pour obtenir les rouleaux longitudinaux est plus grande. Sur la Figure III.3, les résultats correspondant au cas $Ra = 2500$ ont été coupés à l'abscisse $X = 50$ pour les besoins de la comparaison.

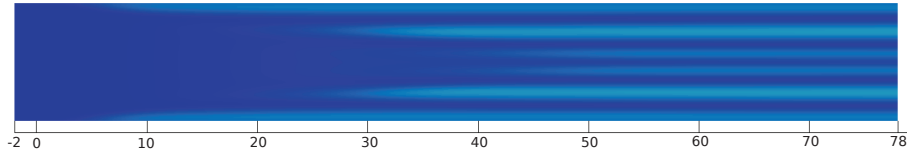


Figure III.4.: *Champ de la température réduite θ au niveau de la surface libre dans un canal de longueur $X = 80$ pour $Ra = 2500$ ($Bi = 15$, $Re = 15$, $Ma = 0$).*

Pour évaluer l'influence des nombres de Reynolds et de Rayleigh sur le transfert de chaleur, nous présentons sur les Figures III.5 et III.6 la variation le long du canal du nombre de Nusselt moyen transversal (cf. Eq. III.3) respectivement en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Rayleigh. L'évolution de Nu_{mt} est similaire à celle observée pour la configuration de PRB (Nicolas, 2002). Le nombre Nu_{mt} diminue d'abord dans la zone caractérisée par la convection forcée, puis augmente pour atteindre une valeur maximale dans la zone caractérisée par le développement de la convection mixte avant de diminuer à nouveau légèrement dans la zone où la convection mixte est établie. Les positions pour lesquelles le nombre Nu_{mt} est maximale, correspondent aux positions d'apparition des rouleaux centraux. A faibles nombres de Reynolds (cf. Figure III.5), la convection naturelle améliore le transfert de chaleur sur une courte distance après l'entrée du canal, ce qui provoque l'augmentation de Nu_{mt} pour atteindre un maximum au niveau de la section où tous les rouleaux sont développés. Ce maximum a presque la même valeur pour tous les nombres de Reynolds, mais il est obtenu pour des positions différentes. Nous constatons aussi sur la Figure III.5 que le transfert thermique dans la région pleinement

développée est indépendant du nombre de Reynolds (même valeur asymptotique de $Nu_{mt} : Nu_{mt} = 2.3$). Ce résultat est aussi trouvé dans la configuration de PRB Nicolas (2002). Le Tableau III.1 présente l'évolution du nombre de Nusselt moyen Nu_m (cf. Eq. III.2) sur toute la paroi chauffée en fonction du nombre de Reynolds. Le Nu_m augmente légèrement avec l'augmentation de Re , ceci peut s'expliquer par la transition vers le régime de convection forcée (l'importance relative de la convection naturelle devient négligeable pour $Ri < 0.1$), dans ce cas le transfert thermique est assuré principalement par les flux convectifs. En effet, comme trouvé dans le cas de la configuration PRB Nicolas (2002), le transfert de chaleur dans la région pleinement développée est indépendant de Re (cf. Figure III.5). L'augmentation du nombre du Reynolds augmente la longueur de la zone d'entrée pour laquelle la convection forcée est dominante, ce qui affecte favorablement le transfert de chaleur.

Lorsque l'on augmente le nombre de Rayleigh, la valeur de Nu_{mt} est significativement augmentée par rapport au cas de la convection forcée pure (cf. Figure III.6). Cela est dû au renforcement de la convection naturelle, qui apparaît près de l'entrée pour les grands nombres de Rayleigh ($Ra = 12500$), et à l'augmentation de l'énergie cinétique générée par l'existence d'un nombre plus important de rouleaux longitudinaux. Les petites oscillations observées dans les évolutions de Nu_{mt} sont associées à des modulations longitudinales de la forme des rouleaux dans la zone où ceux-ci commencent à se développer.

Nous notons que le nombre de Nusselt Nu_{mt} pour la configuration de PRB reste constant dans la zone pleinement établie (Nicolas, 2002), tandis que, le nombre Nu_{mt} diminue légèrement lorsque la surface supérieure est considérée libre. Cela est dû au nombre de Biot considéré comme non infini. Nous allons discuter plus en détail cet effet dans la section suivante.

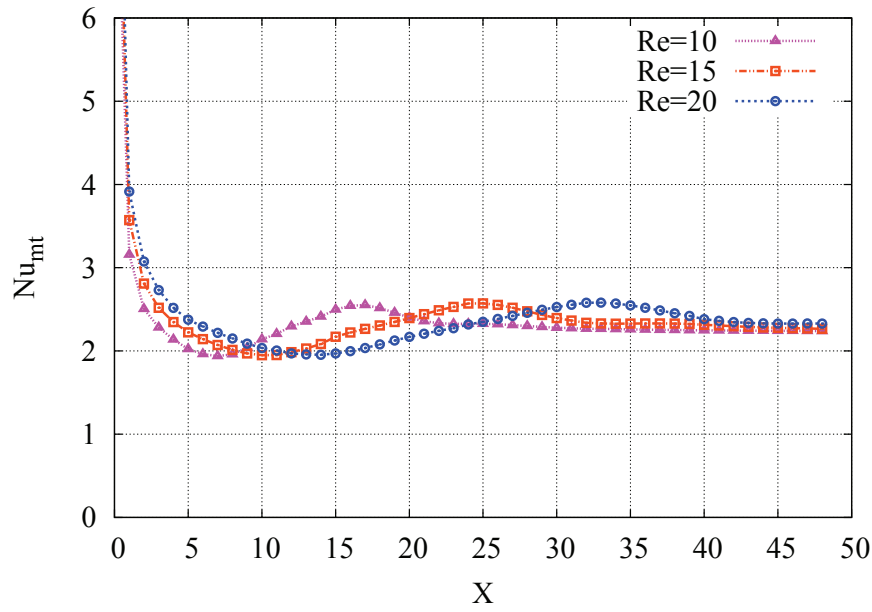


Figure III.5.: Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} pour différents nombres de Reynolds Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).

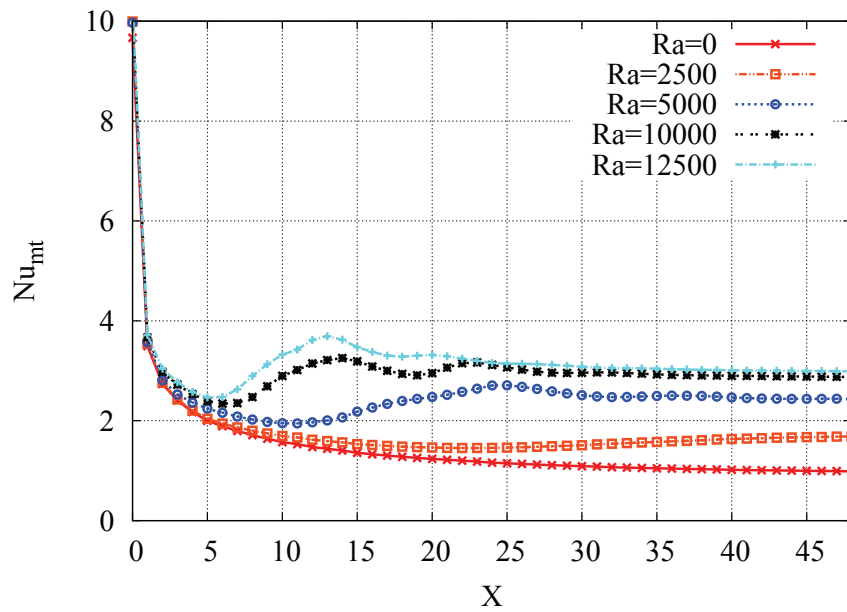


Figure III.6.: Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} pour différents nombres de Rayleigh Ra ($Bi = 15$, $Re = 15$, $Ma = 0$).

Re	10	15	20
Ri	7.14	3.17	1.78
Nu_{av}	2.35	2.39	2.42

Table III.1.: Evolution du nombre de Nusselt moyen Nu_m pour différents nombres de Reynolds Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).

III.3. Effet du nombre de Biot

Nous présentons sur les Figures III.7 et III.8 la variation transversale du nombre de Nusselt local Nu_l (cf. Eq. III.1) au niveau de la paroi inférieure pour différents nombres de Biot respectivement à $X = 25$ (début du développement des rouleaux longitudinaux) et à $X = 40$ (tous les rouleaux de la section transversale sont complètement développés). Le nombre de Biot mesure le rapport de la résistance thermique interne du film liquide à la résistance thermique entre la surface libre et l'air ambiant. Un nombre de Biot nul correspond à une surface libre adiabatique (aucun échange de chaleur à l'interface) et un grand nombre de Biot correspondra à un fort échange de chaleur au niveau de l'interface. Nous avons fixé les autres paramètres de l'écoulement à $Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Ma = 0$. Nous observons sur ces figures que le transfert de chaleur pariétal a une distribution sinusoïdale pour tous les cas étudiés. La répartition et le nombre de sommets sont liés à la distribution de la vitesse dans le liquide générée par la montée des panaches de fluide chaud sous l'action des forces de flottabilité. Ils reflètent donc l'organisation des instabilités thermiques en rouleaux longitudinaux. En comparaison, les résultats d'un canal avec une paroi supérieure rigide refroidie à la température T_0 sont également donnés (écoulement de PRB). A la position $X = 25$ (Figure III.7), le nombre de Nusselt local Nu_l du canal fermé présente six pics. Les deux pics au centre sont de très faible amplitude, cela est dû au début de la formation des rouleaux centraux. Pour le cas du canal avec surface libre, nous remarquons quatre pics pour $Bi = 0$ et cinq pics pour $Bi \geq 5$. L'amplitude de ces pics est plus intense au centre et

croît avec l'augmentation du nombre de Biot. Lorsque l'échange de chaleur sur la surface supérieure est très faible ($Bi \simeq 0$), la température du film liquide augmente d'une manière généralisée, ce qui réduit les gradients thermiques et réduit donc sensiblement le transfert de chaleur à la paroi inférieure. Egalement, le nombre de rouleaux convectifs est plus petit pour $Bi = 0$ en comparaison au nombre trouvé pour d'autres valeurs de Bi .

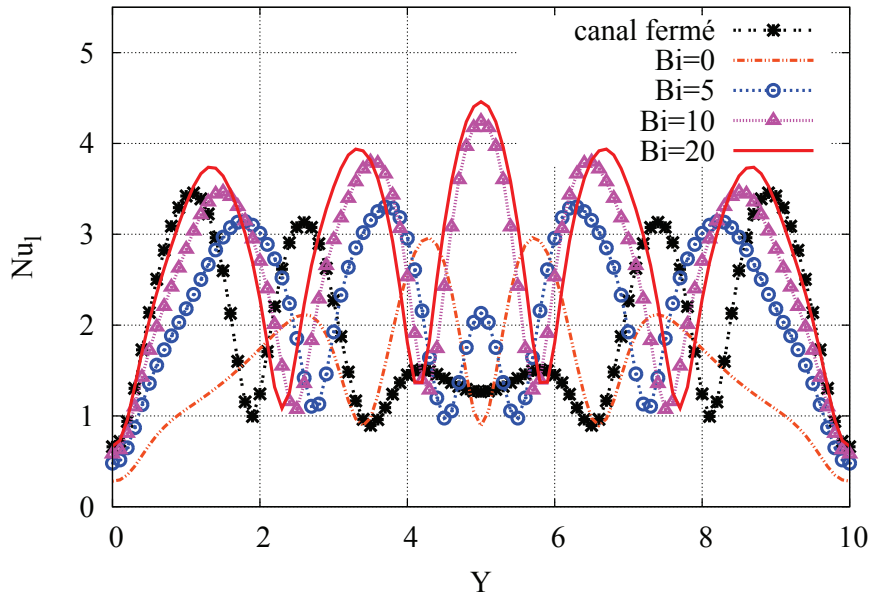


Figure III.7.: Variation transversale du nombre de Nusselt local Nu_l à la section droite $X = 25$ pour différents nombres de Biot ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).

Le champ hydrodynamique et la distribution de Nu_l sont liés. En effet, chaque pic de la courbe de Nu_l correspond à une paire de rouleaux. Ainsi, 8 rouleaux sont formés pour $Bi = 0$ et 10 rouleaux sont formés pour $Bi \geq 5$. Pour $Bi = 5$, les deux rouleaux centraux ont une intensité plus faible que celle des rouleaux latéraux, indépendamment de la position X . A l'inverse les cas $Bi = 10$ et $Bi = 20$, présentent des pics réguliers à $X = 40$, avec des valeurs de Nu_l légèrement supérieures pour $Bi = 20$ (cf. Figure III.8). La présence d'une paroi supérieure rigide avec température imposée (cas du canal fermé) augmente le nombre de rouleaux à

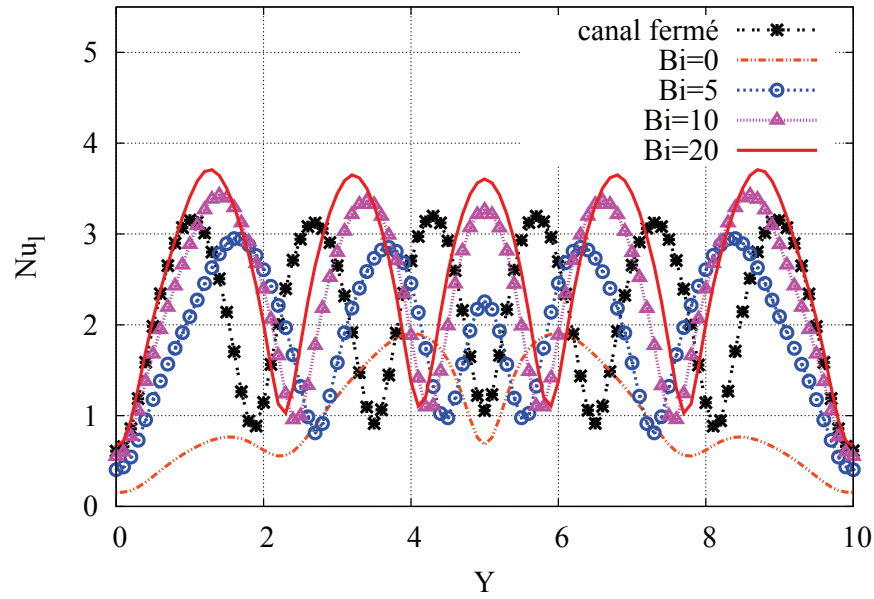


Figure III.8.: Variation transversale du nombre de Nusselt local Nu_l à la section droite $X = 40$ pour différents nombres de Biot ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 0$).

12. La température T_0 imposée au niveau de la paroi supérieure augmente le gradient thermique dans le film, ce qui devrait tendre à améliorer l'échange thermique. Cependant, cet effet favorable est contrebalancé par les effets visqueux rencontrés au voisinage de cette paroi qui diminuent la vitesse du fluide. Ainsi, les valeurs du nombre de Nusselt pour le canal fermé sont inférieures à celles obtenues pour $Bi = 10$ et $Bi = 20$. Nous observons également dans le cas d'un canal fermé que les rouleaux sont réguliers (même longueur d'onde), tandis que dans le cas du canal à surface libre, les rouleaux près des parois ont une longueur d'onde plus grande que ceux du centre.

Sur la Figure III.8, nous remarquons aussi que la longueur d'onde des rouleaux longitudinaux diminue avec l'augmentation du nombre de Biot, c'est à dire lorsque la résistance thermique spécifique $R_{conv} = 1/h$ diminue. Le même constat a été fait par Mergui et al. (2011) pour un écoulement de PRB avec une paroi supérieure conductrice. Il semble que lorsque le transfert de chaleur à la surface libre est aug-

menté (valeurs élevées de Bi), le transport de chaleur dans la couche de fluide a tendance à être assuré par des rouleaux stationnaires de petites longueurs d'onde. En effet, la différence réelle de température verticale dans le fluide est augmentée, car la température à la surface libre devient plus proche de T_0 .

Nous présentons sur la Figure III.9 la variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} pour différentes valeurs du nombre de Biot. Nous observons que pour le cas du canal avec surface libre, l'évolution de Nu_{mt} décroît dans un premier temps jusqu'à $X = 10$ puis augmente progressivement jusqu'à un maximum situé entre $X = 22$ et $X = 28$, ce qui correspond à une position pour laquelle tous les rouleaux sont développés dans la section droite de l'écoulement. Pour le cas du canal fermé, le maximum n'est atteint que vers $X = 37$. En effet, la présence de la paroi supérieure rigide stabilise l'écoulement engendrant ainsi un retard au niveau du développement des rouleaux longitudinaux. Nous observons aussi, comme mentionné dans le paragraphe précédent, que le nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} est constant dans la zone pleinement développée pour la configuration de l'écoulement de PRB, alors qu'il diminue lorsque la surface supérieure est considérée comme libre. Cette baisse est plus importante pour les faibles valeurs du nombre de Biot ($Bi = 0$ et $Bi = 5$) et elle est moins importante pour les grands nombres de Biot ($Bi = 10$ et $Bi = 20$). Pour les valeurs faibles du nombre de Biot, le nombre de Nusselt moyen transversal semble tendre vers une valeur asymptotique pour une longueur de canal plus grande.

III.4. Effet du nombre de Marangoni

Les variations de la tension superficielle avec la température (effet Marangoni ou effet thermocapillaire) génèrent des écoulements au niveau de la surface libre orientés des zones chaudes vers les zones froides. Nous présentons sur la Figure III.10 l'in-

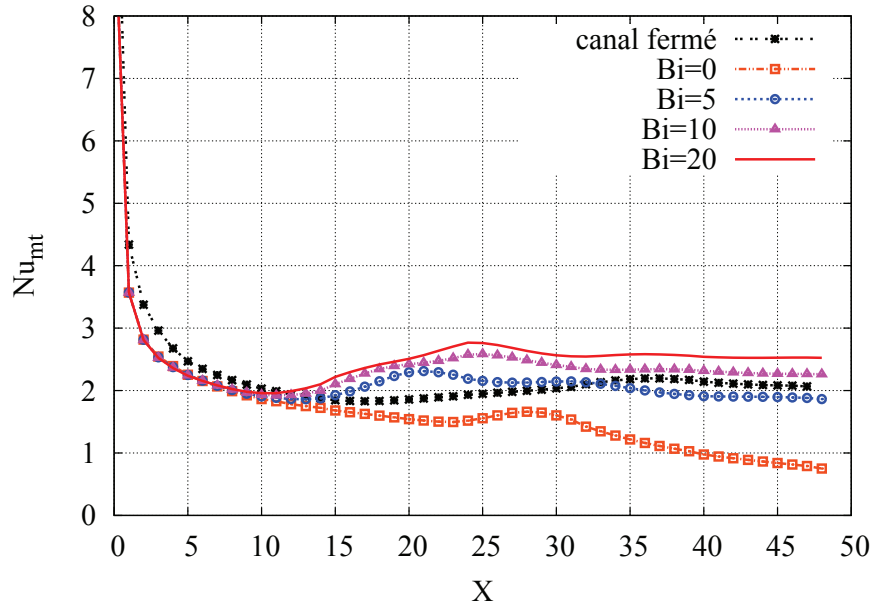


Figure III.9.: Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} pour différents nombres de Biot ($Ra = 5000$, $Re = 15$ et $Ma = 0$).

fluence de l'effet thermocapillaire sur le champ de température associé aux vecteurs vitesse. Les résultats sont présentés pour la section droite ($X = 40$) pour laquelle l'écoulement est pleinement développé et pour différentes valeurs du nombre de Marangoni. Pour bien analyser l'action des forces thermocapillaires sur l'écoulement sans interaction avec les forces de flottabilité, nous avons choisi de négliger dans premier temps la convection naturelle en prenant $Ra = 0$. Nous observons que la variation de la tension superficielle avec la température induit des rouleaux similaires à ceux créés par convection naturelle. Les résultats indiquent clairement que, pour $Ma = 500$, l'écoulement est dominé par la convection forcée. Les premiers rouleaux tourbillonnaires longitudinaux commencent à apparaître pour $Ma = 1000$ à partir du moment où l'effet thermocapillaire sur l'écoulement de base devient important. Plus le nombre de Marangoni augmente, plus le nombre de rouleaux tourbillonnaires augmente pour atteindre une valeur de 8 rouleaux dans la section droite. Un état symétrique complètement développé est obtenu pour $Ma = 3000$. La dimension des rouleaux est du même ordre de grandeur que la hauteur du canal.

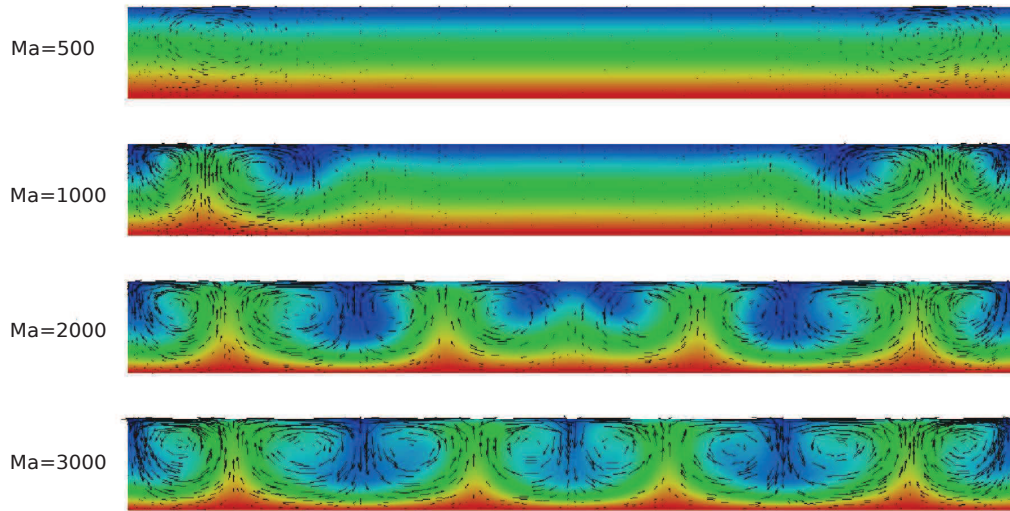


Figure III.10.: *Evolution des rouleaux longitudinaux dus aux effets Marangoni dans la section transversale à la position $X = 40$ ($Re = 15$, $Bi = 15$ et $Ra = 0$).*

Nous remarquons que le sens de rotation des rouleaux longitudinaux dû à la convection thermocapillaire est inversé par rapport au sens de rotation des rouleaux longitudinaux dû à la convection naturelle. En effet, l'écoulement est descendant vers le bas le long des parois verticales alors que sous le seul effet de la flottabilité (section précédente) et dans le cas de la configuration de PRB, l'écoulement est ascendant vers le haut (Mergui et al., 2011). Pour expliquer l'origine de ce phénomène, nous présentons sur la Figure III.11 le scénario d'apparition des rouleaux latéraux le long du canal à différentes sections droites correspondant à $X = 5$, $X = 8$, $X = 15$ et $X = 40$ et pour $Ma = 3000$. En l'absence de convection naturelle (ou pour une flottabilité relativement faible), l'écoulement forcé dans le canal provoque d'abord la déformation de la stratification de la température (section droite en $X = 5$ au voisinage des parois latérales). Ainsi, près des parois verticales adiabatiques le fluide ayant une vitesse plus faible voit sa température augmenter par rapport à celle du fluide au milieu du canal. Ceci est vrai également au niveau de la surface libre. Il en résulte un gradient de température surfacique qui est à l'origine de la création d'un premier rouleau au voisinage de la paroi. L'écoulement au sein de ce premier rouleau,

à cette section droite, est ascendant au voisinage de la paroi verticale. Le panache de fluide chaud soulevé par ce premier rouleau atteint la surface libre à une position décalée par rapport à la paroi latérale en raison du mouvement rotatif du fluide imposé par ce rouleau. Ainsi, à des abscisses plus élevées (section droite en $X = 8$), une zone de fluide plus froid apparaît alors à la surface libre au voisinage immédiat de la paroi latérale, ce qui crée de nouveau un petit rouleau orienté cette fois vers la paroi et ce dernier continue à se développer jusqu'à occuper complètement la hauteur de la section transversale (en $X = 40$). Ce rouleau est donc créé par les forces thermocapillaires, il n'a donc pas d'équivalent en PRB. Dans l'écoulement de PRB, quel que soit le rapport de forme, l'écoulement remonte toujours le long des parois latérales.

Dans ce qui suit, nous considérons maintenant les effets des forces de flottabilité. La Figure III.12 illustre les variations transversales, pour une section $X = 30$, de la composante de vitesse transversale V_y , pour différentes valeurs du nombre de Marangoni (Ma) et pour $Re = 15$ et $Ra = 5000$. Nous constatons que V_y croît avec l'augmentation de Ma , ce qui confirme que l'effet Marangoni induit un écoulement de surface superposé à l'écoulement de base. Nous avons aussi noté que pour $Ma \geq 1200$, il y a une inversion de signe de la vitesse qui est clairement visible pour les rouleaux près des parois. Dans ce cas, les forces de tension superficielles deviennent plus importantes que les forces de flottabilité thermique et le mouvement de rotation du fluide est inversé pour le rouleau pariétal, suivant le même mécanisme que celui décrit pour la Figure III.11. Nous présentons sur la Figure III.13 des coupes transversales de l'écoulement à l'abscisse $X = 30$ qui montrent l'effet Marangoni sur les rouleaux longitudinaux. Sous l'influence des forces thermocapillaires, les rouleaux à proximité des parois latérales s'élargissent lorsque le nombre de Marangoni augmente, ce qui induit pour $Ma = 1200$ la fusion des deux rouleaux centraux dans les rouleaux adjacents et aussi la formation de deux autres

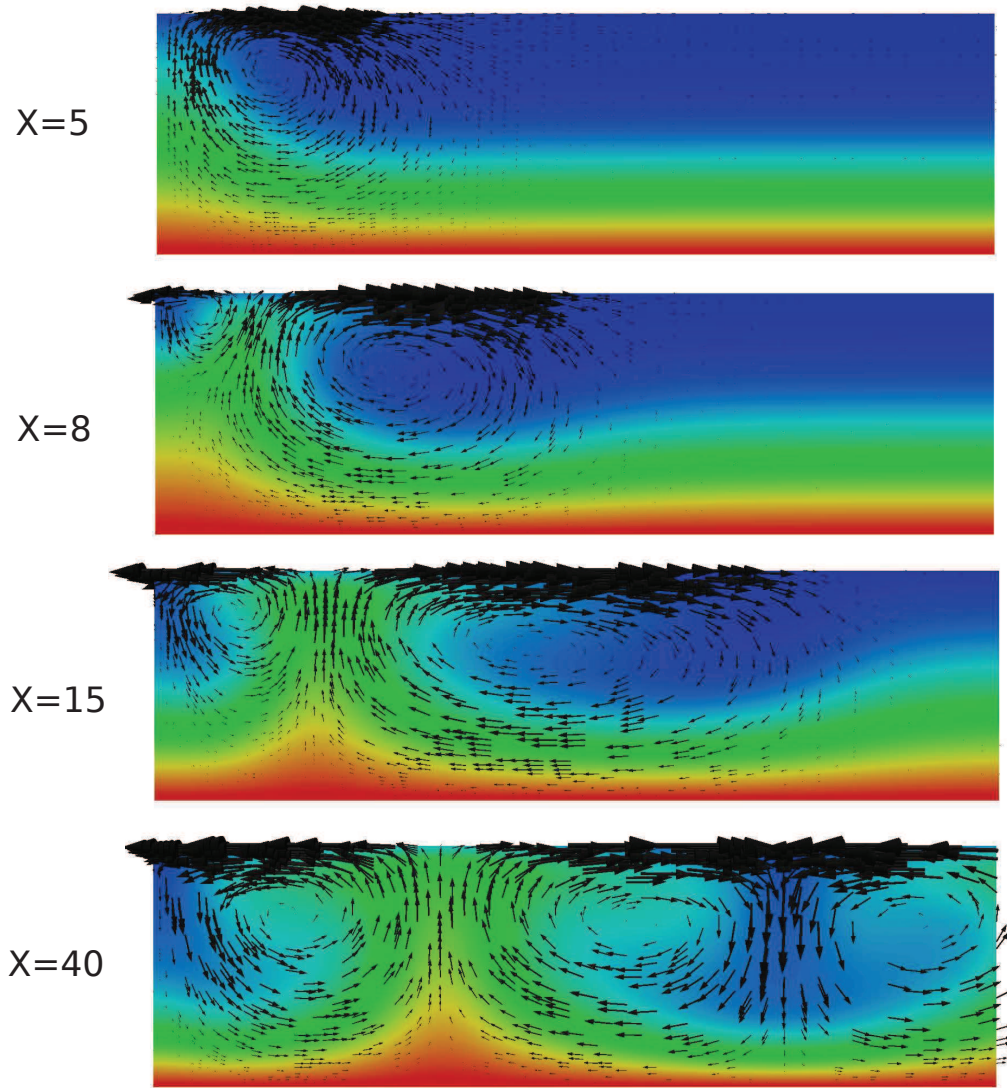


Figure III.11.: Coupes transversales de l'écoulement à $X = 5$, $X = 8$, $X = 15$ et $X = 40$ ($Ra = 0$, $Re = 15$, $Bi=15$ et $Ma = 3000$). Les vecteurs vitesse sont représentés ainsi que le champ de la température. Seulement les rouleaux au voisinage de la paroi verticale sont représentés.

nouveaux rouleaux au bord du canal. A leur tour, ces deux nouveaux rouleaux proches des parois latérales commencent à s'agrandir avec l'augmentation de Ma en poussant les deux rouleaux du centre à fusionner. Ce phénomène est observable pour le cas $Ma = 1800$. Le nombre de rouleaux a diminué, passant de 10 rouleaux pour $Ma = 1600$ à 8 rouleaux pour $Ma = 1800$, mais la vitesse de rotation des rouleaux a parallèlement fortement augmenté.

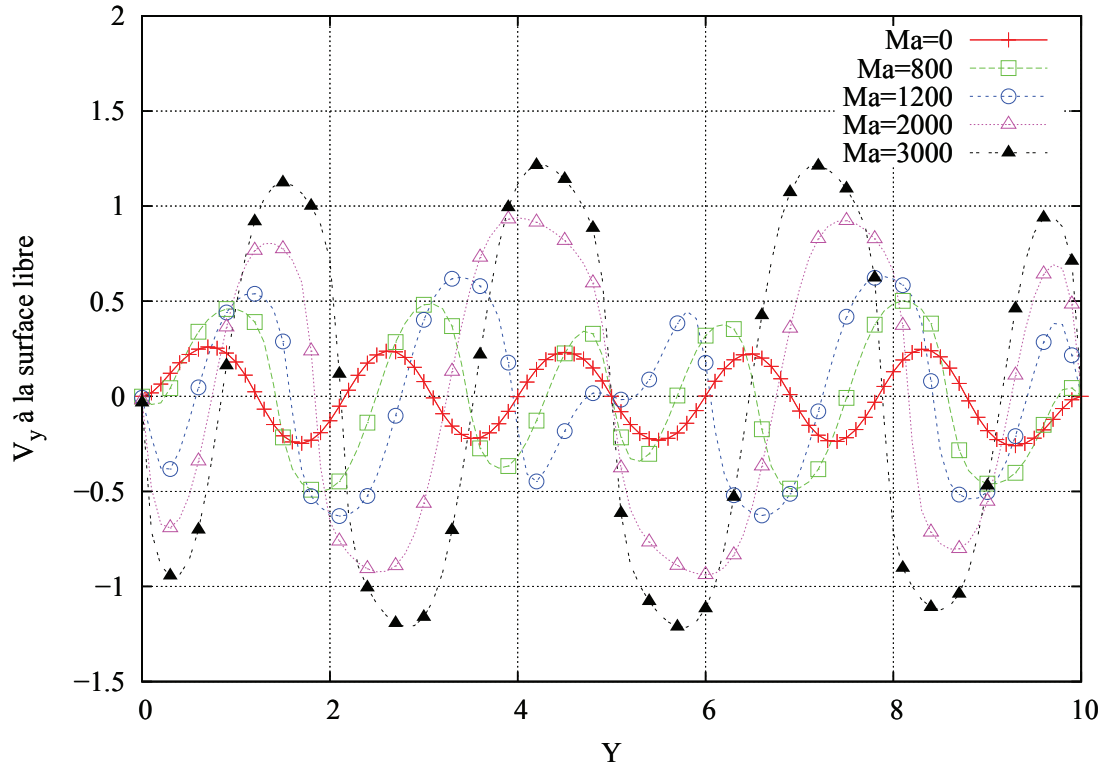


Figure III.12.: Variation de la vitesse transversale V_y au niveau de la surface libre ($Z = 1$) et à $X = 30$ pour différents nombres de Marangoni Ma ($Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).

