

THESE

Brahim Khalil Jawad

**ECOLE DOCTORALE : EDSTIM
THESE N° 2012EMNA0010**

*Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Ecole des Mines
Sous le label de l'Université Nantes Angers Le Mans
Discipline **Biomécanique et Bio-ingénierie***

Soutenue le 19 juillet 2012

**Modélisation de
l'électrolocation pour la
bio-robotique**

DIRECTEUR DE THESE :

Boyer Frédéric, professeur, Ecole des Mines
de Nantes, Nantes, France.

CO DIRECTEUR DE THESE :

Gossiaux Pol-Bernard, professeur, Ecole des
Mines de Nantes, Nantes, France.

RAPPORTEURS DE THESE :

Baudrand Henri, professeur émérite, Ecole
nationale supérieure d'électrotechnique,
d'électronique, d'informatique, d'hydraulique
et des télécommunications, Toulouse, France.

Bideaux Eric, professeur, Institut national des
sciences appliquées de Lyon, Lyon, France.

EXAMINATEURS :

Stefanini Cesare, maître assistant, Scuola
Superiore Sant' Anna, Pise, Italie.

Viollet Stéphane, chargé de recherche, Institut
des sciences du mouvement, Marseille, France

A ma femme Hosna et à ma fille Sakina.

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mes encadrants Frédéric Boyer et Pol-Bernard Gosiaux qui m'ont fait confiance et lancé dans cette belle aventure. Je leur dois beaucoup et notamment de m'avoir communiqué le virus de la recherche. Leur vision et leur sens m'ont inspiré dans mes démarches et leur passion m'a toujours poussé à aller plus loin.

Je remercie aussi Vincent Lebastard qui a toujours été positif et toujours fait preuve d'un grand sens d'équipe. Je remercie également Stéphane Bouvier, Noël Servagent et Francesco Gomez qui ont su très tôt m'apporter un bon feed back et qui ont toujours été très accessibles et demandeurs d'une très large interaction. Je remercie Alexis Girin, Mathieu Porez, Fabien Candelier, Christine Chevallereau, Ali Amrouche, Bilal Sari, Philippe Laurent et Reda Benachenhou qui ont tous de quelque manière que ce soit apporté de bonnes choses dans cette thèse.

En plus de tous ceux de mon équipe, je tiens à remercier aussi Ruben Budelli, Angel Caputi, Leonel Gomez, Juan Ignacio Sanguinetti, Federico Pedraja qui m'ont bien accueilli dans leur très humaine faculté des sciences à Montevideo, en Uruguay, dans le cadre d'une très enrichissante collaboration.

Je remercie bien sûr tous les autres personnels chercheurs, techniciens, secrétaires et doctorants du département d'Automatique et de Productique de l'Ecole des Mines, surtout Mohamed Yagoubi, de qui j'ai appris beaucoup sur le plan personnel.

Je remercie Henri Baudrand, Eric Bideaux, Cesare Stefanini et Stéphane Viollet d'avoir gentiment accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je n'oublie pas évidemment mes soutiens de tous les jours : ma femme, mes parents, mes frères ainsi que mes amis de ma bonne Normandie natale.

Résumé

Le projet européen ANGELS (Anguilliform Robot With Electric Sense) a pour but de construire un robot anguille capable de naviguer par le sens électrique et de se scinder en plusieurs mono-agents pour des besoins d'exploration. Dans le cadre de ANGELS, mon travail de thèse est d'élaborer un modèle de perception inspiré du poisson électrique, le challenge ici consistant à faire de ce modèle un modèle de perception rapide et embarquable pour une détection en ligne par un engin sous-marin robotisé équipé de ce modèle. Le modèle de perception a été construit dans le but de permettre l'exploration d'environnements de natures physiques différentes et de géométries aux complexités variées. Le modèle de perception s'est attaché à vouloir reproduire des mesures effectuées par une géométrie réaliste de robot capteur immergé dans un milieu conducteur.

Nous avons construit deux modèles de perception opérationnels, tous deux attachés à une géométrie de capteur réaliste. Les deux modèles s'appuient sur l'intuition physique du comportement électrique simple qu'offre une géométrie cylindrique élançée dans un milieu conducteur résistif soumis à un champ électrique de basse fréquence (comme l'eau de robinet).

Ces modèles ([Gossiaux et al., 2010], [Jawad et al., 2010]) baptisés modèle poly-sphérique (PSM) et modèle des réflexions [Boyer et al., 2011] provenant de l'intuition physique et d'une méthode mathématique appropriée se calibrent une fois pour toute avec un simulateur électrique pour revêtir, *in fine*, une forme analytique. Une fois couplés aux modèles existants de réponse d'objets géométriques simples, ils permettent de faire effectuer à un prototype de robot capteur des tâches basiques de détection et d'évitement [Lebastard et al., 2010a], ce qui est à ce jour à notre connaissance une première dans l'histoire.

Désireux de lever le voile sur les raisons du bon fonctionnement de ces modèles rapides dans le cas particulier d'un capteur où de fait les parties connectrices isolantes ne perturbent pas de manière variable la mesure, nous proposons aussi une analyse numérique dimensionnelle des grandeurs électrique en jeu et de leur importance selon la part relative des connexions isolantes par rapport aux électrodes conductrices. Nous identifions par cette analyse les dimensions relatives appropriées des électrodes vis à vis des isolants propres à permettre, comme dans la géométrie cylindrique élançée de notre prototype, une utilisation des modèles rapides établis.

En parallèle de la modélisation du capteur pour lequel nous avons jusque là considéré comme scène extérieure qu'une classe limitée d'objets à réponses électriques connues par la littérature de l'électrostatique, nous proposons un formalisme générique de la réponse électrique propre à s'appliquer à une variété infinie d'objets à forme et conductivité arbitraire.

Ce formalisme a entre autres la vertu d'être paramétrique, ce qui est, comme nous le montrons, particulièrement adapté à la reconnaissance d'objets. Une approche inspirée du comportement de certains poissons électrique et utilisant ce formalisme est proposée pour retrouver les dimensions d'un objet quelconque, laquelle approche pouvant s'identifier comme une des solutions au problème inverse relatif au sens électrique.

mots clés : électrolocation, biorobotique, électrostatique.

Abstract

The goal of the European ANGELS project (Anguilliform Robot With Electric Sense) is to build an eel-like robot capable to navigate by the electric sense and to divide itself in several mono agents for exploration purposes. In the context of ANGELS, my work consists in creating a perception model inspired from the electric fish with the virtue of being fast and so, to be usable in-line.

The perception model is made for the exploration of environments of different physical natures and of geometry of different complex degrees. The perception model aims at reproducing the measurements performed by a realistic geometry of a sensor robot entirely immersed in a conductive medium.

We propose two operational models, both of them being attached to the same realistic geometry of sensor. These two models are based on the simple physical intuition of electric behaviour offered by a slender sensor of cylindrical geometry in a pure resistive medium submitted to an electric field of weak frequency (like tap water).

These models named after the poly-spherical model (PSM) ([Jawad et al., 2010],[Gossiaux et al., 2010]) and the reflexions model can be calibrated once for all with an electrical simulator to become formal analytical expressions to make, once coupled with standard objects' electrical response expressions, the prototype robot achieve some basic behaviours like obstacle avoidance and object detection [Lebastard et al., 2010a], which is at our knowledge a novelty in the history.

Wishing to lift the veil on the reasons for the good working of the rapid models in the case of a sensor for which a fortiori the insulating connexions don't perturbate variably the measurements, we propose a numerical dimensional analysis of the relevant electrical parameters and their relative orders of magnitude in function of the dimensions ratio between the electrodes and the insulating parts. We identify with this analysis the appropriate relative dimensions between the electrodes and the insulating connexions to permit, like in the case of the slender geometry of the first sensor robot prototype, the use of the well established rapid models.

In addition to the modeling of the sensor for which we at this time just have considered for exterior scene a finite class of objects with known electrical responses given by the electrostatics litterature, we propose a more general formalism of the electrical response that is suitable for an infinite number of objects belonging to a well defined class with arbitrary conductivity value and shape.

Among other aspects this formalism is parametric which is, what we show, well suited for the recognition of objects. An approach, inspired from the behaviour of certain electric fishes, that uses this formalism is proposed to recover the dimensions of an arbitrary known object. The so-called approach can be identified as one solution of the inverse problem in the perception by the electric sense.

keywords : electrolocation, biorobotics, electrostatics.

Table des matières

1	Etat de l'art des travaux sur la perception par le sens électrique	15
1.1	Le sens électrique chez les poissons	15
1.2	Les principes physiques du sens électrique	19
1.3	Les outils de la modélisation de la perception par le sens électrique	19
1.3.1	Le modèle de Rasnow	20
1.3.2	Les schémas électriques équivalents	21
1.3.3	Les méthodes numériques de type éléments finis	21
1.4	Vers un sens électrique artificiel?	22
1.4.1	Le première plateforme robotisée inspirée du sens électrique	22
1.4.2	Le projet ANGELS	23
1.4.2.1	Objectif du projet	24
1.4.2.2	Concept	24
1.4.2.3	Avantages des solutions proposées	26
2	Modélisation physique de l'électrolocation et résolution des équations associées.	29
2.1	De la formulation générale du problème aux équations de l'électrolocation	29
2.1.1	Formulation générale du problème	29
2.1.2	Equations du problème	30
2.1.3	La jauge de Coulomb	34
2.1.4	Solution des équations de Maxwell pour une source particulière	36
2.1.4.1	Cas où $r \lesssim \delta$	38
2.1.4.2	Cas où $r \gtrsim \delta$	39
2.1.5	La jauge de Coulomb étendue	40
2.1.6	Conditions limites	41
2.2	Méthode de résolution des équations de l'électrolocation	43
2.2.1	L'équation de Laplace	44
2.2.2	Résolution de l'équation de Laplace	45
2.2.2.1	Fonctions de Green	45
2.2.2.2	La méthode numérique	47
2.2.3	Approximation de la formulation intégrale	50
2.3	Bilan	55
3	Les capteurs d'électrolocation et la validation du modèle physique	57
3.1	La physique du capteur	58
3.1.1	Principe de la mesure par électrolocation	58
3.1.2	Modélisation de la perception électrique par un capteur réel de volume fini	59

3.2	Principe de la mesure par électrolocation	60
3.2.1	Du modèle physique au circuit électrique équivalent	60
3.2.2	Effets d'un courant établi dans l'eau	61
3.3	Adaptation du dispositif aux propriétés électriques de l'eau	61
3.3.1	Sensibilité à la température	62
3.3.2	Sensibilité à la fréquence	62
3.4	L'électronique	64
3.4.1	Principe de base	64
3.4.2	Signal d'émission	64
3.4.3	Electronique de réception	64
3.5	Le banc d'électrolocation	66
3.5.1	Le système robotique de déplacement du capteur	66
3.5.2	Contrôle du système de déplacement et acquisition	67
3.5.3	Les objets test	68
3.6	Résultats expérimentaux	68
3.6.1	Caractérisation du bruit électronique	68
3.6.2	Test de dérive en température de l'électronique	70
3.6.3	Mesures et validation du modèle physique	71
3.6.3.1	Détection d'une paroi de l'aquarium	71
3.6.3.2	Détection d'objet	72
3.6.3.3	Comparaison avec le modèle	75
3.6.4	Influence de la conductivité	75
3.6.5	Correction de la variation de conductivité	77
3.6.6	Influence de la salinité de l'eau	78
3.7	Bilan	79
4	Formalisme générique rapide de la réponse d'objets en champ arbitraire	81
4.1	Etat de l'art sur la réponse électrique	82
4.2	Définition de la réponse électrique: de la polarisation au moment multipolaire	84
4.2.1	La polarisation d'un milieu matériel	84
4.2.2	Calcul usuel de la réponse d'un objet polarisable	85
4.3	Formalisme générique	90
4.3.1	La formulation intégrale de Van Bladel	91
4.3.2	Le concept de faible excentricité	92
4.3.3	Choix d'une base de décomposition et écriture tensorielle de la formulation intégrale	93
4.3.4	Champ appliqué: relation entre la variation du champ appliqué et le mode de polarisation de l'objet: vers une capacité de distinction de forme?	94
4.3.4.1	Polarisation en l'absence de champ appliqué: capteur éteint.	95
4.3.4.2	Polarisation en la présence d'un champ appliqué uniforme au sein de l'objet	96
4.3.4.3	Polarisation en présence d'un champ appliqué non uniforme au sein de l'objet	98
4.3.5	Expression du noyau	101
4.3.6	Expression du potentiel total	110
4.3.7	Moment dipolaire	111

4.3.8	Comparaison avec les polarisabilités établies pour la sphère et l'ellipsoïde de faible excentricité en champ uniforme	111
4.3.8.1	La sphère	111
4.3.8.2	L'ellipsoïde	112
4.4	Bilan et perspectives	114
5	Le modèle poly-sphérique du capteur	119
5.1	Le modèle PSM	119
5.1.1	Le modèle PSM à vide	119
5.1.2	Le modèle PSM en présence d'objets	122
5.2	Calibration	123
5.2.1	Calibration du modèle PSM sur le capteur bi-polaire	124
5.2.2	Calibration du modèle PSM sur le capteur quadru-polaire	124
5.3	Modèles de perturbation d'objet	126
5.3.1	La sphère	126
5.3.2	L'ellipsoïde	128
5.3.3	Le cylindre infini	129
5.3.4	Les parois de l'aquarium	129
5.4	Comparaisons du modèle PSM avec la BEM et le banc d'essai	131
5.4.1	Conditions d'essai	131
5.4.2	Cas d'une sphère conductrice	132
5.4.3	Cas d'une ellipsoïde conductrice	134
5.4.4	Cas du cylindre infini conducteur	136
5.4.5	Cas des parois de l'aquarium	137
5.5	Bilan	140
6	Modèle de capteur pour l'électrolocation	141
6.1	Conditions limites de l'électrocinétique quasi-statique	142
6.2	La méthode des réflexions	143
6.3	Adaptation de la formulation intégrale aux nouvelles conditions limites: point de vue du capteur.	146
6.4	Calibration	146
6.5	Expression de la première émission et des deux premiers reflets.	148
6.5.1	Première émission du capteur.	148
6.5.2	Premier reflet de l'objet.	151
6.5.3	Expression du second reflet	154
6.6	Comparaison avec les valeurs numériques.	158
6.7	Bilan.	159
7	Modélisation d'un capteur de forme arbitraire	163
7.1	Répartition des charges à la surface du capteur	163
7.2	Formule exacte du courant total	167
7.2.1	Sans objet	167
7.2.2	Avec objet	169
7.3	Réduction de modèle: prise en charge de "l'interaction" avec des larges faces isolantes	171
7.3.1	Rapports dimensionnels de réduction	171
7.3.2	"Interaction" conducteurs/conducteurs	172

7.3.3	Rôle des faces isolantes	174
7.4	Evolution du courant sur un capteur présentant de larges faces isolantes en présence d'objet	175
7.4.1	La scène test	175
7.5	Comparaison avec le modèle poly-sphérique	176
7.6	Bilan et perspectives	178
Conclusion		178
Bibliographie		188

INTRODUCTION

Dans les années 1950, Lissmann fut le premier à postuler qu'il existait des poissons dits à " champs électriques faibles" qui émettaient un champ électrique et qui disposaient de récepteurs propres à ce champ [Lissmann and Machin, 1958]. Lissmann mit en évidence l'existence d'une certaine famille de récepteurs à champ électrique faible, *les mormyromastes* et leur relation dans la perception de l'environnement. Suite à la découverte de Lissmann, il était devenu clair que le poisson électrique percevait son environnement par un sens qui ne nous était alors jusque là pas bien connu, *le sens électrique*. Par la suite des questions apparaissaient naturellement dans l'esprit des scientifiques. Il fallait répondre aux questions suivantes : comment le champ électrique pouvait donner au poisson une sensation de distance aux objets qui l'entourent ? A quelles formes de stimuli le poisson électrique associait-il ses proies, ses obstacles, ou ses congénères ? Des biologistes se sont lancés dans la recherche de réponse à ces questions, lançant avec eux la recherche sur *l'électrolocation*, ou, capacité de se repérer par le sens électrique. En 1996, Rasnow et Assad [Rasnow, 1996] ont construit un modèle physique d'image électrique d'une sphère sur la peau d'un poisson à champs électriques faibles. Ils donnèrent les premiers une relation entre la dimension de la sphère, la distance et la forme du signal électrique reçu par le poisson. De nombreuses études suivirent, surtout de la part des biologistes ([Rasnow and Bower, 1996], [Emde, 1999],[MacIver et al., 2001], [Nelson et al., 2002], [Babineau et al., 2006], [Nelson and MacIver, 2006], [Stoddard et al., 2006], [Longtin, 2007]...). Avec le développement rapide des machines de calculs et la mise en place de code calculant l'intensité du courant en chaque point d'un poisson virtuel, Mc Iver et Al ont exploré la possibilité de représenter l'évolution de l'image électrique sur la peau du poisson pendant la capture d'une proie [MacIver et al., 2001]. D'autres biologistes ([Emde et al., 1998],[Caputi et al., 1998]) se sont intéressés à la relation existant entre la nature du signal et la nature de l'objet.

Depuis ces derniers temps, parallèlement aux avancées remarquables de nos confrères biologistes, une recherche à caractère multi-disciplinaire se porte en masse vers le bio-mimétisme. C'est dans ce nouveau contexte que des équipes de chercheurs se sont formées pour tester leur compréhension du vivant sur des robots. Mc Iver et Al ont ainsi dans les années 2000 été les premiers à créer une perception électrique artificielle inspirée du poisson électrique ([MacIver and Solberg, 2001],[Solberg et al., 2007]). L'algorithme mis au point pour la détection de l'objet était très consommateur en temps de calcul, néanmoins ils ont été les premiers à mettre au point un dispositif de détection uniquement fondé sur les principes de l'électrolocation. Plus récemment est né un projet à grande ampleur : ANGELS (Anguilliform Robot With Electric Sense). ANGELS est un projet européen qui rassemble pas moins de huit partenaires internationaux autour d'un même objectif : la réalisation d'un robot anguille autonome capable de se scinder en plusieurs agents pour des besoins d'exploration et de reconnaissance. Toute navigation ou stratégie de reconnaissance étant basé sur l'électrolocation.

Ma thèse s'inscrit dans ce projet et consiste à élaborer un modèle de perception composé, d'un modèle de capteur et d'un modèle de réponse électrique d'objet, ayant comme principale vertu d'être rapide et suffisamment générique pour détecter en ligne des objets et éviter des obstacles de natures électrique et géométrique variées. Ce modèle doit permettre au robot ANGELS à terme de naviguer de façon autonome dans des environnements de plus en plus contraignants.

La thèse comprend sept chapitres. Dans le premier nous passons en revue toutes les principales connaissances que nous avons du sens électrique, plus particulièrement de l'électrolocation, des découvertes réalisées par les biologistes à la création du projet européen ANGELS en passant par l'explication des principes physiques et des outils et modèles jusque-là utilisés.

Le second chapitre est une définition du cadre physique et du choix d'un formalisme de départ, basé sur la formulation de Green des équations de Maxwell. C'est à l'occasion de ce chapitre que nous établirons les équations de l'électrolocation, régissant le fonctionnement de nos capteurs. Nous montrons comment à partir du choix d'une géométrie de capteur idéal et d'hypothèses physiques raisonnables nous pouvons capturer simplement et directement une sphère de Rasnow [Rasnow, 1996]. Ce chapitre est une sensibilisation aux hypothèses physiques pouvant conduire assez rapidement à un comportement électrique simple d'un capteur. On y trouve en quelque sorte une inspiration pour déduire de la formulation de départ un modèle rapide pour un capteur de géométrie plus réaliste.

Dans le troisième chapitre, nous présentons le banc d'électrolocation. Nous y montrons les principes de mesure, ainsi que les réglages adéquats à effectuer pour obtenir une perception électrique dans un milieu conducteur. Ce sera notamment l'occasion de nous sensibiliser aux grandeurs physiques du sens électrique.

Dans le quatrième chapitre, nous nous plaçons du point de vue de l'objet et présentons un formalisme unifié pour traiter en une fois d'une grande variété de formes et de conductivités d'objets. Ce formalisme lorsqu'il est réduit convenablement peut retrouver les modèles standards de la réponse d'objet, comme la sphère ou l'ellipsoïde. Du fait aussi que ce formalisme est paramétrique, et c'est sa principale vertu, il convient pleinement à l'électrolocation et à la reconnaissance d'objets.

Dans le cinquième chapitre nous établissons notre premier modèle de perception appliqué à un capteur de géométrie réaliste. Ce modèle appelé modèle poly-sphérique (PSM) utilise les hypothèses physiques dégagées par le chapitre II pour prédire rapidement la perturbation électrique d'objets. Nous verrons qu'il convient bien à la modélisation d'un capteur élané à géométrie cylindrique comme présenté dans le chapitre III. Ce modèle est testé avec succès sur la perception d'objets simples dont la réponse électrique est connue : murs, sphère, ellipsoïde...[Jawad et al., 2010]. Couplé avec un filtre de Kalman, il peut aussi donner lieu à une détection précise d'objets simples [Lebastard et al., 2010a].

Dans le sixième chapitre nous donnerons une justification plus mathématique de notre intuition du comportement de type poly-sphérique observé pour un capteur de forme élanée à géométrie cylindrique et enrichirons ce modèle qualifié de "axial" d'une perception "latérale" par un modèle de prédiction de courants latéraux obtenus par mesure sur des anneaux conducteurs segmentés. Cette modélisation que l'on propose, pour une perception axiale et latérale, est basée sur la méthode des réflexions et une méthode de réduction appropriée de la formulation intégrale qui transporte les équations de Maxwell aux frontières du capteur et de l'objet. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans une revue de premier plan [Boyer et al., 2011].

Dans le septième et dernier chapitre nous nous intéressons un peu plus fondamentalement

à rechercher les conditions possibles d'une réduction de modèle, partant d'une géométrie de capteur présentant des surfaces isolantes et conductrices à dimensions et formes arbitraire. Nous mettons en avant les grandeurs physiques clés et précisons à l'aide d'une analyse dimensionnelle les rapports de taille adéquats entre les surfaces conductrices et isolantes susceptibles de permettre l'utilisation des modèles rapides déjà établis dans le cas de notre prototype de capteur de forme élancée à géométrie cylindrique.

Nous concluons enfin ce rapport de thèse par un bilan de nos travaux et par les perspectives que nous voyons suite à la mise au point de nos modèles rapides de perception électrique. Nous suggérons par la même occasion, en nous appuyant sur nos travaux et notamment sur notre formalisme générique de la réponse établi au chapitre IV, une solution au problème inverse relatif à l'électrolocation et donnons une approche concrète directement inspirée du comportement des poissons pour extraire les dimensions d'un objet inconnu de forme arbitraire à partir d'un champ appliqué bien déterminé.

Chapitre 1

Etat de l'art des travaux sur la perception par le sens électrique

Nous exposons dans ce chapitre des éléments de compréhension du sens électrique chez le poisson en croisant les points de vue des biologistes et des physiciens. Nous passons en revue d'abord les fruits principaux issus des travaux réalisés par les biologistes au sujet du sens électrique, de la description fonctionnelle de l'appareil sensoriel des poissons au mode opératoire leur permettant de détecter un objet quelque soit sa forme et sa nature électrique. Nous nous attardons en particulier sur le principe par lequel le poisson électrique ressent par des champs électriques les objets. Nous nous penchons dès lors vers l'examen des grandeurs physiques en jeu et présentons les modèles physique et outils de référence qu'ont utilisés les biologistes pour reproduire le sens électrique. Nous parlons enfin des projets passés et actuels de reproduction artificielle du sens électrique, plus précisément de l'électrolocation, depuis la première plateforme robotisée américaine jusqu'au projet européen ANGELS dans le contexte duquel ce travail de thèse a été effectué.

1.1 Le sens électrique chez les poissons

De manière globale, l'appareil sensoriel électrique se compose chez le poisson dit à *champ électrique faible* d'un organe électrique de décharge, appelé EOD et d'organes électro-récepteurs. L'EOD est composé de cellules musculaires modifiées appelées les électrocytes (fig. 1.1), qui sont en forme de disque et qui sont capables de générer des potentiels d'actions. L'emplacement de l'EOD est variable suivant les espèces. Chez les mormyridés adultes par exemple, l'EOD est compact et localisé au niveau de sa queue. Chez les gymnotidés, par contre, l'EOD s'étend de la queue jusqu'au niveau des nageoires pectorales. Les champs électriques émis par l'EOD sont de nature dipolaire et s'orientent le plus souvent horizontalement le long de leur corps (il peut arriver toutefois que les émissions soient orientées verticalement). L'EOD consiste en un empilement ordonné de cellules individuelles, les dites électrocytes, qui sont chacune innervées par un neurone dit "électromoteur". En se chargeant d'abord individuellement, en parallèle, les électrocytes additionnent ensuite leurs tensions lors de la décharge électrique du poisson, un peu à la manière d'un générateur de Marx (fig. 1.2).

Les récepteurs propres au sens électrique sont quant à eux distribués sur presque toute la peau avec une grande densité au niveau de la tête ou *fovea*. Les cellules de la réception sensorielle électrique forment des organes encapsulés localisés juste sous l'épiderme et com-

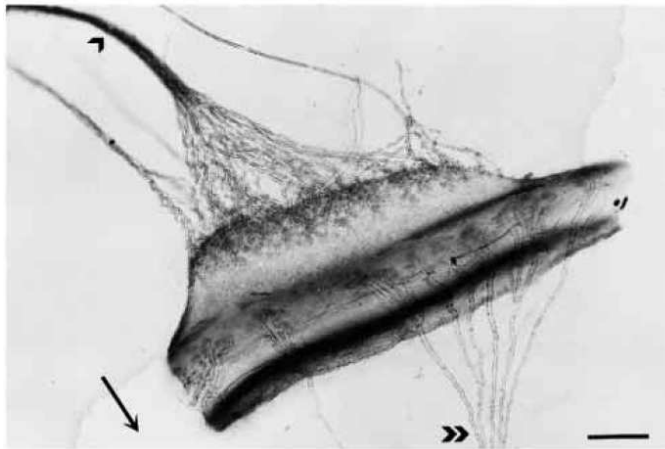


FIGURE 1.1 – Une cellule composant l'organe électrique de décharge. Les têtes de flèche indiquent les innervations de la cellule. La flèche simple pointe vers la partie rostrale de la cellule. La photo est tirée de [Caputi, 1999].

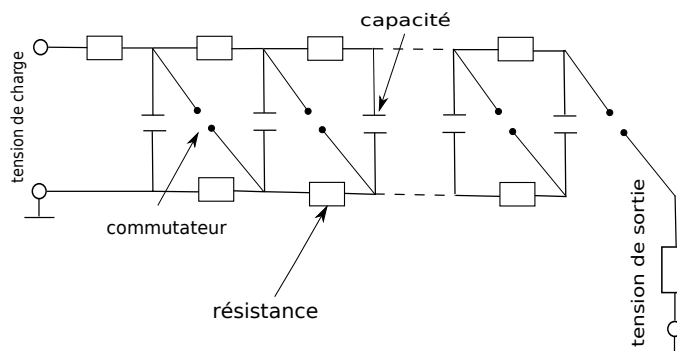


FIGURE 1.2 – Suivant le physicien Erwin Marx il est possible de générer une haute-tension en chargeant des condensateurs (commutateurs ouverts) en parallèle et en les déchargeant en série (commutateurs fermés).

muniquent avec l'extérieur par des canaux remplis d'un substrat muqueux et de paquets de cellules épithéliales. On distingue classiquement deux classes d'organes électro-recepteurs (fig. 1.3) : les premiers sont de type *ampullaire*, les seconds de type *tubéreux*. Les organes ampullaires sont sensibles aux champs électriques continus et alternatifs à basse fréquence. On les trouve notamment chez les requins. Ils leur servent à s'orienter suivant le champ magnétique terrestre. En effet ces récepteurs contiennent des charges libres mis en mouvement par le requin qui, soumis à la force de Lorentz, produisent un courant mesurable en particulier lorsque le requin voyage perpendiculairement au champ magnétique terrestre. Le sens électromagnétique offre ainsi une boussole prodigieuse à certains types de poissons, leur procurant une capacité migratoire sans doute essentielle dans le bon fonctionnement de leur reproduction. Le fait aussi que les organes ampullaires soient sensibles aux champs électrique de basse fréquence permettrait aussi selon les biologistes de communiquer avec leurs congénères. C'est ce que rapportent notamment Heiligenberg et Metzner en 1991 [Metzner and Heiligenberg, 1991].

Les organes tubéreux sont quant à eux sensibles aux fréquences des organes électriques de décharge, c'est à dire au champ électrique émis par le poisson lui-même. Les tubéreux sont aussi sensibles à des fréquences voisines de leur propre EOD afin de reconnaître la signature d'un partenaire mâle ou femelle.

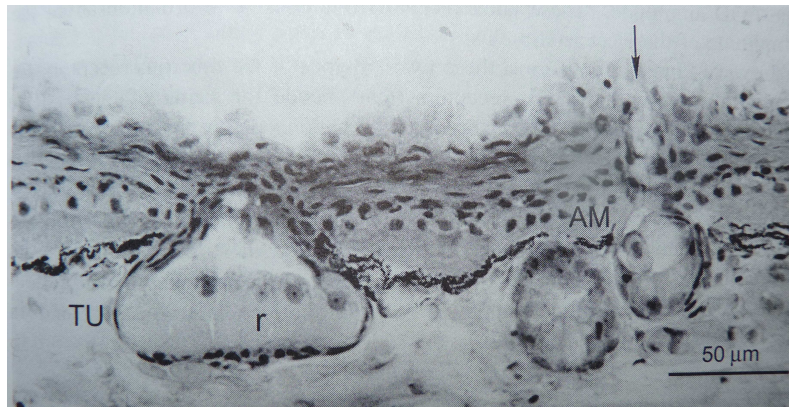


FIGURE 1.3 – Un cliché pris à l'échelle micro-métrique tiré de [Bullock and Hopkins, 2005] montre la forme des deux types de récepteurs composants les organes électro-sensoriels. A gauche, désigné par les lettres *TU* nous avons un exemple de récepteur dit de type *tubéreux*. A droite, un récepteur de type *ampullaire* est représenté et désigné par les lettres *AM*. On voit en outre que ce dernier récepteur communique avec l'extérieur via un long et large canal relativement à sa taille pointé ici par la flèche noire.

Ces deux types d'organes de réception tout comme les EOD se divisent également en deux grandes catégories relativement à la nature et fréquence des signaux émis et reçus. La première catégorie est relative à des signaux de forme quasi-périodique de forme sinusoïdale. Chez les mormyridés, les récepteurs appartenant à cette catégorie s'appellent *les mormyromastes*. Ces derniers codent l'amplitude du signal par un nombre de décharges électriques reçus dans le temps. La seconde catégorie désigne des signaux de nature impulsionnelle. Les récepteurs chez ces même mormyridés s'appellent les *Knollenorgans*. Ils seraient selon les biologistes capables d'informer le poisson sur la phase du signal reçu provenant de l'extérieur, ou sur ce que l'on appelle plus communément le décalage temporel du nouveau stimulus électrique. Si habituellement ce récepteur délivre une unique impulsion en phase avec l'émission de l'organe de décharge, un décalage temporel serait associé à l'apparition d'un objet extérieur de nature capacitive comme les micro-organismes servant de proie aux poissons possédant ce type de récepteurs (fig. 1.4).

Ces récepteurs distribués de manière quasi uniforme sur une bonne partie de la peau du poisson offrent la possibilité de former une sorte d'image électrique à la manière d'une caméra visuelle. En effet, en présence d'un objet, l'activité électrique à l'endroit de la projection de l'objet se modifie sensiblement et l'on peut mesurer une variation locale du signal électrique par rapport au signal dit *basal* enregistré dans la situation où le poisson se trouve éloigné de tout objet extérieur. Les biologistes se sont intéressés aux caractéristiques de l'étendue de cette variation locale du potentiel, que l'on a désignée comme définissant *l'image électrique* pour le poisson (fig. 1.5). Ils ont identifié deux paramètres clés de cette image, à savoir l'amplitude maximum du potentiel relevé à l'endroit de la tâche et la pente maximum mesuré sur le profil de potentiel à l'endroit de la tâche comme participant par leur

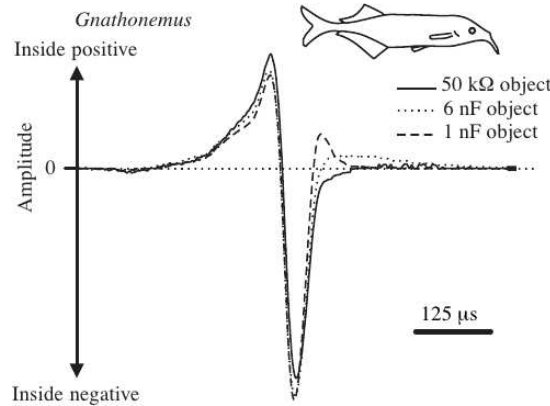


FIGURE 1.4 – Un schéma issu de [Emde, 1999] représentant la distortion du signal émis par un type de poisson électrique, le *Gnathonemus Petersii* en présence d'objets capacitifs. Le degré de distortion allant croissant avec la capacitance de l'objet. En trait continu, on n'observe aucune distortion, le signal demeure inchangé par rapport à une situation sans objet. En trait pointillés, une distortion apparaît lorsqu'un objet avec une capacitance de 1 nF approche du poisson. Cette distortion perdure considérablement quand un objet est introduit avec une plus grande capacitance de 6 fois la première, ce qui est représenté par le nouveau profil observé en trait discontinu.

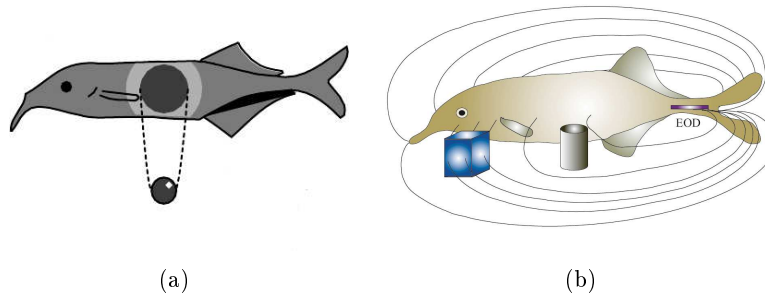


FIGURE 1.5 – a) Un poisson électrique est représenté avec une *tâche électrique* sur sa peau [Emde et al., 1998]. Celle-ci provient de la présence de l'objet qui a localement en l'endroit de sa projection sur la peau fait varier la valeur du potentiel électrique. Cette tâche est assimilée à *l'image électrique* du poisson par les informations qu'elle est susceptible de contenir au sujet de la présence de l'objet. b) Le poisson électrique ressent sur sa peau la variation du champ électrique qu'il a lui-même émis lorsque à proximité dans sa bulle de perception se trouve un objet. Ici nous avons deux types d'objets : un objet isolant (le cylindre) et un objet conducteur (le cube). Le premier objet est ressenti localement comme une baisse brutale du champ habituellement projeté sur la peau tandis que le second renforce le champ électrique à l'endroit de sa projection sur la peau.

rapport *amplitude maximum/pente maximum* à une grandeur exploitable pour estimer la distance du poisson à l'objet indépendamment de la taille et de la forme de celui-ci. (fig. 1.6) Nous faisons remarquer ici que même si plusieurs études semblent attester que les poissons réalisent des mesures en potentiels et non en courant ([Bennett, 1971], [Migliaro et al., 2005]), il est tout à fait équivalent du point de vue physique de raisonner avec les

courants pour analyser la forme de l'image électrique. Toutefois afin de rester en cohérence avec la réalité du poisson électrique, nous ferons d'avantage référence à des mesures en potentiel qu'à des mesures en courant dans la suite de ce chapitre.

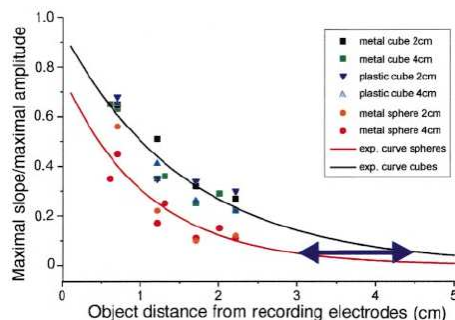


FIGURE 1.6 – Le rapport de l'amplitude maximum par la pente maximum de l'image électrique en fonction de la distance à l'objet pour deux familles d'objets : la première famille est constituée de sphères de tailles différentes et la deuxième famille est constituée de cubes de tailles différentes. On voit que les objets cube et sphère sont bien situés à une même distance indépendamment de leur taille.

1.2 Les principes physiques du sens électrique

Du point de vue du physicien cette fois on peut donner quelques éléments simples pour comprendre la raison de la variation locale du potentiel à l'endroit de la zone définie comme l'image électrique du poisson. Considérons un poisson électrique. En l'absence d'objet, le poisson mesure en chacun de ses récepteurs un potentiel provenant de la décharge de son propre EOD. Un champ électrique est créé en permanence que l'on peut matérialiser par des lignes courbes perpendiculaires par définition à toutes les équipotentiels existant autour du poisson. Lorsque le poisson est en présence d'un objet purement ohmique, c'est à dire se comportant électriquement comme une résistance, ou un fil métallique, c'est à dire comme un pur conducteur, le champ électrique juste au dessus de la zone de projection de l'objet sur la peau, est diminué dans le premier cas ou renforcé dans le second cas (fig. 1.5b).

1.3 Les outils de la modélisation de la perception par le sens électrique

L'image électrique a revêtu une grande importance aux yeux des biologistes, tant du point de vue des causes extérieures de sa formation que du traitement nerveux des informations qu'elle contient. En témoigne pour le premier point l'article [Emde et al., 1998] déjà cité dans la section précédente, où les auteurs ont proposé des indices de perception, fonction de paramètres clés de l'image que le poisson pourrait utiliser pour détecter un objet indépendamment de sa taille et sa forme. De tels indices ont pu être élaborés grâce à des outils de modélisation électrique dont nous faisons ici le bref recensement.

1.3.1 Le modèle de Rasnow

Le premier à bien modéliser l'image électrique fut Brian Rasnow [Rasnow, 1996]. Ce dernier a introduit un acquis de la physique pour comprendre et expliquer l'existence de cette image au voisinage de l'objet. En effet il est connu et démontré en physique qu'une sphère en présence d'un champ électrique $\mathbf{E}_0$ induit une perturbation $\delta\phi$ dans son voisinage, provoquant ainsi une variation sensible du potentiel électrique [Jackson, 1962], ce qui est précisément ce que l'on observe sur la peau du poisson à l'endroit de la formation de l'image. Rasnow dans son article [Rasnow, 1996] a utilisé une expression simplifiée du potentiel de perturbation $\delta\phi$, mais qui est suffisante pour comprendre quels sont les paramètres physiques et mathématiques responsables de la dite perturbation :

$$\delta\phi(r) = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{-\gamma_1 + \gamma_2 + i\omega(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2\gamma_1 + \gamma_2 + i\omega(2\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad (1.1)$$

Où $\mathbf{E}_0$ est le champ appliqué au sein de la sphère, $\mathbf{r}$ est le vecteur position relativement au centre de la sphère du point où on évalue la perturbation, a est le rayon de la sphère, γ_1 et γ_2 sont les conductivités de l'eau et de la sphère, ϵ_1 et ϵ_2 sont les permittivités de l'eau et de la sphère et ω est la pulsation du champ appliqué. Le champ appliqué est supposé uniforme dans le domaine de l'objet, ce qui est une hypothèse raisonnable compte tenu de la relative petitesse de la sphère vis à vis des variations spatiales du champ électrique. On note que le sens électrique est une modalité de perception qui est sensible au volume de l'objet, du fait de l'existence du terme a^3 , que ce sens n'est possible que si l'objet est suffisamment contrasté par rapport au milieu environnant, i.e. que les conductivités et/ou les permittivités de l'objet du milieu environnant soient suffisamment différentes. Le sens électrique apparaît aussi être un sens de courte portée du fait d'une décroissance en $1/r^2$. On retrouve enfin dans (1.1) la fameuse ambiguïté du sens électrique, traduisant le fait qu'un objet de grande taille situé assez loin donne la même perturbation qu'un objet assez petit situé assez près.

Cette relation nous permet aussi de distinguer deux régimes, le régime dit *ohmique* ou *résistif* et le régime dit *capacitif*. Ces régimes sont définis mathématiquement par rapport au poids de la partie imaginaire de la perturbation $\delta\phi$ par rapport à sa partie réelle. En effet, pour comprendre, considérons l'expression du potentiel basal ϕ_0 , généré par l'organe de décharge du poisson en l'absence d'objet. Il peut s'écrire dans le cas d'une émission de forme sinusoïdale, comme tel qu'on le trouve dans [Rasnow, 1996] :

$$\phi_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad (1.2)$$

où t est la variable de temps. On voit alors que si la composante imaginaire n'est pas négligeable devant la partie réelle de la perturbation $\delta\phi$ (1.1), le potentiel total après perturbation $\phi_0 + \delta\phi$ varie, en amplitude mais aussi en phase par rapport à ϕ_0 , donnant lieu à ce que les biologistes ont observé chez les poissons, à savoir une distortion du potentiel basal (fig. 1.4).

Si le modèle de Rasnow donne une entière satisfaction pour la connaissance de la perturbation, il nécessite néanmoins une bonne connaissance du potentiel basal, qui ne peut être recherché aisément par des relations analytiques, étant donné que son expression dépend de la forme complexe du poisson.

1.3.2 Les schémas électriques équivalents

Si [Rasnow, 1996] rend compte du principe sur un objet isolé, pour modéliser la scène dans son intégralité, depuis l'émission jusqu'à la perturbation par les objets, des biologistes [Caputi et al., 1998] utilisent comme modèle d'objet perturbatif celui du dipôle électrique. Sur cette base, ils résolvent les équations de l'électrocinétique en assimilant la scène à un réseau de résistances toutes connectées les unes aux autres, chacune étant soumise à une certaine tension et laissant traverser un certain courant (fig. 1.7). Cette simple modélisation

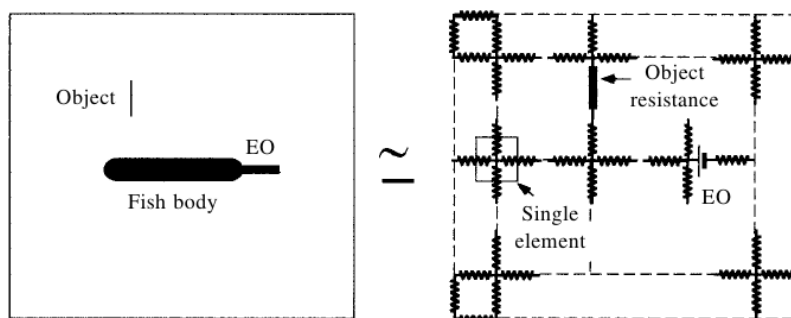


FIGURE 1.7 – A gauche : la scène d'électrolocation composée d'un avatar de poisson et d'un dipôle électrique représentant l'objet. A droite : cette scène est modélisée par un réseau de résistances connectées entre elles, soumises chacune à une certaine tension et laissant traverser un certain courant.

(à paramètres concentrés) leur a permis de calculer la repartition de la densité de courant sur un avatar numérique du poisson, autrement dit son image électrique (voir fig (1.8)). Si cette méthode offre une bonne approximation de la valeur du potentiel basal et la

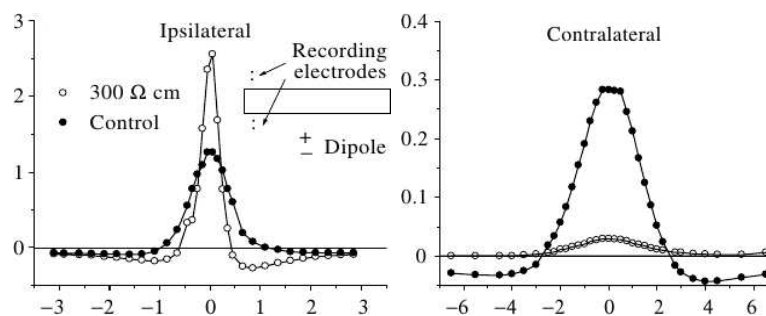


FIGURE 1.8 – L'image électrique de la perturbation induite par le dipôle assimilé comme l'objet. A gauche : sur le flanc du poisson faisant face à l'objet. A droite : sur le flanc opposé du poisson.

modélisation qualitative de l'image électrique, elle reste inféodée aux scènes 2 D.

1.3.3 Les méthodes numériques de type éléments finis

Il existe aujourd'hui des méthodes numériques 3D très précises pour modéliser le potentiel basal sur n'importe quelle morphologie de poisson. Toutes basées sur le maillage de

la scène en éléments finis, on distingue communément deux types de méthodes, la FEM ou *Finite Element Method* et la BEM ou *Boundary Element Method*. La première consiste en la résolution d'une équation élément par élément dans tout le volume de la scène. Cette méthode est précise mais très coûteuse en raison du nombre conséquent d'éléments notamment pour bien prendre en compte les éléments conducteurs composant l'épaisseur de la peau, lesquels jouent un rôle crucial dans la modification du potentiel [Babineau et al., 2006]. La BEM au contraire, ne requiert pas de mailler toute la scène, mais seulement son interface avec le poisson électrique, ce qui réduit considérablement la complexité de la méthode (en particulier pour des géométries réalistes et instationnaires comme c'est le cas des poissons). La seule contrainte réside dans la difficulté relativement à l'autre méthode à être implantée numériquement. Cette méthode a été utilisée avec succès par les biologistes et reste à nos jours l'outil numérique de référence ([Assad, 1997], [Rother et al., 2003]). On peut voir sur la figure 1.9 un résultat donné par la BEM pour calculer l'image électrique sur la peau d'un poisson.

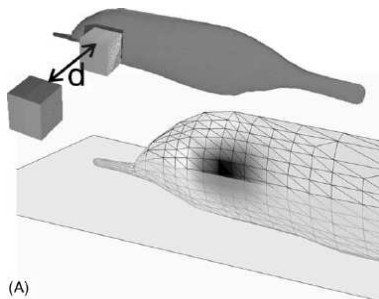


FIGURE 1.9 – Un exemple de calcul d'image électrique avec la BEM venant de [Rother et al., 2003]. Ici on calcule sur un avatar numérique du *Gnathonemus Petersii* le potentiel total en présence d'un cube.

1.4 Vers un sens électrique artificiel ?

1.4.1 Le première plateforme robotisée inspirée du sens électrique

Les années 2000 virent émerger dans le contexte d'une nouvelle discipline, une approche pour concevoir une nouvelle génération de robots inspirés du vivant : la biorobotique. C'est dans ce contexte que Mc Iver et Al [Solberg et al., 2007] ont tenté de reproduire le sens électrique sur une plateforme robotisée (fig. 1.10). Si l'équipe de Mc Iver est la première à avoir mis au point un système artificiel d'électrolocation capable de situer précisément au mm près, la position des objets, il n'en demeure pas moins de sévères limitations et incompatibilités avec un système embarquable. En effet, la détection repose d'abord sur l'utilisation d'un moyen statistique, le filtre à particules, qui demande un temps de calcul considérable et une initialisation adéquate et spécifique de la scène qu'explore le robot. Ensuite, le système de détection est ici dépourvu de corps et n'est en contact direct avec l'eau que par l'intermédiaire d'électrodes ponctuelles, ce qui le rend inopérant pour une électrolocation embarquée, qui nécessiterait l'emploi d'un robot de volume non négligeable et totalement immergé.

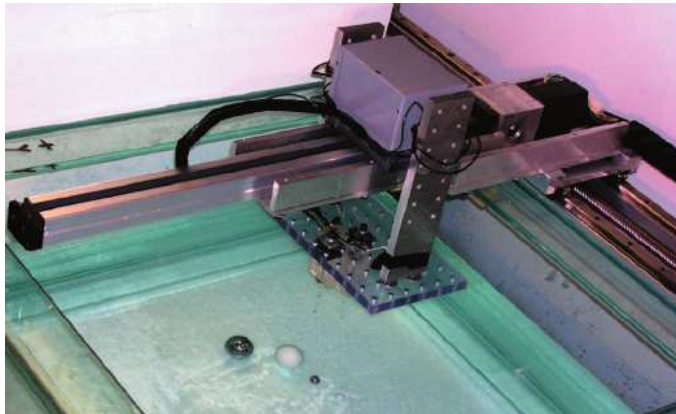


FIGURE 1.10 – Un cliché du robot cartésien de McIver. Le robot est muni de tiges aux bouts desquelles se trouvent deux paires d'électrodes ; l'une est constitué d'un dipôle actif émetteur en potentiel et l'autre, d'un dipôle passif récepteur en potentiel. Le robot survole un plan d'eau dans lequel sont baignées quelques sphères de natures et tailles variées. Le dipôle actif émet un champ appliqué à la manière du poisson et le dipôle passif mesure la perturbation induite par l'existence de sphères dans l'eau.

1.4.2 Le projet ANGELS

Un nouveau projet aujourd'hui dénommé ANGELS succède aux travaux de Mc Iver et Al [Solberg et al., 2007] pour accomplir un objectif ambitieux, celui d'associer le mouvement d'un robot poisson à une perception inspirée du sens électrique. ANGELS est un projet européen qui rassemble pas moins de 8 partenaires internationaux experts en robotique, physique, électronique, mécatronique, biologie et automatique. Plus précisément le projet a pour but de construire un robot poisson capable d'une nage anguilliforme à la fois énergétiquement efficace et manoeuvrante et de le doter d'une perception électrique artificielle par la mise en place de capteurs réalisant des émetteurs et des récepteurs en courant ou potentiel sur tout le corps. Le robot serait aussi capable de se détacher en plusieurs mono robots pour des besoins d'exploration dans des milieux confinés difficiles d'accès pour nos robots "traditionnels" (fig. 1.4.2).

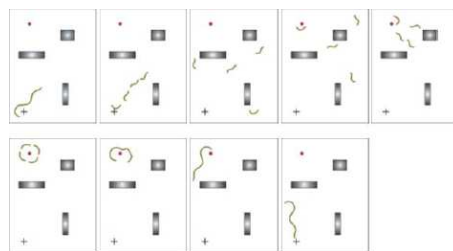


FIGURE 1.11 – Une image représentant les mono-agents du robot ANGELS dans une phase d'exploration. Les robots d'abord attachés se détachent dans le milieu et échangent des informations pour détecter et reconnaître l'objet.

1.4.2.1 Objectif du projet

D'une manière plus générale, l'objectif du projet ANGELS est d'étudier les interactions entre la morphologie du corps et le comportement en concevant et en construisant un prototype de système robotique reconfigurable pratiquant la nage anguilliforme. Le robot composé d'un certain nombre de modules autonomes sera capable de se détacher et de se rattacher suivant les besoins d'explorations. En mode connecté, le robot fonctionne comme une unique entité et pourra nager à la manière des anguilles. Une fois détaché, les différents modules pourront réaliser une exploration dans des endroits difficiles d'accès où le robot quand il est attaché, ne peut s'engager. Ces deux états morphologiques utiliseront le sens électrique bio-inspiré des poissons, à la fois pour la reconnaissance d'objets et l'évitement d'obstacle, ainsi que pour la communication entre les modules. Chacun des deux états morphologiques va de plus bénéficier d'une capacité à se reconfigurer électriquement (fig. 1.4.2.1) de manière à explorer et exploiter les différentes stratégies de nage et d'électrolocation employées par les gymnotidés et les mormyridés. Un tel système robotique a pour but d'être utilisé pour la reconnaissance d'objets dans des environnements où la vision et les moyens classiques de locomotion comme les propellers sont inopérants.

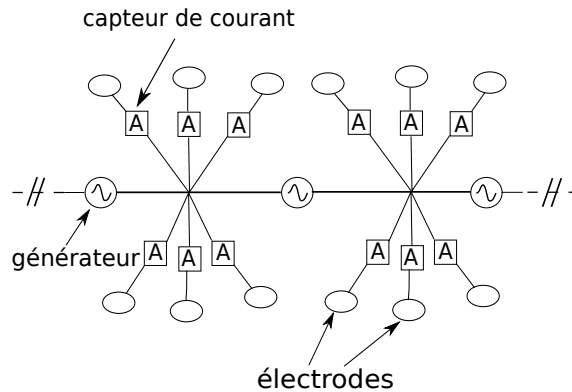


FIGURE 1.12 – Le principe de reconfiguration électrique est le suivant : les frontières du robot sont recouvertes par une rangée d'électrodes en contact avec le milieu conducteur extérieur. Chaque électrode est équipée d'un capteur de courant qui la traverse. Alors, suivant la connectivité, plusieurs populations d'électrodes peuvent être définies à un certain potentiel arbitraire fixe, jouant le rôle d'émetteurs, tandis que les autres seront définies comme récepteurs. Pour ces derniers, les courants détectés seront mesurés et enregistrés. La figure ci-dessus illustre ce principe suivant une connectivité périodique. Suivant les tensions imposées par les générateurs, ce dispositif modulable permet de copier les diverses morphologies de connectivité électrique rencontrées dans la nature comme celle des mormyridés dans lesquels la répartition est bipolaire ou celle des gymnotidés dans lesquels les connectivités électriques sont plus distribuées.

1.4.2.2 Concept

Le sens électrique permet une perception dans toutes les directions, définissant ainsi une bulle de perception aussi large que la longueur du robot. Les poissons électriques sont un bon paradigme pour l'étude des interactions entre morphologie, perception et la locomotion sujet d'intenses études en robotique. En effet :

- pendant la nage, la surface active du corps joue le rôle d’une rétine électrique à travers laquelle le monde est perçu.
- les poissons changent la courbure de leur corps pour orienter à leur volonté le champ électrique et percevoir les détails de leur environnement.
- différentes espèces présentent une large variété d’organisations spatiales de leurs émetteurs et récepteurs électriques sur leur corps ainsi qu’une variété de fréquences et de formes (impulsions ou ondes sinusoïdales) des signaux électriques émis.
- le signal électrique sert à la fois pour l’électrollocation et la communication entre les individus.
- le champ électrique crée une prolongation immatérielle du corps percevant son environnement.

Ce dernier point introduit un nouveau concept selon lequel ”le corps électrique” donne au champ électrique une sorte de matérialité, comme ceci a été prédit par les physiciens qui explorent la théorie des champs. Au delà de son aspect original, ce prototype robotique agira comme un paradigme théorique et une plateforme expérimentale pour étudier les interactions entre la morphologie, la perception et la locomotion à travers toutes les possibilités offertes par :

1. de fortes interactions entre la perception et l’action, où l’action consiste en :
 - (a) des champs électriques émis (fréquence des impulsions dans le cas de signaux émis de manière impulsionnelle).
 - (b) des courbures du corps.
 - (c) l’exploration des mouvements de nage .
 2. une reconfiguration morphologique du système robotique, où la reconfiguration peut être de deux types :
 - (a) un changement du rôle des électrodes, en permutant les récepteurs avec les émetteurs et en transformant les récepteurs et les émetteurs en émetteurs et récepteurs respectivement. Une telle reconfiguration permet de contrôler effectivement la direction du champ électrique le long du corps.
 - (b) un rattachement ou un détachement en sous-agents, de manière à permuter entre une morphologie dite ”connectée” (un seul robot) et une morphologie ”déconnectée” (groupe de plus petits robots).
 3. une perception et une communication ”muti-agents”, où la possibilité de permuter entre une morphologie connectée et déconnectée sera utile à :
 - (a) améliorer la perception. Le choix d’un groupe de plus petits robots distribués peut être avantageusement utilisé pour augmenter la portée de la perception par le biais d’une communication ”multi-agents”, renforcer les champs électriques en des points spécifiques (en donnant des directions multiples au champ électrique et révéler des détails qui auraient pu échapper à la perception d’un simple champ
-

dipolaire. Une morphologie déconnectée présente également l'intérêt d'une délocalisation de l'émetteur et des récepteurs, ce qui ouvre la voie à l'utilisation du sens passif doté de propriétés intéressantes.

- (b) améliorer la locomotion. Selon la situation, il peut s'avérer avantageux de nager avec un robot complètement assemblé (pour minimiser la consommation d'énergie) ou avec un groupe de robots détachés (pour optimiser l'exploration et pour manoeuvrer dans des espaces confinés).
- (c) améliorer la connaissance. En implantant des comportements artificiels directement inspirés du poisson électrique, en particulier les règles sociales desquelles peuvent émerger une perception de groupe.

L'objectif final du projet proposé à son commencement a été de faire accomplir des tâches bien spécifiques au robot selon le scénario défini à la figure 1.4.2 et qui se détaille comme suit : un objet "cible" est placé dans une piscine parmi d'autres objets. Le robot anguilliforme est lâché dans l'eau. Il se divise en quatre plus petits robots qui nagent suivant différentes directions, de manière aléatoire. Une fois que l'un des petits robots a trouvé l'objet cible, il émet un signal de communication que les autres petits robots peuvent suivre pour retrouver la position du robot émetteur. Alors que les robots se réunissent autour de l'objet cible, ils peuvent décider d'une configuration pour émettre un champ électrique suivant différentes directions et obtenir une image détaillée de l'objet. Plus concrètement, les robots pourront combiner le sens électrique, la nage, les déformations de leur corps et des reconfigurations électriques et morphologiques (selon par exemple la taille de l'objet). Lorsque les robots ont achevé leur tâche d'identification de l'objet cible, ils se reconnectent en un seul robot et retournent au point de départ d'où ils ont été initialement relâchés. Dans ce type de scénario, nous utiliserons les modalités du sens électrique du poisson qui permet de reconnaître la forme, mais aussi une certaine couleur électrique, venant de la combinaison des valeurs de résistance et de capacité de l'objet. Par exemple, l'objet cible aura a priori une certaine couleur électrique et le robot sera conçu de telle manière à reconnaître sa forme. Le type de scénario proposé ci-dessus est volontairement simple. En fait, ce scénario est surtout vu comme un test de performance du système robotique de perception. Cette simplicité est également requise pour que les biologistes puissent effectuer des comparaisons et établir des analogies avec leurs observations. Au-delà de ce type de scénario, il existe diverses applications concrètes qui pourraient tirer profit de la richesse des solutions proposées dans le projet ANGELS, comme par exemple, l'exploration des réseaux industriels contenant des matériaux potentiellement dangereux.

1.4.2.3 Avantages des solutions proposées

Comparé à d'autres sens bien connus, le sens électrique présente plusieurs avantages : il est omnidirectionnel, il peut déterminer différentes caractéristiques d'un objet comme sa résistance et sa capacité, et permet de reconnaître un organisme vivant. Il peut aussi voir un objet dans sa profondeur. Au-delà de ces avantages, le sens électrique est idéalement adapté à la navigation en eaux troubles où la vision est inopérante, et où du fait de la présence de particules en suspension, l'utilisation du sonar induirait des multiples réflexions parasites. De plus, cette dernière technologie est particulièrement inadaptée si on désire utiliser un groupe de petits robots, puisqu'alors, les émissions des robots interféreraient de manière considérable, augmentant de fait les parasites sur l'image. Et la nature est un parfait témoin de la non utilisation du sonar en groupe. En effet, les chauves-souris

qui perçoivent leur environnement par des ondes sonores, n'emploient jamais leur système d'écholocation en groupe. Au contraire, les poissons électriques ont développé des stratégies pour électrolocaliser en groupe tout en évitant de se parasiter les uns les autres. Finalement, comme les poisson électriques, les petits robots utiliseraient le sens électrique à la fois pour une électrolocation active et pour l'électrocommunication, un même signal d'émission pouvant servir aussi bien pour la navigation que pour la communication.

Chapitre 2

Modélisation physique de l'électrolocation et résolution des équations associées.

Dans le contexte du projet ANGELS, nous avons à proposer une modélisation physique de l'électrolocation. Des équations générales de Maxwell [Maxwell, 1885], nous déduisons des équations adaptées au problème de l'électrolocation, dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire. Les équations obtenues, valables en tout point du volume, sont inexploitable par les modalités techniques usuelles de contrôle et de mesure des grandeurs électriques, applicables uniquement en surface du capteur d'électrolocation. C'est pourquoi, il est nécessaire de transporter ces équations par la formulation dite *intégrale aux frontières*, que nous exposons. Dès lors, l'application d'une méthode numérique de discrétisation de la nouvelle formulation, la BEM, et l'ajout d'un nombre suffisant de conditions limites aux frontières des objets et du capteur, nous permet d'aboutir à un système algébrique linéaire que l'on peut résoudre par des solveurs conventionnels. Les grandeurs électriques tels que le courant ou le potentiel à la surface du capteur, sont ainsi déterminés, quelle que soit la géométrie des objets de la scène, pourvu que l'on soit dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire. Enfin, dans la dernière section de ce chapitre, nous revenons sur la formulation intégrale aux frontières des équations de l'électrolocation, pour en proposer une première approximation et exhiber ainsi, au premier ordre, un comportement électrique de capteur pouvant donner lieu à une modélisation bien plus rapide que la BEM, suivant des conditions supplémentaires portant sur la géométrie du capteur.