Pour étudier l'influence des forces thermocapillaires sur le transfert thermique, nous présentons sur la Figure III.14 la variation du nombre de Nusselt moyen Nu_m au niveau de la paroi inférieure chauffée, en fonction du nombre de Marangoni. Nous constatons que le nombre de Nusselt moyen Nu_m croît avec l'augmentation du nombre de Marangoni, en lien avec l'augmentation de la vitesse de rotation des rouleaux sous l'effet des forces thermocapillaires (cf. Figure III.12). Pour $Ma = 1100$, nous remarquons une diminution du nombre de Nusselt, cette diminution est due à la réorganisation de l'écoulement avec disparition des deux rouleaux au centre du canal. Ce comportement est également retrouvé lorsque l'on suit l'évolution du nombre de Nusselt moyen transversal Nu_{mt} le long du canal (Figure III.15). En effet, Nu_{mt} décroît dans un premier temps puis augmente progressivement jusqu'à un maximum qui indique l'apparition de tous les rouleaux dans la section droite,

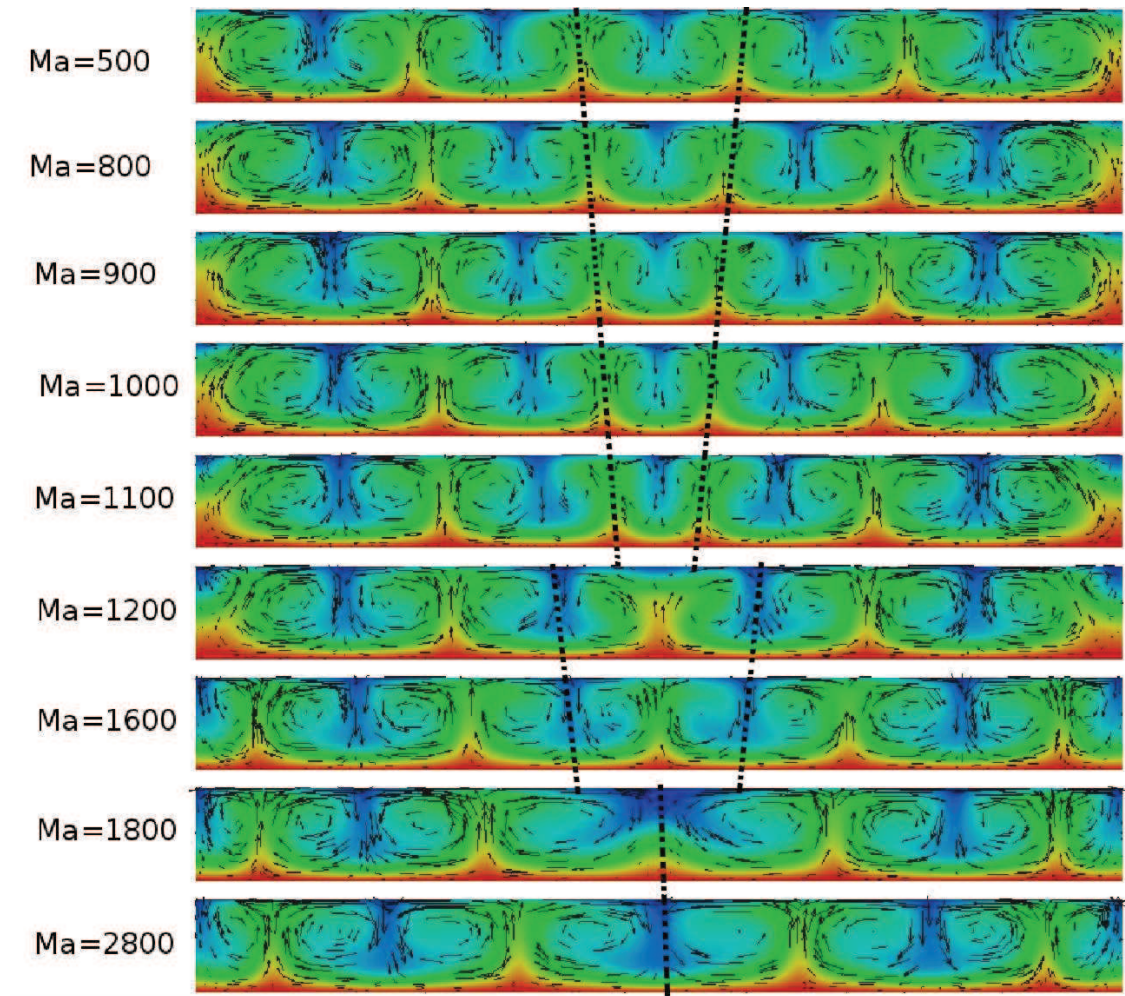


Figure III.13.: Coupe transversale de l'écoulement à $X = 30$ pour différents nombres de Marangoni Ma ($Ra = 5000$, $Re = 15$ et $Bi = 15$).

ceci se produit vers $X = 24$ pour $Ma = 800$ et $X = 28$ pour $Ma = 1100$. Ainsi, il y a un décalage vers l'aval de la position d'apparition des rouleaux centraux lorsque Ma passe de 800 à 1100. Ce décalage se poursuit avec l'augmentation de Ma jusqu'à la fusion des rouleaux centraux avec les rouleaux adjacents pour $Ma = 1200$ (cf. Figure III.13). Cette réorganisation des rouleaux est également confirmée par l'évolution du profil de vitesse à la surface libre pour $Ma = 1200$ (cf. Figure III.12). L'augmentation de la vitesse de rotation des rouleaux, sous l'action des effets thermocapillaires, favorise les échanges thermiques et augmente le nombre de Nusselt moyen jusqu'à une nouvelle baisse qui est due à la disparition des deux

rouleaux du centre du canal à $Ma = 1800$. Ainsi les échanges thermiques dans un canal à surface libre n'évoluent pas d'une façon monotone croissante lorsque le nombre de Marangoni augmente.

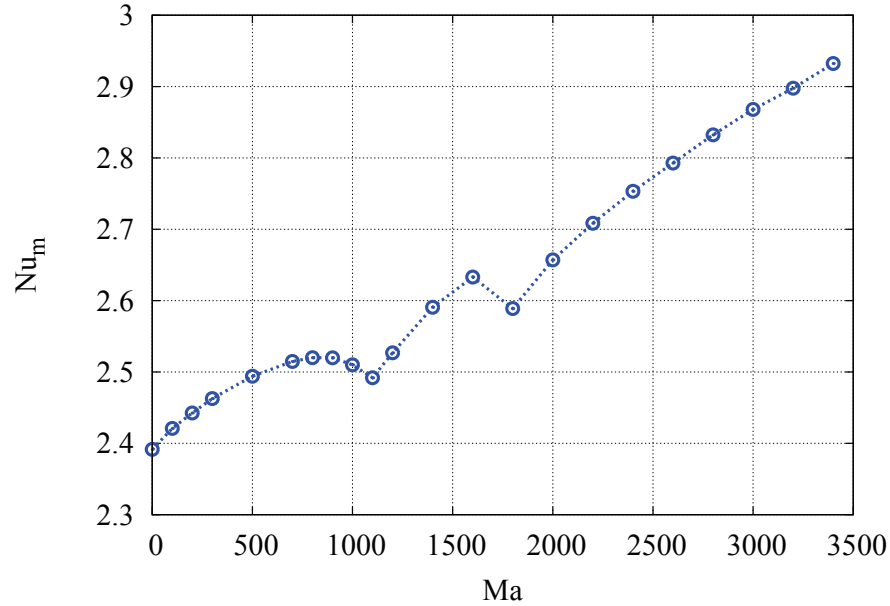


Figure III.14.: Variation du nombre de Nusselt moyen Nu_m au niveau de la paroi inférieure chauffée en fonction du nombre de Marangoni Ma ($Ra = 5000$, $Re = 15$ et $Bi = 15$).

III.5. Effet du rapport du forme du canal

Pour étudier l'effet du rapport de forme transversal Γ du canal sur les rouleaux longitudinaux, nous présentons sur les Figures III.16, III.17 et III.18 les rouleaux longitudinaux au niveau de la section droite située dans la région convectivement développée pour différents rapports de forme et différents nombres de Marangoni. Nous notons que les écoulements pour les rapports de forme $\Gamma = 15$ et $\Gamma = 20$ sont simulés respectivement dans des canaux de longueur $X = 75$ et $X = 100$ pour observer la région convectivement développée. Les paramètres de l'écoulement sont fixés à $Re = 15$, $Bi = 15$ et $Ra = 5000$. Nous notons ici que pour changer

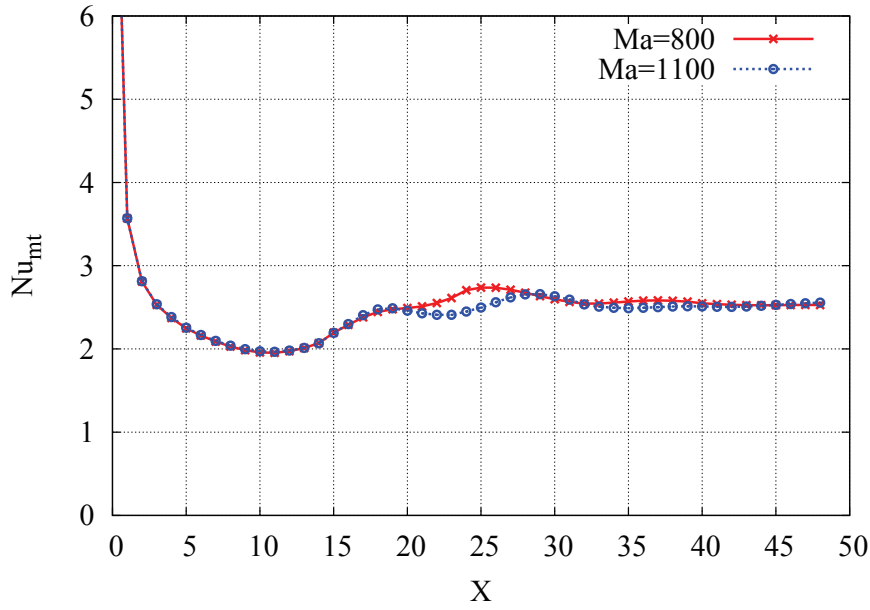


Figure III.15.: Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal pour $Ma = 800$ et $Ma = 1100$ ($Ra = 5000$, $Re = 15$ et $Bi = 15$).

le rapport de forme nous agissons sur la hauteur du canal en gardant la largeur constante. Tout d'abord, nous remarquons que le nombre de rouleaux dans le canal est pair quel que soit le rapport de forme, en raison de la symétrie imposée par le confinement latéral. Il apparaît qu'en augmentant le rapport de forme Γ , le nombre de rouleaux augmente. Cela est dû à la diminution de la taille des rouleaux, ce qui laisse plus de place pour l'apparition de rouleaux supplémentaires. Nous constatons aussi qu'en augmentant le rapport de forme, l'effet Marangoni sur les rouleaux devient important. En effet, pour $\Gamma = 10$, on trouve 10 rouleaux pour $Ma = 0$ et $Ma = 500$ alors que pour $Ma = 2000$ le nombre de rouleaux diminue (8 rouleaux) du fait de la prédominance de l'effet Marangoni. Ainsi, les forces thermocapillaires élargissent horizontalement les rouleaux qui finissent par fusionner. En revanche pour $\Gamma = 15$ et $\Gamma = 20$, l'effet Marangoni sur les rouleaux longitudinaux se manifeste dès $Ma = 500$ et la réduction du nombre de rouleaux pour $\Gamma = 20$ est forte, puisqu'on passe de 22 rouleaux pour $Ma = 0$ à 14 pour $Ma = 2000$. Le tableau III.2 donne l'évolution du nombre de rouleaux pour les valeurs de Γ et Ma étudiés.

$\Gamma \backslash Ma$	0	500	2000
10	10	10	8
15	16	14	10
20	22	20	14

Table III.2.: Evolution du nombre de rouleaux pour différentes valeurs du rapport de forme Γ et du nombre de Marangoni Ma .

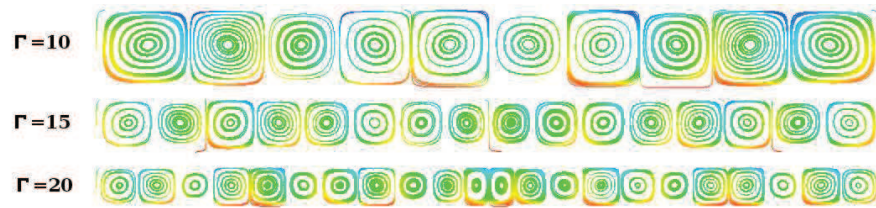


Figure III.16.: Lignes de courant au niveau de la section droite située dans la région convectivement développée pour différents rapports de forme ($Ma = 0$, $Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).

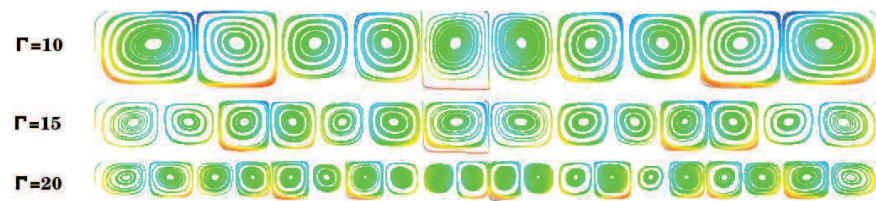


Figure III.17.: Lignes de courant au niveau de la section droite située dans la région convectivement développée pour différents rapports de forme ($Ma = 500$, $Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).

Sur les Figures III.19 et III.20 nous représentons la variation longitudinale du nombre de Nusselt transversal moyen Nu_{mt} pour différents rapports de forme Γ pour $Ma = 0$ et $Ma = 2000$. Nous constatons que cette quantité décroît d'abord le long de la zone d'entrée et augmente ensuite vers un maximum avant de décroître à nouveau. Les positions des maximums des nombres de Nusselt correspondent bien aux positions de développement complet des rouleaux dans toute la section droite.

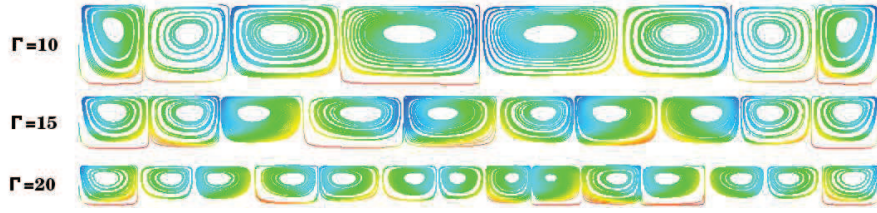


Figure III.18.: Lignes de courant au niveau de la section droite située dans la région convectivement développée pour différents rapports de forme ($Ma = 2000$, $Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).

Ainsi pour $Ma = 0$, l'augmentation du rapport de forme retarde le développement des rouleaux au centre du canal. En effet, comme trouvé aussi pour l'écoulement de PRB, le confinement stabilise l'écoulement de base. Pour $Ma = 2000$, les forces thermocapillaires deviennent importantes ce qui perturbe le début du développement des rouleaux du centre du canal. En général, le nombre de Nusselt croît avec Γ , ceci est dû à l'augmentation du nombre de rouleaux qui favorise le transfert convectif de la chaleur.

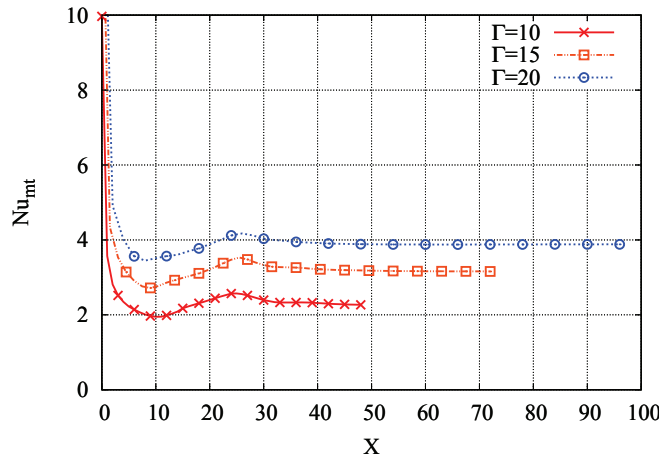


Figure III.19.: Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal pour différents rapports de forme Γ et pour $Ma = 0$ ($Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).

Nous présentons dans la Figure III.21 l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Marangoni pour différents rapports de forme. Nous notons que, pour $\Gamma = 10$, même si le nombre de rouleaux a diminué pour $Ma = 2000$,

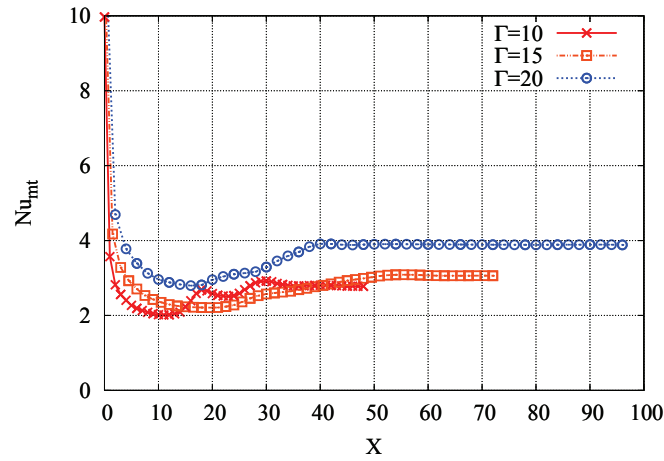


Figure III.20.: Variation longitudinale du nombre de Nusselt moyen transversal pour différents rapports de forme Γ et pour $Ma = 2000$ ($Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).

le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Marangoni Ma , cela est dû à l'augmentation de la vitesse de rotation des rouleaux qui favorise l'échange thermique. Cependant, pour $\Gamma = 15$ et $\Gamma = 20$, l'augmentation de la vitesse de rotation n'est pas suffisante pour compenser la forte réduction du nombre de rouleaux observée pour $Ma = 2000$, ce qui diminue l'échange thermique.

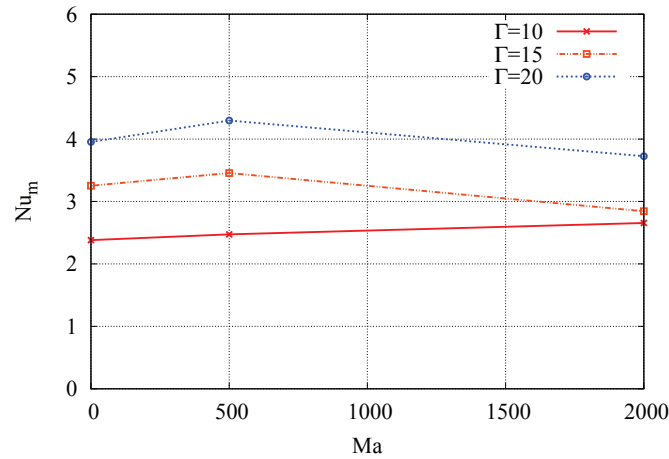


Figure III.21.: Evolution du nombre de Nusselt moyen N_m en fonction du nombre de Marangoni pour différents rapports de forme Γ ($Re = 15$, $Ra = 5000$ et $Bi = 15$).

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté plusieurs résultats issus de la simulation numérique tridimensionnelle de l'écoulement de la convection mixte combinée aux effets thermocapillaires (écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni). Nous avons choisi d'examiner l'influence des cinq paramètres adimensionnels contrôlant la physique du problème à savoir, le nombre de Reynolds, le nombre de Rayleigh, le nombre de Biot, le nombre de Marangoni et le rapport de forme. Les simulations 3D directes nous ont permis de montrer l'influence de la variation de ces paramètres sur la structure de l'écoulement et sur les transferts thermiques illustrés par l'évolution du nombre de Nusselt.

Les résultats obtenus ont montré que le mécanisme de déclenchement des rouleaux longitudinaux est similaire à celui rencontré dans le cas de l'écoulement de PRB. Les rouleaux longitudinaux sont d'abord initiés près des parois latérales et se développent progressivement vers le centre du canal. Les effets des nombres de Reynolds et de Rayleigh sur la longueur d'établissement des rouleaux longitudinaux et les transferts thermiques ont été analysés et les résultats montrent une grande similitude avec l'écoulement de PRB.

L'étude montre par ailleurs que la présence de la surface libre affecte la longueur d'onde des rouleaux longitudinaux, celle-ci diminue lorsque la résistance thermique à la surface libre $R_{conv} = 1/h$ est réduite (augmentation du nombre de Biot). Ceci est cohérent avec le cas de la présence d'une paroi purement conductrice supérieure (cas de l'écoulement de PRB) qui augmente le nombre de rouleaux longitudinaux par rapport au cas de la surface libre. Cependant, cet effet favorable de la présence de la paroi supérieure rigide est contrebalancé par les effets visqueux rencontrés au voisinage de cette paroi qui diminuent la vitesse du fluide et, par conséquent, entraînent une réduction de l'échange thermique par rapport aux cas de la surface libre

avec $Bi = 15$ et $Bi = 20$. Les résultats montrent aussi que la présence de la paroi supérieure rigide augmente la longueur d'établissement des rouleaux longitudinaux par rapport à l'écoulement à surface libre.

L'effet Marangoni a été étudié ainsi que son couplage avec les effets thermogravitaires. Les résultats montrent que le sens de rotation des rouleaux longitudinaux dus à la convection Marangoni dans la région convectivement développée est inversé par rapport au sens de rotation de ceux induits par la convection naturelle. En outre, l'augmentation du nombre de Marangoni a un effet favorable sur le transfert thermique, mais il réduit le transfert thermique pour certaines valeurs de Ma qui correspondent à la fusion des rouleaux présents au centre du canal avec leurs voisins.

Finalement, nous avons terminé ce chapitre par l'étude de l'effet du rapport du forme sur la distribution et le nombre des rouleaux longitudinaux ainsi que sur les transferts thermiques.

CHAPITRE IV

Analyse de stabilité linéaire

Les simulations numériques du chapitre précédent nous ont permis d'étudier l'influence des paramètres de contrôle sur la structure de l'écoulement due aux instabilités thermoconvectives ainsi que leur impact sur les transferts thermiques. Bien qu'instructives à plusieurs égards, ces simulations numériques ne donnent pas d'informations précises sur les seuils de perte de stabilité de l'écoulement et sur la variation de ces seuils avec les paramètres de contrôle. Tirer profit d'une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base pour caractériser les seuils d'apparitions des instabilités thermoconvectives de l'écoulement de convection mixte dans un canal horizontal à surface libre est l'un des objectifs principaux de cette partie. L'étude de stabilité linéaire d'un écoulement revient à chercher s'il existe une perturbation susceptible d'initier la transition d'un état stable stationnaire vers un autre état stable stationnaire ou non. Selon que cette perturbation sera amortie, amplifiée ou inchangée, l'écoulement sera alors, vis-à-vis de cette perturbation, respectivement stable, instable ou marginalement stable. Tout au long de ce chapitre, nous aborderons l'analyse numérique de stabilité linéaire de l'écoulement de convection mixte combinée aux effets thermocapillaires dans un canal horizontal d'extension transversale infinie. Il s'agit de comprendre les mécanismes opérants et de déterminer les

seuils des paramètres conduisant à cette instabilité thermoconvective et d'en caractériser les structures spatiales associées. Nous commençons dans ce chapitre par la présentation des équations gouvernant le problème. Cela nous permettra d'aboutir à la caractérisation de l'écoulement de base, à savoir, trouver les distributions de vitesse et de température en régimes thermique et dynamique établis. Ensuite, nous étudions l'évolution des perturbations infinitésimales de l'écoulement de base en utilisant le formalisme classique de l'analyse linéaire de stabilité. La méthode de résolution numérique du problème aux valeurs propres issue de l'analyse linéaire est présentée. Enfin, nous présentons les résultats obtenus concernant cette instabilité qui donne naissance à des rouleaux longitudinaux ou des rouleaux transversaux.

IV.1. Calcul de l'état de base

Comme dans l'étude numérique précédente, nous considérons l'écoulement d'un film liquide de hauteur H dans un canal horizontal mais d'extensions transversale et longitudinale infinies. L'origine du système de coordonnées (x, y, z) est placée à mi-hauteur de la couche liquide. La configuration étudiée est représentée sur la Figure IV.1. Ce film liquide est chauffé par le bas (température maintenue à T_c) tandis que la surface libre échange de la chaleur avec l'air ambiant à température T_0 (coefficient d'échange h supposé constant et uniforme). Comme dans le chapitre précédent,

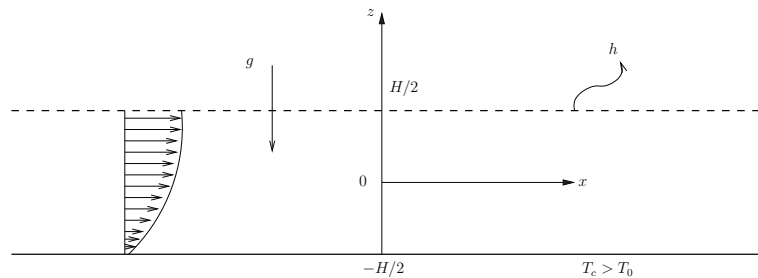


Figure IV.1.: Représentation schématique de la configuration d'étude et des conditions aux limites.

le fluide est supposé être newtonien, incompressible et en écoulement laminaire. Le système d'équations décrivant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie prises en considérant l'approximation de Boussinesq est :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \beta \vec{g}(T - T_0) \quad (\text{IV.2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \nabla^2 T \quad (\text{IV.3})$$

et les conditions aux limites sont :

$$(\text{en } z = -H/2) \left\{ \begin{array}{l} \vec{v} = \vec{0} \\ T = T_c \end{array} \right. \quad (\text{IV.4})$$

$$(\text{en } z = H/2) \left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial v_y}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T}{\partial y} \\ v_z = 0 \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_0) \end{array} \right. \quad (\text{IV.5})$$

Pour étudier la stabilité du problème considéré, il est nécessaire de connaître les champs de vitesse et de température qui définissent l'état de base pour un régime pleinement établi et supposé purement conductif. Ces champs doivent vérifier les équations de Navier-Stokes ainsi que les conditions aux limites associées. En régimes dynamique et thermique établis, l'écoulement de l'état de base est unidirectionnel, i.e. $v_y = v_z = 0$. La vitesse se réduit à la seule composante v_x et le profil de la température T est purement conductif. Les champs de vitesse et de température sont uniformes le long des directions longitudinale x et transversale y et ne dépendent que de la coordonnée verticale z . Ainsi, les profils de vitesse et de température de l'écoulement de base sont supposés tels que :

- Le profil de température est linéaire :

$$\overline{T(z)} = \frac{(2\lambda + hH)T_c + hHT_0}{2(hH + \lambda)} - \frac{h(T_c - T_0)}{hH + \lambda}z \quad (\text{IV.6})$$

La température de la surface libre étant déterminée au préalable compte tenue des résistances thermiques de conduction et de convection ($T_s = \frac{\lambda T_c + hHT_0}{hH + \lambda}$). Nous rappelons que T_0 est la température du fluide à l'état initial et aussi la température de l'air ambiant, T_c est la température de chauffage de la paroi inférieure, λ est la conductivité thermique du fluide et h est le coefficient d'échange thermique avec l'air ambiant.

- Le profil de vitesse à la forme d'un demi-Poiseuille :

$$\overline{v_x(z)} = -3U_m \left(\frac{z^2}{2H^2} - \frac{z}{2H} - \frac{3}{8} \right) \quad \text{avec} \quad U_m = \frac{H^2}{3\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (\text{IV.7})$$

U_m est la vitesse moyenne de l'écoulement demi-Poiseuille 2D obtenue pour un gradient de pression axial $\frac{\partial p}{\partial x}$ constant.

IV.2. Adimensionnement du modèle

En adoptant la demi-hauteur du film liquide $H/2$, la vitesse moyenne U_m , la pression dynamique ρU_m^2 , la différence de température $T_c - T_0$, et $H/2U_m$ comme échelles caractéristiques respectivement pour la longueur, la vitesse, la température et le temps, les équations précédentes sont rendues sans dimension.

- Les équations de l'écoulement (IV.1-IV.3) sans dimension s'écrivent alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{IV.8})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \frac{2}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \frac{Ra}{2PrRe^2} \theta \vec{k} \quad (\text{IV.9})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta = \frac{2}{PrRe} \vec{\nabla}^2 \theta \quad (\text{IV.10})$$

- Les conditions aux limites en utilisant des variables adimensionnées s'écrivent :

$$(Z = -1) \left\{ \begin{array}{l} \vec{V} = \vec{0} \\ \theta = 1 \end{array} \right. \quad (\text{IV.11})$$

$$(Z = 1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_x}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial X} \\ \frac{\partial V_y}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \\ V_z = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial Z} = -\frac{Bi}{2} \theta \end{array} \right. \quad (\text{IV.12})$$

- L'écoulement de base s'écrit en utilisant des variables adimensionnées :

$$\overline{\theta(Z)} = \frac{2 + Bi}{2(Bi + 1)} - \frac{Bi}{2(Bi + 1)} Z \quad (\text{IV.13})$$

$$\overline{V_x(Z)} = -\frac{3}{8}(Z^2 - 2Z - 3) \quad (\text{IV.14})$$

IV.3. Stabilité linéaire

L'analyse linéaire de stabilité considère des perturbations infinitésimales par rapport à l'écoulement de base, ce qui conduit à l'obtention d'équations linéarisées pour l'évolution des perturbations, par opposition aux théories non-linéaires qui considèrent des perturbations d'amplitudes finies. Autour de l'état de base, les variables de l'écoulement total (vitesse, pression et champ de température) sont décomposées en sommes de grandeurs de base non perturbées et de leurs perturbations infinitésimales :

$$\begin{aligned} \vec{V}(X, Y, Z, t) &= \bar{V} + \vec{V}'(X, Y, Z, t) \\ P(X, Y, Z, t) &= \bar{P} + P'(X, Y, Z, t) \\ \theta(X, Y, Z, t) &= \bar{\theta} + \theta'(X, Y, Z, t) \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Les équations de perturbation linéarisées sont obtenues en remplaçant $\vec{V}$, p et θ par les expressions (IV.15) dans le système d'équations (IV.8-IV.10). Après avoir négligé les termes du seconde ordre, on aboutit à :

$$\frac{\partial V'_x}{\partial X} + \frac{\partial V'_y}{\partial Y} + \frac{\partial V'_z}{\partial Z} = 0 \quad (\text{IV.16})$$

$$\frac{\partial V'_x}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial V'_x}{\partial X} + V'_z \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial Z} = -\frac{\partial P'}{\partial X} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 V'_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V'_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V'_z}{\partial Z^2} \right) \quad (\text{IV.17})$$

$$\frac{\partial V'_y}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial V'_y}{\partial X} = -\frac{\partial P'}{\partial X} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 V'_y}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V'_y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V'_y}{\partial Z^2} \right) \quad (\text{IV.18})$$

$$\frac{\partial V'_z}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial V'_z}{\partial X} = -\frac{\partial P'}{\partial X} + \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 V'_z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V'_z}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V'_z}{\partial Z^2} \right) + \frac{Ra}{2Re^2 Pr} \theta' \quad (\text{IV.19})$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \theta'}{\partial X} + V'_z \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial Z} = \frac{2}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \theta'}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \theta'}{\partial Z^2} \right) \quad (\text{IV.20})$$

Les conditions aux limites linéarisées sont :

$$(\text{en } Z = -1) \left\{ \begin{array}{l} V'_x = V'_y = V'_z = \theta' = 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.21})$$

$$(\text{en } Z = 1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V'_x}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta'}{\partial X} \\ \frac{\partial V'_y}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta'}{\partial Y} \\ V'_z = 0 \\ \frac{\partial \theta'}{\partial Z} = -\frac{Bi}{2} \theta' \end{array} \right. \quad (\text{IV.22})$$

Comme les équations qui gouvernent l'évolution de la perturbation sont linéaires, il est possible de considérer une perturbation quelconque comme la superposition d'un nombre de modes possibles dont la forme dépend de la géométrie du problème étudié. La solution du système d'équations linéaires (IV.16-IV.20) peut être recherchée sous la forme d'une combinaison de modes normaux qui prennent la forme suivante :

$$(V'_x, V'_y, V'_z, P', \theta') = (\hat{V}_x, \hat{V}_y, \hat{V}_z, \hat{P}, \hat{\theta}) e^{i(k_x X + k_y Y - \sigma t)} \quad (\text{IV.23})$$

où k_x et k_y correspondent respectivement aux nombres d'onde longitudinal et transversal. $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ est la pulsation complexe.

En substituant l'équation. (IV.23) dans les équations de perturbation linéarisées (IV.16-IV.20) et les conditions aux limites linéarisées (IV.21-IV.22), nous obtenons les équations de stabilité linéaire suivantes :

$$ik_x \hat{V}_x + ik_y \hat{V}_y + D\hat{V}_z = 0 \quad (\text{IV.24})$$

$$-i\sigma \hat{V}_x + ik_x \bar{V}_x \hat{V}_x + \hat{V}_z D\bar{V}_x = -ik_x \hat{P} + \frac{2}{Re}(D^2 - k^2)\hat{V}_x \quad (\text{IV.25})$$

$$-i\sigma \hat{V}_y + ik_x \bar{V}_x \hat{V}_y = -ik_y \hat{P} + \frac{2}{Re}(D^2 - k^2)\hat{V}_y \quad (\text{IV.26})$$

$$-i\sigma \hat{V}_z + ik_x \bar{V}_x \hat{V}_z = -D\hat{P} + \frac{2}{Re}(D^2 - k^2)\hat{V}_z + \frac{Ra}{2PrRe^2}\hat{\theta} \quad (\text{IV.27})$$

$$-i\sigma \hat{\theta} + ik_x \bar{V}_x \hat{\theta} + \hat{V}_z D\bar{\theta} = \frac{2}{PrRe}(D^2 - k^2)\hat{\theta} \quad (\text{IV.28})$$

Les conditions aux limites linéarisées sont :

$$(\text{en } Z = -1) \left\{ \hat{V}_x = \hat{V}_y = \hat{V}_z = \hat{\theta} = 0 \right. \quad (\text{IV.29})$$

$$(\text{en } Z = -1) \left\{ \begin{array}{l} \hat{V}_z = 0 \\ D\hat{V}_x = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial X} \\ D\hat{V}_y = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial Y} \\ D\hat{\theta} = -\frac{Bi}{2} \hat{\theta} \end{array} \right. \quad (\text{IV.30})$$

avec $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ et $D = \partial/\partial Z$.

Les équations (IV.24-IV.28) et les conditions aux limites IV.29 et IV.30 peuvent être réécrites en fonction de deux variables, à savoir la perturbation de la vitesse verticale $\hat{V}_z$ et la perturbation de la température réduite $\hat{\theta}$, ce qui conduit à éliminer les autres variables au profit des autres considérées ($\hat{V}_x$, $\hat{V}_y$ et $\hat{P}$).