2.1 De la formulation générale du problème aux équations de l'électrolocation

2.1.1 Formulation générale du problème

Le problème de l'électrolocation vu par la physique peut se résumer ainsi : *Etant donné un ou plusieurs capteurs passifs ou actifs, entourés par des objets diélectriques et conducteurs, immergés dans un fluide conducteur isotrope et linéaire, le problème de l'électrolocation consiste à reconstituer la scène environnant les capteurs, à partir des champs électriques émis et/ou des mesures des capteurs (fig. 2.1).*

Pour simplifier notre étude, nous nous plaçons d'emblée, comme ceci est annoncé dans

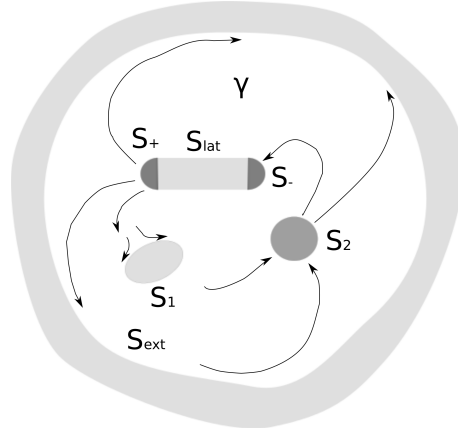


FIGURE 2.1 – Illustration du problème de l'électrolocation : un capteur composé de deux électrodes (noir) crée des lignes de courants par l'établissement d'un champ électrique dans un fluide conducteur de conductivité γ et mesure les perturbations induites par l'existence ici d'une sphère conductrice (noir) et d'une ellipsoïde isolante (gris), le tout constituant un domaine borné par des parois extérieures de nature isolante (gris).

le premier rapport de modélisation réalisé dans le cadre du projet ANGELS [Gossiaux, 2010], dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire, avec l'approximation d'une réponse linéaire d'un milieu.

Dans sa formulation, le problème de l'électrolocation apparaît très similaire aux problèmes de la tomographie par impédance, et de l'électro-encéphalographie. En effet, dans la première de ces deux célèbres techniques d'imagerie médicale, le but est de reconstituer une carte de conductivité et de permittivité, caractérisant des tissus biologiques dans un corps, à partir de l'excitation électrique en surface, et des mesures résultantes. Concrètement, il s'agit d'injecter de faibles courants électriques alternatifs à travers de petites électrodes plantées en surface et de mesurer des potentiels résultant de la réponse électrique de dipôles passifs se polarisant sous l'effet des courants émis [Somersalo et al., 1992]. Dans l'autre technique, le but est d'enregistrer l'activité électrique du cerveau pour des diagnostics médicaux. Dans ce cas, des électrodes sont placées sur le crâne du patient, sans qu'aucun courant ne soit cette fois injecté, pour mesurer les fluctuations de potentiels créées par des dipôles actifs qui établissent des courants ioniques dans les neurones du cerveau [Hamalainen and Sarvas, 1987, Stok et al., 1987].

L'électrolocation de par sa définition, réalise en quelque sorte les deux techniques. En effet, elle est une tomographie d'impédance lorsqu'elle utilise un capteur actif créant un champ et mesurant un potentiel (que l'on peut convertir en courant). Mais elle est aussi une sorte d'électro-encéphalographie lorsqu'elle utilise un capteur passif qui n'émet aucun courant, mais qui mesure les potentiels venant de l'activité électrique des sources extérieures.

2.1.2 Equations du problème

Venons en à présent à l'écriture des équations dans le cadre physique principal que nous nous sommes prescrit. Sous les conditions sus-évoquées de quasi-stationnarité des

ondes électromagnétiques, nous pouvons considérer des champs électriques et magnétiques oscillant avec une certaine pulsation ω , tels qu'en chaque instant t , l'équilibre électrocinétique est déjà réalisé. Si nous adoptons une décomposition de Laplace-Fourier, ces champs peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i\omega t} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{r})e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Sous cette dépendance temporelle spécifique, les équations de Maxwell [Maxwell, 1885] qui gouvernent les états électriques et magnétiques de tout objet physique, s'écrivent :

$$\nabla \cdot (\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}_0(\mathbf{r})) = \rho_0(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -i\omega\mu_0(\mathbf{r})\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = i\omega\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

Où ρ_0 et $\mathbf{j}_0$ sont les densités volumiques de charge libre et de courant au point $\mathbf{r}$ dans le milieu, et où $\epsilon(\mathbf{r})$ et $\mu_0(\mathbf{r})$ sont la permittivité et la perméabilité électrique du milieu au point $\mathbf{r}$. Les densités volumiques de courant qui s'établissent dans le milieu sont données par la loi généralisée d'Ohm locale :

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \gamma(\mathbf{r}) (\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{em}}(\mathbf{r}, \omega)), \quad (2.6)$$

où $\gamma(\mathbf{r})$ est la conductivité électrique du milieu au point $\mathbf{r}$ et $\mathbf{E}_{\text{em}}(\mathbf{r}, \omega)$ est la composante de Fourier de pulsation ω du champ électromoteur, responsable de la mise en mouvement des charges électriques.

L'équation de Maxwell-Ampère(2.5) devient alors :

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \tilde{\gamma}(\mathbf{r})\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.7)$$

où

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{r}) = \gamma(\mathbf{r}) + i\omega\epsilon(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

est l'admittance caractéristique du milieu, et où $\mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{r}, \omega)$ est la densité volumique de courant électromoteur, créée par des sources actives, définie comme :

$$\mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{r}, \omega) = \gamma(\mathbf{r})\mathbf{E}_{\text{em}}(\mathbf{r}) \quad (2.9)$$

Pour alléger l'écriture, nous omettrons dès maintenant d'écrire explicitement les dépendances en ω (fréquence au coefficient 2π près) et $\mathbf{r}$. Elles seront considérées dans ce qui suit comme implicites. En appliquant l'opérateur de divergence $\nabla \cdot$ à l'écriture (2.5) de l'équation de Maxwell-Ampère, nous obtenons :

$$\nabla \cdot (\tilde{\gamma}\mathbf{E}_0) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{em}}, \quad (2.10)$$

ce que l'on peut écrire comme :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_0 + i\omega\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}_0) = 0, \quad (2.11)$$

que nous identifions, d'après l'équation locale de Maxwell-Gauss (2.2), comme la composante de pulsation ω de l'équation de conservation de la charge libre en présence d'un champ électromoteur :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \quad (2.12)$$

A ce stade, nous pouvons remarquer qu'il nous est impossible de donner une valeur de la densité de charge libre ρ_0 , laquelle s'adapte en conséquence du mouvement des charges, et qu'il faudra recourir à l'équation de Maxwell-Gauss (2.2) pour la déduire de la valeur du champ $\mathbf{E}_0$.

Pour résoudre les 3 dernières équations de Maxwell (2.3,2.4,2.7), nous pouvons introduire le quadripotentiel vecteur $(V, \mathbf{A})$ où V est un potentiel scalaire et $\mathbf{A}$, un potentiel vecteur, eux-mêmes périodiques dans le temps, et écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E}_0 = -\nabla V_0 - i\omega \mathbf{A}_0 \\ \mu_0 \mathbf{H} &= \nabla \wedge \mathbf{A} \Rightarrow \mu_0 \mathbf{H}_0 = \nabla \wedge \mathbf{A}_0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Injectons maintenant ces dernières expressions dans la forme première de l'équation de conservation de la charge (2.10) et dans l'équation de Maxwell-Ampère (2.5). Nous obtenons alors :

$$\tilde{\gamma} \nabla \cdot (\nabla V_0 + i\omega \mathbf{A}_0) + \nabla \tilde{\gamma} \cdot (\nabla V_0 + i\omega \mathbf{A}_0) = \nabla \cdot \mathbf{j}_{em} \quad (2.14)$$

et

$$-\frac{1}{\mu_0} (\nabla^2 \mathbf{A}_0 - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}_0)) = -\tilde{\gamma} (\nabla V_0 + i\omega \mathbf{A}_0) + \mathbf{j}_{em} \quad (2.15)$$

Où ∇^2 est l'opérateur Laplacien appliqué aux champs de vecteurs. A présent, deux possibilités s'offrent à nous. Soit, nous nous plaçons en régime électrocinétique stationnaire, et nous adoptons une jauge de Coulomb. Soit, nous conservons une dépendance temporelle et, dans ce cas, nous adoptons une jauge de Lorentz. Les jauges de Coulomb ou de Lorentz sont des découplages appropriés des équations de Maxwell pour permettre leur résolution. Si nous choisissons la jauge de Lorentz, qui de fait est plus générale, nous pouvons parvenir à un découplage des équations de Maxwell-Gauss (2.2) et de Maxwell-Ampère (2.5), en les exprimant chacune en fonction seulement du potentiel scalaire V , pour la première, et du potentiel vecteur $\mathbf{A}$, pour la seconde. Nous obtenons alors les solutions appelées *potentiels retardés*, caractérisés par les deux régimes asymptotiques suivants :

1. le régime lointain, caractérisé par des distances depuis les sources plus grandes que la longueur d'onde $\lambda = \tau / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, où τ est le temps typique de variation des sources d'intensité. Dans cette condition, les champs électromagnétiques apparaissent comme des ondes, et nous pouvons alors constater des effets de retard dû à la finitude de la vitesse de la lumière $c = 1 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, λ étant la longueur caractéristique du champ émis.
 2. le régime proche, caractérisé cette fois par des distances depuis les sources plus petites que la longueur d'onde. Tout se passe comme si les potentiels ne dépendaient que de l'intensité instantanée des sources émises. C'est ce qui définit *le régime quasi stationnaire*, dans lequel nous nous inscrivons dans ce projet. Les potentiels solutions
-

dans ce cas, sont similaires à ceux obtenus dans le cas où l'on adopte une jauge de Coulomb, ce qui revient physiquement à négliger la densité de courant de déplacement $\mathbf{j}_d = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E}_0 / \partial t$ dans l'équation de Maxwell-Ampère (2.5).

En électrolocation, les fréquences ν typiques que l'on utilise sont reliées la longueur d'onde λ des émissions par :

$$\lambda(\nu) = \frac{c}{\nu n(\nu)} \quad (2.16)$$

Où $n(\nu)$ est l'indice de réfraction du milieu. En considérant que le fluide est de l'eau, nous avons $\nu \leq 10^{10}$ Hz. Pour une fréquence de 20 kHz par exemple (fréquence typique des capteurs prototypes du projet), nous avons une longueur d'onde de 2 km, soit une distance bien plus grande que la portée de nos sondes prototypes de l'électrolocation. En conséquence, nous pouvons dire qu'il est raisonnable de modéliser l'électrolocation des capteurs du projet dans le régime électrocinétique quasi-stationnaire. Dans ces conditions, nous pouvons négliger la densité volumique du courant de déplacement $\mathbf{j}_d$, c'est à dire que les états électriques sont établis sans retard, ce qui est équivalent à négliger la partie imaginaire de l'admittance $\tilde{\gamma}$:

$$\tilde{\gamma} = \gamma + i\omega\epsilon \rightarrow \gamma \quad (2.17)$$

A ce stade, il apparaît une contradiction. En effet, en appliquant l'opérateur ∇ à l'équation de Maxwell-Ampère (2.5) tronquée, sans le terme représentant le courant de déplacement, nous obtenons $\nabla \cdot \mathbf{j}_0 = 0$, ce qui est a priori contradictoire si nous nous référons à l'équation originelle de la conservation des charges (2.12). La contradiction est cependant levée, si l'on considère le temps typique du régime de transition, entre 2 valeurs stationnaires de densité volumique de charge, établi à $\tau_{eq} \simeq \epsilon/\gamma$. Se placer en régime quasi-stationnaire consiste donc à négliger le temps de transition τ par rapport au temps du régime stationnaire ν^{-1} , avec l'interprétation physique que la brève fluctuation de densité volumique de charge s'atténue quasi-instantanément, si bien que la loi de conservation des charges peut être raisonnablement régie par la loi de conservation stationnaire $\nabla \cdot \mathbf{j}_0 = 0$. Nous devons cependant réaliser les deux constats suivants :

1. négliger la partie imaginaire de l'admittance ne conduit pas à une significative simplification des équations de Maxwell, en particulier dans l'équation de Maxwell-Ampère (2.5) où le terme de densité de courant de déplacement ne peut pas être inexistant dans un milieu différent du vide.
2. bien que l'on puisse approximer en régime quasi-stationnaire l'admittance à la conductivité, la partie imaginaire peut conduire à des effets spécifiques que l'on ne peut négliger, comme des déphasages, que les poissons utilisent notamment pour distinguer le vivant de l'inerte (chapitre I). Ceci est d'autant plus vrai que certains tissus biologiques comme les vaisseaux sanguins ont une grande permittivité électrique relative $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 \simeq 10^4$.

C'est pourquoi nous conserverons néanmoins l'admittance dans notre modélisation de l'électrolocation en régime quasi-stationnaire, en gardant toujours à l'esprit que la partie réelle de l'admittance reste bien plus grande que sa partie imaginaire. Nous allons dans les sections suivantes revenir plus en détail sur l'exploration des jauges sus-mentionnées.

2.1.3 La jauge de Coulomb

La jauge de Coulomb est définie comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A}_0 = 0 \quad (2.18)$$

A admittance $\tilde{\gamma}$ constante, ceci conduit à un découplage complet dans l'équation (2.14). Cette équation peut alors être résolue en fonction seulement de V_0 , et ensuite injectée dans la forme (2.15) de l'équation de Maxwell-Ampère, pour donner :

$$(\nabla^2 - i\tilde{\gamma}\mu_0\omega) \mathbf{A}_0 = -\mu_0 (\mathbf{j}_{\text{em}} - \tilde{\gamma}\nabla V_0) \quad (2.19)$$

Même si cette stratégie ne peut pas être appliquée dans le cas d'une admittance non uniforme, car nous ne pouvons pas découpler le vecteur potentiel du potentiel scalaire dans la forme (2.14) de l'équation de conservation de la charge, l'utilisation d'une jauge de Coulomb permet tout de même de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère jusqu'à aboutir à sa forme (2.19). Cette dernière équation, cependant, ne peut pas être résolue pour tout profil d'admittance. Dans le cas d'une admittance constante (milieu uniforme), on peut montrer que l'on obtient une expression du potentiel vecteur [Gossiaux, 2010] :

$$\mathbf{A}_0 = \frac{e^{i\sqrt{-i\tilde{\gamma}\mu_0\omega}r}}{4\pi r} \otimes (\mu_0 (\mathbf{j}_{\text{em}} - \tilde{\gamma}\nabla V_0)), \quad (2.20)$$

où r est la distance entre la source et le point d'observation, $\otimes$ désigne le produit de convolution et la racine carrée dans l'expression doit être prise dans le demi plan complexe supérieur :

$$i\sqrt{-i\tilde{\gamma}\mu_0\omega} = -(-i)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\tilde{\gamma}\mu_0\omega} = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tilde{\gamma}\mu_0\omega}, \quad (2.21)$$

où la partie réelle de la dernière racine s'identifie comme l'inverse d'une distance typique $\delta(\omega) = 1/\sqrt{\gamma\mu_0\omega}$ d'amortissement du potentiel vecteur $\mathbf{A}_0$, appelée "épaisseur de peau". Dans nos conditions habituelles d'essai à Nantes, pour une conductivité d'environ $\gamma = 0.04$ S/m et une fréquence de signal émis de $\nu = 20$ kHz, on obtient une profondeur de peau d'environ $\delta \simeq 3.96$ m.

Ainsi, le vecteur potentiel, et donc le champ magnétique, en l'absence d'objet, s'amortit sensiblement dès que l'on s'éloigne d'une distance de 3.96 m de la source.

Si maintenant, plusieurs objets d'admittances diverses, sont placées près de la source, nous pouvons montrer [Gossiaux, 2010] que le champ magnétique sera amorti à des distances typiques r_{damp} telles que :

$$\int_0^{r_{\text{damp}}} \text{Im} \left[\sqrt{-i\mu_0\omega \langle \tilde{\gamma}(r) \rangle} \right] dr \simeq 1, \quad (2.22)$$

où "Im" désigne la partie imaginaire et $\langle \tilde{\gamma}(r) \rangle$ est l'admittance angulaire moyenne. Nous devons noter que la présence d'un grand nombre d'objets conducteurs peut faire varier la portée du champ magnétique. Même si le champ magnétique n'est jamais employé en tant que tel dans l'électrolocation, nous devons garder à l'esprit qu'il existe une limite intrinsèque r_{damp} qui conditionne la portée des champs électromagnétiques en électrolocation.

Pour des distances $d \leq \delta$, ou plus généralement pour $d \leq r_{\text{damp}}$, le phénomène d'amortissement peut être négligé, si bien que nous obtenons [Gossiaux, 2010] :

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{r}') - \tilde{\gamma}\nabla V_0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{r'}, \quad (2.23)$$

laquelle devient la solution instantanée en jauge de Coulomb, que nous devons injecter dans (2.14) pour obtenir une équation close en V_0 . Sans même devoir procéder à la résolution de la nouvelle équation obtenue, on peut avoir une idée de l'importance des termes ∇V_0 et $i\omega\mathbf{A}_0$ qui apparaissent dans l'expression du champ électrique, par une simple analyse dimensionnelle. En considérant que pour les objets passifs, $\mathbf{j}_{\text{em}} = 0$, on a :

$$\frac{\omega\mathbf{A}_0}{\nabla V_0} \sim \frac{d^2}{\delta^2}, \quad (2.24)$$

où d représente la distance typique où l'on résout le problème. Physiquement, $\omega\mathbf{A}_0$ représente la contribution inductive au champ électrique, et c'est un fait bien connu que les équations de l'électrocinétique se simplifient considérablement si les effets inductifs deviennent négligeables. Du point de vue de la modélisation, une première hypothèse simplificatrice consiste à choisir des distances ou des fréquences telles que :

$$\sqrt{\frac{1}{\mu_0\gamma\omega}} \gg d, \text{ équivalent à } \omega \ll \omega_{\text{crit}}(d) = \frac{1}{\mu_0\gamma d^2}, \quad (2.25)$$

où $\omega_{\text{crit}}(d)$ est la pulsation de référence définie par rapport à une distance d limite que l'on se fixe. Sous l'hypothèse sus-mentionnée, nous pouvons conclure d'après (2.24) que la contribution inductive au champ électrique est bien plus petite que sa contribution conservative ∇V sous l'hypothèse (2.25). Ceci conduit bien à un comportement quasi-statique, puisque la source dominante du champ électrique sont les charges électriques du système, comme c'est le cas en électrostatique. Nous devons donc en premier lieu choisir une fréquence d'émission adaptée pour diminuer sensiblement les effets inductifs jusqu'à une certaine distance. Ces conclusions peuvent être étendues à la situation plus générale d'un système contenant des forces électromotrices. En effet, en supposant que le terme inductif $i\omega\mathbf{A}_0$ est négligeable devant le terme conservatif ∇V_0 , nous déduisons l'équation suivante en présence de forces électromotrices :

$$\tilde{\gamma}\Delta V_0 + \nabla\tilde{\gamma} \cdot \nabla V_0 = \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{em}} \quad (2.26)$$

Nous pouvons alors estimer l'ordre de grandeur de V_0 dans ces conditions :

$$V_0(\mathbf{r}) \simeq -\frac{1}{4\pi\tilde{\gamma}} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{r'} = \frac{1}{4\pi\tilde{\gamma}} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{r}') dV_{r'} \quad (2.27)$$

Ce qui conduit à :

$$\nabla V_0(\mathbf{r}) \simeq -\frac{1}{4\pi\tilde{\gamma}} \int \nabla \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{em}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{r'} \sim \frac{\mathbf{j}_{\text{em}}}{\tilde{\gamma}}. \quad (2.28)$$

En injectant cette expression dans (2.23), nous faisons apparaître dans le numérateur sous l'intégrale des termes similaires, si bien que les conditions (2.25) restent satisfaites quand apparaissent des forces électromotrices dans le système.

En conséquence, dans le projet ANGELS, nous ferons en sorte d'avoir une épaisseur de peau δ suffisamment grande pour négliger toute contribution inductive au champ électrique, si bien qu'il suffira, en présence de forces électromotrices de résoudre l'équation suivante :

$$\nabla \cdot (\tilde{\gamma}V_0) \simeq \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{em}}, \quad (2.29)$$

avec des conditions aux limites appropriées. Avant d'aborder la jauge de Coulomb étendue, nous proposons dans le paragraphe suivant une solution exacte des équations de Maxwell pour une source particulière de courant.

2.1.4 Solution des équations de Maxwell pour une source particulière

Considérons ici quelques sources $\mathbf{j}_{em}$ localisées dans un petit domaine $\mathcal{D}$ centré sur l'origine O , dans un milieu présentant une admittance $\tilde{\gamma}$ uniforme. Nous travaillons avec la jauge de Coulomb, dont nous venons de décrire les principes dans le paragraphe précédent. La solution de l'équation

$$\tilde{\gamma}\Delta V_0 = \nabla \cdot \mathbf{j}_s$$

est

$$V_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\tilde{\gamma}} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{r'}.$$

Nous pouvons alors utiliser l'identité de Green suivante :

$$\int \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV_{r'} = \underbrace{\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}_s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)}_{=0 \text{ (surfacique)}} dV_{r'} - \int \mathbf{j}_s(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{r'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV_{r'} \quad (2.30)$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{j}_s(\mathbf{r}') \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV_{r'},$$

comme $\mathbf{j}_s$ est localisé sur $\mathcal{D}$, de manière à avoir :

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\tilde{\gamma}} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{j}_s(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV_{r'}. \quad (2.31)$$

Pour des distances de l'ordre de la taille du domaine, nous obtenons :

$$V_0(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mathbf{J}_s}{4\pi\tilde{\gamma}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J}_s \triangleq \int_{\mathcal{D}} \mathbf{j}_s(\mathbf{r}') dV_{r'}. \quad (2.32)$$

ce qui représente le potentiel généré par un dipôle $\mathbf{p} \triangleq (\epsilon/\tilde{\gamma}) \mathbf{J}_s$. En fait, nous pouvons aussi interpréter V_0 comme le potentiel généré par le vecteur de polarisation (dont on verra une définition au chapitre IV) $\mathbf{P} \triangleq (\epsilon/\tilde{\gamma}) \mathbf{j}_s$ défini à l'intérieur de $\mathcal{D}$.

Afin de déterminer le potentiel A_0 , nous évaluons le terme $-\tilde{\gamma}\nabla V_0$ qui va se manifester comme une source (second membre de l'équation). Cela donne¹ :

$$-\tilde{\gamma}\nabla V_0 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_s)\mathbf{n} - \mathbf{J}_s}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{J}_s \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right),$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unité de $\mathbf{r}$. Au lieu de procéder à une convolution dans l'espace direct, nous pouvons résoudre l'équation

$$(\Delta - i\lambda)\mathbf{A}_0 = \mu_0\tilde{\gamma}\nabla V_0$$

dans l'espace de Fourier. On obtient :

$$\mathcal{F}(\tilde{\gamma}\nabla V_0) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \nabla \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}_s}{x^3} \right) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x \nabla \left(e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{J}_s}{x^3}.$$

1. Voir [Jackson, 1962], 3-ième édition, (4.20).

En appliquant l'opérateur ∇ , nous aboutissons à :

$$\mathcal{F}(\tilde{\gamma}\nabla V_0) = \frac{i\mathbf{k}}{4\pi} \times \mathbf{J}_s \cdot \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}}{x^3}.$$

En vertu de la symétrie des arguments, l'intégrale restante est parallèle à $\mathbf{k}$. Nous pouvons alors écrire :

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}}{x^3} = \left(\int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}{x^3} \right) \frac{\mathbf{k}}{k^2}$$

et nous avons :

$$\mathcal{F}(\tilde{\gamma}\nabla V_0) = \frac{i(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}}{4\pi k^2} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}{x^3}.$$

Pour calculer l'intégrale en volume, nous supposons sans perdre trop de généralités que $\mathbf{k}$ est orienté suivant Oz , tel que :

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}{x^3} = 2\pi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{+\infty} dr e^{-ikr\cos\theta} k \cos\theta.$$

Après une régularisation, la dernière intégrale donne :

$$\int_0^{+\infty} dr e^{-(ik\cos\theta+\eta)r} k \cos\theta = \frac{k \cos\theta}{\eta + ik \cos\theta} \rightarrow -i,$$

et ainsi :

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}{x^3} = -4\pi i$$

et :

$$\mathcal{F}(\tilde{\gamma}\nabla V_0) = \frac{(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2}.$$

Dans l'espace de Fourier nous avons alors à résoudre :

$$(k^2 + i\lambda) \tilde{\mathbf{A}}_0 = \mu_0 \left(\mathbf{J}_s - \frac{(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2} \right) \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_0 = \frac{\mu_0}{k^2 + i\lambda} \left(\mathbf{J}_s - \frac{(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2} \right),$$

ce qui satisfait à la jauge de Coulomb, et

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\mu_0}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2 + i\lambda} \left(\mathbf{J}_s - \frac{(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2} \right). \quad (2.33)$$

Nous pouvons décomposer $\mathbf{A}_0$ en trois termes pour le calcul :

$$\mathbf{A}_0^{(1)}(M) = \frac{\mu_0 \mathbf{J}_s}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2 + i\lambda} = \frac{\mu_0 \mathbf{J}_s}{4\pi r} e^{i\sqrt{-i\lambda}r},$$

où $r = OM = |\mathbf{r}|$. Alors, comme $-\frac{1}{k^2(k^2+i\lambda)} = \frac{1}{i\lambda} \left(\frac{1}{k^2+i\lambda} - \frac{1}{k^2} \right)$:

$$\mathbf{A}_0^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{i\mu_0}{\lambda} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2}}_{=\tilde{\gamma}\nabla V_0} = \frac{i\mu_0 \tilde{\gamma}\nabla V_0}{\lambda} = \frac{i}{\omega} \nabla V_0.$$

Remarquons que lorsque l'on considère le champ électrique $(-i\omega\mathbf{A}_0 - \nabla V_0)$, ce terme va compenser exactement le terme ∇V_0 ; il n'est pas affecté par l'amortissement et ne conduit

pas à un champ magnétique puisqu'il possède une forme différentielle. Ce dernier terme s'écrit :

$$\mathbf{A}_0^{(3)}(\mathbf{r}) = -\frac{i\mu_0}{(2\pi)^3\lambda} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{k^2 + i\lambda}$$

et requiert une évaluation spécifique. Remarquons que ce terme peut être réécrit comme suit :

$$\mathbf{A}_0^{(3)}(M) = \frac{i\mu_0}{\lambda} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^2 + i\lambda}}_{G(\mathbf{x},0)},$$

où G a été défini comme :

$$G(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{r}.$$

Procéder à des dérivations conduit à plusieurs termes dont l'importance dépend du rapport de grandeur entre r et l'épaisseur de peau δ .

2.1.4.1 Cas où $r \lesssim \delta$

Les dérivations les plus influentes sont celles qui agissent sur r^{-1} , dans lequel cas

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^{(3)}(\mathbf{r}) &\simeq \frac{i\mu_0 e^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{4\pi\lambda} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r} \simeq -\frac{ie^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{4\pi\omega\tilde{\gamma}} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_j}{r^3} \\ &\simeq \frac{ie^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{4\pi\omega\tilde{\gamma}} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \left(\frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) \simeq \frac{ie^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{4\pi\omega\tilde{\gamma}} \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_s) \mathbf{n} - \mathbf{J}_s}{r^3} \\ &\simeq -\frac{ie^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{\omega} \nabla V_0, \end{aligned}$$

ce qui compense presque le terme $\mathbf{A}_0^{(2)}(M)$. Les termes sous dominants s'obtiennent avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^{(3)}(M) &\simeq \frac{i}{4\pi\omega\tilde{\gamma}} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(e^{i\sqrt{-i\lambda}r} \frac{1}{r} \right)}_{= \left(i\sqrt{-i\lambda} \frac{x_j}{r^2} - \frac{x_j}{r^3} \right) e^{i\sqrt{-i\lambda}r}} \\ &\simeq \frac{i}{4\pi\omega\tilde{\gamma}} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \left[\dots + i\sqrt{-i\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_j}{r^2} \right) e^{i\sqrt{-i\lambda}r} - \frac{x_j}{r^3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} e^{i\sqrt{-i\lambda}r} \right) + \dots \right] \\ &\simeq \frac{i}{4\pi\omega\tilde{\gamma}} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \left[\dots + i\sqrt{-i\lambda} \left(\frac{\delta_{ij}}{r^2} - 2\frac{x_j x_i}{r^4} \right) - \frac{x_j}{r^3} \times (i\sqrt{-i\lambda}) \frac{x_i}{r} + \dots \right] e^{i\sqrt{-i\lambda}r} \\ &\simeq \dots + \frac{\sqrt{-i\lambda} e^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{4\pi\omega\tilde{\gamma}} \frac{3(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{J}_s}{r^2} \simeq \dots + -\frac{\sqrt{-i\lambda} e^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{\omega} \nabla V_0 + \dots, \end{aligned}$$

si bien que

$$\mathbf{A}_0^{(2)}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_0^{(3)}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\omega} \nabla V_0 \times \underbrace{\left[1 - e^{i\sqrt{-i\lambda}r} + i\sqrt{-i\lambda}r e^{i\sqrt{-i\lambda}r} \right]}_{=O\left(\frac{r^2}{\delta^2}\right)} + \dots, \quad (2.34)$$

et nous retrouvons le terme $O(r^2/\delta^2)$ trouvé dans (2.23), ce qui confirme que le régime quasi statique domine quand $r \lesssim \delta$. Les derniers termes de $\mathbf{A}_0^{(3)}$ sont obtenus en dérivant seulement l'exponentielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0^{(3)}(M) &\simeq \dots + \frac{i}{4\pi\omega\tilde{\gamma}r} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial e^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{\partial x_j}}_{=-i\sqrt{-i\lambda} \frac{x_j}{r} e^{i\sqrt{-i\lambda}r}} \\ &\simeq \dots + \frac{i}{4\pi\omega\tilde{\gamma}r} \sum_{i,j=1}^3 J_{s,j} \mathbf{e}_i \left(-i\sqrt{-i\lambda} \frac{x_i}{r} \right) \left(-i\sqrt{-i\lambda} \frac{x_j}{r} \right) e^{i\sqrt{-i\lambda}r} \\ &\simeq \dots - \frac{\lambda}{4\pi\omega\tilde{\gamma}} \frac{(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{r} e^{i\sqrt{-i\lambda}r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{r} e^{i\sqrt{-i\lambda}r}. \end{aligned}$$

Appelons $\mathbf{A}_0^{(3,\text{rad})}$ ce dernier terme ; nous constatons qu'il se comporte $\propto r^{-1}$, de la même manière que $\mathbf{A}_0^{(1)}$; en les rassemblant, nous avons :

$$\mathbf{A}_0^{(1)} + \mathbf{A}_0^{(3,\text{rad})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_s - (\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{r} e^{i\sqrt{-i\lambda}r}. \quad (2.35)$$

et

$$\frac{\omega \left(\mathbf{A}_0^{(1)} + \mathbf{A}_0^{(3,\text{rad})} \right)}{\nabla V_0} \sim \mu_0 \tilde{\gamma} \omega r^2 \sim \frac{r^2}{\delta^2}.$$

2.1.4.2 Cas où $r \gtrsim \delta$

Dans ce cas, nous écrivons le champ électrique comme

$$\mathbf{E}_0 = -(\nabla V_0 + i\omega \mathbf{A}_0) = -i\omega \left(\mathbf{A}_0^{(1)} + \mathbf{A}_0^{(3)} \right).$$

Il est important de remarquer que ces deux contributions sont proportionnelles à $e^{i\sqrt{-i\lambda}r}$, ce qui signifie que le champ électrique est atténué par un facteur d'amortissement $e^{-r/\delta}$. A de grandes distances, le champ électrique est de la forme

$$\mathbf{E}_0 = [O(1) + O(r^{-1}) + O(r^{-2})] \frac{e^{i\sqrt{-i\lambda}r}}{r},$$

et la contribution dominante provient de $\mathbf{A}_0^{(1)} + \mathbf{A}_0^{(3,\text{rad})}$, soit

$$\mathbf{E}_0 = \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi} \times \frac{\mathbf{J}_s - (\mathbf{J}_s \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{r} e^{i\sqrt{-i\lambda}r}. \quad (2.36)$$

Ce champ est amorti et orthogonal à $\mathbf{n}$. Le champ magnétique provient du rotationnel de $\mathbf{A}_0^{(1)} + \mathbf{A}_0^{(3)}$, comme $\mathbf{A}_0^{(2)}$ est une forme purement différentielle. Comme à la fois $\mathbf{A}_0^{(1)}$ et $\mathbf{A}_0^{(3)}$ sont amortis, cela implique que $\mathbf{B}$ est amorti aussi, et donc le champ électromagnétique total est amorti.

2.1.5 La jauge de Coulomb étendue

Nous venons de voir les simplifications qui résultent du choix d'une jauge de Coulomb, qui apparaît optimale dans le cas d'un milieu uniforme. Dans le cas d'un milieu non uniforme en admittance $\tilde{\gamma}$, nous pouvons choisir une jauge de Coulomb étendue, définie par :

$$\nabla \cdot (\tilde{\gamma} \mathbf{A}_0) = 0, \quad (2.37)$$

si bien que le vecteur potentiel disparaît de l'équation de conservation (2.14), ce qui conduit à l'équation simplifiée suivante :

$$\nabla \cdot (\tilde{\gamma} V_0) = \nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{em}}, \quad (2.38)$$

laquelle peut être résolue en fonction de V_0 . Nous en déduisons alors l'expression de $\mathbf{A}_0$ en résolvant :

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0 - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}_0) - i\tilde{\gamma}\mu_0\omega \mathbf{A}_0 = -\mu_0 (\mathbf{j}_{\text{em}} - \tilde{\gamma}\nabla V_0) \quad (2.39)$$

Bien qu'elle soit plus complexe que (2.19), cette dernière équation peut être résolue en fonction de $\mathbf{A}_0$ [Gossiaux, 2010]. On montre que nous pouvons obtenir une expression exacte du champ électromagnétique. Dans l'approximation *quasi statique*, valide pour des distances aux sources inférieures à δ , nous pouvons :

1. négliger le terme $i\tilde{\gamma}\mu_0\omega \mathbf{A}_0$ dans (2.39)
2. négliger la contribution inductive $-i\omega \mathbf{A}_0$ au champ électrique dans (2.14)

Sur le schéma 2.2, on a représenté les trois régimes distincts rendant compte de l'effet de dépendance du champ électrique vis-à-vis du champ magnétique $\mathbf{A}$.

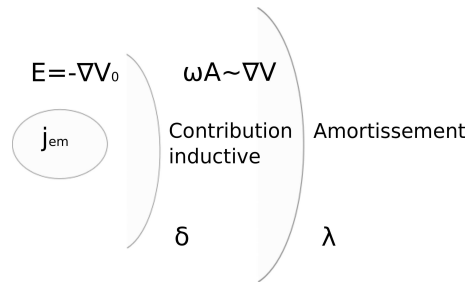


FIGURE 2.2 – Les trois différents régimes de dépendance du champ électrique vis à vis du champ magnétique. Près de la source $\mathbf{j}_{\text{em}}$, pour des distances à la source plus petites que l'épaisseur de peau δ , le champ électrique est un pur gradient, et ne dépend pas du champ magnétique. Pour des distances intermédiaires à la source comprises entre δ et λ , le champ magnétique varie suffisamment pour générer un champ électrique supplémentaire. Pour des distances plus grandes que la longueur d'onde λ , l'onde est amortie et l'énergie est diffusée de manière purement radiative.

Dans la suite, nous simplifions notre notation en employant les termes V et $\mathbf{A}$ au lieu des termes V_0 et $\mathbf{A}_0$, en gardant à l'esprit que les premiers sont les composantes de Fourier du potentiel électrique et du champ magnétique à la pulsation ω .

2.1.6 Conditions limites

Dans le cas où le milieu ne présente pas de transition brutale de ses profils de permittivité et conductivité, la meilleure approche consiste à :

1. établir un modèle raisonnable de champ électromoteur et de la distribution de courant qui lui est associée.
2. résoudre directement (2.38) pour déterminer le potentiel en imposant $V(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ quand $\mathbf{r}$ est infiniment proche des sources.
3. résoudre alors (2.39) pour déterminer le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ dans les mêmes conditions
4. déduire le champ électrique et l'utiliser pour l'électrolocation.

En fait, dans la plupart des situations, les sous-domaines du milieu auront des permittivités et des conductivités constantes, en conservant des discontinuités en leur surface (fig. 2.1). Dans chacun de ces sous-domaines, l'équation de conservation des courants (2.38) et la forme (2.39) de l'équation de Maxwell-Ampère revêtent une forme simplifiée. Cependant, ces équations ne s'appliquent pas aux frontières et doivent être complétées par des conditions de raccordement de part et d'autre des frontières pour qu'elles soient valables partout. Considérons à cet effet, le cas général de deux sous-domaines $\mathcal{D}^+$ et $\mathcal{D}^-$, caractérisés par des permittivités ϵ^+ et ϵ^- et des conductivités γ^+ et γ^- . L'interface $\mathcal{S} = \mathcal{D}^+ \cap \mathcal{D}^-$ entre ces deux sous-domaines est orientée (par convention), de $\mathcal{D}^-$ à $\mathcal{D}^+$. Soit $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, la normale sur $\mathcal{S}$ en chacun de ses points $\mathbf{r}$. De manière générale, cette interface supporte en chacun de ses points $\mathbf{r}$ une densité surfacique de charge libre $\sigma(\mathbf{r})$. Considérons un petit élément de surface $dS_{\mathbf{r}}$, soumis à un champ électrique appliqué $\mathbf{E}_{\text{appl}}(\mathbf{r}, t)$, produit par les densités surfaciques de charge localisées sur $\mathcal{S} - dS_{\mathbf{r}}$ et par le reste du domaine.

La condition de conservation de la charge sur $dS_{\mathbf{r}}$ permet d'écrire, en conservant pour le champ appliqué une décomposition de Fourier $\propto e^{i\omega t}$:

$$\frac{dQ_{\mathbf{r}}}{dt} = - (I^+(\mathbf{r}) - I^-(\mathbf{r})), \quad (2.40)$$

1. $Q_{\mathbf{r}} = \sigma_{\text{libre}}(\mathbf{r}) \times dS_{\mathbf{r}}$ (avec $dS_{\mathbf{r}}$, l'aire de $dS_{\mathbf{r}}$)
2. $I^{\pm}(\mathbf{r}) = dS_{\mathbf{r}} \times j_{\perp}^{\pm}(\mathbf{r})$ (avec $j_{\perp}^{\pm} = \mathbf{j}^{\pm}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$)

C'est à dire :

$$\frac{d\sigma_{\text{libre}}(\mathbf{r})}{dt} = - (j_{\perp}^+ - j_{\perp}^-) \Leftrightarrow i\omega\sigma_{\text{libre}} = - (\gamma^+ E_{\perp}^+ - \gamma^- E_{\perp}^- + j_{\text{em},\perp}^+ - j_{\text{em},\perp}^-), \quad (2.41)$$

où nous avons fait appel à loi généralisée d'Ohm locale (2.6). Si nous appliquons maintenant les conditions de raccordement général :

$$D_{\perp}^+ - D_{\perp}^- = \sigma_{\text{libre}}, \quad (2.42)$$

où le déplacement électrique $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ contient les effets de polarisation du milieu et satisfait à la loi de Gauss locale $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}}$, laquelle traduit le déplacement généré par les charges libres. En combinant les deux relations précédentes, on obtient :

$$i\omega (\epsilon^+ E_{\perp}^+ - \epsilon^- E_{\perp}^-) = - \left(\gamma^+ E_{\perp}^+ - \gamma^- E_{\perp}^- + j_{\text{em},\perp}^+ - j_{\text{em},\perp}^- \right), \quad (2.43)$$

soit

$$\boxed{\tilde{\gamma}^+ E_{\perp}^+ + j_{\text{em},\perp}^+ = \tilde{\gamma}^- E_{\perp}^- + j_{\text{em},\perp}^-} \quad (2.44)$$

En exprimant le champ électrique en fonction de V et de $\mathbf{A}$, connaissant les valeurs de $\tilde{\gamma}^{\pm}$ et $j_{\text{em},\perp}^{\pm}$, on peut obtenir la condition de raccordement.

Comme il est parfois plus utile d'exprimer ce raccordement en fonction du champ appliqué, on peut faire appel à la relation :

$$\epsilon_0 (E_{\perp}^+ - E_{\perp}^-) = \sigma_{\text{tot}}, \quad (2.45)$$

où σ_{tot} est la densité surfacique totale de charge, i.e. la somme de la densité surfacique libre de charge σ_{libre} et de la densité surfacique de charges de polarisation σ_{pol} . Comme le champ appliqué ne présente pas de discontinuité sur $d\mathcal{S}_{\mathbf{r}}$, on peut déduire :

$$E_{\perp}^{\pm} = E_{\text{appl},\perp} \pm \frac{\sigma_{\text{tot}}}{2\epsilon_0} \quad (2.46)$$

Nous combinons alors cette relation avec (2.44) avec $\mathbf{j}_{\text{em}} = 0$ (comme en tomographie d'impédance) et nous obtenons finalement :

$$\sigma_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = - \frac{\tilde{\gamma}^+ - \tilde{\gamma}^-}{\tilde{\gamma}^+ + \tilde{\gamma}^-} \times 2\epsilon_0 E_{\text{appl},\perp}(\mathbf{r}) \quad (2.47)$$

Cette charge totale sur $d\mathcal{S}_{\mathbf{r}}$ peut être utilisée :

1. comme la source d'un champ appliqué sur les autres charges
2. en combinaison avec (2.46) pour déduire les expressions de champ total $E_{\perp}^{\pm}$ et de densité surfacique libre de charge $\sigma_{\text{libre}}(\mathbf{r})$:

$$E_{\perp}^{\pm} = \frac{\tilde{\gamma}^{\mp}}{\tilde{\gamma}^+ + \tilde{\gamma}^-} \times 2E_{\text{appl},\perp}(\mathbf{r}) \Rightarrow D_{\perp}^{\pm} = \frac{\epsilon^{\pm} \tilde{\gamma}^{\mp}}{\tilde{\gamma}^+ + \tilde{\gamma}^-} \times 2E_{\text{appl},\perp}(\mathbf{r}) \quad (2.48)$$

$$\sigma_{\text{libre}} = \frac{\epsilon^+ \tilde{\gamma}^- - \epsilon^- \tilde{\gamma}^+}{\tilde{\gamma}^+ + \tilde{\gamma}^-} \times 2E_{\text{appl},\perp}(\mathbf{r}) \quad (2.49)$$

La condition de raccordement (2.44) possède des propriétés à exploiter :

1. A basse fréquence (en régime quasi stationnaire), nous avons $\omega\epsilon \ll \gamma$, et le raccordement n'est fonction que des conductivités : le flux du courant d'un milieu à l'autre doit être conservé.
 2. A très haute fréquence (ce qui n'est probablement pas atteint en électrolocation), en présence d'un milieu peu conducteur, les permittivités dominant dans le raccordement, tandis que la densité surfacique de charge libre devient très petite (seule la polarisation a le temps de réagir) : le milieu peut être associé à un pur diélectrique et nous obtenons des expressions valables dans le régime de l'électrostatique.
-

3. En supposant que le domaine $\mathcal{D}^+$ est rempli d'un fluide modérément conducteur, (comme l'eau), alors que le domaine $\mathcal{D}^-$ est fait d'un matériau purement isolant, i.e. $\gamma^- \ll \gamma^+$, nous en déduisons à l'aide de (2.48) :

$$E_{\perp}^+ = \frac{\tilde{\gamma}^-}{\tilde{\gamma}^+} \times E_{\text{appl},\perp}(\mathbf{r}) \simeq 0 \text{ et } E_{\perp}^- \simeq 2E_{\text{appl},\perp}, \quad (2.50)$$

ce qui signifie que, pour un champ appliqué donné, la composante normale du champ électrique total extérieur devient faible, conformément à l'intuition selon laquelle un courant ne pénètre pas l'isolant. Nous avons aussi :

$$\sigma_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = -2\epsilon_0 E_{\text{appl},\perp}(\mathbf{r}), \quad (2.51)$$

ce qui montre que l'interface $\mathcal{S}$ se charge afin de dévier le courant électrique lui parvenant de $\mathcal{D}^+$. Pour cette situation physique, la condition de raccordement se simplifie en une condition de Neumann sur la frontière de $\mathcal{D}^+$.

4. En procédant de manière similaire dans le cas d'un domaine fait d'un matériau purement conducteur, nous obtenons $\gamma^- \gg \gamma^+$, ce qui implique du fait de (2.44), que pour un courant sortant donné, on ait :

$$E_{\perp}^- = \frac{\tilde{\gamma}^+}{\tilde{\gamma}^-} \times E_{\perp}^+(\mathbf{r}) \simeq 0 \quad (2.52)$$

A proprement parler, il s'agit de la condition de Neumann pour le champ sur $\mathcal{D}^-$. Nous devons alors trouver la solution du potentiel dans ce sous-domaine et la prendre sur $\mathcal{S}$, comme une condition de Dirichlet pour les potentiels sur $\mathcal{D}^+$. Comme il est clair que la densité volumique de courant est finie dans $\mathcal{D}^-$, on peut aisément conclure que, quelle que soit la forme du courant, nous avons $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\gamma^-$ dans le volume $\mathcal{D}^-$. Cela signifie que la propriété (2.52) est vraie non seulement pour tous les points $\mathbf{r}$ de la frontière, mais aussi pour tous les points de $\mathcal{D}^-$ situés sur les lignes de courant passant à travers $\mathcal{S}$ aux points $\mathbf{r}$. Comme le champ électrique est bien plus faible dans $\mathcal{D}^-$ que dans $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}^-$ peut être considéré comme une équipotentielle :

$$V(\mathbf{r}) \simeq \text{cst}, \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{S}. \quad (2.53)$$

Les points 3 et 4 sont particulièrement utiles pour les capteurs d'électrolocation, comme ils permettent d'associer une condition limite en chaque point de la surface du capteur et qu'ils permettent donc de résoudre l'équation de conservation de courant dans le domaine extérieur au capteur sans avoir à décrire aucune de ses composantes internes.

2.2 Méthode de résolution des équations de l'électrolocation

Nous montrons dans cette section comment nous pouvons résoudre les équations physiques de l'électrolocation établies dans la section précédente, dans le régime de l'électrocinétique quasi-statique. Nous montrons que dans ce régime et pour un profil de conductivité bien défini, cela revient à résoudre l'équation de Laplace en tout point du domaine occupé par le fluide environnant le capteur et les objets. Comme en pratique nous ne pouvons imposer ou mesurer le courant (ou le potentiel) qu'en surface du capteur, nous introduisons la formulation intégrale aux frontières. Nous montrons ensuite qu'une discrétisation

de cette formulation en surface de tous les objets et capteurs du domaine, suivant la méthode numérique BEM, permet d'aboutir à un système algébrique d'équations linéaires que l'on peut résoudre avec un solveur conventionnel. Nous attirons l'attention du lecteur en rappelant que tout ce qui est dans cette section a déjà été établi, avec un peu plus de détails, dans la deuxième section du premier rapport du projet ANGELS [Lebastard et al., 2010b]

2.2.1 L'équation de Laplace

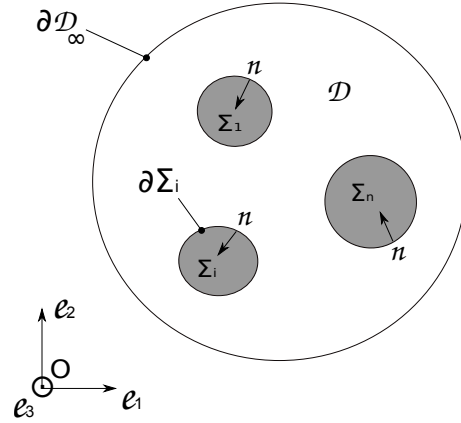


FIGURE 2.3 – Définition mathématique du domaine

Assimilons d'un point de vue purement mathématique maintenant notre domaine physique à un domaine géométrique $\mathcal{D}_\infty$ (fig. 2.3) de contour $\partial\mathcal{D}_\infty$ contenant les sous domaines $\mathcal{D}$ et $\{\Sigma_i, i = 1..n\}$. Le premier sous domaine faisant référence au fluide conducteur, et les autres, aux capteurs et objets dont nous venons de donner les propriétés physiques à la section précédente. Tout le système est muni du repère galiléen cartésien $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ et chaque point du domaine est repéré par le vecteur $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ (notation d'Einstein). On définit par rapport au sous domaine $\mathcal{D}$, la normale sortante $\mathbf{n}$ en chaque point de $\partial\mathcal{D}$. D'après notre précédente étude physique, les états électriques en chaque point du domaine $\mathcal{D}_\infty$ peuvent être déterminés instantanément, dans le régime électrocinétique quasi-statique. Cela revient d'après (2.17), à négliger la partie imaginaire de l'admittance. Si d'autre part, on considère, comme en tomographie que les courants électromoteurs sont nuls dans le domaine $\mathcal{D}$ que l'on examine, l'équation locale de la conservation (2.38) devient :

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad (2.54)$$

où ϕ est le potentiel total. Pour simplifier l'équation nous considérerons que la conductivité du fluide occupant le domaine $\mathcal{D}$ est constante. Ce qui nous conduit à l'équation de Laplace :

$$\Delta \phi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.55)$$

que nous compléterons par des conditions limites imposées à la surface de nos capteurs pour électrolocaliser les objets, lesquels seront considérés comme passifs (sans courant électromoteur, soit une situation similaire à la tomographie). Nous proposons dans ce qui suit une méthode pour déterminer ϕ , solution du problème direct de l'électrolocation.

2.2.2 Résolution de l'équation de Laplace

Pour résoudre le problème direct de l'électrolocation en régime électrocinétique quasi-statique, quelle que soit la géométrie des sous domaines, nous ne pouvons pas employer des solutions analytiques. Dans le projet ANGELS, nous proposons de recourir à la méthode numérique de résolution sur des éléments de frontière : la BEM (Boundary Elements Method) [Liu, 2009]. Cette approche est bien adaptée à la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires que nous avons l'habitude de rencontrer en physique classique. Contrairement à la méthode des éléments finis, la FEM (Finite Elements Method), la BEM ne requiert que le calcul des grandeurs aux frontières du domaine et des sous domaines, ce qui réduit considérablement la complexité des opérations de maillage. Dans son fondement, cette approche utilise les fonctions et les théorèmes de Green que nous rappelons brièvement dans les paragraphes suivants.

2.2.2.1 Fonctions de Green

Toute fonction G de Green peut être définie, au sens des distributions, à partir de son laplacien :

$$\Delta G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.56)$$

où $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_0$ sont deux points de $\mathcal{D}$ dans le repère $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ et $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ est la distribution de Dirac en $\mathbf{x}_0$. Avec cette définition, on peut montrer qu'une fonction G possible peut s'écrire :

$$G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r}, \text{ avec : } r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \quad (2.57)$$

Cette solution est souvent appelée *source singulière* ou plus simplement *singularité* du fait de son caractère divergent en $\mathbf{x}_0$. De la même manière, la dérivée partielle $(\partial G / \partial n)(\mathbf{x})$ suivant la normale $\mathbf{n}$ de cette fonction, définit une autre fonction $F(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ de Green.

Pour obtenir un système algébrique d'équations capable de résoudre notre problème physique de départ, commençons par écrire une forme faible de l'équation de Laplace :

$$\int_{\mathcal{D}} \Psi(\mathbf{x}) \Delta \phi(\mathbf{x}) dv = 0, \quad (2.58)$$

où Ψ est appelée *la fonction test*. Pour diminuer le degré de continuité de l'espace des fonctions test et des solutions ϕ , procédons à une intégration par parties de (2.58), ce qui nous donne :

$$\int_{\mathcal{D}} \Psi \Delta \phi dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \Psi(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds - \int_{\mathcal{D}} \nabla \Psi \cdot \nabla \phi dv. \quad (2.59)$$

En supposant que les fonctions test et que les solutions appartiennent aux mêmes espaces, nous pouvons les intervertir dans la dernière relation et écrire *la première identité de Green* :

$$\int_{\mathcal{D}} \phi \Delta \Psi dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds - \int_{\mathcal{D}} \nabla \phi \cdot \nabla \Psi dv. \quad (2.60)$$

En combinant les deux dernières relations, nous obtenons *la seconde identité de Green* :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \left(\Psi \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial\Psi}{\partial n} \right) ds = \int_{\mathcal{D}} (\Psi \Delta\phi - \phi \Delta\Psi) dv. \quad (2.61)$$

A présent, en adoptant comme fonction test la fonction de Green $\Psi(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = 1/(4\pi r(\mathbf{x}))$, et en invoquant sa définition (i.e. $\Delta\Psi = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$), nous obtenons pour tout point $\mathbf{x}_0$ de $\mathcal{D}$:

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial\mathcal{D}} G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) E_{\perp}^+(\mathbf{x}) ds - \int_{\partial\mathcal{D}} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) ds, \quad (2.62)$$

où $E_{\perp}^+(\mathbf{x}) = (\partial\phi/\partial n)(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}$. La relation (2.62) permet d'obtenir ϕ au sein du domaine pourvu qu'on connaisse ϕ et $E_{\perp}^+$ sur la frontière du domaine, ce qui n'est en général pas le cas. Pour les conditions de Dirichlet : ϕ est connu sur $\partial\mathcal{D}$ mais $E_{\perp}^+$ est inconnu.

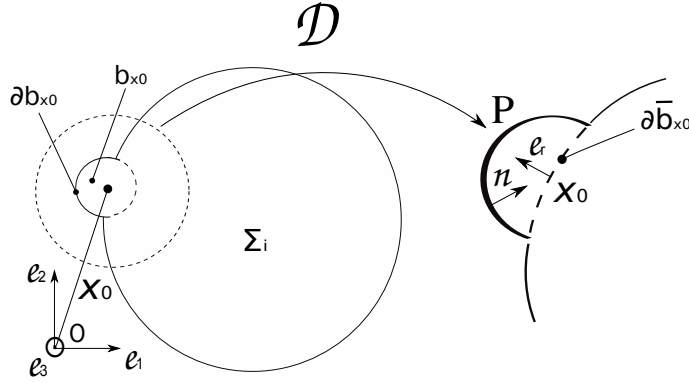


FIGURE 2.4 – Définition des frontières pour l'évaluation du potentiel sur $\partial\mathcal{D}$

Pour aboutir à une équation implicite entre ϕ et $E_{\perp}$ sur le domaine, considérons (2.61), mais cette fois-ci sur le domaine restreint $\mathcal{D}_r = \mathcal{D} - b_{\mathbf{x}_0}(\epsilon)$, où $b_{\mathbf{x}_0}(\epsilon)$ est une petite boule de rayon ϵ centrée sur $\mathbf{x}_0$. Dans ces conditions, et comme $\partial\mathcal{D}_r = \partial\mathcal{D} - \partial\bar{b}_{\mathbf{x}_0} \cup \partial b_{\mathbf{x}_0}|_{\mathcal{D}}$ (fig. 2.4), (2.61) peut se réécrire comme suit :

$$\int_{\partial\mathcal{D}-\partial\bar{b}_{\mathbf{x}_0}} (GE_{\perp}^+ - F\phi) ds + \int_{\partial b_{\mathbf{x}_0}|_{\mathcal{D}}} (GE_{\perp}^+ - F\phi) ds = \int_{\mathcal{D}_r} (G\Delta\phi - \phi\Delta G) dv, \quad (2.63)$$

où cette fois, le second membre est nul, car les deux fonctions sont harmoniques (i.e. $\Delta\phi = \Delta G = 0$) dans le domaine d'intégration $\mathcal{D}_r$. Ainsi, la dernière équation peut se simplifier comme suit :

$$\int_{\partial b_{\mathbf{x}_0}|_{\mathcal{D}}} (F\phi - GE_{\perp}^+) ds = \int_{\partial\mathcal{D}-\partial\bar{b}_{\mathbf{x}_0}} (GE_{\perp}^+ - F\phi) ds \quad (2.64)$$

Maintenant, cherchons à déterminer ce que devient cette relation quand le rayon de la boule centrée sur $\mathbf{x}_0$ tend vers 0, i.e. $\epsilon \rightarrow 0$. Dans ce cas, ϕ étant continue, nous avons : $\phi(\mathbf{x}) \simeq \phi(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in \partial b_{\mathbf{x}_0}$ et le premier membre de la dernière relation peut se réécrire de la manière suivante :

$$\int_{\partial b_{\mathbf{x}_0} | \mathcal{D}} (F\phi - GE_{\perp}^+) ds \simeq \phi(\mathbf{x}_0) \int_{\partial b_{\mathbf{x}_0}} F ds - \int_{\partial b_{\mathbf{x}_0}} GE_{\perp}^+ ds. \quad (2.65)$$

Cependant, nous avons sur la sphère de centre $\mathbf{x}_0$: $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} = -1$ et par conséquent : $F = 1/(4\pi) \times (\partial(1/r)/\partial n) = 1/(4\pi) \times (-\mathbf{e}_r/r^2) \cdot \mathbf{n} = 1/(4\pi r^2)$, alors qu'en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) : $ds = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Dans ces conditions, nous obtenons, avec $0 < \phi < \pi$ dans le cas où la frontière est lisse en $\mathbf{x}_0$:

$$\int_{\partial b_{\mathbf{x}_0} | \mathcal{D}} (F\phi - GE_{\perp}^+) ds \simeq \phi(\mathbf{x}_0) \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \sin\theta d\theta d\phi - \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{E_{\perp}^+}{4\pi\varepsilon} \varepsilon^2 \sin\theta d\theta \quad (2.66)$$

Enfin, comme $E_{\perp}^+$ est nécessairement borné sur $\partial b_{\mathbf{x}_0}$, le dernier terme de (2.66) s'annule à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. De même quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $(\partial\mathcal{D} - \partial\bar{b}_{\mathbf{x}_0}) \rightarrow \partial\mathcal{D} - \mathbf{x}_0$ et nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial\mathcal{D}-\mathbf{x}_0} G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) E_{\perp}^+(\mathbf{x}) ds - \int_{\partial\mathcal{D}-\mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) ds \quad (2.67)$$

Cette dernière relation doit être comparée à (2.61). Finalement, dans le cas où la frontière n'est pas toujours lisse en $\mathbf{x}_0$, le premier membre de (2.61) doit être multiplié par $\Omega(\mathbf{x}_0)/(4\pi)$ où $\Omega(\mathbf{x}_0)$ est l'angle solide sous lequel le domaine $\mathcal{D}$ apparaît depuis $\mathbf{x}_0$.

Fondée sur la relation (2.67), la méthode directe BEM consiste à exprimer numériquement le potentiel ϕ et le champ $E_{\perp}^+$ sur les frontières de $\mathcal{D}$ en lesquelles ils ne sont pas connus sachant que, en d'autres frontières, ces quantités doivent satisfaire à des conditions limites bien définies.

2.2.2.2 La méthode numérique

Pour résoudre (2.67), nous commençons par décomposer la surface de la frontière $\partial\mathcal{D}$ en N éléments :

$$\partial\mathcal{D} = \cup_{j=1}^N \mathcal{S}_j. \quad (2.68)$$

Ainsi, les fonctions ϕ et $E_{\perp}^+$ sont approximées sur chacun des éléments par des polynômes d'interpolation définis en chacun des noeuds des éléments. En adoptant des valeurs constantes sur chacun des éléments, nous obtenons $2N$ inconnues.