En combinant les équations (IV.24, IV.25 et IV.26), nous pouvons éliminer V_x et V_y et nous obtenons :

$$\sigma D\hat{V}_z - k_x \bar{V}_x D\hat{V}_z + k_x \hat{V}_z D\bar{V}_x = -ik^2 \hat{P} + \frac{2i}{Re}(D^2 - k^2)\hat{V}_z \quad (\text{IV.31})$$

La combinaison de cette dernière équation avec l'équation IV.27 nous donne :

$$2ik_x \hat{V}_z D\bar{V}_x = (k^2 - D^2)\hat{P} + \frac{Ra}{2PrRe^2}(D^2 - k^2)D\hat{\theta} \quad (\text{IV.32})$$

Enfin, en combinant l'équation IV.32 avec l'équation IV.27, nous pouvons éliminer la pression $\hat{P}$ et nous obtenons une équation différentielle linéaire d'ordre 4 qui se réduit à l'équation classique de Orr-Sommerfeld lorsque $Ra = 0$ (Drazin et Reid, 2004). Cette équation constitue avec l'équation IV.28 le système de stabilité linéaire du problème à résoudre :

$$\frac{2}{Re}(D^2 - k^2)^2 \hat{V}_z = i[(k_x \bar{V}_x - \sigma)(D^2 - k^2) - k_x D^2 \bar{V}_x \hat{V}_z + \frac{Ra}{2PrRe^2} k^2 \hat{\theta}] \quad (\text{IV.33})$$

$$-i\sigma \hat{\theta} + ik_x \bar{V}_x \hat{\theta} + \hat{V}_z D\bar{\theta} = \frac{2}{PrRe}(D^2 - k^2)\hat{\theta} \quad (\text{IV.34})$$

Les conditions aux limites associées aux équations (IV.33 et IV.34) sont :

$$\hat{V}_z = 0, \quad D\hat{V}_z = 0, \quad \hat{\theta} = 0 \quad \text{à } Z = -1 \quad (\text{IV.35})$$

$$\hat{V}_z = 0, \quad D^2 \hat{V}_z + k^2 \frac{Ma}{Pe} \hat{\theta} = 0, \quad D\hat{\theta} + \frac{Bi}{2} \hat{\theta} = 0 \quad \text{à } Z = 1 \quad (\text{IV.36})$$

Le système d'équations (IV.33-IV.34) et les conditions aux limites (IV.35 et IV.36) ramènent l'analyse linéaire à un problème aux valeurs et vecteurs propres. Ce système ne présente alors de solution que si k , σ et les paramètres de contrôle

satisfont une relation de dispersion de la forme :

$$\mathcal{D}(k_x, k_y, \sigma, Ra, Ma, Bi, Re, Pr) = 0 \quad (\text{IV.37})$$

La relation de dispersion IV.37 peut être considérée de deux manières différentes : l'étude de la stabilité spatiale quand la fréquence σ est réelle et donnée (perturbation harmonique en temps) et le nombre d'onde spatial k est une inconnue complexe, ou l'étude de la stabilité temporelle quand le nombre d'onde k est réel et connu (perturbation périodique spatialement) et la fréquence σ est complexe et inconnue. Dans notre cas, seule l'étude temporelle est choisie, et par la suite, le nombre d'onde k sera réel et la fréquence $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ complexe.

Le coefficient d'amplification temporel de la perturbation est donné par le facteur $e^{\sigma_i t}$ et l'étude de l'évolution de la perturbation revient donc à déterminer la valeur de σ_i . Trois cas sont possibles :

- $\sigma_i < 0$ l'écoulement est stable.
- $\sigma_i = 0$ stabilité neutre.
- $\sigma_i > 0$ l'écoulement est instable.

Dans ce chapitre, deux types d'instabilité seront étudiés, l'instabilité sous forme des rouleaux longitudinaux stationnaires ($k_x = 0$ et $k_y \neq 0$) et l'instabilité sous forme des rouleaux transversaux instationnaires ($k_x \neq 0$ et $k_y = 0$).

IV.4. Méthode numérique

Le problème aux valeurs propres est obtenu en utilisant la méthode spectrale de collocation Chebyshev (Canuto et al., 1988). Cette méthode est basée sur la discrétisation spatiale des fonctions inconnues ($\hat{V}_z$ et $\hat{\theta}$) selon Z par les polynômes d'interpolation de Chebyshev, de telle sorte qu'ils sont localisés aux points de Gauss-

Lobatto définis comme suit :

$$Z_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (\text{IV.38})$$

L'équation IV.33 est évaluée aux nœuds $j = 2, \dots, N-2$, l'équation IV.34 aux nœuds $j = 1, \dots, N-1$. Les premières conditions aux limites IV.35 sont évaluées aux nœuds $j = N$ et les secondes conditions aux limites IV.36 sont évaluées aux nœuds $j = 0$.

Après discrétisation, nous obtenons $2(N+1) \times 2(N+1)$ équations algébriques qui forment un problème aux valeurs propres généralisé associé aux conditions aux limites (IV.35) et (IV.36) :

$$\sigma A \phi = B \phi \quad (\text{IV.39})$$

Les valeurs propres σ de ce système permettent alors d'avoir accès aux taux de croissance tandis que les vecteurs propres ϕ donnent les fonctions propres des perturbations de vitesse et de température associées au taux de croissance σ .

Le vecteur colonne ϕ contient $\hat{V}_z$ et $\hat{\theta}$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \hat{V}_{z0} \\ \vdots \\ \hat{V}_{zN} \\ \hat{\theta}_0 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_N \end{pmatrix}.$$

Les $\hat{V}_{zi}$ et $\hat{\theta}_i$; $i = 0, \dots, N$ sont les valeurs de la vitesse $\hat{V}_z$ et de la température $\hat{\theta}$ aux points de collocation Z_j .

Les matrices A et B dépendent de l'état de base et du nombre d'onde k . Elles sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^2 - k^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} k_x \bar{V}_x (\mathbf{D}^2 - k^2 I) - k_x \mathbf{D}^2 \bar{V}_x + \frac{2i}{Re} (\mathbf{D}^2 - k^2 I)^2 & \frac{-iRa k^2}{2Pr Re^2} I \\ -i\mathbf{D}\bar{\theta} & \frac{2i}{Re Pr} (\mathbf{D}^2 - k^2 I) + k_x \bar{V}_x \end{pmatrix}$$

où : $\bar{V}_x = \text{diag}[\bar{V}_x(Z_j)]$ et $\bar{\theta} = \text{diag}[\bar{\theta}(Z_j)]$.

I est la matrice identité.

$\mathbf{D}$ est la matrice différentielle qui est calculée comme indiqué dans Trefethen (2000).

La matrice A est singulière, en raison des conditions aux limites qui ne contiennent pas la valeur propre σ . Nous avons donc six lignes dans la matrice A qui sont nulles, correspondant aux conditions aux limites. Par conséquent, nous obtenons six valeurs propres infinies qui sont éliminées. Le code de calcul est mis en œuvre à l'aide de MATLAB et le nombre de points de discrétisation est fixé à $N = 131$.

IV.5. Validation

La méthode de collocation spectrale explicitée ci-dessus est basée sur l'utilisation des polynômes de Chebyshev aux points de collocation de Gauss-Lobatto. Elle a été implémentée dans l'environnement MATLAB pour traiter la stabilité linéaire du problème considéré. La précision du calcul dépend principalement du nombre de discrétisations N . Le code de calcul a été validé en comparant les résultats obtenus avec d'autres études analytiques et numériques de la littérature. Etant donné l'originalité du problème sur lequel nous travaillons, nous n'avons pas trouvé de précédents travaux similaires pour établir des comparaisons. Ainsi, nous avons procédé en deux étapes. Pour la première étape, nous avons validé l'implémentation des équations IV.33 et IV.34 pour un cas qui correspond à l'écoulement de PRB.

Pour la deuxième étape, nous avons validé l'implémentation des conditions aux limites IV.35 et IV.36 pour un cas qui correspond à la convection de Marangoni.

IV.5.1. Cas test Poiseuille-Rayleigh-Bénard (parois rigides)

La première validation concerne la stabilité de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard dans un canal d'extension transversale infinie chauffé uniformément par le bas et refroidi par le haut. Dans ce cas, nous avons les mêmes équations aux perturbations IV.33 et IV.34, mais avec des conditions aux limites rigides (Platten et Legros, 1984). Les seuils de stabilité correspondant à l'apparition de rouleaux longitudinaux sont obtenus et comparés à ceux publiés précédemment dans la littérature (Platten et Legros, 1984; Nicolas, 2002). Nos résultats sont en bon accord avec la littérature et montrent que l'écoulement de base devient instable vis-à-vis des rouleaux longitudinaux quand le nombre de Rayleigh dépasse la valeur critique $Ra_c = 1707,8$. Le nombre d'onde critique correspondant est $k_y = 1,558$ (k_y étant adimensionné ici par $H/2$). Ces valeurs sont indépendantes du nombre de Reynolds. Le code a été validé aussi vis-à-vis de l'instabilité sous forme de rouleaux transversaux. Les seuils d'instabilité obtenus à l'aide du présent code ont été comparés à ceux obtenus par Nicolas et al. (2000) pour un écoulement de PRB dans un canal d'extension transversale infinie. Nous présentons sur la Figure IV.2 les valeurs du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de Prandtl Pr . Les valeurs numériques sont données dans le Tableau IV.1. La comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par Nicolas et al. (2000) permet de valider la précision de notre code de calcul vis-à-vis des instabilités sous forme de rouleaux transversaux.

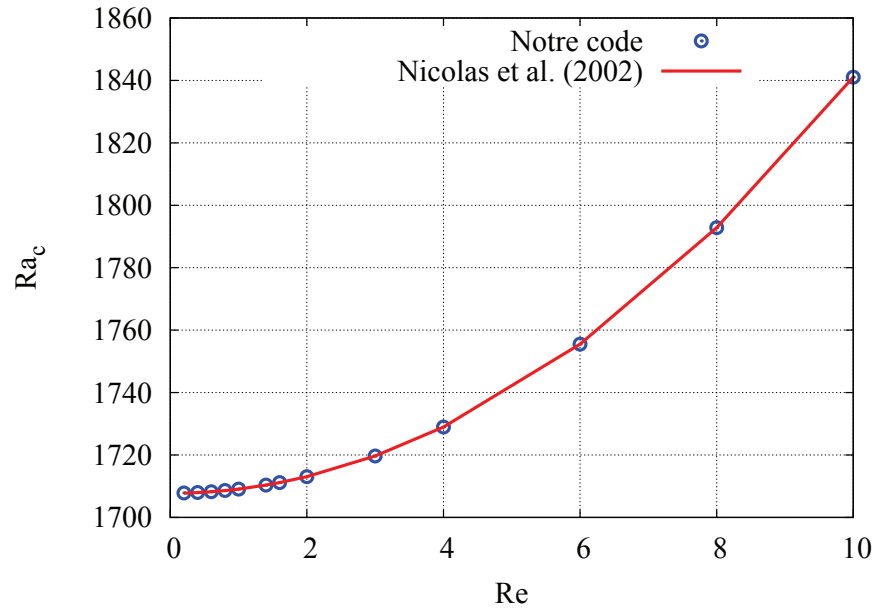


Figure IV.2.: Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c d'apparition des rouleaux transversaux en fonction du nombre de Reynolds pour un écoulement de PRB. Comparaison avec les résultats numériques obtenus par Nicolas (2002) ($Pr = 1$).

Re	Nicolas et al. (2000)		Présent travail	
	Ra_c	k_x^c (adimensionné par $H/2$)	Ra_c	k_x^c (adimensionné par $H/2$)
0.2	1707.81	1.558	1707.82	1.558
0.4	1707.97	1.558	1707.98	1.558
0.6	1708.24	1.558	1708.23	1.557
0.8	1708.61	1.558	1708.62	1.558
1	1709.08	1.558	1709.08	1.558
1.4	1710.35	1.559	1710.35	1.559
1.6	1711.15	1.559	1711.15	1.559
2	1713.05	1.559	1713.06	1.559
3	1719.67	1.559	1719.67	1.560
4	1728.95	1.559	1728.95	1.559
6	1755.51	1.560	1755.51	1.560
8	1792.83	1.562	1792.83	1.562
10	1841.05	1.563	1841.05	1.563
20	2252.38	1.578	2252.39	1.577

Table IV.1.: Valeurs numériques des nombres de Rayleigh critique en fonction du nombre de Reynolds pour l'écoulement de PRB. Comparaison avec les résultats numériques obtenus par Nicolas (2002) ($Pr = 1$).

IV.5.2. Cas de la convection de Marangoni

La deuxième validation concerne la convection de Marangoni dans une couche de fluide infinie chauffée uniformément par le bas. Un échange convectif de la chaleur avec l'air ambiant est imposé à la surface libre. Cette validation a pour but de s'assurer de la bonne implémentation des conditions aux limites (IV.35 et IV.36) dans le code de calcul, plus particulièrement celles qui concernent la surface libre. Dans cette configuration d'étude choisie, nous avons les mêmes types de conditions aux limites que celles du problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard-Marangoni à résoudre mais avec un autre système d'équations pour décrire l'écoulement (absence de convection forcée et naturelle). Les équations qui gouvernent l'écoulement sont plus simples et données par Colinet et al. (2001).

$$(D^2 - k^2)^2 \hat{V}_z = \sigma Pr^{-1} (D^2 - k^2) \hat{V}_z \quad (\text{IV.40})$$

$$(D^2 - k^2) \hat{\theta} + \hat{V}_z = \sigma \hat{\theta} \quad (\text{IV.41})$$

Les conditions aux limites associées aux équations (IV.40 et IV.41) sont :

$$\hat{V}_z = 0, \quad D\hat{V}_z = 0, \quad \hat{\theta} = 0 \quad \text{à } Z = -1 \quad (\text{IV.42})$$

$$\hat{V}_z = 0, \quad D^2 \hat{V}_z + k^2 \frac{Ma}{2} \hat{\theta} = 0, \quad D\hat{\theta} + \frac{Bi}{2} \hat{\theta} = 0 \quad \text{à } Z = 1 \quad (\text{IV.43})$$

Nous représentons sur la Figure IV.3 la courbe de stabilité marginale de la convection de Marangoni en fonction du nombre d'onde k pour un nombre de Biot $Bi = 2$. Nos résultats sont en bon accord avec ceux donnés analytiquement par Pearson (1958) et Colinet et al. (2001) pour lesquels nous avons la relation :

$$Ma = \frac{16k(k \cosh k + Bi \sinh k)(2k - \sinh 2k)}{4k^3 \cosh k + 3 \sinh k - \sinh 3k} \quad (\text{IV.44})$$

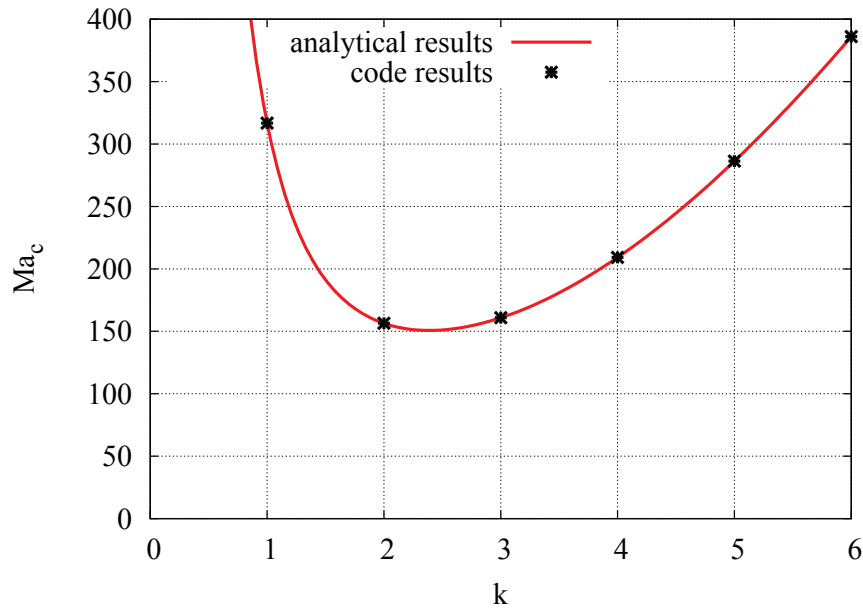


Figure IV.3.: Comparaison des résultats numériques obtenus pour la courbe de stabilité marginale avec la solution analytique (Colinet et al. (2001)) pour $Ra = 0$, $Bi = 2$ et $Pr = 7$.

IV.6. Résultats de l'analyse de stabilité

Dans cette section nous allons présenter quelques résultats de l'étude de la stabilité linéaire de l'écoulement dans un canal ouvert horizontal d'extension latérale infinie. Les résultats sont présentés sous la forme de diagrammes de stabilité déterminant les seuils des paramètres conduisant à l'instabilité thermoconvective (Ra_c et Ma_c) en fonction des autres paramètres contrôlant l'écoulement. Les structures spatiales des instabilités thermoconvectives près des paramètres seuils seront montrées et analysées. Dans cette étude nous nous intéressons à deux types d'instabilité : instabilité qui se développe sous la forme de rouleaux longitudinaux stationnaires (pour $k_x = 0$, $k_y \neq 0$ et $\sigma_r = 0$) et instabilité qui se développe sous la forme de rouleaux transversaux instationnaires (pour $k_x \neq 0$, $k_y = 0$ et $\sigma_r \neq 0$).

IV.6.1. Instabilité donnant des rouleaux longitudinaux

Instabilité due aux effets thermogravitaire

Lorsque le nombre de Marangoni $Ma = 0$, les forces thermocapillaires sont nulles, l'analyse de stabilité donne un système de valeurs propres toutes réelles et donc les modes propres sont alors des rouleaux longitudinaux stationnaires purement induits par les forces de flottabilité. Dans ce cas, nous présentons sur la Figure IV.4, la courbe de stabilité marginale dans le plan $(Ra - k)$ pour $Re = 15$, $Pr = 7$ et pour différents nombres de Biot. Nous remarquons que toutes les courbes de stabilité marginale présentent un minimum à une valeur non nulle du nombre d'onde k pour tous les nombres de Biot. Ce minimum correspond au nombre de Rayleigh critique Ra_c qui définit le seuil d'instabilité primaire. Le nombre d'onde correspondant représente le nombre d'onde critique k_c ($k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$), λ_c étant la longueur d'onde critique que l'on trouve pour un motif répétitif périodique correspondant à deux cellules convectives. Nous observons que le nombre critique diminue lorsque Bi augmente, ce qui signifie que les grandes valeurs de Bi rendent le système plus instable (cela correspond à un échange thermique plus fort au niveau de l'interface libre). Pour clarifier l'effet du nombre de Biot sur la stabilité du système, nous traçons sur la Figure IV.5 l'évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Biot Bi . Nous observons que pour $Bi = 0$, quel que soit le nombre de Rayleigh, l'écoulement est toujours stable. En effet, pour $Bi = 0$ la surface libre est supposée adiabatique, ainsi la température de l'état de base devient alors constante le long l'axe vertical Z ($\overline{\theta(Z)} = 1$). Nous notons ici que nous avons choisi de dimensionner la température par rapport à la différence de température entre la paroi inférieure chauffée et l'air ambiant. Ce choix a été aussi utilisé par Vrentas et al. (1981). Il facilite l'interprétation physique des paramètres seuils obtenus. Un autre choix de dimensionnement est possible, qui utilise la différence de température entre la paroi

inférieure et la surface libre (Nield, 1964; Dauby et al., 1997). Ce choix de dimensionnement donne une valeur finie du nombre de Rayleigh $\bar{Ra}$ propre à ce choix quand $Bi = 0$ et il est lié à notre choix de dimensionnement par :

$$Ra = \frac{1 + Bi}{Bi} \bar{Ra} \quad (\text{IV.45})$$

Sur la Figure IV.5, nous observons que lorsque le nombre de Biot augmente, le nombre de Rayleigh critique diminue fortement jusqu'au voisinage de $Bi = 3$, puis continue à diminuer faiblement pour atteindre une valeur minimale critique $Ra_c = 1087.1$ au voisinage de $Bi = 15$, puis augmenter faiblement pour tendre vers une valeur asymptotique égale à $Ra_c = 1097$. Cela peut s'expliquer par la condition à la limite thermique de la surface libre qui affecte les perturbations de la température dans l'ensemble du fluide. En effet, pour les petites valeurs du nombre de Biot Bi , ces perturbations sont très sensibles à la variation d'échange de chaleur au niveau de la surface libre. Pour les grandes valeurs du nombre de Biot, la condition à la limite thermique à la surface libre peut se rapprocher d'une condition de température constante imposée, ce qui fait que le nombre de Rayleigh critique tends vers cette valeur asymptotique ($Ra_c = 1097$).

Nous présentons sur le Tableau IV.2, une comparaison des résultats de cette étude avec les résultats obtenus par Nield (1964) pour une couche de fluide d'extensions infinies sans convection forcée. Nous remarquons que la différence entre les valeurs des nombres de Rayleigh critiques pour les deux cas d'étude est inférieure à 1% quel que soit le nombre de Biot. Par conséquent, la convection forcée n'a pas d'effet sur la valeur du nombre de Rayleigh critique Ra_c correspondant à l'apparition des rouleaux longitudinaux. Cette constatation est confirmée aussi par le fait que la valeur critique obtenue pour l'apparition des rouleaux longitudinaux stationnaires est indépendante du nombre de Reynolds.

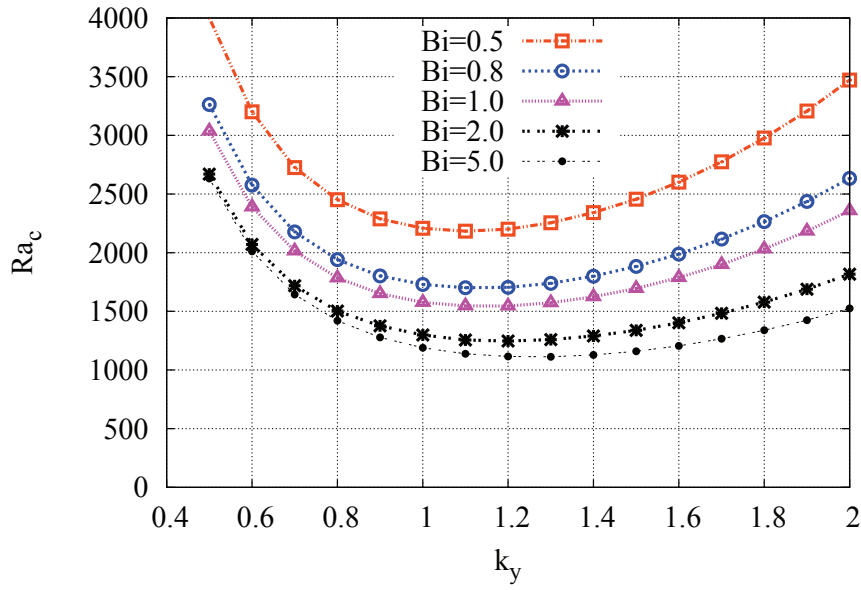


Figure IV.4.: Courbes de stabilité marginale obtenues dans le plan $(Ra - k_y)$ pour le développement des rouleaux longitudinaux en fonction de différents nombres de Biot et pour $Ma = 0$, $Pr = 7$ and $Re = 15$.

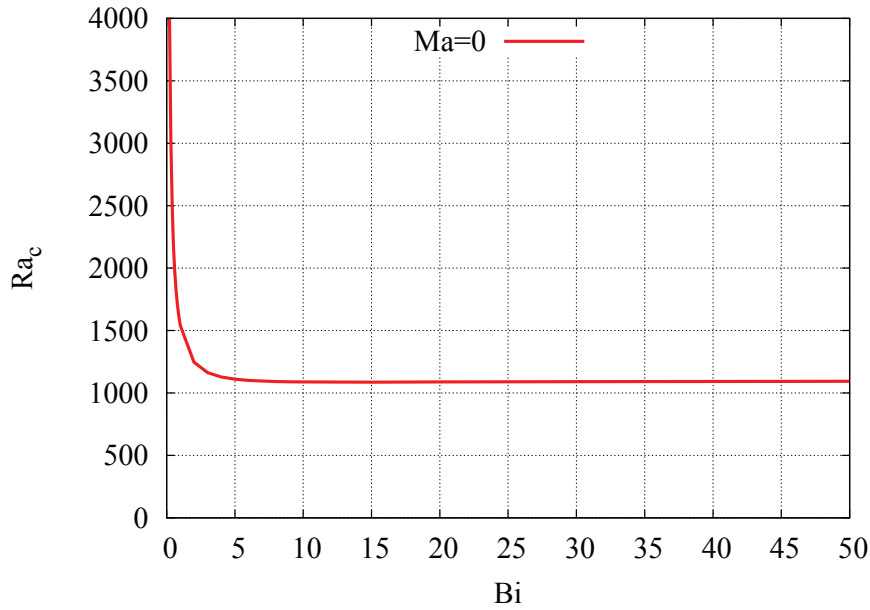


Figure IV.5.: Nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Biot pour $Ma = 0$, $Pr = 7$ et $Re = 15$.

La Figure IV.6 montre l'effet du nombre de Biot sur le nombre d'onde critique k_y^c . Nous observons que k_y^c augmente progressivement en même temps que le nombre

Bi	Ra_c avec convection forcée	Ra_c sans convection forcée Nield (1964)
0.1	7502.0	7505.9
0.2	4170.9	4168.7
0.5	2182.3	2182.3
1.0	1540.7	1541.2
2.0	1246.6	1246.9
5.0	1110.6	1110.6
10.0	1088.5	1088.4
20.0	1088.4	1088.1
50.0	1093.5	1093.6
100.0	1097.0	1096.8

Table IV.2.: Comparaison des nombres de Rayleigh critiques obtenus dans cette étude avec ceux obtenus sans convection forcée par Nield (1964).

de Biot Bi jusqu'à atteindre une valeur asymptotique égale à $k_y^c = 1.34$. Lorsque l'échange convectif de chaleur à la surface libre est très faible ($Bi \sim 0$), l'ensemble du film liquide se réchauffe d'une manière générale, ce qui réduit les gradients thermiques affectant ainsi le nombre de rouleaux convectifs qui est lié aux nombre d'onde k_y (k_y représente le nombre de rouleaux par unité de longueur). Dans le cas de grandes valeurs du nombre de Biot, le transport de chaleur dans la couche fluide est assuré par des rouleaux plus nombreux de petites longueurs d'ondes. Ce résultat a été aussi trouvé par simulation numérique dans la section (III.3) du chapitre précédent dans laquelle nous avons remarqué que la longueur d'onde des rouleaux longitudinaux $\lambda_y = 2\pi/k_y$ diminue lorsque le nombre de Biot augmente.

Nous présentons dans le Tableau IV.3 une comparaison du nombre de Rayleigh critique et du nombre d'onde associé à l'apparition des rouleaux longitudinaux pour l'écoulement de PRB et pour notre cas d'étude. Nous remarquons que le nombre de Rayleigh critique Ra_c de l'écoulement de PRB est plus grand que celui de l'écoulement de convection mixte avec surface libre. Ainsi, la surface supérieure rigide stabilise l'écoulement en retardant l'apparition des rouleaux longitudinaux. La présence d'une surface supérieure rigide augmente également le nombre d'onde critique ($k_y^c(PRB) > k_y^c$) ce qui signifie que dans le cas de l'écoulement de PRB,

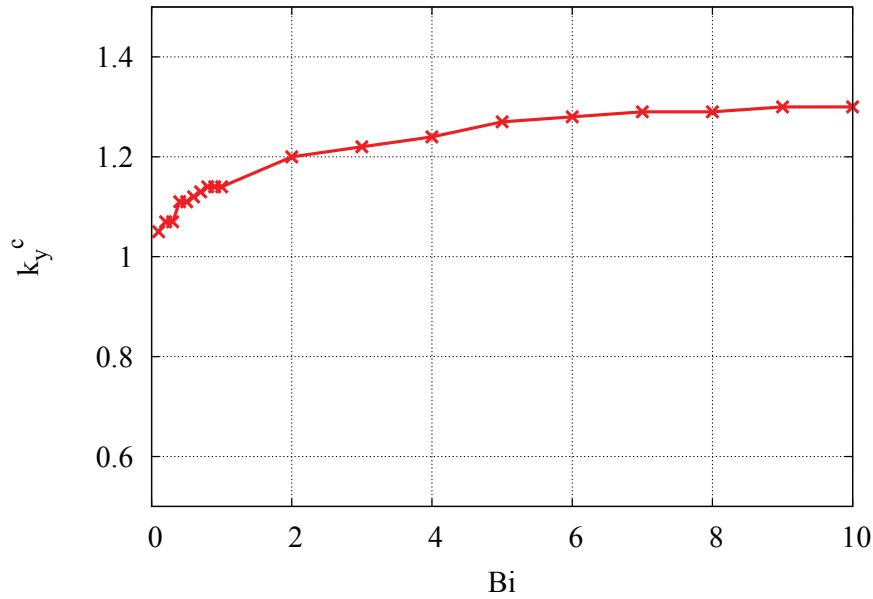


Figure IV.6.: Nombre d'onde critique transversal en fonction du nombre de Biot pour $Ma = 0$, $Pr = 7$ et $Re = 15$.

nous aurons un nombre plus important de rouleaux longitudinaux par rapport au cas de l'écoulement à surface libre. Ce résultat, nous l'avons déjà remarqué lors des simulations numériques (section (III.3) du chapitre précédent) pour un canal de rapport de forme 10 et pour les mêmes conditions d'écoulement ($Ra = 5000$, $Pr = 7$ et $Re = 15$), nous avons trouvé 10 rouleaux longitudinaux dans le cas de l'écoulement à surface libre et 12 rouleaux dans le cas de l'écoulement de PRB.

	Ecoulement PRB	Notre cas d'étude $Bi \rightarrow \infty$
Ra_c	1707.8	1097
k_y^c	1.558	1.34

Table IV.3.: Comparaison des nombres de Rayleigh critique Ra_c et des nombres d'onde associés k_y^c pour l'apparition des rouleaux longitudinaux obtenus dans le cadre de cette étude avec ceux obtenus pour l'écoulement de PRB.

Sur les Figures IV.7 et IV.8, nous présentons les modes propres les plus instables représentant les structures d'écoulement respectivement pour le cas de l'écoulement à surface supérieure libre et pour l'écoulement à surface supérieure rigide (écoulement

PRB). Les paramètres de contrôle de l'écoulement dans les deux cas sont fixés à $Pr = 7$, $Re = 15$ (pour l'écoulement à surface libre nous avons en plus : $Ma = 0$ et $Bi = 2$). Les conditions critiques associées à l'apparition de ces structures sont : $(Ra_c = 1247, k_c = 1.2)$ pour l'écoulement à surface libre et $(Ra_c = 1707.8, k_c = 1.558)$ pour le cas de l'écoulement de PRB. Dans le cas de l'écoulement de PRB (Figure IV.8), les perturbations sont sous forme de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs dont le centre est à $Z = 0$ et le diamètre des rouleaux est proche de la hauteur du canal. Dans le cas d'un écoulement à surface libre, les perturbations sont aussi des rouleaux longitudinaux contra-rotatifs de diamètre également proche de la hauteur du canal, mais leurs centres sont décalées vers la surface libre ($Z \simeq 0.15$). Nous remarquons aussi clairement sur les deux figures (IV.7 et IV.8) que la longueur d'onde des rouleaux est plus grande dans le cas de l'écoulement avec surface libre.

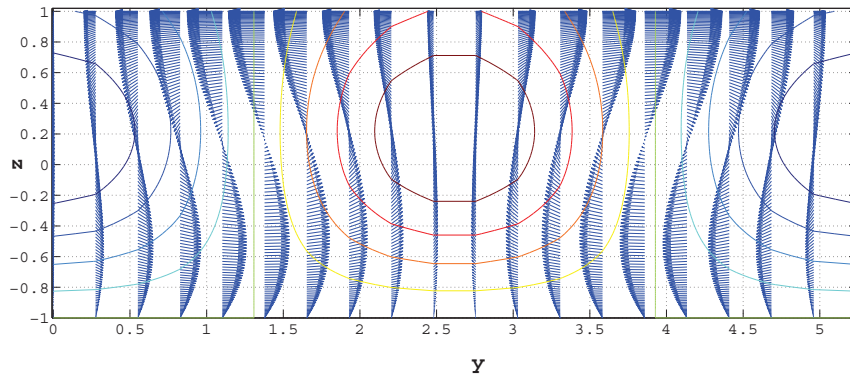


Figure IV.7.: Composantes transversales de la vitesse ($\hat{V}_y, \hat{V}_z$) (flèches) et isothermes de la température $\hat{\theta}$ (lignes) pour le mode propre des rouleaux longitudinaux le plus instable ($Ra_c = 1247$, $k_c = 1.2$, $Ma = 0$, $Bi = 2$, $Pr = 7$ et $Re = 15$).

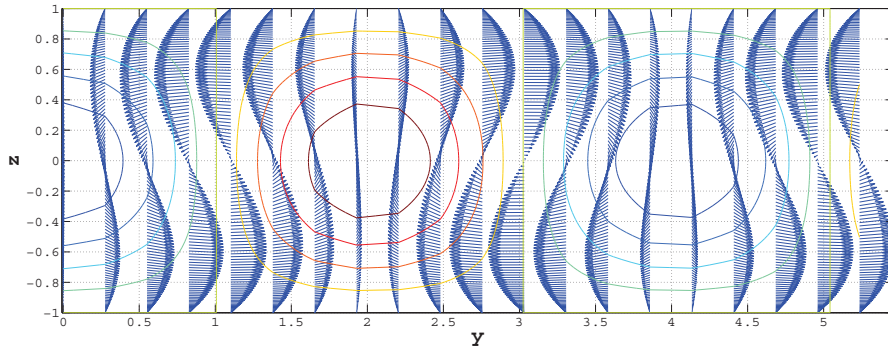


Figure IV.8.: Composantes transversales de la vitesse ($\hat{V}_y, \hat{V}_z$) (flèches) et isothermes de la température $\hat{\theta}$ (lignes) pour le mode propre le plus instable des rouleaux longitudinaux de Poiseuille-Rayleigh-Bénard ($Ra_c = 1707.8$, $k_c = 1.558$, $Pr = 7$ et $Re = 15$).