Une fois cette partition spatiale exprimée dans (2.67), l'interpolation nous permet d'écrire la valeur du potentiel au centre des éléments, avec les conditions limites associées. Ainsi, le potentiel ϕ_i évalué en $\mathbf{x}_i$, centre du i -ème élément, peut être exprimé comme la somme discrète des contributions dues aux éléments $j = 1, \dots, N$ (fig 2.5) :

$$\forall i = 1, \dots, N, \quad \frac{1}{2}\phi_i = \sum_{j=1}^N E_{\perp,j}^+ \int_{\mathcal{S}_j} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) ds - \sum_{j=1; j \neq i}^N \phi_j \int_{\mathcal{S}_j} F(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) ds, \quad (2.69)$$

où r est la norme de $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|$. Cette dernière équation peut alors être transformée en un système de N équations linéaires :

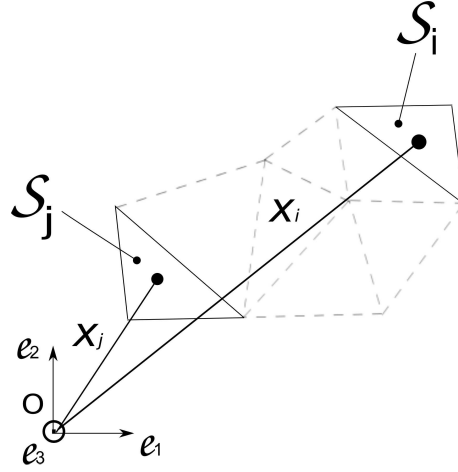


FIGURE 2.5 – Interaction entre deux éléments

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1,N} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N1} & f_{N2} & \cdots & f_{N,N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1,N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \cdots & g_{N,N} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{\perp,1}^+ \\ E_{\perp,2}^+ \\ \vdots \\ E_{\perp,N}^+ \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

où les composantes $f_{i,j}$ et $g_{i,j}$ des matrices sont définies comme suit :

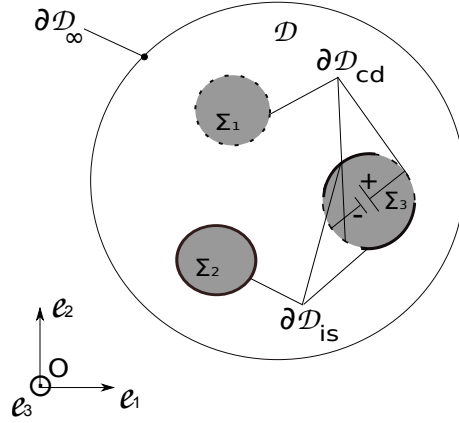
$$f_{i,j} = \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|} \right) ds, \text{ et } g_{i,j} = \int_{S_j} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|} ds. \quad (2.71)$$

Dans la BEM conventionnelle, le système linéaire complet est obtenu en appliquant des conditions limites aux vecteurs des potentiels ϕ et des champs $\mathbf{E}_{\perp}^+$ apparaissant dans la relation (2.70). Finalement, une séparation entre les grandeurs connues et les grandeurs inconnues du système conduit à un système linéaire explicite de la forme :

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}, \quad (2.72)$$

où $\mathbf{A}$ est appelée "matrice d'interaction", $\boldsymbol{\lambda}$ est le vecteur des inconnus et $\mathbf{B}$ est le second membre. Il vaut la peine ici de s'arrêter un instant et de remarquer que la construction de $\mathbf{A}$ requiert $O(N^2)$ opérations ainsi qu'une grande exploitation des ressources en mémoire. Cela est dû au fait que ces matrices sont en général denses et non symétriques. De plus, les résolutions standards fondées sur le pivot de Gauss, auraient nécessité $O(N^3)$ opérations. Pour contourner ces difficultés, nous utilisons des résolutions itératives comme ce que propose le solveur GMRES (Generalized Minimum RESidual). Même si avec ce solveur, la BEM (dans sa formulation conventionnelle), reste moins performante pour résoudre des systèmes de grande taille (avec des valeurs usuelles de $N > 10000$) que les méthodes basées sur les volumes finis ou les éléments finis, elle demande un maillage beaucoup plus simple, consistant à décrire seulement les surfaces des objets et capteurs de la scène.

Dans un problème d'électrocinétique en général, les conditions aux frontières dépendent des propriétés électriques des matériaux. Dans la suite, les matériaux seront considérés

FIGURE 2.6 – Conditions limites imposées sur $\partial\mathcal{D}$

de deux types, soit isolant, soit conducteur. Dans ces conditions, la frontière de $\mathcal{D}$ est partitionnée comme suit :

$$\partial\mathcal{D} = \partial\mathcal{D}_\infty \cup \partial\mathcal{D}_{is} \cup \partial\mathcal{D}_{cd}, \quad (2.73)$$

où $\partial\mathcal{D}_{is}$ et $\partial\mathcal{D}_{cd}$ correspondent aux parties isolantes et conductrices de $\partial\mathcal{D}$, respectivement. Explicitons maintenant les conditions limites sur cette partition.

- Conditions limites sur $\partial\mathcal{D}_\infty$:

nous supposons que les éléments de cette frontière sont suffisamment loin des sources de potentiel et courant pour ne pas subir leur influence (poisson, capteur, robot...). Ce qui se traduit par les expressions suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}, \phi(\mathbf{x}) = 0, \text{ et } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.74)$$

- Conditions limites sur $\partial\mathcal{D}_{is}$:

Ici, les conditions limites sur les éléments d'une frontières isolante sont données par (2.50) et se traduisent par une condition de Neumann :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}_{is}, \mathbf{E}_\perp^+ = 0, \quad (2.75)$$

alors que les potentiels y demeurent inconnus. Cette dernière condition est également valable évidemment sur une éventuelle surface externe.

- Conditions limites sur $\partial\mathcal{D}_{cd}$:

Ici deux cas sont à considérer, selon que le sous-domain soit actif (comme le capteur, le poisson ou le robot), ou passif. En prenant pour exemple la scène représentée dans la figure 2.6, le sous-domaine actif Σ_3 est constitué sur sa frontière de deux parties isolantes (trait continu) et de deux parties conductrices Σ_{3a} et Σ_{3b} (trait discontinu). Entre les deux dernières est établie une tension, pour symboliquement représenter le capteur. Nous pouvons donc écrire, conformément à (2.53) :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Sigma_{3a}, \phi(\mathbf{x}) = \phi_{3a}, \forall \mathbf{x} \in \partial\Sigma_{3b}, \phi(\mathbf{x}) = \phi_{3b}, \quad (2.76)$$

où ϕ_{3a} et ϕ_{3b} sont les potentiels imposés sur les électrodes $\partial\Sigma_{3a}$ et $\partial\Sigma_{3b}$, tandis que $\mathbf{E}_\perp^+$ sur ces deux surfaces y est inconnu. Le sous-domaine Σ_1 de la scène 2.6 n'est soumis à aucune tension, et joue le rôle d'un objet passif conducteur. Bien que les potentiel et champ soient inconnus en surface de cet objet, nous pouvons écrire du fait de (2.53) et que l'objet reste neutre électriquement (somme des courants nulle en surface) :

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\Sigma_1, \phi(\mathbf{x}) = \text{cst}, \text{ et } \int_{\partial\Sigma_1} E_\perp^+(\mathbf{x}) ds = 0. \quad (2.77)$$

Nous terminons ce paragraphe en précisant au lecteur que nous avons bâti pour le projet ANGELS un solveur BEM "maison" qui servira de référence pour les approches réduites.

2.2.3 Approximation de la formulation intégrale

Revenons à présent sur la formulation intégrale (2.62) des équations de l'électrolocation en régime quasi-statique (RQS), et tentons d'en faire une approximation. Même si la méthode BEM demeure l'outil fiable pour obtenir des solutions exactes des équations de l'électrolocation, nous ne pourrons pas toujours y faire appel et nous avons besoin de certains cas idéaux, ne serait-ce que pour nous forger une intuition. Pour cela, imaginons un capteur constitué de N électrodes sphériques, soit un ensemble $\{\mathcal{C}_i; i = 1..N\}$, en présence d'une petite sphère conductrice (fig. 2.7).

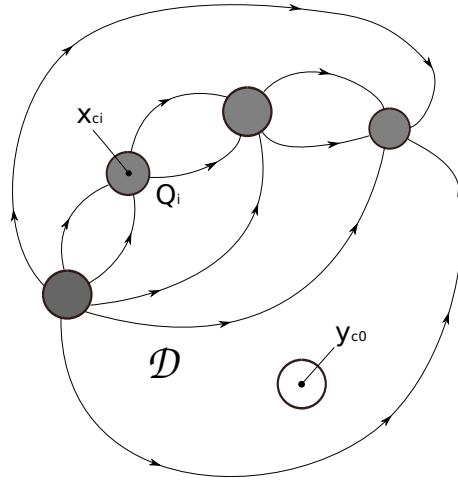


FIGURE 2.7 – Une scène idéale : un capteur composé d'électrodes sphériques (gris) en présence d'une sphère conductrice (blanc). Les lignes en trait noir représentent les courants émis par ce capteur. Ici le capteur fonctionne en mode I-U, c'est à dire que l'on impose les courants et que l'on mesure les potentiels.

Pour tout point $\mathbf{y}$ à la surface de la sphère $\mathcal{O}$, le domaine $\mathcal{D}$ apparaît sous un angle de 2π stéradians. Nous avons d'après la formulation de Green (2.62) :

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\mathcal{C}_i} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}'|} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds' + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds' \quad (2.78)$$

En se rappelant que le potentiel est constant sur une surface totalement conductrice, on peut simplifier cette formulation en écrivant d'après (2.53) :

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) = \sum_i \left(\int_{\partial\mathcal{C}_i} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}'|} ds' - \phi(\mathbf{x}_i) \int_{\partial\mathcal{C}_i} \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}'|}\right)}{\partial n'} ds' \right) + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds', \quad (2.79)$$

où l'on a posé $\mathbf{y}$ un point de la surface de l'objet et $\mathbf{x}_i$ un point de la i -ème électrode du capteur. La mise en facteur du potentiel amène une simplification. En effet, on a :

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}'|}\right)}{\partial n'} ds' = - \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{y}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|^3} \cdot \mathbf{n}' ds' = -d\Omega', \quad (2.80)$$

où $d\Omega'$ est l'angle solide élémentaire vu depuis le point $\mathbf{y}$ au point $\mathbf{x}'$ sur la surface d'une électrode. On peut invoquer le fait que dans notre cas *les électrodes sont toutes des surfaces fermées* et, du fait que le point $\mathbf{y}$ par rapport auquel on voit ces électrodes est extérieur, il vient que l'intégrale sur chaque surface d'électrode de l'angle solide élémentaire est nulle. On en déduit alors une simplification de la formulation (2.79) :

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) = \sum_i \int_{\partial\mathcal{C}_i} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}'|} ds' + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds' \quad (2.81)$$

Continuons dans notre simplification. Considérons comme seconde hypothèse que *la dimension des électrodes est suffisamment petite devant la distance à l'objet*. Ceci nous autorise à écrire :

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) \simeq \sum_i \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_{ci}|} \int_{\partial\mathcal{C}_i} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{x}') ds' + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds', \quad (2.82)$$

où l'on a introduit les centres $\mathbf{x}_{ci}$ des électrodes. Conformément au théorème de Gauss, nous savons aussi que pour une surface fermée, nous avons :

$$\oint \nabla\phi \cdot \mathbf{n} ds = \frac{Q}{\epsilon}, \quad (2.83)$$

où Q est la charge totale portée par la surface et ϵ est la permittivité diélectrique du milieu extérieur. On en déduit dès lors $\forall \mathbf{y} \in \partial\mathcal{O}$:

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) \simeq \sum_i \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}_{ci}|} \frac{Q_i}{\epsilon} + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds' \quad (2.84)$$

Le terme sous la somme s'identifie simplement (au coefficient 4π près) au potentiel ϕ_0 créé par une distribution de charges ponctuelles localisées aux centres des électrodes, défini comme :

$$\phi_0(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}_{ci}|} \frac{Q_i}{\epsilon}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}. \quad (2.85)$$

Nous pouvons alors réécrire (2.84) comme suit :

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) \simeq 4\pi\phi_0 + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds' \quad (2.86)$$

A ce stade, nous devons nous arrêter pour comprendre qu'implicitement, il est fait une autre hypothèse. En effet, le fait de s'être placé *loin du capteur* a permis de négliger des effets d'interactions entre les électrodes, qui se manifestent au premier ordre comme des dipôles, dont l'intensité varie comme $1/r^2$ (où r est la distance au capteur) soit à une intensité nettement plus faible et moins perceptible que la contribution des charges ponctuelles, qui varie elle en $1/r$. Nous devons donc ajouter qu'il est fait *une troisième hypothèse* permettant de négliger les interactions entre les électrodes, ce qui revient à dire que *les électrodes sont séparées par des distances bien plus grandes que leur taille*.

Pour continuer un peu plus notre simplification, considérons une sphère totalement conductrice. Etant conductrice, le potentiel à sa surface y est constant (2.53).

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) \simeq 4\pi\phi_0 + \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial\phi(\mathbf{y}')}{\partial n'} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} ds' - \phi(\mathbf{y}) \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} ds' \quad (2.87)$$

Dans ce formalisme nous devons mentionner que la normale est prise comme pointant vers l'intérieur (fig. 2.3). Définissant dans le cas d'une sphère, la normale comme étant égale à $-\mathbf{u}_r$, où ce dernier est un vecteur de la base sphérique exprimant la composante radiale dont l'origine est prise au centre de l'objet, l'expression (2.80) nous permet d'écrire :

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) \simeq 4\pi\phi_0 + \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} ds' - \phi(\mathbf{y}) \int_{\partial\mathcal{O}} d\Omega'. \quad (2.88)$$

$\mathbf{y}$ étant un point de la surface de l'objet, nous avons :

$$2\pi\phi(\mathbf{y}) \simeq 4\pi\phi_0 + \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} ds' - 2\pi\phi(\mathbf{y}), \quad (2.89)$$

soit encore :

$$4\pi\phi(\mathbf{y}) \simeq 4\pi\phi_0 + \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} ds'. \quad (2.90)$$

Nous savons que le potentiel satisfait l'équation de Laplace (2.55), et donc peut être exprimé de manière générale sous la forme suivante [Jackson, 1962] :

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_l \sum_{m=-l}^l \left(A_{l,m} r^l + B_{l,m} r^{-(l+1)} \right) Y_{l,m}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad (2.91)$$

où les $A_{l,m}$ et $B_{l,m}$ sont des coefficients réels, $Y_{l,m}$ est l'élément d'ordre (l, m) de la base des harmoniques sphériques et r est la norme de $\mathbf{x} - \mathbf{y}_0$. Du fait que l'on peut assimiler

l'objet à un dipôle et qu'il possède une symétrie de révolution, on peut montrer qu'il n'est nul besoin d'aller plus loin que $l = 1$ avec $m = 0$ dans le développement du potentiel total ϕ^2 , si bien qu'on peut écrire :

$$\phi(\mathbf{x}) = \left(A_{0,0} + \frac{B_{0,0}}{r} \right) Y_{0,0} + \left(A_{1,0}r + \frac{B_{1,0}}{r^2} \right) Y_{1,0}. \quad (2.92)$$

De manière explicite compte tenu de l'expression des harmoniques sphériques, on peut écrire $\forall \mathbf{y} \in \partial\mathcal{O}$:

$$\phi(\mathbf{y}) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos(\theta) \quad (2.93)$$

Où A_0 , B_0 , A_1 et B_1 sont des constantes réelles à déterminer, et θ est l'angle entre le champ appliqué $(-\nabla\phi_0)$ au sein de la sphère et le vecteur position $\mathbf{y}$ dont l'origine est prise au centre de la sphère et dont la norme vaut r . Appelons $\mathbf{y}_{c0}$ le centre de la sphère. Soit maintenant $\mathbf{y}$, le point d'intersection entre la sphère avec la droite passant par $\mathbf{y}_{c0}$ et parallèle à $\mathbf{E}_0$. Définissons l'angle θ tel que : $\theta = (-\nabla\phi_0, \mathbf{y}' - \mathbf{y}_{c0}) = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{c0}, \mathbf{y}' - \mathbf{y}_{c0})$. On peut injecter (2.93) dans (2.90), ce qui nous permet d'obtenir dans le cas d'une sphère de rayon a :

$$\phi(\mathbf{y}) \simeq \phi_0(\mathbf{y}) - 2B_0\sqrt{2} + \frac{a}{3} \left(A_1 - \frac{2B_1}{a^3} \right). \quad (2.94)$$

Prenons maintenant un second point $\mathbf{y}_1$ placé diamétralement sur la sphère en opposition à $\mathbf{y}$. Les calculs sont similaires aux précédents :

$$\phi(\mathbf{y}_1) \simeq \phi_0(\mathbf{y}_1) - 2B_0\sqrt{2} - \frac{a}{3} \left(A_1 - \frac{2B_1}{a^3} \right) \quad (2.95)$$

En émettant maintenant comme *quatrième hypothèse* que le champ appliqué par le capteur $\mathbf{E}_0 = -\nabla\phi_0$ est uniforme dans le domaine de la sphère, nous pouvons écrire :

$$\phi_0(\mathbf{y}) - \phi_0(\mathbf{y}_1) \simeq -2a\mathbf{E}_0. \quad (2.96)$$

Comme le potentiel est constant sur la sphère on a $\phi(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{y}_1)$. Si nous soustrayons (2.94) à (2.95), nous obtenons :

$$A_1 - \frac{2B_1}{a^3} = 3\mathbf{E}_0. \quad (2.97)$$

Imposer un potentiel constant à la surface de la sphère implique aussi que le second terme de la décomposition du potentiel (en facteur de $\cos(\theta)$ dans (2.93)) doit être égal à 0 :

$$A_1 a + \frac{B_1}{a^2} = 0. \quad (2.98)$$

Les constantes A_1 et B_1 peuvent être déterminées³. Nous en déduisons alors que :

$$\begin{aligned} A_1 &= E_0 \\ B_1 &= -a^3 E_0, \end{aligned} \quad (2.99)$$

2. Cela revient à orienter l'axe (Oz) dans la direction du champ électrique $\mathbf{E}_0$ associé à ϕ_0

3. Nous pourrions également déterminer B_0 (inutile ici) en appliquant le théorème de Gauss sur la sphère en exploitant le fait que la charge totale doit être nulle

ce qui nous permet donc d'exprimer le potentiel ϕ complet en fonction de ϕ_0 .

A présent, réappliquons la formulation intégrale (2.62), mais cette fois à un point $\mathbf{x}_i$ situé à la surface d'une électrode $\mathcal{C}_i$ du capteur. On a :

$$2\pi\phi(\mathbf{x}_i) = \sum_j \left[\int_{\partial\mathcal{C}_j} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|}\right)}{\partial n'} \right) ds' \right] + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{x}_i|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds', \quad (2.100)$$

ce qui, du fait que le potentiel est constant sur chaque électrode, peut se réécrire comme suit :

$$2\pi\phi(\mathbf{x}_i) = \sum_j \left[\int_{\partial\mathcal{C}_j} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|} ds' \right] - \sum_j \left[\phi(\mathbf{x}_j) \int_{\partial\mathcal{C}_j} \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|}\right)}{\partial n'} ds' \right] + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{x}_i|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds'. \quad (2.101)$$

Comme on a :

$$\int_{\partial\mathcal{C}_j} \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|}\right)}{\partial n'} ds' = 2\pi\delta_{i,j}, \quad (2.102)$$

la relation (2.103) s'écrit plus simplement comme suit :

$$4\pi\phi(\mathbf{x}_i) = \sum_j \left[\int_{\partial\mathcal{C}_j} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|} ds' \right] + \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{y}') \frac{1}{|\mathbf{y}' - \mathbf{x}_i|} - \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial\left(\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}'|}\right)}{\partial n'} \right) ds'. \quad (2.103)$$

On peut montrer en procédant aux mêmes simplifications que précédemment, lorsque l'on appliquait (2.62) à un point $\mathbf{y}$ situé à la surface de la sphère, que nous obtenons :

$$\phi(\mathbf{x}_i) \simeq \phi_0(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}'|} \frac{\partial\phi}{\partial n'} ds', \quad (2.104)$$

où $\phi_0(\mathbf{x}_i)$ est défini comme :

$$\phi_0(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{4\pi} \sum_j \left[\int_{\partial\mathcal{C}_j} \frac{\partial\phi}{\partial n'}(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i|} ds' \right] \quad (2.105)$$

et désigne le potentiel appliqué par le capteur sur la i -ème électrode, par des électrodes suffisamment éloignées les unes des autres relativement à leur taille, quand on leur applique des courants $\partial\phi/\partial n'$ (au coefficient $\tilde{\gamma}$ près en posant que les courants $\mathbf{j}$ sont tels que $|\mathbf{j}| = -\gamma_w (\partial\phi/\partial n')$ d'après la loi d'Ohm locale (2.6) et l'équation de Maxwell Ampère (2.5) avec $\tilde{\gamma}$ l'admittance du milieu extérieur) en chacun de leurs points $\mathbf{x}'$. $\phi_0(\mathbf{x}_i)$ représente en quelque sorte le terme d'auto-influence du capteur par analogie au champ basal que le poisson crée et mesure en l'absence de perturbation extérieure. Si nous développons au premier ordre les termes $1/|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}'|$ et $\partial\phi/\partial n'$ (en se servant pour ce dernier de

l'expression (2.93) dans l'intégrale de (2.104)), dans la base des harmoniques sphériques, en prenant le centre de la sphère $\mathbf{y}_{c0}$ comme origine, nous obtenons :

$$\phi(\mathbf{x}_i) \simeq \phi_C + \frac{1}{3} \frac{a^3 \cos(\beta_i)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_{c0}|^2} \left(A_1 - \frac{2B_1}{a^3} \right), \text{ avec } \beta_i = (\mathbf{E}_0, \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_{c0}) \quad (2.106)$$

En injectant les valeurs de A_1 et B_1 obtenues avec (2.99), nous avons finalement :

$$\phi(\mathbf{x}_i) \simeq \phi_C + \frac{a^3 E_0 \cos(\beta_i)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_{c0}|^2}. \quad (2.107)$$

Cette dernière relation énonce que, en présence d'une sphère conductrice plongée dans un milieu conducteur de conductivité uniforme, en régime électrocinétique quasi statique, et avec 4 autres hypothèses :

1. le capteur est constitué d'électrodes sphériques conductrices fermées
2. la dimension des électrodes est petite devant la distance du capteur à l'objet
3. la dimension des électrodes est petite devant la distance de séparation des électrodes
4. le champ appliqué par le capteur est constant au sein de l'objet, assimilé ici à une sphère ,

le potentiel total à la surface des électrodes sphériques fermées du capteur, se déduit de la somme du potentiel *basal*, i.e. en l'absence d'objet, et d'une perturbation liée à l'existence de la sphère. Cette perturbation, nous l'identifions à la perturbation établie par Rasnow (1.1), suivant les mêmes hypothèses simplicatrices, à ceci-près que la sphère dans le cas présent est totalement conductrice, i.e. $\gamma_1 = \gamma \ll \gamma_2$, que le champ tout comme les différentes composantes du potentiel total, perturbation y compris, sont générés sans retard, et que la partie imaginaire de l'admittance est négligeable devant sa partie réelle, conformément à l'approximation quasi-statique du régime électrocinétique.

2.3 Bilan

Nous avons établi ici les équations de l'électrolocation, dans l'approximation d'un régime électrocinétique quasi-statique (RQS), compatible avec la portée des capteurs d'électrolocation, en général assez faible. Sous l'approximation du RQS, nous avons montré que nous parvenions à l'équation de Laplace, valable en tout point du fluide environnant le capteur. Du fait que le fonctionnement du capteur nécessite que les états électriques soient mesurés et imposés en surface du capteur, nous avons introduit la formulation intégrale aux frontières et avons transporté ainsi les équations de l'électrolocation en surface du capteur. Sous cette formulation, les équations de l'électrolocation en RQS peuvent se résoudre à l'aide d'une méthode numérique, la BEM. Même si la BEM fournit un résultat précis, les calculs demandent un temps considérable, alors que dans le projet ANGELS, il est exigé une solution suffisamment rapide pour permettre au robot un évitement et/ou une détection d'objet en temps réel. Le choix d'une géométrie de capteur, composée d'électrodes sphériques suffisamment éloignées les unes des autres relativement à leur taille, rend possible l'écriture d'une solution analytique en potentiel, par l'approximation de la formulation intégrale, à la surface du capteur. En présence d'une petite sphère (elle aussi suffisamment éloignée du capteur relativement à la taille des électrodes et à la sienne)

dans le régime RQS, le potentiel total à la surface du capteur devient la somme du potentiel basal (émanant de charges ponctuelles) et d'un potentiel de perturbation clairement identifié comme l'expression de la perturbation de Rasnow. Ce comportement électrique simple, bien qu'issu d'une géométrie idéale, peut nous donner une idée d'une modélisation avancée d'une géométrie de capteur réaliste. On imagine alors que l'on pourrait à partir d'une géométrie bien définie de capteur, extirper un comportement électriquement simple comme celui venant d'une distribution d'électrodes sphériques.

Chapitre 3

Les capteurs d'électrolocation et la validation du modèle physique

Après avoir défini dans le chapitre précédent les équations de l'électrolocation et le principe de leur résolution dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire, nous présentons ici le capteur que nous avons mis au point dans le projet ANGELS ainsi qu'une première modélisation. Ce capteur, inspiré dans sa conception et son mode de fonctionnement par le poisson électrique, peut être exploité en bio-robotique pour la navigation et l'exploration sous-marine. Intégré à un robot sous-marin de morphologie bien définie, ce capteur peut être modélisé analytiquement, ce qui devrait conduire dans un futur proche à la mise en place d'un système robotique sous-marin de localisation et de reconnaissance d'objet en temps réel. Ce capteur peut à la fois être émetteur et récepteur et peut aussi se reconfigurer électriquement en temps réel pour permettre au robot d'accomplir des tâches basiques comme l'évitement d'obstacle ou la recherche d'un objet cible. L'objectif de ce chapitre est de décrire le capteur configuré en mode U-I, où la tension est imposée sur les diverses électrodes et les courants, mesurés. Le présent chapitre est ainsi structuré : dans la section 1, nous décrivons le principe de la mesure par l'électrolocation suivant le mode U-I et nous introduisons une première modélisation venant de la réduction de la formulation exacte des équations de l'électrolocation, que nous avons vue dans la dernière section du chapitre 2. Dans la section 2 nous détaillons les principes de la mesure par électrolocation. Dans la section suivante, nous montrons comment nous adaptons notre dispositif aux caractéristiques physico-chimiques de l'eau. Dans la section 4, une description complète de l'électronique est donnée. Dans la section 5, nous donnons des informations sur le banc d'essai. Dans la section 6, nous nous focalisons sur les résultats expérimentaux, que nous comparons avec le simulateur BEM. Nous profitons de la BEM pour valider dans cette section le modèle physique présenté au chapitre 2. Une attention particulière est donnée à la précision de la mesure, et à la sensibilité à deux paramètres physiques déterminants : la température et la conductivité. Nous montrons ensuite une validation de notre première réduction de modèle sur un de nos capteurs prototypes avant de dresser enfin un bilan relatif aux capteurs. Nous voulons attirer l'attention du lecteur, avant de commencer, en lui disant que tous les résultats présentés dans ce chapitre sont accessibles dans un rapport du projet ANGELS [Servagent et al., 2011a] et qu'il ont fait l'objet d'un article soumis à publication [Servagent et al., 2011b].

3.1 La physique du capteur

3.1.1 Principe de la mesure par électrolocation

Du point de la vue de la physique, le problème de l'électrolocation, comme nous l'avons vu au chapitre II, est essentiellement un problème d'électrocinétique. Tout comme le poisson électrique dans la nature, nous avons besoin de créer un champ électrique et de définir *une bulle de perception* (fig. 3.1) dans laquelle la présence d'un objet induit une perturbation électrique mesurable. Le sens électrique est une modalité sensorielle très riche puisqu'il permet au poisson de connaître la taille et la forme des objets ainsi que leur distance [Emde et al., 1998]. Nous inspirant des poissons africains appartenant à la famille des mormyrinés, nous avons construit un dispositif capable de produire un champ de nature dipolaire. Pour réaliser un tel champ, un groupe d'électrodes que l'on dénomme par *récepteurs* sont soumis à des tensions par rapport à une électrode de masse que l'on dénomme *émetteur* en milieu conducteur. Une telle configuration crée une boucle de courant autour du capteur, polarisant ainsi tout objet se trouvant proche, lequel induit en retour une perturbation des courants mesurée sur les récepteurs.

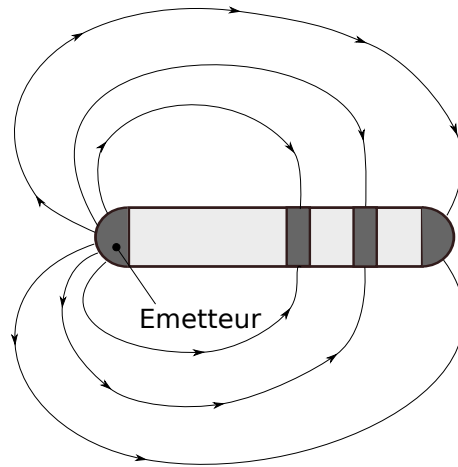


FIGURE 3.1 – Portrait des lignes de courant autour d'un capteur 4-électrodes (un émetteur et trois récepteurs). On peut définir la bulle de perception comme une fenêtre centrée sur le capteur dont les limites correspondraient aux lignes de courant encore suffisamment intenses pour induire une perturbation significative.

Structurellement, notre capteur prototype d'électrolocation consiste en un ensemble de groupes d'électrodes métalliques, la rigidité du système étant assurée au moyen de manchons cylindriques isolants (le *corps* du capteur) (fig. 3.2). Sur chaque groupe d'électrodes nous pouvons imposer un potentiel relativement à un groupe d'électrodes faisant office de référence (l'émetteur), et nous mesurons les courants entrant sur chaque électrode individuelle, définie comme une segmentation d'un groupe. Chaque groupe étant fait d'électrodes contiguës, le potentiel est le même sur toutes les électrodes appartenant à un même groupe du fait de la constance du potentiel sur une surface métallique (2.53). Avec une telle segmentation des électrodes, nous dotons le capteur d'une perception tri-dimensionnelle. Toutes les sondes sont constituées d'une même géométrie : un cylindre d'un diamètre de 20 mm avec des extrémités de forme hémisphérique. La forme élancée du capteur, ainsi que les dimensions des électrodes ont été choisies pour satisfaire aux conditions de réductions

de modèle que nous avons établies dans la dernière section du chapitre précédent. Une telle géométrie de capteur comme bien d'autres répondant aux dits critères de réduction de modèle peuvent en fait être modélisées par le modèle PSM, dont nous verrons amplement le fonctionnement au chapitre V. Les parties isolantes de nos prototypes de capteurs sont faites en PVC et les électrodes sont constituées d'un acier inoxydable du type "IN-OX" 316. Plusieurs versions ont été construites avec un nombre variable de groupes et de segmentations d'électrodes.

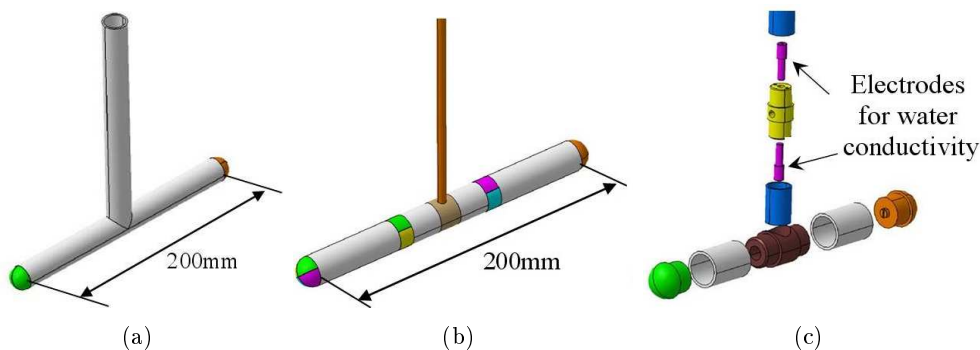


FIGURE 3.2 – Capteurs prototypes d'électrolocation. a) : un capteur bipolaire ; b) : un capteur formé de 16 électrodes, chaque groupe étant composé de 4 électrodes ; c) : un schéma éclaté d'une sonde munie d'un conductimètre embarquable.

3.1.2 Modélisation de la perception électrique par un capteur réel de volume fini

La forme élancée de nos capteurs a été choisie du fait qu'elle convenait bien à une modélisation par une distribution d'électrodes sphériques, constituant comme nous l'avons vu au chapitre précédent une première réduction de la formulation des équations exactes de l'électrolocation dans le régime RQS.

Dans [Jawad et al., 2010] et [Boyer et al., 2011] des modèles analytiques exploitant le comportement poly-sphérique de la géométrie des capteurs prototypes d'électrolocation ont été construits. Les modèles ont prédit avec succès la perturbation induite par la présence de grands et de petits objets. De ces modèles, que nous détaillerons dans les chapitres V et VI, nous donnons ici les principes. Comme les capteurs sont de forme élancée, nous pouvons considérer tous les groupes d'électrodes de nos prototypes de capteurs (fig. 3.2) comme des rangées d'électrodes sphériques. De plus, comme ces groupes d'électrodes sont suffisamment distants les uns des autres relativement à leur taille, leurs perturbations mutuelles sont négligeables (condition qui nous permet d'obtenir la réduction de modèle présentée au chapitre 2). En écrivant que le vecteur des tensions U entre les électrodes dites réceptrices et l'électrode dite émettrice est relié au vecteur des courants I par la loi d'Ohm, nous avons :

$$I = (C_0 + \delta C) \cdot U, \quad (3.1)$$

où C_0 est la matrice de conductance en l'absence d'objet et δC est la perturbation en conductance induite par la présence des objets dans la bulle de perception du capteur. Nous avons montré que, du fait du caractère élancé du capteur, les parties isolantes ne perturbent pas significativement la mesure [Jawad et al., 2010], si ce n'est qu'elles font

baisser globalement l'intensité des courants mesurés. Ainsi, une simple calibration de la matrice de conductance C_0 avec un simulateur BEM qui prend en compte la vraie géométrie du capteur est en principe suffisant pour prédire la perturbation des objets sur les électrodes réceptrices. Cette calibration correspond à une estimation des dimensions appropriées des électrodes sphériques pour minimiser une norme qualifiant la différence entre la matrice prédite C_0 et la matrice calculée numériquement C_0^{BEM} par la BEM [Jawad et al., 2010]. Le modèle ainsi calibré peut alors prédire la perturbation des petits et grands objets. En nous intéressant ici aux petits objets, nous pouvons considérer qu'au premier ordre leur réponse est suffisamment décrite par leur moment dipolaire $\mathbf{p}$ [Jackson, 1962], venant de l'établissement par le capteur d'un champ électrique $\mathbf{E}_0$ uniforme en leur sein. Le moment dipolaire de ces objets peut s'écrire :

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0, \quad (3.2)$$

où $\mathbf{P}$ est le tenseur de polarisabilité qui prend en compte la géométrie de l'objet. Comme le modèle de capteur consiste ici en une rangée d'électrodes sphériques, il est aisé de trouver la perturbation en conductance associée :

$$\delta C = C_0 \cdot \mathcal{P}^T \cdot K \cdot \mathcal{P} \cdot C_0, \quad (3.3)$$

où $\mathcal{P}$ est l'opérateur qui assure l'équilibre électrocinétique, i.e. $\sum I_i = 0$. K est le tenseur qui définit les propriétés électriques et géométriques de l'objet relativement au champ électrique généré par le capteur :

$$K_{i,j} = -\frac{1}{(4\pi)^2 \gamma} \frac{\mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i|^3 |\mathbf{r}_j|^3}, \quad (3.4)$$

où $\mathbf{r}_i$ est le vecteur distance défini depuis le centre de la i -ème électrode jusqu'au centre de l'objet et γ est la conductivité électrique de l'eau, considérée comme uniforme dans la bulle de perception du capteur.

3.2 Principe de la mesure par électrolocation

3.2.1 Du modèle physique au circuit électrique équivalent

Nous nous concentrons sur le cas d'un capteur composé de deux électrodes (fig. 3.3a). Du point de vue physique, comme nous l'avons vu dans la section précédente, ce capteur peut être assimilé dans le régime RQS à deux électrodes sphériques de charges opposées $\pm Q$ soumises à des potentiels différents et séparées par une distance L suffisamment grande devant leur rayon (ce qui revient aussi à négliger les interactions entre les électrodes conformément à l'une des hypothèses émises dans la dernière section du chapitre II pour obtenir un comportement poly-sphérique de capteur) (fig. 3.3b). Tout se passe comme si, du point de vue du capteur, le milieu extérieur est une résistance externe R_{ext} de sorte que le capteur et son environnement sont équivalents à un simple circuit électrique (fig. 3.3c) comprenant un générateur de tension e en série avec 3 résistances : une résistance de charge R_c , une résistance interne R_g propre au générateur et la résistance R_{ext} . Comme la résistance interne est négligeable en comparaison avec la valeur typique de résistance mesurée R_{ext} et comme la valeur optimale de la résistance de charge est nulle pour le mode U-I, le circuit peut être simplifié en omettant les résistances R_g et R_c du circuit dans la figure 3.3c. Alors le principe de mesure par électrolocation consiste simplement à extraire de la loi d'Ohm $e = R_{\text{ext}} I$ une valeur précise de R_{ext} .

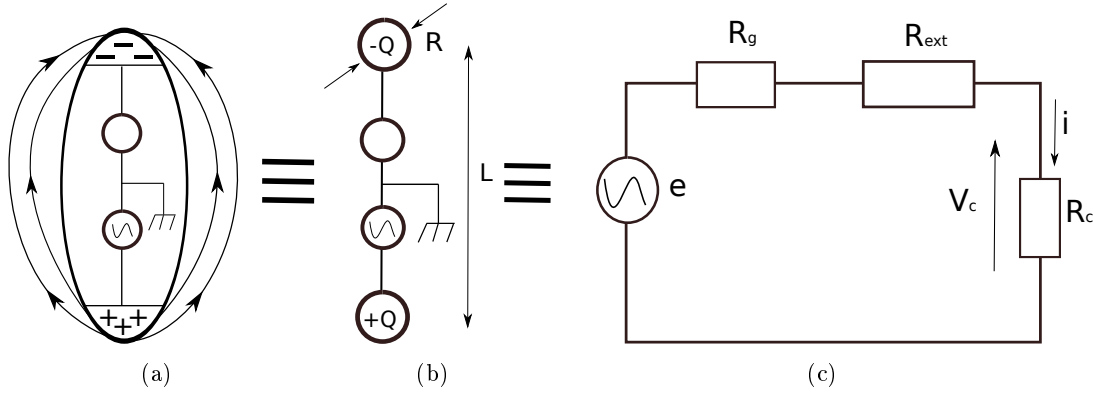


FIGURE 3.3 – a) Principe du fonctionnement du capteur (ici composé de deux électrodes) ; les flèches représentent les lignes de courant circulant dans le milieu conducteur au contact du capteur. b) Le modèle physique du capteur. c) Le schéma électrique équivalent.

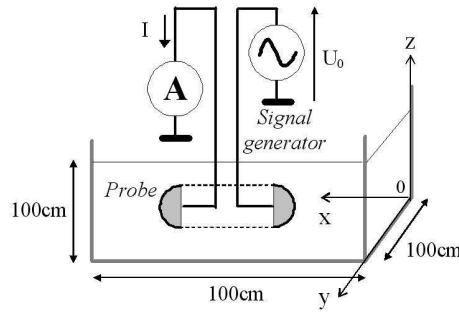


FIGURE 3.4 – Principe de la mesure : un signal sinusoïdal d'amplitude U_0 est imposé pour limiter toute électrolyse. En conséquence, la mesure par électrolocation consiste en une modulation d'un courant ou d'un potentiel (ici un courant I mesuré sur les électrodes).

3.2.2 Effets d'un courant établi dans l'eau

Comme discuté au chapitre II, l'établissement d'un courant dans l'eau du robinet n'est pas sans effet perturbatif si on ne prend pas suffisamment de précautions. En particulier, l'eau de robinet est une substance ionique composée de différents éléments chimiques et des réactions chimiques risquent d'être activées si un courant continu y est établi [Diard and Montella, 1996]. Ce fait nous a amené à choisir une source de nature sinusoïdale sans composante continue. En conséquence, le principe de la mesure par électrolocation consiste en la mesure d'une amplitude de signal modulée par le milieu extérieur (fig. 3.4).

3.3 Adaptation du dispositif aux propriétés électriques de l'eau

La conductivité électrique γ d'un matériau, définie comme l'inverse de la résistivité ρ , est obtenue expérimentalement en mesurant la résistance R d'un volume de section S et de longueur L de ce matériau et en utilisant la relation suivante :

$$\gamma = \frac{L}{RS}. \quad (3.5)$$

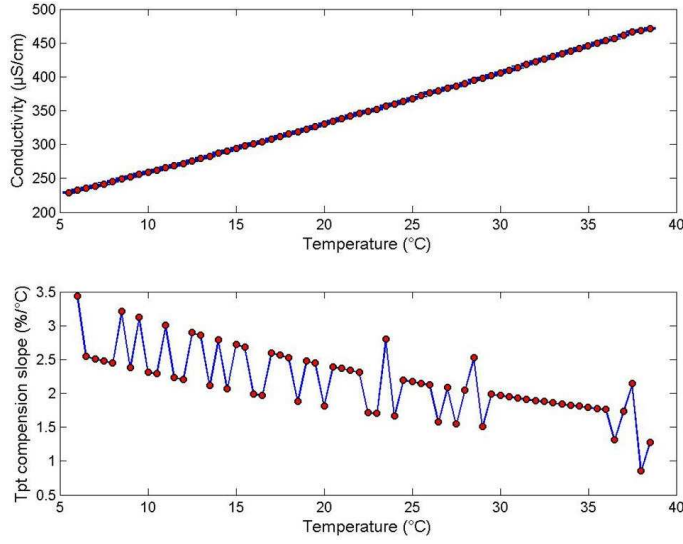


FIGURE 3.5 – En haut : la conductivité en fonction de la température; en bas : la compensation de pente en température β en fonction de la température

3.3.1 Sensibilité à la température

Les principaux paramètres influençant la conductivité de l'eau sont sa concentration en ions, sa température et la fréquence du champ électrique. [Klein and Swift, 1977, Ellison et al., 1998]. Pour nos besoins, nous nous contenterons de la relation simplifiée suivante formulant la dépendance en température :

$$\gamma_{T'} = \frac{\gamma_T}{1 + \beta (T - T')} \text{ avec } \beta = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial T} \simeq 1 \text{ à } 3\% / ^\circ\text{C},$$

où $\gamma_{T'}$ (resp. γ_T) est la conductivité à la température T' (resp. T) et β est la compensation de pente en fonction de la température du matériau. Les mesures de conductivité menées dans l'eau du banc d'essai ont montré une forte dispersion à température constante (25°C) allant de 360 $\mu\text{S}/\text{cm}$ à 410 $\mu\text{S}/\text{cm}$. Cette dispersion est due à des modifications de la composition chimique. Les mesures de conductivité en fonction de la température sont présentées dans la figure 3.5. Elles ont été obtenues en utilisant un conductimètre WTW Cond 197i. La courbe de compensation de pente en température montre des discontinuités que nous imputons à la résolution du conductimètre utilisé ($\pm 1 \mu\text{S}/\text{cm}$). Cependant la moyenne apparaît clairement à environ $\beta = 2.5\%$ par $^\circ\text{C}$, ce qui expérimentalement confirme la forte dépendance en température de la conductivité de l'eau. On montre ainsi le besoin de mesure locale (en temps et en espace) de la conductivité, ce que nous pouvons réaliser par l'intermédiaire d'un conductimètre embarqué dans nos sondes d'électrolocation (fig. 3.2c)

3.3.2 Sensibilité à la fréquence

Les signaux électriques émis par le poisson sont de deux types différents comme nous l'avons rapporté dans le premier chapitre : ils peuvent être de forme sinusoïdale (c'est le cas de tous les gymnotidés excepté le *Gymnotus carapaco* et le *Electrophorus electricus*) ou de forme impulsionnelle (comme chez tous les mormyridés). Les poissons appartenant

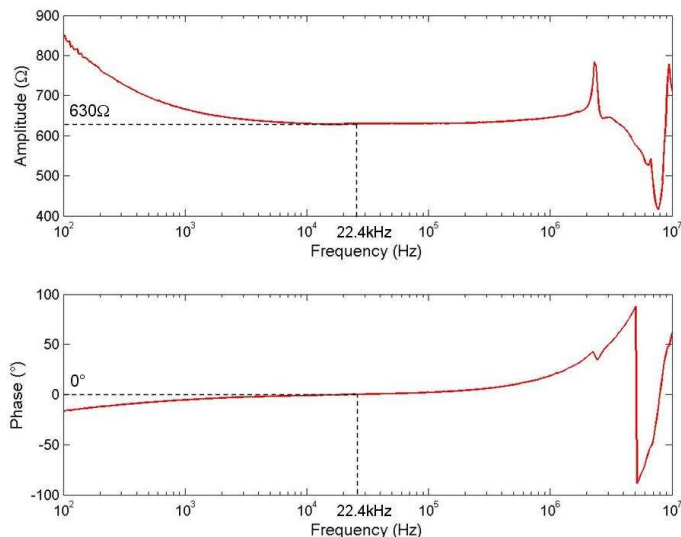


FIGURE 3.6 – Impédance complexe d'un capteur bipolaire immergé dans un aquarium de 220 litres d'eau de robinet. En haut : l'amplitude. En bas : la phase.

à une même espèce ne génèrent pas les deux types de signal à la fois. Afin de ne pas trop complexifier l'électronique, notre mesure se fait à l'aide d'une source de tension de forme sinusoïdale de fréquence bien définie.

Pour adapter notre système de mesure aux propriétés électriques du milieu environnant notre capteur, nous décidons de mesurer l'impédance complexe Z d'une sonde immergée dans un aquarium de 220 litres rempli d'eau de robinet. Les résultats présentés à la figure 3.6 font apparaître les caractéristiques suivantes :

1. l'existence d'un minimum de la capacité de la sonde immergée pour des fréquences allant de 10^4 Hz à 5×10^4 Hz, ce qui est propre aux propriétés de l'eau [Fernandez et al., 1995],
2. une augmentation de l'impédance de contact entre les électrodes et le milieu à des basses fréquences ($\nu \lesssim 10^3$ Hz), en particulier de sa composante capacitive [Vilhunen et al., 2002],
3. une impédance parasite du câble coaxial qui se manifeste principalement à de hautes fréquences ($\nu \gtrsim 10^6$ Hz). Pour éviter les deux derniers effets, un domaine résistif a été sélectionné, correspondant aux fréquences intermédiaires (10^4 Hz $\lesssim \nu \lesssim 10^5$ Hz). La figure 3.6 montre que notre sonde complètement immergée dans l'aquarium apparaît être purement résistive à la fréquence $f \simeq 22.4$ kHz. En conséquence, pour simplifier la nature du signal mesuré, nous choisissons d'émettre un signal à précisément 22.5 kHz.

3.4 L'électronique

3.4.1 Principe de base

De façon générale, nous pouvons définir un capteur d'électrolocation comme un ensemble de N électrodes fixées sur un corps isolant. Pour offrir encore plus de possibilités dans la mesure, nous mettons au point dans le projet ANGELS un capteur sur lequel nous pouvons imposer des tensions et mesurer des courants ou, au choix, imposer des courants et mesurer des tensions.

Ici, nous nous focalisons sur le cas particulier où les tensions sont imposées et les courants mesurés. Notre première électronique a été conçue selon ce principe. Une configuration simplifiée correspond à un capteur sur lequel toutes les électrodes sont soumises à un même potentiel U , exceptée une, soumise à un potentiel supérieur à U . Ainsi définies les premières et la dernière électrode sont appelées respectivement *les récepteurs* et *l'émetteur* du capteur (fig. 3.7).

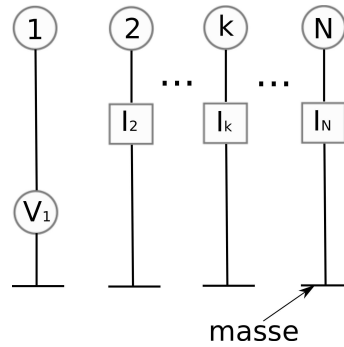


FIGURE 3.7 – Schéma du principe de fonctionnement des capteurs d'électrolocation en mode U-I. Ici toutes les électrodes sont à la masse, sauf l'une qui est à un potentiel positif et qui émet le courant.

3.4.2 Signal d'émission

L'objectif final de notre projet est de construire des capteurs pour donner de l'autonomie à des engins sous-marins. Cependant du fait du manque d'espace dans les compartiments de nos présents capteurs, nous utilisons une source externe en tension. Dans cette configuration, un générateur *basse fréquence* est associé à un amplificateur opérationnel monté en série. On note qu'un générateur miniaturisé a par ailleurs été testé avec succès et qu'il devrait être embarqué dans les futurs robots.

3.4.3 Electronique de réception

L'électronique de réception est schématisée à la figure 3.8. Elle consiste en un amplificateur courant-tension monté en série avec un filtre passe-bas de second ordre. Les électrodes de réception sont connectées au pré-amplificateur qui joue le rôle ici de masse virtuelle. Nous appelons $R_{\text{ext},p-k}$ la résistance du milieu entre l'électrode émettrice p et l'électrode réceptrice k . Dans le cas présent, les câbles transmettant le signal électrique aux électrodes sont relativement longs (5 m) et nous devons prendre en compte leurs résistances respectives r_p et r_k .

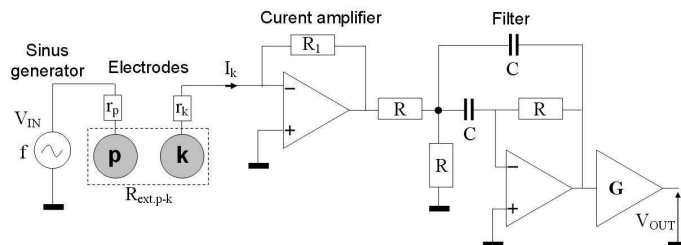


FIGURE 3.8 – Schéma de l'électronique de réception en mode U-I. p joue ici le rôle de l'électrode émettrice et k le rôle d'une électrode réceptrice.

La fréquence de résonance du filtre a été choisie avec la même valeur que le signal d'émission. Dans ces conditions, la fonction de transfert du filtre vaut $T_{\text{filtre}} = -1/2$, et la relation entre la tension du générateur V_{IN} et la tension de sortie V_{OUT} est donnée par :

$$T = \frac{V_{\text{OUT}}}{V_{\text{IN}}} = \frac{G \times R_1}{2(R_{\text{ext},p-k} + r_p + r_k)}, \quad (3.6)$$

soit :

$$R_{\text{ext},p-k} = A \frac{V_{\text{IN}}}{V_{\text{OUT}}} + B, \text{ avec } A = \frac{G \times R_1}{2}; B = -r_p - r_k, \quad (3.7)$$

où G est le gain à la sortie du filtre. Nous pouvons exprimer la résistance du milieu aquatique comme une fonction linéaire du rapport de tensions $V_{\text{IN}}/V_{\text{OUT}}$. Ces amplitudes de tensions sont acquises expérimentalement par un convertisseur digital analogique synchronisé pour réaliser la conversion au maximum et au minimum du signal reçu, en supposant que l'environnement est purement résistif (fig. 3.6).

Du fait qu'en mode U-I, le potentiel de l'électrode de réception est nul, l'application de la loi d'Ohm nous permet de trouver que le courant entrant dans l'électrode k est donné par :

$$I_k = 2 \frac{V_{\text{OUT}}}{G \times R_1}. \quad (3.8)$$

tandis que la tension $U_{pk} = V_p - V_k$ vaut :

$$U_{pk} = I_k \times R_{\text{ext},p-k}. \quad (3.9)$$

Pour réaliser une mesure précise, les coefficients A et B dans (3.7) ont été obtenus par calibration. Cette calibration consiste à connecter un ensemble de résistances standards de valeurs R_{cal} (tolérance : $\pm 0.01\%$) à faibles coefficients thermiques (TCR : $\pm 0.6\text{ppm}/^\circ\text{C}$) à l'entrée de l'électronique de réception. On a fait l'acquisition d'une population de 1000 mesures dont on a ensuite calculée la moyenne.¹ Une régression linéaire utilisant les moindres carrés est appliquée à ces valeurs moyennes pour déterminer les coefficients A et B . La figure 3.9 montre une courbe de calibration pour une voie. Les plus fortes dispersions restent inférieures à 0.01% en erreur relative et sont très proches de 0, ce qui indique l'absence

1. chaque population donnant un écart type de 0.02%, ce qui indique que l'erreur statistique sur chaque moyenne est de $\approx 0.02\%/\sqrt{1000}$ et donc négligeable par rapport à la tolérance intrinsèque aux résistances de calibration

de toute composante non-linéaire significative. En prenant en compte la tolérance des résistances de calibration, une précision minimale est établie à environ $\pm 0.02\%$ pour chaque voie de réception.

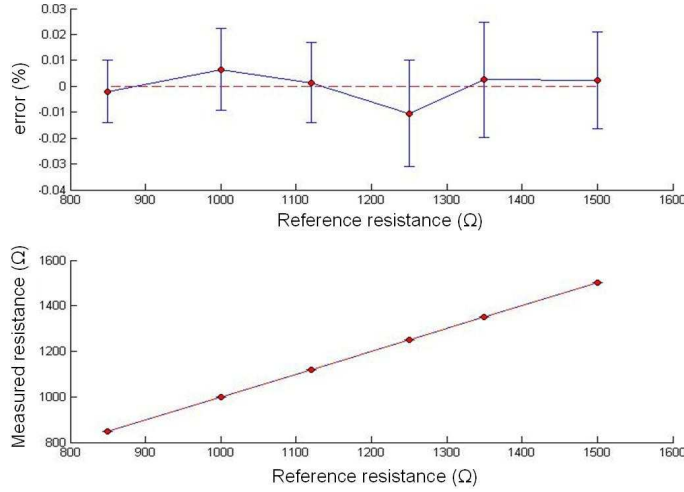


FIGURE 3.9 – Calibration d'une voie de l'électronique de réception. En haut : l'erreur relative avec les résistances de calibration. En bas : la résistance mesurée. Les coefficients de calibration obtenus : $A = 1614.7\Omega$ et $B = -1.59\Omega$.

3.5 Le banc d'électrolocation

3.5.1 Le système robotique de déplacement du capteur

Afin de tester nos capteurs d'électrolocation dans des conditions répétables et précises, nous avons construit un banc automatisé (fig. 3.10) composé d'un aquarium cubique de 1 m^3 de volume, d'un robot cartésien permettant un déplacement horizontal et d'un système d'acquisition.

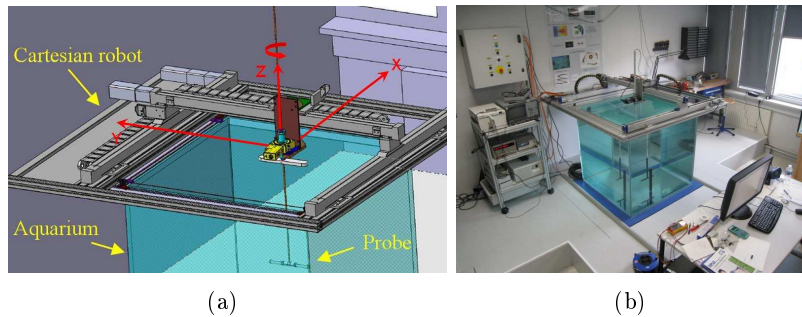


FIGURE 3.10 – Banc d'électrolocation. a) une image CAO du robot cartésien et b) une photo du banc expérimental

Le robot est fixé au sommet de l'aquarium et permet au capteur des mouvements de translation le long des axes X et Y avec une précision de $1/10\text{ mm}$. La rotation est réalisée dans le plan horizontal avec une précision de 0.023° (fig. 5.10). Toutes les sondes testées sont positionnées dans l'aquarium et maintenues verticalement par une tige rigide en verre

epoxy de diamètre ($\varnothing 14$ mm) dont la hauteur est ajustable. Cette tige de nature purement isolante sert au passage des câbles électriques de la sonde à l'électronique de conversion (voie analogique + carte ADC) sans que nous compromettions la mesure. La verticalité est assurée par une vis micrométrique. Notre banc test nous permet un contrôle dynamique de la trajectoire suivant une large gamme de vitesses relativement à la taille de l'aquarium. La vitesse maximale autorisée est de 300 mm/s ($\simeq 1$ km/h) en translation selon chacun des 2 axes (soit 1.5 fois la longueur du capteur par seconde) et de 80 °/s (13.5 rot/min) en rotation.

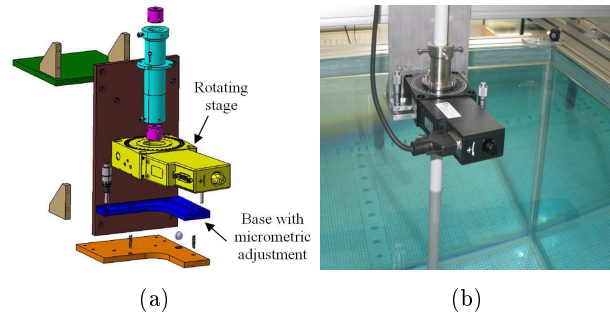


FIGURE 3.11 – Platine de rotation : a) schématisée par un logiciel de CAO ; b) intégrée au banc expérimental.

3.5.2 Contrôle du système de déplacement et acquisition

Nous avons choisi de contrôler le déplacement du robot et d'acquérir les mesures en utilisant le logiciel Simulink et le système DSpace (fig. 3.12). Les signaux mesurés par

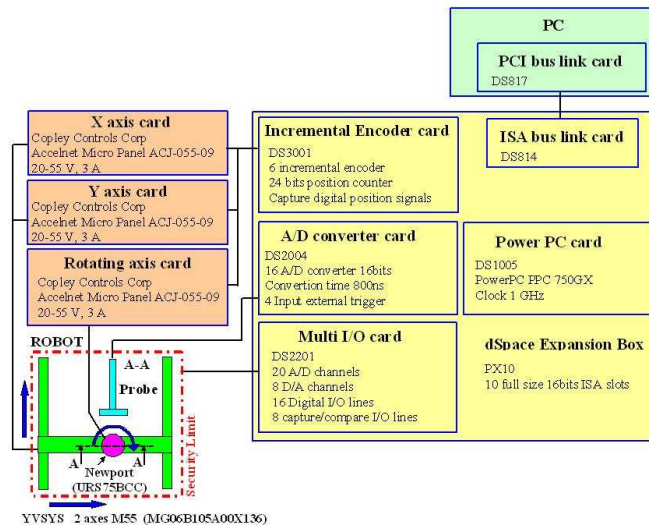


FIGURE 3.12 – Schéma du contrôle par ordinateur à distance du banc expérimental.

les électrodes sont d'abord traitées par une voie analogique (amplification+filtrage), puis convertis par une ADC de 16-bits et une carte de DS2004 avec une résolution allant de 0.3 mV/bit à 0.15 mV/bit (soit de ± 5 V à ± 10 V). Cette carte nous permet de convertir 16 voies en même temps avec une fréquence de 1.25 MHz.

3.5.3 Les objets test

Pour tester notre dispositif nous avons choisi des objets à géométrie simple, faits de matériaux conducteurs et isolants (fig. 3.13). Les objets ont été choisis avec une densité

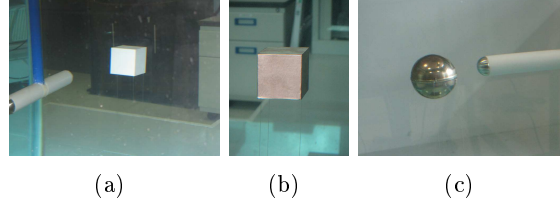


FIGURE 3.13 – Objets test : cubes (côté = 40 mm) isolant (a) et conducteur (b) ; sphère conductrice ($\varnothing = 40$ mm) (c).

moyenne voisine de l'eau pour pouvoir les garder facilement en suspension. En pratique, ceci est réalisé en les attachant à des fils en nylon fixés à l'autre extrémité par un support inamovible au fond de l'aquarium.

3.6 Résultats expérimentaux

3.6.1 Caractérisation du bruit électronique

Une caractérisation du bruit total de l'électronique analogique a été réalisée. La figure 3.14 montre la configuration expérimentale utilisée pour cette caractérisation.

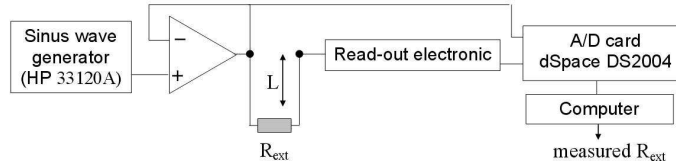


FIGURE 3.14 – Schéma de la configuration expérimentale pour la caractérisation du bruit électronique.

Pour obtenir un minimum et un maximum de bruit dans les conditions réalistes de la mesure, deux types de résistances externes R_{ext} ont été connectées à notre électronique. Le premier type désigne les résistances standards déjà utilisées pour le processus de calibration (dont les valeurs sont bien connues) alors que le second type fait référence aux résistances mesurées directement par la sonde elle-même, lorsqu'elle est totalement immergée dans l'aquarium et placée en contact radial avec une paroi au centre de celle-ci. Les essais avec ce dernier type de résistance ont d'abord été réalisés avec le moteur du robot cartésien éteint, puis allumé.

Concernant les essais effectués avec le premier type de résistance, le câble connectant la résistance de référence à l'électronique est de faible longueur ($L = 20$ cm), et donc de résistance négligeable. Sur la figure 3.15 nous avons représenté la distribution de $N = 100000$ mesures, c'est à dire N conversions ADC individuelles successives, chacune d'entre elles durant 15 ms. Nous observons une moyenne localisée à 0.09Ω de la valeur désirée $R_{\text{cal}} = 1250 \Omega$ donnée par le fabricant, soit une erreur relative de 0.007% , inférieure à la précision intrinsèque de la résistance de référence, de 0.01% . La distribution fait apparaître un écart

type de 0.02%, ce qui est à peu près la même valeur que pour une population de 1000 mesures, utilisée pour représenter chaque point de la première courbe de calibration (voir fig. 3.9). Le bruit constaté peut avoir diverses origines comme des défauts de filtrage ou des fluctuations en amplitude de l'alimentation du générateur ou bien encore des problèmes de compatibilité électromagnétique entre les différents composants de l'électronique, ou entre les différentes cartes [Charoy, 1996, Vasilescu, 1999].