Combinaison des effets thermogravitaires avec les effets thermocapillaires

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, les variations de la tension superficielle avec la température (effet Marangoni ou effet thermocapillaire) génèrent des écoulements au niveau de la surface libre, des zones chaudes vers les zones froides. Pour analyser la combinaison des effets thermogravitaires et des effets thermocapillaires, nous commençons d'abord par étudier les seuils critiques d'apparition des instabilités dues seulement aux effets thermocapillaires ainsi que leurs structures spatiales. Les effets thermogravitaires seront donc négligés dans un premier temps ($Ra = 0$). Nous présentons sur la Figure IV.9 l'évolution du nombre de Marangoni critique Ma_c en fonction du nombre de Biot ($Ra = 0$, $Pr = 7$). Nous observons aussi dans ce cas que, pour un nombre de Biot nul ($Bi = 0$), l'écoulement est toujours stable. La surface libre est alors supposée adiabatique, ce qui empêche la création des gradients de température responsables du développement des forces thermocapillaires. Pour des nombres de Biot modérés, le nombre de Marangoni critique diminue fortement jusqu'au voisinage de $Bi = 1.5$, puis augmente linéairement avec

Bi . En effet, pour les faibles valeurs du nombre de Biot, les gradients de température à la surface supérieure sont augmentés, ce qui favorisent les effets thermocapillaires et le déclenchement rapide d'instabilités thermoconvectives. Cependant, pour les grandes valeurs de Bi , les gradients de température à la surface libre deviennent de plus en plus faibles, ce qui a pour conséquence d'augmenter le nombre de Marangoni critique linéairement avec Bi .

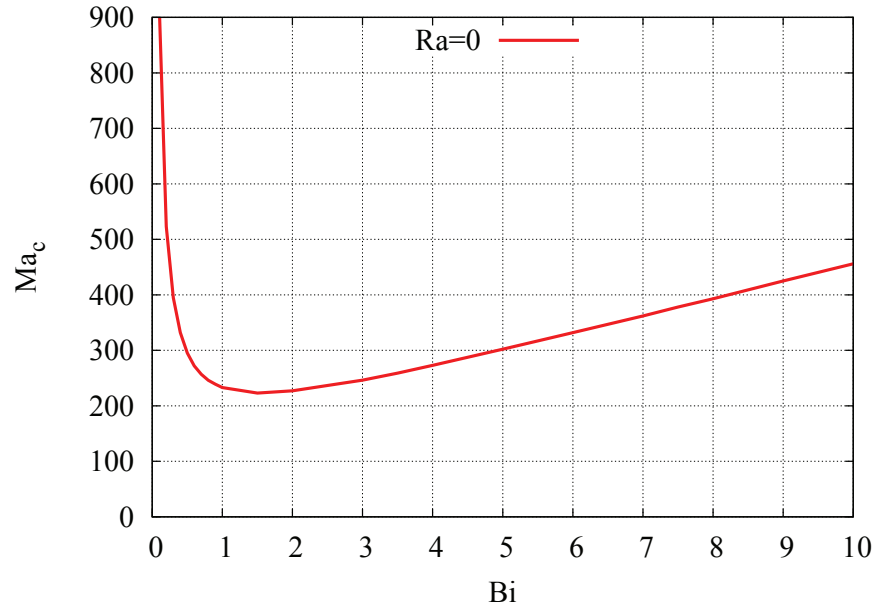


Figure IV.9.: Evolution du nombre de Marangoni critique en fonction du nombre de Biot pour $Ra = 0$, $Pr = 7$ et $Re = 15$.

Une comparaison des nombres de Marangoni critiques Ma_c de cette étude avec ceux obtenus par Nield (1964) pour une couche de fluide infinie sans convection forcée est donnée dans le Tableau IV.4. Nous notons également ici que le nombre de Marangoni Ma que nous avons défini est lié au nombre de Marangoni $\bar{Ma}$ utilisé dans l'étude de Nield (1964) par la relation suivante :

$$Ma = \frac{1 + Bi}{Bi} \bar{Ma} \quad (IV.46)$$

La comparaison donnée dans le Tableau IV.4 montre que la différence entre les

valeurs obtenues pour les deux cas d'écoulement n'excède pas 1% quel que soit le nombre de Biot. Par conséquent, ici non plus la convection forcée n'a pas d'effet sur le nombre de Marangoni critique Ma_c d'apparition des rouleaux longitudinaux. Cette constatation est également confirmée par le fait que la valeur critique obtenue pour l'apparition des rouleaux longitudinaux stationnaires est indépendante du nombre de Reynolds. Nous présentons sur la Figure IV.10 l'effet du nombre

Bi	Ma_c avec convection forcée	Ma_c sans convection forcée Nield (1964)
0.1	918.1	917.7
1.0	232.2	232.3
10.0	455.1	454.8
100.0	3336.9	3336.9

Table IV.4.: Comparaison des nombres de Marangoni critiques obtenus dans cette étude avec ceux obtenus sans convection forcée par Nield (1964).

de Biot sur le nombre d'onde critique k_y^c d'apparition des rouleaux longitudinaux dus aux effets thermocapillaires. Comme dans le cas des instabilités dues aux effets thermogravitaires, nous observons aussi que k_y^c augmente progressivement lorsque le nombre de Biot augmente pour atteindre une valeur constante voisine de $k_y^c = 1.50$. Cette valeur est supérieure à celle atteinte dans le cas d'instabilités dues aux effets thermogravitaires. Cela signifie que pour les grandes valeurs du nombre de Biot, les forces thermocapillaires génèrent plus de rouleaux longitudinaux convectifs que dans le cas d'un écoulement dominé par les forces thermogravitaires. La Figure IV.11 montre bien cette différence de nombre de rouleaux entre les deux cas. En fait, pour de grandes valeurs du nombre de Biot, les gradients thermiques à la surface libre sont faibles ce qui conduit les forces thermocapillaires à créer des rouleaux longitudinaux de courte longueur d'onde λ_y à l'inverse des rouleaux longitudinaux de la convection thermogravitaire qui sont dus aux gradients de température internes dans le fluide et non pas aux gradients de température à la surface libre.

La structure de l'écoulement dans le cas de la convection de Marangoni pure

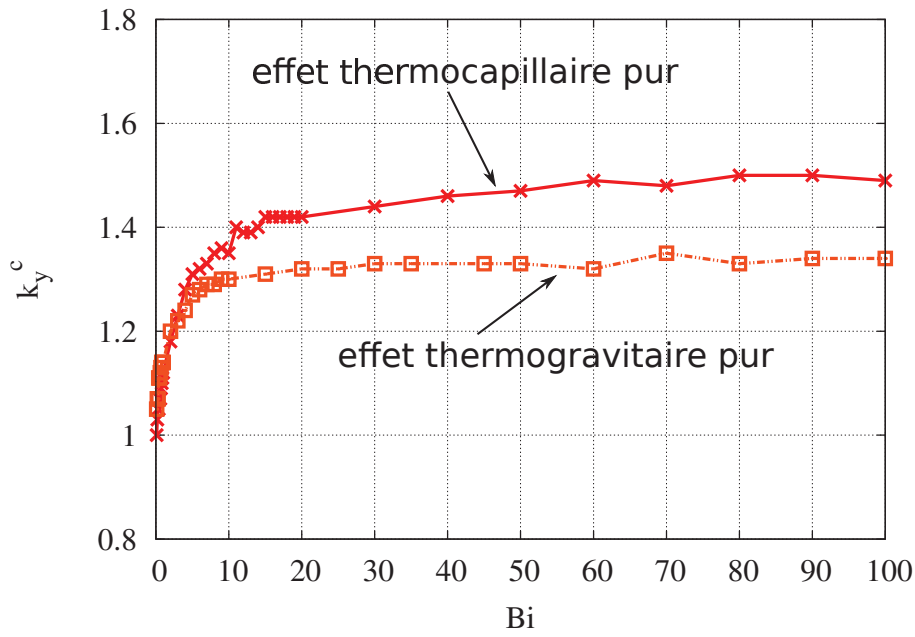
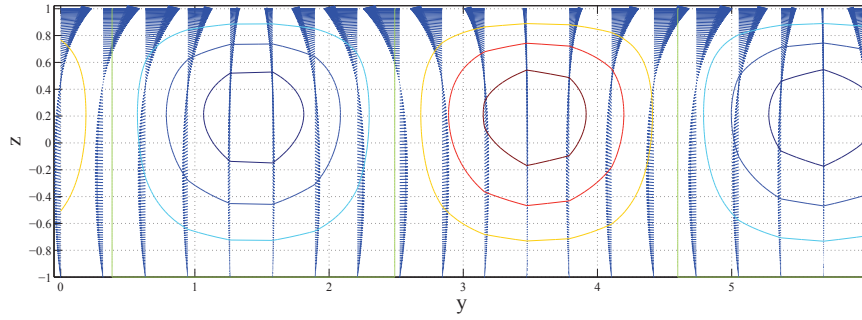
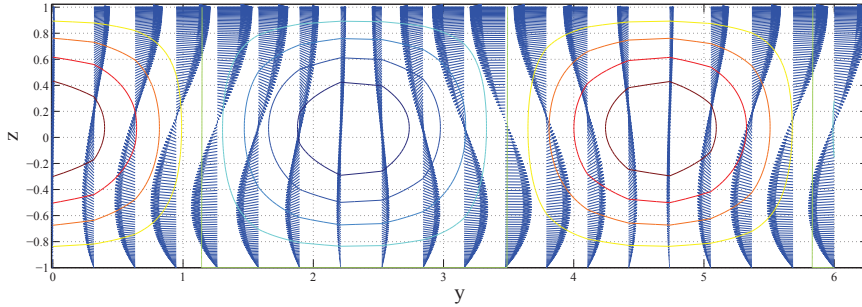


Figure IV.10.: Nombre d'onde critique transversal en fonction du nombre de Biot pour $Ra = 0$, $Pr = 7$ et $Re = 15$.

est présentée sur la Figure IV.12 pour les paramètres de contrôle fixés à $Ra = 0$, $Re = 15$, $Pr = 7$ et pour différents nombres de Biot. Les conditions critiques sont $(Ma_c = 294.6, k_c = 1.07)$ pour $Bi = 0.5$, $(Ma_c = 226.2, k_c = 1.18)$ pour $Bi = 0.5$ et $(Ma_c = 3336.9, k_c = 1.49)$ pour $Bi = 0.5$. Nous remarquons que les forces thermocapillaires induisent des rouleaux longitudinaux contra-rotatifs similaires à ceux induits par les forces thermogravitaires. Cependant, comme nous l'avons déjà vu pour le cas avec $Ma = 0$, le centre des rouleaux convectifs est plus encore décalé vers la surface libre ($Z = 0.4$) dans le cas de $Ra = 0$. Cette position du centre ne dépend pas du nombre de Biot. La position des rouleaux dans la zone d'observation ($(0 \leq Y \leq 6)$) est fortement influencée par le nombre de Biot en raison du rôle qu'il joue sur la modification des gradients thermiques au niveau de l'interface qui est répercutée ensuite dans tout le fluide. Plus le nombre de Biot est petit, plus les isothermes coupent perpendiculairement l'interface libre, ce qui confirme que les gradients thermiques sont plus importants à ce niveau (Figure IV.12 (a)). Au contraire lorsque le nombre de Biot est fort ((Figure IV.12 (c)) les isothermes sont



(a) Écoulement thermocapillaire pure ($Bi = 100$, $Ra = 0$, $Ma_c = 3336.9$, $k_y^c = 1.49$)

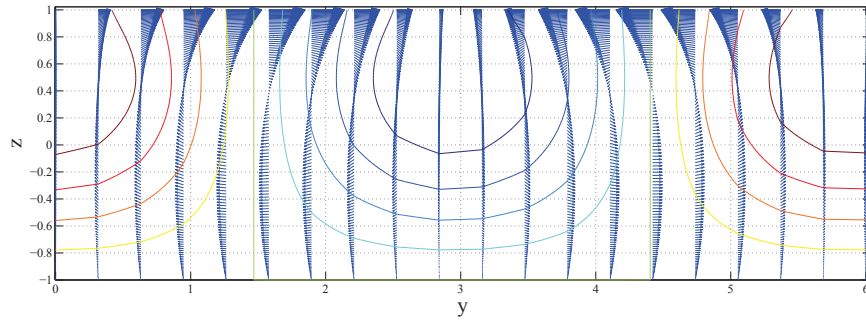


(b) Écoulement thermogravitaire pure ($Bi = 100$, $Ma = 0$, $Ra_c = 1097$, $k_y^c = 1.34$)

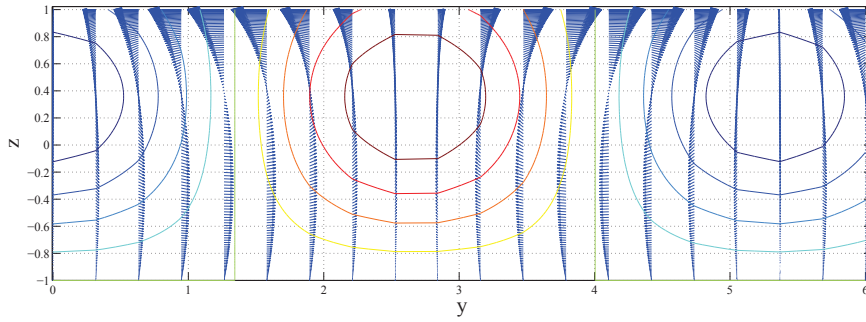
Figure IV.11.: Composantes transversales de la vitesse ($\hat{V}_y, \hat{V}_z$) (flèches) et isothermes de la température $\hat{\theta}$ (lignes) pour le mode propre le plus instable des rouleaux longitudinaux.

pratiquement parallèles à l'interface libre.

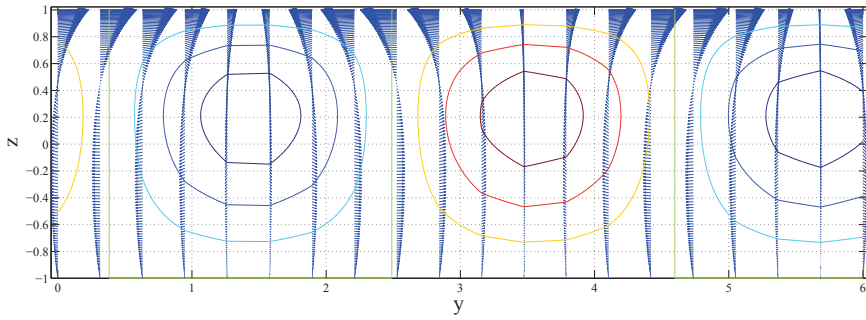
Nous considérons dans ce qui suit la combinaison des forces thermogravitaires et des forces thermocapillaires sur l'instabilité de l'écoulement. Pour illustrer l'effet du couplage de ces deux types de forces sur les seuils d'apparition des rouleaux longitudinaux, nous présentons sur la Figure IV.13 l'évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Biot pour différents nombres de Marangoni. Nous observons que, pour toutes les valeurs du nombre de Biot Bi , augmenter le nombre de Marangoni rend le système d'écoulement plus instable. Pour $Ma < 40$, la



(a) $Bi = 0.5$, $Ma_c = 294.6$, $k_y^c = 1.07$



(b) $Bi = 2$, $Ma_c = 226.2$, $k_y^c = 1.18$



(c) $Bi = 100$, $Ma_c = 3336.9$, $k_y^c = 1.49$

Figure IV.12.: Composantes transversales de la vitesse ($\hat{V}_y, \hat{V}_z$) (flèches) et isothermes de la température $\hat{\theta}$ (lignes) pour le mode propre le plus instable des rouleaux longitudinaux induits par la convection de Marangoni seule pour différents nombres de Biot. (a) $Bi = 0.5$, (b) $Bi = 2$ et (c) $Bi = 100$.

diminution du nombre de Rayleigh critique Ra_c pour atteindre la valeur asymptotique $Ra = 1097$ indique que les forces de flottabilité sont toujours prédominantes. On est en présence d'un écoulement de convection mixte avec très peu d'effets thermocapillaires. Pour $Ma > 40$, les courbes d'évolution du nombre de Rayleigh critique diminuent jusqu'à atteindre un minimum puis augmentent pour s'approcher de la valeur asymptotique $Ra_c = 1097$ pour les grandes valeurs du nombre de Biot. Dans ce cas, les forces thermocapillaires sont prédominantes pour les faibles valeurs du nombre de Biot. Par contre les forces thermogravitaires deviennent prédominantes pour les grandes valeurs du nombre de Biot pour lesquelles toutes les courbes critiques tendent vers la valeur asymptotique $Ra_c = 1097$ imposée par la convection naturelle. Pour le nombre de Marangoni $Ma = 300$, nous observons une plage centrée autour du nombre de Biot égale à 1 ($0.5 < Bi < 5$), pour laquelle le nombre de Rayleigh critique est nul, donc l'écoulement est toujours instable. Nous présentons sur la Figure IV.14 l'évolution du nombre de Rayleigh critique d'apparition des rouleaux longitudinaux en fonction du nombre de Marangoni pour différentes valeurs du nombre de Biot. Toutes les courbes critiques ont une évolution décroissante lorsque le nombre de Marangoni Ma augmente. Cela signifie que les forces thermogravitaires et les forces thermocapillaires se renforcent mutuellement conduisant ainsi le système à devenir plus instable. La zone d'écoulement stable est d'autant plus réduite que le nombre de Biot est petit. Ce résultat a été trouvé aussi par Nield (1964) pour un écoulement sans convection forcée. Cette diminution de la valeur du nombre de Rayleigh critique est forte pour les faibles valeurs du nombre de Biot pour lesquels les gradients thermiques sont importants à la surface libre (forces thermocapillaires importantes), tandis qu'elle est faible pour les grandes valeurs du nombre de Biot pour lesquels la surface libre est pratiquement à température uniforme, les forces thermocapillaires deviennent alors négligeables. Les effets du nombre de Biot sur les seuils d'instabilités conduisant à l'apparition des rouleaux longitudinaux sont donc très importants.

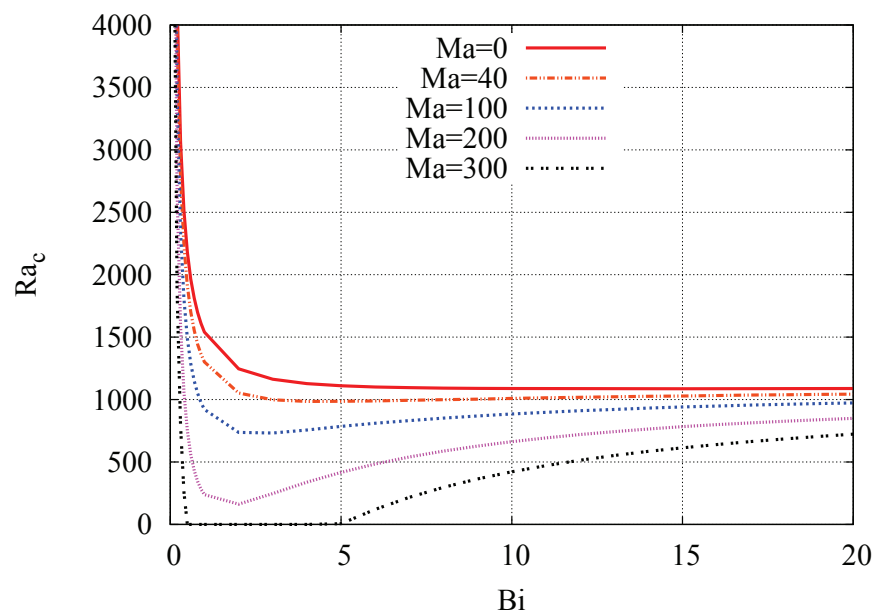


Figure IV.13.: Evolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Biot pour différents nombres de Marangoni ($Pr = 7$ et $Re = 15$).

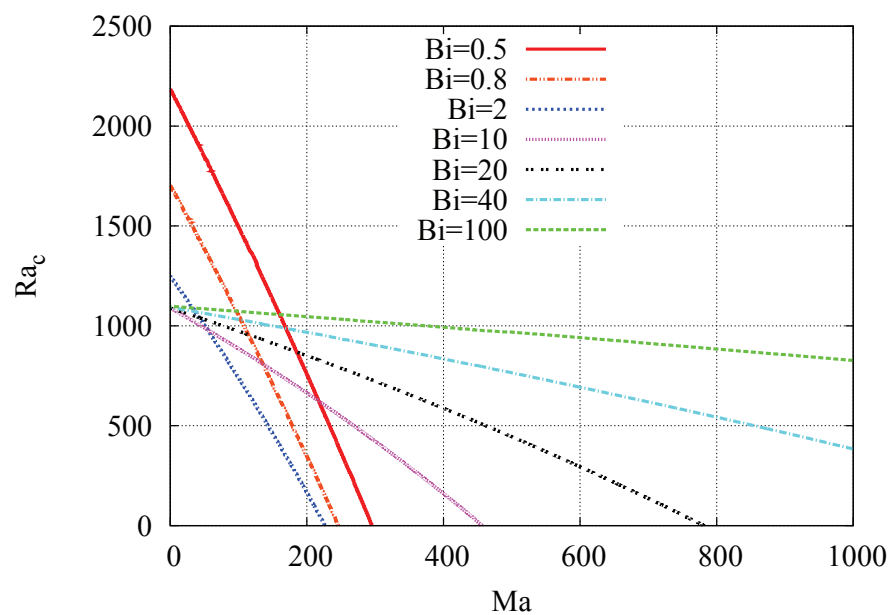


Figure IV.14.: Evolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Marangoni pour différents nombres de Biot ($Pr = 7$ et $Re = 15$).

IV.6.2. Instabilité donnant des rouleaux transversaux

Instabilité due aux effets thermogravitaires

Nous commençons comme dans la section précédente par étudier l'instabilité due aux effets thermogravitaires sans interaction avec les effets thermocapillaires ($Ma = 0$). Nous présentons sur la Figure IV.15 le spectre des valeurs propres (σ_r, σ_i) pour $Re = 1$, $Pr = 7$, $Bi = 2$, $Ra = 1317$ et $k_x = 1.2$. Le mode le moins stable est indiqué par une flèche. La partie imaginaire des valeurs propres σ_i est non nulle contrairement au cas d'instabilité sous forme des rouleaux longitudinaux. Cela indique le caractère instationnaire des rouleaux transversaux. Les mode propres ont alors la forme d'une onde plane monochromatique.

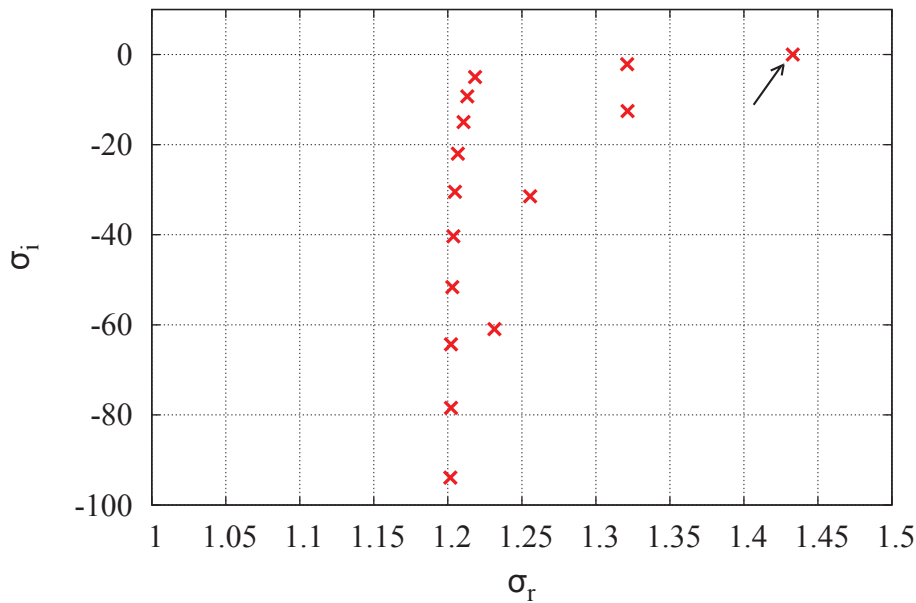


Figure IV.15.: Spectre des plus grandes valeurs propres dans le cas $Re = 1$, $Pr = 7$, $Bi = 2$ et $Ma = 0$. La plus grande valeur est indiquée par une flèche.

Nous présentons sur la Figure IV.16 l'évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Biot Bi pour les deux cas d'instabilité. Quelques valeurs numériques des nombres de Rayleigh critiques sont données dans le Tableau

IV.5. Nous observons que les valeurs du nombre de Rayleigh de l'instabilité sous forme de rouleaux transversaux suivent la même évolution en fonction de Bi que celles de l'instabilité sous forme des rouleaux longitudinaux. Le nombre de Rayleigh critique diminue fortement pour les faibles valeurs du nombre de Biot jusqu'au voisinage de $Bi = 3$ pour l'instabilité sous forme de rouleaux longitudinaux et $Bi = 4$ pour l'instabilité sous forme de rouleaux transversaux, puis continue à diminuer faiblement pour atteindre une valeur minimale $Ra_c = 1087.1$ au voisinage de $Bi = 15$ pour le cas d'instabilité sous forme de rouleaux longitudinaux et $Ra_c = 1129$ au voisinage de $Bi = 17$ pour le cas de l'instabilité sous forme de rouleaux transversaux. Enfin, le nombre de Rayleigh critique augmente faiblement vers une valeur asymptotique $Ra_c = 1097$ pour le cas de l'instabilité sous forme de rouleaux longitudinaux et $Ra_c = 1135$ pour le cas de l'instabilité sous forme de rouleaux transversaux. Ainsi, pour les deux modes d'instabilité, l'écoulement est légèrement plus instable pour les valeurs de Bi modérées. Nous remarquons aussi que les rouleaux transversaux sont plus stables par rapport aux rouleaux longitudinaux quel que soit le nombre de Biot. Le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des rouleaux longitudinaux est toujours inférieur au nombre de Rayleigh critique pour l'apparition des rouleaux transversaux. Cela a aussi été trouvé dans le cas de l'écoulement de PRB (Nicolas, 2002).

La Figure IV.17 (valeurs numériques données au Tableau IV.5) montre l'effet du nombre de Biot sur le nombre d'onde critique k_x^c associé aux rouleaux transversaux. Il apparaît que le nombre de Biot influence k_x^c de la même façon qu'il influence sur le nombre d'onde k_y^c associé aux rouleaux longitudinaux. Le nombre d'onde k_x^c augmente progressivement lorsque Bi augmente pour atteindre une valeur constante $k_x^c = 1.32$.

Nous présentons sur la Figure IV.18 l'évolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs de Bi et pour $Pr = 7$.

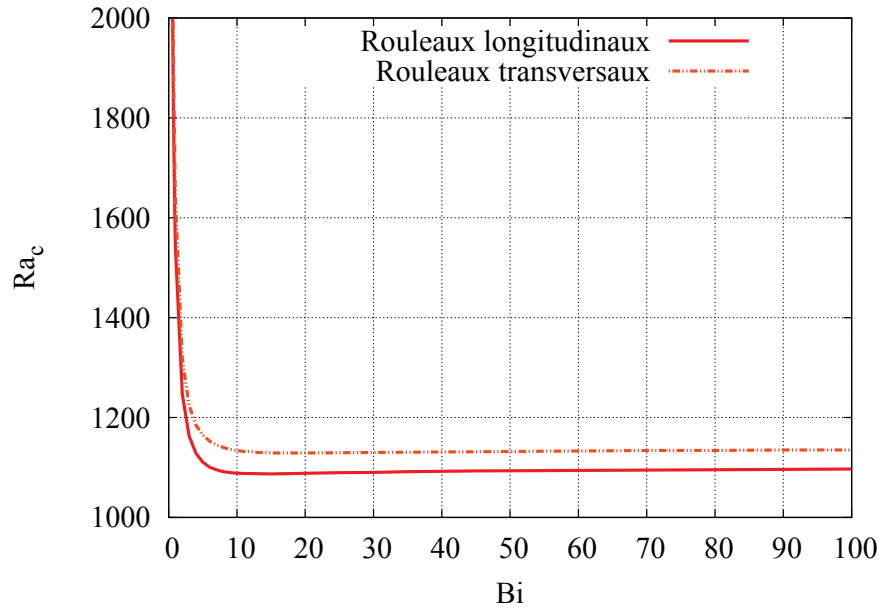


Figure IV.16.: Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Biot Bi pour l'instabilité sous forme de rouleaux longitudinaux et pour l'instabilité sous forme de rouleaux transversaux ($Pr = 7$, $Re = 1$ et $Ma = 0$).

Bi	Rouleaux transversaux		Rouleaux longitudinaux	
	Ra_c	k_x^c	Ra_c	k_x^c
0.2	4465.5	1.06	4170.9	1.07
0.6	2096.5	1.10	1965.2	1.12
2	1317.2	1.18	1246.6	1.20
5	1162.8	1.26	1110.6	1.27
10	1133.1	1.27	1088.5	1.30
20	1128.5	1.30	1088.4	1.32
50	1131.5	1.32	1093.5	1.33
100	1133.6	1.32	1097.0	1.34

Table IV.5.: Valeurs numériques des nombres de Rayleigh critique en fonction du nombre de Biot pour l'instabilité donnant des rouleaux transversaux et l'instabilité donnant des rouleaux longitudinaux ($Re = 1$, $Pr = 7$ et $Ma = 0$).

Les résultats obtenus pour l'écoulement de PRB pour un nombre de Prandtl $Pr = 7$ sont aussi représentés sur cette figure. Dans tous les cas, l'augmentation du nombre de Reynolds rend le système plus stable vis-à-vis des rouleaux transversaux. Nous remarquons aussi que pour les nombres de Biot qui tendent vers zéro ($Bi = 0.2$ par exemple) l'écoulement de PRB est toujours plus instable que l'écoulement à surface

libre quel que soit le nombre de Reynolds. Cependant, pour des valeurs du nombre de Biot modérées ($Bi < 20$), l'écoulement de PRB est plus stable par rapport à l'écoulement à surface libre pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds. Il devient plus instable par rapport à l'écoulement à surface libre pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds. Dans le cas des grandes valeurs de Biot ($Bi = 100$ par exemple) l'écoulement à surface libre est toujours plus instable par rapport à l'écoulement de PRB quel que soit le nombre de Reynolds.

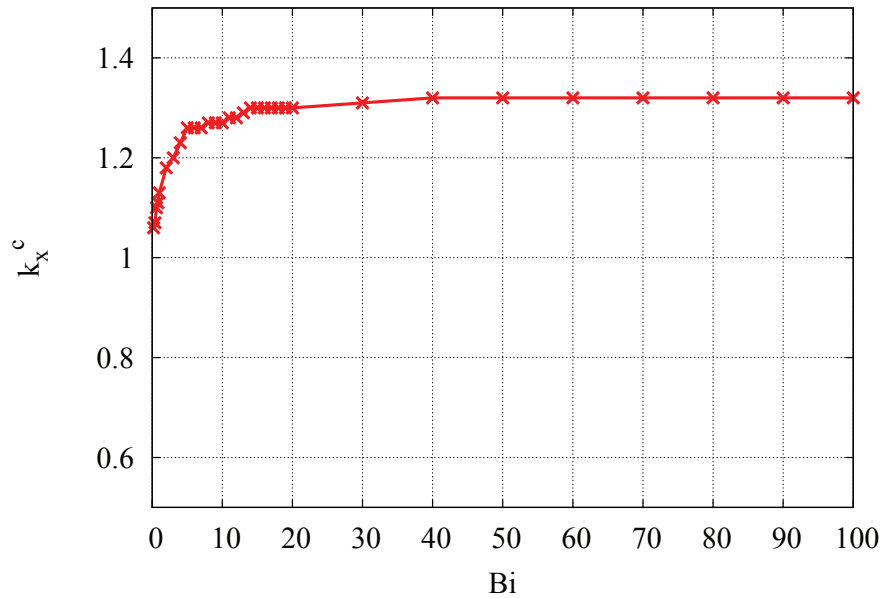


Figure IV.17.: Evolution du nombre d'onde critique k_x^c associé aux rouleaux transversaux en fonction du nombre de Biot Bi ($Pr = 7$, $Re = 1$ et $Ma = 0$).

Nous présentons dans le Tableau IV.6 une comparaison des nombres de Rayleigh critique et des nombres d'onde associés à l'apparition de rouleaux transversaux pour l'écoulement de PRB et pour notre cas d'étude (écoulement à surface libre). La comparaison est faite pour différents nombres de Prandtl Pr et différents nombre de Reynolds Re . Dans le cas de l'écoulement à surface libre nous avons choisi $Bi = 100$ pour nous rapprocher de la condition thermique de la paroi supérieure conductrice de l'écoulement de PRB. Nous remarquons que l'écoulement à surface

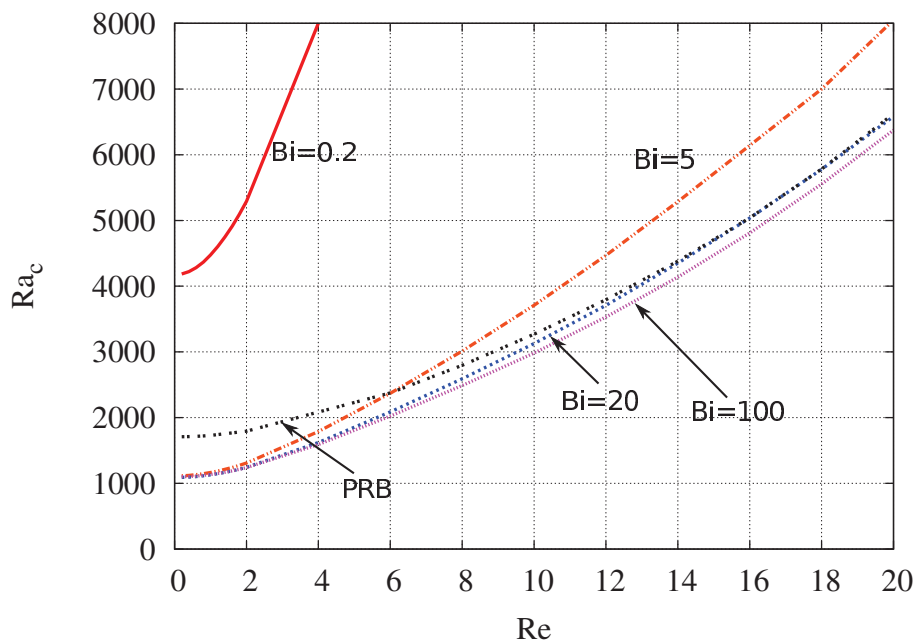


Figure IV.18.: Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Reynolds Re pour différentes valeurs de Bi ($Pr = 7$, $Ma = 0$). Comparaison au cas de l'écoulement PRB.

libre est plus instable par rapport à l'écoulement de PRB pour les faibles valeurs du nombres de Prandtl quel que soit le nombre de Reynolds (les nombres de Rayleigh critiques obtenus pour l'écoulement à surface libre sont inférieurs à ceux obtenus pour l'écoulement de PRB). Par contre, pour de grandes valeurs du nombre de Prandtl ($Pr = 200$), l'écoulement de PRB devient plus rapidement instable par rapport à l'écoulement à surface libre quel que soit le nombre de Reynolds. En ce qui concerne le nombre d'onde k_x , nous remarquons que k_x dans le cas de l'écoulement à surface libre est toujours inférieur à k_x dans le cas de l'écoulement de PRB quels que soient les nombres de Prandtl et de Reynolds. Ce qui signifie que dans le cas de l'écoulement de PRB, nous aurons toujours plus de rouleaux transversaux par rapport au cas de l'écoulement à surface libre.