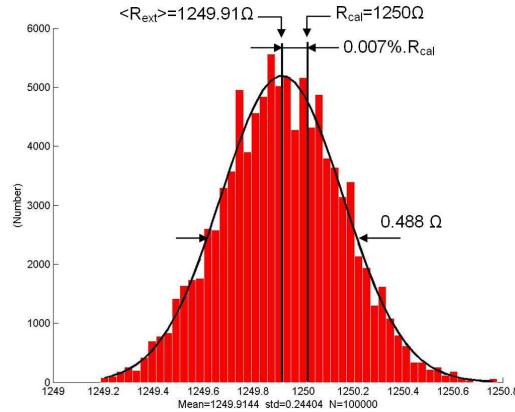


FIGURE 3.15 – Histogramme : distribution des mesures de résistance obtenues en mode U-I avec le premier type de résistance R_{ext} (sonde en dehors de l'eau) pour une population de $N = 100000$ mesures individuelles. Ici la résistance R_{cal} vaut 1250Ω . En trait plein : le “meilleur” fit gaussien, ayant la même moyenne et même écart type que la distribution.

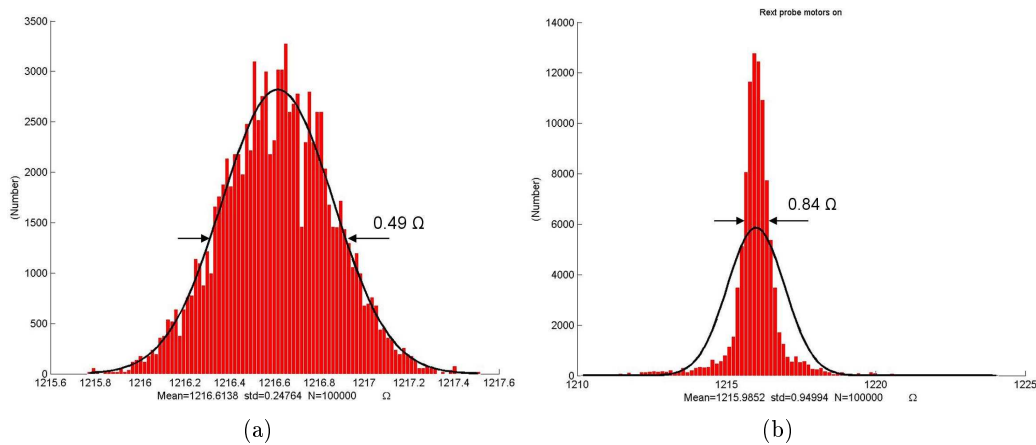


FIGURE 3.16 – Histogramme : distribution des mesures de résistance obtenues en mode U-I avec le second type de résistance R_{ext} (sonde dans l'eau) pour une population de $N = 100000$ mesures individuelles ; trait plein : Le “meilleur” fit gaussien, ayant la même moyenne et même écart type que la distribution ; a) avec moteurs éteints et b) avec moteurs allumés.

Concernant les essais effectués avec le second type de résistance, c'est à dire en sonde immergée, la longueur de câble joignant l'électronique d'acquisition à la sonde est de $L = 5$ m. Avec les moteurs éteints (fig. 3.16 a), la distribution des mesures montre un bruit gaussien, ce qui est similaire au bruit obtenu avec la résistance standard. Ceci démontre

que le câble et le milieu ne sont pas des sources principales de bruit en comparaison avec l'électronique. Lorsque les moteurs sont allumés, (voir fig. 3.16 b), la distribution des mesures dévoile un bruit non gaussien, ce qui indique que la source électrique des bruits du moteur n'est pas aléatoire. Nous remarquons aussi que certaines mesures semblent distantes de la moyenne, d'environ 10Ω . La largeur à mi-hauteur de cette distribution est de 0.84Ω , ce qui est 1.7 fois celle obtenue avec la résistance standard.

A la lecture de ces résultats nous concluons que les sources dominantes du bruit sont l'électronique et les moteurs du robot. Nous remarquons cependant que ces essais ont été menés dans des conditions de très fortes perturbations. En fait le moteur du robot cartésien est plus puissant que celui qui sera utilisé dans la conception des futurs engins sous-marins.

3.6.2 Test de dérive en température de l'électronique

La température est un facteur significatif de la stabilité de la mesure. Ainsi nous avons testé notre électronique pour différentes températures. Concrètement, nous avons introduit un circuit dans un four que nous avons connecté à une résistance standard $500 \Omega \pm 0.6 \text{ ppm}/^\circ\text{C}$ placée à l'extérieur. La température à l'extérieur était de $20^\circ\text{C} \pm 1^\circ\text{C}$ tout le long de l'expérience, ce qui a induit une légère dérive en température de la valeur de résistance ($\pm 0.3 \text{ m}\Omega$). Les mesures ont été prises en compte seulement après stabilisation, reflétant une uniformité de la température dans le four. En limitant la température maximale à une valeur de 55°C , les résultats de ce test montrent une variation de résistance de l'ordre de $\pm 0.005\%$ (fig. 3.17). Comme cette valeur est bien en dessous de la précision de l'électronique établie à $\pm 0.02\%$ (fig. 3.9), nous concluons que notre électronique est robuste vis-à-vis des fluctuations en température et ne nécessite aucune correction en température vis-à-vis de cette grandeur.

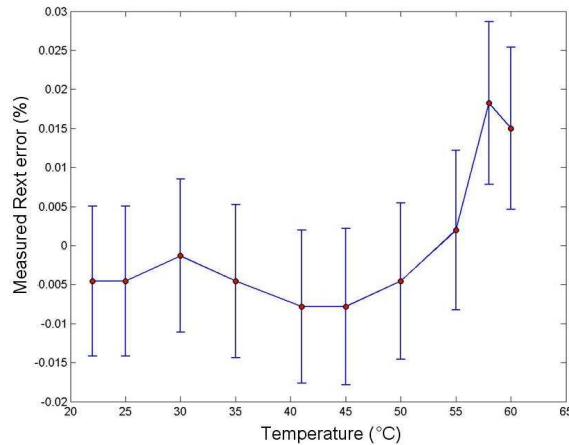


FIGURE 3.17 – Dérive en température d'une électronique en mode U-I ; les barres d'erreur représentent l'écart type obtenu avec une population de 1000 mesures pour chaque valeur de température.

3.6.3 Mesures et validation du modèle physique

3.6.3.1 Détection d'une paroi de l'aquarium

Les premiers résultats sont obtenus en utilisant une sonde bi-polaire. Le robot cartésien est programmé pour déplacer la sonde d'une paroi à l'autre de l'aquarium suivant l'axe X tout en la maintenant positionnée au centre de la section transverse. Les parois sont en verre et de fait, sont de nature purement isolante. Les dimensions de l'aquarium sont de $971.5 \text{ mm} \times 971.5 \text{ mm} \times 975 \text{ mm}$ et la conductivité mesurée est de $356 \mu\text{S}/\text{cm}$. Les parois sont bien détectées, ce qui se traduit par une augmentation significative de résistance, c'est à dire une diminution sensible de courant mesuré alors que la sonde s'approche d'une paroi (courbe en trait pointillé en bas de la fig. 3.18). Pour une sonde débutant sa traversée

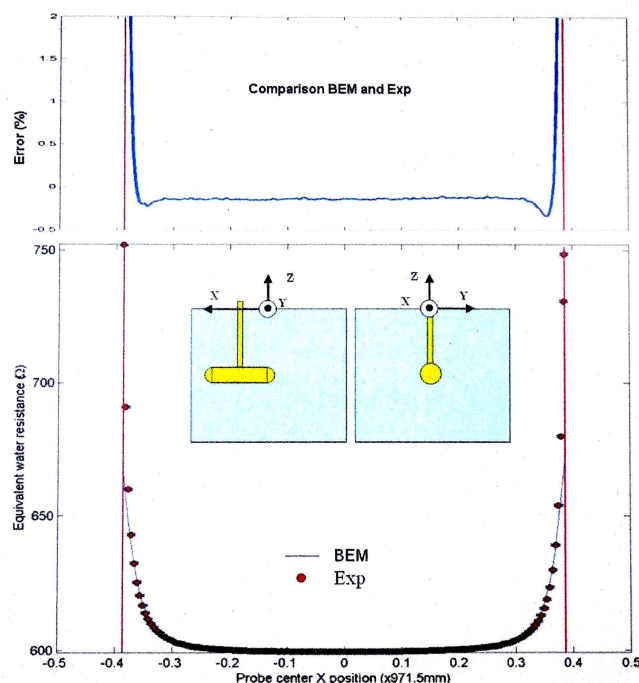


FIGURE 3.18 – Résistance de la sonde lors d'un aller-retour entre deux parois opposées de l'aquarium : comparaison entre la BEM et les mesures. En bas : les valeurs obtenues par la BEM sont tracées en trait continu et les mesures sont en traits pointillés. En haut : une courbe représente l'erreur relative entre les valeurs de la BEM et les mesures.

au centre de l'aquarium ($X = 0$), nous définissons un seuil de détection à $R_{\text{ext}}(X) = (1 + 0.02\%) R_{\text{ext}}(X = 0)$, où 0.02% correspond à la précision de notre système établie d'après la figure 3.9. Cela nous amène à une détection à $X \approx 110 \text{ mm}$, soit une distance entre le mur et l'électrode faisant immédiatement face au mur de $\tilde{d} = 280 \text{ mm}$. Cette distance représente 1.3 fois la longueur de la sonde.

Notons aussi une très bonne correspondance de la courbe expérimentale avec la courbe obtenue avec un simulateur BEM (en haut de la figure 3.18). L'erreur relative entre la mesure et la simulation est proche du 1/1000 au centre de l'aquarium et augmente quand le capteur se rapproche d'une paroi pour atteindre un peu plus de 2% au contact de la paroi. Ceci est dû à la taille relativement importante des éléments de maillage constituant les parois. On doit cependant dire au lecteur que le maillage choisi est celui qui permet de

réaliser des calculs dans un temps raisonnable et qu'une étude plus poussée a permis de montrer que la résistance simulée par la BEM à la limite d'un maillage fin serait de 1% inférieure.

Pour mieux caractériser la sensibilité de notre dispositif vis-à-vis de la détection d'une paroi nous avons considéré la variation de la résistance externe avec la position longitudinale dR_{ext}/dX (fig. 3.19). Au contact avec une paroi ($\tilde{d} = 0$), la variation de la résistance atteint $dR_{\text{ext}}/dX = 13.6 \Omega/\text{mm}$. Lorsque la sonde s'éloigne d'une paroi, la pente décroît

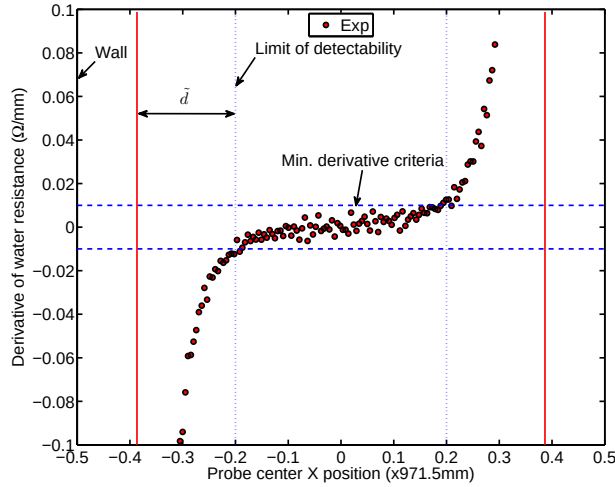


FIGURE 3.19 – Variation de la résistance lors d'un aller-retour entre deux parois de l'aquarium. Les lignes horizontales en traits discontinus représentent le seuil minimal de détection défini à $0.01 \Omega/\text{mm}$, duquel nous pouvons déduire une distance maximum de détection de $\tilde{d} = 190 \text{ mm}$.

rapidement. A une distance $\tilde{d} = 110 \text{ mm}$ ($0.5 \times$ la longueur de la sonde), la pente chute déjà à $\approx 0.05 \Omega/\text{mm}$. En définissant une sensibilité maximale $|dR_{\text{ext}}/dX| = 0.01 \Omega/\text{mm}$ pour notre sonde, nous pouvons déduire de la figure 3.19 une limite de détection à environ $d = 190 \text{ mm}$, ce qui est à peu près la longueur de la sonde.

Cette première étude montre que le sens électrique est un mode de perception à portée modérée pour de grands objets comme les parois de l'aquarium. Plus précisément, les parois sont détectées à une distance estimée entre 0.9 et 1.3 fois la longueur de la sonde, selon la valeur du critère de détection. Cette portée est similaire à la portée du vrai poisson électrique dont la portée est à peu près égale à sa longueur (voir chapitre I).

3.6.3.2 Détection d'objet

Pour montrer la sensibilité de notre dispositif à la présence de petits objets de différentes conductivités et différentes formes, nous avons tracé dans les figures 3.20 et 3.21 les mesures en résistance en conservant la même sonde, la même électronique et la même trajectoire par rapport au test précédent. Quatre objets ont été utilisés. Deux cubes de côté $a = 40 \text{ mm}$, l'un étant isolant et l'autre conducteur. Deux sphères de diamètre ($\varnothing = 40 \text{ mm}$), l'une étant isolante et l'autre conductrice. En passant à 5 cm des objets (distance entre le centre des objets et le grand axe du capteur), la résistance mesurée augmente si l'objet est isolant et diminue si l'objet est conducteur (figs. 3.20 et 3.21).

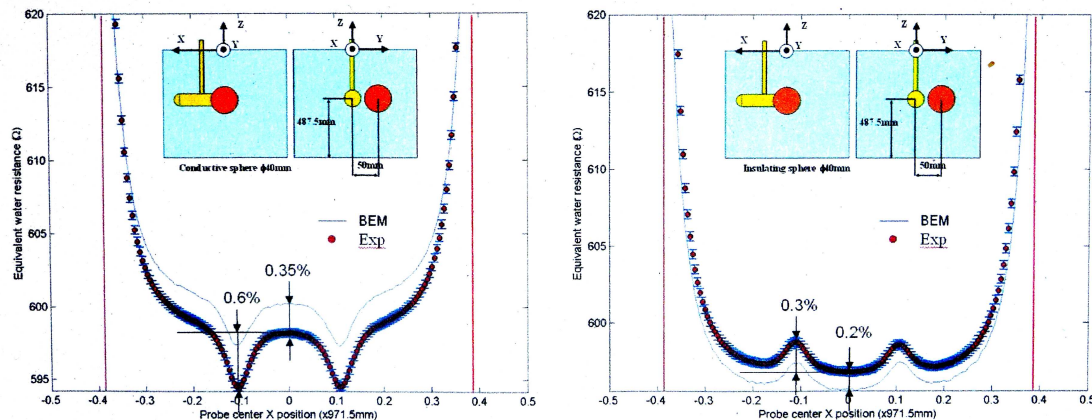


FIGURE 3.20 – Résistance d'un capteur 2-électrodes lors d'un aller-retour entre deux parois de l'aquarium en présence d'une sphère conductrice (à gauche) et d'une sphère isolante (à droite), d'un diamètre de 40 mm, situées à une distance de 50 mm. A gauche : $\gamma = 356 \mu\text{S}/\text{cm} \pm 1 \mu\text{S}/\text{cm}$. A droite : $\gamma = 359 \mu\text{S}/\text{cm} \pm 1 \mu\text{S}/\text{cm}$.

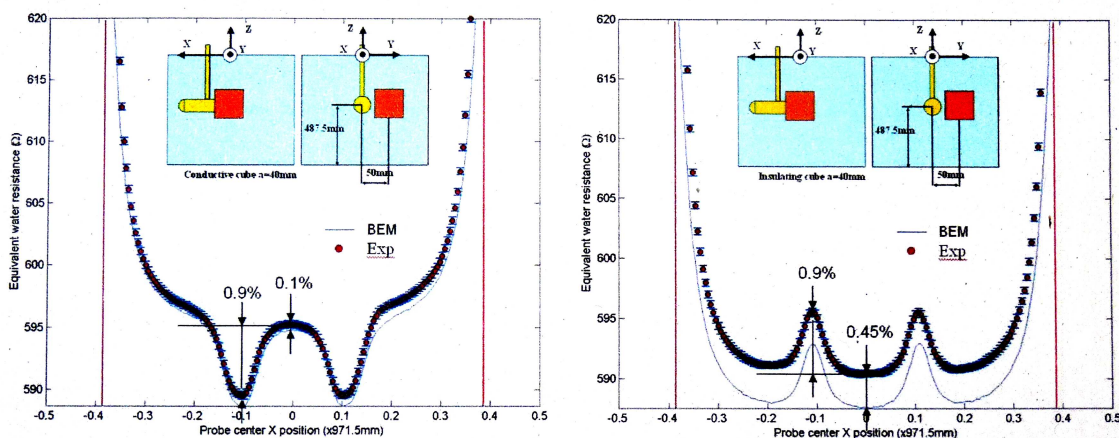


FIGURE 3.21 – Résistance d'un capteur 2-électrodes lors d'un aller-retour entre deux parois de l'aquarium en présence d'un cube conducteur (à gauche) et d'un cube isolant (à droite), de côté $a = 40$ mm, situés à une distance de 50 mm. A gauche : $\gamma = 359 \mu\text{S}/\text{cm} \pm 1 \mu\text{S}/\text{cm}$. A droite : $\gamma = 364 \mu\text{S}/\text{cm} \pm 1 \mu\text{S}/\text{cm}$.

Une comparaison avec un simulateur BEM (courbe en trait continu) montre un très bon accord. L'écart relatif entre les mesures et la simulation au maximum des perturbations induites par la sphère et le cube, qu'il soient conducteur ou isolant, reste inférieur à 1%². Deux pics apparaissent durant la trajectoire, correspondant aux positions de la sonde pour lesquelles l'objet se trouve à une distance minimale de l'une des deux électrodes. Nous remarquons aussi l'existence d'une zone morte entre les deux pics, au cours de laquelle le capteur perd contact avec l'objet, ce qui se manifeste lorsque l'objet se trouve entre les deux électrodes. Cette limitation à la perception peut être surmontée aisément en ajoutant

2. même si comme pour le test précédent, la résistance BEM n'est pas absolument précise, si bien que l'on doit s'attendre plutôt à un écart relatif de l'ordre du %.

plus d'électrodes (fig. 3.22). Une analyse des courbes des figures 3.20 et 3.21 montre que

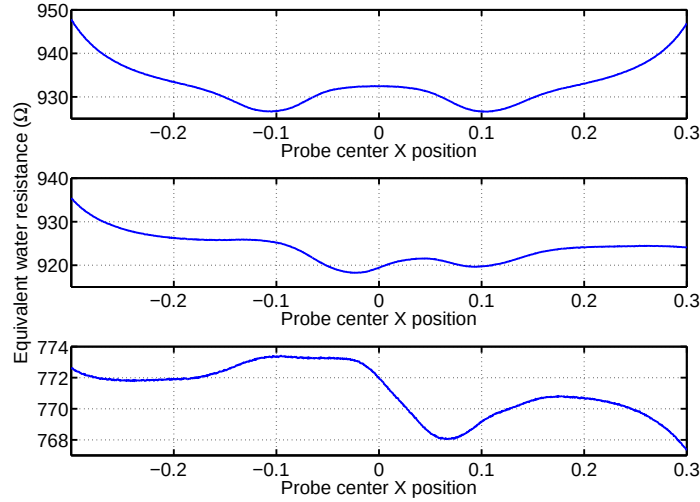


FIGURE 3.22 – Mesures en résistance par une sonde à 4 électrodes durant un aller-retour entre deux parois de l'aquarium en présence d'un cube conducteur de côté $a = 40$ mm situé à une distance de 50 mm de la sonde. En haut : la résistance mesurée par l'électrode de tête. Nous pouvons apercevoir les mêmes variations que pour un capteur bi-polaire avec une zone morte de même largeur que pour le capteur bi-polaire. Au centre et en bas : deux électrodes intermédiaires placées entre l'électrode de tête et l'électrode de queue permettent une réduction de la zone morte. Elles sont placées à des positions intermédiaires relatives entre -0.1 (où l'objet est en face de l'électrode de tête) et 0.1 (où l'objet est cette fois en face de l'électrode de queue).

la réponse du cube est plus grande que celle des sphères. Ceci est expliqué par le fait que les cubes ont un plus grand volume que celui des sphères à côtés et diamètres égaux. De plus, ces courbes montrent que la nature des objets est aisément identifiable en constatant simplement une augmentation ou une diminution de la résistance lorsque la sonde passe près des objets. En dépit de la faible distance entre le centre de la sonde et le centre de l'objet (50 mm), la perturbation de l'objet est relativement basse. En effet, on observe un écart relatif entre les pics de perturbation et le plateau situé entre les pics allant de 0.3% à 0.9%. Les mesures prises dans les mêmes conditions mais pour une distance plus grande, à 100 mm de la sonde (fig. 3.23), montrent une visibilité relative encore plus basse, de 0.03%, ce qui est d'un ordre de grandeur plus faible que pour la même sonde à 50 mm de l'objet. De plus, nous pouvons remarquer que le dispositif est sensible aussi à la forme de l'objet. Dans le cas d'une sphère, le pic est plus étroit (fig. 3.20) que pour un cube (fig. 3.21) dont un des côtés a été mis en parallèle avec la ligne de trajectoire du capteur.

Cette étude a montré la capacité de notre dispositif à détecter des objets de petite taille relativement à la longueur des sondes utilisées. La nature conductrice des objets est aisément révélée avec ce dispositif. Cependant, nous confirmons par cette étude que le sens électrique est une modalité de perception à portée modérée, voire courte.

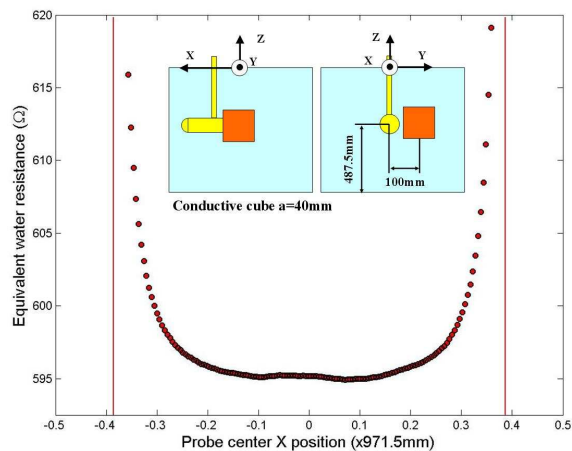


FIGURE 3.23 – Résistance d’un capteur bi-électrodes lors un aller-retour entre deux parois de l’aquarium en présence d’un cube conducteur de côté $a = 40$ mm placé à une distance de 100 mm de la sonde.

3.6.3.3 Comparaison avec le modèle

En utilisant le modèle analytique écrit dans la section I, qui, contrairement à la BEM, est utilisable en ligne, nous avons comparé les prédictions du modèle avec les valeurs expérimentales dans une scène simple : un capteur bi-polaire effectuant un aller-retour entre deux parois opposées de l’aquarium, passe à une distance de 50 mm d’une sphère isolante de 40 mm de diamètre. Dans la figure 3.24, nous présentons les résultats expérimentaux (cercles) ainsi que les prédictions théoriques (traits pleins et discontinus) pour une conductivité de $\gamma = 359 \mu\text{S}/\text{cm} \pm 1 \mu\text{S}/\text{cm}$, conformément à la sensibilité du conductimètre utilisé. Ces prédictions théoriques s’appuient sur une calibration de modèle établie d’après un calcul poussé de la conductance par une méthode de différence finie (plus précise que les résultats BEM présentés auparavant). Avec une telle calibration les nouvelles prédictions deviennent une validation fiable du modèle physique de l’électrolocation.

Le modèle apparaît être en bon accord avec les valeurs expérimentales, bien que l’on observe une erreur systématique de 1.5% qui excède l’erreur faite sur la conductivité (qui est d’environ 1%). Le supplément d’erreur que l’on observe par rapport à l’erreur de conductivité peut être dû à des effets non pris en compte par le modèle physique, comme la résistance de contact entre les électrodes et le milieu [Somersalo et al., 1992]. Un très bon accord est obtenu avec l’expérience en adoptant une conductivité effective γ de $354 \mu\text{S}/\text{cm}$. Ce résultat est très encourageant et suggère qu’un tel capteur peut être utilisé pour une électrolocation en temps réel.

3.6.4 Influence de la conductivité

La résistance du milieu R_{ext} est inversement proportionnelle à la conductivité γ . Les incertitudes de ces deux grandeurs sont reliées par la relation suivante :

$$\frac{\Delta R_{\text{ext}}}{R_{\text{ext}}} = -\frac{\Delta \gamma}{\gamma}. \quad (3.10)$$

Les variations de conductivité liées au changement de la composition chimique de l’eau peuvent être fortement amoindries en évitant toute contamination externe. La conductivité

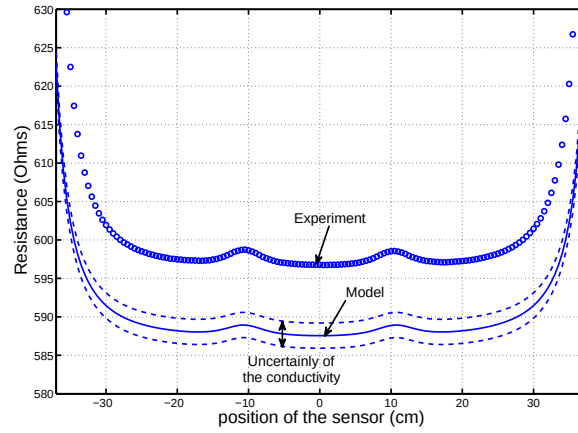


FIGURE 3.24 – Comparaison entre les valeurs expérimentales (cercles) et le modèle ; le trait plein correspond au modèle évalué avec la conductivité mesurée $\gamma = 359 \mu\text{S}/\text{cm}$, tandis que les traits discontinus correspondent aux conductivités $\gamma = 358 \mu\text{S}/\text{cm}$ et $\gamma = 360 \mu\text{S}/\text{cm}$, choisies pour illustrer l'effet de l'erreur du conductimètre ($1 \mu\text{S}/\text{cm}$) sur les prédictions du modèle.

est aussi fortement dépendante de la température, de sorte que la résistance varie aussi en fonction de la température, et ce, comme suit :

$$\frac{1}{R_{\text{ext}}} \frac{\partial R_{\text{ext}}}{\partial T} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial T} = -\beta, \quad (3.11)$$

Où β ($=1$ à $3\%/^{\circ}\text{C}$) est la compensation de pente en température de l'eau et T est la température. Nous montrons expérimentalement l'influence de la température sur la résistance en plaçant simplement au centre de l'aquarium une de nos sondes et en réalisant, tout en maintenant cette position, des mesures sur de longues périodes de temps, enregistrant ainsi les variations de la résistance en fonction des fluctuations naturelles de la température. En dépit du grand volume d'eau, la variation relative de résistance atteint 0.2% ($\Delta R_{\text{ext}} = 1 \Omega$) en 5000 s (fig. 3.25), ce qui se traduit, pour un facteur de compensation de pente en température de $2.5\%/^{\circ}\text{C}$, pour un refroidissement d'environ 0.08°C .

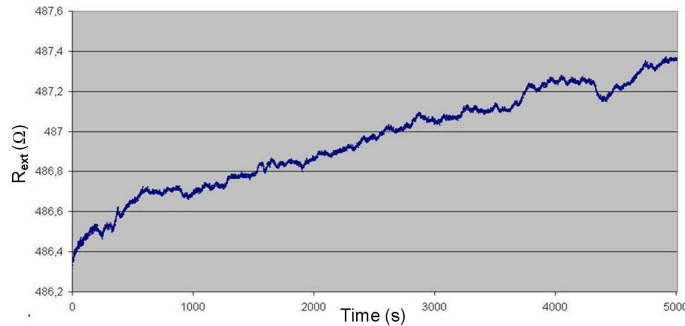


FIGURE 3.25 – Résistance au cours du temps en raison d'un refroidissement en convection naturelle dans l'aquarium.

Une autre expérience montre encore plus clairement l'influence de la température sur la

résistance mais aussi le processus d'électrolocation. Faisons effectuer à une sonde un aller-retour à une faible vitesse (fig. 3.26). Au centre de l'aquarium, la courbe montre que la variation relative de résistance entre l'aller et le retour est de 0.06% ($\Delta R_{\text{ext}} = -0.3 \Omega$). Pour un facteur de compensation de pente en température d'environ $2.5\%/^{\circ}\text{C}$, nous déduisons une augmentation de la température de l'eau d'environ 0.025°C . Notons qu'une telle variation de résistance de 0.06% ne peut être attribuée à la dérive en température de l'électronique puisque celle-ci ne peut conduire qu'à 0.005% de variation. Afin d'exprimer l'impact de cette faible augmentation de température en terme d'incertitude sur la position, considérons les positions X_{retour} pour lesquelles la résistance dans la trajectoire retour admet les mêmes valeurs qu'aux positions X_{aller} de la trajectoire aller. La différence absolue $|X_{\text{retour}} - X_{\text{aller}}|$ quantifiant le défaut de répétabilité dû à une augmentation de température a été estimée à 150 mm, ce qui est inacceptable.

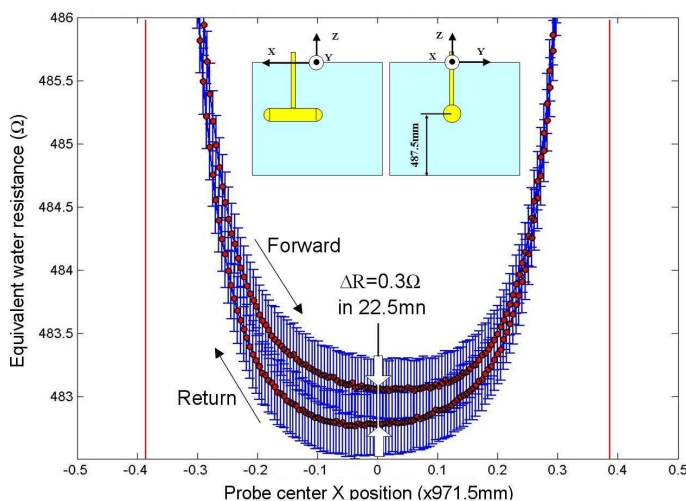


FIGURE 3.26 – Influence de la température durant un aller-retour de la sonde.

3.6.5 Correction de la variation de conductivité

Le problème de l'influence des variations de conductivité sur les valeurs expérimentales peut être toutefois résolu en mesurant ces variations. Une cellule de mesure de conductivité est intégrée dans les différentes versions des dispositifs de mesure par électrolocation (sondes et robots). La résistance mesurée R_{cond} renseignée par cette cellule est exprimée comme un rapport entre un facteur f_{cond} du capteur et la conductivité de l'eau γ . En supposant une conductivité uniforme de l'eau dans la bulle de perception du capteur, nous pouvons définir une résistance externe *normalisée* construite en s'appuyant sur la mesure de la résistance de la cellule. Cette nouvelle grandeur, qui devient indépendante de la conductivité, s'écrit :

$$R_{\text{ext},N} = \frac{R_{\text{cond},0}}{R_{\text{cond}}} R_{\text{ext}} = \frac{1}{\gamma_0} f_{\text{ext}}, \quad (3.12)$$

où $R_{\text{cond},0}$ et γ_0 correspondent respectivement aux valeurs de référence pour la résistance et la conductivité de l'eau. Pour tester la faisabilité de cette correction de conductivité, nous avons construit une sonde bi-polaire avec un module de mesure de conductivité (fig. 3.27). Ce module incrusté dans la tige en epoxy qui maintient le capteur dans l'eau, consiste en une paire de deux électrodes cylindriques communiquant vers l'extérieur via

deux orifices circulaires de diamètre $\varnothing = 4$ mm, lesquels sont orientés suivant la direction du mouvement de la sonde pour faciliter le renouvellement de l'eau et obtenir des mesures réalistes de conductivité.

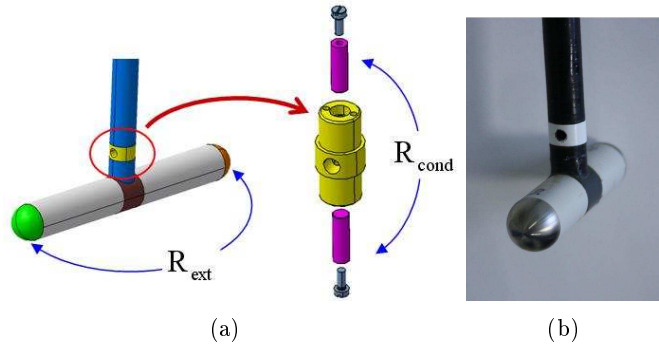


FIGURE 3.27 – Sonde bi-polaire avec cellule de correction de conductivité : a) image CAO et b) réalisation.

Les résultats expérimentaux ont été obtenus en modifiant la conductivité. Les courbes de la figure 3.28 montrent des valeurs de résistance non corrigées ainsi que des valeurs de résistance corrigées dans les conditions ambiantes de température et de pression (1 atm, 20 °C). Pour démontrer la robustesse du dispositif, un objet a été placé en contact avec une sonde immobilisée suivant une température allant de 5 à 24 °C, puis retiré pour des températures supérieures. Les mesures corrigées apparaissent être indépendantes de la variation de conductivité ou de température. L'objet est détecté, ce qui démontre clairement que la correction permet à la sonde de ne pas perdre sa capacité d'électro-localisation.

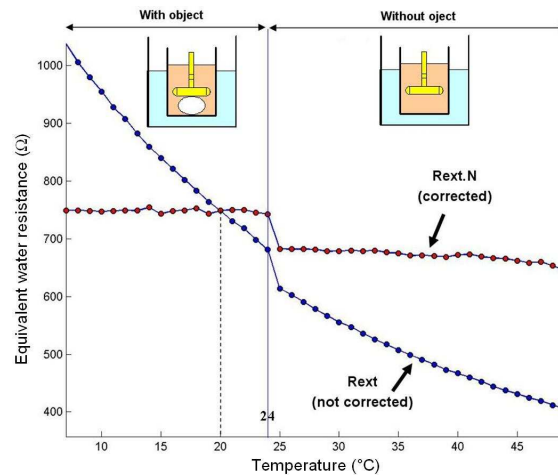


FIGURE 3.28 – Correction de conductivité (voir le texte pour les détails).

3.6.6 Influence de la salinité de l'eau

Hormis la température, la salinité est un paramètre qui a la plus large influence sur la conductivité de l'eau. Nous avons mis au point une batterie de tests intensifs (non reportée en détails ici) pour nous assurer que la capacité de notre capteur à percevoir divers objets et murs n'est pas influencée par la salinité, pourvu que ces objets soient suffisamment

électriquement contrastés par rapport à l'eau. Cela peut être facilement compris d'un point de vue électrique puisque :

1. γ ne perturbe pas la topologie des lignes de courants autour du capteur,
2. γ^{-1} apparaît être un préfacteur dans l'expression de R_{ext} , quelle que soit la nature des objets dans la scène.

Pour ces deux raisons, les allures observées dans les figures 3.18 à 3.23 sont préservées, même si l'amplitude de R_{ext} diminue avec la salinité.

3.7 Bilan

Nous avons présenté le premier système de perception par le sens électrique opérationnel en robotique, avec des électrodes intégrées à un corps de géométrie réaliste, ce qui dépasse la conception idéalisée de mesure ponctuelle proposée dans [Solberg et al., 2007]. L'électronique a été construite pour être embarquée dans un robot sous-marin. La précision de la mesure a été un challenge puisque la détection d'objet requiert une mesure d'une très grande sensibilité (de l'ordre de $1/10000$), mais elle a pu être rendue possible par un travail sur l'électronique. Nos premiers résultats expérimentaux basés sur la mesure de courants ont montré une grande sensibilité à la présence d'objet. Nous avons pris en compte le problème de la perturbation liée aux variations de conductivité dans le milieu en introduisant un conductimètre dans nos sondes pour une mesure et une correction locale et en temps réel de ce paramètre, qui est transposé dans le robot final ANGELS que nous présenterons lors de l'oral de soutenance de cette thèse. Notons aussi qu'une comparaison avec un simulateur BEM a révélé un très bon accord entre les prédictions théoriques, établies dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire (chapitre II) et les mesures effectuées en présence de grands et de petits objets, suivant une gamme de fréquences d'émission qui fait de l'eau de robinet, dans les conditions habituelles de température et de pression, un milieu purement résistif. De plus, notre capacité à prédire analytiquement la perturbation de la mesure sur nos capteurs réels d'électrolocation est particulièrement encourageant (la dernière erreur relative en date est estimée à environ 1%), ce qui nous motive à construire un robot doté d'un capteur d'électrolocation en temps réel. D'autre part, des approches sans modèle exploitant le même dispositif se sont révélées elles aussi efficaces pour l'évitement d'obstacle ou la recherche d'objet en temps réel. Nous ajoutons enfin que d'autres versions de la présente électronique sont en phase de finalisation, et proposerons plusieurs modes de mesures, dont la mesure en potentiel, particulièrement intéressante car faisant partie des paramètres clés de la capacité de détection chez le poisson électrique [Emde et al., 1998].

Chapitre 4

Formalisme générique rapide de la réponse d'objets en champ arbitraire

Nous venons de voir au chapitre III que nous disposons d'un capteur d'électrolocation capable de mesurer la perturbation de petits objets avec une précision de 0.02%, soit une erreur en terme de courant de l'ordre de 10^{-8} A. Nous avons vu également dans ce même chapitre que nous avons avec la BEM, suivant une gamme de fréquences d'émission faisant de l'eau du robinet un milieu purement résistif dans les conditions habituelles de température et de pression, un très bon accord, de l'ordre du pourcent. Ceci légitime amplement une modélisation de l'électrolocation, dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire et l'hypothèse d'une réponse linéaire de l'environnement, telle que nous l'avons proposée dans le chapitre II. Si la BEM s'avère être un outil précis pour la modélisation des potentiels et champs électriques autour du capteur d'électrolocation, à vide et en présence d'objet, elle est par contre consommatrice en temps de calcul, et donc inappropriée pour prendre en charge efficacement la prédiction d'une perturbation de la mesure dans une scène riche d'objets.

C'est pourquoi, nous proposons, dans ce chapitre, de réduire le temps de la prédiction de la perturbation sur le capteur par une modélisation de forme analytique de la perturbation induite par des objets de formes variées et de conductivité arbitraire, et ce, pour tout champ appliqué de capteur, dont le calcul peut être réalisé par la BEM. Une telle modélisation repose sur un formalisme nouveau, inexistant dans la littérature de la physique où l'on ne trouve que la réponse d'un nombre fini d'objets sous une forme analytique exacte ou approximative.

Nous commençons dans ce chapitre par rappeler les résultats numériques et analytiques de la réponse pour quelques objets. Ensuite, nous rappelons au lecteur une définition au sens physique de la réponse dans les conditions de l'électrocinétique quasi stationnaire (chapitre II). Dès lors, nous établissons le formalisme générique de la réponse, pour un champ appliqué arbitraire de capteur, et pour des formes et des conductivités infiniment diverses, susceptibles de donner à notre capteur une bibliothèque vaste lui permettant d'achever une exploration dans des environnements riches, en un temps plus rapide que s'il devait recourir totalement à la BEM. Enfin, afin de prouver la consistance de ce formalisme, nous le réduisons dans une dernière section, pour retrouver d'abord les réponses de la sphère puis de l'ellipsoïde avec lesquelles il se trouve en très bon accord. Nous attirons l'attention du lecteur, avant de commencer ce chapitre, sur le fait que les méthodes utilisées pour bâtir le formalisme de la réponse sont écrites dans [Gossiaux, 2009b].

4.1 Etat de l'art sur la réponse électrique

De manière générale, lorsqu'un objet est soumis à un champ appliqué $\mathbf{E}_a$, il réagit en créant en retour un champ induit $\mathbf{E}_{\text{ind}}$. Suivant l'hypothèse de linéarité des objets (chapitre II), la réponse électrique d'un objet en milieu isotrope et linéaire peut suffisamment être décrite au premier ordre d'un développement suivant sa distance à une source électrique par le tenseur de polarisabilité électrique $\boldsymbol{\alpha}$ telle que :

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}_a, \quad (4.1)$$

où $\mathbf{p}$ est le moment dipolaire résultant de la polarisation principale de l'objet, et $\mathbf{E}_a$ est le champ appliqué (ici par le capteur d'électrolocation). C'est en effet par le moment dipolaire que l'objet réagit au premier ordre suite à un champ appliqué, s'apparentant ainsi à un dipôle. Si dans la littérature nous ne disposons en général que de la polarisabilité pour exprimer la réponse électrique, le lecteur doit savoir qu'en électrolocation, comme la portée du capteur est faible, il est parfois nécessaire de calculer la polarisation venant d'un moment quadrupolaire, voire d'un moment multipolaire d'ordre plus important pour modéliser la réponse d'objets de forme complexe situés à une distance intermédiaire d'une source électrique. Nous ne disposons dans la littérature que de très peu d'objets pour lesquels nous avons une expression exacte de la réponse, ou du moins de la polarisabilité. Parmi eux, nous devons citer la sphère, l'ellipsoïde en champ uniforme [Landau and Lifshitz, 1984] ou non uniforme [Redzic, 1994], le disque [Schiffer and Szego, 1949], la sphère double [Felderhof and Palaniappan, 2000], le tore [Belevitch and Boersma, 1983] ou le cylindre ([Taylor, 1960] [Gossiaux, 2009a], [Smythe, 1962]). Par exemple, pour une sphère diélectrique soumise à un champ électrique uniforme dans un milieu diélectrique, le tenseur de polarisabilité est bien connu et s'écrit :

$$\alpha_{i,j}^{\text{sph.}} = 3\epsilon_e V_{\text{sph.}} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \delta_{i,j}, \quad (4.2)$$

où ϵ_e est la permittivité électrique du milieu extérieur à la sphère, ϵ_r est le rapport de la permittivité électrique extérieure par la permittivité électrique intérieure, $V_{\text{sph.}}$ est le volume de la sphère et $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0, sinon. Le résultat se transpose aisément dans le cas d'une sphère conductrice soumise à un champ constant dans un milieu conducteur. L'expression dans ce cas n'est ni plus ni moins que le modèle de Rasnow que nous avons introduit au premier chapitre. Il s'obtient en substituant $\tilde{\gamma}$ à ϵ_e et $\tilde{\gamma}_r$ à ϵ_r , où $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}_r$ désignent respectivement l'admittance de la sphère et le rapport de l'admittance du milieu extérieur par l'admittance de la sphère. L'admittance étant fonction de la conductivité, de la permittivité et de la fréquence du signal émis comme nous l'avons vu en détail au chapitre II. Pour une ellipsoïde diélectrique ou conductrice, il existe également une forme close de la polarisabilité. Celle-ci dans le cas d'une ellipsoïde diélectrique de rayons arbitraires a_x , a_y et a_z s'écrit :

$$\alpha_i^{\text{ellips.}} = \frac{\epsilon_r - 1}{1 + N_i(\epsilon_r - 1)} \epsilon_e V_{\text{ellips.}} \quad \text{avec } N_i = \frac{a_x a_y a_z}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + a_x^2) \sqrt{(s + a_x^2)(s + a_y^2)(s + a_z^2)}}, \quad (4.3)$$

où l'indice i désigne l'un des trois axes x , y ou z du repère cartésien dans lequel est centré l'ellipsoïde. En particulier, dans le cas d'une ellipsoïde prolata, i.e. $a_x > a_y = a_z$ et une excentricité e_x définie comme : $e_x = \sqrt{1 - a_y^2/a_x^2}$, les facteurs de dépolarisation N_i introduits dans la dernière expression s'écrivent :

$$N_x = \frac{1-e_x^2}{2e_x^3} \left(\ln \left(\frac{1+e_x}{1-e_x} \right) - 2e_x \right) \text{ et } N_y = N_z = \frac{1}{2}(1 - N_x). \quad (4.4)$$

En fait, le tenseur de polarisabilité de la sphère apparaît comme le cas limite du tenseur de polarisabilité de l'ellipsoïde quand l'excentricité e_x tend vers 0. Comme une illustration de ce fait, nous avons représenté sur la figure 4.1 l'évolution de la composante α_x du tenseur de polarisabilité avec l'excentricité dans le cas d'une ellipsoïde prolata totalement conductrice ($\gamma_r \rightarrow \infty$) pour des rayons a_y et a_z égaux. Nous constatons clairement dans la figure que lorsque l'excentricité tend vers 0, la composante α_x du tenseur de polarisabilité normalisée par le volume tend vers 3, ce qui est exactement la valeur des composantes du tenseur de polarisabilité normalisée de la sphère $\alpha^{\text{sph.}}/V_{\text{sph.}}$.

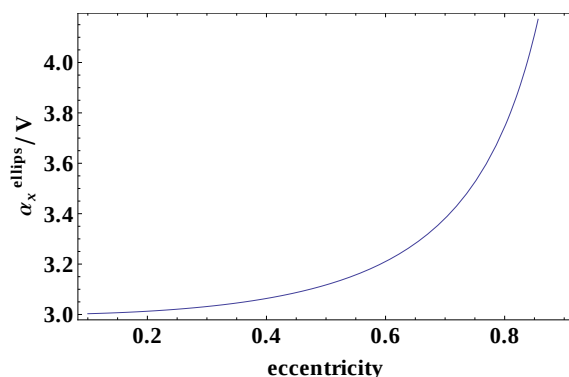


FIGURE 4.1 – Evolution de la composante α_x normalisée du tenseur de polarisabilité d'une ellipsoïde totalement conductrice en fonction de l'excentricité.

Si pour la sphère, l'ellipsoïde ou les quelques autres objets que nous avons cités plus haut présentent des formes analytiques de la polarisabilité, étrangement il n'existe pas de solution exacte pour les polyèdres réguliers (cube, tétraèdre, octaèdre, ...). Nous disposons, en revanche pour ces derniers d'estimations numériques dont la précision s'est affinée dans le temps ([Edwards and Bladel, 1961], [Herrick and Senior, 1977], [Eyges and Gianino, 1979], [Douglas and Garboczi, 1995], [Mansfield et al., 2001], [Sihvola et al., 2004]). Par exemple, pour le cube, nous disposons d'une estimation numérique précise de sa polarisabilité [Sihvola et al., 2004] :

$$\alpha_{i,j}^{\text{cube}} \simeq \gamma_w V_{\text{cube}} (3\kappa + 0.71355\kappa^3 + O(\kappa^4)) \delta_{i,j}, \quad (4.5)$$

où κ est défini comme le rapport $(\gamma_r - 1)/(\gamma_r + 2)$. Il est à constater ici qu'à la lecture de tous les résultats existants concernant la polarisabilité des objets, il n'apparaît pas de formalisme englobant, capable de déduire par lui seul la réponse d'objets appartenant à différentes familles. Avant d'établir un tel formalisme, nous proposons de revenir plus en détails dans la section suivante, sur la définition de la polarisation et comment nous pouvons en déduire d'après les solutions des équations de l'électrolocation dans le régime de l'électrocinétique quasi statique (équation de Laplace), les moments dipolaires et plus généralement les moments multipolaires qui entrent directement dans l'expression de la perturbation électrique de la mesure du capteur.

4.2 Définition de la réponse électrique : de la polarisation au moment multipolaire

4.2.1 La polarisation d'un milieu matériel

Comme nous l'avons dit au début de la section précédente, un objet, lorsqu'il est soumis à un champ électrique se polarise. Et c'est de cette polarisation que naît un champ induit, susceptible de produire une perturbation sur le capteur. Avant d'exprimer la dite perturbation ou *réponse* de l'objet, il convient de s'arrêter un moment sur le phénomène de la polarisation et de la caractériser physiquement. Un matériau, qu'il soit solide, liquide ou gazeux est constitué dans sa structure de charges électriques [Perez, 2001]. Lorsque l'on établit un champ électrique au sein du matériau, une réaction collective de ses charges se produit. C'est cette réaction collective des charges du matériau formant l'objet que l'on dénomme par la *polarisation*. D'un point de vue purement géométrique on peut classer les charges électriques en deux familles, les charges électrique *intérieures* à l'objet de densité volumique ρ_{in} et les charges électriques *extérieures* à l'objet de densité volumique ρ_{ex} [Perez, 2001]. Considérons à présent un objet purement neutre, alors nous pouvons écrire :

$$\int_V \rho_{\text{in}}(\mathbf{y}') dV' = 0. \quad (4.6)$$

Loin de l'objet comme nous l'avons mentionné au début de la section précédente, la distribution des charges à l'intérieur de l'objet peut être suffisamment caractérisée par le moment dipolaire $\mathbf{p}$, défini en fonction des charges comme suit :

$$\mathbf{p} = \int_V (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0) \rho_{\text{in}}(\mathbf{y}') dV', \quad (4.7)$$

où $\mathbf{y}'$ et $\mathbf{y}_0$ sont respectivement un point de l'objet et son centre. Plus généralement, on admet communément l'existence d'une densité de vecteur de polarisation $\mathbf{P}$ à toute distance de l'objet, défini comme :

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{\text{in}} \quad \forall \mathbf{y}' \in V \text{ et } \mathbf{P} = 0, \text{ sinon.} \quad (4.8)$$

D'une manière plus pratique, il convient de choisir une grandeur transportant la densité de vecteur de polarisation $\mathbf{P}$ sur laquelle nous pouvons agir dans l'expérience. Pour cela, reconsidérons l'équation de Maxwell-Gauss (2.2), avec la nouvelle partition que nous adopté pour les charges :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{in}} + \rho_{\text{ex}}}{\epsilon_0}, \quad (4.9)$$

où nous le rappelons, $\mathbf{E}$ est le champ électrique total. Avec la définition (4.8) de $\mathbf{P}$, nous pouvons écrire [Perez, 2001] :

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_{\text{ex}}, \text{ d'où } \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{ex}}. \quad (4.10)$$

Nous identifions alors le champ de vecteurs $\mathbf{D}$, communément appelé *vecteur déplacement* :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (4.11)$$

avec :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{ex}}. \quad (4.12)$$

Nous obtenons ainsi une grandeur contenant le vecteur de densité de polarisation, sur laquelle nous pouvons agir expérimentalement via l'établissement d'un courant de charges de densité volumique ρ_{ex} à l'extérieur de l'objet. Ce courant n'est autre que le mouvement des charges libres issu d'un champ appliqué $\mathbf{E}_a$ créé par le capteur dans l'environnement de l'objet.

Enfin, nous devons faire remarquer au lecteur que nous avons employé une expression simplifiée du vecteur de densité de polarisation $\mathbf{P}$, du fait que l'objet est supposé électriquement isotrope et que sa réponse est considérée comme linéaire. En fait, dans le cas le plus général, en introduisant χ , la susceptibilité de l'objet définie comme :

$$\chi = \epsilon_r - 1, \quad (4.13)$$

où ϵ_r est la permittivité électrique de l'objet définie comme $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, l'objet n'est pas constitué d'un matériau isotrope et sa réponse n'est pas linéaire, ce qui se traduit pour le premier aspect par la définition d'un tenseur de susceptibilité, et pour le second aspect, par une décomposition en série de Taylor du vecteur de densité de polarisation $\mathbf{P}$ en fonction du champ électrique $\mathbf{E}$ dont les coefficients sont des susceptibilités électriques non linéaires. Ainsi, dans le cas général, où l'objet est anisotrope et sa réponse, non linéaire, on a :

$$\frac{P_i}{\epsilon_0} = \sum_j \chi_{i,j}^{(1)} E_j + \sum_{j,k} \chi_{i,j,k}^{(2)} E_j E_k + \sum_{j,k,l} E_j E_k E_l + \dots, \quad (4.14)$$

où P_i est la i -ème composante du vecteur de densité de polarisation. Suivant cette expression plus générale (4.14), on voit qu'il est assez raisonnable en électrolocation de ne garder que le premier terme du fait de la faible intensité des champs électriques.

4.2.2 Calcul usuel de la réponse d'un objet polarisable

Nous allons voir dans ce paragraphe comment le vecteur de densité de polarisation intervient concrètement dans la perturbation en potentiel d'un objet suite à sa polarisation. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, lorsque l'on soumet un objet à un champ appliqué, l'orientation et la distribution des charges au sein de l'objet se modifient. Si de manière usuelle, nous nous contentons de caractériser cette réaction de l'objet par son moment dipolaire si l'on mesure d'assez loin la perturbation, en électrolocation, il peut s'avérer insuffisant de se limiter à évaluer le moment dipolaire, puisque le capteur comme le poisson électrique perçoit de près son environnement. Ainsi, nous serons a priori amenés à exprimer des ordres de polarisation supérieurs. La manière usuelle de faire apparaître ces ordres de polarisation est de développer le potentiel ϕ créé par une distribution de charges à l'intérieur d'un objet en un point $\mathbf{x}$ en dehors de l'objet. Ce potentiel s'écrit :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_{\text{in}}(\mathbf{y}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} dV', \quad (4.15)$$

où $\rho_{\text{in}}(\mathbf{y}')$ est la densité volumique de charge totale en un point $\mathbf{y}'$ du volume de l'objet. Introduisons le centre $\mathbf{y}_0$ de l'objet. Supposons maintenant que *l'objet est petit relativement à la distance à laquelle on évalue le potentiel* (cette hypothèse convient bien en électrolocation dans la mesure où on évalue la perturbation à la surface des capteurs

dont la dimension comme celle de l'objet est plus petite devant la distance séparant l'objet du capteur). Ceci nous donne le droit d'écrire :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_{\text{in}}(\mathbf{y}') \left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}_0|} + (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0)^T \cdot \nabla_{\mathbf{y}_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}_0|} \right) + O(|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2) \right] dV', \quad (4.16)$$

où l'on a considéré pour le développement en série que $|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0| \ll |\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|$. Le premier terme du développement (4.16) s'identifie au potentiel crée par un objet initialement chargé, de charge globale $Q_0 = \int_V \rho(\mathbf{y}') dV$. L'objet peut alors être remplacé au premier ordre du développement par un monopôle de charge Q_0 . Cette situation dans ce chapitre n'est pas abordé, car tous les objets que nous allons traiter ici seront considérés comme électriquement neutres. A l'ordre suivant du développement (4.16) nous identifions le potentiel ϕ_{dip} créé par le moment dipolaire acquis par l'objet et défini en (4.7) :

$$\phi_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{y}_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|} \right), \quad (4.17)$$

soit :

$$\phi_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^3}, \quad (4.18)$$

Nous voyons ainsi que la première contribution d'un objet dans sa perturbation s'il est neutre, provient de son moment dipolaire. L'objet neutre réagit principalement comme un dipôle lorsqu'il perturbe son environnement. En allant plus loin dans le développement de (4.16), on obtient un terme que l'on ne peut pas en principe négliger lorsque nous mesurons la perturbation près de l'objet. Ce terme que nous dénommons ϕ_{quad} est associé au moment quadrupolaire de l'objet :

$$\phi_{\text{quad}} = \int_V \frac{\rho_{\text{in}}(\mathbf{y}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0)^T \cdot H_{\mathbf{y}_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|} \right) \cdot (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0) dV'. \quad (4.19)$$

La matrice hessienne H pouvant aisément se calculer en remarquant d'abord :

$$\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|} \right) = - \frac{\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^3}, \quad (4.20)$$

soit :

$$\mathbf{e}_i \cdot \nabla_{\mathbf{y}_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^3} [(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{e}_i], \quad (4.21)$$

où l'indice i désigne l'un des trois axes cartésiens. En réappliquant le gradient à cette dernière expression et en y prenant sa composante suivant un axe cartésien j , on en déduit la matrice hessienne H :

$$H_{i,j} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|} \right) = \frac{3(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i (\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^5} - \frac{\delta_{i,j}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^3} \quad (4.22)$$

En réinjectant alors l'expression obtenue de la hessienne dans (4.19), on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{quad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int \rho_{\text{in}}(\mathbf{y}') \sum_{i,j} & \left[\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}')^T \cdot \frac{3(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i (\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^5} \cdot (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}') \cdot \mathbf{e}_j \right. \\ & \left. - \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}')^T \frac{\delta_{i,j}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^3} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}') \cdot \mathbf{e}_j \right] dV', \end{aligned} \quad (4.23)$$

ce que l'on peut réécrire comme :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{quad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int_V \rho_{\text{in}}(\mathbf{y}') \sum_{i,j} & \frac{(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_i (\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_j}{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}|^5} \times \\ & \left(3(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}') \cdot \mathbf{e}_i (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}') \cdot \mathbf{e}_j - |\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}'|^2 \delta_{i,j} \right) dV', \end{aligned} \quad (4.24)$$

où l'on identifie le tenseur $Q_{i,j}$ lié au moment quadrupolaire de l'objet :

$$Q_{i,j} = \int_V \rho_{\text{in}}(\mathbf{y}') \left(3(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}') \cdot \mathbf{e}_i (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}') \cdot \mathbf{e}_j - |\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}'|^2 \delta_{i,j} \right) dV', \quad (4.25)$$

provenant de la matrice du moment quadrupolaire $\hat{Q}$:

$$\hat{Q} = \int_V \rho_{\text{in}}(\mathbf{y}') |\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}'|^2 (3\mathbf{e}_{r'} \otimes \mathbf{e}_{r'}^T - \mathbf{1}_3) dV', \quad (4.26)$$

où $\mathbf{1}_3$ est la matrice identité. On voit alors que le potentiel ϕ_{quad} peut s'écrire plus synthétiquement :

$$\phi_{\text{quad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0)^T \cdot \hat{Q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}_0)}{2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^5}. \quad (4.27)$$

Nous pourrions continuer ici à l'infini et exprimer les contributions suivantes au potentiel $\phi(\mathbf{x})$ dues à des moments multipolaires. Bien sûr, ces moments ne sont en fait pris en compte que si l'on se rapproche de très près de l'objet, mais il peut s'avérer nécessaire de les calculer, si l'on veut réaliser à l'aide du capteur ou du futur robot des tâches fines comme la distinction entre deux objets quasi semblables. En toute rigueur, dans le projet ANGELS, nos capteurs d'électrolocation sont utilisés dans des milieux conducteurs d'admittance $\tilde{\gamma}$ pour repérer des objets d'admittance $\tilde{\gamma}_{\text{obj}}$. Pour adapter l'expression du potentiel et des moments multipolaires aux conditions physiques de l'électrolocation telles que nous les avons évoquées au chapitre II, réexprimons le potentiel en un point $\mathbf{x}$ extérieur à l'objet soumis au champ appliqué de pulsation ω de notre capteur. Pour cela, commençons par réécrire que le potentiel en $\mathbf{x}$ (4.15) créé par une distribution de charges intérieures à l'objet en utilisant la définition du vecteur de densité volumique de polarisation $\mathbf{P}$ (4.8) :

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_V \frac{-\nabla_{\mathbf{y}'} \cdot \mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} dV'. \quad (4.28)$$

Utilisons à présent l'identité $\nabla \cdot (f\mathbf{P}) = f\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \nabla(f)$, comme ceci est fait dans [Pérez,2001]. Nous pouvons alors transformer la dernière expression de la manière suivante :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[-\nabla_{\mathbf{y}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \right) + \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|^3} \right] dV'. \quad (4.29)$$

Dès lors, en appliquant la formule de Green Ostrogradski, on peut écrire que le premier terme vaut au coefficient $4\pi\epsilon_0$ près :

$$\int_V -\nabla_{\mathbf{y}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \right) dV' = \int_S \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} ds', \quad (4.30)$$

où il faut préciser ici que S est la surface extérieure au volume V de l'objet. Il vient alors, d'après la définition (4.8), que $\mathbf{P} = 0$ sur S et donc que le potentiel ϕ peut s'écrire plus simplement :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|^3} dV', \quad (4.31)$$

où l'on reconnaît sous l'intégrale une contribution au potentiel total émanant d'une densité volumique de dipôles de moment dipolaire moyen $\mathbf{P}$ si l'on se fie à l'expression (4.18). Tout se passe comme si le potentiel au point $\mathbf{x}$ extérieur venait en fait de la contribution de tous les dipôles élémentaires dans l'objet qui définiraient alors dans leur ensemble du point de vue macroscopique les différents moments multipolaires au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'objet, conformément au développement (4.16) du potentiel $\phi(\mathbf{x})$ en fonction de la distance à l'objet. En fait, il est admis que le vecteur $\mathbf{P}$ contribue au champ total macroscopique $\mathbf{E}$ suivant la relation suivante [VanBladel, 1985] :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + (\epsilon_{\text{in}} - \epsilon_{\text{ex}}) \mathbf{E}, \quad (4.32)$$

où $\mathbf{P}_0$ est le vecteur de polarisation permanente, uniquement présent dans les matériaux ferroélectriques, ϵ_{in} et ϵ_{ex} sont les permittivités électriques à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet. A présent, revenons à l'expression (4.31) du potentiel en reformulant l'intégrande de la manière suivante :

$$\frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|^3} = \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{y}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} \right) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|}. \quad (4.33)$$

Cette fois-ci, intégrons cette expression dans un volume mathématique V' dont la surface extérieure n'est plus la surface physique S extérieure à l'objet, mais une surface $\partial V'$ intermédiaire située à l'intérieur de la couche physique faisant office de séparation entre l'intérieur et l'extérieur de l'objet. Dans ces conditions, le vecteur $\mathbf{P}$ est non nul sur $\partial V'$, ce qui nous autorise à écrire d'après la relation (4.33) et la formule de Green-Ostrogradski :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\nabla_{\mathbf{y}'} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V'} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} ds'. \quad (4.34)$$

Ainsi, le potentiel au point $\mathbf{x}$ extérieur à l'objet provient de l'existence de densités volumiques de charges $\rho_{\text{in}} = -\nabla_{\mathbf{y}'} \cdot \mathbf{P}$ mais également de densités surfaciques $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$. Ces dernières pouvant s'écrire encore à l'aide de l'expression (4.11) : $\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$, soit encore en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss (2.2) et (4.12) : $\sigma = \sigma_{\text{ex}} - \sigma_{\text{tot}}$. En identifiant ici les charges extérieures à l'objet aux charges libres fournies par le capteur, nous constatons en fait qu'au signe "-" près, les charges de densité σ correspondent aux charges liées à l'objet ou charges de polarisation dont on pourrait définir, de manière analogue aux charges volumiques, la densité surfacique de la manière suivante :

$$\sigma_{\text{pol}} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.35)$$

Si bien que le potentiel ϕ à l'extérieur de l'objet peut s'écrire :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_{\text{in}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V'} \frac{\sigma_{\text{pol}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}'|} ds'. \quad (4.36)$$

A ce stade, nous pouvons alors remarquer qu'un développement, analogue à celui effectué sur le premier terme de cette dernière expression en fonction de la distance (4.16) pour établir les différents moments multipolaires en volume (4.7,4.26), peut donner lieu quand il est appliqué cette fois au second terme de la dernière expression à des moments multipolaires en surface tels que :

$$\mathbf{p}_s = \int_{\partial V'} (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0) \sigma_{\text{pol}}(\mathbf{y}) ds' \text{ et } \hat{\mathbf{Q}}_s = \int_{\partial V'} \sigma_{\text{pol}}(\mathbf{y}') |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2 (3\mathbf{e}_{\mathbf{r}'} \otimes \mathbf{e}_{\mathbf{r}'}^T - \mathbf{1}_3) ds'. \quad (4.37)$$

Considérons à présent pour simplifier notre étude que l'objet est uniformément polarisable, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, soit $\rho_{\text{in}} = 0$. La polarisation de l'objet a alors lieu en surface. L'objet réagit alors au flux de charges libres qui lui est imposé par le capteur en modifiant à sa surface la densité surfacique de charges. Comme en pratique, nous avons plutôt accès dans l'expérience au potentiel total, nous avons à ajouter aux charges de polarisation les charges libres fournies par le capteur. La réponse en définitive telle qu'elle est mesurée par l'expérimentateur provient de moment multipolaires des charges totales de densité σ_{tot} . Au premier ordre de la réponse suivant la distance à l'objet, le moment dipolaire macroscopique $\mathbf{p}$ des charges totales s'écrit :

$$\mathbf{p} = \int_{\partial V'} (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0) \sigma_{\text{tot}}(\mathbf{y}) ds' \quad (4.38)$$

Suivant les conditions physiques de l'électrolocation bien définies au chapitre 2, nous pouvons écrire à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss et (2.44) :

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 (\tilde{\gamma}_r - 1) \int_{\partial V'} (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0) E_{\text{int}} ds', \quad (4.39)$$

où $\tilde{\gamma}_r$ est le rapport des admittances $\tilde{\gamma}_{\text{ext}}/\tilde{\gamma}_{\text{int}}$ et E_{int} la valeur de la composante normale du champ électrique total en la surface intérieure au point $\mathbf{y}'$. Ecrivant alors :

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 (\tilde{\gamma}_r - 1) \int_{\partial V'} (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0) \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot \mathbf{ds}'. \quad (4.40)$$

On choisit une base cartésienne $\{\mathbf{e}_i, i = 1, 3\}$ centrée sur l'objet telle que $\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0 = \sum_i y'_i \mathbf{e}_i$. Dans ces conditions, on a :

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 (\tilde{\gamma}_r - 1) \sum_i \int_{\partial V'} (y'_i \mathbf{E}_{\text{int}}) \cdot \mathbf{ds}' \mathbf{e}_i. \quad (4.41)$$

Et d'après le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 (\tilde{\gamma}_r - 1) \sum_i \int_{V'} \nabla' \cdot (y'_i \mathbf{E}_{\text{int}}) dV' \mathbf{e}_i. \quad (4.42)$$

Comme $\nabla' \cdot (y'_i \mathbf{E}_{\text{int}}) = y'_i \nabla' \cdot \mathbf{E}_{\text{int}} + \nabla' y'_i \cdot \mathbf{E}_{\text{int}} = y'_i \nabla' \cdot \mathbf{E}_{\text{int}} + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{E}_{\text{int}}$ et que l'objet est uniformément polarisable, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, soit d'après (4.14) $\nabla \cdot \mathbf{E}_{\text{int}} = 0$, on peut écrire :

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 (\tilde{\gamma}_r - 1) \int_{V'} \sum_i (\mathbf{E}_{\text{int}})_i \mathbf{e}_i dV' = \epsilon_0 (\tilde{\gamma}_r - 1) \int_{V'} \mathbf{E}_{\text{int}} dV'. \quad (4.43)$$

Comme $\mathbf{E}_{\text{int}} = -\nabla\phi_{\text{int}}$ et que $\int_V \nabla F dV = \int_{\partial V} F \mathbf{ds}$, on a :

$$\mathbf{p} = -\epsilon_0 (\tilde{\gamma}_r - 1) \int_{\partial V'} \phi_{\text{int}} \mathbf{ds}'. \quad (4.44)$$

Enfin, comme le potentiel total est continu à travers la surface de l'objet, $\phi_{\text{int}} = \phi$, ce qui donne :

$$\mathbf{p} = -\epsilon_0 (\tilde{\gamma}_r - 1) \int_{\partial V'} \phi(\mathbf{y}') \mathbf{ds}'. \quad (4.45)$$

Ainsi, physiquement nous avons montré que la réponse de l'objet induite par un flux de charges libres créé par le capteur à travers un certain champ appliqué $\mathbf{E}_a$, se manifeste par une modification de la densité de charges (4.36). En ajoutant aux charges de polarisation, i.e. les charges liées à l'objet, les charges libres fournies par le capteur, et en adoptant un développement du potentiel total en fonction de la distance à l'objet analogue au développement (4.16) nous ferions apparaître les moments multipolaires des distributions de charges totales associés à la réponse de l'objet. La difficulté maintenant consiste à calculer explicitement cette réponse puisque l'expression du potentiel et des moments multipolaires font intervenir à la fois la géométrie de l'objet et les densités de charges totales, elles-mêmes dépendantes du flux de charges libres fournies par le capteur sous la contrainte de la géométrie de l'objet. Si dans la littérature, nos prédécesseurs ont bien réussi pour un nombre fini d'objets le calcul de la réponse, la méthode de résolution restait assujettie au type de géométrie de l'objet. Ainsi, une méthode de calcul du potentiel au voisinage d'une ellipsoïde par exemple ne pouvait être transposable au calcul du potentiel au voisinage d'un cube. Ce que nous proposons dans la section suivante, c'est un formalisme générique capable de déduire la réponse d'un objet de forme quelconque et d'admittance quelconque, pourvu qu'il soit de faible excentricité, et ce, quelque soit le champ appliqué par le capteur. Un tel formalisme, tel que nous allons le voir, nous dévoilera aussi les paramètres adéquats à la capacité d'une distinction d'objets par électrolocation.