Nous présentons sur les Figures IV.19 et IV.20 les structures d'écoulement respectivement pour le cas de l'écoulement à surface supérieure libre et pour l'écoulement de PRB. Les paramètres de contrôle de l'écoulement dans les deux cas sont fixés

	$Pr = 1$				$Pr = 7$				$Pr = 200$			
Re	$Bi = 100$		PRB		$Bi = 100$		PRB		$Bi = 100$		PRB	
	Ra_c	k_x^c	Ra_c	k_x^c	Ra_c	k_x^c	Ra_c	k_x^c	Ra_c	k_x^c	Ra_c	k_x^c
0.2	1098	1.3	1708	1.6	1100	1.3	1709	1.6	1885	1.3	1868	1.5
0.6	1099	1.3	1708	1.6	1111	1.3	1716	1.6	4046	1.2	2662	1.5
1	1099	1.3	1709	1.6	1135	1.3	1730	1.6	6343	1.2	3385	1.6
2	1103	1.3	1713	1.6	1240	1.3	1794	1.6	12686	1.1	4876	1.6
6	1137	1.3	1756	1.6	2022	1.2	2376	1.5	40502	1.1	10657	1.6
8	1168	1.3	1793	1.6	2489	1.2	2796	1.5	56109	1.1	14113	1.6
10	1207	1.3	1841	1.6	2982	1.1	3269	1.5	72953	1.1	18309	1.6
20	1521	1.2	2252	1.6	6134	1.1	6622	1.5	174752	0.9	57959	0.9

Table IV.6.: Comparaison des nombres de Rayleigh critiques obtenus pour l'écoulement à surface libre avec rouleaux transversaux ($Bi = 100$) avec ceux obtenus pour l'écoulement de PRB.

à $Pr = 7$, $Re = 1$ (pour l'écoulement à surface libre : $Ma = 0$ et $Bi = 100$). Les conditions critiques associées à l'apparition de ces structures sont : $Ra_c = 1133.9$, $k_x^c = 1.33$ pour l'écoulement à surface libre et $Ra_c = 1729.7$, $k_x^c = 1.56$ pour le cas de l'écoulement de PRB. Dans les deux cas d'écoulement, les perturbations se présentent sous forme de rouleaux transversaux contra-rotatifs d'axe perpendiculaire à l'écoulement principal dont le centre est à $Z = 0$ pour le cas de l'écoulement de PRB et est un peu décalé vers le haut pour le cas de l'écoulement à surface libre. Le diamètre des rouleaux transversaux est proche de la hauteur du canal pour les deux cas d'écoulement. Les rouleaux sont un peu déformés dans le cas à surface libre, ils ont perdu leur symétrie par rapport à l'axe Z .

Combinaison des effets thermogravitaires aux effets thermocapillaires

Nous allons étudier ici les effets de la variation de la tension superficielle avec la température (effet Marangoni) sur l'initiation et la structure des rouleaux transversaux. Pour analyser la combinaison des effets thermogravitaires aux effets thermocapillaires sur les rouleaux transversaux, nous commençons d'abord par étudier les seuils critiques d'apparition des instabilités dues seulement aux effets thermocapil-

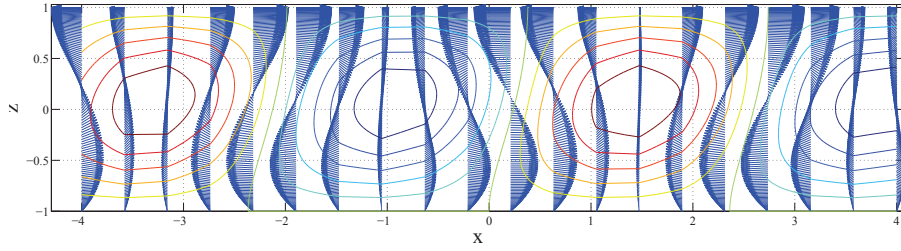


Figure IV.19.: Structure de l'écoulement représentée pour les modes critiques ($\hat{V}_x, \hat{V}_z$) (vecteurs) et $\hat{\theta}$ (contours) dans le cas de l'écoulement à surface libre ($Ra_c = 1133.9$, $k_x^c = 1.33$, $Re = 1$, $Pr = 7$, $Bi = 100$ et $Ma = 0$).

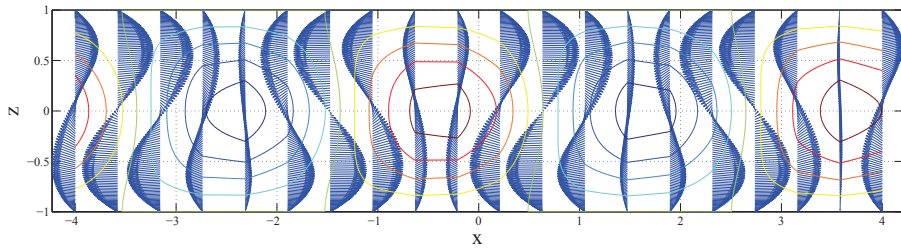


Figure IV.20.: Structure de l'écoulement représentée pour les modes critiques ($\hat{V}_x, \hat{V}_z$) (vecteurs) et $\hat{\theta}$ (contours) dans le cas de l'écoulement de PRB ($Ra_c = 1729.7$, $k_x^c = 1.56$, $Re = 1$, $Pr = 7$ et $Ma = 0$).

lares ainsi que leurs structures spatiales. Les effets thermogravitaires sont négligés dans un premier temps ($Ra = 0$). Nous présentons sur la Figure IV.21 l'évolution du nombre de Marangoni critique Ma_c en fonction du nombre de Biot pour $Re = 1$ et $Re = 15$ comparée au cas d'instabilité donnant des rouleaux longitudinaux. Le nombre de Prandtl est fixé à $Pr = 7$. Nous observons que les valeurs du nombre de Marangoni critique de l'instabilité sous forme des rouleaux transversaux suivent la même évolution en fonction de Bi que celle de l'instabilité sous forme des

rouleaux longitudinaux. Le nombre de Rayleigh critique diminue fortement pour les faibles valeurs de Biot jusqu'au voisinage de $Bi = 1.5$, puis augmente linéairement avec Bi . Pour les faibles valeurs de Re nous observons que le nombre de Marangoni critique est presque le même pour les deux types d'instabilité alors que pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds, les rouleaux transversaux dus aux effets thermocapillaires sont plus stables que les rouleaux longitudinaux dus aux effets thermocapillaires surtout pour les grandes valeurs du nombre de Biot.

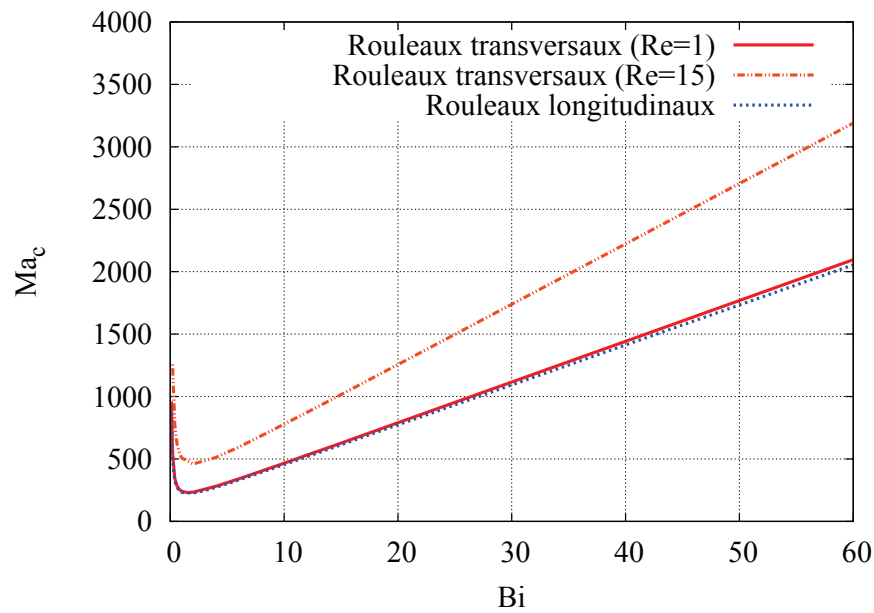


Figure IV.21.: Evolution du nombre de Marangoni critique Ma_c d'apparition des rouleaux transversaux en fonction du nombre pour $Re = 1$ et $Re = 15$. Comparaison avec le cas de l'instabilité donnant des rouleaux longitudinaux.

Nous présentons sur la Figure IV.22 l'évolution du nombre de Marangoni critique en fonction du nombre de Reynolds pour $Bi = 20$, $Pr = 7$ et $Ra = 0$. Nous remarquons que le nombre de Marangoni critique pour l'instabilité donnant les rouleaux transversaux est linéairement dépendant du nombre de Reynolds contrairement au nombre de Marangoni critique pour l'instabilité donnant les rouleaux longitudinaux. En ce qui concerne le nombre d'onde k_c , la Figure IV.23 montre l'évolution du nombre d'onde en fonction de Re comparé avec le cas des rouleaux

transversaux dus seulement aux effets thermogravitaires. Nous remarquons que le nombre d'onde associé aux rouleaux transversaux dus aux effets thermocapillaires croît lorsque le nombre de Re augmente. Par contre le nombre d'onde associé aux rouleaux transversaux dus seulement aux effets thermogravitaires diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente. Les effets thermocapillaires et thermogravitaires agissent donc en sens contraire pour l'établissement du nombre d'onde critique k_x^c .

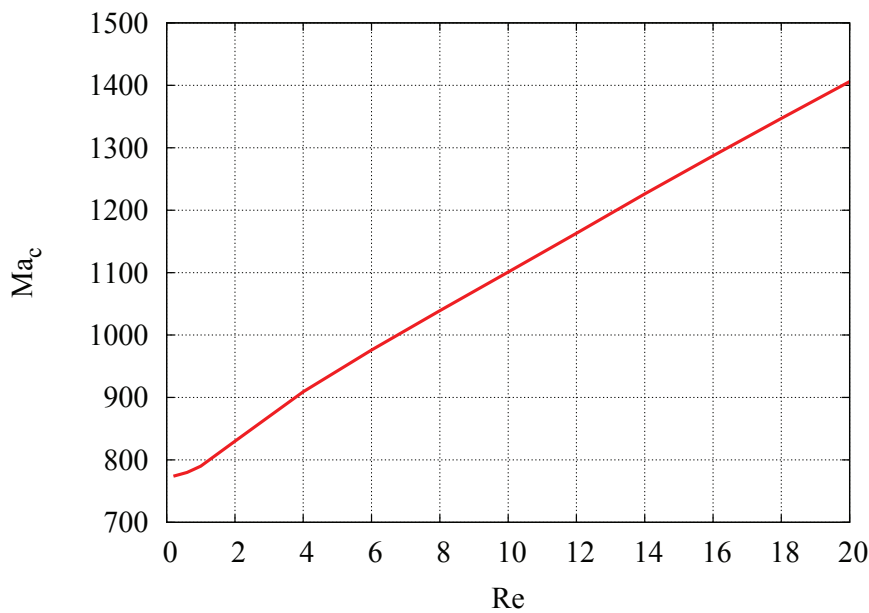


Figure IV.22.: Evolution du nombre de Marangoni critique Ma_c d'apparition des rouleaux transversaux en fonction du nombre de Reynolds pour $Bi = 20$, $Pr = 7$ et $Ra = 0$.

Nous présentons sur les Figures IV.24 et IV.25 respectivement l'évolution du nombre de Marangoni critique et du nombre d'onde critique en fonction du nombre de Prandtl pour $Bi = 20$ et $Re = 1$. D'après l'évolution du nombre de Marangoni critique, l'écoulement devient plus stable vis-à-vis des rouleaux transversaux dus aux effets thermocapillaires quand le nombre de Prandtl augmente. L'augmentation du nombre de Prandtl provoque une augmentation du nombre d'onde critique associé aux rouleaux transversaux dus aux effets thermocapillaires et inversement

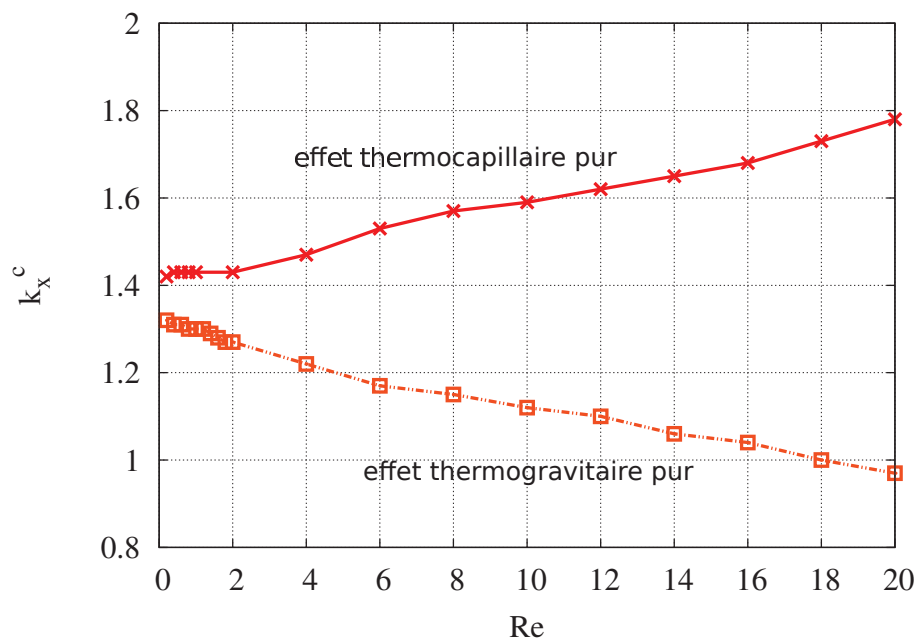


Figure IV.23.: Evolution du nombre d'onde critique k_x^c en fonction du nombre de Reynolds pour $Bi = 20$ et $Pr = 7$.

une diminution du nombre d'onde critique associé aux rouleaux transversaux dus aux effets thermogravitaires.

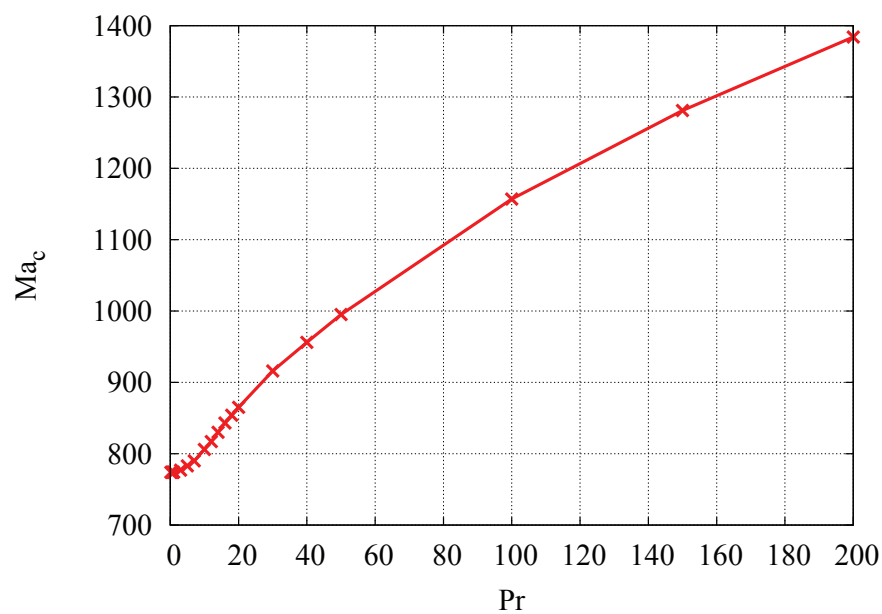


Figure IV.24.: Evolution du nombre de Marangoni critique Ma_c en fonction du nombre de Prandtl pour $Bi = 20$, $Re = 1$ et $Ra = 0$.

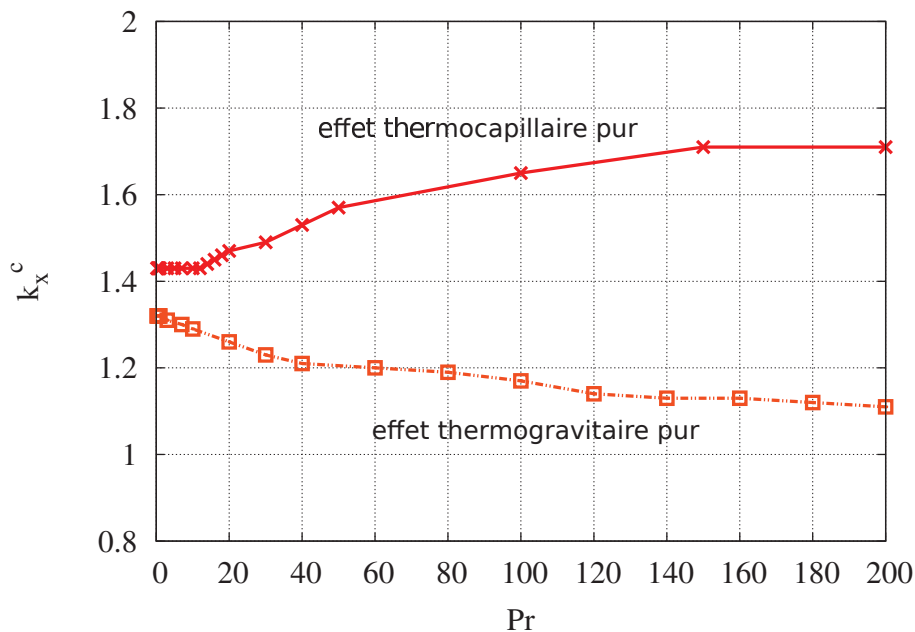
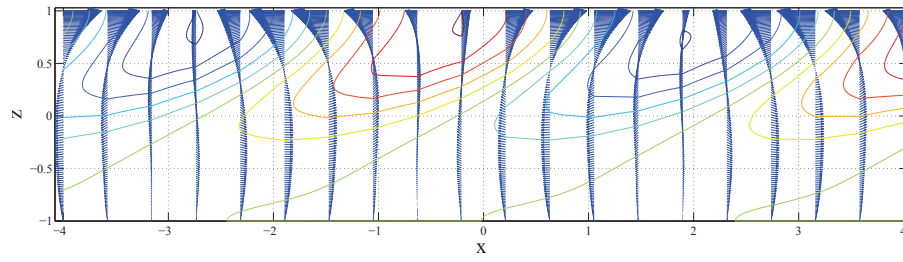


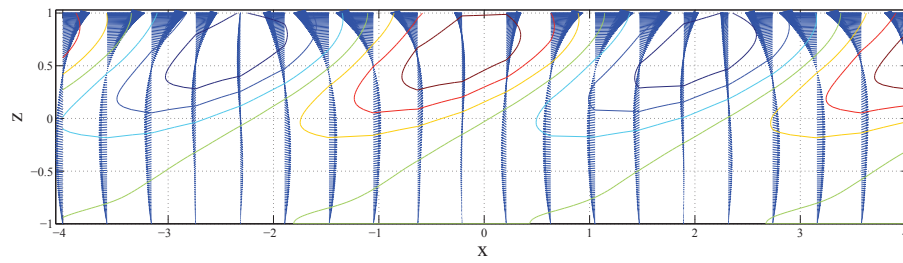
Figure IV.25.: Evolution du nombre d'onde critique k_x^c en fonction du nombre de Prandtl pour $Bi = 20$ et $Re = 1$.

Le mode le plus instable qui montre la structure de l'écoulement dans le cas de la convection de Marangoni pure est présenté sur la Figure IV.26 pour les paramètres de contrôle fixés à $Re = 16$, $Pr = 7$, $Ra = 0$ et pour différents nombres de Biot. Nous remarquons que les forces thermocapillaires induisent des rouleaux transversaux contra-rotatifs similaires à ceux induits par les forces thermogravitaires. Cependant, le centre de ces rouleaux convectifs est bien décalé vers la surface libre ($Z = 0.4$). Cette position du centre ne dépend pas du nombre de Biot. La position des rouleaux dans la zone d'observation est fortement influencée par le nombre de Biot en raison de son impact sur les perturbations thermiques dans le fluide.

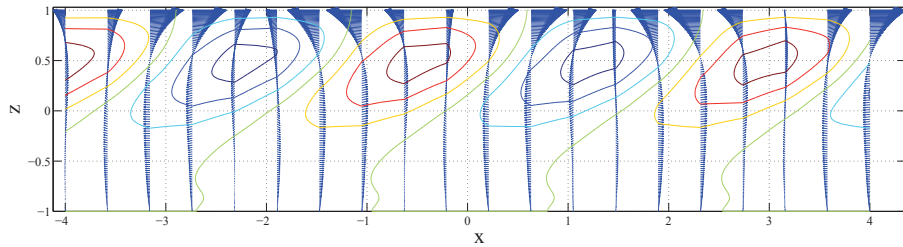
Pour illustrer l'effet du couplage des forces thermogravitaires et des forces thermocapillaires sur les seuils d'apparition des rouleaux transversaux, nous présentons sur la Figure IV.27 l'évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Biot pour différents nombres de Marangoni et pour un nombre de Reynolds fixé à $Re = 1$. Nous observons que le couplage entre ces deux forces a le même effet que celui observé dans le cas de l'instabilité donnant les rouleaux lon-



(a) $Re = 16$, $Bi = 0.2$, $Ra = 0$, $Ma_c = 1307$, $k_x^c = 1.3$



(b) $Re = 16$, $Bi = 2$, $Ra = 0$, $Ma_c = 476$, $k_x^c = 1.4$



(c) $Re = 16$, $Bi = 100$, $Ra = 0$, $Ma_c = 5236$, $k_x^c = 1.8$

Figure IV.26.: Structure de l'écoulement représentée pour les modes critiques ($\hat{V}_x, \hat{V}_z$) (vecteurs) et $\hat{\theta}$ (contours) dans le cas de l'écoulement à surface libre pour différents nombres de Biot ($Ra = 0$).

gitudinaux, pour laquelle l'augmentation du nombre de Marangoni rend le système plus instable pour tous les nombres de Biot. Cet effet de couplage est plus intense pour les faibles nombres de Biot. Par contre, pour les grands nombres de Biot, les forces thermogravitaires deviennent prédominantes. Toutes les courbes critiques tendent alors vers la valeur asymptotique $Ra_c = 1135$ imposée par la convection naturelle. Pour savoir si cet effet reste le même quel que soit le nombre de Reynolds, nous avons tracé sur la Figure IV.28 l'évolution du nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Marangoni. Les nombres de Biot et de Prandtl sont fixés à $Bi = 5$ et $Pr = 7$. Nous remarquons que les forces thermogravitaires et les forces thermocapillaires se renforcent uniquement pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds. Par contre pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds, les forces thermogravitaires deviennent prédominantes.

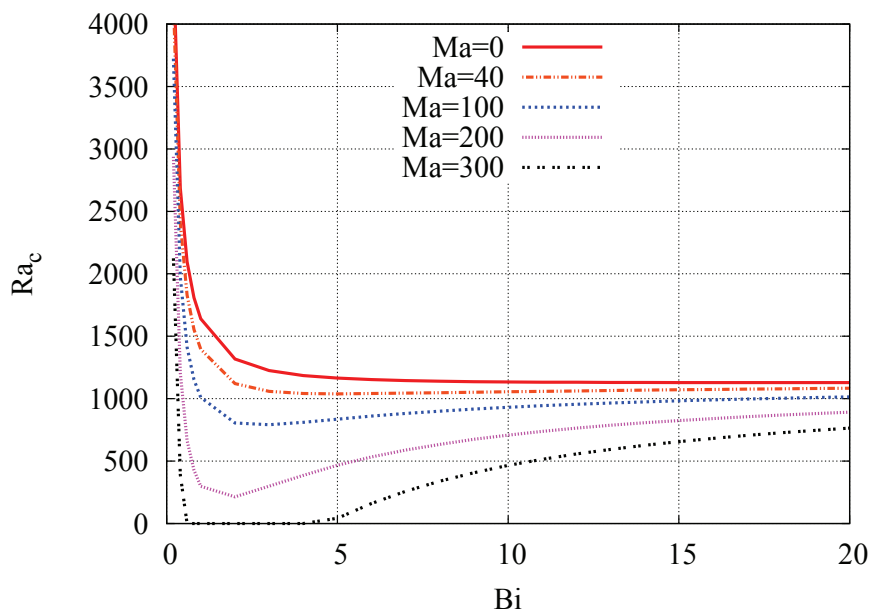


Figure IV.27.: Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Biot pour différents nombres de Marangoni ($Re = 1$, $Pr=7$).

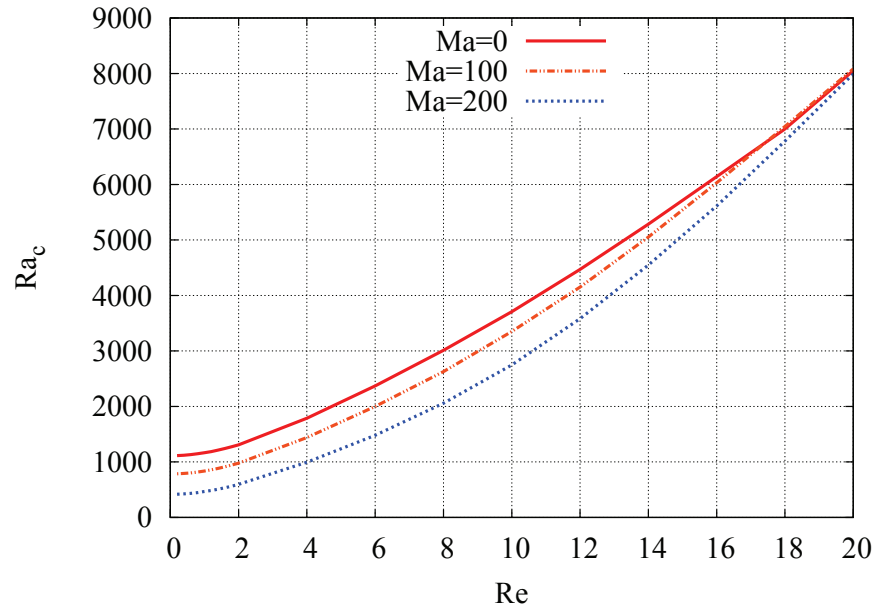


Figure IV.28.: Evolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction du nombre de Reynolds pour différents nombres de Marangoni ($Pr = 7$ et $Bi = 5$)

IV.7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons mené une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de convection mixte combinée aux effets thermocapillaires dans un canal horizontal ouvert d'extension latérale infinie. L'évolution des perturbations infinitésimales de l'écoulement de base par le formalisme classique de l'analyse linéaire de stabilité a été obtenue. Le code numérique basé sur la méthode spectrale de collocation Chebyshev pour résoudre le problème aux valeurs propres issu de l'analyse linéaire a été présenté, puis validé par des tests et des comparaisons avec des résultats disponibles dans la littérature.

Les résultats issus de cette analyse de stabilité linéaire sont présentés sous forme de diagrammes de stabilité marginale déterminant les seuils des paramètres conduisant à l'instabilité thermoconvective. Les modes les plus instables qui décrivent la structure spatiale de l'écoulement sont aussi présentés et analysés.

Dans la présentation des résultats, nous avons commencé par étudier l'instabilité donnant des rouleaux longitudinaux stationnaires. Des comparaisons avec d'autres types d'écoulements ont été réalisées, à savoir l'écoulement sans convection forcée et l'écoulement de PRB. Les résultats de la première comparaison montrent bien que les paramètres critiques (Ra_c et Ma_c) correspondant à l'apparition des rouleaux longitudinaux ne sont pas affectés par la convection forcée. Par comparaison avec l'écoulement de PRB, la présence de la surface supérieure rigide stabilise l'écoulement en retardant l'apparition des rouleaux longitudinaux. La présence d'une surface supérieure rigide augmente également le nombre d'onde critique des rouleaux longitudinaux par rapport à celui dans le cas de l'écoulement à surface libre. Les structures de l'écoulement à surface libre prennent la forme de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs dont le centre est plus décalé vers le haut (la surface libre) par rapport à ceux observés dans l'écoulement de PRB. Cela est d'autant plus vrai si les rouleaux sont induits par les effets thermocapillaires. L'effet du nombre de Biot sur les paramètres critiques correspondant à l'apparition des rouleaux longitudinaux a été présenté et analysé. Nous avons montré aussi que les forces thermogravitaires et les forces thermocapillaires se renforcent mutuellement conduisant ainsi le système à devenir plus instable.

Par la suite, nous avons étudié l'instabilité de l'écoulement vis-à-vis des rouleaux transversaux. Les résultats ont montré que quel que soit le nombre de Biot, les rouleaux transversaux sont toujours plus stables par rapport aux rouleaux longitudinaux comme dans le cas de l'écoulement de PRB. Les diagrammes de stabilité de l'écoulement vis-à-vis les rouleaux transversaux ont été obtenus et montrent une forte dépendance des paramètres critiques (Ra_c et Ma_c) vis-à-vis des nombres de Reynolds et de Prandtl. Par comparaison avec l'écoulement de PRB, la présence de la surface supérieure libre rend l'écoulement plus ou moins stable par rapport à l'écoulement de PRB selon les nombres de Biot, de Reynolds et de Prandtl con-

sidérés. Par contre le nombre d'onde k_x^c dans le cas de l'écoulement à surface libre est toujours inférieur à k_x^c dans le cas de l'écoulement de PRB quels que soient les nombres de Prandtl et de Reynolds. Les structures de l'écoulement à surface libre prennent la forme de rouleaux transversaux contra-rotatifs de centre plus décalé vers le haut et non symétriques par rapport à l'axe Z surtout s'ils sont induits par les effets thermocapillaires. Les résultats ont montré que les forces thermogravitaires et les forces thermocapillaires se renforcent rendant le système plus instable vis-à-vis les rouleaux transversaux uniquement pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds. Par contre, pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds, les forces thermogravitaires deviennent prédominantes.

Conclusion et perspectives

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude des instabilités thermoconvectives d'un écoulement laminaire tridimensionnel de convection mixte dans un canal horizontal à surface libre en prenant en compte les variations de la tension de surface avec la température (effet Marangoni). Dans cette configuration plusieurs types de structures thermoconvectives sont susceptibles d'apparaître. A notre connaissance, c'est la première fois que l'écoulement de convection de type Poiseuille-Rayleigh-Bénard associé aux effets Marangoni est étudié. La modélisation mathématique de ce problème physique est basée sur les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Des hypothèses simplificatrices ont été introduites et justifiées. Les résultats présentés ici ont été obtenus à partir de deux études menées conjointement : une simulation numérique tridimensionnelle de l'écoulement dans un canal ouvert horizontal d'extension latérale finie et une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement dans un canal ouvert d'extension latérale infinie. La première étude nous a permis de mettre en évidence l'influence des paramètres contrôlant l'écoulement (nombres de Reynolds, de Rayleigh, de Biot, de Marangoni et rapport de forme) sur la structure spatiale de l'écoulement et sur les échanges thermiques. La combinaison des paramètres Re , Ra et Pr dans cette étude est choisie de manière à avoir une valeur modérée du nombre de Richardson ($Ri < 8$) qui donne une solution sous la forme de rouleaux longitudinaux stationnaires. Quant à la deuxième étude, complémentaire à la première, elle nous a

permis d'obtenir des diagrammes de stabilité marginale déterminant les seuils des paramètres conduisant à des instabilités thermoconvectives sous forme de rouleaux longitudinaux et de rouleaux transversaux.

Les résultats obtenus dans ce travail de thèse ont montré beaucoup de similitudes entre le cas étudié et le cas de l'écoulement de Poiseuille-Rayleigh-Bénard (PRB) surtout en ce qui concerne le développement des rouleaux longitudinaux et l'influence des nombres de Reynolds et de Rayleigh sur la longueur d'établissement des rouleaux longitudinaux et sur les transferts thermiques. Par contre, la présence de la surface libre, augmente la longueur d'onde des rouleaux par rapport à celle des rouleaux de l'écoulement de PRB ce qui réduit le nombre de rouleaux longitudinaux. Cependant, l'effet favorable, pour les transferts thermiques, de la présence de la paroi supérieure rigide sur le nombre de rouleaux est contrebalancé par les effets visqueux au voisinage de cette paroi. Par conséquent, dans le cas étudié, l'échange thermique est amélioré par rapport au cas de l'écoulement de PRB, pour de grandes valeurs du nombre de Biot (pour $Bi = 15$ et $Bi = 20$). L'introduction des forces thermocapillaires affecte la réorganisation des rouleaux longitudinaux en inversant le sens de rotation des rouleaux près des parois latérales. Les forces thermocapillaires ont aussi un effet favorable sur le transfert thermique. A partir de l'analyse de stabilité linéaire, nous avons montré aussi que les forces thermocapillaires déstabilisent l'écoulement pour conduire à une solution avec la présence de rouleaux longitudinaux ou de rouleaux transversaux contra-rotatifs dont les centres sont décalés vers la surface libre. Par comparaison avec l'écoulement de PRB, la présence de la surface supérieure libre rend l'écoulement toujours plus instable vis-à-vis des rouleaux longitudinaux et plus ou moins stable vis-à-vis des rouleaux transversaux selon les nombres de Biot, de Reynolds et de Prandtl considérés. Nous avons aussi montré que les forces thermogravitaires et les forces thermocapillaires se renforcent mutuellement pour rendre le système plus instable.

A la lumière du travail de recherche réalisé, il est permis de dire que nous avons apporté une contribution aidant à la compréhension des différents phénomènes étudiés. Toutefois, dans l'optique de futurs travaux, les perspectives suivantes sont envisagées :

- La mise en oeuvre d'un dispositif expérimental afin de valider les résultats obtenus numériquement. Cette étude expérimentale peut par ailleurs mettre en évidence les limites des hypothèses simplificatrices prises dans ce travail (surface plane, variation de l'épaisseur de la couche liquide négligée).
- Etendre la résolution numérique tridimensionnelle pour étudier d'autres types de structures thermoconvectives instationnaires telles que les rouleaux transversaux et les rouleaux longitudinaux oscillants ou sinueux.
- Poursuivre l'analyse de la stabilité linéaire pour étudier l'écoulement en canal confiné. Cela va nous permettre d'analyser l'effet du rapport de forme sur les seuils critiques d'apparition des instabilités thermoconvectives et d'établir une meilleure comparaison avec les simulations numériques tridimensionnelles. Par ailleurs, une autre étude introduisant les effets non-linéaires serait envisageable.
- A plus long terme, recourir à une modélisation d'écoulement diphasique fluide-fluide. A l'aide de ce modèle, il serait intéressant de tenir compte de l'écoulement de l'air, au-dessus de l'écoulement du liquide, et d'analyser l'impact de l'interaction entre les deux écoulements sur la forme de la surface libre et les structures thermoconvectives. Le phénomène d'évaporation pourra être abordé en tenant compte du transfert massique entre les deux phases.

Bibliographie

- Akiyama, M., Hwang, G., Cheng, K., 1971. Experiments on the onset of longitudinal vortices in laminar forced convection between horizontal plates. *Journal of Heat Transfer* 93, 335–341.
- Alves, M.A., Oliveira, P.J., Pinho, F.T., 2003. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, 47–75.
- Balay, S., Gropp, W., McInnes, L., Smith, B., 1997. Efficient management of parallelism in object-oriented numerical software libraries, in : *Modern software tools for scientific computing*, Birkhauser Boston Inc.. pp. 163–202.
- Bankoff, S.G., 1971. Stability of liquid flow down a heated inclined plane. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 14, 377 – 385.
- Benderradji, A., Haddad, A., Taher, R., Médale, M., Abid, C., Papini, F., 2008. Characterization of fluid flow patterns and heat transfer in horizontal channel mixed convection. *Heat and Mass Transfer* 44, 1465–1476.
- Bérnard, H., 1901. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en regime permanent, in : *Annales de Chimie et de Physique*, Lucius & Lucius. pp. 62–144.
- Bonnefoi, C., Abid, C., Medale, M., Papini, F., 2004. Poiseuille-Bénard instability

- in a horizontal rectangular duct water flow. *International Journal of Thermal Sciences* 43, 791–796.
- Boussinesq, J., 1903. *Théorie analytique de la chaleur : mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*. volume 2. Gauthier-Villars, Paris.
- Burelbach, J., Bankoff, S., Davis, S., 1988. Nonlinear stability of evaporating/condensing liquid films. *Journal of Fluid Mechanics* 195, 463–494.
- Burguete, J., Mukolobwicz, N., Daviaud, F., Garnier, N., Chiffaudel, A., 2001. Buoyant-thermocapillary instabilities in extended liquid layers subjected to a horizontal temperature gradient. *Physics of Fluids* 13, 2773–2787.
- Canuto, C., Hussaini, M., Quarteroni, A., Zang, T.A.J., 1988. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York.
- Carpenter, B.M., Homsy, G.M., 1989. Combined buoyant-thermocapillary flow in a cavity. *Journal of Fluid Mechanics* 207, 121–132.
- Carpenter, B.M., Homsy, G.M., 1990. High Marangoni number convection in a square cavity : Part II. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 2, 137–149.
- Carrière, P., Monkewitz, P., 1999. Convective versus absolute instability in mixed rayleigh-bénard-poiseuille convection. *Journal of Fluid Mechanics* 384, 243–262.
- Chandrasekhar, S., 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Pubns, New York.
- Chang, M., Lin, T., 1998. Experimental study of aspect ratio effects on longitudinal vortex flow in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 41, 719–733.

- Chang, M., Yu, C., Lin, T., 1997. Changes of longitudinal vortex roll structure in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel : an experimental study. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40, 347–363.
- Chen, S., Lavine, A., 1996. Laminar, buoyancy induced flow structures in a bottom heated, aspect ratio 2 duct with throughflow. *International journal of heat and mass transfer* 39, 1–11.
- Cheng, K., Hwang, G., 1969. Numerical solution for combined free and forced laminar convection in horizontal rectangular channels. *Journal of Heat Transfer* 91, 59–66.
- Cheng, K., Wu, R., 1976. Axial heat conduction effects on thermal instability of horizontal plane poiseuille flows heated from below. *Journal of Heat Transfer* 98, 564–569.
- Chiu, K., Rosenberger, F., 1987. Mixed convection between horizontal plates-1. Entrance effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 30, 1145–1654.
- Chou, F., Hwang, G., 1984. Combined free and forced laminar convection in horizontal rectangular channels for high ReRa. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 62, 830–836.
- Clever, R., Busse, F., 1991. Instabilities of longitudinal rolls in the presence of Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics* 229, 517–529.
- Colinet, P., Legros, J., Velarde, M., Prigogine, I., 2001. *Nonlinear dynamics of surface-tension-driven instabilities*. Wiley Online Library, Berlin.
- Dauby, P.C., Lebon, G., Bouhy, E., 1997. Linear Bénard-Marangoni instability in rigid circular containers. *Physical Review E* 56, 520–530.
- Davis, S., 1987. Thermocapillary instabilities. *Annual Review of Fluid Mechanics* 19, 403–435.

- Dongarra, J., Lumsdaine, A., Niu, X., Pozo, R., Remington, K., 1994. A sparse matrix library in c++ for high performance architectures. *Proceedings of the Second Object Oriented Numerics Conference* , 214–218.
- Drazin, P.G., Reid, W.H., 2004. *Hydrodynamic stability*. Cambridge Univ Press, Cambridge.
- El Omari, K., Kousksou, T., Le Guer, Y., 2011. Impact of shape of container on natural convection and melting inside enclosures used for passive cooling of electronic devices. *Applied Thermal Engineering* 31, 3022–3035.
- El Omari, K., Le Guer, Y., 2009. A numerical study of thermal chaotic mixing in a two rod rotating mixer. *Computational Thermal Science* 1, 55–73.
- El Omari, K., Le Guer, Y., 2010a. Alternate rotating walls for thermal chaotic mixing. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53, 123–134.
- El Omari, K., Le Guer, Y., 2010b. Thermal chaotic mixing of power-law fluids in a mixer with alternately rotating walls. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 165, 641–651.
- Ferziger, J., Perić, M., 1999. *Computational methods for fluid dynamics*. volume 2. Springer, Berlin.
- Fukui, K., Nakajima, M., Ueda, H., 1983. The longitudinal vortex and its effects on the transport processes in combined free and forced laminar convection between horizontal and inclined parallel plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 26, 109–120.
- Gage, K.S., Reid, W.H., 1968. The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics* 33, 21–32.

- Gaskell, P.H., Lau, A.K.C., 1988. Curvature-compensated convective transport : Smart, a new boundedness- preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 8, 617–641.
- Gau, C., Liu, C., Huang, T., Aung, W., 1999. Secondary flow and enhancement of heat transfer in horizontal parallel-plate and convergent channels heating from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42, 2629–2647.
- Gershuni, G., Laure, P., Myznikov, V., Roux, B., Zhukhovitsky, E., 1992. On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers. *Microgravity Q.* 2, 141–151.
- Geuzaine, C., Remacle, J., 2009. Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79, 1309–1331.
- Goussis, D., Kelly, R., 1990. On the thermocapillary instabilities in a liquid layer heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33, 2237–2245.
- Goussis, D.A., Kelly, R.E., 1991. Surface wave and thermocapillary instabilities in a liquid film flow. *Journal of Fluid Mechanics* 223, 25–45.
- Gray, D., Giorgini, A., 1976. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 19, 545–551.
- Gumerman, R.J., Homsy, G.M., 1974a. Convective instabilities in concurrent two phase flow : - 1. Linear stability. *AIChE Journal* 20, 981–988.
- Gumerman, R.J., Homsy, G.M., 1974b. Convective instabilities in concurrent two-phase flow - 2. Global stability. *AIChE Journal* 20, 1161–1167.

- Hamed, H., Bennacer, R., Sammouda, H., 2008. Poiseuille Rayleigh-Bénard problem in a horizontal duct of finite length in streamwise direction : stability analysis. *Progress in Computational Fluid Dynamics, An International Journal* 8, 342–350.
- Hendrickson, B., Leland, R., 1995. An improved spectral graph partitioning algorithm for mapping parallel computations. *SIAM Journal on Scientific Computing* 16, 452–469.
- Hu, J., Hadid, B.H., Henry, D., Mojtabi, A., 2008. Linear temporal and spatio-temporal stability analysis of a binary liquid film flowing down an inclined uniformly heated plate. *Journal of Fluid Mechanics* 599, 269–298.
- Hwang, G., Cheng, K., 1973. Convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel-plate channel heated from below. *Journal of Heat Transfer, Transactions ASME* 95, 72–77.
- Imura, H., Gilpin, R., Cheng, K., 1978. An experimental investigation of heat transfer and buoyancy induced transition from laminar forced convection to turbulent free convection over a horizontal isothermally heated plate. *Journal of Heat Transfer* 100, 429–434.
- Incropera, F., Knox, A., Maughan, J., 1987. Mixed-convection flow and heat transfer in the entry region of a horizontal rectangular duct. *Journal of Heat Transfer* 109, 434–439.
- Jasak, H., 1996. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. Ph.D. thesis. Imperial College London (University of London).
- Kamotani, Y., Masud, J., Pline, A., 1996. Oscillatory convection due to combined buoyancy and thermocapillarity. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer* 10, 102–108.

- Kamotani, Y., Ostrach, S., 1976. Effect of thermal instability on thermally developing laminar channel flow. *Journal of Heat Transfer* 98, 62–66.
- Kamotani, Y., Ostrach, S., Miao, H., 1979. Convective heat transfer augmentation in thermal entrance regions by means of thermal instability. *Journal of Heat Transfer* 101, 222–226.
- Karypis, G., Kumar, V., 1998. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on Scientific Computing* 20, 359–392.
- Kato, Y., Fujimura, K., 2000. Prediction of pattern selection due to an interaction between longitudinal rolls and transverse modes in a flow through a rectangular channel heated from below. *Physical Review E* 62, 601–611.
- Komori, S., Nagaosa, R., Murakami, Y., Chiba, S., Ishii, K., Kuwahara, K., 1993. Direct numerical simulation of three-dimensional open-channel flow with zero-shear gas–liquid interface. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 5, 115–125.
- Koschmieder, E., 1993. Bénard cells and Taylor vortices. Cambridge University Press, Cambridge.
- Koschmieder, E.L., Prahl, S.A., 1990. Surface-tension-driven Bénard convection in small containers. *Journal of Fluid Mechanics* 215, 571–583.
- Kuhlmann, H.C., Albensoeder, S., 2008. Three-dimensional flow instabilities in a thermocapillary-driven cavity. *Physical Review E* 77, 036303.
- Lee, F., Hwang, G., 1991. Transient analysis on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel. *Journal of Heat Transfer* 113, 363–370.
- Lin, T.F., Chang, C.J., Yan, W.M., 1988. Analysis of combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion on laminar forced convection heat transfer in a vertical tube. *Journal of Heat Transfer* 110, 337–344.

- Luijckx, J., Platten, J., Legros, J., 1981. On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 24, 1287–1291.
- Marangoni, C., 1871. Ueber die ausbreitung der tropfen einer flüssigkeit auf der oberfläche einer anderen. *Annalen der Physik* 219, 337–354.
- Mercier, J.F., Normand, C., 1996. Buoyant-thermocapillary instabilities of differentially heated liquid layers. *Physics of Fluids* 8, 1433–1445.
- Mergui, S., Nicolas, X., Hirata, S., 2011. Sidewall and thermal boundary condition effects on the evolution of longitudinal rolls in rayleigh-bénard-poiseuille convection. *Physics of Fluids* 23, 084101.
- Müller, H.W., Lücke, M., Kamps, M., 1992. Transversal convection patterns in horizontal shear flow. *Phys. Rev. A* 45, 3714–3726.
- Médale, M., Cerisier, P., 2002. Numerical simulation of Bénard-Marangoni convection in small aspect ratio containers. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications* 42, 55–72.
- Narusawa, U., 1998. Mixed convection in a rectangular duct heated from below. *International Journal of Fluid Mechanics Research* 25, 285–294.
- Nepomnyashchy, A., Simanovskii, I., Legros, J., 2011. Interfacial convection in multilayer systems. volume 179. Springer.
- Ng, K.C., Yusoff, M.Z., Ng, E.Y.K., 2007. Higher-order bounded differencing schemes for compressible and incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 53, 57–80.
- Nicolas, X., 2002. Bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows : the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below. *International Journal of Thermal Sciences* 41, 961–1016.

- Nicolas, X., Luijkx, J.M., Platten, J.K., 2000. Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43, 589–610.
- Nicolas, X., Mojtabi, A., Platten, J.K., 1997. Two-dimensional numerical analysis of the Poiseuille–Bénard flow in a rectangular channel heated from below. *Physics of Fluids* 9, 337–348.
- Nicolas, X., Médale, M., Glockner, S., Gounand, S., 2011. Benchmark solution for a three-dimensional mixed-convection flow, part 1 : Reference solutions. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals* 60, 325–345.
- Nicolas, X., Zouéidi, N., Xin, S., 2012. Influence of a white noise at channel inlet on the parallel and wavy convective instabilities of Poiseuille-Rayleigh–Bénard flows. *Physics of Fluids* 24, 084101.
- Nield, D.A., 1964. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. *Journal of Fluid Mechanics* 19, 341–352.
- Nonino, C., Giudice, S.D., 1991. Laminar mixed convection in the entrance region of horizontal rectangular ducts. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 13, 33–48.
- Oron, A., Davis, S.H., Bankoff, S.G., 1997. Long-scale evolution of thin liquid films. *Reviews Modern Physics* 69, 931–980.
- Oron, A., Rosenau, P., 1992. Formation of patterns induced by thermocapillarity and gravity. *Journal de Physique II* 2, 131–146.
- Ostrach, S., Kamotani, Y., 1975. Heat transfer augmentation in laminar fully developed channel flow by means of heating from below. *Journal of Heat Transfer* 97, 220–225.

- Ouazzani, M., Platten, J., Müller, H., Lücke, M., 1995. Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes - III. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38, 875–886.
- Ouazzani, M.T., Platten, J.K., Mojtabi, A., 1990. Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes - II. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33, 1417–1427.
- Pabiau, H., Mergui, S., Bénard, C., 2005. Wavy secondary instability of longitudinal rolls in Rayleigh–Bénard–Poiseuille flows. *Journal of Fluid Mechanics* 542, 175–194.
- Palmer, H.J., Berg, J.C., 1971. Convective instability in liquid pools heated from below. *Journal of Fluid Mechanics* 47, 779–787.
- Pantaloni, J., Bailleux, R., Salan, J., Velarde, M., 1979. Rayleigh-benard-marangoni instability : new experimental results. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 4, 201–218.
- Parmentier, P.M., Regnier, V.C., Lebon, G., 1993. Buoyant-thermocapillary instabilities in medium-Prandtl-number fluid layers subject to a horizontal temperature gradient. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 36, 2417–2427.
- Parmentier, P.M., Regnier, V.C., Lebon, G., Legros, J.C., 1996. Nonlinear analysis of coupled gravitational and capillary thermoconvection in thin fluid layers. *Physical Review E* 54, 411–423.
- Pasquetti, R., Cerisier, P., Niliot, C.L., 2002. Laboratory and numerical investigations on Bénard–Marangoni convection in circular vessels. *Physics of Fluids* 14, 277–288.
- Patankar, S., 1980. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis, Washington.

- Pearson, J.R.A., 1958. On convection cells induced by surface tension. *Journal of Fluid Mechanics* 4, 489–500.
- Platten, J., 1971. A variational formulation for the stability of flows with temperature gradients. *International Journal of Engineering Science* 9, 855–869.
- Platten, J., Lefebvre, M., 1971. A preliminary experimental investigation of the stability of flows with an imposed temperature gradient. *Physica* 51, 330–332.
- Platten, J.K., Legros, J.C., 1984. *Convection in liquids*. Springer-Verlag, Berlin.
- Rahli, O., Bennacer, R., Bouhade, K., Ameziani, D.E., 2011. Three-dimensional mixed convection heat and mass transfer in a rectangular duct : Case of longitudinal rolls. *Numerical Heat Transfer, Part A : Applications* 59, 349–371.
- Rhie, C.M., Chow, W.L., 1983. Numerical study of a turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA journal* 21, 1525–1532.
- Sani, R., 1964. Note on flow instability in heated ducts. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 15, 381–387.
- Schmidt, R., Milverton, S., 1935. On the instability of a fluid when heated from below. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 152, 586–594.
- Scriven, L.E., Sternling, C.V., 1964. On cellular convection driven by surface-tension gradients : effects of mean surface tension and surface viscosity. *Journal of Fluid Mechanics* 19, 321–340.
- Segel, L., 1969. Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *Journal of Fluid Mechanics* 38, 203–224.
- Smith, K.A., 1966. On convective instability induced by surface-tension gradients. *Journal of Fluid Mechanics* 24, 401–414.

- Taylor, J., Sarkar, S., Armenio, V., 2005. Large eddy simulation of stably stratified open channel flow. *Physics of Fluids* 17, 1–18.
- Thiele, U., Knobloch, E., 2004. Thin liquid films on a slightly inclined heated plate. *Physica D : Nonlinear Phenomena* 190, 213–248.
- Touihri, R., El Gallaf, A., Henry, D., Ben Hadid, H., 2011. Instabilities in a cylindrical cavity heated from below with a free surface. I. Effect of Biot and Marangoni numbers. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 84, 056302.
- Trefethen, L., 2000. *Spectral methods in MATLAB*. volume 10. SIAM, Philadelphia.
- Tsay, H.C., Yan, W.M., 1991. Binary diffusion and heat transfer in laminar mixed convection channel flows with uniform wall heat flux : extremely thin film thickness. *Heat and Mass Transfer* 26, 23–31.
- Tseng, W., Lin, W., Yin, C., Lin, C., Lin, T., 2000. Stabilization of buoyancy-driven unstable vortex flow in mixed convection of air in a rectangular duct by tapering its top plate. *Journal of Heat Transfer* 122, 58–65.
- VanHook, S.J., Schatz, M.F., McCormick, W.D., Swift, J.B., Swinney, H.L., 1995. Long-wavelength instability in surface-tension-driven Bénard convection. *Physical Review Letters* 75, 4397–4400.
- Velte, W., 1962. Zür stabilität der strömung in einem horizontalen rohr bei ungleichmässig erwärter wand. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 13, 591–600.
- Venturi, D., Wan, X., Karniadakis, G., 2010. Stochastic bifurcation analysis of Rayleigh Bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics* 650, 391–413.

- Vrentas, J., Narayanan, R., Agrawal, S., 1981. Free surface convection in a bounded cylindrical geometry. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 24, 1513–1529.
- Wang, G., Incropera, F., Viskanta, R., 1983. Mixed convection heat transfer in a horizontal open-channel flow with uniform bottom heat flux. *Journal of Heat Transfer* 105, 817–822.
- Wang, L., Lu, X.Y., 2005. Large eddy simulation of stably stratified turbulent open channel flows with low- to high-prandtl number. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48, 1883–1897.
- Xu, J., Zebib, A., 1998. Oscillatory two- and three-dimensional thermocapillary convection. *Journal of Fluid Mechanics* 364, 187–209.
- Yasuo, M., Yutaka, U., 1966a. Forced convective heat transfer between horizontal flat plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 9, 803 – 817.
- Yasuo, M., Yutaka, U., 1966b. Forced convective heat transfer between horizontal flat plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 9, 803–808.
- Yu, C., Chang, M., Huang, C., Lin, T., 1997. Unsteady vortex roll structures in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel : A numerical study. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40, 505–518.
- Zebib, A., Homsy, G.M., Meiburg, E., 1985. High marangoni number convection in a square cavity. *Physics of Fluids* 28, 3467–3476.

ANNEXE A

Liste des publications

Article publié :

- Bammou L., El Omari K., Le Guer Y., Blancher S., Benhamou B., Mediouni T.,
Numerical study of longitudinal thermoconvectives rolls in mixed convection
flow in a horizontal channel with free surface, International Journal of Heat and
Fluid Flow (2013), [http ://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2013.01.017](http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2013.01.017)

Communications internationales avec actes :

- Bammou L., El Omari K., Le Guer Y., Blancher S., Benhamou B., Mediouni T.,
Thermocapillary effect on the mixed convection in horizontal open channel, Int.
Symposium on Multiphase Flow and Transport Phenomena, Agadir, Maroc,
23-25 april, 2012.
- Bammou L., El Omari K., Le Guer Y., Blancher S., Benhamou B., Marangoni
effect on the longitudinal rolls of a mixed convection flow in a horizontal open
channel, soumise pour ICHMT Int. Symposium on Advances in Computational
Heat Transfer, Bath, England, 1-6 july, 2012.

Communications nationales avec actes :

- Bammou L., El Omari K., Le Guer Y., Blancher S., Benhamou B., Mediouni T.,
Étude numérique de l'influence du rapport de forme sur un écoulement de con-

- vection mixte dans un canal horizontal à surface libre, Congrès de l'Association Marocaine de Thermique, 18-19 avril, Casablanca, 2012.
- Bammou L., El Omari K., Blancher S., Le Guer Y., Benhamou B., Effet thermocapillaire sur la convection mixte en canal ouvert. 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 28 août-2 septembre, 2011.
 - Bammou L., El Omari K., Blancher S., Le Guer Y., Benhamou B., Étude numérique de la convection mixte dans un canal horizontal à surface libre. Congrès de la Société Française de Thermique, Perpignan, 24-27 mai, 2011.

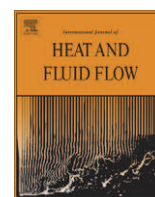
ANNEXE B

Publication



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

International Journal of Heat and Fluid Flow

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijhff

A numerical study of the longitudinal thermoconvective rolls in a mixed convection flow in a horizontal channel with a free surface

Lahcen Bammou^{a,b}, Kamal El Omari^{a,*}, Serge Blancher^a, Yves Le Guer^a, Brahim Benhamou^c, Touria Mediouni^b

^aLaboratoire des Sciences de l'Ingénieur Appliquées à la Mécanique et au génie Électrique (SIAME), Fédération IPRA-CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA), Bat. d'Alembert, Avenue Jules Ferry, 64075 Pau Cedex, France

^bLaboratoire de Mécanique, Procédés de l'Energie et de l'Environnement (LMP2E), ENSA, B.P. 1136, 80000 Agadir, Morocco

^cLaboratoire de Mécanique des Fluides et d'Énergétique (CNRST-URAC27), Université Cadi Ayyad, Dépt. de Physique, Faculté des Sciences Semlalia, Marrakech 40001, Morocco

ARTICLE INFO

Article history:

Received 10 April 2012

Received in revised form 18 January 2013

Accepted 19 January 2013

Available online xxxx

Keywords:

Mixed convection

Longitudinal rolls

Marangoni effect

Horizontal channel

Free surface

ABSTRACT

This paper presents a numerical study of three-dimensional laminar mixed convection within a liquid flowing on a horizontal channel heated uniformly from below. The upper surface is free and assumed to be flat. The coupled Navier–Stokes and energy equations are solved numerically by the finite volume method taking into account the thermocapillary effects (Marangoni effect). When the strength of the buoyancy, thermocapillary effects and forced convective currents are comparable ($Ri \simeq O(1)$ and $Bd = Ra/Ma \simeq O(1)$), the results show that the development of instabilities in the form of steady longitudinal convective rolls is similar to those encountered in the Poiseuille–Rayleigh–Bénard flow. The number and spatial distribution of these rolls along the channel depend on the flow conditions. The objective of this work is to study the influence of parameters, such as the Reynolds, Rayleigh and Biot numbers, on the flow patterns and heat transfer characteristics. The effects of variations in the surface tension with temperature gradients (Marangoni effect) are also considered.

© 2013 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

The study of mixed convection in a horizontal channel with a free upper surface is of considerable interest for many industrial applications, such as heat exchangers, evaporative cooling devices, and chemical vapor process. The parameter ranges considered in this paper can be linked to the water film cooling or the drying of a polymer/solvent solution.

In particular conditions, the resulting buoyancy forces induce the development of longitudinal vortex rolls, which constitute the first stage of transition to turbulence and contribute to an enhancement of heat transfer (Imura et al., 1978).

Several analytical, numerical and experimental analyses involving mixed convection heat transfer in different channel geometries have been reported in the literature. However, it is common practice to model a thin liquid film on a wetted wall as a boundary condition for the heat and mass transfer in the adjacent gas flow. Thus, laminar mixed convection heat and mass transfer in wetted vertical ducts has been analyzed by Lin et al. (1988) and Tsay and Yan (1991). They showed that the combined thermal and mass diffusion buoyancy forces have a great effect for small Reynolds number

flows with high inlet temperatures. Oulaid et al. (2010) conducted a similar study that analyzed the effect of flow reversal on inducing flow instability. When the thickness of the liquid film is not negligible, it became interesting to study the flow mechanisms inside the film itself.

In this study, we consider the case of mixed convection inside a liquid film with a free surface where thermocapillary effects are present. When a free liquid surface is present, the surface tension variations resulting from the temperature gradient along the surface may induce motion within the fluid, called thermocapillary flow (i.e. thermal Marangoni convection). To the best of our knowledge, the combination of buoyancy, thermocapillary forces and forced axial flow has not been addressed in the literature. However, this original flow situation is the combination of other flow situations (of physical effects) that has been extensively studied. One of these situations is the flow inside a horizontal channel with the superposition of a forced axial flow and vertical natural convection currents. This unstable flow situation is known as the Poiseuille–Rayleigh–Bénard (PRB) flow and has flow structures that are similar to the flow along an open channel that we are interested in studying.

Many studies, both theoretical and experimental, have been conducted on mixed convection heat transfer in horizontal channels with rigid upper surface. The onset of a secondary flow, in the form of longitudinal rolls, takes place around a critical Rayleigh

* Corresponding author.

E-mail address: kamal.elomari@univ-pau.fr (K. El Omari).

number of $Ra_c = 1708$ (Akiyama et al., 1971; Yasuo and Yutaka, 1966) for which the roll diameter is nearly equal to the channel height. Ostrach and Kamotani (1975) performed experiments for fully developed air flow between isothermal plates and noted that the vortex rolls become irregular for $Re = 38$ and $Ra > 8000$. Nicolas et al. (2000) presented the linear stability analysis of a fully developed Poiseuille flow in a duct and established a stability diagram. Bonnefoi et al. (2004) investigated the thermoconvective instabilities for a mixed convection water flow in a horizontal rectangular duct uniformly heated from below. The authors distinguish several regimes of flow and, specifically, the domains of thermoconvective instability. Luijckx et al. (1981) demonstrated the existence of unsteady transverse thermoconvective rolls with the axis perpendicular to the main flow for the flow of silicone oil ($Pr = 450$). For low Reynolds numbers, the critical Rayleigh number corresponding to the onset of the transverse rolls was found to be a function of the aspect ratio and the Prandtl number. A transition from transverse to longitudinal roll flow structure was found, and the corresponding boundary in the (Re – Ra) plane was experimentally established by Ouazzani et al. (1990), Ouazzani et al. (1993) and numerically by Nicolas et al. (1997). A comprehensive literature review dedicated to the Poiseuille–Rayleigh–Bénard flow structure was presented by Nicolas (2002).

The development and the behavior of the steady longitudinal rolls in the PRB flow are reported in several numerical and experimental studies (Chang et al., 1997; Chang and Lin, 1998; Mergui et al., 2011). The well known classical initiation mechanism for longitudinal rolls is related to the situation where free convection is triggered by a lateral wall effect (a finite spanwise effect). It first induces two longitudinal rolls close to the lateral walls, which progressively promote by viscous effects a cascade of roll-pairs until they invade the whole cross section. An other initiation mechanism is observed in channels heated uniformly at high Rayleigh number (Benderradji et al., 2008). This second initiation mechanism combines the wall effect with the existence of high vertical temperature gradient in the boundary layer at the bottom of the channel, which simultaneously triggers pairs of rolls in the whole zone between the two lateral rolls. In a recent study, Mergui et al. (2011) have investigated experimentally and numerically the effects of different parameters (the presence of lateral vertical walls, entrance temperature and adiabatic or conductive thermal boundary conditions at the side and top walls of the channel) on the onset and development of the steady longitudinal rolls.

Several authors have also studied specifically the thermal entrance region to determine the conditions for the spatial development of instabilities (Hwang and Cheng, 1973; Cheng and Wu, 1976; Chiu and Rosenberger, 1987; Lee and Hwang, 1991). Indeed, from the abscissa $x = 0$ (the beginning of heating), a hydrodynamically fully developed flow needs a certain distance to be thermoconvectively developed. The thermal entrance length for the full development of steady longitudinal rolls increases with increasing Reynolds number or decreasing Rayleigh number (Kamotani and Ostrach, 1976; Kamotani et al., 1979). Most of these studies have suggested correlations according to flow parameters giving the growth length of the longitudinal rolls (Chiu and Rosenberger, 1987).

Heat transfer has been well studied in PRB flow by evaluating the influence of convective rolls on the Nusselt number (Kamotani and Ostrach, 1976; Incropera et al., 1987; Tseng et al., 2000). In the zone of fully developed PRB flow, the average Nusselt number does not depend on the Reynolds number and increases with the Rayleigh number. This concerns longitudinal rolls flows whatever the value of Re (Fukui et al., 1983; Narusawa, 1998) and transversal rolls flow for small Re (Chen and Lavine, 1996; Nicolas et al., 1997). Nicolas et al. (2012) have explained the discrepancies observed between the experimental and numerical studies of litera-

ture in the averaged Nusselt numbers where the longitudinal rolls are fully-established. In fact, the longitudinal rolls have been considered stationary in these numerical studies while they bifurcate to oscillatory structures in the case of experimental studies.

A second flow situation, addressed in the literature, that is similar to the one studied in this paper is the case of a horizontal channel whose upper surface is free but without thermocapillary forces (open channel flow). The depth variation of the fluid layer is considered negligible in most of the studied concerning this flow type (Komori et al., 1993; Taylor et al., 2005; Wang and Lu, 2005). An experimental study was also performed by Wang et al. (1983) to determine the hydrodynamic and thermal conditions of a water flow in an open channel that is uniformly heated from below. The authors used a two-dimensional boundary layer model to predict the flow behavior.

Flow situation studies where thermocapillary forces (Marangoni convection) have been taken into account, are essentially related to flows without forced convection. These flows have been extensively studied in the literature (Goncharova and Kabov, 2010; Simanovskii et al., 2008; Sadiq et al., 2010; Mao et al., 2008; Médale and Cochelin, 2009). A pioneer study of thermocapillary instabilities was conducted by Pearson (1958) who analyzed the stability of a horizontal layer with a non-deformable free surface. The liquid phase is modeled using the classical fluid mechanics equations, while the gas phase is included in the model through a boundary condition at the liquid–gas interface, which is characterized by a Biot number. Through a linear stability analysis, Pearson identified the existence of a critical threshold and determined a critical Marangoni number from which the liquid layer becomes unstable due to the thermocapillary convective motion that appears spontaneously. Scriven and Sternling (1964) extended Pearson's study by considering a deformable liquid–gas interface. Unlike the situation addressed by Pearson, they concluded that the liquid layer is still unstable and there is no critical Marangoni number. More recently, the coupling between thermocapillary and buoyancy has been considered through different approaches. To verify the influence of buoyancy forces, Laure and Roux (1989) conducted several studies for low Prandtl number (Pr) fluids, while Parmentier et al. (1993) studied liquids with Pr up to 10. Burguete et al. (2001) found that thermocapillary–buoyancy convection could destabilize the flow into different patterns, depending on the temperature difference ΔT and on the liquid pool depth d . For small d values, the system exhibits hydrothermal waves, while for larger d values, stationary longitudinal rolls are observed. The stability of buoyant–thermocapillary instabilities has been analyzed by Mercier and Normand (1996). They introduce a Biot number to describe the heat transfer at the top free surface and showed the existence of a transition from oscillatory to stationary modes when the Bond number (the ratio between the Rayleigh and the Marangoni numbers) is increased. This transition depends on the Biot number.

Other studies have examined a thin liquid film flowing over an inclined heated plate, taking into account only the thermocapillary effect (Sadiq and Usha, 2005; Thiele and Knobloch, 2004). In these studies, most authors did not consider the thermoconvective instabilities that occur within a liquid film uniformly heated from below. Indeed, when the strength of buoyancy, thermocapillary and forced convective currents are comparable, ($Ri \simeq O(1)$ and $Bd = Ra/Ma \simeq O(1)$), the instabilities develop in the form of longitudinal convective rolls similar to those found in Poiseuille–Rayleigh–Bénard flow.