4.3 Formalisme générique

Nous présentons dans cette section un formalisme capable d'exprimer la réponse d'un grand nombre d'objets pouvant appartenir à différentes familles, comme les objets sphéroïdes ou les objets cuboïdes. Nous construisons ce formalisme à partir d'une formulation intégrale de l'équation de Laplace, considérée comme l'équation à résoudre en électrolocation (voir chapitre II). Cette formulation intégrale introduite par Van Bladel [VanBladel, 1985], permet de traiter des objets de permittivité électrique arbitraire, ou de conductivité électrique arbitraire (en nous plaçant dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire). Le formalisme construit est valable pour une infinité d'objets de forme ou de conductivité arbitraire, pourvu qu'ils présentent une faible excentricité, c'est à dire qu'aucune de leur dimension n'est bien plus grande qu'une autre. Ce formalisme est établi en champ arbitraire et peut donc également s'appliquer, soit à des objets de taille moyenne par rapport au capteur situés à une distance typique du capteur de l'ordre de la plus grande dimension du capteur, soit à de petits objets relativement à la taille du capteur

et situés à des distances du capteur inférieures à la plus grande de ses dimensions. Nous verrons que nous pouvons déduire de ce formalisme les différents moments multipolaires, dont nous avons définis les premiers ordres à la section précédente, et la réponse qui est associée. Nous montrons que la distinction d'objet nécessite d'établir un couplage adéquat entre 3 paramètres clés : le degré de complexité géométrique de l'objet (ordre de sa décomposition), le degré d'uniformité du champ appliqué ainsi que le degré de polarisation de l'objet ou l'ordre de son moment multipolaire. Enfin, nous prouvons la consistance de ce formalisme en retrouvant l'expression des réponses standards d'objet, comme la sphère ou l'ellipsoïde en champ constant [Landau and Lifshitz, 1984]. Avant de commencer, nous rappelons au lecteur, que la plupart des méthodes pour la construction du formalisme ont été établies dans [Gossiaux, 2009b]

4.3.1 La formulation intégrale de Van Bladel

Dans [Van Bladel, 1985] nous pouvons trouver une formulation intégrale du problème électrostatique aux surfaces d'objets diélectriques dans le cas où aucune charge volumique n'est présente dans l'espace. Cette formulation peut être aisément étendue aux objets définis par une admittance et baignés dans un fluide conducteur si nous nous plaçons dans le régime RQS comme nous le montrons dans [Jawad, 2010]. Cette formulation intégrale s'écrit ainsi pour tout point $\mathbf{y}$ appartenant à la surface intérieure de l'objet :

$$\phi(\mathbf{y}) = \frac{\phi_a(\mathbf{y})}{\epsilon_r} - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r} \int_{\partial\mathcal{O}} \phi(\mathbf{y}') \frac{\partial}{\partial n'}, \left(\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} \right) ds' \quad (4.46)$$

où ϕ est le potentiel total, ϕ_a est le potentiel appliqué (en l'occurrence ici par le capteur d'électrolocation), ϵ_r est le rapport des permittivités ϵ_i/ϵ_e avec ϵ_i la permittivité électrique à l'intérieur de l'objet et ϵ_e , la permittivité électrique à l'extérieur de l'objet, et où $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$ sont des points appartenant à la surface $\partial\mathcal{O}$ de l'objet. A ce stade, nous devons avertir le lecteur que dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire, nous pouvons remplacer purement et simplement les permittivités électriques par les admittances en s'aidant des conditions de raccords établies au chapitre II (2.44). Cette simple opération nous permettra ainsi de généraliser les résultats obtenus dans le cadre de l'électrostatique. Nous ne le faisons pas ici, pour conserver une forme de comparaison avec les modèles de réponses standards établis classiquement en électrostatique, donc avec les permittivités électriques. Dès lors, la stratégie que nous adoptons pour établir notre formalisme de la réponse est la suivante :

1. Définir la catégorie des objets que nous allons traiter. Ces objets ne seront contraints uniquement du point de vue de leur excentricité et pourrons revêtir une forme quelconque.
2. Mettre sous forme tensorielle la formulation de Van Bladel (4.46) en décomposant toutes les quantités dans une même base. Cette première étape nous permettra d'exprimer la solution du problème en fonction de grandeurs géométriques et physiques que nous identifierons chacune par un tenseur.
3. Expliciter le tenseur physique exprimant un champ appliqué de degré arbitraire d'uniformité au sein de l'objet.
4. Expliciter le tenseur géométrique définissant le noyau de la formulation de Van Bladel en se basant sur un développement permis par le concept de faible excentricité.
5. Ecrire la solution générale du potentiel sur l'objet, en substituant aux écritures tensorielles établies à l'étape 2, les expressions explicites des tenseurs.

6. Enfin, vérifier la consistance du formalisme par la comparaison avec des modèles standards.

4.3.2 Le concept de faible excentricité

Le formalisme que nous allons construire à partir de la formulation intégrale de Van Bladel (4.46) est valable pour des objets de faible excentricité. On entend par faible excentricité des objets dont aucune dimension n'est bien plus grande qu'une autre.

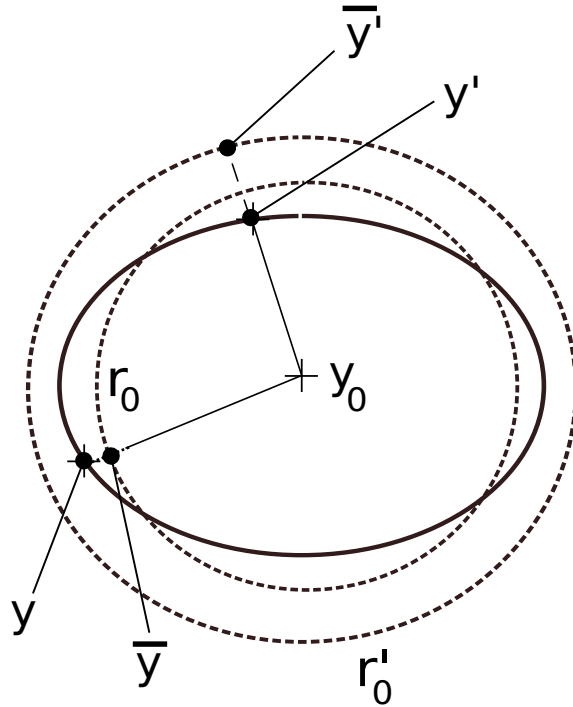


FIGURE 4.2 – le concept de faible excentricité.

Pour formaliser le concept de faible excentricité, considérons deux points $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$ à la surface d'un objet. Considérons deux sphères construites autour du centre $\mathbf{y}_0$ de l'objet telles que leurs rayons r_0 et r'_0 soient proches par valeur inférieure et valeur supérieure des normes $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|$ et $|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|$ (fig. 4.2). Ce que l'on peut mathématiquement exprimer en écrivant d'abord :

$$\begin{aligned} \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 &= \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0 + \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} \\ \mathbf{y}' - \mathbf{y}_0 &= \bar{\mathbf{y}}' - \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}', \end{aligned} \tag{4.47}$$

et :

$$\begin{aligned} |\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}| &\ll |\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0| \\ |\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}'| &\ll |\bar{\mathbf{y}}' - \mathbf{y}_0|, \end{aligned} \tag{4.48}$$

où l'on a introduit $\bar{\mathbf{y}}$ et $\bar{\mathbf{y}}'$ définis respectivement comme le point d'intersection entre la sphère de rayon r_0 et la demi-droite issue de $\mathbf{y}_0$ de vecteur directeur $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0$, et le point

d'intersection entre la sphère de rayon r'_0 et la demi-droite issue de $\mathbf{y}_0$ de vecteur directeur $\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0$. Le concept de faible excentricité peut alors se formuler ainsi : *aussi rapprochés que peuvent être deux points $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$ sur un objet faiblement excentrique, il existera toujours deux sphères centrées sur l'objet, telles que la distance entre les points de projection $\bar{\mathbf{y}}$ et $\bar{\mathbf{y}}'$, obtenus par intersection entre la surface des sphères et les demi-droites issues du centre de l'objet passant par les deux premiers points $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$, soit toujours plus grande que la somme des distances entre les premiers points et leurs projections.* Suivant cette définition on peut mathématiquement exprimer l'excentricité d'un objet comme suit :

$$|(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')| \ll |(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0) - (\bar{\mathbf{y}}' - \mathbf{y}_0)| \quad \forall (\mathbf{y}, \mathbf{y}') \in \partial\mathcal{O}^2. \quad (4.49)$$

4.3.3 Choix d'une base de décomposition et écriture tensorielle de la formulation intégrale

Du fait que nous optons pour des objets ayant une faible excentricité, au sens où nous l'avons défini au paragraphe précédent, il nous paraît naturel de choisir la base des harmoniques sphériques pour décomposer toutes les quantités physiques et géométriques présentes dans la formulation de Van Bladel (4.46). Ainsi, en commençant par traiter les grandeurs physiques ϕ et ϕ_a nous obtenons les décompositions suivantes pour tout point $\mathbf{y}$ appartenant à la surface intérieure de l'objet :

$$\phi(\mathbf{y}) = 2\sqrt{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l V_{l,m} Y_{l,m}(\Omega), \quad (4.50)$$

et

$$\phi_a(\mathbf{y}) = 2\sqrt{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l V_{l,m}^{(a)} Y_{l,m}(\Omega), \quad (4.51)$$

où les termes $V_{l,m}$ et $V_{l,m}^{(a)}$ sont les coefficients de décomposition des potentiels ϕ et ϕ_a , $Y_{l,m}$ est un élément d'ordres (l, m) de la base des harmoniques sphériques et où le facteur $2\sqrt{\pi}$ est choisi pour que le premier terme de la décomposition d'une grandeur coïncide avec le premier coefficient de décomposition. Le coefficient $V_{l,m}^{(a)}$ est a priori connu puisqu'il entre dans l'expression du potentiel appliqué, que nous contrôlons à l'aide du capteur. En revanche, le coefficient $V_{l,m}$ est inconnu, et désigne la solution de notre problème. Suivant cette décomposition nous pouvons réécrire la formulation intégrale de Van Bladel :

$$\begin{aligned} \sum_{l_0=0}^{\infty} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} V_{l_0,m_0} Y_{l_0,m_0}(\Omega) &= \frac{1}{\epsilon_r} \sum_{l_0=0}^{\infty} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} V_{l_0,m_0}^{(a)} Y_{l_0,m_0}(\Omega) - \\ &\quad \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} V_{l',m'} \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l',m'}(\Omega') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} \right) ds', \end{aligned} \quad (4.52)$$

où sur la surface $\partial\mathcal{O}$ il ne peut varier que des fonctions d'angle solide centré sur le point $\mathbf{y}_0$, par rapport auxquelles notamment les coefficients $V_{l',m'}$ sont constants. Pour continuer, nous utilisons la propriété d'orthonormalité de la base des harmoniques sphériques :

$$\int Y_{l,m} Y_{l',m'}^* d\Omega = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}, \quad (4.53)$$

où $Y_{l',m'}^*$ est le conjugué de $Y_{l,m}$ et où $\delta_{l,l'}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $l = l'$ et 0 si $l \neq l'$. Ainsi, en appliquant l'opérateur $\int Y_{l,m}^* d\Omega$ à l'équation (4.52), nous obtenons :

$$V_{l,m} = \frac{1}{\epsilon_r} V_{l,m}^{(a)} - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} V_{l',m'} \left(\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l',m'}(\Omega') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} \right) ds' \right) \quad (4.54)$$

Nous poursuivons en introduisant le tenseur $\mathcal{K}$ défini comme suit :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'} = \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) d\Omega \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l',m'}(\Omega') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} \right) ds', \quad (4.55)$$

ce qui nous permet de réécrire (4.54) :

$$V_{l,m} = \frac{1}{\epsilon_r} V_{l,m}^{(a)} - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} V_{l',m'} \mathcal{K}_{l,l';m,m'}. \quad (4.56)$$

Maintenant, en écrivant le coefficient $V_{l,m}$ comme :

$$V_{l,m} = \sum_{l'} \sum_{m'=-l'}^{l'} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} V_{l',m'}, \quad (4.57)$$

on aboutit à une écriture tensorielle de la formulation de Van Bladel :

$$\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \left[\frac{\epsilon_r - 1}{4\pi\epsilon_r} \mathcal{K}_{l,l';m,m'} + \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \right] V_{l',m'} = \frac{1}{\epsilon_r} V_{l,m}^{(a)}. \quad (4.58)$$

Dès lors, il reste à expliciter les tenseurs $\mathcal{K}$ et $V_{l,m}^{(a)}$ pour déduire la solution représentée par le tenseur $V_{l,m}$. Dans la section suivante, nous explicitons l'expression du coefficient $V_{l,m}^{(a)}$ en généralisant à des degrés divers d'uniformité du champ appliqué au sein de l'objet.

4.3.4 Champ appliqué : relation entre la variation du champ appliqué et le mode de polarisation de l'objet : vers une capacité de distinction de forme ?

Dans l'écriture tensorielle de la formulation de Van Bladel (4.58), le second membre qualifie le mode d'excitation électrique de l'objet. Afin de prendre en compte les degrés divers d'uniformité du champ appliqué au sein de l'objet, procédons à un développement de Taylor du potentiel appliqué et écrivons jusqu'au second ordre :

$$\phi_a(\mathbf{y}) = \phi_a(\mathbf{y}_0) - (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})^T \cdot \nabla \phi_a(\mathbf{y}_0) - \frac{1}{2} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})^T \cdot (H \phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})) + O(|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}|^2), \quad (4.59)$$

où H désigne la matrice hessienne du potentiel appliqué. Nous pouvons alors réécrire le terme $V_{l,m}^{(a)}$:

$$\begin{aligned}
V_{l,m}^{(a)} = & \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) \phi_a(\mathbf{y}_0) d\Omega \\
& + \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) (-)(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})^T \cdot \nabla \phi_a(\mathbf{y}_0) d\Omega \\
& + \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) (-)\frac{1}{2}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})) d\Omega + O(|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}|^3).
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Ces trois dernières intégrales sont dénommées suivant l'ordre naturel de sommation $V_{l,m}^{(a,0)}$, $V_{l,m}^{(a,1)}$ et $V_{l,m}^{(a,2)}$. Ces trois termes représentent physiquement dans l'ordre une excitation électrique avec un potentiel appliqué constant, un champ appliqué uniforme et un champ appliqué variable au sein de l'objet. Comme nous l'avons vu dans la section 4.2 notamment avec l'expression (4.38), la réponse de l'objet fait intervenir la densité de charge totale qui inclut la densité de charge libre mise en place par le capteur à travers l'établissement d'un champ appliqué $\mathbf{E}_a$ plus ou moins uniforme. Ainsi le moment multipolaire des charges libres, participe à la réponse de l'objet. Nous verrons ci-après que l'on peut établir à l'aide de notre formalisme une relation directe entre la complexité géométrique de l'objet et le degré de moment multipolaire des charges libres appliquées par le capteur, ce qui nous permettra de définir le protocole à adopter avec notre instrument pour reconnaître un objet.

4.3.4.1 Polarisation en l'absence de champ appliqué : capteur éteint.

La situation où le potentiel appliqué est constant au sein de l'objet, correspond au fait qu'aucun champ n'est appliqué, c'est à dire que l'objet est hors de la portée d'un capteur actif soit dans la portée d'un capteur éteint. Dans ces conditions, le coefficient $V_{l,m}^{(a)}$ se réduit à $V_{l,m}^{(a,0)}$:

$$V_{l,m}^{(a,0)} = \int_{\partial\mathcal{O}} \phi_a(\mathbf{y}_0) Y_{l,m}^*(\Omega) d\Omega. \tag{4.61}$$

Comme $\phi_a(\mathbf{y}_0)$ est constant sur $\partial\mathcal{O}$, on obtient :

$$V_{l,m}^{(a,0)} = \phi_a(\mathbf{y}_0) \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) d\Omega, \tag{4.62}$$

ce que l'on peut réécrire comme :

$$V_{l,m}^{(a,0)} = 2\sqrt{\pi} \phi_a(\mathbf{y}_0) \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{0,0}(\Omega) Y_{l,m}^*(\Omega) d\Omega. \tag{4.63}$$

Et d'après la propriété d'orthonormalité des éléments de la base des harmoniques sphériques (4.53) :

$$V_{l,m}^{(a,0)} = 2\sqrt{\pi} \phi_a(\mathbf{y}_0) \delta_{l,0} \delta_{m,0}. \tag{4.64}$$

On ne rajoute rien ici à l'interprétation physique d'un potentiel appliqué constant au sein de l'objet, si ce n'est que l'on explicite le coefficient $V_{l,m}^{(a,0)}$. On peut simplement dire que comme aucun champ appliqué n'est établi, aucune charge de polarisation ne se forme à la surface de l'objet, et donc l'objet ne perturbe aucunement la scène puisqu'il ne peut se former de moment multipolaire de charges à sa surface.

4.3.4.2 Polarisation en la présence d'un champ appliqué uniforme au sein de l'objet

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'en réalité le terme $V_{l,m}^{(a,0)}$ ne contribue en rien à la polarisation de l'objet, ce qui nous amène à penser que l'effet polarisant commence avec le terme $V_{l,m}^{(a,1)}$. Ce dernier s'écrit :

$$V_{l,m}^{(a,1)} = \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega)(-)(\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})^T \cdot \nabla \phi_a(\mathbf{y}_0) d\Omega. \quad (4.65)$$

En posant $\nabla \phi_a(\mathbf{y}_0) = -\mathbf{E}_a(\mathbf{y}_0)$ et $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| \mathbf{e}_r(\Omega)$, on obtient :

$$V_{l,m}^{(a,1)} = - \int_{\partial\mathcal{O}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| Y_{l,m}^*(\Omega) \mathbf{e}_r^T \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{y}_0) d\Omega. \quad (4.66)$$

Le champ appliqué $\mathbf{E}_a(\mathbf{y}_0)$ étant constant sur $\partial\mathcal{O}$, on peut encore écrire :

$$V_{l,m}^{(a,1)} = - \left(\int_{\partial\mathcal{O}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| Y_{l,m}^*(\Omega) \mathbf{e}_r^T d\Omega \right) \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{y}_0). \quad (4.67)$$

Procédons maintenant à une décomposition de $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|$ dans la base des harmoniques sphériques, on a :

$$|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| = 2\sqrt{\pi} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''} Y_{l'',m''}(\Omega), \quad (4.68)$$

où les $C_{l'',m''}$ sont les coefficients de décomposition de $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|$ dans la base des harmoniques sphériques. Décomposons également le vecteur $\mathbf{e}_r(\mathbf{y})$. Pour cela nous introduisons une base hilbertienne $\{\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ telle que :

$$\mathbf{e}_r = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} \sum_{m_3=-1}^1 Y_{1,m_3}(\Omega) \mathbf{e}_{-m_3}, \quad (4.69)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{-1} &= -\frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

où $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ est la base cartésienne de l'objet. A l'aide des deux dernières décompositions (4.68) et (4.69), nous pouvons réécrire $V_{l,m}^{(a,1)}$:

$$V_{l,m}^{(a,1)} = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} \sum_{m_3=-1}^1 C_{l'',m''} \left(\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l'',m''}(\Omega) Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{1,m_3}(\Omega) d\Omega \right) \mathbf{e}_{-m_3} \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{y}_0). \quad (4.71)$$

On introduit alors les coefficients de Clebsch-Gordan :

$$c^{l,m}(l', m'; l'', m'') = \int Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) Y_{l'',m''}(\Omega) d\Omega. \quad (4.72)$$

Ce qui nous conduit à :

$$V_{l,m}^{(a,1)} = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} \sum_{m_3=-1}^1 C_{l'',m''} c^{l,m}(l'',m'';1,m_3) \mathbf{e}_{-m_3} \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{y}_0), \quad (4.73)$$

où le coefficient c définit les couplages possibles entre le degré de complexité géométrique (l'', m'') et les indices de décomposition (l, m) du potentiel appliqué pour un champ appliqué ici uniforme au sein de l'objet. Il est bien établi d'après une étude systématique [Gossiaux, 2009b] que les coefficients de décomposition géométrique $C_{l'',m''}$ contribuent aux termes $V_{l,m}^{(a,1)}$ suivant $l = l'' \pm 1$, ce qui signifie par exemple que si deux objets admettent comme coefficient principal de décomposition $C_{0,0}$, il s'y établira un même potentiel appliqué d'indice $(l = 1)$. Ainsi, du fait que le potentiel appliqué varie quasiment de même manière sur ces deux objets ($C_{0,0}$ est leur coefficient géométrique dominant), le champ appliqué varie quasiment de même manière et d'après la loi de Maxwell-Gauss (2.2) $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \sigma/\epsilon_0$ à la surface des deux objets, ce qui induit, qu'en leur coefficient dominant où leurs normales sont égales, les charges appliquées se déposent aux mêmes endroits. Il vient alors, d'après notre étude réalisée à la section 4.2.2, qu'il se produira un même moment multipolaire des charges appliquées, produisant une même perturbation. Les objets seront de fait électriquement indiscernables. On comprend alors le challenge posé par la modélisation de la réponse en électrolocation si on imagine la situation suivante : considérons 2 objets $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, admettant pour le premier une décomposition géométrique suivant un unique coefficient $C_{0,0}$, et admettant pour le second une décomposition géométrique suivant des termes $C_{0,0}$ et $C_{i,0}$, où $i > 0$. On comprend alors que ces 2 objets acquièrent tous deux un même moment multipolaire suivant leur coefficient $C_{0,0}$ et que si le premier objet n'acquiert pas d'autre état de polarisation, le second, lui, gagne un moment de polarisation supplémentaire, conformément au fait que les coefficients géométriques contribuent aux coefficients du potentiel appliqué suivant $l = l'' \pm 1$, soit ici $l = i - 1$. En se souvenant, que la réponse associée au moment de polarisation s'atténue fortement avec l'ordre de celui-ci (voir section 4.2.2), comme raison inverse de la distance entre l'objet et le capteur élevée à une puissance croissante avec l'ordre de polarisation, on comprend qu'il sera difficile de distinguer les 2 objets $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ ainsi définis si nous ne mesurons pas de suffisamment près leur réponse. Il en va par exemple ainsi de la sphère et du cube, la sphère étant décrite par le seul coefficient $C_{0,0}$ et le cube par les termes $C_{0,0}$ et les $C_{4,m''}$, avec $m'' = \{-4, 0, 4\}$ [Gossiaux, 2009b]. On voit à travers cet exemple que ces deux objets admettent un même moment multipolaire au premier ordre (un moment dipolaire) venant de leur terme commun $C_{0,0}$, mais que le cube acquiert aussi au moins un moment d'ordre plus élevé suivant $l = 3$ du fait de l'existence des coefficients $C_{4,m''}$. On comprend donc, que du fait de la relative petitesse avec la distance au capteur de la réponse liée au nouveau moment multipolaire (ici un moment hexapolaire) par rapport au moment de premier ordre, qu'il faudra se rapprocher suffisamment près, tout en conservant un champ appliqué uniforme au sein de l'objet, si nous voulons achever la distinction entre les 2 objets. Le problème étant que si nous émettons et mesurons avec un même capteur, il nous sera sans doute difficile d'obtenir les détails d'un objet nous permettant de le distinguer d'un autre, en nous rapprochant car de fait, le champ appliqué perdra son degré d'uniformité au sein de l'objet. D'où la nécessité de tenir compte des effets de la non uniformité d'un champ appliqué sur la réponse, ce que nous traitons ci-après.

4.3.4.3 Polarisation en présence d'un champ appliqué non uniforme au sein de l'objet

Nous continuons notre étude sur la relation entre la variation du champ appliqué, le degré de complexité géométrique de l'objet et le mode de polarisation de l'objet, en considérant cette fois le cas d'un champ appliqué non uniforme. Dans ce cas, les coefficients $V_{l,m}^{(a)}$ peuvent être exprimés principalement par les termes $V_{l,m}^{(a,2)}$:

$$V_{l,m}^{(a,2)} = \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) \frac{1}{2} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y})) d\Omega, \quad (4.74)$$

qui peuvent encore s'écrire :

$$V_{l,m}^{(a,2)} = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathcal{O}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|^2 Y_{l,m}^*(\Omega) \mathbf{e}_r^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{e}_r) d\Omega. \quad (4.75)$$

Nous avons vu que nous pouvions effectuer une décomposition de $\mathbf{e}_r$ dans la base des harmoniques sphériques (4.69). Ceci nous autorise à écrire :

$$\mathbf{e}_r(\Omega)^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{e}_r(\Omega)) = \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^1 \sum_{\bar{m}=-1}^1 Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega) \mathbf{e}_{-\bar{m}}^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{e}_{-m}). \quad (4.76)$$

Nous introduisons alors les tenseurs $\bar{\mathbf{e}}_{\bar{m},m} = \mathbf{e}_{-\bar{m}}^T \otimes \mathbf{e}_{-m}$, si bien que la dernière égalité peut se réécrire de la manière suivante, comme $H\phi_a(\mathbf{y}_0)$ est symétrique :

$$\mathbf{e}_r(\Omega)^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{e}_r(\Omega)) = \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^1 \sum_{\bar{m}=-1}^1 Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega) \text{trace}(\bar{\mathbf{e}}_{\bar{m},m} \cdot H\phi_a(\mathbf{y}_0)). \quad (4.77)$$

En décomposant maintenant le terme $Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega)$ dans la base des harmoniques sphériques, on écrit d'abord formellement :

$$Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega) = \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} \langle Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega) | l'', m'' \rangle Y_{l'',m''}(\Omega), \quad (4.78)$$

où :

$$\langle Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega) | l'', m'' \rangle = \int Y_{l'',m''}^*(\Omega) (Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega)) d\Omega, \quad (4.79)$$

c'est à dire :

$$\langle Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega) | l'', m'' \rangle = c^{l'',m''}(1, m | 1, \bar{m}). \quad (4.80)$$

D'où :

$$Y_{1,m}(\Omega) Y_{1,\bar{m}}(\Omega) = \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} c^{l'',m''}(1, m | 1, \bar{m}) Y_{l'',m''}(\Omega), \quad (4.81)$$

où ici les coefficients c sont nuls pour $l'' > 2$. On peut écrire alors :

$$\mathbf{e}_r(\Omega)^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{e}_r(\Omega)) = \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^1 \sum_{\bar{m}=-1}^1 \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} c^{l'',m''}(1, m | 1, \bar{m}) \times \\ Y_{l'',m''}(\Omega) \text{trace}(\bar{e}_{\bar{m},m} \cdot H\phi_a(\mathbf{y}_0)). \quad (4.82)$$

Introduisons maintenant le tenseur $\tilde{e}_{l'',m''}$:

$$\tilde{e}_{l'',m''} = \sum_{m=-1}^1 \sum_{\bar{m}=-1}^1 c^{l'',m''}(1, m | 1, \bar{m}) \bar{e}_{\bar{m},m}. \quad (4.83)$$

En effectuant le changement de variable $\bar{m} = m'' - m$, on doit avoir $m = m'' - \bar{m}$ et m vérifiant les conditions suivantes : a) $m > -1$ et $m > m'' - 1$; b) $m < 1$ et $m < m'' + 1$, lesquelles conditions sont respectivement équivalentes à : a) $m > \max(-1, m'' - 1)$; b) $m < \min(1, m'' + 1)$. On en déduit alors :

$$\tilde{e}_{l'',m''} = \sum_{m=\max(-1, m''-1)}^{\min(1, m''+1)} c^{l'',m''}(1, m; 1, m'' - m) \bar{e}_{m''-m, m}. \quad (4.84)$$

Par uniformité d'écriture avec [Gossiaux, 2009b], on opère le changement de variable $m'' := -m''$ et nous multiplions par le facteur $2\sqrt{5}\pi$, de sorte à avoir :

$$\tilde{e}_{l'',m''} = 2\sqrt{5}\pi \sum_{m=\max(-1, -m''-1)}^{\min(1, -m''+1)} c^{l'',-m''}(1, m; 1, -m'' - m) \bar{e}_{-(m''+m), m}, \quad (4.85)$$

ce qui nous donne avec les coefficients c nuls pour $l'' > 2$:

$$\mathbf{e}_r(\Omega)^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{e}_r(\Omega)) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3\sqrt{5}} \sum_{l''=0}^2 \sum_{m''=-l''}^{l''} Y_{l'',m''}(\Omega) \text{trace}(\tilde{e}_{l'',-m''} \cdot H\phi_a(\mathbf{y}_0)). \quad (4.86)$$

Une évaluation des tenseurs $\tilde{e}_{l'',-m''}$ donne d'abord pour $l'' = 0$:

$$\tilde{e}_{0,0} = \sqrt{5}1_3, \quad (4.87)$$

puis pour $l'' = 1$:

$$\tilde{e}_{1,m''} = 0 \text{ pour } m = \{-1, 0, 1\}, \quad (4.88)$$

et pour $l'' = 2$ des matrices non nulles. Comme le potentiel appliqué satisfait à l'équation de Laplace, on a :

$$\text{trace}((H\phi_a(\mathbf{y}_0))) = 0, \quad (4.89)$$

ce qui implique d'après (4.87), (4.88) et l'existence de valeurs non nulles dans l'ensemble $\{\tilde{e}_{2,m''}, m = \{-2, -1, 0, 1, 2\}\}$, :

$$\mathbf{e}_r(\Omega)^T \cdot (H\phi_a(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{e}_r(\Omega)) = \frac{2\sqrt{\pi}}{3\sqrt{5}} \sum_{m=-2}^2 Y_{2,m}(\Omega) \text{trace}(\tilde{e}_{2,-m} \cdot H\phi_a(\mathbf{y}_0)). \quad (4.90)$$

Alors le terme $V_{l,m}^{(a,2)}$ peut s'écrire :

$$V_{l,m}^{(a,2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{3\sqrt{5}} \sum_{m=-2}^2 \left(\int_{\partial\mathcal{O}} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|^2 Y_{l,m}(\Omega)^* Y_{2,m}(\Omega) d\Omega \right) \text{trace}(\tilde{e}_{2,-m} \cdot H\phi_a(\mathbf{y}_0)). \quad (4.91)$$

Introduisons maintenant une décomposition dans la base des harmoniques sphériques de $|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|^2$:

$$|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0|^2 = 2\sqrt{\pi} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} Y_{l'',m''}(\Omega). \quad (4.92)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} V_{l,m}^{(a,2)} &= \frac{2\pi}{3\sqrt{5}} \sum_{m=-2}^2 \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \left(\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l'',m''}(\Omega) Y_{l,m}(\Omega)^* Y_{2,m}(\Omega) d\Omega \right) \\ &\quad \times \text{trace}(\tilde{e}_{2,-m} \cdot H\phi_a(\mathbf{y}_0)), \end{aligned} \quad (4.93)$$

c'est à dire :

$$V_{l,m}^{(a,2)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{5}} \sum_{m=-2}^2 \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} c^{l,m}(l'', m'') \text{trace}(\tilde{e}_{2,-m} \cdot H\phi_a(\mathbf{y}_0)), \quad (4.94)$$

Ici, les coefficients c couplent les composantes $l'' = 0$ à $l = 2$ uniquement, et les composantes $l'' > 0$ à $l = l''$ et $l = l'' \pm 2$. Ce qui signifie par exemple qu'une sphère dont la géométrie est suffisamment décrite à $l'' = 0$ aura acquis un moment multipolaire suivant un coefficient d'indice ($l = 2$) du potentiel appliqué en sa surface. Un tel coefficient, produit un champ appliqué en la surface tel que les charges qui sont déposées vont définir un moment quadrupolaire. On note que si nous voulons opérer une distinction entre la sphère et le cube en champ non uniforme, on devra mesurer la perturbation du cube associée à un moment octupolaire correspondant à l'indice $l = 4$ du coefficient de décomposition du potentiel appliqué. En effet, si la sphère est suffisamment décrite par le terme $C_{0,0}^{(2)}$, le cube est lui décrit par les coefficients $C_{0,0}^{(2)}$ et les $C_{4,m}^{(2)}$ où $m = \{-4, 0, 4\}$. Dans ces conditions, on voit bien que si les deux objets acquièrent par leur coefficient principal $C_{0,0}^{(2)}$ un moment quadrupolaire ($l = 2$), le cube acquiert en plus un moment octupolaire ($l = 4$) du fait de ses composantes en $C_{4,m}^{(2)}$. De manière générale, on peut établir une relation entre les 3 paramètres : à savoir les coefficients géométriques $C^{(n)}$ ($n \geq 0$), le degré de non uniformité du champ électrique appliqué et l'état de polarisation de l'objet en allant plus loin dans le développement de Taylor du potentiel appliqué $\phi_a(\mathbf{y})$, et donc par le calcul des termes $V_{l,m}^{a,i>2}$ contribuant aux moments multipolaires d'ordre l [Gossiaux, 2009b]. Ce qu'il faut retenir ici, c'est que par rapport à un champ uniforme, la difficulté à distinguer deux objets comme le cube et la sphère n'est pas amoindrie. En effet, on voit que pour distinguer ces deux objets en champ non uniforme nous devons mesurer la perturbation induite par le moment octupolaire du cube. Ce dernier n'étant mesurable que si l'on se trouve très proche de l'objet, on voit comme pour le cas d'un champ uniforme, que si l'on tente de mesurer

et d'émettre un champ avec un même capteur, il nous sera difficile de maintenir un champ non uniforme variant suivant la hessienne du potentiel appliqué tout en mesurant une perturbation liée à un moment octupolaire.

4.3.5 Expression du noyau

Revenons à présent à l'écriture tensorielle de la formulation intégrale de Van Bladel (4.46). Nous devons, pour établir le formalisme générique du potentiel total, donner une forme explicite du tenseur $\mathcal{K}$ (4.55). Cela revient ici à décomposer les grandeurs géométriques restantes dans l'expression du tenseur $\mathcal{K}$, à savoir $\partial/\partial n' (1/|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|)$ et $\mathbf{ds}'$. En introduisant le centre $\mathbf{y}_0$ de l'objet, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}' = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 - (\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0), \quad (4.95)$$

ce qui peut encore s'écrire comme la différence entre les deux équations de (4.47) :

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}' = \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0 - (\bar{\mathbf{y}}' - \mathbf{y}_0) + \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}'), \quad (4.96)$$

où ici, avec cette nouvelle écriture, il faut entendre que de faire varier le point $\mathbf{y}'$ étant donné un point $\mathbf{y}$, revient à faire varier le point $\bar{\mathbf{y}}'$ de la sphère étant donné un point $\bar{\mathbf{y}}$ d'une autre sphère, tel que l'on satisfait toujours au critère de faible excentricité (4.49). Dans ces conditions, on peut effectuer un développement de Taylor de $1/|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|$ par rapport à $\bar{\mathbf{y}}'$ et écrire :

$$\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} + [(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')]^T \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} + O(|(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')|^2), \quad (4.97)$$

soit :

$$\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} + [(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')]^T \cdot \frac{\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|^3} + O(|(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')|^2), \quad (4.98)$$

et donc :

$$\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|} \simeq \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} + [(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')]^T \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \frac{\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|^3}. \quad (4.99)$$

Choisissons deux sphères telles que :

$$|\bar{\mathbf{y}}' - \mathbf{y}_0| > |\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0|, \quad (4.100)$$

tout en respectant le critère de faible excentricité (4.49). Dans ces conditions, en posant :

$$|\bar{\mathbf{y}}' - \mathbf{y}_0| = \bar{r}_0, \quad (4.101)$$

et :

$$|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0| = \bar{r}_0^-, \quad (4.102)$$

on peut écrire un développement de $1/|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|$ en utilisant les harmoniques sphériques :

$$\frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}'|} = 4\pi \sum_{l_0}^{\infty} \frac{1}{2l_0 + 1} \frac{\bar{r}_0^{-l_0}}{\bar{r}_0^{l_0+1}} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) Y_{l_0,m_0}(\Omega'), \quad (4.103)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}'|} &= 4\pi \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{1}{2l_0+1} \frac{\bar{r}_0^{-l_0}}{\bar{r}_0^{l_0+2}} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) \left[(l_0 + 1) Y_{l_0,m_0}(\Omega') \mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \mathbf{e}_{\theta}(\mathbf{y}') - \frac{1}{\sin(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} \mathbf{e}_{\phi}(\mathbf{y}') \right]. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Faisons tendre à présent $\bar{r}_0^- \rightarrow \bar{r}_0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \left(\frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}'|} \right) &= \frac{4\pi}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0}^{\infty} \frac{1}{2l_0+1} \sum_{m_0} Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) \left[(l_0 + 1) Y_{l_0,m_0}(\Omega') \mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \mathbf{e}_{\theta}(\mathbf{y}') - \frac{1}{\sin(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} \mathbf{e}_{\phi}(\mathbf{y}') \right]. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Nous pouvons alors calculer la composante principale de $\partial/\partial n' (1/|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|) ds'$ intervenant dans l'expression du tenseur $\mathcal{K}$ (4.55), soit le terme $\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}'|) \cdot d\mathbf{s}'$. Nous commençons par évaluer le produit des composantes radiales avant d'évaluer le produit des composantes angulaires. Appelons $\mathcal{K}^{(0)}$ la composante principale du tenseur $\mathcal{K}$ issue des composantes radiales. On a :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(0)} = \int_{\partial\mathcal{O}} \left[\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l',m'}(\Omega') \left(\mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}'|} \right) (\mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \cdot d\mathbf{s}') d\Omega' \right] Y_{l,m}^*(\Omega) d\Omega. \quad (4.106)$$

Par définition, le vecteur $d\mathbf{s}'$ s'écrit :

$$d\mathbf{s}' = \frac{\partial(\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0)}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \wedge \frac{1}{\sin(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial(\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0)}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} d\Omega', \quad (4.107)$$

soit dans la base sphérique :

$$d\mathbf{s}' = |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2 d\Omega' \mathbf{e}'_r - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2}{\partial \theta'} \sin(\theta') \mathbf{e}'_{\theta} + \frac{\partial |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2}{\partial \phi'} \mathbf{e}'_{\phi} \right) d\theta' d\phi'. \quad (4.108)$$

Ecrivant le vecteur $\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0$ comme suit :

$$\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0 = |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0| \mathbf{e}_r(\mathbf{y}'), \quad (4.109)$$

on en déduit :

$$d\mathbf{s}' \cdot \mathbf{e}_r(\mathbf{y}') = |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2 d\Omega'. \quad (4.110)$$

On obtient alors une expression plus explicite de $\mathcal{K}^{(0)}$:

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(0)} = \frac{4\pi}{r_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{l_0+1}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l',m'}(\Omega') Y_{l_0,m_0}(\Omega') |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2 d\Omega' \times$$

$$\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) d\Omega. \quad (4.111)$$

Développons à présent le terme $|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2$ dans la base des harmoniques sphériques :

$$|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2 = 2\sqrt{\pi} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} Y_{l'',m''}(\Omega'). \quad (4.112)$$

L'expression de $\mathcal{K}^{(0)}$ devient alors :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(0)} = \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{l_0+1}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \times$$

$$\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l'',m''}(\Omega') Y_{l_0,m_0}(\Omega') Y_{l',m'}(\Omega') d\Omega' \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) d\Omega. \quad (4.113)$$

Utilisant maintenant la propriété suivante des harmoniques sphériques :

$$Y_{l,m} = (-1)^m Y_{l,-m}^*, \quad (4.114)$$

on peut écrire alors :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(0)} = \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{l_0+1}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} (-1)^{m_0+m_0}$$

$$\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l'',m''}(\Omega') Y_{l_0,-m_0}^*(\Omega') Y_{l',m'}(\Omega') d\Omega' \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l,m}^*(\Omega) Y_{l_0,-m_0}(\Omega) d\Omega. \quad (4.115)$$

Et d'après la propriété d'orthonormalité des harmoniques sphériques (4.53), on a :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(0)} = \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{l_0+1}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} (-1)^{m_0+m_0} \times$$

$$\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l'',m''}(\Omega') Y_{l_0,-m_0}^*(\Omega') Y_{l',m'}(\Omega') d\Omega' \delta_{l,l_0} \delta_{m,-m_0},$$

soit :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(0)} = \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \frac{l+1}{2l+1} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l'',m''}(\Omega') Y_{l,m}^*(\Omega') Y_{l',m'}(\Omega') d\Omega', \quad (4.117)$$

où l'on identifie l'expression des coefficients c (4.72), ce qui nous amène à écrire :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(0)} = \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \frac{l+1}{2l+1} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} c^{l,m}(l', m'; l'', m''). \quad (4.118)$$

En isolant la partie de $\mathcal{K}^{(0)}$ venant du coefficient principal $C_{0,0}^{(2)}$ de la décomposition de $|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2$, on obtient :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(0)} = \frac{4\pi}{\bar{r}_0^2} \frac{l+1}{2l+1} C_{0,0}^{(2)} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} + \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \frac{l+1}{2l+1} \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} c^{l,m}(l', m'; l'', m''). \quad (4.119)$$

Poursuivons le développement de $\mathcal{K}$ en considérant cette fois-ci la contribution $\mathcal{K}^{(1)}$ du tenseur $\mathcal{K}$, comprenant le produit des composantes de $\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|)$ et de $\mathbf{ds}'$ orientées orthonormalement :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1)} = \int_{\partial\mathcal{O}} \left[\int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l'',m''}(\Omega') \sum_{\beta=\theta,\phi} \left(\mathbf{e}_{\beta}(\mathbf{y}') \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} \right) \left(\mathbf{e}_{\beta}(\mathbf{y}') \cdot \mathbf{ds}' \right) d\Omega' \right] Y_{l,m}^*(\Omega) d\Omega. \quad (4.120)$$

D'après les expressions de $\mathbf{ds}'$ (4.107) et de $\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|)$ (4.105), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1)} = \frac{4\pi}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{1}{2l_0+1} \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) Y_{l,m}(\Omega)^* d\Omega \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{1}{2} Y_{l',m'}(\Omega') \times \\ \left(\frac{\partial |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}(\Omega')}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} + \frac{1}{\sin^2(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}(\Omega')}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} \right) d\Omega'. \end{aligned} \quad (4.121)$$

D'après la décomposition de $|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2$ (4.112), on a :

$$\frac{\partial |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} = 2\sqrt{\pi} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \frac{\partial Y_{l'',m''}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \quad (4.122)$$

et :

$$\frac{\partial |\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0|^2}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} = 2\sqrt{\pi} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \frac{\partial Y_{l'',m''}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}}. \quad (4.123)$$

On en déduit une autre écriture de $\mathcal{K}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1)} = \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{1}{2l_0+1} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{1}{2} Y_{l',m'}(\Omega') \delta_{l,l_0} \delta_{m,m_0} \times \\ \left(\frac{\partial Y_{l'',m''}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}(\Omega')}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} + \frac{1}{\sin^2(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial Y_{l'',m''}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}(\Omega')}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} \right) d\Omega'. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Introduisons maintenant le tenseur d , défini comme suit :

$$d^{l,m}(l', m'; l'', m'') = \int Y_{l,m}^* \left(\frac{\partial Y_{l',m'}}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{l'',m''}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial Y_{l',m'}}{\partial \phi} \frac{\partial Y_{l'',m''}}{\partial \phi} \right) d\Omega, \quad (4.125)$$

et en écrivant que $Y_{l',m'}(\Omega') = (-1)^{m'} Y_{l',-m'}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1)} = & (-1)^{m'} \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{1}{2l_0+1} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \frac{1}{2} d^{l',-m'}(l_0, m_0; l'', m'') \times \\ & \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) Y_{l,m}(\Omega)^* d\Omega. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Puis en posant $Y_{l,m}^*(\Omega) = (-1)^m Y_{l,-m}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1)} = & (-1)^{m+m'} \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{1}{2l_0+1} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \times \\ & \frac{1}{2} d^{l',-m'}(l_0, m_0; l'', m'') \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) Y_{l,-m}(\Omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (4.127)$$

En utilisant la propriété d'orthonormalité des harmoniques sphériques, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1)} = & (-1)^{m+m'} \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{1}{2l_0+1} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \frac{1}{2} d^{l',-m'}(l_0, m_0; l'', m'') \times \\ & \delta_{l_0,l} \delta_{m,-m_0}, \end{aligned} \quad (4.128)$$

et donc :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1)} = (-1)^{m+m'} \frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0^2} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{1}{2l_0+1} \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'',m''}^{(2)} \frac{1}{2} d^{l',-m'}(l, -m; l'', m''). \quad (4.129)$$

Continuons dans le développement du tenseur $\mathcal{K}$ avec la prise en compte du second terme dans le développement (4.99) de $\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|)$. En considérant que la correction au produit scalaire de $\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|)$ par $\mathbf{ds}'$ dans l'expression de $\mathcal{K}$ (4.55) est dominé par le produit des composantes radiales de $\nabla \left[[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')]^T \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|) \right]$ et de $\mathbf{ds}'$, nous évaluons d'abord le produit $\mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \cdot \nabla \left[\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|) \right]$. On a d'après (4.104) :

$$\mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \cdot \nabla \left[\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \left(\frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} \right) \right] = \frac{4\pi\bar{r}_0^{-l_0}}{\bar{r}_0^{l_0+3}} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{l_0+2}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} Y_{l_0,m_0}^*(\Omega) \times \quad (4.130)$$

$$\left[(l_0+1) Y_{l_0,m_0}(\Omega') \mathbf{e}_r(\mathbf{y}') - \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \mathbf{e}_\theta(\mathbf{y}') - \frac{1}{\sin(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} \mathbf{e}_\phi(\mathbf{y}') \right],$$

ce qui donne en prenant la limite $\bar{r}_0^- \rightarrow \bar{r}_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \cdot \nabla \left[\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \left(\frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} \right) \right] &= \frac{4\pi}{\bar{r}_0^3} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{l_0 + 2}{2l_0 + 1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} Y_{l_0, m_0}^*(\Omega) \times \\ &\left[(l_0 + 1) Y_{l_0, m_0}(\Omega') \mathbf{e}_r(\mathbf{y}') - \frac{\partial Y_{l_0, m_0}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \mathbf{e}_\theta(\mathbf{y}') - \frac{1}{\sin(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial Y_{l_0, m_0}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} \mathbf{e}_\phi(\mathbf{y}') \right]. \end{aligned} \quad (4.131)$$

En écrivant maintenant :

$$(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}') = \delta r_{\mathbf{y}} \mathbf{e}_r(\mathbf{y}) - \delta r_{\mathbf{y}'} \mathbf{e}_r(\mathbf{y}'). \quad (4.132)$$

Pour calculer le produit scalaire de $\nabla \left[[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')]^T \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|) \right]$ par $\mathbf{ds}'$, on évalue les produits scalaires $\mathbf{e}_r(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_r(\mathbf{y}')$, $\mathbf{e}_r(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_\theta(\mathbf{y}')$ et $\mathbf{e}_r(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_\phi(\mathbf{y}')$. En utilisant la décomposition de $\mathbf{e}_r$ dans la base des harmoniques sphériques (4.69), on peut aboutir [Gossiaux, 2009b] à l'expression des trois derniers produits scalaires évoqués :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_r(\mathbf{y}') &= \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^1 Y_{1, m}(\Omega') Y_{1, m}^*(\Omega), \\ \mathbf{e}_r(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_\theta(\mathbf{y}') &= \frac{4\pi}{3} \sum_{m=-1}^1 \frac{\partial Y_{1, m}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} (\Omega') Y_{1, m}^*(\Omega), \\ \mathbf{e}_r(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_\phi(\mathbf{y}') &= \frac{4\pi}{3 \sin(\theta_{\mathbf{y}'})} \sum_{m=-1}^1 \frac{\partial Y_{1, m}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} (\Omega') Y_{1, m}^*(\Omega). \end{aligned} \quad (4.133)$$

Nous en déduisons alors :

$$\begin{aligned} \left((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')^T \right) \cdot \left(\mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \cdot \nabla \left[\nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \left(\frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} \right) \right] \right) &= -\frac{4\pi}{\bar{r}_0^3} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{l_0 + 2}{2l_0 + 1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \times \\ &\left[(l_0 + 1) Y_{l_0, m_0}(\Omega') \delta r_{\mathbf{y}'} - \frac{4\pi}{3} \left(\sum_{m'''=-1}^1 Y_{1, m'''}^*(\Omega) Y_{l_0, m_0; 1, m'''}(\Omega') \right) \delta r_{\mathbf{y}} \right] Y_{l_0, m_0}^*(\Omega), \end{aligned} \quad (4.134)$$

où :

$$\begin{aligned} Y Y_{l_0, m_0; 1, m'''}(\Omega') &= (l_0 + 1) Y_{l_0, m_0}(\Omega') Y_{1, m'''}(\Omega') - \frac{\partial Y_{l_0, m_0}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} (\Omega') \frac{\partial Y_{1, m'''}(\Omega')}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}} \\ &- \frac{1}{\sin^2(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial Y_{l_0, m_0}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}} (\Omega') \frac{\partial Y_{1, m'''}(\Omega')}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

On en déduit alors le produit des composantes radiales de $\mathbf{ds}'$ et de $\nabla \left[[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}')]^T \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} (1/|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|) \right]$:

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \cdot d\mathbf{s}' \right) \left(\mathbf{e}_r(\mathbf{y}') \cdot \nabla \left[\left[(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) - (\mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}') \right]^T \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{y}}'} \left(\frac{1}{|\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}'|} \right) \right] \right) = -4\pi \frac{d\Omega'}{\bar{r}_0} \times \\
& \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{l_0 + 2}{2l_0 + 1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \left[(l_0 + 1) Y_{l_0, m_0}(\Omega') \delta r_{\mathbf{y}'} - \right. \\
& \left. \frac{4\pi}{3} \left(\sum_{m'''=-1}^1 Y_{1, m'''}^*(\Omega) Y_{l_0, m_0; 1, m'''}(\Omega') \right) \delta r_{\mathbf{y}} \right] Y_{l_0, m_0}^*(\Omega).
\end{aligned} \tag{4.136}$$

Cette dernière expression constitue dans son intégralité la correction qu'il faut apporter à $\mathcal{K}^{(0)}$ et $\mathcal{K}^{(1)}$ pour exprimer le tenseur $\mathcal{K}$. Appelons alors $\mathcal{K}^{(1')}$ et $\mathcal{K}^{(1'')}$ les contributions associées aux premier et second terme entre les crochets de (4.136). On a pour le premier :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{l, l'; m, m'}^{(1')} &= -\frac{4\pi}{\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0 + 1)(l_0 + 2)}{2l_0 + 1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l', m'}(\Omega') Y_{l_0, m_0}(\Omega') \delta r_{\mathbf{y}'} d\Omega' \times \\
& \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l_0, m_0}^*(\Omega) Y_{l, m}^*(\Omega) d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.137}$$

soit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{l, l'; m, m'}^{(1')} &= -\frac{4\pi}{\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0 + 1)(l_0 + 2)}{2l_0 + 1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} (-1)^{m_0} \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l', m'}(\Omega') Y_{l_0, m_0}(\Omega') \delta r_{\mathbf{y}'} d\Omega' \times \\
& \delta_{l_0, l} \delta_{m_0, -m}.
\end{aligned} \tag{4.138}$$

Par définition, nous avons :

$$\delta r_{\mathbf{y}} = |\mathbf{y} - \mathbf{y}_0| - |\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}|, \tag{4.139}$$

où $|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}| = \bar{r}_0$ s'identifie comme la composante constante de $\delta r_{\mathbf{y}}$, donc son premier terme de décomposition dans la base des harmoniques sphériques. Ainsi peut-on écrire la décomposition suivante pour $\delta r_{\mathbf{y}}$:

$$\delta r_{\mathbf{y}} = 2\sqrt{\pi} \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'', m''} Y_{l'', m''}(\Omega'), \tag{4.140}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{l, l'; m, m'}^{(1')} &= -\frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0 + 1)(l_0 + 2)}{2l_0 + 1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} (-1)^{m_0} \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'', m''} \times \\
& \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l'', m''}(\Omega') Y_{l', m'}(\Omega') Y_{l_0, m_0}(\Omega') \delta r_{\mathbf{y}'} d\Omega' \delta_{l_0, l} \delta_{m_0, -m}.
\end{aligned} \tag{4.141}$$

En écrivant $Y_{l_0, m_0}(\Omega') = (-1)^{m_0} Y_{l_0, -m_0}^*(\Omega')$, on reconnaît l'expression du coefficient c :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l, l'; m, m'}^{(1')} = & -\frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0+1)(l_0+2)}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} (-1)^{m_0} \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'', m''} \times \\ & c^{l_0, -m_0}(l', m'; l'', m'') \delta_{l_0, l} \delta_{m_0, -m}. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Et en appliquant les symboles de Kronecker $\delta_{l_0, l}$ et $\delta_{m_0, -m}$, on a :

$$\mathcal{K}_{l, l'; m, m'}^{(1')} = -\frac{(2\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0} \frac{(l+1)(l+2)}{2l+1} \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'', m''} c^{l, m}(l', m'; l'', m''). \quad (4.143)$$