This study is dedicated to the numerical simulation of three-dimensional laminar mixed convection of a liquid in a horizontal channel uniformly heated from below with a free upper surface. The objective is to study the influence of the control parameters (i.e. Reynolds, Rayleigh and Biot numbers) on the heat transfer in the liquid. The effects of the surface tension and their variations with temperature gradients (Marangoni effect) are taken into

account. In this paper, we limit the study to the development of the steady longitudinal rolls. Thus, the ranges of the control parameters considered are ($10 \leq Re \leq 20$, $2500 \leq Ra \leq 12,500$ and $0 \leq Ma \leq 3000$). The (Re, Ra) combination is selected to have a moderate Richardson number ($Ri < 8$) which gives a steady longitudinal rolls flow as found in the case of PRB flow (Chang et al., 1997; Chang and Lin, 1998; Mergui et al., 2011). The range of Marangoni number studied has been found to give steady flows in the case of Bénard–Marangoni configurations (Higuera, 2000; Carpenter and Homsy, 1990; Kuhlmann and Albensoeder, 2008). Even if there is no previous study similar to our case, the combination of all these observations lead us to believe that the flow has a steady character. The paper is organized as follows. The physical model and governing equations are first described, followed by a description of the numerical resolution method and code validation. The effect of the studied parameters on the longitudinal rolls and heat transfer are then assessed. Finally, the impact of the coupled effects of natural convection and Marangoni convection is analyzed. Conclusions are then drawn based on these results.

2. Physical model

We consider a liquid flow in a horizontal rectangular channel of height H , width $10H$ and length $50H$ with a free upper surface (Fig. 1). We define the transverse aspect ratio as $\Gamma = \text{width}/\text{height} = 10$. The side walls of the channel are adiabatic. To avoid the formation of the convective rolls immediately at the inlet section, we consider an adiabatic entrance over a length of $2H$. Beyond this adiabatic entrance, the bottom-wall is kept at a constant and uniform temperature T_h , which is higher than that of the inlet liquid T_0 ($T_h > T_0$). The temperature of the ambient air over the liquid flow is fixed at T_0 .

The fluid is assumed to be Newtonian and incompressible and undergoes steady laminar flow. The thermophysical properties are assumed to be constant except for the density in the buoyancy term and the surface tension. The Boussinesq assumption is assumed, with ρ taken to be constant everywhere, except in the buoyancy term, where a linear law is considered: $\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$, where β is the thermal expansion coefficient and ρ_0 and T_0 are the reference values for the density and temperature, respectively. This assumption is justified for a sufficiently weak temperature difference across the fluid (Gray and Giorgini, 1976). The variation of the surface tension with temperature is modeled by the following linear approximation: $\sigma = \sigma_0 - \gamma(T - T_0)$, where σ_0 is the surface tension at temperature T_0 and $\gamma = -\partial\sigma/\partial T$. The free surface is assumed to be flat and is subject to a convective heat exchange with ambient air characterized by a heat transfer coefficient h . The surface deformation can be neglected if the Crispation number $Cr = \rho\nu\alpha/\sigma H \ll 1$ (Davis, 1987), where ρ , ν and

α denote the fluid density, kinematic viscosity and thermal diffusivity, respectively. Moreover, the Galileo number $Ga = gH^3/\nu\alpha \gg 1$ characterizes the relative importance of gravity and diffusion (g is the gravity constant). A large value of the Galileo number indicates that gravity stabilizes the long-wave mode of the free surface deformation. Such conditions are shown to be satisfied for the problem considered here. In fact, if we take the particular case of a liquid film flow in a channel of 1 cm height, with fluid characteristics taken at $Pr = 7$, $Ra = 5000$ and $Ma = 500$, we obtain in these conditions $Cr = 1.95 \times 10^{-7}$ and $Ga = 7 \times 10^7$. Furthermore, the assumptions concerning Cr and Ga numbers are valid for all the parameter ranges considered in the study. Using these assumptions, the equations governing the conservation of mass, momentum and energy are written as follows:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \beta \vec{g}(T - T_0), \quad (2)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \nabla^2 T, \quad (3)$$

where $\vec{v}$ denote the three-dimensional velocity field and T is the temperature field.

At the bottom of the channel, the velocity satisfies the no-slip condition, and the wall is assumed to be adiabatic for $x \in [-2H, 0]$ and isothermal ($T = T_h$) for $x \in [0, 48H]$:

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ for } x \in [-2H, 0]; \quad T = T_h \text{ for } x \in [0, 48H] \text{ at } z = 0. \quad (4)$$

The velocity satisfies also the no-slip condition for the side walls, which are assumed to be adiabatic:

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ at } y = 0 \text{ and } y = 10H. \quad (5)$$

By assuming a planar surface, a shear stress boundary condition is imposed at the free surface, derived from the balance between the surface tension forces and the viscous stresses in the fluid:

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \text{at } z = H. \quad (6)$$

The other boundary condition at the interface involves the vertical component of the velocity v_z (non-permeability condition):

$$v_z = 0 \text{ at } z = H. \quad (7)$$

The thermal boundary condition at the free surface is:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = h(T - T_0) \text{ at } z = H. \quad (8)$$

The first term represents the heat conduction in the liquid, with λ denoting the fluid thermal conductivity, while the second term expresses the heat flux density to the ambient air considered at T_0 .

We consider at the inlet of the channel a hydrodynamically fully developed flow profile maintained for example by a constant pressure gradient. Actually, this flow type is associated with a depth variation of the film layer along the channel, but in our flow conditions, this depth diminution is found to be very small and is neglected here. Thus, we use a half three-dimensional Poiseuille profile for velocity as computed analytically in Nicolas et al. (2000) for the case of a rectangular channel with rigid walls. This profile corresponds to the Navier–Stokes solution with a slip boundary condition at the upper surface ($\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$, $v_z = 0$) and a no-slip boundary condition at the lateral and bottom walls. The inlet temperature is fixed at T_0 :

$$v_x = v_{\frac{1}{2}\text{Poise}(y,z)}; \quad v_y = v_z = 0; \quad T = T_0 \text{ at } x = -2H. \quad (9)$$

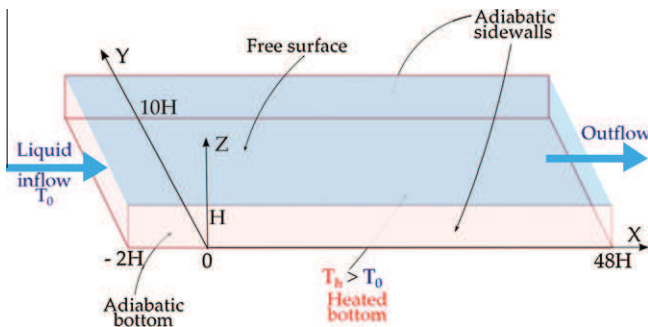


Fig. 1. The studied configuration and corresponding boundary conditions.

Finally, for this steady model, the outlet boundary condition considered is the zero gradient condition for both velocity and temperature. To avoid the incompatibility problem of the outlet boundary condition with the shear stress boundary condition at the free surface (Eq. (6)), we have extended the computational domain with a length $6H$ in order to keep the possible outlet effect away from the area of interest and then we have added a domain extension (also $6H$ length) which has zero shear stress condition at the free surface.

Using the channel height H , the mean flow velocity U_m and ρU_m^2 as reference quantities for the lengths, velocities and pressure, respectively, and using the reduced temperature $\theta = (T - T_0)/(T_h - T_0)$, the governing equations take the following dimensionless form:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \quad (10)$$

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \frac{Ra}{PrRe} \vec{\nabla} \theta, \quad (11)$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \theta = \frac{1}{PrRe} \vec{\nabla}^2 \theta, \quad (12)$$

Thus, the dimensionless parameters that appear in these equations are the Reynolds number $Re = \frac{U_m H}{\nu}$, the Rayleigh number $Ra = \frac{g \beta (T_h - T_0) H^3}{\nu \alpha}$ and the Prandtl number $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$.

The boundary conditions (4)–(9) become:

$$\vec{V} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0 \text{ for } X \in [-2, 0], \theta = 1 \text{ for } X \in [0, 48] \text{ at } Z = 0. \quad (13)$$

$$\vec{V} = \vec{0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \text{ at } Y = 0 \text{ and } Y = 10. \quad (14)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial X}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial Z} = -\frac{Ma}{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial Y}, \quad V_z = 0 \text{ at } Z = 1. \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = -Bi \theta \text{ at } Z = 1. \quad (16)$$

$$V_x = V_{x, \text{Pois}(Y, Z)}, \quad V_y = V_z = 0, \quad \theta = 0 \text{ at } X = -2. \quad (17)$$

where $Ma = \frac{\rho \sigma}{\eta} \frac{\Delta T H}{\mu \alpha}$, $Bi = \frac{h H}{\lambda}$ and $Pe = \frac{U_m H}{\alpha}$ are the Marangoni, Biot and Péclet numbers, respectively. To quantify the heat transfer at the bottom wall, we define the local, the average and the transverse average Nusselt numbers by:

$$Nu_l(X, Y) = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial Z}\right)_{Z=0}, \quad Nu_{av} = \frac{1}{S} \int_S Nu_l dS, \quad (18)$$

$$Nu_{tav}(X) = \frac{1}{10} \int_0^{10} Nu_l dY,$$

with S is the bottom heated surface of the channel.

3. Numerical method

The governing Eqs. (1)–(3) are solved using an in-house code called Tamaris. This code has a three-dimensional unstructured finite-volume framework that is applied to hybrid meshes. Variable values ($\vec{v}$, p and T) are stored at cell centers in a collocated arrangement. Cell shapes can be of different forms (tetrahedral, hexahedral, prismatic or pyramidal). To describe the discretization method used in the code, we can write Eqs. (2) and (3) in the generic convection–diffusion form with respect to a conserved variable ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \phi \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \int_S \Lambda \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dS + \int_V S_\phi dV, \quad (19)$$

where Λ is a diffusion coefficient and S_ϕ is a source term. The spatial schemes for approximating the diffusive and convective fluxes are both second-order accurate. The diffusion term is discretized by approximating the surface integrals with a sum over all cell faces f :

$$\int_S \Lambda \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{n} dS = \sum_f \Lambda_f A_f (\vec{\nabla} \phi)_f \cdot \vec{n}_f, \quad (20)$$

where A_f is the area of the face f . For unstructured meshes, orthogonality is an exception that needs to be handled correctly. Thus, the normal gradient $(\vec{\nabla} \phi)_f \cdot \vec{n}_f$ is decomposed into an implicit contribution that uses the values of ϕ at the centers of the two cells sharing face f (the first term on the RHS of Eq. (21)) and a non-orthogonality correction term treated explicitly by a deferred approach to preserve the second-order accuracy of the centered differencing. We use the over-relaxed decomposition suggested by Jasak (1996) to enhance the convergence properties of the discretization of the diffusive term:

$$(\vec{\nabla} \phi)_f \cdot \vec{n}_f = \frac{\phi_{N_b} - \phi_C}{\|\vec{d}\|} \vec{d} \cdot \vec{n}_f + \vec{\nabla} \phi \cdot \left(\vec{n}_f - \frac{\vec{d}}{\vec{d} \cdot \vec{n}_f} \right), \quad (21)$$

$\vec{d}(d_x, d_y, d_z)$ is the vector joining the centers of the two adjacent cells (see Fig. 2). The average gradient $\vec{\nabla} \phi$ is interpolated from the gradients of these neighboring cells. The gradients of the variables at the cell centers are computed by a least-squares method where, for each computational cell, the following 3×3 linear system is solved:

$$\mathbf{M} \cdot \vec{\nabla} \phi = \vec{H}, \quad (22)$$

where the components of the matrix $\mathbf{M}$ and the vector $\vec{H}$ are written as:

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{N_v} \frac{1}{\|\vec{d}_k\|^2} d_{kj} d_{ki} \text{ and } H_i = \sum_{k=1}^{N_v} \frac{1}{\|\vec{d}_k\|^2} d_{ki} (\phi_k - \phi_C)$$

where N_v is the number of surrounding cells. In our case, we choose to include all of the cells that share a vertex with cell C . Thus, in the case of a mesh formed by structured hexahedral cells, N_v can reach 26. The contribution of each cell is weighted by a factor equal to the inverse of the square of the distance between the two cell centers $\frac{1}{\|\vec{d}_k\|^2}$.

The convection terms in Eq. (19) are also transformed into a sum over the cell faces f by decomposing the surface S :

$$\int_S \rho \phi \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \sum_f (\rho \phi A)_f \vec{U}_f \cdot \vec{n}_f, \quad (23)$$

where the face values ϕ_f require appropriate interpolation to be accurate and bounded. Thus, we use the non-linear high-resolution (HR) bounded scheme CUBISTA by Alves et al. (2003) in the Υ formulation of Ng et al. (2007), where they expressed ϕ_f as a function of the upwind (UP) value of ϕ and its centered differencing (CD) value:

$$\phi_f^{HR} = \phi^{UP} + \Upsilon (\phi_f^{CD} - \phi^{UP}), \quad (24)$$

The coefficient Υ is determined for each face based on the local shape of the flow solution using the normalized variable diagram (NVD) framework and observing the convection boundedness

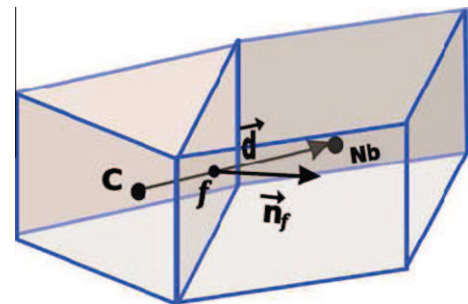


Fig. 2. A computational cell C and one of its neighbors N_b .

criterion (CBC) (Gaskell and Lau, 1988). The first term of the RHS of Eq. (24) is accounted for implicitly, while the second term is treated explicitly with the deferred-correction practice (Ferziger and Perić, 1999). The pressure–velocity coupling is ensured by the SIMPLE algorithm (Patankar, 1980), whereas the mass fluxes at the cell faces are evaluated using the Rhie-Chow interpolation (Rhie and Chow, 1983) to avoid checker-boarding in the pressure field. Within each iteration of the SIMPLE algorithm, the energy equation is solved after the resolution of the momentum equation and the Poisson equation for the pressure correction, and then the next SIMPLE iteration starts unless the convergence for $\bar{v}$, p , and T is achieved. The resolution of the energy equation is integrated in the SIMPLE iteration to account for the high level of its coupling with the momentum equation through the body forces term and with the thermocapillary boundary conditions. This code is parallelized following a non-overlapping domain decomposition approach and using the Petsc (Balay et al., 1997) library.

4. Code validation

This code has been successfully validated in some situations involving flow and heat transfer (El Omari and Le Guer, 2010; El Omari et al., 2011). For this study, we conducted additional code validations. The first supplementary validation concerns the flow in a horizontal channel heated uniformly from below, which was first presented by Nicolas et al. (2011) (steady Poiseuille-Rayleigh-Bénard flow). Quantitative comparisons have been performed using a non-uniform mesh resolution $n_x = 128$, $n_y = 176$ and $n_z = 50$. We note that the symmetry in the spanwise direction is not used in this work. Furthermore, the mesh is non-uniform in the streamwise direction and is refined near the beginning of the heating region while it is uniform in the thermally developed region.

Fig. 3 shows the longitudinal profiles of the rescaled components of the velocity and reduced temperature along the axis for the coordinates $Y = 5$ and $Z = 0.5$. Table 1 gives values of the mean kinetic energy, $2E_c$ on the whole volume domain, the mean pressure difference, ΔP_{io} , between inlet and outlet and the mean temperature, T_m on the whole domain, compared with those given by Nicolas et al. (2011). As observed in Fig. 3 and Table 1, the present calculations and those of Nicolas et al. agree well.

The second validation test case concerns the Marangoni convection. It is validated for different parameter combinations for a flow in a 2D square cavity with a free surface. The aspect ratio is fixed at $\Gamma = 1$, and the side walls are maintained at a constant temperature

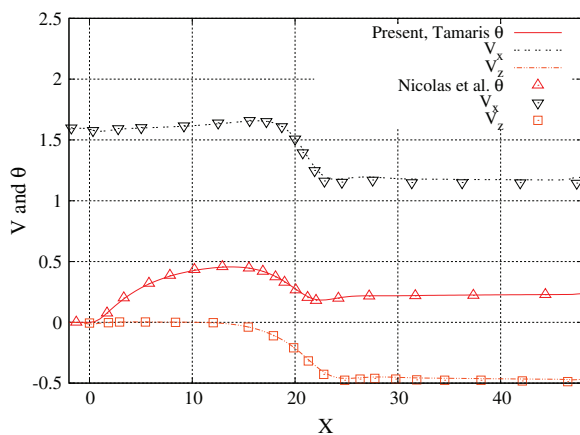


Fig. 3. The longitudinal profiles of the rescaled variables V_x , V_y , V_z and θ (represented by lines) along the axis ($Y = 5$, $Z = 0.5$) compared with the reference solution of Nicolas et al. (2011) (symbols).

Table 1

Results of the validation test case corresponding to PRB flow compared with the benchmark reference solution of Nicolas et al. (2011). $2E_c$ is the mean kinetic energy, ΔP_{io} is the mean pressure difference between the inlet and the outlet of the channel and T_m is the mean temperature on the whole domain.

	$2E_c$	ΔP_{io}	T_m
Nicolas et al. (2011)	1.29245	14.4067	0.44860
Present, Tamaris	1.2915	14.3101	0.44839

difference ΔT . The control parameters of the validation test case are as follows: the thermocapillary Reynolds number, defined as: $Re_{th} = \frac{\gamma \Delta T H}{\rho \nu^2}$, the Prandtl number Pr , (the Marangoni number being $Ma = Re_{th} Pr$) and the dynamical Bond number $Bd = \frac{\rho g \beta H^2}{\gamma}$, which characterizes the gravity level. This last parameter has the advantage of immediately giving the importance of the buoyancy force relative to the thermocapillary force. We perform different numerical simulations for the same conditions as those described in Table 2 using a uniform 121×121 grid. In Fig. 4, we plot the temperature profile obtained for $Ma = 10^3$ and $Ma = 10^4$. The results are compared with those given in Ref. (Zebib et al., 1985) and exhibit a satisfactory correspondence. Other comparisons with data previously published by (Carpenter and Homsy, 1990; Kuhlmann and Albensoeder, 2008; Xu and Zebib, 1998; Carpenter and Homsy, 1989) are made; these results are presented in Table 2. Our calculations are in good agreement with the data from the literature.

5. Results and discussion

To study the influence of thermal instabilities on the patterns of the flow and heat transfer characteristics in a horizontal channel with a free surface and uniformly heated from below, we examine several numerical results for different dimensionless parameters that control the physics of the problem. These parameters are the Reynolds number, the Rayleigh number, the Biot number and the Marangoni number. The numerical results are obtained for a Prandtl number fixed at $Pr = 7$. We are interested in determining the thermal instabilities that exhibit stationary longitudinal rolls when the Rayleigh and the Reynolds numbers are between $2500 \leq Ra \leq 12,500$ and $10 \leq Re \leq 20$, respectively. As an example, these (Ra, Ma, Pr) ranges may correspond to the flow of a water film (i.e. film cooling applications) with a temperature difference ranging from $0.5 \text{ K} < \Delta T < 5 \text{ K}$ and a liquid layer thickness between 5 mm and 10 mm. After a grid size-dependence study (see Appendix A), a mesh of resolution $n_x = 128$, $n_y = 176$ and $n_z = 50$ was chosen for this study except for $Ra = 12,500$ for which the appropriate mesh resolution was found to be $153 \times 211 \times 60$.

5.1. Formation and spatial evolution of the longitudinal rolls

Within the range of the dimensionless numbers investigated, the flow patterns in the open channel are composed of steady longitudinal rolls. These patterns are similar to those observed in the case of PRB flows and the initiation mechanisms involved in their formation are also similar to those involved in the PRB flows, particularly when weak thermocapillary forces are concerned. These mechanisms have been detailed for example by Mergui et al. (2011) for the PRB flow case inside a channel with aspect ratio $4 \leq \Gamma \leq 12$. As illustrated in Fig. 5, the longitudinal rolls are first initiated near the side walls and grow gradually toward the center of the channel in the downstream direction. Indeed, the predominant heat transfer mechanism in these zones is the thermal conduction leading to a local temperature increase because the forced convection is weak in the vicinity of the lateral walls. This fluid heating induces natural convection currents near these lateral

Table 2

The results for the validation test case corresponding to thermocapillary flow in a two-dimensional open square cavity compared with the results from the literature (Carpenter and Homsy (1990), Kuhlmann and Albensoeder (2008), Xu and Zebib (1998), Carpenter and Homsy (1989)). $u(0,0.5)$ is the velocity at the center of the free surface. $Nu_{x=0.5}$ and $Nu_{x=-0.5}$ are the mean Nusselt numbers over the two vertical walls of the cavity.

Parameters	Author/grid	$u(0,0.5)$	$Nu_{x=0.5}$	$Nu_{x=-0.5}$
$Re_{th} = 10,000$ $Pr = 1$ $Ma = 10,000$ $Bd = 0$	Xu and Zebib (1998)	−305	4.36	4.36
	Carpenter and Homsy (1990)	−296	4.33	4.36
	Kuhlmann and Albensoeder (2008) (115 × 115)	−304.36	4.364	4.364
	Kuhlmann and Albensoeder (2008) (211 × 211)	−304.27	4.363	4.363
$Re_{th} = 5000$ $Pr = 1$ $Ma = 5000$ $Bd = 10$	Present, Tamaris (121 × 121)	−301.99	4.358	4.361
	Carpenter and Homsy (1989)	−179	4.17	4.14
	Kuhlmann and Albensoeder (2008) (115 × 115)	−175.90	4.546	4.545
	Kuhlmann and Albensoeder (2008) (211 × 211)	−175.97	4.545	4.545
$Re_{th} = 2000$ $Pr = 30$ $Ma = 60,000$ $Bd = 0$	Present, Tamaris (121 × 121)	−174.38	4.543	4.543
	Xu and Zebib (1998)	−29.8	6.61	6.61
	Carpenter and Homsy (1990)	−37.2	6.60	6.42
	Kuhlmann and Albensoeder (2008) (115 × 115)	−24.22	6.26	6.26
	Kuhlmann and Albensoeder (2008) (211 × 211)	−23.98	6.234	6.234
	Present, Tamaris (121 × 121)	−24.64	6.135	6.235

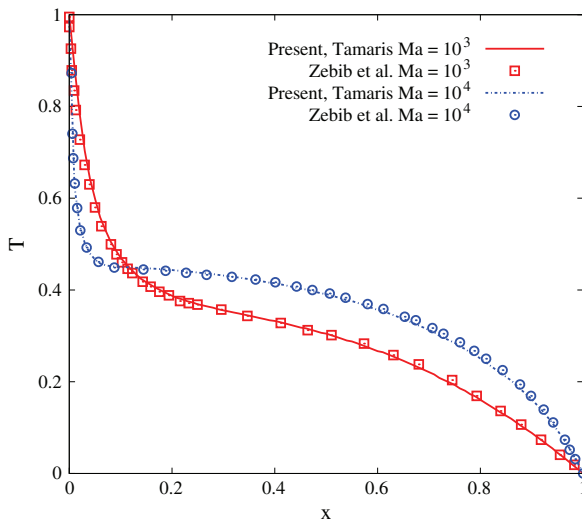


Fig. 4. Comparison of the temperature profile obtained on the free surface of a two dimensional square cavity for Marangoni number values of $Ma = 10^3$ and $Ma = 10^4$ with the results of Zebib et al. (1985) ($Pr = 1$).

walls, causing the onset of the first longitudinal rolls. This onset happens near the flow inlet. The transverse momentum transport causes the progressive formation of other rolls toward the center of the channel as the fluid progress downstream. The rolls' dimension is nearly the same as the channel height, and the fully developed section contains 10 rolls. This initiation mechanism of longitudinal rolls has been also well described by Benderradji et al. (2008) in the case of a channel heated from below by a constant heat flux at low Rayleigh numbers.

The spatial evolution of the longitudinal rolls is governed by the ratio of the buoyancy to inertia (characterized by the Richardson number $Ri = Ra/(PrRe^2)$). As it was early observed for PRB flow, increasing Re or decreasing Ra displaces downstream the fully developed central rolls (Kamotani and Ostrach, 1976; Chang et al., 1997). We show in Figs. 6 and 7 this effect of the variation of Re and Ra . The case of $Ra = 2500$ has been computed with a longer channel ($X = 80$) to capture the fully established longitudinal rolls. Indeed, for this low Richardson number flow, the formation of the rolls occurs far at the downstream of the channel. However, in the Figs. 7 and 9 the results are cut at $X = 50$ for an easier comparison with the other cases. It is important to note that while the central rolls are displaced towards the outlet (when increasing Re for example), the initiation of the lateral rolls occurs sensibly at the same position. The number of the rolls is not affected by Re , while it is increased from 10 rolls for relatively low Ra values to 12 rolls for $Ra = 12,500$, since their formation is related to natural convection.

We present in Figs. 8 and 9 the effect of longitudinal rolls on heat transfer for different Reynolds and Rayleigh numbers and for low thermocapillary effect. The evolution of the transversally averaged Nusselt number Nu_{tav} (cf. Eq. (18)) is similar to the one observed for PRB flow (Nicolas, 2002). Nu_{tav} first decreases in a zone characterized by forced convection and then increases to reach a maximum value before decreasing again slightly. At low Reynolds numbers (cf. Fig. 8), the natural convection improves the heat transfer for a short distance after the channel inlet, causing Nu_{tav} to show a peak at the position where all the rolls are developed. This peak has almost the same value for all Re numbers, but at different positions. As found in PRB flow (Nicolas, 2002), the heat transfer in the fully developed region is independent of Re . Increasing Re increases the length of the entrance region where the forced convection is dominant, which affect favorably the heat

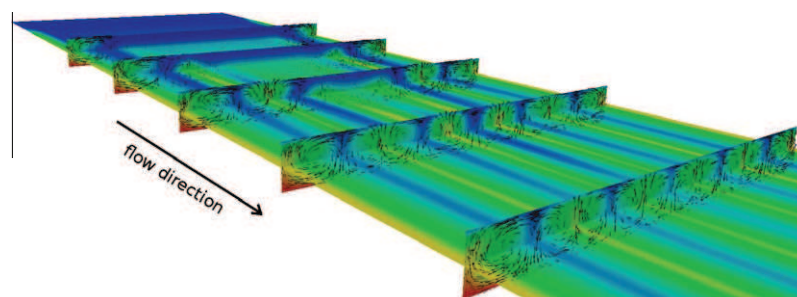


Fig. 5. Visualization of the longitudinal rolls at selected cross sections (Temperature field and velocity vectors: $Re = 15$, $Ra = 5000$, $Bi = 15$ and $Ma = 500$).

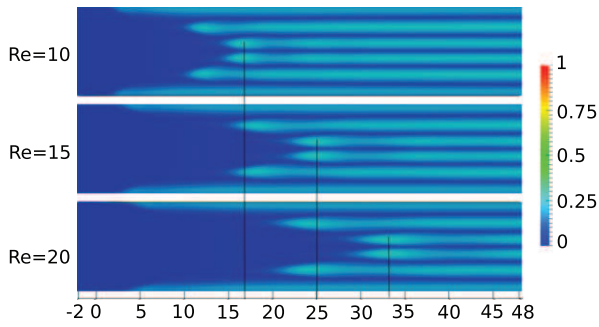


Fig. 6. The reduced temperature field θ on the free surface for different Reynolds numbers Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 500$).

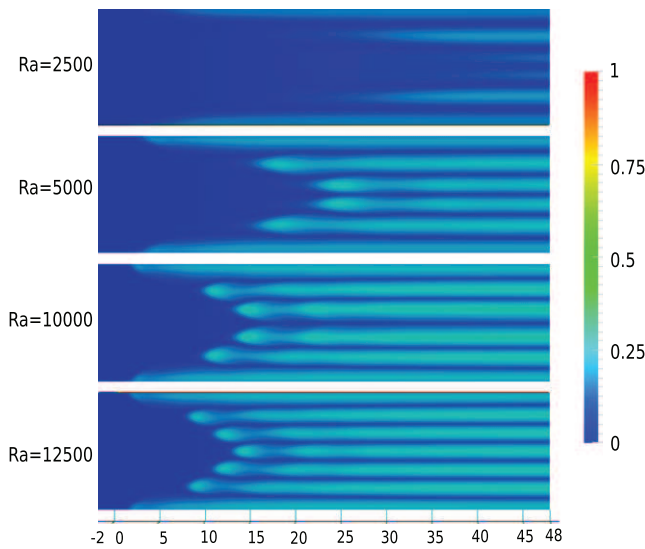


Fig. 7. The reduced temperature fields θ on the free surface for different Rayleigh numbers Ra ($Bi = 15$, $Re = 15$, $Ma = 500$).

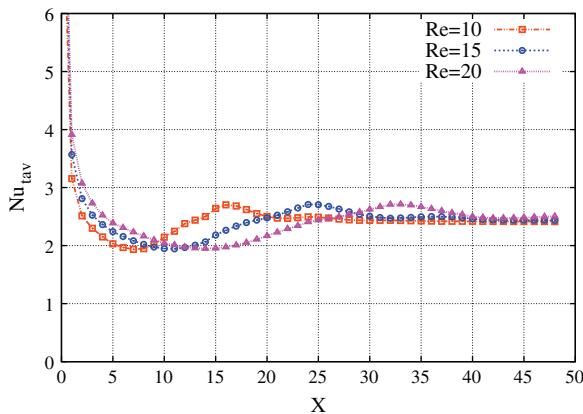


Fig. 8. The longitudinal variation of the transversally averaged Nusselt number Nu_{tav} for different Reynolds numbers Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 500$).

transfer as shown in Table 3 where the average Nusselt number Nu_{av} over the whole heated wall increases slightly with increasing Re . When the Rayleigh number increases, Nu_{tav} is significantly increased compared to the pure forced convection case (Fig. 9). This is due to the onset of natural convection, which appears near the entrance for large Rayleigh numbers ($Ra = 12,500$), and to the increase in the kinetic energy generated by the existence of more

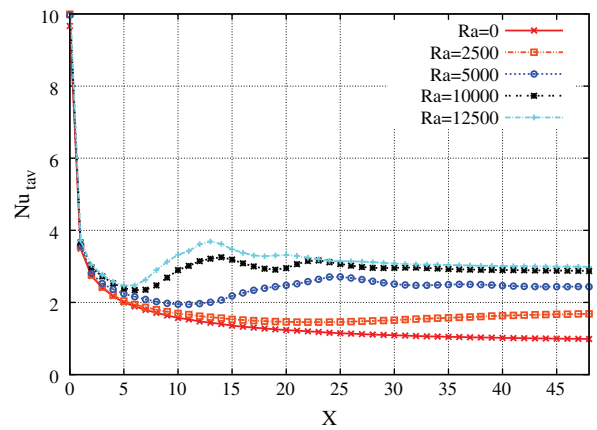


Fig. 9. The longitudinal variation of the transversally averaged Nusselt number Nu_{tav} for different Rayleigh numbers Ra ($Bi = 15$, $Re = 15$, $Ma = 500$).

Table 3

The evolution of the average Nusselt number Nu_{av} for different Re ($Bi = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 500$).

Re	10	15	20
Ri	7.14	3.17	1.78
Nu_{av}	2.35	2.39	2.42

longitudinal rolls. The slight oscillations observed in Nu_{tav} evolutions are associated with the longitudinal modulations in the shape of the rolls where they start to develop. While the Nusselt number in the fully established zone is constant in the PRB configuration (Nicolas, 2002), we observe that it decreases slightly when the upper surface is considered free. This is due to the non infinite Biot number and this effect will be more discussed in the next section.

5.2. Biot number influence

In Figs. 10 and 11, we present the transverse variation of the local Nusselt number at the bottom wall for various Biot numbers at $X = 25$ (beginning of the rolls' development in the cross-section) and $X = 40$ (all of the rolls of the cross-section are completely developed), respectively. The Biot number measures the ratio of the internal thermal resistance of the liquid film to the thermal resistance between the free surface and the surrounding air; a null Biot number corresponds to an adiabatic free surface. The other flow parameters are fixed at $Re = 15$, $Ra = 5000$ and $Ma = 500$. We observe in these figures that the parietal heat transfer has a sinusoidal distribution for all of the studied cases. The distribution and number of peaks are related to the velocity distribution in the fluid generated by the ascent of hot fluid plumes under the action of buoyancy forces. They, therefore, reflect the organization of thermal instabilities into longitudinal rolls. In comparison, the results for a closed channel are also given (PRB flow). At $X = 25$ (Fig. 10), the Nusselt number evolution of the closed channel has six peaks. The two central peaks are of very low amplitude due to the beginning of the center rolls development. This is not the case when considering solutions for the free surface, where we see four peaks for $Bi = 0$ and five peaks for $Bi \geq 5$ and whose amplitude is higher in the center and grows with an increasing Biot number. When the heat exchange on the upper surface is very low ($Bi \simeq 0$), the liquid film temperature increases in a generalized way, which reduces the thermal gradients and noticeably reduces the heat transfer at the bottom wall. Indeed, the convective roll number is lower for $Bi = 0$ compared to other values. The

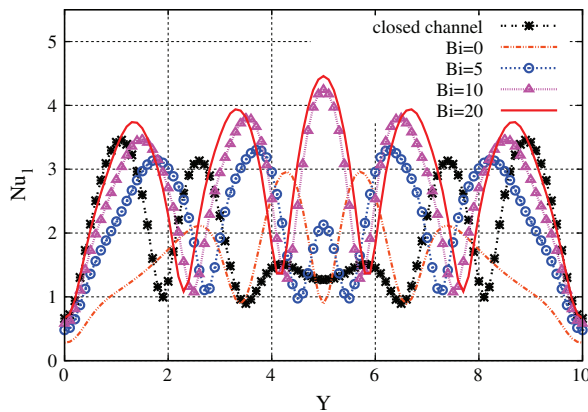


Fig. 10. The transverse variation of the local Nusselt number at $X = 25$ for different Biot numbers ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 500$).