Considérons enfin la contribution $\mathcal{K}^{(1'')}$ au tenseur $\mathcal{K}$ associée au second terme entre les crochets de (4.136) :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l, l'; m, m'}^{(1'')} = & \frac{(4\pi)^2}{3\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0+2)}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{m'''=-1}^1 \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l, m}^*(\Omega) Y_{l_0, m_0}^*(\Omega) \delta r_{\mathbf{y}}(\Omega) Y_{1, m'''}^*(\Omega) d\Omega \times \\ & \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l', m'}(\Omega') Y Y_{l_0, m_0; 1, m'''}(\Omega') d\Omega'. \end{aligned} \quad (4.144)$$

En décomposant $\delta r_{\mathbf{y}}$ dans la base des harmoniques sphériques, comme pour la précédente contribution, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l, l'; m, m'}^{(1'')} = & \frac{(2\sqrt{\pi})^5}{3\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0+2)}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{m'''=-1}^1 \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} C_{l'', m''} \times \\ & \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l, m}^*(\Omega) Y_{l_0, m_0}^*(\Omega) Y_{l'', m''}(\Omega) Y_{1, m'''}^*(\Omega) Y_{l'', m''}(\Omega) d\Omega \times \\ & \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l', m'}(\Omega') Y Y_{l_0, m_0; 1, m'''}(\Omega') d\Omega'. \end{aligned} \quad (4.145)$$

En introduisant maintenant le tenseur c_4 défini comme suit :

$$c_4(l, m; l', m' | l'', m''; l''', m''') = \int Y_{l, m}^* Y_{l', m'}^* Y_{l'', m''} Y_{l''', m'''} d\Omega, \quad (4.146)$$

et en écrivant $Y_{l, m}^*(\Omega) = (-1)^m Y_{l, -m}(\Omega)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l, l'; m, m'}^{(1'')} = & \frac{(2\sqrt{\pi})^5}{3\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0+2)}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{m'''=-1}^1 \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} (-1)^m C_{l'', m''} \times \\ & c_4(1, m'''; l_0, m_0 | l'', m''; l, -m) \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l', m'}(\Omega') Y Y_{l_0, m_0; 1, m'''}(\Omega') d\Omega'. \end{aligned} \quad (4.147)$$

En remplaçant maintenant le tenseur $Y Y_{l_0, m_0; 1, m'''}(\Omega')$ par son expression (4.135), il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1'')} &= \frac{(2\sqrt{\pi})^5}{3\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0+2)}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{m'''=-1}^1 \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} (-1)^m C_{l'',m''} \times \\
&c_4(1, m'''; l_0, m_0 \mid l'', m''; l, -m) \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l',m'}(\Omega') \times \\
&\left[(l_0+1) Y_{l_0,m_0}(\Omega') Y_{1,m'''}(\Omega') - \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}}(\Omega') \frac{\partial Y_{1,m'''} }{\partial \theta_{\mathbf{y}'}}(\Omega') \right. \\
&\left. - \frac{1}{\sin^2(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}}(\Omega') \frac{\partial Y_{1,m'''} }{\partial \phi_{\mathbf{y}'}}(\Omega') \right] d\Omega'.
\end{aligned} \tag{4.148}$$

Et en posant $Y_{l',m'} = (-1)^{m'} Y_{l',-m'}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1'')} &= \frac{(2\sqrt{\pi})^5}{3\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0+2)}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{m'''=-1}^1 \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} (-1)^{m+m'} C_{l'',m''} \times \\
&c_4(1, m'''; l_0, m_0 \mid l'', m''; l, -m) \int_{\partial\mathcal{O}} Y_{l',-m'}^*(\Omega') \times \\
&\left[(l_0+1) Y_{l_0,m_0}(\Omega') Y_{1,m'''}(\Omega') - \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \theta_{\mathbf{y}'}}(\Omega') \frac{\partial Y_{1,m'''} }{\partial \theta_{\mathbf{y}'}}(\Omega') \right. \\
&\left. - \frac{1}{\sin^2(\theta_{\mathbf{y}'})} \frac{\partial Y_{l_0,m_0}}{\partial \phi_{\mathbf{y}'}}(\Omega') \frac{\partial Y_{1,m'''} }{\partial \phi_{\mathbf{y}'}}(\Omega') \right] d\Omega',
\end{aligned} \tag{4.149}$$

où l'on reconnaît les tenseurs c et d , si bien que nous pouvons encore écrire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1'')} &= \frac{(2\sqrt{\pi})^5}{3\bar{r}_0} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{(l_0+2)}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{m'''=-1}^1 \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} (-1)^{m+m'} C_{l'',m''} \times \\
&c_4(1, m'''; l_0, m_0 \mid l'', m''; l, -m) \times \\
&\left[(l_0+1) c^{l',-m'}(l_0, m_0; 1, m''') - d^{l',-m'}(l_0, m_0; 1, m''') \right].
\end{aligned} \tag{4.150}$$

En définissant maintenant le tenseur e comme suit :

$$\begin{aligned}
e^{l,m}(l', m'; l'', m'') &= \frac{4\pi}{3} \sum_{l_0=0}^{\infty} \frac{2(l_0+2)}{2l_0+1} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} \sum_{m'''=-1}^1 c_4(1, m'''; l_0, m_0 \mid l'', m''; l, -m) \times \\
&\left[(l_0+1) c^{l',-m'}(l_0, m_0; 1, m''') - d^{l',-m'}(l_0, m_0; 1, m''') \right],
\end{aligned} \tag{4.151}$$

on peut réécrire $\mathcal{K}^{(1'')}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{K}_{l,l';m,m'}^{(1'')} = \frac{4(\sqrt{\pi})^3}{\bar{r}_0} \sum_{l''=1}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} (-1)^{m+m'} C_{l'',m''} e^{l',-m'}(l, -m; l'', m''). \tag{4.152}$$

On obtient alors une bonne approximation au tenseur $\mathcal{K}$ en sommant les contributions $\mathcal{K}^{(0)}$, $\mathcal{K}^{(1)}$, $\mathcal{K}^{(1')}$ et $\mathcal{K}^{(1'')}$:

$$\mathcal{K} \simeq \mathcal{K}^{(0)} + \mathcal{K}^{(1)} + \mathcal{K}^{(1')} + \mathcal{K}^{(1'')}. \quad (4.153)$$

Finalement, en écrivant que pour des objets faiblement excentriques les composantes $C_{l'',m''} \ll C_{0,0}$ pour $l'' > 1$, on peut montrer [Gossiaux, 2009b] que l'on a :

$$C_{l'',m''}^{(2)} \simeq 2C_{l'',m''}C_{0,0}, \quad (4.154)$$

et en regroupant en conséquence les termes de la somme $\mathcal{K}^{(0)} + \mathcal{K}^{(1)} + \mathcal{K}^{(1')} + \mathcal{K}^{(1'')}$ de telle manière à faire apparaître d'abord les termes les plus influents, proportionnels à $C_{0,0}^{(2)}$, on peut réécrire plus concisément le tenseur $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}_{l,m;l',m'} = \bar{k}_l \delta_{l',l} \delta_{m',m} + \sum_{l''=2}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} \frac{C_{l'',m''}}{\bar{r}_0} \delta k_{l,m;l',m'}^{l'',m''}, \quad (4.155)$$

avec :

$$\bar{k}_l = 2\pi \frac{2(l'+1)}{2l'+1}, \quad (4.156)$$

et

$$\begin{aligned} \delta k_{l,m;l',m'}^{l'',m''} = 2\sqrt{\pi} \Big[& (-1)^{m+m'} \left(\frac{2}{2l'+1} d^{l',-m'}(l, -m; l'', m'') + e^{l',-m'}(l, -m; l'', m'') \right) - \\ & \frac{2l'(l'+1)}{2l'+1} c^{l,m}(l', m'; l'', m'') \Big]. \end{aligned} \quad (4.157)$$

4.3.6 Expression du potentiel total

Après une décomposition complète de toutes les grandeurs dans la base des harmoniques sphériques figurant dans la formulation intégrale de Van Bladel (4.46), pour des objets satisfaisants à la condition de faible excentricité, nous aboutissons au formalisme générique tensoriel suivant :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[\left(\epsilon_r - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \bar{k}_l \right) \delta_{l',l} \delta_{m',m} - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \delta k_{l',m';l,m} \right] \times V_{l,m} = V_{l',m'}^{(a)} \quad (4.158)$$

L'expression (4.158) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\left[\left(\epsilon_r - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \bar{k}_l \right) \cdot \mathcal{I} - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \delta \mathcal{K} \right] \cdot \mathcal{V} = \mathcal{V}^{(a)} \quad (4.159)$$

Les composantes du potentiel total peuvent ainsi être déduites par :

$$\mathcal{V} = \left[\left(\epsilon_r - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \bar{k}_l \right) \cdot \mathcal{I} - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \delta \mathcal{K} \right]^{-1} \cdot \mathcal{V}^{(a)}. \quad (4.160)$$

En posant pour tout couple d'entiers (l, l') positifs :

$$\mathcal{K}_{l,l'} = \left(\epsilon_r - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \bar{k}_l \right) \cdot \mathcal{I} - \frac{\epsilon_r - 1}{4\pi} \delta \mathcal{K}_{l,l'} \quad (4.161)$$

Les composantes du potentiel total sur la surface de l'objet à tout ordre se déduit explicitement de la manière suivante :

$$\mathcal{V}_l = \sum_{l'=0}^{\infty} \mathcal{K}_{l,l'}^{-1} \cdot \mathcal{V}_{l'}^{(a)}. \quad (4.162)$$

4.3.7 Moment dipolaire

Comme nous l'avons vu à la section 4.2.2, le vecteur $\mathbf{P}$ représente la densité volumique de moment dipolaire de l'objet. Ceci nous permet d'écrire une nouvelle expression du moment dipolaire macroscopique $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \int_{\partial\mathcal{O}} \mathbf{P} dV. \quad (4.163)$$

Et compte tenu de la définition (4.32) de $\mathbf{P}$, nous pouvons écrire encore :

$$\mathbf{p} = (\epsilon_i - \epsilon_e) \int_{\partial\mathcal{O}} \mathbf{E} dV = -(\epsilon_i - \epsilon_e) \int_{\partial\mathcal{O}} \nabla \phi dV. \quad (4.164)$$

Maintenant, en utilisant la formule de Green-Ostrogradski et en faisant apparaître le facteur ϵ_r , on a :

$$\mathbf{p} = -(\epsilon_r - 1)\epsilon_e \int_{\partial\mathcal{O}} \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{s}, \quad (4.165)$$

Une décomposition adéquate nous permettra d'injecter les solutions (4.162) du potentiel pour obtenir explicitement l'expression du moment dipolaire pour tout objet à faible excentricité de permittivité relative arbitraire ϵ_r environné par un milieu de permittivité ϵ_e :

$$\mathbf{p} = -\frac{8\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} (\epsilon_r - 1)\epsilon_e \sum_l \sum_m \sum_{l''} \sum_{m''} \sum_{m_3} V_{l,m} C_{l'',m''}^{(2)} (-1)^{-m_3} \times \tilde{c}^{1,-m_3}(l, m; l'', m'') \mathbf{e}_{-m_3}, \quad (4.166)$$

où $\tilde{c}$ est un tenseur également issu d'une intégrale d'harmoniques sphériques, fonction des tenseurs c et d déjà définis et qui vaut $c - d/2$. Cette expression est bien-sûr applicable dans les conditions physiques de l'électrolocation bien définies dans le chapitre 2 comme nous l'avons vu avec l'expression (4.45).

4.3.8 Comparaison avec les polarisabilités établies pour la sphère et l'ellipsoïde de faible excentricité en champ uniforme

4.3.8.1 La sphère

Dans le cas d'une sphère la décomposition de la norme r_0 du vecteur position se réduit à l'ordre 0 :

$$r_0 = 2\sqrt{\pi} C_{0,0} Y_{0,0} = C_{0,0} = \bar{r}_0 \quad (4.167)$$

Si nous reconsidérons notre principe d'excentricité cela reviendrait à considérer que pour deux positions arbitraires $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$ de $\partial\mathcal{O}$, le contour de l'objet, la quantité $\nabla (1/|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|)$ est toujours orientée suivant $\mathbf{e}_r$. Dans le cas de la sphère $\delta\mathcal{K} = 0$ et le tenseur $V^{(a)}$ lié au potentiel appliqué quant à lui se réduit à l'expression suivante :

$$V_{l',m'}^{(a)} = \phi_a(\mathbf{y}_0)\delta_{l',0}\delta_{m',0} - \frac{1}{\sqrt{3}}C_{0,0} \times \delta_{l',1}\mathbf{e}_{-m'} \cdot \mathbf{E}_a(\mathbf{y}_0). \quad (4.168)$$

On en déduit l'expression des composantes du potentiel :

$$V_{l,m} = \sum_{l'} \sum_{m'} \frac{2l' + 1}{\epsilon_r l' + l' + 1} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \times V_{l',m'}^{(a)}, \quad (4.169)$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} V_{0,0} = \phi_a. \\ V_{1,m} = -\frac{\sqrt{3}}{\epsilon_r + 2} C_{0,0} \mathbf{e}_{-m} \cdot \mathbf{E}_a. \end{cases} \quad (4.170)$$

Le moment dipolaire dans le cas d'une sphère s'écrit :

$$\mathbf{p} = -2\sqrt{\pi}C_{0,0}^2(\epsilon_r - 1)\epsilon_e \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l V_{l,m} \int_{\partial S} Y_{l,m} \mathbf{e}_r d\Omega, \quad (4.171)$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}C_{0,0}^2(\epsilon_r - 1)\epsilon_e \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{m_3=-1}^1 V_{l,m} \int_{\partial S} Y_{l,m} Y_{1,m_3} \mathbf{e}_{-m_3} d\Omega \\ &= -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}C_{0,0}^2(\epsilon_r - 1)\epsilon_e \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{m_3=-1}^1 V_{l,m} (-1)^m \delta_{l,1} \delta_{-m,m_3} \mathbf{e}_{-m_3} \\ &= -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}C_{0,0}^2(\epsilon_r - 1)\epsilon_e \sum_{m=-1}^1 V_{1,m} (-1)^m \mathbf{e}_m \\ &= 4\pi \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \epsilon_e C_{0,0}^3 \sum_{m=-1}^1 (-1)^m \mathbf{e}_{-m} \cdot \mathbf{E}_a \mathbf{e}_m. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Et en vertu de l'identité $\sum_{m=-l}^l (-1)^m \mathbf{e}_{-m} \cdot \mathbf{v} \mathbf{e}_m = \mathbf{v}$ pour tout vecteur $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{p} = 4\pi \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \epsilon_e C_{0,0}^3 \mathbf{E}_a. \quad (4.173)$$

On retrouve bien le moment dipolaire d'une sphère diélectrique soumise à un champ constant.

4.3.8.2 L'ellipsoïde

L'ellipsoïde fait partie des rares objets pour lesquels nous trouvons une forme analytique exacte de la polarisabilité. Il faut noter que récemment une forme analytique a été proposée sans qu'il y ait eu à postuler un champ uniforme dans le domaine de l'objet [Redzic, 1994]. Pour nos besoins, nous nous limiterons à la comparaison avec la formulation à champ uniforme proposée au sein de [Landau and Lifshitz, 1984]. Sans perdre trop de généralité nous traïtons le cas d'une ellipsoïde diélectrique prolata orientée dont le plus grand rayon est orienté suivant l'axe (O,z). L'expression de la norme r_0 du vecteur position d'un point $\mathbf{y}$ sur l'ellipsoïde est la suivante :

$$r_0(a, b, \theta) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{\cos(\theta)})^2 + (\frac{b}{\sin(\theta)})^2}} \quad (4.174)$$

Où θ est l'angle entre le grand axe de l'ellipsoïde et le vecteur position du point $\mathbf{y}$. L'excentricité de cet objet est quantifié par :

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (4.175)$$

Dans l'hypothèse d'une faible excentricité, on peut prouver que la norme du rayon vecteur peut s'écrire :

$$r_0(a, b, \theta) = b\left(1 + \frac{(e \cos(\theta))^2}{2}\right). \quad (4.176)$$

Dans ce cas, la norme r_0 peut être décomposée jusqu'à l'ordre 2 dans la base des harmoniques sphériques :

$$r_0 = 2\sqrt{\pi}(C_{0,0}Y_{0,0} + C_{2,0}Y_{2,0}), \quad (4.177)$$

où les coefficients $C_{l,m}$ qui ici se réduisent au nombre de 2, peuvent être en général déduits de la manière suivante :

$$C_{l,m} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\Omega} r_0 Y_{l,m}^* d\Omega. \quad (4.178)$$

Ici, ces coefficients valent :

$$\begin{aligned} C_{0,0} &= -\frac{b(b^2 - 7a^2)}{6a^2} \\ C_{2,0} &= \frac{b\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}{3\sqrt{5}}. \end{aligned} \quad (4.179)$$

Calculons maintenant le moment dipolaire associé à un champ constant appliqué à l'ellipsoïde. Compte tenu de la géométrie de notre objet, le formalisme (4.160) nous a d'abord amené à exprimer les solutions du potentiel puis à déduire le moment dipolaire par la relation (4.165). Dans l'hypothèse d'une faible excentricité nous obtenons l'expression suivante pour la polarisabilité qui est ici un tenseur diagonal :

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} = \alpha_{yy} &= \frac{\pi a^3 (1-e^2)^{3/2} (e^2+6)^2 (e^2+10) (7e^2+30) (\epsilon_r-1)}{90(e^2(19\epsilon_r-4)+30(\epsilon_r+2))} \\ \alpha_z &= -\frac{\pi a^3 (1-e^2)^{3/2} (e^2+6)^2 (e^2+30) (3e^2+10) (\epsilon_r-1)}{90(e^2(23\epsilon_r-38)-30(\epsilon_r+2))} \end{aligned} \quad (4.180)$$

Alors que les polarisabilités établies dans [Landau and Lifshitz, 1984] s'expriment de la manière suivante :

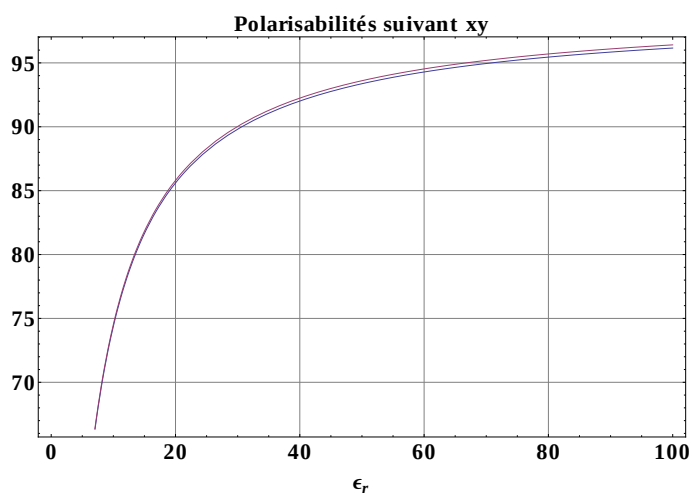
$$\begin{aligned} \alpha_{xy}^L &= -\frac{16\pi a^3 e^3 (e^2-1) (\epsilon_r-1)}{3(2e(2e^2+\epsilon_r-1)+(e^2-1)(\epsilon_r-1)\ln(\frac{e+1}{1-e}))} \\ \alpha_z^L &= \frac{8\pi a^3 e^3 (1-e^2) (\epsilon_r-1)}{3((e^2-1)(\epsilon_r-1)(2e-\ln(\frac{e+1}{1-e}))+2e^3)} \end{aligned} \quad (4.181)$$

A titre de comparaison nous avons calculé les valeurs de ces polarisabilités pour des excentricités de 10%, 20% et 30% pour une permittivité relative allant de 0 à 100 et un demi-grand axe de 2 cm. Une permittivité relative supérieure donnant lieu à une erreur constante liée au fait que le comportement totalement conducteur est atteint. Nous avons représenté dans les figures 4.3, 4.4 et 4.5 l'évolution des polarisabilités en fonction de

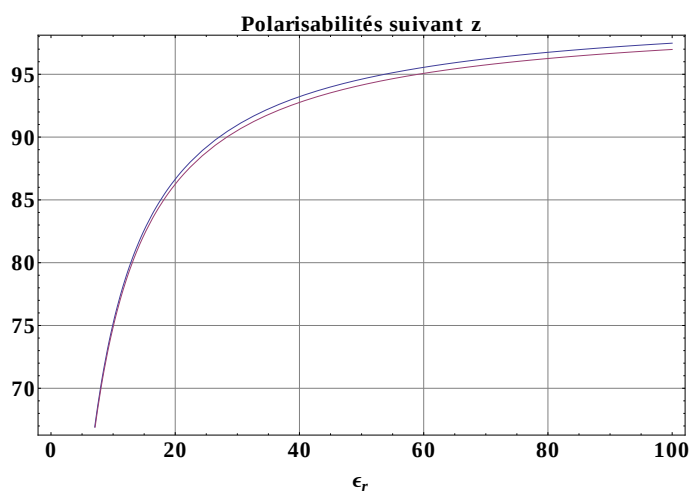
la permittivité relative ainsi que la valeur absolue de l'erreur relative entre le modèle de Landau-Lifshitz et notre formalisme. Nous constatons à travers ces résultats un très bon accord entre le modèle exact de Landau et notre formalisme. L'erreur relative entre les polarisabilités de notre formalisme et celles de Landau augmente avec la valeur de l'excentricité, tout en restant inférieure à 5% quand l'ellipsoïde atteint une excentricité de 30%, ce qui représente une valeur limite à la condition d'excentricité.

4.4 Bilan et perspectives

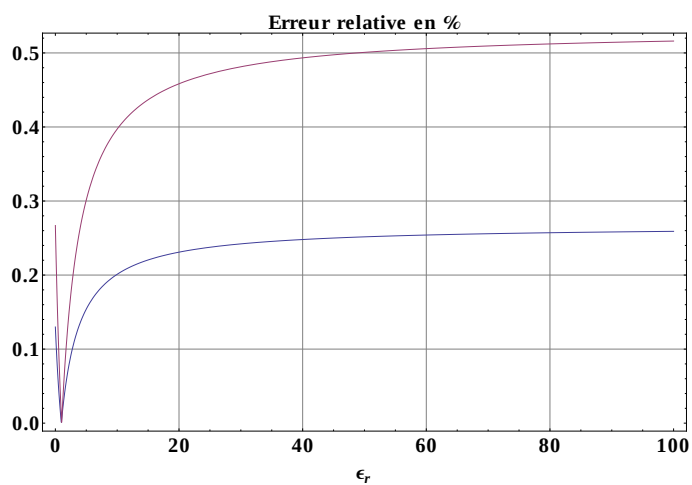
Nous avons mis au point dans ce chapitre un formalisme générique de la réponse électrique applicable à un nombre infini d'objets, de conductivité et de forme arbitraire pourvu qu'ils présentent une faible excentricité. Ce formalisme prend en compte des variations du champ électrique appliqué par le capteur et montre les couplages entre le mode de polarisation, la variation du champ appliqué et la géométrie de l'objet. Ce formalisme est analytique, et convient donc très bien à une prédiction en ligne par un robot ou un capteur de la perturbation d'objets de forme et de conductivité arbitraire. Une fois réduit, le formalisme a pu retrouver exactement la réponse de la sphère et approcher avec une très grande satisfaction la réponse de l'ellipsoïde. Loin de se restreindre aux objets sphéroïdes, le présent formalisme est adapté aux objets de type cuboïdes comme nous le montrerons à l'occasion d'une prochaine publication.



(a)

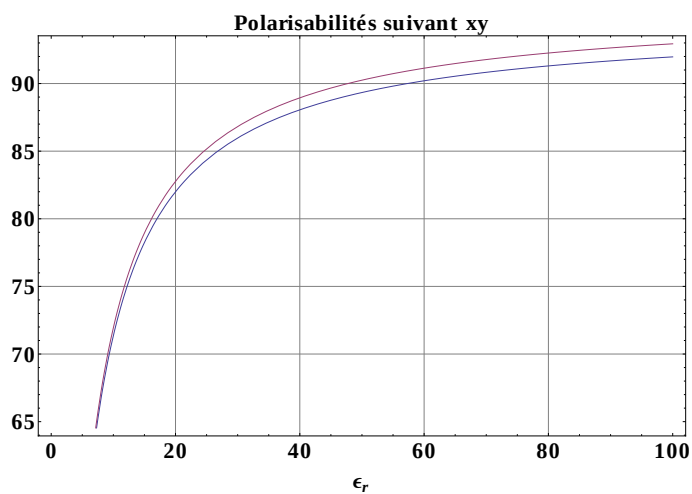


(b)

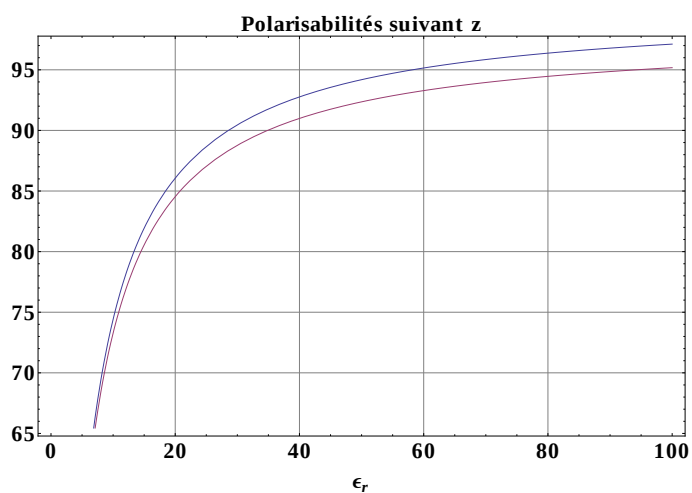


(c)

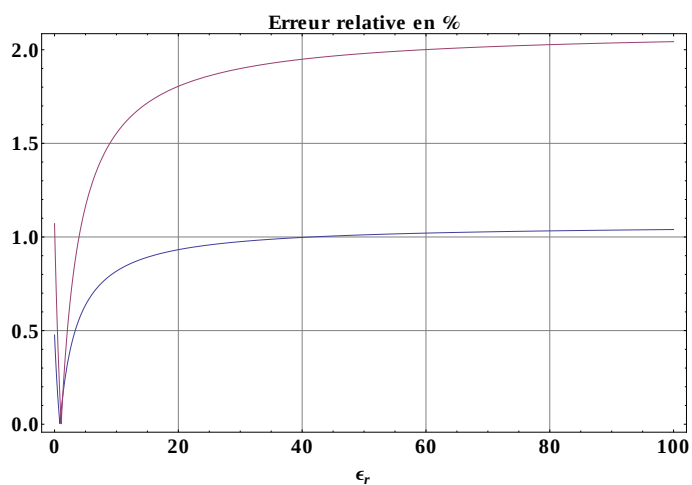
FIGURE 4.3 – Evolution de la polarisabilité suivant a) xy et b) z en fonction de la permittivité relative pour une excentricité de 10% et un grand rayon de 2 cm d'après notre formalisme (bleu) et le modèle de Landau-Lifshitz (rouge). c) Erreur relative pour les polarisabilités suivant xy (bleu) et z (rouge).



(a)

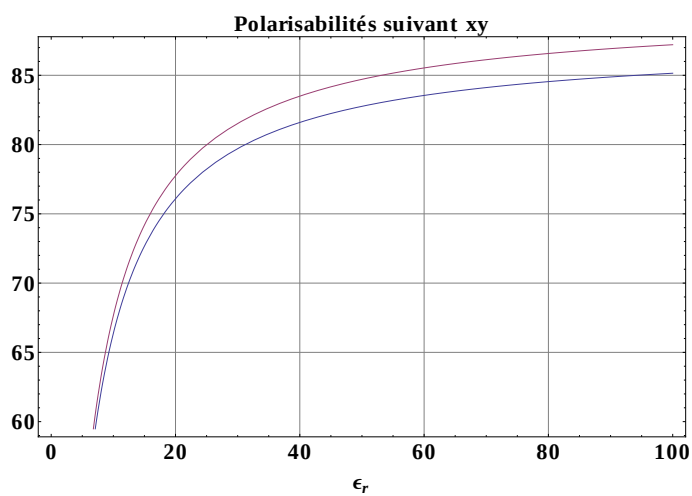


(b)

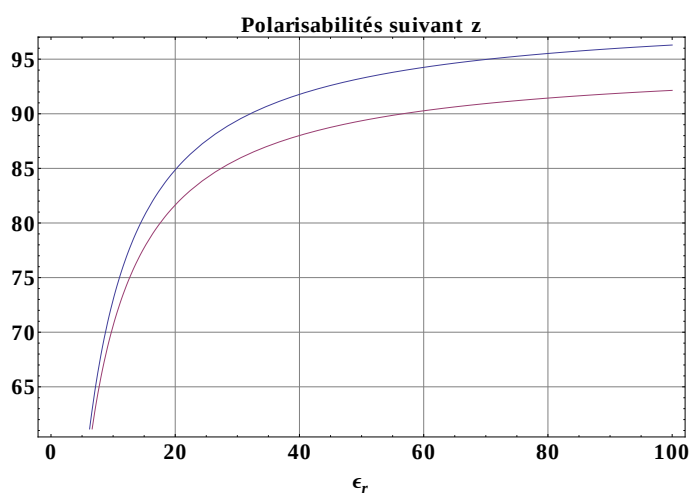


(c)

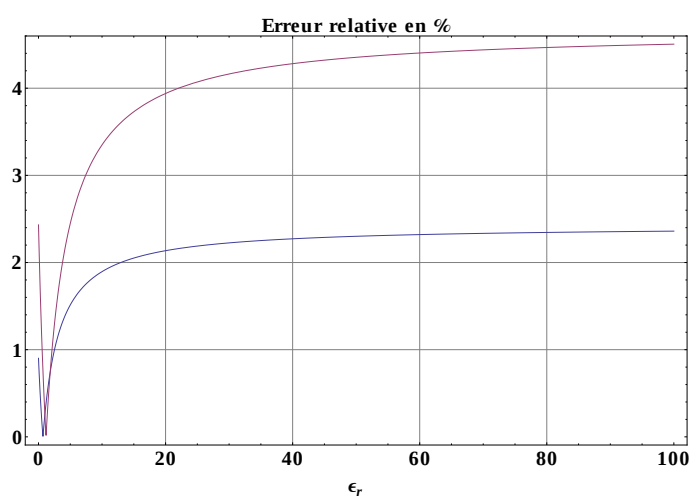
FIGURE 4.4 – Idem avec une excentricité de 20%.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.5 – Idem avec une excentricité de 30%.

Chapitre 5

Le modèle poly-sphérique du capteur

Nous nous proposons dans ce chapitre de présenter le modèle poly-sphérique (PSM) du capteur. Ce modèle vient de l'intuition physique d'un comportement électrique simple de capteur, se déduisant comme *l'approximation au premier ordre* de la formulation rigoureuse de Green (voir chapitre II), dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaires et sous des hypothèses physiques raisonnables compatibles avec celles énoncées par Brian Rasnow en 1996 [Rasnow, 1996] pour adapter la modélisation de la perturbation électrique d'une sphère dans un fluide conducteur, tel l'eau de mer, sur la peau d'un poisson réel. Le modèle PSM, motivé par l'exigence première d'une prédiction rapide de la perturbation d'un objet sur un capteur réel, consiste à remplacer le capteur par une distribution de sphères chargées et calibrées, conformément aux hypothèses physiques que nous avons énoncées au chapitre II. Nous commençons dans ce chapitre par établir le modèle, à vide d'abord, puis en présence d'objet. Nous distinguerons deux types d'objets : les grands et les petits, relativement à la taille du capteur, en rappelant que le PSM jouit ici d'une grande applicabilité concernant les petits objets, étant entendu que nous avons proposé un formalisme générique de la réponse des petits objets au chapitre IV. Nous décrivons ensuite le principe de la calibration du modèle PSM, et donnons deux illustrations avec deux de nos capteurs prototypes présentés au chapitre III : le capteur bi-polaire et le capteur quadru-polaire. Nous présentons ensuite les résultats de la comparaison du modèle PSM de la perturbation de différents objets, grands et petits, dont nous connaissons la réponse, sur les deux capteurs prototypes sus-mentionnés, avec la BEM et le banc d'essai. Nous concluons ce chapitre par un recensement des avantages et des inconvénients du modèle PSM, ainsi que par les perspectives que nous ouvre ce modèle.

5.1 Le modèle PSM

Dans cette section, nous établissons le modèle PSM . Nous rappelons les hypothèses conduisant au comportement électrique du premier ordre, énoncées lors du chapitre II, avant de donner d'abord, suivant le mode U-I de mesure et d'émission des capteurs adopté au chapitre III, une expression à vide, puis en présence des petits et des grands objets, du courant sur les récepteurs.

5.1.1 Le modèle PSM à vide

Considérons une distribution d'électrodes sphériques parfaitement conductrices, *séparées deux à deux par des distances grandes devant leur rayon, de manière à empêcher toute*

polarisation mutuelle (cette hypothèse fait partie de celles qui nous ont permis de réduire assez simplement la formulation de Green vue au chapitre II), et "polarisons" cet ensemble d'électrodes de la même manière que nous l'avons fait pour nos prototypes de capteurs, présentés au chapitre III, en attribuant à une sphère une charge $Q_n > 0$ (l'émetteur), et aux autres (les récepteurs) une charge $Q_p < 0$ (fig. 5.1). Une telle polarisation produit, en

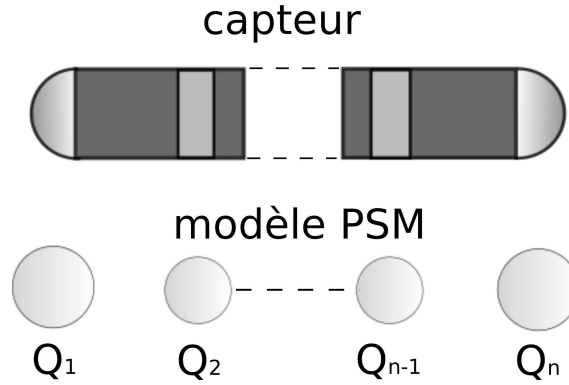


FIGURE 5.1 – En haut : le schéma d'un capteur prototype fonctionnnat en mode U-I. En bas : Le modèle poly-sphérique équivalent (PSM). Une distribution linéique de n électrodes sphériques chargées et suffisamment distantes l'une de l'autre suffit à reproduire le champ électrique émis par un capteur prototype fonctionnant en mode U-I.

l'absence d'objet extérieur, dans un milieu conducteur linéaire et isotrope, des courants $I_p^{(0)}$ mesurés sur chaque électrode sphérique de surface $\partial\mathcal{E}_p$ et de charge Q_p , dont l'expression est donnée par la loi d'Ohm :

$$I_p^{(0)} = \gamma \int_{\partial\mathcal{E}_p} \mathbf{E}_T^{(0)} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (5.1)$$

où γ est la conductivité électrique du milieu, $\mathbf{E}_T^{(0)}$ est le champ électrique total en un point de la surface $\partial\mathcal{E}_p$ en l'absence d'objet, et $\mathbf{n}$ est la normale à cette surface au même point. En l'absence d'une perturbation extérieure, et sous l'hypothèse *d'électrodes petites devant leur distance de séparation*, le champ total $\mathbf{E}_T^{(0)}$ est réduit au champ $\mathbf{E}_a$, lequel est dirigé quasi radialement sur l'électrode $\mathcal{E}_p$. En effet, l'éloignement relatif des électrodes limite fortement les influences mutuelles, ou autrement appelées polarisations entre électrodes. Ainsi, en l'absence d'objet peut on écrire :

$$I_p^{(0)} = \gamma \int_{\partial\mathcal{E}_p} \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{n} ds. \quad (5.2)$$

D'une manière plus formelle, on peut exprimer assez simplement la relation entre les courants à vide, en l'absence d'objet, et les différentes tensions auxquelles sont soumises les récepteurs du modèle PSM du capteur :

$$I_p^{(0)} = \sum_{q=1}^{n-1} C_{p,q}^{(0)} U_q, \quad (5.3)$$

où $C_{p,q}^{(0)}$ est un élément de la matrice de conductance $C_{\text{PSM}}^{(0)}$ en l'absence d'objet et U_q est la tension ou différence de potentiels entre l'électrode réceptrice q et une électrode émettrice

(par convention), jouant le rôle de masse du capteur. On peut donner une expression plus explicite de la matrice de conductance dans ce cas de figure. En effet, pour une telle distribution d'électrodes, on peut écrire, aux termes de polarisation près :

$$V_p \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{q=1}^n \frac{Q_q}{C_q C_p + \delta_{p,q} a_p}, \quad (5.4)$$

où ϵ est la permittivité électrique du milieu extérieur, V_p est le potentiel imposé à l'électrode p , a_p est le rayon de l'électrode p , Q_q est la charge globale portée par l'électrode q , $\delta_{p,q}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 quand $p = q$ et 0 sinon. $C_q C_p$ désigne la distance entre les centres des électrodes q et p , respectivement dénommés C_q et C_p . En utilisant le théorème de Gauss et la loi d'Ohm nous pouvons écrire :

$$\frac{Q_p}{\epsilon} = \Phi_p(\mathbf{E}_a(C_p)) = \frac{1}{\gamma} \Phi_p(\mathbf{j}) = \frac{I_p^{(0)}}{\gamma}, \quad (5.5)$$

où Φ_p est le flux à travers la surface $\partial\mathcal{E}_p$ et $\mathbf{j}$ est le vecteur de densité surfacique de courant total. On peut alors réécrire la relation (5.4) :

$$V_p = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{q=1}^n \frac{I_q^{(0)}}{C_q C_p + \delta_{p,q} a_p}. \quad (5.6)$$

Comme cette dernière relation est valable pour toute électrode p , nous pouvons reformuler cette relation pour toutes les électrodes du capteur et écrire :

$$V = A \cdot I^{(0)}. \quad (5.7)$$

Où V est le vecteur des potentiels imposés à toutes les électrodes, $I^{(0)}$ est le vecteur des courants et A est la matrice définie par :

$$A_{p,q} = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{q=1}^n \frac{1}{C_q C_p + \delta_{p,q} a_p}. \quad (5.8)$$

Pour rendre le modèle opérant et valable, nous devons tenir compte aussi de la conservation du courant, c'est à dire respecter la relation suivante :

$$\sum_{p=1}^n I_p^{(0)} = 0. \quad (5.9)$$

De sorte que nous pouvons utiliser les $n - 1$ premiers courants et définir le dernier comme l'opposé de la somme des $n - 1$ premiers courants. Formellement cela consiste à multiplier par une matrice P , et ainsi la relation (5.7) devient :

$$V = A \cdot P \cdot I^{(0)}. \quad (5.10)$$

Où $I^{(0)}$ est cette fois le vecteur des $n - 1$ premiers courants et P est la matrice de dimensions $n \times (n - 1)$ définie comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

En pratique, nous n'imposons pas des potentiels mais des différences de potentiels ou tensions U définis comme suit :

$$U_p = V_p - V_n \quad \forall p \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (5.12)$$

Pour convertir les potentiels en tensions telles qu'elles sont définies ci-dessus nous pouvons multiplier à gauche le second membre de (5.10) par P^T pour obtenir :

$$U = P^T \cdot A \cdot P \cdot I^{(0)}. \quad (5.13)$$

En y reconnaissant la loi d'Ohm, nous pouvons identifier la matrice de résistance $R_{\text{PSM}}^{(0)}$ du modèle PSM du capteur immergé en l'absence de perturbation extérieure :

$$R_{\text{PSM}}^{(0)} = P^T \cdot A \cdot P. \quad (5.14)$$

Nous en déduisons alors la matrice de conductance, en l'absence de perturbation, $C_{\text{PSM}}^{(0)}$ définie comme l'inverse de $R_{\text{PSM}}^{(0)}$:

$$C_{\text{PSM}}^{(0)} = \left(R_{\text{PSM}}^{(0)} \right)^{-1}. \quad (5.15)$$

Enfin, nous obtenons, en l'absence d'objet extérieur, le modèle PSM du courant $I^{(0)}$ sur les récepteurs :

$$I^{(0)} \simeq C_{\text{PSM}}^{(0)} \cdot U. \quad (5.16)$$

5.1.2 Le modèle PSM en présence d'objets

Dans le cas d'une perturbation extérieure de nature purement résistive, venant en réponse à l'action du capteur, la résistance varie d'un terme δR_{PSM} et plus généralement on peut écrire :

$$U = \left(R_{\text{PSM}}^{(0)} + \delta R_{\text{PSM}} \right) \cdot I. \quad (5.17)$$

Où cette fois, I est le courant sur les récepteurs en présence de l'objet, qui satisfait tout comme le courant à vide, à la condition de conservation :

$$\sum_{p=1}^n I_p = 0. \quad (5.18)$$

Distinguons deux cas de figures. Soit *l'objet est grand*, c'est à dire que la perturbation en courant qu'il induit est inférieure, voire du même ordre à celui du courant à vide, dans lequel cas, la conductance totale devient :

$$C_{\text{PSM}}^{(>)} = \left(R_{\text{PSM}}^{(0)} + \delta R_{\text{PSM}}^{(>)} \right)^{-1}. \quad (5.19)$$

Où le symbole ">" en exposant signifie que la grandeur se rapporte à un grand objet. Nous obtenons alors l'expression suivante du courant en présence d'un grand objet :

$$I^{(>)} = C_{\text{PSM}}^{(>)} \cdot U. \quad (5.20)$$

Soit *l'objet est petit*, c'est à dire qu'à l'inverse, la perturbation en courant qu'il induit est d'un ordre bien plus petit que celui du courant à vide, ce qui nous permet d'écrire l'approximation suivante :

$$C_{\text{PSM}} = (R_{\text{PSM}}^{(0)} + \delta R_{\text{PSM}})^{-1} \simeq \left(R_{\text{PSM}}^{(0)}\right)^{-1} - \left(R_{\text{PSM}}^{(0)}\right)^{-1} \cdot \delta R_{\text{PSM}} \cdot \left(R_{\text{PSM}}^{(0)}\right)^{-1}. \quad (5.21)$$

Soit encore :

$$C_{\text{PSM}} \simeq C_{\text{PSM}}^{(0)} - C_{\text{PSM}}^{(0)} \cdot \delta R_{\text{PSM}} \cdot C_{\text{PSM}}^{(0)} = C_{\text{PSM}}^{(0)} + \delta C_{\text{PSM}}. \quad (5.22)$$

Ce que l'on peut écrire encore comme :

$$C_{\text{PSM}} \simeq C_{\text{PSM}}^{(0)} + \delta C_{\text{PSM}}. \quad (5.23)$$

D'où l'expression suivante du courant en présence d'un petit objet :

$$I \simeq \left(C_{\text{PSM}}^{(0)} + \delta C_{\text{PSM}}\right) \cdot U. \quad (5.24)$$

Nous donnerons dans la section 3 de ce chapitre les modèles PSM de perturbation de conductance de quelques objets dits *grands* et *petits* au sens de l'électrolocation, en sachant que pour ces derniers, nous avons mis au point un formalisme générique de leur réponse (chapitre IV), et que le modèle PSM, n'est de fait pas limité au nombre existant d'objets dans la littérature pour lesquels nous avons une expression de la réponse.

5.2 Calibration

Dans cette section, nous présentons une méthode pour calibrer le modèle poly-sphérique. En effet, du fait de l'existence de parties isolantes dans le capteur réel, nous avons à rechercher des tailles et des séparations d'électrodes électriquement équivalentes à celles du capteur réel. Le principe de la méthode est particulièrement simple. Il consiste à trouver les rayons et distances de séparation d'électrodes du modèle PSM qui minimisent, en l'absence de perturbation extérieure, une norme de l'écart entre la matrice de conductance $C_{\text{PSM}}^{(0)}$ du modèle et, soit la matrice de conductance $C_{\text{BEM}}^{(0)}$ donnée par un simulateur électrique qui résoud par la méthode BEM (Boundary Elements Method ou Méthode basée sur les éléments finis aux frontières) les équations qui gouvernent les états électriques aux surfaces du capteur et de l'objet (chapitre II) , soit la matrice de conductance $C_{\text{EXP}}^{(0)}$ donnée par la mesure expérimentale. Ces deux dernières conductances tiennent compte de l'exacte géométrie du capteur. Un tel écart ou critère pourrait être exprimé, dans le cas d'une calibration avec la BEM, par :

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\text{trace}(C_{\text{BEM}}^{(0)} - C_{\text{PSM}}^{(0)})^2}{\text{trace}(C_{\text{BEM}}^{(0)})^2}}. \quad (5.25)$$

Nous allons illustrer cette méthode de calibration avec deux types de capteurs réels : un capteur bi-polaire constitué de deux électrodes et un capteur quadru-polaire constitué de quatre électrodes (les mêmes que ceux présenté au chapitre III). Ces capteurs, nous le rappelons, ont un corps cylindrique d'une longueur $L = 20$ cm et toutes leur électrode ont un rayon $a = 1$ cm. Le rapport entre le rayon des électrodes et la plus petite distance qui les sépare, est de 5%, pour le premier capteur et de 14.3% pour le second capteur, ce qui demeure faible et, donc conforme à l'une des conditions principales d'applicabilité du modèle PSM, à savoir que *les électrodes doivent avoir un rayon plus petit que la distance minimale qui les sépare*. On doit au passage faire le constat que de fait, le capteur bi-polaire aura un modèle PSM plus précis que le capteur quadru-polaire.

5.2.1 Calibration du modèle PSM sur le capteur bi-polaire

Sur la figure 5.2, on peut apercevoir la géométrie réelle du capteur bi-polaire, présenté au chapitre III. Ce capteur est constitué de deux électrodes de forme hémisphérique aux extrémités. Dans le cas présent, nous n'avons pas besoin d'utiliser le critère présenté en

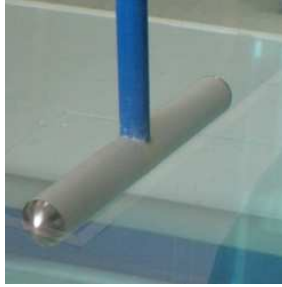


FIGURE 5.2 – Le capteur bi-polaire. Les deux électrodes sont situées aux extrémités et sont de forme hémisphérique. Les deux électrodes ainsi que le tube isolant cylindrique qui les sépare ont un rayon de 1 cm.

(5.25), puisque la matrice de conductance se limite à une seule valeur. D'autre part les inconnues se limitent par symétrie au rayon a d'une électrode et à la longueur entre les deux électrodes. Tous calculs faits, en imposant la longueur du modèle à celle du capteur réel, nous trouvons $a \simeq 0.71$ cm. Cette valeur est inférieure à celle du rayon de l'électrode hémisphérique (1 cm), ce qui est assez cohérent. En effet, pour reproduire les courants du capteur réel, nous utilisons dans le modèle PSM des électrodes sphériques, qui, pour avoir une surface équivalente aux électrodes réelles, doivent avoir un rayon inférieur à celles-ci, i.e. $a < 1$ cm.

5.2.2 Calibration du modèle PSM sur le capteur quadru-polaire

Nous allons traiter maintenant le cas du capteur quadru-polaire. La géométrie de ce capteur est présentée sur la figure 5.3 a). Par symétrie, nous avons à rechercher les valeurs équivalentes au capteur réel de quatre inconnues : le rayon a_e des électrodes extérieures, le rayon a_i des électrodes intérieures, la distance L_e entre une électrode extérieure et son électrode voisine intérieure ainsi que la distance L_i entre les électrodes intérieures. Un schéma du capteur réel ainsi qu'un schéma des paramètres de calibration du modèle poly-sphérique sont représentés sur la figure 5.3. Il suffit maintenant de calculer la matrice de

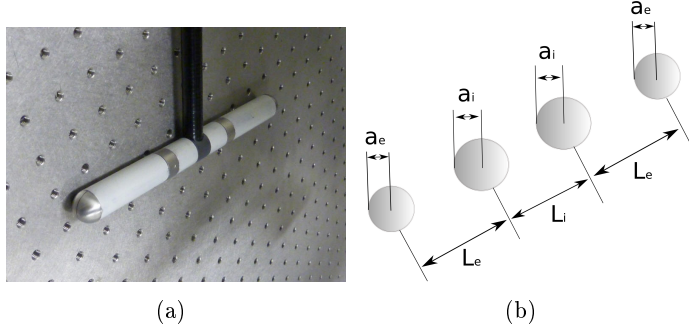


FIGURE 5.3 – a) Le capteur quadru-polaire. Le capteur dispose de quatre électrodes : deux électrodes dites extérieures situées aux extrémités, de forme hémisphérique, et deux électrodes dites intérieures situées près du centre du capteur, de forme annulaire. b) le modèle PSM du capteur quadru-polaire avec ses paramètres de calibration.

conductance par la BEM et de minimiser le critère présenté en (5.25) pour trouver les quatre inconnues. Concrètement, la BEM nous donne la matrice de conductance suivante :

$$C_{\text{BEM}}^{(0)} = \frac{\gamma}{100} \begin{pmatrix} 7.1463 & -2.7143 & -2.2378 \\ -2.7115 & 7.5890 & -2.6437 \\ -2.2337 & -2.6437 & 7.5890 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Nous nous attendons cependant à une matrice symétrique, puisque le modèle polysphérique prédit une matrice de conductance symétrique, étant l'inverse d'une matrice $R_{\text{PSM}}^{(0)}$ qui est symétrique (5.14). Cet écart à la symétrie, nous l'imputons essentiellement à une imprécision numérique liée à un nombre d'éléments de maillage un peu inférieur au nombre requis. Un nombre adéquat d'éléments demanderait un temps considérablement plus long, sans qu'il y ait un gain substantiel en précision pour la robotique¹. En conséquence, il est préférable de symétriser cette matrice de sorte que l'on ait :

$$C_{\text{BEM}}^{(0)} \simeq \frac{\gamma}{100} \begin{pmatrix} 7.1463 & -2.7129 & -2.2357 \\ -2.7129 & 7.5890 & -2.6437 \\ -2.2357 & -2.6437 & 7.5890 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

En minimisant le dit critère par la méthode des moindres carrés par exemple nous trouvons que les meilleurs paramètres pour reproduire la même matrice de conductance $C_{\text{BEM}}^{(0)}$ sont $a_e = 0.72$ cm, $a_i = 0.73$ cm, $L_e = 7.45$ cm et $L_i = 6.94$ cm. Le critère avec ces paramètres est évalué à $\Gamma(a_e, a_i, L_e, L_i) \simeq 4.48 \times 10^{-5}$. La matrice de conductance PSM obtenue avec ces paramètres s'écrivant :

$$C_{\text{PSM}}^{(0)} \simeq \frac{\gamma}{100} \begin{pmatrix} 7.16259 & -2.72023 & -2.22485 \\ -2.72023 & 7.61152 & -2.66645 \\ -2.22485 & -2.66645 & 7.61152 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

1. On attire cependant l'attention du lecteur en lui disant qu'une simulation BEM avait été réalisée avec une finesse accrue, dans le cas du capteur bi-polaire, et que cela avait abouti, dans un temps très long, à des valeurs présentant un écart relatif chiffré à 1% avec les valeurs présentées ici dans cette thèse, ce qui n'est sans doute pas préjudiciable pour les besoins de la robotique.

On note ici l'excellente capacité du modèle PSM à reproduire la conductance du vrai capteur. Le modèle PSM peut donc en théorie, se substituer complètement au capteur réel, en l'absence d'objet.

5.3 Modèles de perturbation d'objet

Dans cette section, nous proposons des modèles PSM de perturbation de plusieurs objets dits *petits* et *grands* au sens de l'électrolocation. Nous donnons d'abord la perturbation en conductance de la sphère, l'ellipsoïde et le cylindre, à titre d'illustration de l'application du modèle PSM sur de *petits objets*, en utilisant pour les deux premiers objets des réponses établies en champ constant, et pour le second, une réponse exacte. Nous donnons ensuite le modèle PSM de conductance totale due aux parois et coins de l'aquarium, dans lequel est plongé le capteur réel, en guise d'illustration de l'application du modèle PSM sur de *grands objets*. Notons avant de commencer que nous avons établi, au chapitre IV, un formalisme générique permettant de prédire la réponse d'un nombre infini de *petits objets*, ce qui de fait rend le modèle PSM applicable à un grand nombre de situations.

5.3.1 La sphère

Le modèle de réponse de la sphère est connu depuis fort longtemps en électromagnétisme [Jackson, 1962]. Ce modèle a été toutefois adapté au cas de l'électrolocation et simplifié moyennant des hypothèses raisonnables pour permettre aux biologistes de comprendre comment le poisson percevait les objets. C'est ainsi que Rasnow en 1996 [Rasnow, 1996] a formulé un modèle simple de la perturbation d'une sphère sous l'hypothèse d'*un champ constant dans le domaine de la sphère*. Le modèle de Rasnow, que nous avons déjà exposé une première fois dans le chapitre I, s'écrit plus simplement dans un milieu purement résistif comme l'eau de notre aquarium quand elle est soumise à un champ électrique de basse fréquence (voir chapitre III) :

$$\delta V = c_f a^3 \frac{\mathbf{E}_a \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (5.29)$$

Où δV est la perturbation en un point M extérieur à la sphère, a est le rayon de la sphère, c_f désigne le facteur de contraste, fonction ici uniquement des conductivités du milieu et de l'objet puisqu'à basse fréquence, réglage que nous imposons à notre générateur pour éviter les effets parasites et capacitif (chapitre III), la partie imaginaire figurant dans le modèle de Rasnow (1.1) disparaît. Pour une sphère conductrice, $c_f = 1$ et pour une sphère isolante, $c_f = -0.5$. Ici $\mathbf{E}_a$ est le champ appliqué au centre $\mathbf{y}_0$ de la sphère et $\mathbf{r}$ est le vecteur position du point M où l'on évalue cette perturbation, l'origine étant prise au centre de la sphère. Si nous voulons développer plus explicitement la dite perturbation, nous avons à exprimer le champ électrique $\mathbf{E}_a$. Celui-ci peut s'écrire dans le cas d'un modèle PSM de capteur :

$$\mathbf{E}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{q=1}^n \frac{\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_{Cq}}{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_{Cq}|^3} Q_q. \quad (5.30)$$

Où $\mathbf{x}_{Cq}$ désigne le centre de la q-ème électrode, ce qui par le théorème de Gauss (5.5), revient à écrire :

$$\mathbf{E}_a = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{q=1}^n \frac{\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_{Cq}}{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_{Cq}|^3} I_q. \quad (5.31)$$

Réécrivons alors l'expression (5.29) dans le cas où M correspond au centre de l'électrode p du capteur :

$$\delta V_p = -\frac{c_f}{4\pi\gamma} \sum_{q=1}^n \frac{\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_q}{r_p^3 r_q^3} I_q. \quad (5.32)$$

Où les $\mathbf{r}_p$ sont définis comme $\mathbf{x}_{Cp} - \mathbf{y}_0$. Nous pouvons donc écrire plus synthétiquement :

$$\delta V_p = \sum_{q=1}^n S_{p,q} I_q, \quad (5.33)$$

en posant :

$$S_{p,q} = -\frac{c_f}{4\pi\gamma} \frac{\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_q}{r_p^3 r_q^3} \quad (5.34)$$

Où $S_{p,q}$ est un élément de la matrice symétrique S qui s'identifie à la perturbation de la résistance du capteur, en présence de la sphère.

Le potentiel sur une électrode p est la somme du potentiel $V_p^{(0)}$ sans objet et d'une perturbation induite par la présence de la sphère :

$$V_p = V_p^{(0)} + \delta V_p. \quad (5.35)$$

Selon (5.7), on peut écrire pour le vecteur des potentiels :

$$V = A \cdot I^{(0)} + \delta V = (A + S) \cdot I. \quad (5.36)$$

En passant des potentiels aux tensions avec I cette fois les courants sur les récepteurs uniquement, nous avons :

$$U = (-P^T \cdot A \cdot P - P^T \cdot S \cdot P) \cdot I = (R^{(0)} + \delta R) \cdot I. \quad (5.37)$$

Nous identifions alors la perturbation en résistance induite par la sphère :

$$\delta R^{(\text{sph.})} = -P^T \cdot S \cdot P. \quad (5.38)$$

D'où, d'après (5.22), la perturbation en conductance associée :

$$\delta C^{(\text{sph.})} = C^{(0)} \cdot P^T \cdot S \cdot P \cdot C^{(0)}. \quad (5.39)$$

De laquelle expression, nous déduisons finalement la perturbation en courant :

$$\delta I^{(\text{sph.})} = \delta C^{(\text{sph.})} \cdot U. \quad (5.40)$$

5.3.2 L'ellipsoïde

Nous testons à présent le modèle PSM sur une ellipsoïde. Nous nous limitons ici au cas de la réponse d'une ellipsoïde prolate conductrice soumise à un champ constant [Landau and Lifshitz, 1984]. Au premier ordre du développement du potentiel suivant la distance à l'objet, la réponse est définie par le moment dipolaire $\mathbf{p}$ (voir chapitre IV), lequel s'écrit :

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E}_a = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}_a. \quad (5.41)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \epsilon \frac{\frac{4}{3}\pi ab^2}{\frac{1-e^2}{2e^3}(\ln[\frac{1+e}{1-e}] - 2e)} = \epsilon \frac{\frac{4}{3}\pi ab^2}{N_2} \\ \alpha_1 &= \epsilon \frac{\frac{4}{3}\pi ab^2}{\frac{1-N_2}{2}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Où $\boldsymbol{\alpha}$ est la polarisabilité de l'ellipsoïde (définie au chapitre IV), a et b sont les demi grand axe et demi petit axe, et e est l'excentricité, définie comme $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$. On en déduit la perturbation sur une électrode p du modèle PSM du capteur :

$$\delta V_p = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_p}{4\pi\epsilon r_p^3} = \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}_a) \cdot \mathbf{r}_p}{4\pi r_p^3}. \quad (5.43)$$

Soit, en exprimant le champ électrique au centre de l'objet (5.31) :

$$\delta V_p = - \sum_{q=1}^n \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{r}_p}{(4\pi)^2 r_p^3 r_q^3} \frac{Q_q}{\epsilon}, \quad (5.44)$$

ce qui, en appliquant le théorème de Gauss donne :

$$\delta V_p = - \sum_{q=1}^n \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{r}_p}{(4\pi)^2 r_p^3 r_q^3} \frac{I_q}{\gamma}. \quad (5.45)$$

Exprimons maintenant le potentiel total sur une électrode p :

$$V_p = V_p^{(0)} + \delta V_p. \quad (5.46)$$

Ainsi, le potentiel sur toutes les électrodes peut s'écrire :

$$V = (A + \xi) \cdot I, \quad (5.47)$$

avec :

$$\xi_{p,q} = - \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{r}_p}{(4\pi)^2 \gamma r_p^3 r_q^3}. \quad (5.48)$$

De la même manière que pour la sphère, la présence de l'ellipsoïde va entraîner une variation de la conductance :

$$\delta C^{(\text{ellips.})} = C^{(0)} \cdot P^T \cdot \xi \cdot P \cdot C^{(0)}, \quad (5.49)$$

ce qui conduit à l'expression suivante de la perturbation en courant :

$$\delta I^{(\text{ellips.})} = \delta C^{(\text{ellips.})} \cdot U \quad (5.50)$$

5.3.3 Le cylindre infini

Nous allons cette fois-ci tester le modèle PSM sur un cylindre, plus particulièrement *un cylindre infini*. La perturbation de cet objet sur le modèle PSM du capteur a été établi en champ arbitraire [Gossiaux, 2009a] :

$$\delta V_p = \sum_{q=1}^n -\frac{Q_q}{2\pi^2\epsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi_q - \phi_p)} \int_0^{\infty} dk \cos(k(z_q - z_p)) \frac{I_m(kR)K_m(k\rho_q)K_m(k\rho_p)}{K_m(kR)}. \quad (5.51)$$

Où ϕ_p est l'angle entre un vecteur de la base cartésienne du plan médian (π) du cylindre, centré sur le cylindre, et la projection de $\mathbf{r}_p$ sur (π). z_p est l'altitude relative de l'électrode $\mathcal{E}_p$ par rapport au plan (π). I_m et K_m sont des fonctions de Bessel, R est le rayon du cylindre et ρ_p est la norme de la projection de $\mathbf{r}_p$ sur le plan (π). En utilisant le théorème de Gauss (5.5), la relation (5.51) devient :

$$\begin{aligned} \delta V_p &= \sum_{q=1}^n -\frac{I_q}{2\pi^2\gamma} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi_q - \phi_p)} \int_0^{\infty} dk \cos(k(z_q - z_p)) \frac{I_m(kR)K_m(k\rho_q)K_m(k\rho_p)}{K_m(kR)} \\ &= \sum_{q=1}^n C_{p,q}^{(\text{cyl.})} I_q. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ainsi la perturbation globale sur le capteur peut s'écrire :

$$V = \left(A + C^{(\text{cyl.})} \right) \cdot I. \quad (5.53)$$

L'introduction d'un cylindre induira une variation de la conductance :

$$\delta C^{(\text{cyl.})} = C^{(0)} \cdot P^T \cdot C^{(\text{cyl.})} \cdot P \cdot C^{(0)}. \quad (5.54)$$

Ce qui nous conduit à l'expression de la variation de courant :

$$\delta I^{(\text{cyl.})} = \delta C^{(\text{cyl.})} \cdot U \quad (5.55)$$

5.3.4 Les parois de l'aquarium

Pour montrer la capacité du modèle PSM à prédire la perturbation de grands objets sur un capteur, nous proposons de modéliser les perturbations électriques induites par les parois de l'aquarium. Une manière de modéliser efficacement ces perturbations est d'utiliser la méthode des images décrite dans [Jackson, 1962]. Cette méthode peut s'énoncer comme suit : *chaque charge électrique placée près d'une paroi a une charge image de même intensité et même signe placée symétriquement par rapport à la paroi*. Ceci est aisément applicable à toutes les électrodes de notre prototype de capteur que nous modélisons par le modèle PSM. En conséquence, chaque électrode du capteur réel reçoit en plus des perturbations de ses voisines, des perturbations provenant des capteurs dits *images*² placés de manière symétrique par rapport aux coins et parois (fig. 5.4). Les murs conduisant à

2. Bien qu'en toute rigueur, il existe en principe une infinité d'images, les images les plus éloignées sont négligeables vu la décroissance rapide du champ électrique.

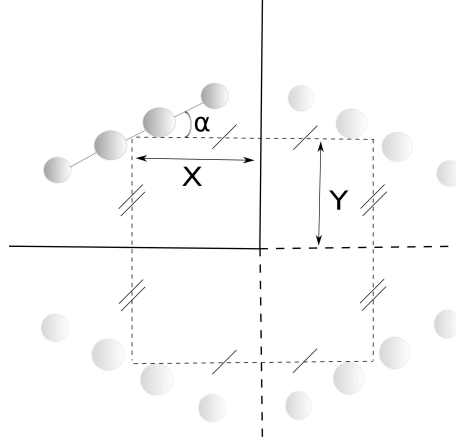


FIGURE 5.4 – Illustration de l'application de la méthode des images au modèle poly-sphérique devant un coin. Physiquement il s'agit de tenir compte de 3 capteurs images.

une perturbation en résistance :

$$\delta R_{\text{PSM}}^{(>,w)} = -\frac{1}{4\pi\gamma} P^T \cdot \delta R^{(>,w)} \cdot P, \quad (5.56)$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta R_{i,j}^{(>,x+)}(X) &= \frac{1}{\sqrt{\left(2X + (L_{i,1} + L_{j,1} - L)\cos(\alpha)\right)^2 + \left((L_{i,1} - L_{j,1})\sin(\alpha)\right)^2}} \\ \delta R_{i,j}^{(>,y-)}(Y) &= \frac{1}{\sqrt{\left(2Y + (L_{i,1} + L_{j,1} - L)\sin(\alpha)\right)^2 + \left((L_{i,1} - L_{j,1})\cos(\alpha)\right)^2}} \\ \delta R_{i,j}^{(>,x-)}(X) &= \delta R_{i,j}^{(>,x+)}(-(L_a - X)) \\ \delta R_{i,j}^{(>,y+)}(Y) &= \delta R_{i,j}^{(>,y-)}(-(L_a - Y)). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Où $\delta R_{i,j}^{(>,x+)}$, $\delta R_{i,j}^{(>,y+)}$, $\delta R_{i,j}^{(>,x-)}$, $\delta R_{i,j}^{(>,y-)}$ sont les contributions à la matrice de résistance $\delta R^{(>,w)}$ provenant des murs localisés à $x = L_a/2$, $y = L_a/2$, $x = -L_a/2$ et $y = -L_a/2$, avec :

$$\delta R_{i,j}^{(>,w)} = \delta R_{i,j}^{(>,x+)} + \delta R_{i,j}^{(>,y+)} + \delta R_{i,j}^{(>,x-)} + \delta R_{i,j}^{(>,y-)}. \quad (5.58)$$

L étant la longueur du capteur, L_a , la valeur de chaque côté de l'aquarium, $L_{i,1}$, la distance entre l'électrode 1 dite de tête et l'électrode i , et α est l'angle entre le capteur et le mur suivant les y négatifs (fig. 5.4). En écrivant cette fois :

$$\delta R_{\text{PSM}}^{(>,c)} = -\frac{1}{4\pi\gamma} P^T \cdot \delta R^{(>,c)} \cdot P, \quad (5.59)$$

l'influence des coins peut être exprimée également :

$$\begin{aligned}
\delta R_{i,j}^{(>,x+y-)}(X,Y) &= \frac{1}{\sqrt{\left(2X+(L_{i,1}+L_{j,1}-L)\cos(\alpha)\right)^2 + \left(2Y+(L_{i,1}+L_{j,1}-L)\sin(\alpha)\right)^2}} \\
\delta R_{i,j}^{(>,x-y-)}(X,Y) &= \delta R_{i,j}^{(>,x+y-)}(-(L_a - X), Y) \\
\delta R_{i,j}^{(>,x-y+)}(X,Y) &= \delta R_{i,j}^{(>,x+y-)}(-(L_a - X), -(L_a - Y)) \\
\delta R_{i,j}^{(>,x+y+)}(X,Y) &= \delta R_{i,j}^{(>,x+y-)}(X, -(L_a - Y)).
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Où $\delta R_{i,j}^{(>,x+y+)}$, $\delta R_{i,j}^{(>,x-y+)}$, $\delta R_{i,j}^{(>,x-y-)}$, $\delta R_{i,j}^{(>,x+y-)}$ sont les contributions à la matrice de résistance $\delta R^{(>,c)}$ provenant des coins localisés à $(L_a/2, L_a/2)$, $(-L_a/2, L_a/2)$, $(-L_a/2, -L_a/2)$ et $(L_a/2, -L_a/2)$, avec :

$$\delta R_{i,j}^{(>,c)} = \delta R_{i,j}^{(>,x+y+)} + \delta R_{i,j}^{(>,x-y+)} + \delta R_{i,j}^{(>,x-y-)} + \delta R_{i,j}^{(>,x+y-)}.$$
 \tag{5.61}

La perturbation totale provenant de l'aquarium étant :

$$\delta R_{\text{PSM}}^{(>,\text{aqua.})} = \delta R_{\text{PSM}}^{(>,w)} + \delta R_{\text{PSM}}^{(>,c)}.$$
 \tag{5.62}

La résistance du modèle PSM du capteur est maintenant la somme de la résistance $R_{\text{PSM}}^{(0)}$ sans objet et de la résistance $\delta R_{\text{PSM}}^{(>,\text{aqua.})}$ quand l'influence des murs et des coins ne peut plus être négligée. Nous déduisons alors la conductance en présence de l'aquarium, qui a le statut de *grand objet* :

$$C_{\text{PSM}}^{(>,\text{aqua.})} = \left(R_{\text{PSM}}^{(0)} + \delta R_{\text{PSM}}^{(>,\text{aqua.})} \right)^{-1},$$
 \tag{5.63}

ce qui nous conduit finalement à l'expression suivante du courant en présence de l'aquarium :

$$I^{(>,\text{aqua.})} = C_{\text{PSM}}^{(>,\text{aqua.})} \cdot U.$$
 \tag{5.64}

5.4 Comparaisons du modèle PSM avec la BEM et le banc d'essai

5.4.1 Conditions d'essai

Pour tester le modèle PSM sur nos prototypes de capteurs, en présence des petits objets, nous plaçons dans un premier temps une sphère, une ellipsoïde et un cylindre, au voisinage d'un capteur immergé dans un aquarium, en retranchant systématiquement l'effet perturbatif engendré par les parois de l'aquarium³. Puis dans un second temps, nous retirons les objets et rapprochons le capteur des parois de l'aquarium pour tester le modèle PSM du capteur en présence des dites parois.

Dans tous les cas, le modèle est testé sur une trajectoire identique du capteur : une traversée en ligne droite d'une paroi à l'autre de l'aquarium. Quand les objets sont introduits, la traversée s'effectue à une distance de 5 cm des objets, placés au centre de l'aquarium.

3. L'aquarium est en potentiel flottant car il n'est pas connecté à un potentiel de référence.

Lorsque les objets sont retirés, la traversée s'effectue en passant par le centre de l'aquarium. Les perturbations en courant sont mesurées sur chacune des 3 électrodes réceptrices du capteur : l'électrode 1 (électrode de tête) est la première électrode à passer devant l'objet durant la trajectoire. L'électrode 2 (que l'on pourra appeler *électrode rostrale*) et l'électrode 3 (que l'on pourra appeler *électrode caudale*) sont la seconde et la troisième à passer devant l'objet. Les trois électrodes réceptrices sont soumises à une même tension U par rapport à l'électrode de queue (assimilée à la masse du capteur). Nous détaillons dans les paragraphes suivants pour chaque objet les valeurs des différents paramètres physiques et géométriques des conditions d'essai, avant de présenter les résultats de la comparaison avec la BEM ou le banc d'essai.

5.4.2 Cas d'une sphère conductrice

Nous commençons par tester le modèle PSM de perturbation de la sphère (5.40) sur le capteur quadrupolaire. Ce dernier traverse l'aquarium en passant à une distance de 5 cm d'une sphère conductrice de 2 cm de rayon (fig. 5.5). La conductivité est fixée à 400

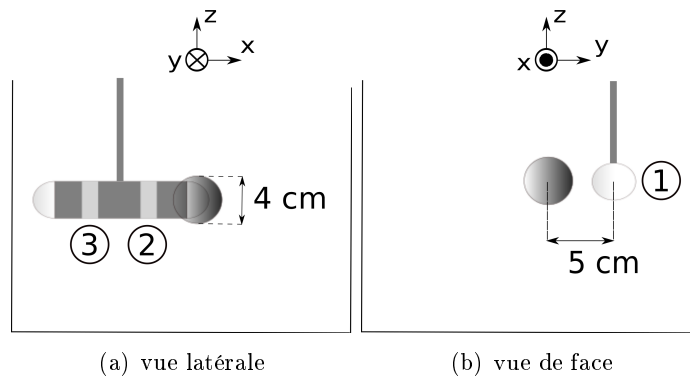


FIGURE 5.5 – Trajectoire du capteur en présence d'une sphère conductrice.

$\mu S / cm$ (ordre de grandeur de la vraie valeur de conductivité de l'eau de robinet dans l'aquarium pour une pression de 1 atm et une température de $20^\circ C$), et la tension U est de 1 V. Les perturbations en courant dans ces conditions (fig 5.6), sont de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-6} A, soit d'environ 1/1000 à 1/10000 du courant à vide.

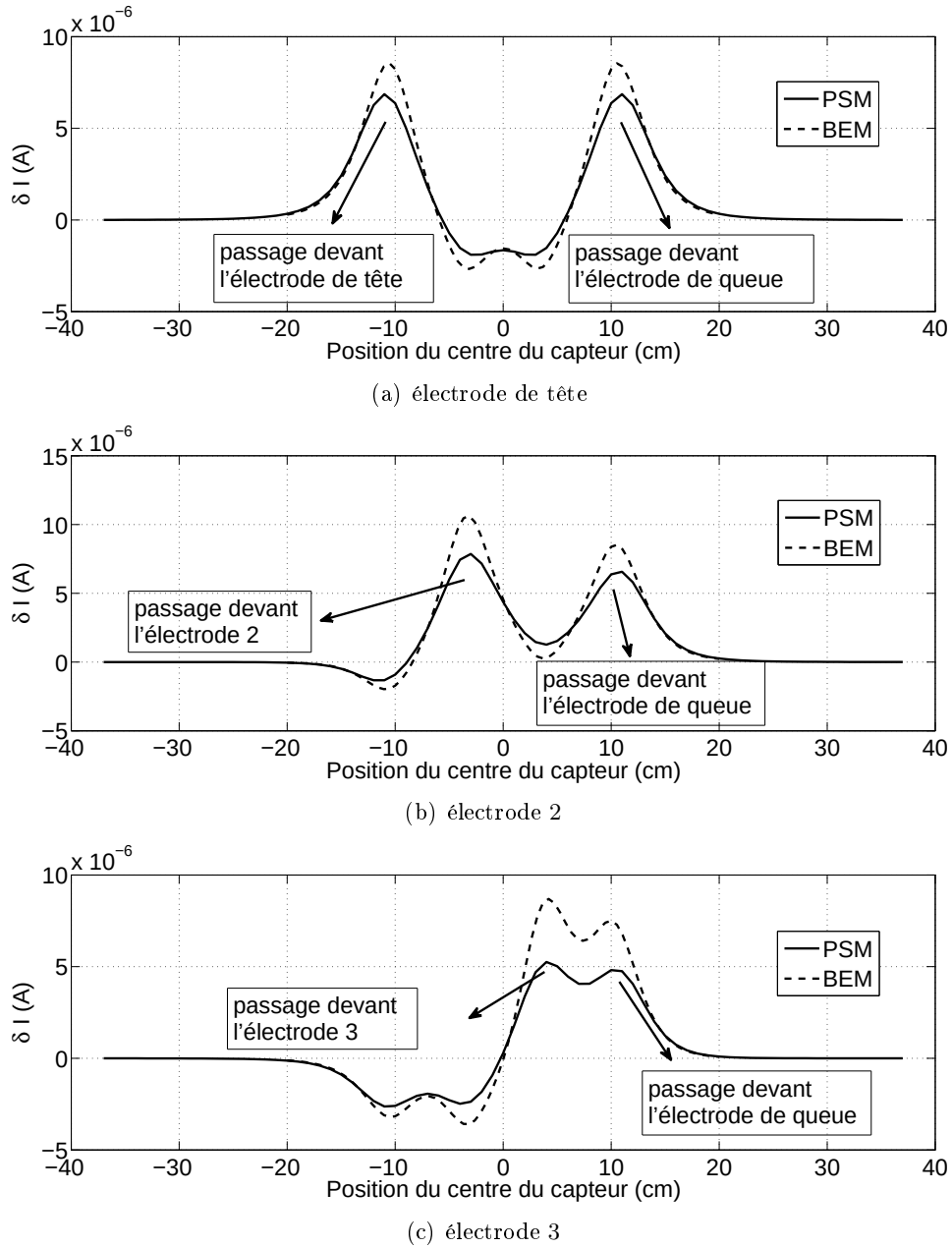


FIGURE 5.6 – Comparaison entre le modèle (5.40) et la BEM pour une perturbation en courant, induite sur les récepteurs du capteur 4-électrodes passant à 5 cm d'une sphère conductrice de rayon 2 cm, placée au centre de l'aquarium.

Nous constatons un bon accord dans les allures entre les courbes produites par le PSM et la BEM. Quantitativement, l'erreur relative à l'endroit des plus grandes perturbations (en valeur absolue) est estimée à environ 25% sur les électrode 1 (électrode de tête) et 2, et d'environ 40% pour la troisième électrode. Il faut noter que si à première vue l'écart pour cette dernière électrode semble être important, il se réfère d'après la mesure, à une perturbation non fiable car mêlant la mesure de deux électrodes. Les pics de perturbations en courant sur chaque électrode apparaissent toujours à deux positions. Cela est dû au

fait que le courant de perturbation est exprimé en fonction de la différence des potentiels de perturbation $\delta V_p - \delta V_n$ évalués sur l'électrode réceptrice (sur laquelle on représente le courant) et sur l'électrode émettrice, dite de queue, par l'application de l'opérateur de conversion potentiels/tensions P^T (5.39). C'est aussi pour ça que systématiquement, l'un des deux pics apparaît au moment où la sphère est en face de l'électrode de queue, tandis que l'autre apparaît au moment où la sphère se situe en face de l'électrode sur laquelle on évalue la perturbation en courant. Etant entendu que la perturbation en potentiel ou en courant est maximale en valeur absolue quand l'objet se trouve à l'endroit le plus proche de l'électrode d'où l'on mesure la perturbation, du fait de la dépendance en $1/r_p^2$ du potentiel de perturbation δV_p sur l'électrode p , où r_p est la distance entre le centre de la sphère et le centre de l'électrode p (5.32). Nous constatons également que les deux pics sont d'égale amplitude pour la première électrode, ce qui est dû au fait que la première électrode, ou l'électrode de tête, a la même valeur de conductance que l'électrode de queue, ce qui n'est pas vrai pour la seconde électrode et la troisième électrode, d'où la différence d'amplitudes observée. En effet, la BEM nous indique que les conductances de l'électrode 1 $C_{\text{BEM}}^{(0)}(1, 1)$ et $C_{\text{BEM}}^{(0)}(1, i)$ par rapport à elle-même et par rapport à une électrode $i \neq 1$, sont les mêmes que les conductances de l'électrode de queue $C_{\text{BEM}}^{(0)}(4, 4)$ et $C_{\text{BEM}}^{(0)}(4, i)$ par rapport à elle-même et par rapport à une électrode $i \neq 4$. Enfin, on constate que la capacité de résolution de ce capteur dans ces conditions, atteint ses limites. Pour la troisième électrode, les deux pics sont à peine séparés, compte tenu de la grosseur de la sphère (diamètre de 4 cm) relativement à la distance de séparation entre l'électrode de queue et la troisième électrode.

5.4.3 Cas d'une ellipsoïde conductrice

Nous avons codé la perturbation induite sur le même capteur à 4 électrodes par une ellipsoïde conductrice prolata de rayons $2\text{cm} \times 3\text{cm}$, suivant le modèle (5.50), en plaçant le grand axe de l'ellipsoïde suivant l'axe de traversée du capteur (fig. 5.7). Les courbes

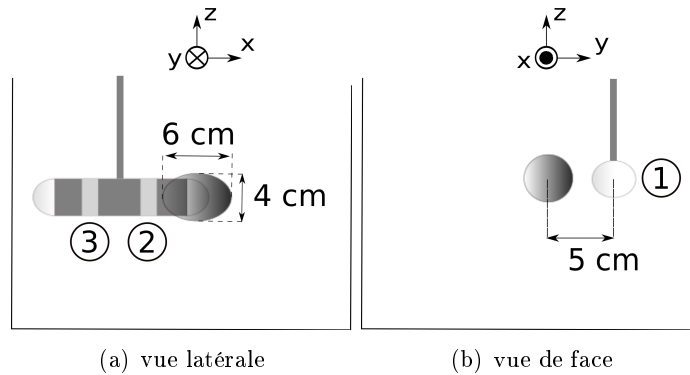
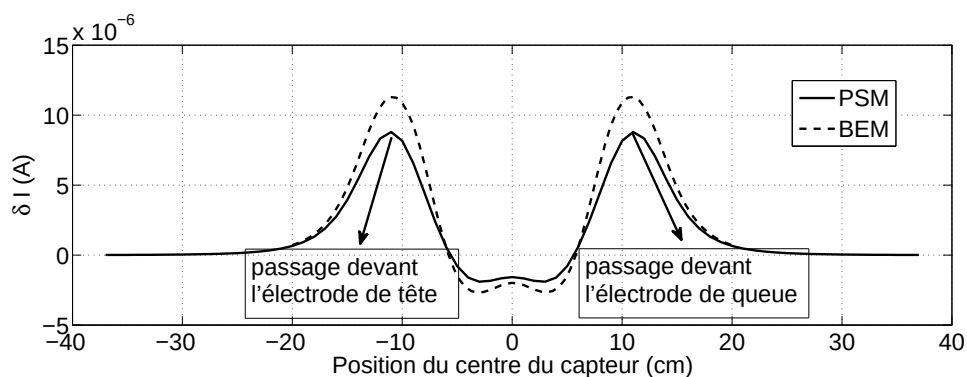


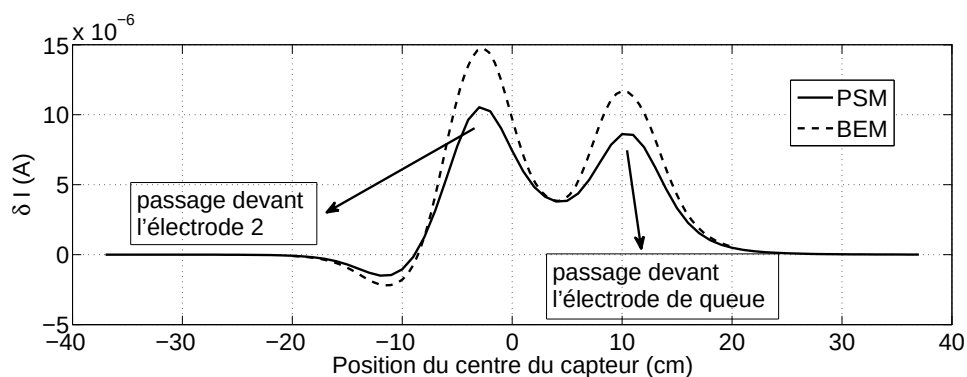
FIGURE 5.7 – Trajectoire du capteur en présence d'une ellipsoïde conductrice.

obtenues à la figure 5.8 montrent tout comme pour la sphère un bon accord dans les allures entre la BEM et le PSM. Les erreurs sont du même ordre que pour la sphère. On constate les mêmes phénomènes : 1) apparition de deux pics de courant durant la trajectoire, lorsque l'ellipsoïde se situe en face de l'électrode où l'on représente la perturbation, et en face de l'électrode de queue ; 2) symétrie des pics de courants sur l'électrode de tête, 3) dissymétrie

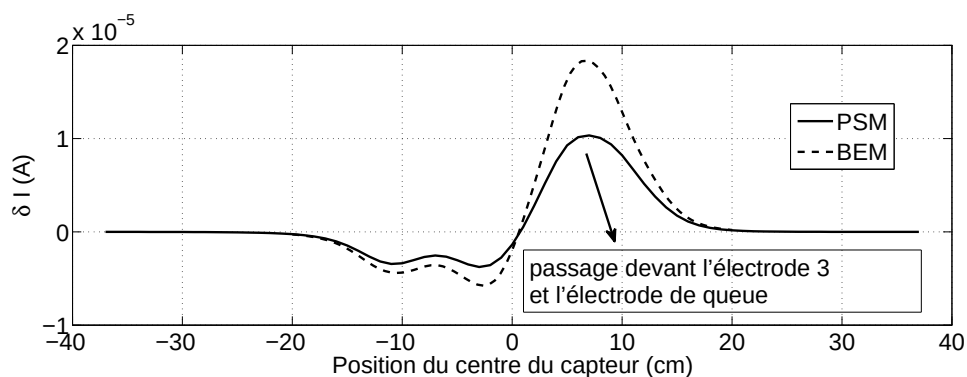
des pics de courant sur l'électrode 2. Par contre, nous ne distinguons plus les 2 pics de courant sur l'électrode 3. Ces derniers sont confondus en un seul avec une largeur plus importante que chaque pic de courant observé sur les 2 autres électrodes. Nous imputons la disparition du double pic au fait que l'objet est d'une grande largeur relativement à l'espacement entre l'électrode 3 et l'électrode de queue.



(a) électrode de tête



(b) deuxième électrode



(c) troisième électrode

FIGURE 5.8 – De haut en bas, comparaison entre le modèle et la BEM pour une perturbation en courant induite par une ellipsoïde conductrice de demi grand axe 3 cm et de demi petit axe 2 cm située à une distance de 5 cm du capteur lors de sa traversée pour les électrodes 1, 2 et 3.

5.4.4 Cas du cylindre infini conducteur

Nous avons testé le modèle (5.55) de perturbation d'un cylindre considéré comme "infini"⁴ sur un capteur bipolaire réel, suivant la même trajectoire que dans le cas de la sphère et l'ellipsoïde. Le capteur traverse l'aquarium en passant à une distance de 5 cm d'un cylindre conducteur vertical de 1 m de haut et de 2 cm de rayon, placé au centre de l'aquarium (fig. 5.9). Le capteur est déplacé suivant un plan horizontal grâce à un robot

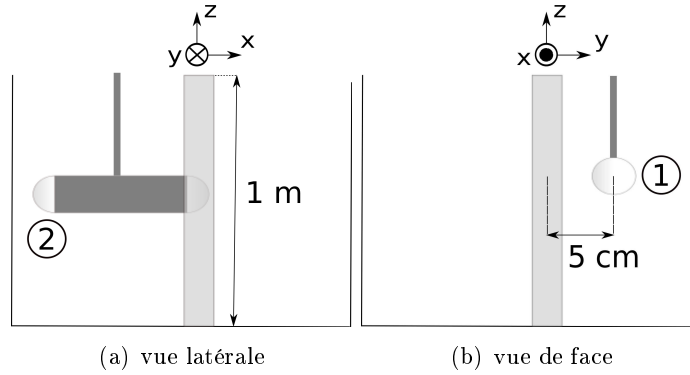


FIGURE 5.9 – Trajectoire du capteur en présence d'un grand cylindre conducteur.

cartésien (fig. 5.10) avec une précision de 0.1 mm. Le capteur utilisé mesure le courant avec

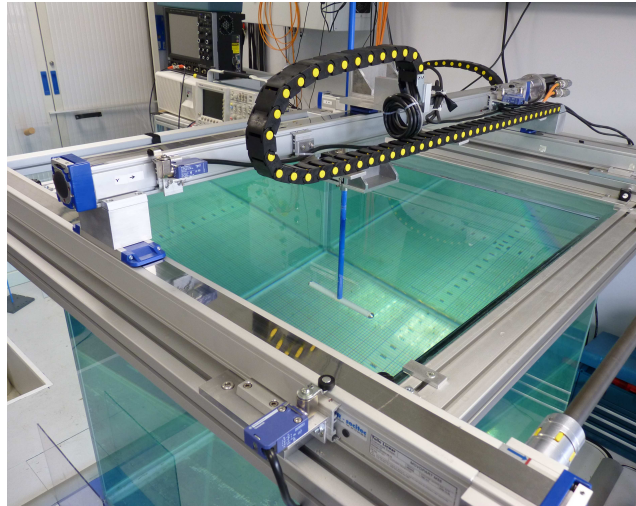


FIGURE 5.10 – Le robot cartésien. Le robot permet un mouvement sur un plan horizontal avec une précision de 0.1 mm.

une précision de 0.02% (voir chapitre III) et l'électrode réceptrice (numérotée par le chiffre 1 dans la figure 5.9) est soumise ici à une tension de 3 V par rapport à l'électrode émettrice (numérotée par le chiffre 2 dans la figure 5.9). Avant de débiter l'acquisition des mesures,

4. En effet, nous avons choisi un cylindre dont la hauteur équivaut à celle de l'aquarium, de sorte que, en contact avec la paroi et la surface de l'eau, il apparaît physiquement infini si l'on tient compte de ses images électriques formées aux interfaces.

nous avons mesuré la conductivité de l'eau et avons trouvé une valeur de $\gamma = 0.0377$ S/m. Après calibration du modèle PSM sur cette fois la conductance du capteur réel, les courbes obtenues par le banc d'essai et le modèle montrent un bon accord dans l'allure (fig 5.11).

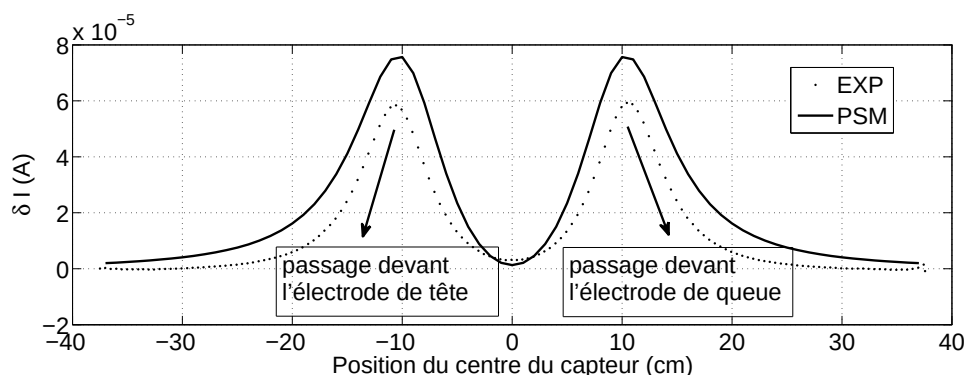
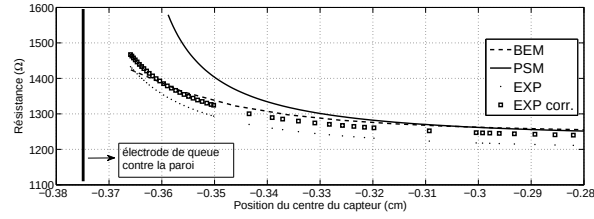


FIGURE 5.11 – Perturbation en courant par un cylindre conducteur de 2 cm de rayon et de 1 m de hauteur sur un capteur bipolaire : comparaison entre l'expérience (trait pointillé) et le modèle PSM (trait continu).

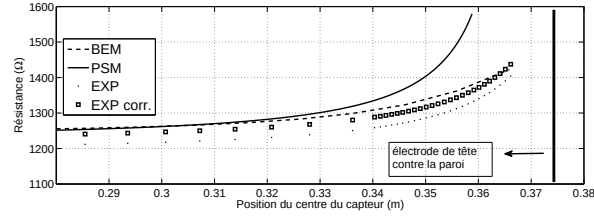
Nous observons deux pics de perturbation, apparaissant aux moments où le cylindre est situé en face de l'électrode de tête (électrode 1), et en face de l'électrode de queue. L'écart relatif, à l'endroit des pics de perturbation, entre le modèle PSM et la mesure est de l'ordre de 20%, ce qui est un peu meilleur (-5%) que l'écart obtenu avec la sphère et l'ellipsoïde. On peut expliquer ceci, sous l'hypothèse que la conductivité n'a pas sensiblement fluctué pendant l'expérience, par le fait que le PSM offre une précision d'autant meilleure que la distance entre les électrodes est grande. C'est d'ailleurs l'une des conditions de fonctionnement du modèle, que nous avons énoncée au début du chapitre. Cette condition est évidemment mieux satisfaite dans le cas du capteur bi-polaire que dans le cas du capteur quadru-polaire.

5.4.5 Cas des parois de l'aquarium

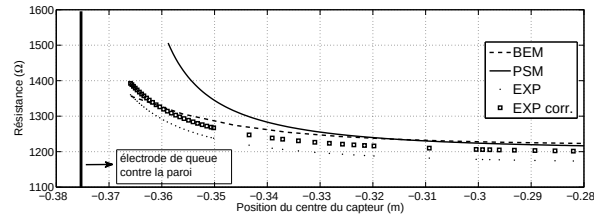
Nous avons enfin testé le modèle PSM de perturbation des parois de l'aquarium (5.20) sur le capteur quadru-polaire, et l'avons confronté avec la BEM et le banc d'essai. Le capteur effectue la même trajectoire que dans les cas précédents, en passant cette fois par le centre de l'aquarium, sans qu'aucun objet ne soit présent. Nous avons représenté ici l'évolution de la résistance des récepteurs du capteur, qui s'obtient par le rapport de la tension imposée sur le courant mesuré. Les résistances obtenues avec le modèle PSM sur les électrodes réceptrices sont en bon accord dans l'allure avec les courants obtenus par la BEM et le banc d'essai (fig. 5.12).



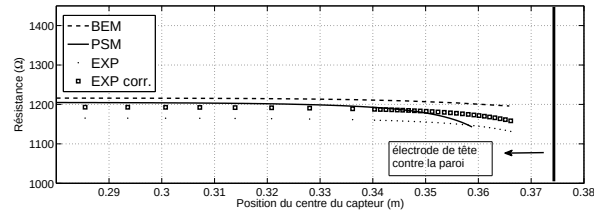
(a) électrode de tête (en début de traversée)



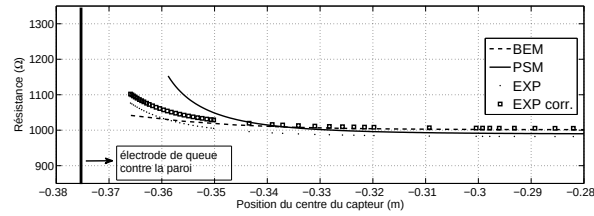
(b) électrode de tête (en fin de traversée)



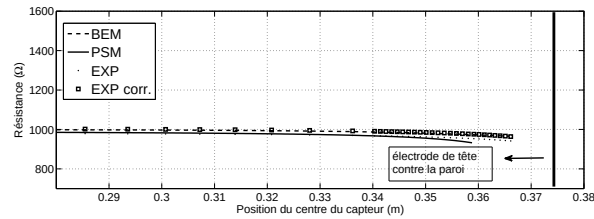
(c) électrode rostrale (en début de traversée)



(d) électrode rostrale (en fin de traversée)



(e) électrode caudale (en début de traversée)



(f) électrode caudale (en fin de traversée)

FIGURE 5.12 – Evolution de la résistance à vide sur les récepteurs du capteur quadru-polaire (rapport du courant mesuré par la tension imposée) durant la traversée de l'aquarium.

Tout comme pour les courants de perturbation des récepteurs du capteur en présence des objets, nous observons systématiquement deux variations sensibles de la valeur de résistance sur tous les récepteurs durant la traversée, quand le capteur s'éloigne par l'électrode de queue d'une paroi et quand le capteur se rapproche de l'autre paroi par l'électrode de tête. La variation de résistance est toujours plus forte quand le capteur s'éloigne d'une paroi par l'électrode de queue que lorsqu'il se rapproche de l'autre paroi par l'électrode de tête, sauf lorsque l'on relève la résistance sur l'électrode de tête (figs. 5.12a) et 5.12b)), pour la raison suivante : comme pour les objets, chaque électrode mesure la différence entre la perturbation sur elle-même et la perturbation sur l'électrode de queue. Or suivant cette trajectoire, les électrodes caudale et rostrale ne sont jamais aussi proches d'une paroi durant la traversée que ne l'est l'électrode de queue. Celle-ci en effet est toujours plus proche d'une paroi de 7 cm que les électrodes caudale et rostrale. La résistance mesurée sur l'électrode de tête, en revanche, évolue de manière symétrique par rapport au centre de l'aquarium. Ceci est dû à deux raisons : 1) lorsque le centre du capteur s'éloigne d'une paroi d'une certaine distance d , l'électrode de queue s'éloigne d'une distance égale à celle de laquelle l'électrode de tête se rapproche d'une paroi quand le centre du capteur se rapproche d'une paroi de la distance d ; 2) les électrodes de tête et de queue ont une même valeur de conductance.

Le modèle PSM, calibré sur la BEM, est en excellent accord avec la BEM (courbes quasi confondues) jusqu'à ce que le capteur s'éloigne ou se rapproche d'une paroi de 5.5 cm, c'est à dire pour des positions du centre du capteur comprises entre $x = -0.32$ m et $x = +0.32$ m. L'écart moyen relatif entre les courbes de la BEM et celles du PSM est estimé à 0.97%. Les courbes obtenues par la BEM et le PSM décrochent sensiblement en dehors de cet intervalle, pour donner un écart relatif atteignant environ 6.9%, 7.1% et 6.4% respectivement sur les électrodes de tête, l'électrode rostrale et l'électrode caudale quand le centre du capteur est situé à $x = -35.5$ cm (à 2 cm de la paroi au début de la trajectoire), et environ 6.9%, 4.2% et 3.2% respectivement sur les électrodes de tête, l'électrode rostrale et l'électrode caudale quand le centre du capteur est situé cette fois à $x = +35.5$ cm (à 2 cm de la paroi en fin de trajectoire).

Lorsque nous comparons le modèle PSM calibré sur la BEM avec les données expérimentales (en pointillés), après avoir ajusté la valeur de conductivité dans le modèle à celle mesurée par un conductimètre dans l'aquarium, avec le moteur du robot et le capteur éteints, pour éviter toute perturbation, nous constatons que les courbes du modèle et de l'expérience conservent un écart non négligeable, à des distances d d'éloignement de parois les plus élevées ($d > 5.5$ cm), pour lesquelles les courbes de la BEM et du PSM sont quasiment confondues.

En effet, à ces distances, l'écart relatif moyen, sur l'ensemble des valeurs de résistances de tous les récepteurs, entre l'expérience et le modèle PSM est d'environ 2.37%. Cette erreur nous l'imputons d'abord au manque de finesse de nos simulations BEM (comme nous l'avons mentionné dans la section consacrée à la calibration du capteur quadrupolaire, une simulation BEM d'une grande finesse demanderait un temps très long et apporterait 1% d'amélioration.) puis à l'incertitude que nous avons sur au moins deux phénomènes physiques : 1) la possible variation de conductivité pendant la traversée. En effet, l'échauffement local au niveau des électrodes, produit par les courants émis et reçus dans l'eau, peut conduire à une augmentation locale de la conductivité de l'eau. C'est ce que l'on appelle plus communément l'effet Joule (voir chapitre III). 2) la résistance de contact entre l'eau et les électrodes que nous n'avons pas pris en compte. En effet il n'est pas déraisonnable de penser par exemple à une oxydation même partielle des électrodes, suite à la création,

par l'établissement du courant, d'un flux concentré d'ions en direction des électrodes.

N'ayant pas encore intégré dans le modèle PSM les fluctuations physiques dues à la modification de la résistance de contact, nous pouvons en revanche modifier la conductivité et l'ajuster à une conductivité effective γ_{eff} telle que : $\gamma_{\text{eff}} = (1+2.37/100)\gamma$. Opter pour une conductivité effective plus grande est conforme au fait que d'une part, une augmentation de la finesse de la simulation BEM apporterait de plus grands courants, et que, d'autre part, l'effet Joule doit en principe faire augmenter la température et, de fait aussi la conductivité, celle-ci étant une fonction croissante de la température. Les mesures expérimentales sont ainsi corrigées, en remplaçant la conductivité mesurée au début de l'expérience par la conductivité effective (courbes formée de carrés).

5.5 Bilan

Nous avons présenté un modèle de capteur capable de prédire rapidement la perturbation des petits et des grands objets, avec une précision acceptable, de l'ordre de 20% pour les premiers et de 1% pour les seconds. Si le modèle PSM est perfectible en terme de précision, notamment pour rendre compte de la perturbation électrique des petits objets sur le capteur, il est en revanche plus rapide que la BEM, classée comme l'outil de référence pour prédire la perturbation des objets. De plus, ce modèle n'est pas limité par le nombre relativement faible d'objets dont on connaît aujourd'hui une forme analytique de la réponse électrique. En effet, la mise au point d'un formalisme générique de la réponse des petits objets, au chapitre IV, nous laisse entrevoir une large applicabilité du modèle. Le modèle représente aussi un outil idéal de dimensionnement du capteur. En effet, même si la précision n'est pas d'un grand niveau, les allures de la perturbation sont très bien retranscrites. Il est par exemple possible avec le modèle PSM de qualifier le pouvoir de résolution d'un capteur. Le modèle est en revanche sévèrement limité par les hypothèses qui président à sa mise au point. Notamment, le fait d'avoir impérativement des électrodes séparées par des distances bien plus grandes que leur rayon et de négliger leur polarisabilité. Il n'en demeure pas moins que ce modèle est le premier modèle viable de capteur électrique sous marin. Ce modèle a été présenté dans une grande conférence internationale [Jawad et al., 2010]. Les automaticiens du projet ANGELS ont mis au point une commande basée sur des mouvements spécifiques, un filtre de Kalman et le modèle PSM de prédiction des mesures sur un capteur réel pour réaliser la détection des petits objets [Lebastard et al., 2010a]. Nous verrons dans le chapitre suivant un modèle plus raffiné du capteur, offrant l'avantage de donner lieu à des courantes latéraux, et permettant de constituer une base théorique à la déduction du modèle poly-sphérique.

Chapitre 6

Modèle de capteur pour l'électrolocation

Dans ce chapitre nous poussons un peu plus la modélisation pour obtenir un modèle de capteur opérationnel pour l'électrolocation. Guidé par l'existence d'un comportement électrique de type poly-sphérique de nos capteurs prototypes d'électrolocation, nous avons mis au point une méthode de réduction capable rigoureusement de déduire, depuis les formulations intégrales gouvernant l'évolution des états électrocinétiques du capteur et des objets, un courant de type axial assimilé à notre courant poly-sphérique mesuré sur des anneaux pleins et, un courant de type latéral, mesuré cette fois sur des segments d'anneaux pour livrer l'information manquante et achever l'électrolocation. Ce modèle ne requiert comme pour le modèle poly-sphérique qu'une unique calibration hors-ligne. Nous commencerons par bien établir les conditions limites classiques des potentiels et courants en surface du capteur sur les parties isolantes et conductrices. Nous nous inscrivons ensuite dans le principe de superposition pour traiter l'équation de Laplace, que l'on obtient en électrolocation dans le régime de l'électrocinétique quasi statique (voir chapitre II), et envisager sa résolution par étapes successives, chacune ne présentant que l'un des deux *acteurs* de la scène, capteur ou objet. A l'issue de chaque étape la nouvelle solution est injectée dans l'étape suivante pour y définir sa condition initiale et y générer ce qui va devenir la condition initiale à l'étape d'après suivant une convergence avérée... Cette méthode par la frappante image qu'elle donne et la nature des grandeurs en jeu, est connue de l'hydrodynamique à bas Reynolds comme sous le nom de méthode des réflexions successives [Happel and Brenner, 1965]. Nous montrons alors comment nous adaptons les conditions classiques de raccordement entre milieux de conductivité différente dans le régime de l'électrocinétique quasi-statique à la méthode des réflexions. Puis nous nous servons de ces conditions pour adapter l'écriture des formulations intégrales à notre méthode de résolution. Nous faisons apparaître dans la recherche de l'expression de la solution issue de la première étape ou premier reflet, l'existence d'un opérateur de calibration réglant une fois pour toutes par voie numérique l'interaction entre les parties isolantes et les parties conductrices. Nous établissons dès lors l'expression des trois premiers reflets, qui sont suffisants en nombre au vue de la rapide atténuation en amplitude des solutions avec la distance des objets au capteur. Enfin, nous donnons les résultats dans une scène test classique et montrons un bon accord entre les prédictions théoriques et les valeurs numériques BEM.

6.1 Conditions limites de l'électrocinétique quasi-statique

Comme nous l'avons mentionné en introduction de ce chapitre nous nous appuyons sur la géométrie d'un capteur de la même forme que celui que nous avons choisi pour établir le modèle poly-sphérique. Nous rappelons dans la figure 6.1 une photo de ce capteur et nous introduisons un système de notation que nous adoptons tout le long de ce chapitre à droite dans la même figure. On y distingue notamment les parties conductrices des parties isolantes, nommées respectivement ε_α et $\mathcal{I}_\alpha$. Nous ajoutons une segmentation de ces parties conductrices donnant lieu à 4 sections géométriquement identiques, et notées e_i que l'on désignera sous le terme d'électrodes.

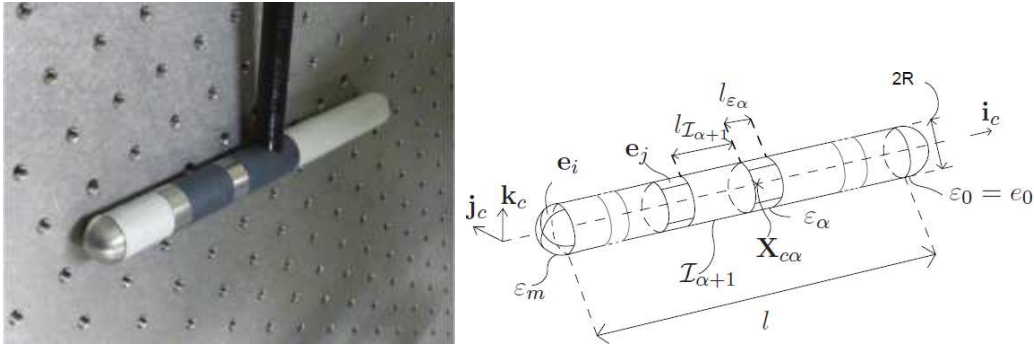


FIGURE 6.1 – (Gauche) Une photo d'un capteur quadru-polaire disposant de 13 électrodes venant de la segmentation de 3 récepteurs : le groupe de tête et les 2 anneaux divisés chacun en 4 électrodes. (Droite) Un schéma du capteur avec des notations pour distinguer chacune de ses parties

A la surface du capteur illustré sur la figure 6.1, nous distinguons les conditions limites sur les électrodes et sur les isolants. Sur les premières nous imposons un potentiel qui sera maintenu quelque soit la scène extérieure. Du fait de la contiguité des électrodes dans un même groupe, et pour éviter tout court-circuit, ce potentiel est identique sur chacun des groupes :

$$\phi(\mathbf{x}) = U_\alpha(t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\varepsilon_{\alpha=0,1..m}, \quad (6.1)$$

où le symbole ∂ signifie que l'on désigne la surface. Nous ajoutons que l'électrode de queue sera définie dans ce chapitre comme la masse du capteur avec $U_0(t) = 0$.

Sur les parties isolantes, le courant ne passe pas, ce qui se traduit, du fait de la loi d'Ohm locale $\mathbf{j} = -\gamma \nabla \phi$ où $\mathbf{j}$ est la densité de courant, par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{I}_{\alpha=1,2..m}. \quad (6.2)$$

A la surface des objets, nous introduisons les conditions de raccord de l'électrocinétique quasi-statique (2.44), en négligeant la partie imaginaire de l'admittance $\tilde{\gamma}$, i.e. $\tilde{\gamma} \rightarrow \gamma$:

$$\gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) (\mathbf{x}_-) = \gamma_k \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right) (\mathbf{x}_+), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}_{k=1,...,p}, \quad (6.3)$$

et :

$$\phi(\mathbf{x}_-) = \phi(\mathbf{x}_+), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}_{k=1,\dots,p}. \quad (6.4)$$

Où $\mathbf{x}_\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(\mathbf{x} \pm \varepsilon \mathbf{n})$ avec $\varepsilon > 0$ et γ_k désigne la conductivité de l'objet $\mathcal{O}_k$.

6.2 La méthode des réflexions

Nous choisissons une manière originale de résoudre l'équation de Laplace dans une scène composée de notre capteur et d'objets à la surface desquels sont vérifiées les conditions limites énoncées dans la section précédente. Suivant le principe de superposition, nous pouvons envisager le problème de l'électrocinétique quasi-statique comme une succession d'étapes pour lesquelles nous avons à résoudre à chaque fois une nouvelle équation de Laplace. En appliquant ce principe, la première étape consiste à résoudre la dite équation avec le capteur seul, puis sans le capteur avec l'objet, puis de nouveau sans l'objet avec le capteur seul... Chacune de ces étapes donnant lieu à une nouvelle solution de l'équation de Laplace relative à l'étape, laquelle solution définissant l'état de rééquilibrage du capteur (ou de l'objet) à ce pas donné, engendre le nouvel état de rééquilibrage de l'objet (ou du capteur) au pas suivant. Cette décomposition du problème, nous l'appelons *méthode des réflexions* par analogie avec une onde se propageant dans la scène en rebondissant tour à tour sur le capteur et les objets (fig. 6.2).

Comme nous le voyons, la méthode des réflexions oblige à résoudre une infinité d'équations, à chaque réémission du potentiel par l'objet ou le capteur. Toutefois, du fait de la rapide atténuation des interactions électriques avec la distance, nous pouvons approximer la solution exacte du problème direct par le développement en série suivant :

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \dots, \quad (6.5)$$

où lorsque l'indice i augmente, $|\phi_i|$ décroît comme l'inverse d'une certaine puissance strictement positive s d'une distance typique séparant le capteur de l'objet, que l'on dénomme r , telle que $r \gg R$. En pratique, dès que $r \geq 3R$, l'approximation est valide. Cependant, pour faciliter la compréhension des développements ultérieurs, nous invitons le lecteur à considérer que dans tout ce qui suit, $r \geq l$. Dans ces conditions, un développement est possible en invoquant les schémas classiques de développements perturbatifs bien établis en physique théorique [Morse and Feshbach, 1953]. Ici nous suivrons la méthode des réflexions successives comme elle est employée en hydrodynamique dans le régime des bas Reynolds pour modéliser les interactions entre les particules dans un écoulement diphasique [Happel and Brenner, 1965]. Dans le contexte présent, cette méthode itérative est appliquée comme suit :

Tout d'abord on résout l'équation de Laplace pour le capteur seul sans objet et on cherche une solution ϕ_0 en posant à la première étape :

$$\Delta \phi_0 = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_o. \quad (6.6)$$

Les conditions limites dans le régime de l'électrocinétique quasi-statique sont à la première étape :

$$\phi_0(\mathbf{x}) = U_\alpha(t), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \varepsilon_{\alpha=0,1,\dots,m}, \quad (6.7)$$

et :

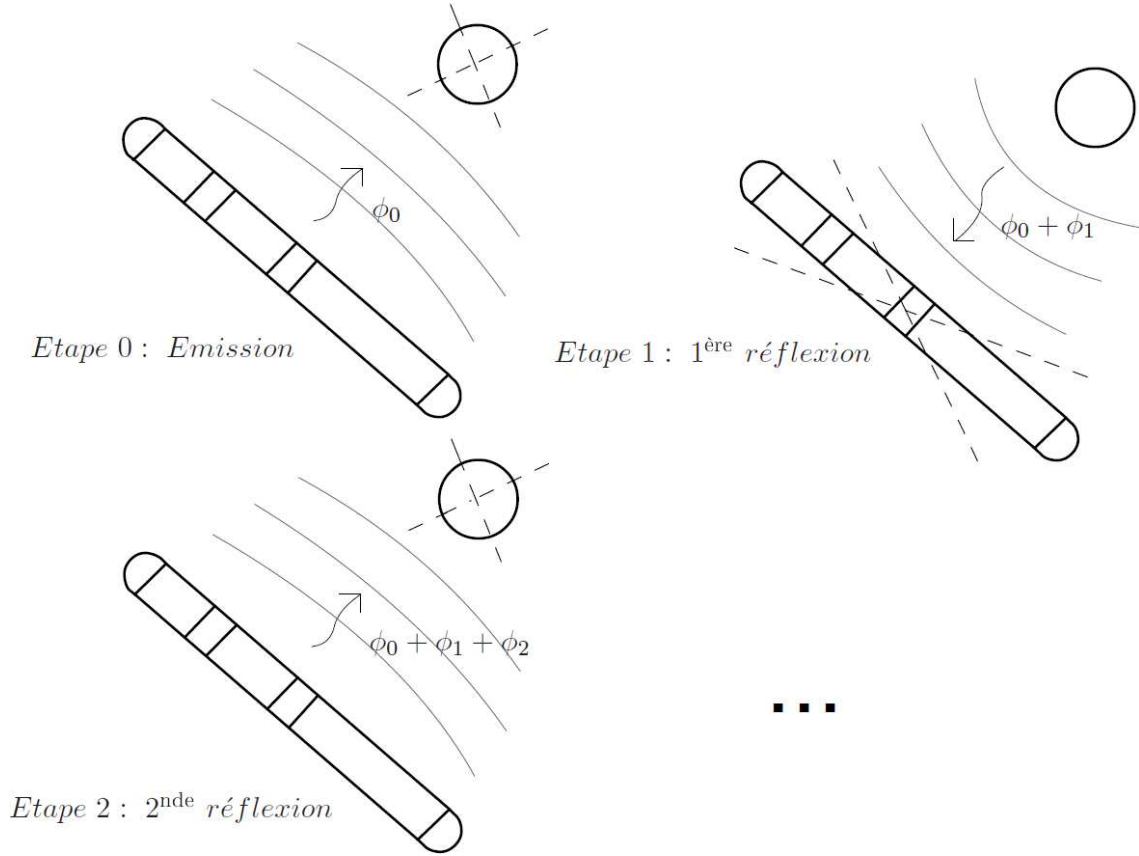


FIGURE 6.2 – Un schéma illustrant le principe de la méthode des réflexions. (En haut à gauche) Lors de l'étape initiale le capteur isolé émet un potentiel ϕ_0 . (En haut à droite) Lors de la seconde étape l'objet sans le capteur réfléchit le potentiel ϕ_0 en y ajoutant la réponse ϕ_1 . Puis lors de la troisième étape, le capteur considéré une nouvelle fois comme seul réfléchit le potentiel $\phi_0 + \phi_1$ en y ajoutant ϕ_2 . Le processus peut être répété à l'infini.

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{I}_{\alpha=1,2,\dots,m}. \quad (6.8)$$

A la seconde étape, le capteur est retiré de la scène, ne restent que l'objet et le potentiel ϕ_0 qui lui est incident. L'objet ajoute lors de cette étape un potentiel ϕ_1 qui réalise sa réponse. On résout alors une nouvelle équation de Laplace :

$$\Delta(\phi_0 + \phi_1) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_o. \quad (6.9)$$

Ce qui du fait de (6.6) se réduit à :

$$\Delta \phi_1 = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_o. \quad (6.10)$$

Les conditions aux bords sur l'objet deviennent :

$$\gamma \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial n} + \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) (\mathbf{x}_-) = \gamma_k \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial n} + \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) (\mathbf{x}_+), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}_{k=1,\dots,p}. \quad (6.11)$$

Ce qui est équivalent à avoir :

$$\gamma \frac{\partial \phi_1}{\partial n}(\mathbf{x}_-) - \gamma_k \frac{\partial \phi_1}{\partial n}(\mathbf{x}_+) = (\gamma_k - \gamma) \frac{\partial \phi_0}{\partial n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}_{k=1,\dots,p}, \quad (6.12)$$

et :

$$\phi_1(\mathbf{x}_-) - \phi_1(\mathbf{x}_+) = \phi_0(\mathbf{x}_-) - \phi_0(\mathbf{x}_+) = 0. \quad (6.13)$$

Pour la troisième étape, où l'onde incidente sur le capteur est identifiée à $\phi_0 + \phi_1$, on a à résoudre l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_o. \quad (6.14)$$

Ce qui se réduit compte tenu de (6.6) et (6.10) à :

$$\Delta \phi_2 = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_o. \quad (6.15)$$

Les conditions sur le capteur deviennent alors :

$$(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2)(\mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial e_{i=0,1,\dots,m}, \quad (6.16)$$

ce qui est équivalent à :

$$\phi_2(\mathbf{x}) = -\phi_1(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial e_{i=0,1,\dots,m}, \quad (6.17)$$

et :

$$\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial n} + \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \right)(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{I}_{\alpha=1,2,\dots,m}. \quad (6.18)$$

Ce qui est équivalent, compte tenu de (6.8), à :

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial n}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \phi_1}{\partial n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{I}_{\alpha=1,2,\dots,m}. \quad (6.19)$$

Et ainsi de suite pour les autres étapes...

Le principe de cette méthode itérative est résumé dans la figure 6.2. Le développement perturbatif en série a en fait un sens physique. Chacun des ϕ_i représente la réponse à la somme $\phi_0 + \phi_1 + \dots + \phi_{i-1}$, dont chacun des termes est le potentiel qui a été alternativement reflété par le capteur ou l'objet du fait des conditions limites à la surface de ces derniers, quand l'indice i augmente (fig. 6.2). C'est précisément l'interprétation du développement qui donne le nom à la méthode. Nous retrouvons naturellement dans cette interprétation l'atténuation en $1/r^s$ de l'amplitude des signaux réfléchis à chaque passage entre le capteur $\mathcal{B}$ et l'objet $\mathcal{O}$, où s dépend de la taille de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{O}$. Plus précisément, si nous définissons le rapport $|\phi_{i+1}/\phi_i|$ comme le facteur d'atténuation introduit par le i -ème reflet et mesuré en certains points intermédiaires localisés entre le capteur et l'objet, nous voyons que ce facteur est de l'ordre de $(a/r)^3$ si i est impair (renvoyé par l'objet) et de l'ordre de R/r si i est pair (renvoyé par le capteur). Finalement, remarquons que ces reflets successifs ont en fait un sens physique, puisque durant de très courtes durée, la vitesse du signal ne peut pas être considérée comme infinie et que l'équation de Laplace se transforme en équation de propagation. Ainsi, dans des temps très courts, les reflets successifs existent bien, mais les ondes vont très rapidement interférer de manière constructive et destructive pour ne laisser au final que la solution stationnaire ϕ . Nous pouvons ajouter en remarque

que pour le sens acoustique actif, ou pour l'écho-location, les solutions transitoires ont une durée de vie plus longue. Qui plus est, dans ce cas de figure, le facteur d'atténuation peut être diminué d'un ordre de grandeur puisqu'un monopôle est concevable et réalisable en acoustique (et en optique) alors qu'en électrostatique (ou dans le régime RQS), les objets polarisés étant électriquement neutres ne peuvent engendrer que des dipôles à l'ordre dominant. Finalement, en injectant le développement en série du potentiel total (6.5) dans l'expression des densités de courant total $\mathbf{j}$, chaque reflet contribue individuellement au courant total I de la manière suivante :

$$I \simeq I^{(0)} + I^{(1)} + I^{(2)} + \dots, \quad (6.20)$$

où chaque nouvelle contribution est définie pour : $k = 0, 1, 2, \dots, n$, et $i = 0, 1, 2, \dots$ par :

$$I_k^{(i)} = \int_{e_k} \gamma \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds. \quad (6.21)$$

6.3 Adaptation de la formulation intégrale aux nouvelles conditions limites : point de vue du capteur.

Pour toutes les étapes où le capteur est pris seul, i.e. $i = 0, 2, 4, \dots$, nous recourons à la formulation intégrale de Green qui a l'avantage de gérer des géométries complexes. Ainsi reconsidérons (2.62), dans laquelle on force les conditions limites relatives aux deux sous-problèmes de Laplace aux étapes 0 et 2 (fig. 6.2) et que l'on développe par rapport aux petites quantités caractéristiques de la géométrie du capteur. Il vient :

$$2\pi\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^m \left[\int_{\partial\mathcal{I}_\beta} \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n} \frac{1}{r} - \phi_i \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right) ds \right] + \sum_{\beta=0}^m \left[\int_{\partial\mathcal{E}_\beta} \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial n} \frac{1}{r} - \phi_i \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right) ds \right]. \quad (6.22)$$

En particulier pour les 2 reflets qui nous intéressent, apparaissant aux étapes 0 et 2, nous avons successivement $\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{B}$:

$$2\pi\phi_0(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=0}^m \left[\int_{\partial\mathcal{E}_\beta} \frac{\partial\phi_0}{\partial n} \frac{ds}{r} - \int_{\partial\mathcal{E}_\beta} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} ds U_\beta \right] - \sum_{\beta=1}^m \left[\int_{\partial\mathcal{I}_\beta} \phi_0 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} ds \right], \quad (6.23)$$

puis :

$$2\pi\phi_1(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^m \left[\int_{\partial\mathcal{I}_\beta} \frac{\partial\phi_1}{\partial n} \frac{ds}{r} + \int_{\partial\mathcal{I}_\beta} \phi_2 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} ds \right] - \sum_{\beta=0}^m \left[\int_{\partial\mathcal{E}_\beta} \frac{\partial\phi_2}{\partial n} \frac{ds}{r} + \int_{\partial\mathcal{E}_\beta} \phi_1 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} ds \right]. \quad (6.24)$$

6.4 Calibration

Le courant mesuré sur le capteur à l'étape 0 intervenant dans (6.23) peut être obtenu par un calcul numérique *hors ligne* en utilisant un simulateur numérique type BEM. Une fois le capteur discrétisé en éléments finis, l'expression (6.23) revêt la forme d'un simple système algébrique, comme nous l'avons vu au chapitre II (2.70) :

$$A \cdot I + B \cdot \Phi = 0, \quad (6.25)$$

où I et Φ sont les vecteurs courant et potentiel évalués sur les éléments d'un maillage numérique du capteur et où A et B sont des matrices qui encodent la géométrie du capteur.

En partitionnant la surface du capteur en 2 ensembles : les isolants et les conducteurs, on peut détailler le système précédent pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} A_{c,c} & A_{c,i} \\ A_{i,c} & A_{i,i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_c^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{c,c} & B_{c,i} \\ B_{i,c} & B_{i,i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Phi_c^{(0)} \\ \Phi_i^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n_c} \\ 0_{n_i} \end{pmatrix}, \quad (6.26)$$

où $I_c^{(0)}$, $\Phi_c^{(0)}$ et $\Phi_i^{(0)}$ sont respectivement les vecteurs des courants sur les conducteurs, des potentiels sur les conducteurs et potentiels sur les isolants. Comme en réalité nous mesurons $n+1$ courants pris sur les $n+1$ électrodes du capteur et que nous imposons $m+1$ tensions sur les groupes ε_α d'électrodes, nous introduisons des opérateurs de projection (notés P) tels que :

$$\Phi_c^{(0)} = P_{n_c, m+1} \cdot U, \quad I^{(0)} = P_{n_c, n+1}^T \cdot I_c^{(0)}, \quad (6.27)$$

où $P_{n_c, m+1}$ distribue le vecteur des $m+1$ tensions U aux n_c éléments composant le maillage des conducteurs. Quant à l'opérateur $P_{n_c, n+1}^T$, il réalise la somme des courants mesurés sur les mêmes n_c éléments pour produire les $n+1$ mesures indépendantes de courants prélevées sur les électrodes e_i .