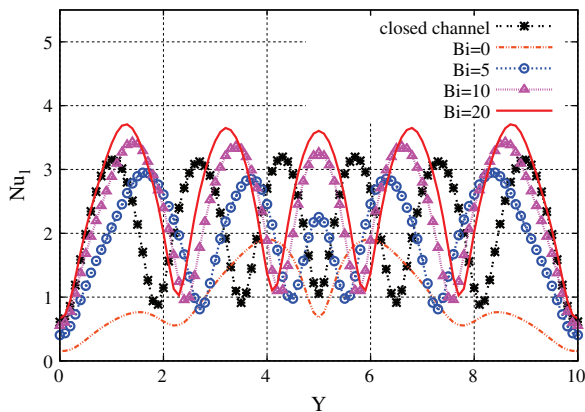


Fig. 11. The transverse variation of the local Nusselt number at $X = 40$ for different Biot numbers ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Ma = 500$).

hydrodynamic field and the Nu_l distribution are related; indeed, every peak of the Nu_l curve corresponds to a pair of rolls. Thus, 8 rolls are formed for $Bi = 0$ and 10 rolls form for $Bi \geq 5$. For $Bi = 5$, the two central rolls have a lower intensity than the side rolls, regardless of the X position, which is opposite to the behavior for $Bi = 10$ or $Bi = 20$, which present similar distributions with regular peaks from $X = 40$, but with slightly greater Nu_l values for $Bi = 20$ (Fig. 11). The presence of an upper wall (case of closed channel) increases the number of rolls to 12. The imposed temperature T_0 at the top wall increases the thermal gradient in the film and should tend to improve the heat exchange. However, this favorable effect is counterbalanced by the viscous effects at this wall that decrease the fluid velocity. Thus, the Nusselt number values for the closed channel are lower than those obtained for $Bi = 10$ and $Bi = 20$. We also observe that the rolls in the case of a closed channel are regular (same wavelength), while in the case of the channel with free surface, the rolls close to the walls have a wavelength greater than those in the center.

In Fig. 11, we can notice that the transverse wavelength of the side rolls decreases as the Biot number increases, that is when the specific thermal resistance $R_{conv} = 1/h$ decreases. The same observation was reported by Mergui et al. (2011) for a PRB flow with a conducting upper wall. It appears that when the heat transfer at the free surface is increased (i.e. larger Bi values), the heat transport within the fluid layer tends to be assumed by steady rolls having shorter wavelength. Indeed, the actual vertical temperature difference in the fluid is increased, since the temperature at the free surface is now closer to T_0 . Fig. 12 shows the longitudinal

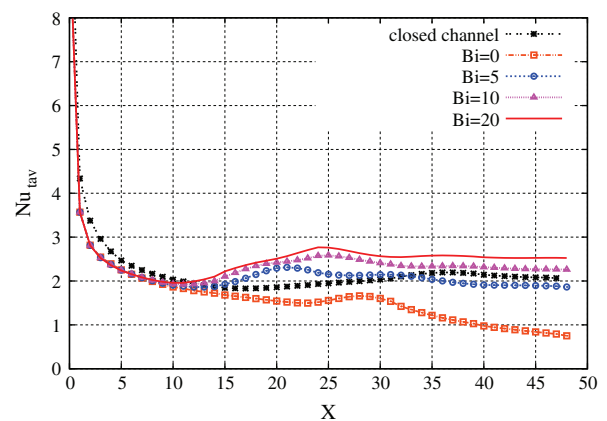


Fig. 12. The longitudinal variation of the transverse average Nusselt number for different Biot numbers ($Re = 15$, $Ra = 5000$ and $Ma = 500$).

variation of the transversally average Nusselt number Nu_{tav} for different Biot numbers. For the channel with the free surface, Nu_{tav} decreases first until $X = 10$ and then increases gradually to a maximum located between $X = 22$ and $X = 28$, which corresponds to a position where all of the rolls are developed in the cross section. For the closed channel, the maximum is axially reached further downstream, at $X = 37$. Indeed, the presence of the upper rigid wall stabilizes the flow and delays the development of longitudinal rolls. We observe also, as mentioned in the previous subsection, that while the Nusselt number in the fully established zone is constant in the PRB configuration, it decreases when the upper surface is considered free. This drop is more significant for low Biot numbers ($Bi = 0$ and $Bi = 5$) and it is weak for large Biot number ($Bi = 20$). For low Biot numbers, the transversally averaged Nusselt number needs more channel length to reach the asymptotic value.

5.3. Marangoni effect

The variation of the surface tension with the temperature (Marangoni effect or thermocapillary effect) generates flows at the free surface from hot areas towards cold areas. Fig. 13 shows the effect of different Marangoni numbers on the temperature fields associated with the velocity vectors at the cross section ($X = 40$) where the flow is fully developed by using different values of Marangoni number for $Ra = 0$. Setting $Ra = 0$ enables us to analyze the Marangoni effect only, without the interaction with buoyancy. We observe that the variation of the surface tension with temperature induces rolls similar to those created by natural convection. The results clearly indicate that, for $Ma = 500$, the flow is dominated by forced convection. The first longitudinal vortex rolls start to appear at $Ma = 1000$ where the thermocapillary effect on the basic flow becomes important. As the Marangoni number increases, more vortex rolls are induced and their number increases to reach their fully symmetrically developed state at $Ma = 3000$. For this Ma value, the maximum number of vortex rolls is 8. The rolls' dimension is nearly the same as the channel height. The rotation direction of the rolls due to the Marangoni convection is reversed relative to the rotation direction of the rolls due to natural convection. To explain this, we present in Fig. 14 the onset of the first rolls at different cross-sections located at $X = 5$, $X = 8$, $X = 15$ and $X = 40$ for $Ma = 3000$. In the absence of natural convection, the forced flow causes first the distortion of the temperature stratification (cross-section at $X = 5$). Thus, the fluid having a lower velocity near the adiabatic vertical walls increases its temperature in comparison to that of the core flow region. This is also true at the free surface. It results from this, the existence of a surface

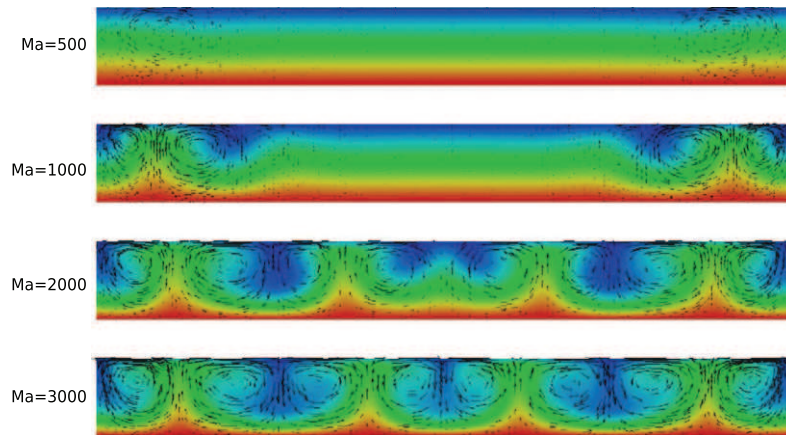


Fig. 13. The longitudinal vortex rolls due to Marangoni effect at cross section $X = 40$ (Temperature field and velocity vectors: $Ra = 0$, $Re = 15$ and $Bi = 15$).

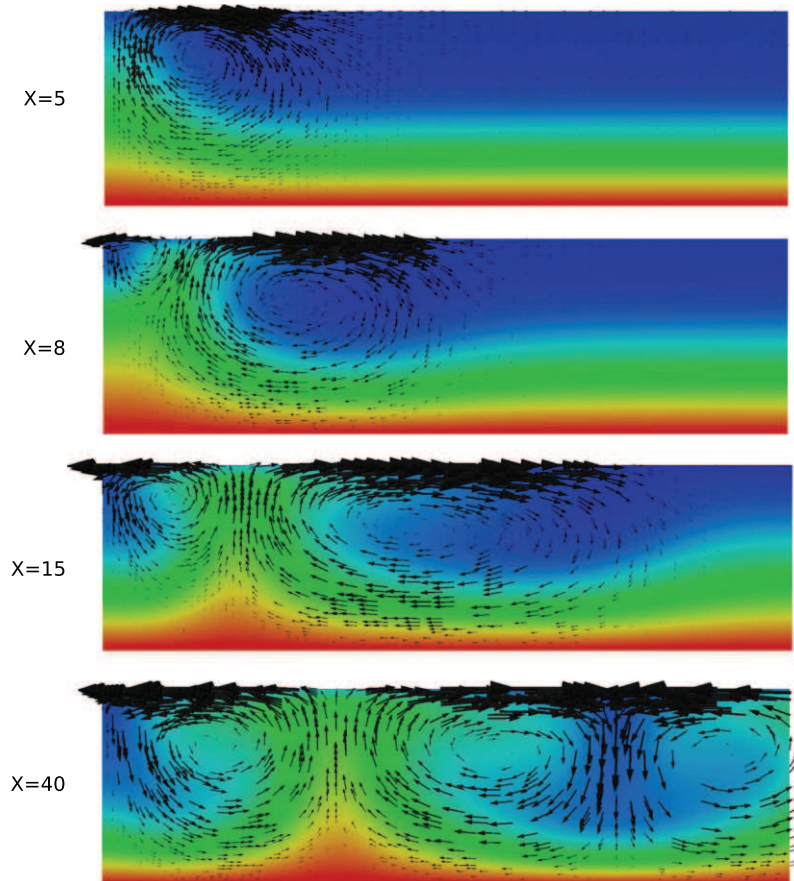


Fig. 14. Cross sections of the flow at $X = 5$, $X = 8$, $X = 15$ and $X = 40$. (Temperature field and velocity vectors: $Ra = 0$, $Re = 15$, $Ma = 3000$).

temperature gradient which is the source of the creation of the first small upward roll in the vicinity of the walls. The hot fluid plume lifted by the first roll reaches the free surface at a position staggered from the side wall. Thus, for a position located slightly downstream (cross-section at $X = 8$), a cold fluid zone appears at the free surface in the immediate vicinity of the lateral wall, which again creates a small roll rotating in the opposite direction (towards the wall) which continue to grow until the fully developed region ($X = 40$). This downward roll created by thermocapillary forces has not an equivalent in PRB flow.

In the following, we consider the effect of the superimposition buoyancy thermal forces. Fig. 15 shows the transverse variation at $X = 30$ of the transverse velocity component V_y for various values of the Marangoni number Ma and for $Re = 15$ and $Ra = 5000$. We observe that V_y increases with increasing Ma , which confirms that the Marangoni effect induces a surface flow superimposed on the base flow. We noted also that for $Ma \geq 1200$, there is a sign inversion of the velocity that is clearly visible for the rolls near the walls, which is due to the Marangoni effect overcoming the dominance of the buoyancy thermal forces. Fig. 16 presents a cross section of the

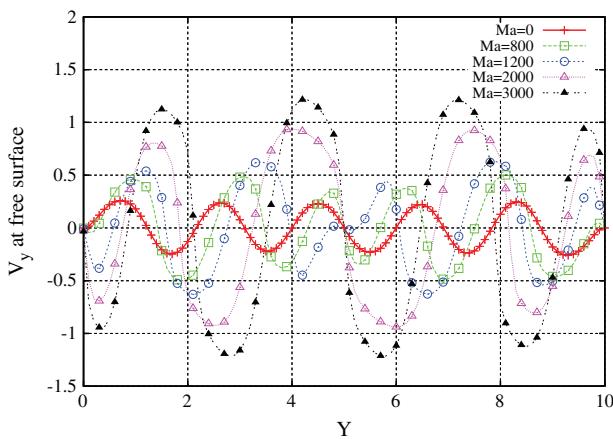


Fig. 15. The transverse variation at $X = 30$ and $Z = 1$ of the velocity V_y for different Marangoni numbers Ma ($Re = 15$, $Ra = 5000$, $Bi = 15$).

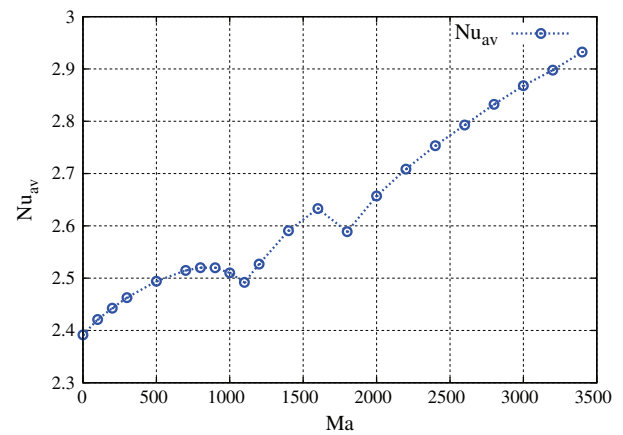


Fig. 17. The variation of the average Nusselt number at the heated wall with respect to the Marangoni number Ma ($Ra = 5000$, $Re = 15$ and $Bi = 15$).

flow at $X = 30$ and shows the Marangoni effect on the longitudinal rolls. Under the influences of thermocapillary forces, the rolls near the side walls become larger when the Marangoni number increases, which induces the merging of the two center rolls at $Ma = 1200$ and generates two other rolls at the sides of the channel. The two new rolls near the side walls then begin to grow with increasing Ma , causing the two center rolls to merge at $Ma = 1800$. While the number of rolls decreases from 10 rolls at $Ma = 1600$ to 8 rolls at $Ma = 1800$, the rotational velocity of the rolls greatly increases and the rolls rotate in the direction imposed by the Marangoni effect. To study the influence of thermocapillary forces on the heat transfer, Fig. 17 shows the variation in the average Nusselt number at the heated bottom wall with respect to the Marangoni number. We note that the Nu_{av} increases with increasing Ma due to the increasing velocity of the rolls under the influence of thermocapillary forces (Fig. 15). At $Ma = 1100$, we

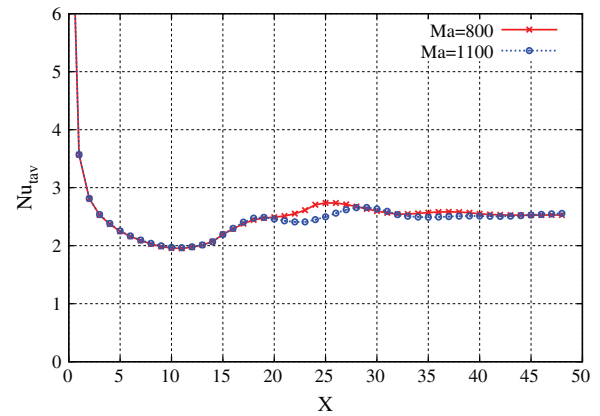


Fig. 18. The longitudinal variation of the transverse average Nusselt number for $Ma = 800$ and $Ma = 1100$. ($Ra = 5000$, $Re = 15$ and $Bi = 15$).

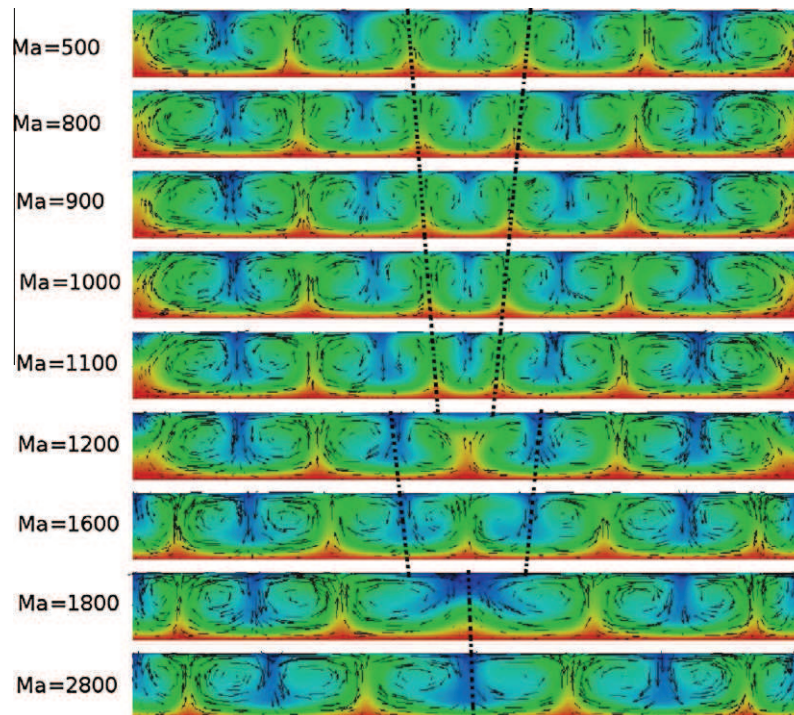


Fig. 16. Vertical cross-section at $X = 30$ for different Marangoni numbers Ma (Temperature field and velocity vectors: $Ra = 5000$, $Re = 15$ and $Bi = 15$).

observe a decrease in the Nusselt number due to the beginning of the merging of the two rolls in the channel center. This behavior is also shown by the evolution of the transverse average Nusselt number along the channel (Fig. 18). Indeed, the Nusselt number decreases initially and then increases gradually to a maximum that indicates the complete occupation of the cross section by the rolls, which occurs at $X = 24$ for $Ma = 800$ and at $X = 28$ for $Ma = 1100$. Thus, there is a downstream shift of the center rolls' position with respect to the outlet of the channel when Ma increases between 800 and 1100. This decline continues as Ma increases until the center rolls merge with their adjacent rolls at $Ma = 1200$ (Fig. 16). This reorganization of the rolls is also confirmed by the evolution of the velocity profile at the free surface for $Ma = 1200$ (Fig. 15). The increase in the rolls' velocity under the action of thermocapillary effects promotes the heat transfer and increases the Nusselt number until a further decrease occurs due to the disappearance of the two center rolls at $Ma = 1800$.

6. Conclusion

This work presents a numerical study of three-dimensional laminar mixed convection within a liquid flowing in a horizontal channel heated uniformly from below. The upper surface is free and assumed to be flat. The side walls are thermally insulated. This numerical work allows us to examine the numerical results corresponding to a selected range of different characteristic non-dimensional parameters. We focused on the thermal instabilities that develop in the form of stationary longitudinal rolls. We investigated the influence of the variation of parameters governing the physics of the problem on the flow patterns and heat transfer characteristics.

To our best knowledge, it is the first time that the Marangoni effect is studied together with the Poiseuille–Bénard mixed convection. The initiation mechanism of the longitudinal rolls is similar to that encountered for PRB flow where the longitudinal rolls are first initiated near the side walls and grow gradually toward the center of the channel in the downstream direction. Increasing the buoyancy forces or decreasing the forced convection have the same effects: the shortening of the development length of the rolls and the enhancement of heat transfer.

The thermal resistance at the free surface ($R_{conv} = 1/h$) has an effect on the longitudinal rolls by decreasing their wavelength when Biot number increases. This is coherent with the case of the presence of a conductive upper wall (case of closed channel) that decreases the number of rolls compared with the thin upper surface. The imposed temperature T_0 at the top wall increases the thermal gradient in the film, which should improve the heat exchange. However, this favorable effect is counterbalanced by the viscous effects at this wall that decrease the fluid velocity and, consequently, decrease the heat exchange compared with the cases of $Bi = 15$ and $Bi = 20$. The results also show that the presence of the upper rigid wall stabilizes the flow, delaying the development of longitudinal rolls. Furthermore, the Marangoni effect has been investigated, and the results show that the thermocapillary effect on the basic flow becomes important at $Ma = 1000$. In the presence of buoyancy effect, as the Marangoni number increases, the number of rolls decrease to reach a minimum of 8 rolls. The rotation direction of the rolls due to the Marangoni convection is reversed relative to the rotation direction of the rolls due to natural convection. This phenomenon is related to the thermocapillary effect and it occurs at a downstream position relative to the PRB-like side rolls initiation. When we combine the Marangoni effect with the natural convection, we observe that the thermocapillary forces start to overcome the dominance of the buoyancy thermal forces at $Ma = 1200$ for $Ra = 5000$. Furthermore, increases

in the Marangoni number favorably affect the heat transfer, but there are localized decreases in Nu_{av} curve, which corresponds to the disappearance of the center rolls.

Acknowledgments

This work has been supported by a PBER grant (Programme de Bourses d'Excellence de Recherche) from CNRST-Morocco and by the Volubilis program of Morocco–French cooperation (MA/09/214-Maroc, MA/09/213-France). This work was performed using HPC resources from GENCI-CINES (Grant 2012-c201226738) and also using the MCIA computing facilities (Mésocentre de Calcul Intensif Aquitain).

Appendix A. Mesh size-dependence study

Several grid sizes have been tested to determine the appropriate mesh size, giving the best compromise between accuracy and calculation cost to ensure that the results are grid-independent. The results are presented below for the case in which the control parameters are $Re = 15$, $Ra = 5000$, $Bi = 15$ and $Ma = 500$ for the Reynolds, Rayleigh, Biot and Marangoni numbers, respectively. Table 4 shows the average Nusselt numbers at the bottom surface of the channel for increasing mesh sizes. We note that the difference between the results of the last two meshes does not exceed 1 %.

Fig. 19 shows the longitudinal profile of the reduced temperature along the axis $(Y,Z) = (5,0.5)$ for the four selected meshes. We observe that the results remain stable and are not subjected to any influence of mesh at a resolution of $128 \times 176 \times 50$. Consequently, the resolution of the mesh that meets the right compromise between computational time and accuracy chosen for this study is $128 \times 176 \times 50$. Other mesh tests have been done for higher Ra numbers and it appears that the appropriate mesh size for $Ra = 12,500$ computations is $153 \times 211 \times 60$. Thus the results shown for this case are obtained using this appropriate mesh.

Table 4

A comparison of the average Nusselt number Nu_{av} for various meshes ($Ra = 5000$).

Mesher	Computation time (24 processors)	Nu_{av}
$102 \times 140 \times 40$	2 h, 36 min	2.41663
$115 \times 158 \times 45$	4 h, 41 min	2.43877
$128 \times 176 \times 50$	12 h, 35 min	2.47479
$153 \times 211 \times 60$	51 h, 20 min	2.47639

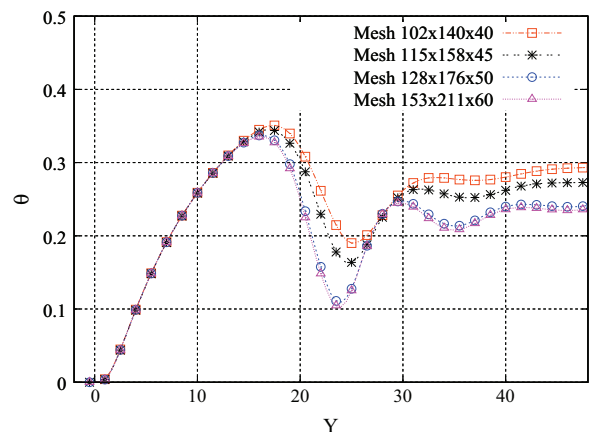


Fig. 19. The longitudinal profile of reduced temperature along the axis $(Y,Z) = (5,0.5)$ for different meshes.

References

- Akiyama, M., Hwang, G., Cheng, K., 1971. Experiments on the onset of longitudinal vortices in laminar forced convection between horizontal plates. *Journal of Heat Transfer* 93, 335–341.
- Alves, M.A., Oliveira, P.J., Pinho, F.T., 2003. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 41, 47–75.
- Balay, S., Gropp, W., McInnes, L., Smith, B., 1997. Efficient management of parallelism in object-oriented numerical software libraries. In: *Modern Software Tools for Scientific Computing*. Birkhauser Boston Inc., pp. 163–202.
- Benderradji, A., Haddad, A., Taher, R., Médale, M., Abid, C., Papini, F., 2008. Characterization of fluid flow patterns and heat transfer in horizontal channel mixed convection. *Heat and Mass Transfer* 44, 1465–1476.
- Bonnefoi, C., Abid, C., Médale, M., Papini, F., 2004. Poiseuille–Bénard instability in a horizontal rectangular duct water flow. *International Journal of Thermal Sciences* 43, 791–796.
- Burguete, J., Mukolobwiz, N., Daviaud, F., Garnier, N., Chiffaudel, A., 2001. Buoyant-thermocapillary instabilities in extended liquid layers subjected to a horizontal temperature gradient. *Physics of Fluids* 13, 2773–2787.
- Carpenter, B.M., Homsy, G.M., 1989. Combined buoyant-thermocapillary flow in a cavity. *Journal of Fluid Mechanics* 207, 121–132.
- Carpenter, B.M., Homsy, G.M., 1990. High Marangoni number convection in a square cavity: Part II. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 2, 137–149.
- Chang, M., Lin, T., 1998. Experimental study of aspect ratio effects on longitudinal vortex flow in mixed convection of air in a horizontal rectangular duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 41, 719–733.
- Chang, M., Yu, C., Lin, T., 1997. Changes of longitudinal vortex roll structure in a mixed convective air flow through a horizontal plane channel: an experimental study. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 40, 347–363.
- Chen, S., Lavine, A., 1996. Laminar, buoyancy induced flow structures in a bottom heated, aspect ratio 2 duct with throughflow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 39, 1–11.
- Cheng, K., Wu, R., 1976. Axial heat conduction effects on thermal instability of horizontal plane poiseuille flows heated from below. *Journal of Heat Transfer* 98, 564–569.
- Chiu, K., Rosenberger, F., 1987. Mixed convection between horizontal plates – 1. Entrance effects. *International Journal of Heat Mass Transfer* 30, 1145–1654.
- Davis, S., 1987. Thermocapillary instabilities. *Annual Review of Fluid Mechanics* 19, 403–435.
- El Omari, K., Kouskousou, T., Le Guer, Y., 2011. Impact of shape of container on natural convection and melting inside enclosures used for passive cooling of electronic devices. *Applied Thermal Engineering* 31, 3022–3035.
- El Omari, K., Le Guer, Y., 2010. Thermal chaotic mixing of power-law fluids in a mixer with alternately rotating walls. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 165, 641–651.
- Ferziger, J., Perić, M., 1999. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, vol. 2. Springer, Berlin.
- Fukui, K., Nakajima, M., Ueda, H., 1983. The longitudinal vortex and its effects on the transport processes in combined free and forced laminar convection between horizontal and inclined parallel plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 26, 109–120.
- Gaskell, P.H., Lau, A.K.C., 1988. Curvature-compensated convective transport: smart, a new boundedness-preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 8, 617–641.
- Goncharova, O., Kabov, O., 2010. Mathematical and numerical modeling of convection in a horizontal layer under co-current gas flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53, 2795–2807.
- Gray, D., Giorgini, A., 1976. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 19, 545–551.
- Higuera, F., 2000. Steady thermocapillary-buoyant flow in an unbounded liquid layer heated non-uniformly from above. *Physics of Fluids* 12, 2186–2197.
- Hwang, G., Cheng, K., 1973. Convective instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel-plate channel heated from below. *Journal of Heat Transfer, Transactions ASME* 95, 72–77.
- Imura, H., Gilpin, R., Cheng, K., 1978. An experimental investigation of heat transfer and buoyancy induced transition from laminar forced convection to turbulent free convection over a horizontal isothermally heated plate. *Journal of Heat Transfer* 100, 429–434.
- Incropera, F., Knox, A., Maughan, J., 1987. Mixed-convection flow and heat transfer in the entry region of a horizontal rectangular duct. *Journal of Heat Transfer* 109, 434–439.
- Jasak, H., 1996. Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows. Ph.D. Thesis. Imperial College London (University of London).
- Kamotani, Y., Ostrach, S., 1976. Effect of thermal instability on thermally developing laminar channel flow. *Journal of Heat Transfer* 98, 62–66.
- Kamotani, Y., Ostrach, S., Miao, H., 1979. Convective heat transfer augmentation in thermal entrance regions by means of thermal instability. *Journal of Heat Transfer* 101, 222–226.
- Komori, S., Nagaosa, R., Murakami, Y., Chiba, S., Ishii, K., Kuwahara, K., 1993. Direct numerical simulation of three-dimensional open-channel flow with zero-shear gas–liquid interface. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 5, 115–125.
- Kuhlmann, H.C., Albensoeder, S., 2008. Three-dimensional flow instabilities in a thermocapillary-driven cavity. *Physical Review E* 77, 036303.
- Laure, P., Roux, B., 1989. Linear and non-linear analysis of the Hadley circulation. *Journal of Crystal Growth* 97, 226–234.
- Lee, F., Hwang, G., 1991. Transient analysis on the onset of thermal instability in the thermal entrance region of a horizontal parallel plate channel. *Journal of Heat Transfer* 113, 363–370.
- Lin, T.F., Chang, C.J., Yan, W.M., 1988. Analysis of combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion on laminar forced convection heat transfer in a vertical tube. *Journal of Heat Transfer* 110, 337–344.
- Luijckx, J., Platten, J., Legros, J., 1981. On the existence of thermoconvective rolls, transverse to a superimposed mean Poiseuille flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 24, 1287–1291.
- Mao, Z., Lu, P., Zhang, G., Yang, C., 2008. Numerical simulation of the marangoni effect with interphase mass transfer between two planar liquid layers. *Chinese Journal of Chemical Engineering* 16, 161–170.
- Mercier, J.F., Normand, C., 1996. Buoyant-thermocapillary instabilities of differentially heated liquid layers. *Physics of Fluids* 8, 1433–1445.
- Mergui, S., Nicolas, X., Hirata, S., 2011. Sidewall and thermal boundary condition effects on the evolution of longitudinal rolls in Rayleigh–Bénard–Poiseuille convection. *Physics of Fluids* 23, 084101.
- Médale, M., Cochelin, B., 2009. A parallel computer implementation of the asymptotic numerical method to study thermal convection instabilities. *Journal of Computational Physics* 228, 8249–8262.
- Narusawa, U., 1998. Mixed convection in a rectangular duct heated from below. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 25.
- Ng, K.C., Yusoff, M.Z., Ng, E.Y.K., 2007. Higher-order bounded differencing schemes for compressible and incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 53, 57–80.
- Nicolas, X., 2002. Bibliographical review on the Poiseuille–Rayleigh–Bénard flows: the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below. *International Journal of Thermal Sciences* 41, 961–1016.
- Nicolas, X., Luijckx, J.M., Platten, J.K., 2000. Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43, 589–610.
- Nicolas, X., Mojtabi, A., Platten, J.K., 1997. Two-dimensional numerical analysis of the Poiseuille–Bénard flow in a rectangular channel heated from below. *Physics of Fluids* 9, 337–348.
- Nicolas, X., Médale, M., Glockner, S., Gounand, S., 2011. Benchmark solution for a three-dimensional mixed-convection flow, Part 1: Reference solutions. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 60, 325–345.
- Nicolas, X., Zouei, N., Xin, S., 2012. Influence of a white noise at channel inlet on the parallel and wavy convective instabilities of Poiseuille–Rayleigh–Bénard flows. *Physics of Fluids* 24, 084101.
- Ostrach, S., Kamotani, Y., 1975. Heat transfer augmentation in laminar fully developed channel flow by means of heating from below. *Journal of Heat Transfer* 97, 220–225.
- Ouazzani, M.T., Platten, J.K., Mojtabi, A., 1990. Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes – II. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 33, 1417–1427.
- Ouazzani, M.T., Platten, J.K., Mojtabi, A., 1993. Intermittent patterns in mixed convection. *Applied Scientific Research* 51, 677–685.
- Oulaid, O., Benhamou, B., Galanis, N., 2010. Flow reversal in combined laminar mixed convection heat and mass transfer with phase change in a vertical channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 31, 711–721.
- Parmentier, P.M., Regnier, V.C., Lebon, G., 1993. Buoyant-thermocapillary instabilities in medium-Prandtl-number fluid layers subject to a horizontal temperature gradient. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 36, 2417–2427.
- Patankar, S., 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor & Francis.
- Pearson, J.R.A., 1958. On convection cells induced by surface tension. *Journal of Fluid Mechanics* 4, 489–500.
- Rhie, C.M., Chow, W.L., 1983. Numerical study of a turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal* 21, 1525–1532.
- Sadiq, I., Usha, R., 2005. Linear instability in a thin viscoelastic liquid film on an inclined, non-uniformly heated wall. *International Journal of Engineering Science* 43, 1435–1449.
- Sadiq, I.M.R., Usha, R., Joo, S.W., 2010. Instabilities in a liquid film flow over an inclined heated porous substrate. *Chemical Engineering Science* 65, 4443–4459.
- Scriven, L.E., Sternling, C.V., 1964. On cellular convection driven by surface-tension gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity. *Journal of Fluid Mechanics* 19, 321–340.
- Simanovskii, I.B., Viviani, A., Legros, J.C., 2008. Buoyant-thermocapillary flows in a multilayer system. *Comptes Rendus Mécanique* 336, 262–268.
- Taylor, J., Sarkar, S., Armenio, V., 2005. Large eddy simulation of stably stratified open channel flow. *Physics of Fluids* 17, 1–18.
- Thiele, U., Knobloch, E., 2004. Thin liquid films on a slightly inclined heated plate. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 190, 213–248.
- Tsay, H.C., Yan, W.M., 1991. Binary diffusion and heat transfer in laminar mixed convection channel flows with uniform wall heat flux: extremely thin film thickness. *Heat and Mass Transfer* 26, 23–31.
- Tseng, W., Lin, W., Yin, C., Lin, C., Lin, T., 2000. Stabilization of buoyancy-driven unstable vortex flow in mixed convection of air in a rectangular duct by tapering its top plate. *Journal of Heat Transfer* 122, 58–65.
- Wang, G., Incropera, F., Viskanta, R., 1983. Mixed convection heat transfer in a horizontal open-channel flow with uniform bottom heat flux. *Journal of Heat Transfer* 105, 817–822.

- Wang, L., Lu, X.Y., 2005. Large eddy simulation of stably stratified turbulent open channel flows with low- to high-Prandtl number. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48, 1883–1897.
- Xu, J., Zebib, A., 1998. Oscillatory two- and three-dimensional thermocapillary convection. *Journal of Fluid Mechanics* 364, 187–209.
- Yasuo, M., Yutaka, U., 1966. Forced convective heat transfer between horizontal flat plates. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 9, 803–808.
- Zebib, A., Homsy, G.M., Meiburg, E., 1985. High Marangoni number convection in a square cavity. *Physics of Fluids* 28, 3467–3476.