Pour ne conserver que les inconnues sur les conducteurs, nous pouvons nous servir de la seconde ligne de l'équation (6.26) et réinjecter les expressions des grandeurs courant et potentiel pris sur les isolants dans la première ligne de (6.26) pour obtenir :

$$\tilde{A}_{c,c} \cdot I_c^{(0)} + \tilde{B}_{c,c} \cdot \Phi_c^{(0)} = 0_c, \quad (6.28)$$

où $\tilde{A}_{c,c} = A_{c,c} - B_{c,i} \cdot B_{i,i}^{-1} \cdot A_{i,c}$ et $\tilde{B}_{c,c} = B_{c,c} - B_{c,i} \cdot B_{i,i}^{-1} \cdot B_{i,c}$ sont à présent deux matrices carrées. Utilisant les deux opérateurs de projections définis dans (6.27), la précédente égalité peut se réécrire plus simplement :

$$I^{(0)} = C^{(0)} \cdot U, \quad (6.29)$$

où l'on a introduit la matrice de conductance $C^{(0)}$ de dimensions $(n+1) \times (m+1)$ définie comme la limite d'une grandeur numérique :

$$C^{(0)} = \lim_{(n_c, n_i) \rightarrow \infty} -P_{n_c, n+1}^T \cdot \tilde{A}_{c,c} \cdot \tilde{B}_{c,c} \cdot P_{n_c, m+1} \quad (6.30)$$

Cette matrice, dite "matrice de conductance à vide" ou "sans objet", peut être obtenue *hors ligne* en mesurant directement les courants sur les $n+1$ électrodes, alors que l'on impose les $m+1$ tensions via le vecteur U sur les groupes d'électrodes ε_α .

Nous pouvons également, si nous le désirons, obtenir les $m+1$ courants mesurés sur les groupes d'électrodes en sommant les courants prélevés sur les électrodes e_i appartenant à un même groupe ε_α . Pour cela, on peut multiplier à gauche le vecteur courant à vide $I^{(0)}$ par l'opérateur $P_+ = P_{n+1, m+1}^T$:

$$\bar{I}^{(0)} = P_+ \cdot I^{(0)}, \quad (6.31)$$

ce qui revient alors à considérer une matrice de conductance réduite de dimension $(m+1) \times (m+1)$. A titre d'exemple, nous avons calculé la matrice de conductance réduite $\overline{C}^{(0)}$ pour le capteur défini à la figure 6.1 :

$$\overline{C}^{(0)} \simeq \frac{\gamma}{100} \begin{pmatrix} 7.6534 & -3.1370 & -2.3053 & -2.1829 \\ -3.1370 & 8.3933 & -3.2027 & -2.0804 \\ -2.3053 & -3.2027 & 7.8032 & -2.3190 \\ -2.1829 & -2.0804 & -2.3190 & 6.6052 \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Enfin, on peut préciser qu'à partir des mesures prélevées sur les ε_α , nous pouvons déduire assez simplement les mesures sur les e_i du fait d'une géométrie axi-symétrique du capteur, en introduisant l'opérateur de distribution D_+ , défini comme suit :

$$I^{(0)} = D_+ \cdot \overline{I}^{(0)} = D_+ \cdot P_+ \cdot I^{(0)}, \quad (6.33)$$

Où D_+ est une matrice de dimensions $(n+1) \times (m+1)$, avec pour chacun de ses éléments : $D_{+i\alpha} = I_i^{(0)} / \overline{I}_\alpha^{(0)}$ si $e_i \subset \varepsilon_\alpha$ et $D_{+i\alpha} = 0$ sinon. Ici, du fait de l'axi-symétrie du capteur, on peut raisonnablement considérer que $D_{+i\alpha} = A_i / A_\alpha$ où A_i et A_α sont les surfaces de l'électrode e_i et du groupe ε_α dont fait partie la dite électrode.

6.5 Expression de la première émission et des deux premiers reflets.

6.5.1 Première émission du capteur.

Commençons par donner une expression analytique du potentiel ϕ_0 émis en premier lieu par le capteur. Pour cela, il nous suffit de procéder à une réduction de l'expression définissant cette première émission (6.23). Reprenant les notations de la figure 6.1, on définit les relations qui tirent profit de la géométrie axi-symétrique du capteur :

$$\int_{\partial\varepsilon_\alpha} ds = \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} dC_X \right) dX, \quad (6.34)$$

$$\int_{\partial\mathcal{I}_\alpha} ds = \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\alpha}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} dC_X \right) dX,$$

où $\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha} = [X_\alpha - (l_{\varepsilon_\alpha}/2), X_\alpha + (l_{\varepsilon_\alpha}/2)]$, $\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\alpha} = [X_\alpha - (l_{\mathcal{I}_\alpha}/2), X_\alpha + (l_{\mathcal{I}_\alpha}/2)]$, $dC_X = R d\psi$ avec ψ l'angle azimutal du capteur dans les coordonnées cylindriques : $(x_1, x_2, x_3) = (X, \rho c\psi, \rho s\psi)$.

Réécrivons plus symboliquement l'expression 6.23 sur laquelle nous appliquons notre réduction : $4\pi\phi_0(\mathbf{y}) = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$. Nous avons pour la première intégrale :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 = & \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial\phi_0}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + \frac{x'_i x_i}{r^3} \right) dC_X \right) dX + \\ & \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial\phi_0}{\partial n} \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{\delta_{ij}}{r^3} + 3\frac{x_i x_j}{r^5} \right) x'_i x'_j \right) dC_X \right) dX, \end{aligned} \quad (6.35)$$

où (x_1, x_2, x_3) et (x'_1, x'_2, x'_3) sont respectivement les coordonnées de $\mathbf{y} - \mathbf{x}_\perp(X) = \mathbf{r}$ et de $\mathbf{x} - \mathbf{x}_\perp(X)$ dans le repère attaché à la section $\mathcal{C}_X$ de centre $\mathbf{x}_\perp(X)$, avec $\mathbf{x}_\perp(X)$ la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ sur l'axe du capteur. Une intégration sur ces sections donne d'abord :

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \left(\frac{1}{r} l^{(0)} + l_i^{(1)} \frac{x_i}{r^3} \right) dX + \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \frac{1}{2} \left(-\frac{\delta_{i,j}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) l_{i,j}^{(2)} dX, \quad (6.36)$$

où l'on a introduit, pour simplifier l'écriture, les termes suivants :

$$l^{(0)} = \int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} d\mathcal{C}_X, \quad l_i^{(1)} = \int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} x'_i d\mathcal{C}_X, \quad l_{i,j}^{(2)} = \int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} x'_i x'_j d\mathcal{C}_X. \quad (6.37)$$

Au facteur γ près, $l^{(0)}$ représente la densité de courant par unité de longueur qui rentre dans l'électrode ε_α , en l'absence d'objet. Dans la suite, cette densité de courant linéique est notée $j_\alpha^{(0)}$ et vérifie :

$$\int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} j_\alpha^{(0)} dX = \bar{I}_\alpha^{(0)}. \quad (6.38)$$

Compte tenu de la géométrie axi-symétrique, du capteur et de son excitation à vide, la densité de courant est constante suivant une section $\mathcal{C}_X$ et ne dépend que de la variable X , ce qui nous autorise à sortir le terme $\partial \phi_0 / \partial n$ des intégrales (6.37), et à simplifier $\mathcal{J}_1$ selon :

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \left(\frac{1}{r} m^{(0)} + m_i^{(1)} \frac{x_i}{r^3} \right) dX + \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \frac{1}{2} \left(-\frac{\delta_{i,j}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) m_{i,j}^{(2)} dX, \quad (6.39)$$

où nous avons introduit les nouvelles variables définissant les moments multipolaires géométriques des sections $\mathcal{C}_X$:

$$m^{(0)} = \int_{\mathcal{C}_X} d\mathcal{C}_X = 2\pi R, \quad m_i^{(1)} = \int_{\mathcal{C}_X} x'_i d\mathcal{C}_X = O(R^2), \quad m_{i,j}^{(2)} = \int_{\mathcal{C}_X} x'_i x'_j d\mathcal{C}_X = O(R^3). \quad (6.40)$$

Ce qui apparaît à la lecture de l'expression de ces moments est que le moment d'ordre 1 est nul compte tenu de la géométrie axi-symétrique du capteur. Dès lors, $\mathcal{J}_1$ se simplifie en :

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \frac{j_\alpha^{(0)}}{\gamma} \left(\frac{1}{r} + O\left(\frac{R^3}{r^3}\right) \right) dX. \quad (6.41)$$

En réappliquant de manière similaire une expansion multipolaire suivant la direction X cette fois-ci, au terme dominant sous l'intégrale précédente, nous obtenons, en écrivant $r_\alpha = |\mathbf{y} - \mathbf{x}_{c\alpha}|$ et en notant x_1 la projection de $\mathbf{y} - \mathbf{x}_{c\alpha}$ sur l'axe du capteur :

$$\sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \frac{j_\alpha^{(0)}}{\gamma} \frac{1}{r(X)} dX = \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_\alpha}} \frac{j_\alpha^{(0)}}{\gamma} \left(\frac{1}{r_\alpha} + \frac{x_1}{r_\alpha^3} (X - X_\alpha) \right) dX. \quad (6.42)$$

Et finalement, en vertu de (6.38) :

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{\alpha=0}^m \frac{\bar{I}_\alpha^{(0)}}{\gamma r_\alpha} \left(1 + O\left(\frac{l_{\varepsilon_\alpha}^2}{r_\alpha^2}\right) \right). \quad (6.43)$$

En tirant profit encore de la géométrie axi-symétrique du capteur, nous pouvons de même aboutir à des expressions réduites pour $\mathcal{J}_2$ et $\mathcal{J}_3$. Rappelons leurs expressions :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2 &= \sum_{\alpha=0}^m U_{\alpha} \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_{\alpha}}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} d\mathcal{C}_X \right) dX, \\ \mathcal{J}_3 &= \sum_{\alpha=1}^m \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\alpha}}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \phi_0 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} d\mathcal{C}_X \right) dX.\end{aligned}\tag{6.44}$$

Si nous développons de la même manière ces dernières expressions, en y faisant apparaître des moments multipolaires, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2 &= \sum_{\alpha=0}^m U_{\alpha} \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_{\alpha}}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) d\mathcal{C}_X \right) dX + \sum_{\alpha=0}^m U_{\alpha} \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_{\alpha}}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{x'_i x_i}{r^3} \right) d\mathcal{C}_X \right) dX + \\ &\quad \sum_{\alpha=0}^m U_{\alpha} \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_{\alpha}}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial}{\partial n} \left(\left(-\frac{\delta_{i,j}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \frac{x'_i x'_j}{2} \right) d\mathcal{C}_X \right) dX, \\ \mathcal{J}_3 &= \sum_{\alpha=1}^m \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\alpha}}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} + \frac{x'_i x_i}{r^3} \right) d\mathcal{C}_X \right) dX + \\ &\quad \sum_{\alpha=1}^m \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\alpha}}} \left(\int_{\mathcal{C}_X} \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\left(-\frac{\delta_{i,j}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \frac{x'_i x'_j}{2} \right) d\mathcal{C}_X \right) dX,\end{aligned}\tag{6.45}$$

où (x_1, x_2, x_3) et (x'_1, x'_2, x'_3) sont respectivement les coordonnées de $\mathbf{y} - \mathbf{x}_{\perp}(X) = \mathbf{r}$ et de $\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\perp}(X) = \mathbf{r}'$ dans le repère attaché à la section $\mathcal{C}_X$ de centre $\mathbf{x}_{\perp}(X)$. En introduisant de nouvelles variables n définissant les moments multipolaires des sections, nous pouvons réécrire d'abord $\mathcal{J}_2$ comme :

$$\mathcal{J}_2 = \sum_{\alpha=0}^m U_{\alpha} \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_{\alpha}}} \left(n_i^{(1)} \frac{x_i}{r^3} \right) dX + \sum_{\alpha=0}^m U_{\alpha} \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_{\alpha}}} \left(\frac{1}{2} n_{i,j}^{(2)} \left(-\frac{\delta_{i,j}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \right) dX.\tag{6.46}$$

Ces nouveaux moments multipolaires s'écrivant :

$$n_i^{(1)}(X) = \int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial x'_i}{\partial n} d\mathcal{C}_X = O(R), \quad n_{i,j}^{(2)}(X) = \int_{\mathcal{C}_X} \frac{\partial x'_i x'_j}{\partial n} d\mathcal{C}_X = O(R^2).\tag{6.47}$$

De la même manière pour $\mathcal{J}_3$:

$$\mathcal{J}_3 = \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\alpha}}} \phi_0 \left(n_i^{(1)} \frac{x_i}{r^3} \right) dX + \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_{\alpha}}} \phi_0 \left(\frac{1}{2} n_{i,j}^{(2)} \left(-\frac{\delta_{i,j}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \right) dX.\tag{6.48}$$

Enfin, comme pour $\mathcal{J}_1$, du fait de la géométrie axi-symétrique du capteur, les moments d'ordre 1 disparaissent, ce qui nous donne pour $\mathcal{J}_2$:

$$\mathcal{J}_2 = \sum_{\alpha=0}^m U_{\alpha} \int_{\mathcal{L}_{\varepsilon_{\alpha}}} \left(\frac{1}{2} n_{i,j}^{(2)} \left(-\frac{\delta_{i,j}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \right) dX = \sum_{\alpha=0}^m O \left(U_{\alpha} \frac{R^2 l_{\varepsilon_{\alpha}}}{r_{\alpha}^3} \right).\tag{6.49}$$

Définissant les bornes supérieure et inférieure en tensions comme suit : $U_{\bar{\alpha}} = \sup(|U_{\alpha-1}|, |U_{\alpha}|)$ et $U_{\underline{\alpha}} = \inf(|U_{\alpha-1}|, |U_{\alpha}|)$, on peut par continuité du potentiel le long du capteur écrire : $\forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{I}_{\alpha} : U_{\underline{\alpha}} \leq |\phi_0(\mathbf{x})| \leq U_{\bar{\alpha}}$ et donc $\mathcal{J}_3$ peut s'écrire :

$$\mathcal{J}_3 = \sum_{\alpha=0}^m \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\alpha}} \phi_0 \left(\frac{1}{2} n_{i,j}^{(2)} \left(-\frac{\delta_{i,j}}{r^3} + 3 \frac{x_i x_j}{r^5} \right) \right) dX = \sum_{\alpha=1}^m O \left(U_{\bar{\alpha}} \frac{R^2 l_{\mathcal{I}_\alpha}}{r_\alpha^3} \right). \quad (6.50)$$

En posant $l_{\mathcal{I}_0} = 0$, on peut réécrire (6.23) sous la forme réduite :

$$4\pi\phi_0(\mathbf{y}) = \sum_{\alpha=0}^m \frac{\bar{I}_\alpha^{(0)}}{\gamma r_\alpha} \left(1 + O \left(\frac{l_{\varepsilon_\alpha}^2}{r_\alpha^2} \right) \right) + \sum_{\alpha=0}^m \left(O \left(U_\alpha \frac{R^2 l_{\varepsilon_\alpha}}{r_\alpha^3} \right) + O \left(U_{\bar{\alpha}} \frac{R^2 l_{\mathcal{I}_\alpha}}{r_\alpha^3} \right) \right). \quad (6.51)$$

Terminons par donner une grandeur des potentiels pour un peu plus réduire la dernière expression. Nous savons que la résistance maximale au passage de courant entre les électrodes est celle relative au passage de courant entre une électrode et elle même. Le théorème de Gauss nous renseigne sur la grandeur des potentiels au regard de la dimension R des électrodes, du courant et de la conductivité. En effet, le dit théorème stipule que dans l'approximation de la géométrie poly-sphérique, nous avons : $ER^2 = \bar{I}_\alpha^{(0)}/\gamma$, où E est la norme du champ normal à l'électrode. Celui-ci étant de l'ordre de U_α/R , on voit tout de suite que la résistance maximale est le rapport $U_\alpha/\bar{I}_\alpha^{(0)}$, i.e. $1/(\gamma R)$. Aussi, comme les potentiels U_α sont reliés aux courants de toutes les électrodes par : $U_\alpha = \sum_{\beta=0}^{\beta=m} \bar{R}_{\alpha\beta}^{(0)} \bar{I}_\beta^{(0)}$: où $\bar{R}_{\alpha\beta}^{(0)}$ est la résistance maximale entre les électrodes α et β , ceci nous conduit à écrire :

$$4\pi\phi_0(\mathbf{y}) = \sum_{\alpha=0}^m \frac{\bar{I}_\alpha^{(0)}}{\gamma r_\alpha} \left(1 + O \left(\frac{l_{\varepsilon_\alpha}^2}{r_\alpha^2} \right) + \sum_{\beta=0}^m O \left(\frac{R l_{\varepsilon_\beta}}{r_\beta^2} \right) + \sum_{\beta=0}^m O \left(\frac{R l_{\mathcal{I}_\beta}}{r_\beta^2} \right) \right). \quad (6.52)$$

Et comme $\sum_{\alpha=0}^m l_{\varepsilon_\alpha} + \sum_{\beta=1}^m l_{\mathcal{I}_\beta} = l = O(r_\alpha) = O(r_\beta) = O(r)$, on obtient finalement comme réduction principale de (6.23) :

$$\phi_0(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{\alpha=0}^m \frac{\bar{I}_\alpha^{(0)}}{r_\alpha} + O \left(\frac{R}{r} \right). \quad (6.53)$$

Au premier ordre, le potentiel généré par le capteur lors de sa première émission est celui que produiraient des charges ponctuelles localisées aux centres des groupes d'électrodes et d'intensité $\epsilon \bar{I}_\alpha^{(0)}/\gamma$.

Nous déduisons le champ $\mathbf{E}_0$, qui s'identifie au champ appliqué $\mathbf{E}_a$ par un capteur poly-sphérique (voir chapitre V), au centre $\mathbf{y}_0$ de l'objet :

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{y}_0) = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{\alpha=0}^m \frac{\bar{I}_\alpha^{(0)} \mathbf{r}_\alpha}{|\mathbf{r}_\alpha|^3}. \quad (6.54)$$

6.5.2 Premier reflet de l'objet.

Nous nous plaçons maintenant dans la seconde étape, correspondant à la réflexion par l'objet de la première émission ϕ_0 du capteur. La réflexion par l'objet donne naissance à un second potentiel ϕ_1 , propre à l'objet, qui s'ajoute à ϕ_0 . Le second potentiel détermine la réponse de l'objet au champ incident, qui dépend principalement de la forme, de la conductivité de l'objet et de la variation du champ à vide en son sein (voir chapitre IV).

Pour une sphère de conductivité arbitraire γ_1 soumise à un champ $\mathbf{E}_0 = -\nabla\phi_0$ constant en son sein, on peut recourir au modèle simplifié de Rasnow 1.1, dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire, avec l'admittance $\tilde{\gamma}$ qui se réduit à sa partie réelle, c'est à dire à la conductivité, lorsque l'on néglige tout effet capacitif. Le modèle de Rasnow de la perturbation de la sphère dans un milieu conducteur et non capacitif correspond à la polarisation au premier ordre de la sphère, qui est caractérisée par le moment dipolaire $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0, \quad (6.55)$$

où $\mathbf{P}$ est le tenseur de polarisabilité de la sphère que l'on identifie à la polarisabilité α définie de manière générale dans le chapitre IV et qui s'écrit :

$$\mathbf{P} = c_f a^3 \boldsymbol{\delta}^{(2)}, \quad (6.56)$$

où $\boldsymbol{\delta}^{(2)}$ est le tenseur identité et $c_f = (\gamma_1 - \gamma)/(2\gamma - \gamma_1)$, le facteur de contraste. Suivant ces nouvelles notations, la réponse ϕ_1 s'écrit :

$$\phi_1 = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (6.57)$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur position d'un point extérieur à la sphère, dont le point origine coïncide avec le centre de la sphère.

A cette réponse ϕ_1 est associé son champ $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1$ comme pour la première émission issue du capteur ϕ_0 . Ce nouveau champ conduit tout comme $\mathbf{E}_0$ à un courant mesurable sur le capteur, à la seule différence que l'on ne peut le mesurer que sur des sections de groupes d'électrodes. En effet, le champ $\mathbf{E}_1$, comme le champ $\mathbf{E}_0$ sur l'objet, conduit à une polarisation de chaque groupe d'électrodes, qui reste neutre globalement. Si l'on mesure un courant, ce sera donc sur une partie d'un groupe d'électrodes, d'où le fait que l'on doit sectoriser les groupes pour mesurer le courant correspondant au champ $\mathbf{E}_1$. Cherchons à présent à exprimer ce nouveau courant que l'on appelle $I^{(1)}$ sur les sections e_i des groupes d'électrodes. Nous adoptons les notations de la figure 6.3 représentant une scène donnant lieu à ce courant. Sur une section, on peut exprimer le courant $I^{(1)}$ de la manière suivante :

$$I_k^{(1)} = -\gamma \int_{\partial e_k} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds. \quad (6.58)$$

Considérons comme pour $\mathbf{E}_0$ que le champ $\mathbf{E}_1$ est constant au sein d'un groupe d'électrodes et a fortiori, au sein d'une section e_k . En conséquence, on peut sortir le champ de l'intégrale. Ecrivons aussi pour alléger l'écriture et reporter les calculs simples mais fastidieux, que l'on peut toujours trouver un réel $\bar{A}_k$ tel que : $\int_{\partial e_k} \mathbf{n} = \bar{A}_k \bar{\mathbf{n}}_k$, où $\bar{\mathbf{n}}_k$ est la normale de la section e_k , appliquée au centre de sa surface. Nous obtenons alors :

$$I_k^{(1)} = -\gamma \bar{A}_k \bar{\mathbf{n}}_k \cdot \nabla \phi_1. \quad (6.59)$$

Dans un système de coordonnées sphériques centré sur le centre de l'objet, on peut exprimer la dérivée $\partial h / \partial n$ de la manière suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \nabla h \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial h}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial h}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \right) \cdot \mathbf{n} \quad (6.60)$$

En choisissant d'orienter le vecteur $\mathbf{e}_3$ du repère cartésien $(\mathbf{y}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ suivant le moment dipolaire $\mathbf{p}$ et en posant $f = 1/r^2$, nous obtenons, en utilisant les notations de la figure 6.3 :

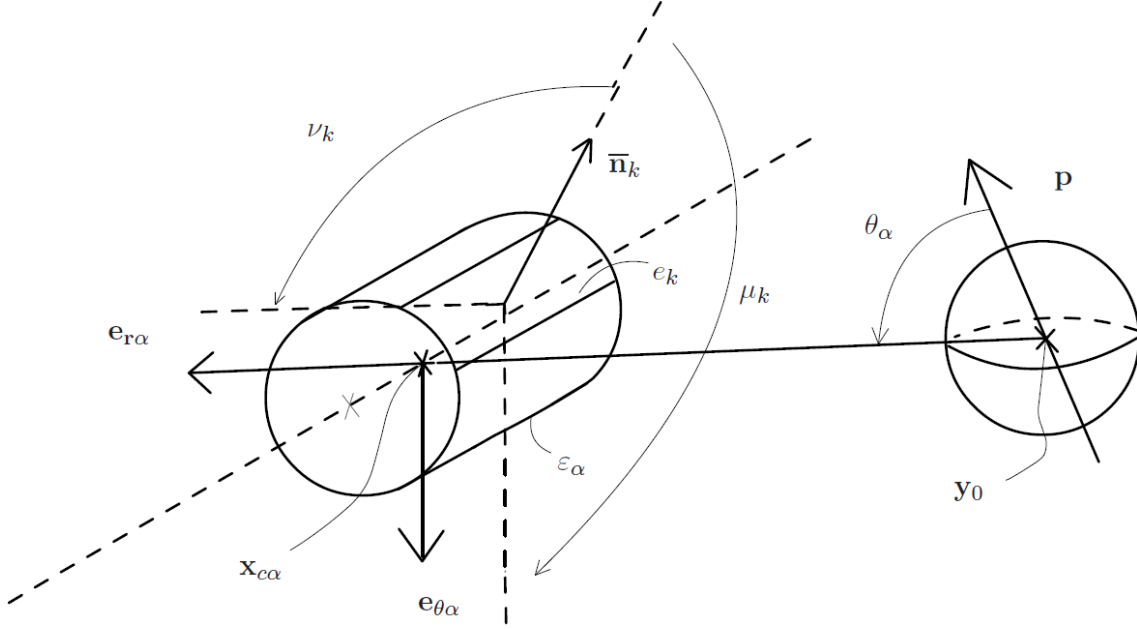


FIGURE 6.3 – Un schéma représentant une géométrie de capteur pour laquelle le courant $I^{(1)}$ peut être mesuré. On a représenté une section du capteur avec un anneau conducteur en perspective et le flux du champ $\mathbf{E}_1$ à travers les sections de l'anneau donnant lieu au courant $I^{(1)}$.

$$I_k^{(1)} = -\gamma \bar{A}_k p \left(c\theta_{\alpha(k)} \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_{r\alpha(k)} - s\theta_{\alpha(k)} \frac{f(r_{\alpha(k)})}{r_{\alpha(k)}} \mathbf{e}_{\theta\alpha(k)} \right) \cdot \bar{\mathbf{n}}_k. \quad (6.61)$$

Comme on a $c\theta_{\alpha(k)} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_{r\alpha(k)}$ et $s\theta_{\alpha(k)} = -\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_{\theta\alpha(k)}$, on peut écrire :

$$I_k^{(1)} = -\gamma \bar{A}_k \left(c\theta_{\alpha(k)} \frac{\partial f}{\partial r} (\mathbf{e}_{r\alpha(k)} \cdot \bar{\mathbf{n}}_k) (\mathbf{e}_{r\alpha(k)} \cdot \mathbf{p}) + \frac{f(r_{\alpha(k)})}{r_{\alpha(k)}} (\mathbf{e}_{\theta\alpha(k)} \cdot \bar{\mathbf{n}}_k) (\mathbf{e}_{\theta\alpha(k)} \cdot \mathbf{p}) \right). \quad (6.62)$$

En introduisant alors les notations $c\nu_k = \mathbf{e}_{r\alpha(k)} \cdot \bar{\mathbf{n}}_k$ et $c\mu_k = \mathbf{e}_{\theta\alpha(k)} \cdot \bar{\mathbf{n}}_k$, on obtient :

$$I_k^{(1)} = -\gamma \bar{A}_k \left(\frac{\partial f}{\partial r} c\nu_k \mathbf{e}_{r\alpha(k)} + \frac{f(r_{\alpha(k)})}{r_{\alpha(k)}} c\mu_k \mathbf{e}_{\theta\alpha(k)} \right) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0. \quad (6.63)$$

Enfin, en utilisant l'expression de $\mathbf{E}_0$ (6.54) et en orientant les vecteurs positions différemment, cette fois depuis le capteur vers l'objet, nous obtenons :

$$I_k^{(1)} = \sum_{\beta=0}^m \frac{\bar{A}_k}{4\pi r_{\alpha(k)}^3} (2c\nu_k \mathbf{e}_{r\alpha(k)} + c\mu_k \mathbf{e}_{\theta\alpha(k)}) \cdot \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r}_\beta}{|\mathbf{r}_\beta|^3} \bar{I}_\beta^{(0)}. \quad (6.64)$$

Plus synthétiquement, nous pouvons écrire enfin :

$$I^{(1)} = L \cdot \bar{I}^{(0)} = L \cdot \bar{C}^{(0)} \cdot U, \quad (6.65)$$

avec :

$$L_{k,\beta} = \frac{\bar{A}_k}{4\pi r_{\alpha(k)}^3} (2c\nu_k \mathbf{e}_{r\alpha(k)} + c\mu_k \mathbf{e}_{\theta\alpha(k)}) \cdot \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{r}_\beta}{|\mathbf{r}_\beta|^3}. \quad (6.66)$$

En partant de cette dernière expression, il nous semble utile de procéder à une subdivision en deux sous-modèles : le modèle axial (identifié à $I_{\text{ax}}^{(1)}$) et le modèle latéral (identifié à $I_{\text{lat}}^{(1)}$), respectivement associés aux flux de $\gamma \mathbf{E}_1$ entrant parallèlement et perpendiculairement à l'axe du capteur. Pour réaliser cette subdivision, nous pouvons décomposer le vecteur normal $\mathbf{n}$ en écrivant $\mathbf{n} = s\lambda \mathbf{e}_\rho + c\lambda \mathbf{e}_X = \mathbf{n}_\perp + \mathbf{n}_\parallel$, où nous avons introduit les coordonnées cylindriques (ρ, ψ, X) du capteur tel que $\mathbf{i}_c = \mathbf{e}_X$, et où $\lambda(X)$ est l'angle pris entre l'axe du capteur et l'axe orienté suivant le vecteur $\mathbf{n}$. Les deux sous-modèles de courants s'écrivent alors :

$$I_{\text{ax}}^{(1)} \simeq L_{\text{ax}} \cdot \bar{C}^{(0)} \cdot U, \quad I_{\text{lat}}^{(1)} \simeq L_{\text{lat}} \cdot \bar{C}^{(0)} \cdot U, \quad (6.67)$$

où nous avons introduit la matrice de réflexion axiale et la matrice de réflexion latérale, que nous écrivons en détails ici :

$$L_{\text{ax},k\beta} = \frac{-\bar{A}_{k\parallel}}{4\pi r_{\alpha(k)}^3} (2c\nu_{k\parallel} \mathbf{e}_{r\alpha(k)} + c\mu_{k\parallel} \mathbf{e}_{\theta\alpha(k)}) \cdot \mathbf{P} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_\beta}{r_\beta^3} \right), \quad (6.68)$$

et

$$L_{\text{lat},k\beta} = \frac{-\bar{A}_{k\perp}}{4\pi r_{\alpha(k)}^3} (2c\nu_{k\perp} \mathbf{e}_{r\alpha(k)} + c\mu_{k\perp} \mathbf{e}_{\theta\alpha(k)}) \cdot \mathbf{P} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_\beta}{r_\beta^3} \right), \quad (6.69)$$

où $c\nu_{k\perp} = \mathbf{e}_{r\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\perp}$, $c\mu_{k\perp} = \mathbf{e}_{\theta\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\perp}$, $c\nu_{k\parallel} = \mathbf{e}_{r\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\parallel}$, $c\mu_{k\parallel} = \mathbf{e}_{\theta\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{k\parallel}$, $\bar{A}_{k\parallel} \bar{\mathbf{n}}_{k\parallel} = \int_{e_k} c\lambda \mathbf{e}_X ds$ et $\bar{A}_{k\perp} \bar{\mathbf{n}}_{k\perp} = \int_{e_k} s\lambda \mathbf{e}_\rho ds$.

6.5.3 Expression du second reflet

Considérons à présent l'équation (6.24) qui exprime le second reflet renvoyé, par le capteur, du signal incident $\phi_0 + \phi_1$ lui-même réémis par l'objet. Nous allons effectuer un développement perturbatif de la formulation intégrale (6.24) par rapport aux petites quantités géométriques du capteur. Nous pouvons montrer compte tenu de la géométrie axi-symétrique du capteur, et de la petitesse des groupes d'électrodes vis à vis de leur éloignement que l'on peut simplifier (6.24). En effet, prenons le premier terme du second membre de la même équation. On a en écrivant $r = |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ et $\mathbf{x} \in \partial\epsilon_\alpha$:

$$\sum_{\beta=1} \int_{\partial\mathcal{I}_\beta} \frac{\partial\phi_1}{\partial n} \frac{1}{r} ds = \sum_{\beta=1} \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\beta}} \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_\perp) \cdot \int_{\mathcal{C}_{X'}} \frac{\mathbf{n}}{r} d\mathcal{C}_X dX' \left(1 + O\left(\frac{R}{r}\right) \right), \quad (6.70)$$

où X et X' sont les abscisses de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ selon $(O, \mathbf{i}_c)$. Posons alors $l_X = X' - X$ et $\xi_X = |R/l_X|$. Maintenant, en écrivant $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_\perp) + (\mathbf{x}'_\perp - \mathbf{x}_\perp) + (\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}) = \mathbf{d}' + l_X \mathbf{i}_c - \mathbf{d}$, et en prenant les coordonnées cylindriques $(\rho', \psi', X' - X)$ de $\mathbf{x}'$ dans un repère attaché au capteur, centré sur $\mathbf{x}_\perp$ et tel que $\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}' = R^2 c\psi'$:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(l_X^2 + 2R^2(1 - c\psi'))^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{|l_X|}}{(1 + 2\xi_X^2(1 - c\psi'))^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{|l_X|} (1 - \xi_X^2(1 - c\psi')) + O(\xi_X^4), \quad (6.71)$$

ce que l'on peut réécrire comme :

$$\sum_{\beta=1} \int_{\partial \mathcal{I}_\beta} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \frac{1}{r} ds = \sum_{\beta=1} \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\beta}} \frac{R \mathbf{E}_1}{|l_X|} \cdot \int_0^{2\pi} \mathbf{n} (1 - \xi_X^2 + \xi_X^2 c\psi' + O(\xi_X^4)) d\psi' dX'. \quad (6.72)$$

De plus, comme $\mathbf{n} = c\psi' \mathbf{j}_c + s\psi' \mathbf{k}_c$, on a :

$$\sum_{\beta=1} \int_{\mathcal{I}_\beta} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \frac{1}{r} ds = \sum_{\beta=1} \int_{\mathcal{L}_{\mathcal{I}_\beta}} \mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{0} + O(\xi_X^2)) dX' = \mathbf{0} + O(\xi_X^3). \quad (6.73)$$

On montre ainsi, qu'en vertu des hypothèses mentionnées plus haut que l'intégrale (6.70) n'a pas d'influence sur (6.24), excepté sur un voisinage très proche, lequel effet sera pris en compte plus tard par le terme d'ordre suivant de notre développement en perturbation. Considérant maintenant que les groupes d'électrodes sont suffisamment petits pour considérer que ϕ_1 ne varie pas sur leurs dimensions, on peut écrire $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}_{X_\alpha} \subset \varepsilon_\alpha$:

$$2\pi\phi_1(\mathbf{x}) = 2\pi\phi_1(\mathbf{x}_{c\alpha}) \left(1 + O\left(\frac{R}{r}\right) \right), \quad (6.74)$$

et :

$$\sum_{\beta=0}^m \int_{\partial \varepsilon_\beta} \phi_1 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} ds = \sum_{\beta=0}^m \phi_1(\mathbf{x}_{c\beta}) \int_{\partial \varepsilon_\beta} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} ds \left(1 + O\left(\frac{R}{r}\right) \right). \quad (6.75)$$

Ainsi pouvons nous à l'ordre dominant donner une approximation de (6.24) :

$$\begin{aligned} 2\pi(-\phi_1(\mathbf{x}_{c\alpha})) \simeq & \sum_{\beta=0}^m \left[\int_{\varepsilon_\beta} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \frac{1}{r} ds \right] - \sum_{\beta=0}^m \left[\int_{\varepsilon_\beta} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} (-\phi_1(\mathbf{x}_{c\beta})) ds \right] \\ & - \sum_{\beta=1}^m \int_{\mathcal{I}_\beta} \phi_2 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} ds, \end{aligned} \quad (6.76)$$

où nous reconnaissons maintenant une équation similaire à (6.23) qui exprime l'état électrique lors de la première émission du capteur. Il s'ensuit que le module de $I^{(2)}$ se déduit directement de celui de $I^{(0)}$ (6.23) en y remplaçant ϕ_0 par ϕ_2 et U_α par $-\phi_1(\mathbf{x}_{c\alpha})$. La conductance $\bar{C}^{(0)}$ apparaît donc suffisante au premier ordre pour calculer la réponse du capteur au potentiel ϕ_1 . De manière synthétique, nous pouvons écrire :

$$\bar{I}^{(2)} = -\bar{C}^{(0)} \cdot \Phi_1, \text{ avec } \Phi_1 = (\Phi_1(\mathbf{x}_{c0}), \Phi_1(\mathbf{x}_{c1}), \dots, \Phi_1(\mathbf{x}_{cm}))^T. \quad (6.77)$$

En reprenant maintenant l'expression explicite (6.57) de la perturbation ϕ_1 et en la réécrivant de la manière suivante :

$$\Phi_{1\alpha} = \frac{\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0}{|\mathbf{r}_\alpha|^3} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{\beta=0}^m \left(\frac{\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha|^3 |\mathbf{r}_\beta|^3} \right) \bar{I}_\beta^{(0)}, \quad (6.78)$$

on identifie l'existence d'une matrice K :

$$\Phi_1 = K \cdot \bar{I}^{(0)}, \quad (6.79)$$

où les éléments de K se détaillent comme suit :

$$K_{\alpha,\beta} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha|^3 |\mathbf{r}_\beta|^3}. \quad (6.80)$$

On appelle K , la matrice de réflexion axiale, car elle décrit la perturbation axiale des courants par l'objet. K n'est autre que le tenseur S participant à la perturbation en potentiels sur les groupes du capteur dans la prédiction du modèle poly-sphérique (5.34). Finalement, en utilisant les données initiales fournies par la calibration et les potentiels que l'on impose, on obtient :

$$\bar{I}^{(2)} = -\bar{C}^{(0)} \cdot K \cdot \bar{C}^{(0)} \cdot U. \quad (6.81)$$

Si nous voulons aller plus loin dans la prédiction de l'état électrique du capteur lors de sa réémission, nous devons prendre en compte cette fois les termes que nous avons négligés venant de l'effet du voisinage des groupes d'électrodes (6.73). En fait, nous devons tenir compte de l'effet polarisant du champ $\mathbf{E}_1$ sur les groupes d'électrodes et sur leur voisinage, conduisant à un champ induit mesurable sur les sections des groupes, ces derniers demeurant neutres, depuis leur polarisation du fait de l'application du champ $\mathbf{E}_1$ jusqu'à leur réponse exprimée par le champ induit. Revenons à présent sur l'équation exprimant la réémission du capteur (6.24) et donnons son approximation à l'ordre suivant. A cet ordre, ce n'est plus ϕ_1 mais $\mathbf{E}_1$ qui peut être considéré constant sur les dimensions des groupes ε_α . Il en sera de même du champ dépolarisant $\mathbf{E}_2$ qui représente la réponse des groupes ε_α à $\mathbf{E}_1$. Tenant compte de ces considérations, nous pouvons réécrire (6.24) :

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=\alpha-1}^{\alpha} \left[\int_{\partial\mathcal{I}_\beta} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{c\beta}) ds \right] \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{x}_{c\beta}) + \sum_{\beta=0}^m \left[\int_{\partial\varepsilon_\beta} \frac{\mathbf{n}}{r} ds \right] \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{x}_{c\beta}) \simeq \\ & \sum_{\beta=0}^m \left[\int_{\partial\varepsilon_\beta} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{c\beta}) ds + 2\pi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{c\beta})\delta_{\alpha,\beta} \right] \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_{c\beta}) + \sum_{\beta=\alpha-1}^{\alpha} \int_{\partial\mathcal{I}_\beta} \frac{\mathbf{n}}{r} ds \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_{c\beta}), \end{aligned} \quad (6.82)$$

dont nous pouvons donner une forme algébrique en écrivant :

$$\forall \alpha = 0, 1, \dots, m : \mathbf{E}_2(\mathbf{x}_{c\beta}) = \sum_{\beta=0}^m \mathbf{S}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_{c\beta}), \quad (6.83)$$

où $\mathbf{S}_{\alpha,\beta}$ est ici un tenseur d'ordre 2 modélisant la polarisation du capteur suite à l'excitation du champ $\mathbf{E}_1$ induit par l'objet. Suivant les hypothèses présidant au développement précédent et donnant la réémission du capteur à l'ordre dominant, les termes d'inter-influence entre les groupes d'électrodes sont négligeables devant leur influence sur eux-mêmes. On peut donc recourir à l'approximation suivante :

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x}_{c\beta}) \simeq \mathbf{S}_{\alpha,\alpha} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_{c\beta}). \quad (6.84)$$

Et, du fait du caractère axi-symétrique du capteur, les tenseurs $\mathbf{S}_{\alpha,\alpha}$ prennent la forme suivante :

$$\mathbf{S}_{\alpha,\alpha} = s_{\parallel\alpha}(\mathbf{i}_c \otimes \mathbf{i}_c) + s_{\perp\alpha}(\mathbf{j}_c \otimes \mathbf{j}_c) + s_{\perp\alpha}(\mathbf{k}_c \otimes \mathbf{k}_c), \quad (6.85)$$

où $s_{\parallel\alpha}$ et $s_{\perp\alpha}$ sont des valeurs réelles positives. Projetant $\mathbf{n}$ sur l'axe du capteur et sur un axe perpendiculaire à celui-ci, nous obtenons une contribution supplémentaire au

courant $\bar{I}^{(2)}$ venant du champ induit $\mathbf{E}_2$ dont nous venons de donner l'expression (6.81). Cette contribution supplémentaire s'écrit :

$$I_k^{(2)} = \gamma \int_{\partial e_k} (\mathbf{S}_{\alpha(k), \alpha(k)} \cdot \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} ds = \gamma \int_{\partial e_k} s_{\parallel \alpha(k)} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_{\parallel} ds + \gamma \int_{\partial e_k} s_{\perp \alpha(k)} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_{\perp} ds. \quad (6.86)$$

Suivant cette décomposition, nous voyons clairement la nature des contributions correctives aux courants précédemment établis. Notamment, l'intégrale de gauche est un terme correctif au courant axial $\bar{I}^{(2)}$ mais dont le poids relatif est négligeable, en atteste la bonne précision des résultats des courants du modèle poly-sphérique, assimilés ici aux courants $\bar{I}^{(2)}$ (voir chapitre V). En revanche, l'intégrale de droite exprime une correction en courant de nature latérale, et est du même ordre que le courant latéral établi $\bar{I}^{(1)}$. Il doit donc être pris en compte. Ainsi, le courant latéral total s'écrit :

$$I_{lat,k} = I_{lat,k}^{(1)} + I_{lat,k}^{(2)} = \gamma \mathbf{E}_1 \cdot \int_{\partial e_k} (1 + s_{\perp \alpha(k)}) \mathbf{n}_{\perp} ds = (1 + s_{\perp \alpha(k)}) I_{lat,k}^{(1)}. \quad (6.87)$$

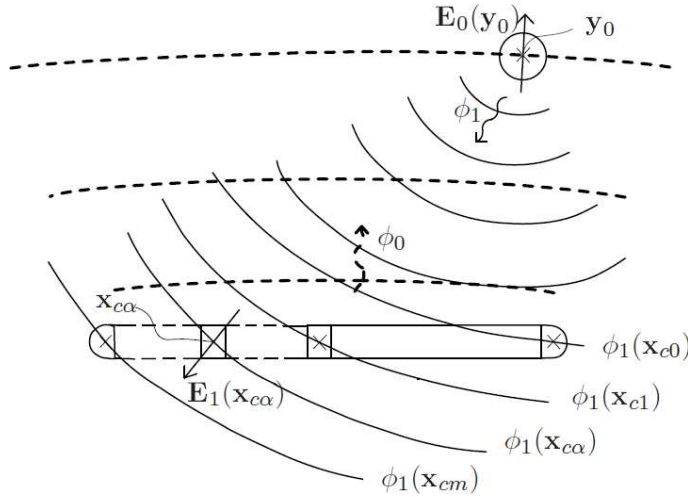


FIGURE 6.4 – Les deux composantes principales des courants de perturbation proviennent de la somme des reflats ϕ_1 et ϕ_2 . La première composante $I^{(1)}$ est due au flux direct du champ perturbatif $\mathbf{E}_1$ à travers les sections e_k de chaque groupe d'électrodes ε_α , tandis que la seconde, $I^{(2)}$ est produite par la réaction ou réponse du capteur vis-a-vis du potentiel de perturbation imposé $-\phi_1$ sur les groupes ε_α .

Enfin pour conclure cette section, en guise d'illustration de la méthode des réflexions, nous avons représenté sur le schéma 6.8 les deux premières étapes au cours desquelles les potentiels ϕ_i donnent naissance aux potentiels ϕ_{i+1} et champs réfléchis, ici par l'objet, sur tous les groupes d'électrodes ε_α , donnant naissance aux courants $I^{(i)}$ et $I^{(i+1)}$ dont nous avons donnés l'expression à l'ordre dominant (6.33, 6.65, 6.81).

6.6 Comparaison avec les valeurs numériques.

Nous terminons ce chapitre par la comparaison entre le modèle et un simulateur BEM pour les deux types de courants : les courants axiaux et les courants latéraux. On ajoute ici que dans notre méthode nous nous sommes arrêtés à la seconde réflexion, cela étant dû au fait que la dégénérescence des reflets croît rapidement avec le nombre des reflets. En effet, à chaque passage par le capteur, l'amplitude décroît comme R/r et à chaque passage par l'objet, l'amplitude décroît comme $(R/r)^3$, ce qui rend légitime de tronquer au deuxième passage par le capteur. Pour tester la fiabilité du modèle, nous avons choisi de le comparer avec un simulateur numérique du type BEM. Comme pour le modèle poly-sphérique, nous avons choisi une scène assez simple (fig. 6.5).

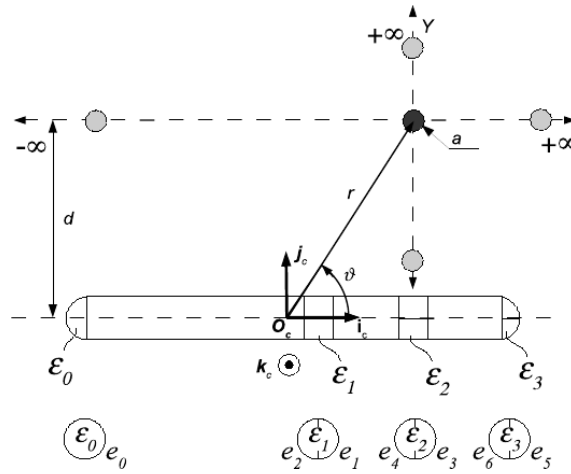


FIGURE 6.5 – Scène testant le modèle des courants. Le capteur suit une trajectoire rectiligne et passe à côté d'une sphère à différentes distances.

Nous avons alors comparé d'abord les courants numériques avec les courants analytiques de type axial, exprimés par le modèle comme suit :

$$I_{\text{ax}} = \bar{I}^{(0)} + \bar{I}^{(2)}. \quad (6.88)$$

Nous avons obtenu une très bonne correspondance (fig. 6.6). Ces courants sont les mêmes que ceux obtenus par le modèle poly-sphérique (voir chapitre V), à ceci-près que les pics sont cette fois bien séparés¹. Nous avons conservé la même scène et avons comparé cette fois les courants latéraux numériques avec les courants latéraux analytiques, exprimés par le modèle comme suit :

$$I_{\text{lat}} = (1 + S_{\perp}) \cdot I_{\text{lat}}^{(1)} = (1 + S_{\perp}) \cdot L_{\text{lat}} \cdot \bar{C}^{(0)} \cdot U. \quad (6.89)$$

Nous avons encore obtenu une très bonne correspondance (fig. 6.7).

1. Nous attirons ici l'attention du lecteur en lui précisant que nous avons testé le modèle sur un capteur quadru-polaire où les groupes d'électrodes réceptrices sont positionnés suffisamment loin du groupe émetteur (fig. 6.1), de manière à éviter ce que l'on a pu constater avec l'emploi du premier capteur quadru-polaire où tous les groupes sont équi-répartis sur le corps du capteur lors de l'utilisation du modèle PSM (voir chapitre V), à savoir l'existence de doubles pics provenant de l'addition de la perturbation du groupe émetteur avec la perturbation sur les groupes récepteurs (voir chapitre V).

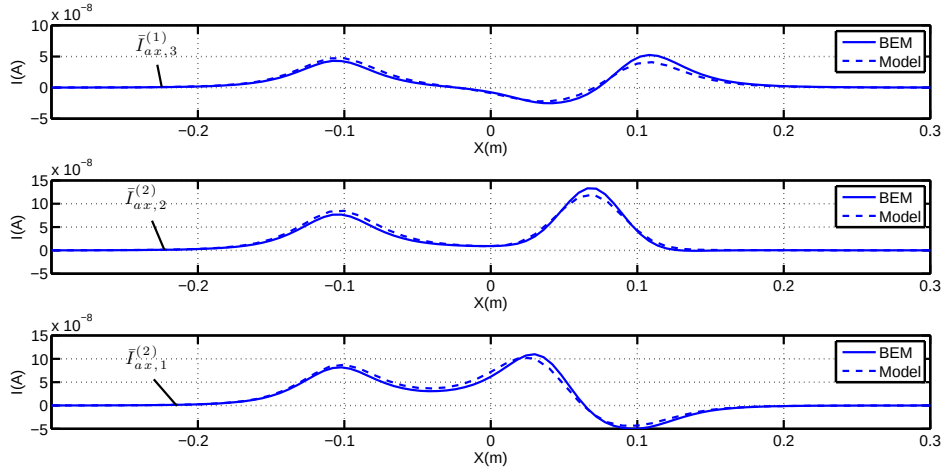


FIGURE 6.6 – Courant axiaux : comparaison entre le modèle et un simulateur BEM .

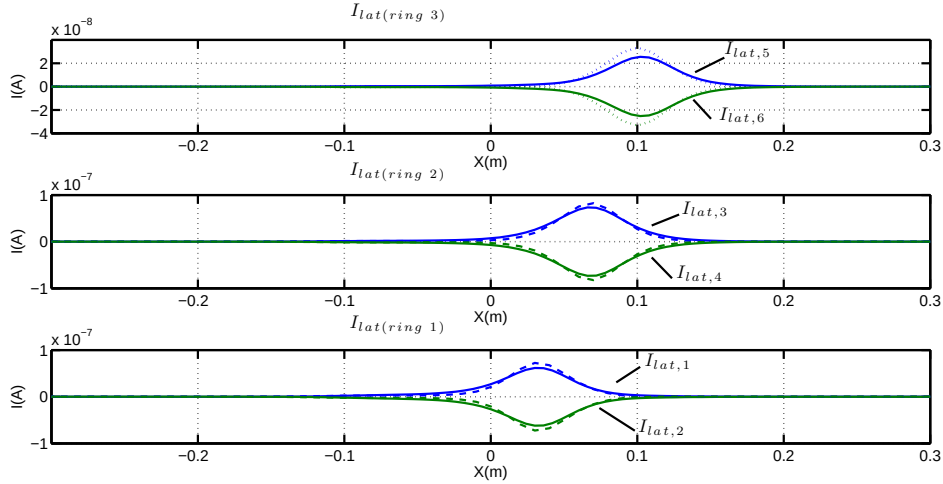


FIGURE 6.7 – Courant latéraux : comparaison entre le modèle et un simulateur BEM .

6.7 Bilan.

Nous avons établi ce qui est à notre connaissance le première modèle complet de prédiction de mesures par des capteurs d'électrolocation de géométrie réaliste (nos prototypes du chapitre II). Allant plus loin que le modèle poly-sphérique, le présent modèle ne requiert pas d'autre outil pour localiser les objets. Tout comme le PSM, une unique calibration, hors ligne, avec un simulateur électrique suffit pour tenir compte de l'effet perturbatif du corps isolant sur la mesure. Comme démontré dans ce chapitre le schéma de reduction analytique est en bon accord avec les valeurs numériques données par la BEM, tout en offrant en plus la possibilité d'être utilisé en ligne pour une électrolocation en temps réel. Au-delà de ces aspects pratiques, le présent modèle nous apporte de nouveaux éléments de

compréhension de fonctionnement du sens électrique. Tout d'abord, dans le contexte de la méthode des réflexions, la présence d'un objet dans la scène donne naissance à deux contributions principales au courant total mesuré. La première, que nous avons dénommée par $I^{(1)}$ est produite par le champ électrique $\mathbf{E}_1$ réfléchi par l'objet qui traverse la géométrie du capteur de manière latérale alors que celui-ci est retiré de la scène. La seconde, dénommée $I^{(2)}$, est produite par le capteur de façon à retrouver son état d'équilibre électrique alors que celui-ci est soumis au potentiel réfléchi ϕ_1 . Ces deux contributions requièrent de connaître le champ $\mathbf{E}_0$ produit par le capteur, la matrice de conductance $\overline{C}^{(0)}$, qui exprime le modèle des courants mesurés en l'absence d'objet, ainsi que les surfaces géométriques apparentes $(1 + s_{\perp\alpha(k)}) \overline{A}_k$ des électrodes réceptrices e_k , à travers lesquelles les courants latéraux passent, et où les facteurs $s_{\perp}$ modélisent la polarisabilité latérale des électrodes. De plus, comme $\mathbf{E}_0$ est approximé analytiquement, $\overline{C}^{(0)}$ et $s_{\perp\alpha(k)}$ peuvent être mesurés une fois pour toute lors d'une phase préliminaire de calibration. Les autres paramètres du modèle dépendent uniquement de la géométrie de la scène et obéissent simplement à des relations qui sont facilement utilisables pour des calculs en ligne, comme ceux requis pour les algorithmes d'électrolocation employés dans les observateurs. En exploitant les symétries du capteur, I_{ax} et I_{lat} peuvent être extraits des courants totaux I par de simples combinaisons arithmétiques de leurs composantes. Plus concrètement, I_{ax} exprime la réponse en courant du capteur suite à la modification des tensions due aux potentiels induits ϕ_1 , alors que I_{lat} exprime la polarisation latérale des groupes d'électrodes induite par la présence de l'objet. Ceci étant dit, il devient évident que (ρ, ψ, X) représentent les coordonnées cylindriques du centre de l'objet dans le repère attaché au capteur ; ainsi comme I_{ax} ne dépend pas de l'angle azimutal ψ , le même objet placé n'importe où sur un cercle perpendiculaire à l'axe du capteur et centré sur lui, va produire le même courant axial I_{ax} alors que I_{lat} est plus riche du fait qu'il dépend des trois coordonnées de l'espace (6.8).

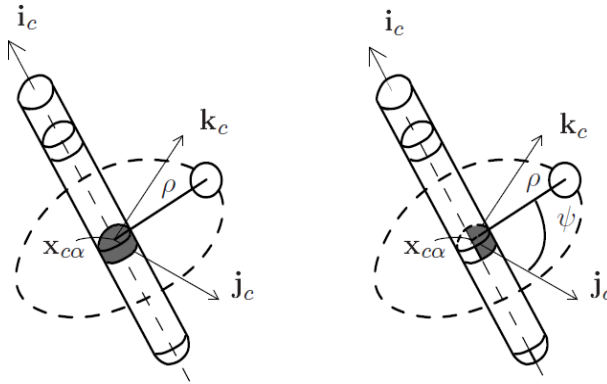


FIGURE 6.8 – Le rôle joué par les composantes I_{ax} (à gauche) et I_{lat} (à droite) dans l'électrolocation. I_{ax} qui désigne la composante de perturbation en courant la plus forte peut donner l'information de la hauteur axiale suivant la direction $\mathbf{i}_c$ et la distance ρ depuis l'axe du capteur à laquelle nous pouvons localiser l'objet tandis que I_{lat} nous permet de définir l'angle méridien ψ .

En poursuivant la discussion plus loin, les courants latéraux obéissent à des lois de projection purement géométriques comme suggérées par les biologistes ([Caputi et al., 1998], [Emde et al., 1998]). En particulier, l'objet est localisé simplement suivant l'axe perpendiculaire à la surface du capteur et centré sur la surface d'intensité maximale des mesures

transcutanées, que l'on identifie par *l'image électrique* (voir chapitre I). Cet avantage va être exploité dans un futur proche pour traiter le problème de l'électrolocation. Nous pouvons aussi mentionner que la seconde contribution I_{ax} n'est rien d'autre que le modèle poly-sphérique des courants que nous avons détaillé dans le chapitre V où le capteur revêt une géométrie simplifiée et où les électrodes sont considérées comme de simples sphères. Alors que le rôle des isolants est modélisé par une calibration de la taille de ces sphères. Finalement, la combinaison des modèles axial et latéral offre de nombreuses stratégies pour l'électrolocation que nous sommes déjà en train d'explorer. D'un point de vue global, nous pensons que le schéma de réduction présenté dans ce chapitre constitue une réelle avancée vers une modélisation rapide et rigoureuse des problèmes d'électrolocation en robotique. Le présent travail a fait l'objet d'une publication dans un journal de premier plan [Boyer et al., 2011]. Des techniques de commandes basées sur le présent modèle ont permis au capteur prototype d'électrolocation réel de naviguer de manière autonome dans une enceinte et de détecter des objets. Ces derniers résultats devraient très prochainement faire l'objet également d'une publication.

Chapitre 7

Modélisation d'un capteur de forme arbitraire

Dans ce chapitre nous menons une étude des conditions de réduction de modèle, partant d'un capteur de géométrie plus arbitraire. Nous verrons en particulier quels sont les paramètres à prendre en compte pour tenir compte ou non de l'effet des faces isolantes dont on a jusque là limité l'influence par le choix d'une géométrie de capteur particulière. Nous commençons dans la première section par construire à partir d'une formulation intégrale équivalente à celle vue dans le second chapitre, un système algébrique faisant intervenir explicitement l'influence des faces isolantes par le biais d'opérateurs. Nous montrons qu'il est possible par le jeu des expressions algébriques, de modéliser la répartition des charges électriques avec ou sans l'intervention des faces isolantes et d'un objet extérieur. Nous déduisons ensuite dans la deuxième section une formule explicite exacte du courant total mesuré sur les électrodes indépendamment de la forme du capteur. Nous livrons dès lors dans la troisième section une analyse dimensionnelle et qualifions le poids des opérateurs intervenant dans l'expression du courant total. De cette analyse, nous formulons les conditions d'une réduction de modèle et aboutissons à des expressions simplifiées pouvant donner lieu comme pour le modèle poly-sphérique ou la méthode des réflexions, à des prédictions rapides en ligne des courants en présence d'objet. Enfin, dans la quatrième et dernière section, nous montrons les premiers résultats que nous avons obtenu, et les comparons avec l'un de nos modèles rapides. Au-delà du gain de temps que nous obtenons pour modéliser un capteur de forme arbitraire, nous avons là un formalisme qui nous renseigne directement sur la nature des interactions en jeu et qui permet leur hiérarchisation. Nous tenons à dire au lecteur que le travail ici n'est pas achevé, mais que d'ici à la présentation orale du travail de thèse, nous espérons livrer tous les résultats.

7.1 Répartition des charges à la surface du capteur

La méthode que nous utilisons, consiste à exploiter les conditions limites bien définies dans le chapitre II des équations de l'électrolocation à la surface d'un capteur de forme arbitraire dans le régime de l'électrocinétique quasi-stationnaire. En particulier, nous savons d'après les relations (2.50) et (2.53), que :

1. la composante normale du champ électrique total est nulle sur la surface isolante du capteur.
-

2. le potentiel total est constant à la surface des conducteurs, c'est à dire ici à la surface des électrodes du capteur.

En exploitant dans un premier temps la première condition, nous pouvons écrire pour tout point $\mathbf{x}$ appartenant à la surface isolante $\partial\mathcal{I}$ du capteur :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (7.1)$$

où $\mathbf{E}$ est le champ total au point $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{I}$, $\mathbf{n}$ est la normale extérieure en ce point. Intuitivement, on peut comprendre par là qu'aucune ligne de courant, allant d'un émetteur vers les groupes d'électrodes réceptrices ne traverse jamais au cours de son chemin, une partie isolante du capteur (fig. 7.1).

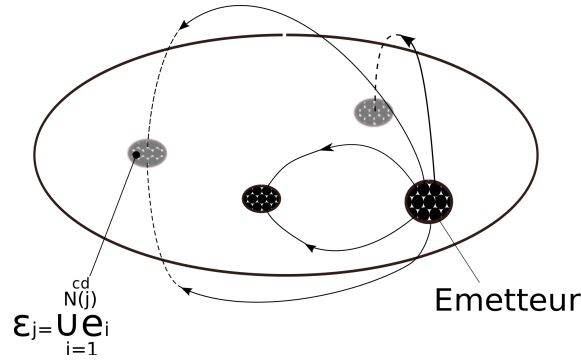


FIGURE 7.1 – Topologie des lignes de champs sur un capteur de forme arbitraire. Les lignes de courant allant d'un groupe d'électrodes émettrices vers les groupes d'électrodes réceptrices ne traversent jamais de partie isolante au cours de leur chemin.

Le champ total provient :

1. des charges σ^{cd} générées par l'activité propre du capteur, réparties sur toutes les électrodes e_i couvrant une surface totale $\partial\mathcal{C}$ et regroupées en n^{cd} groupes, lesquels sont définis comme des ensembles $\{e_i, i = 1, \dots, N^{cd}(j)\}$, où j est l'indice du groupe d'électrodes.
2. des charges σ^{is} générées par l'activité propre du capteur, réparties sur toutes les parties isolantes couvrant une surface totale $\partial\mathcal{I}$,
3. de charges venant d'un champ appliqué externe $\mathbf{E}_a^{\text{ext}}$, par exemple dû à la présence d'objets.

En sommant toutes les contributions au champ total, on obtient pour tout point $\mathbf{x}$ situé légèrement à l'extérieur de $\mathcal{I}$:

$$\left(\int_{\partial\mathcal{I}-\{ds(\mathbf{x})\}} \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} ds' + \int_{\partial\mathcal{C}} \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} ds' + \mathbf{E}_a^{\text{ext}} \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + E_{a,\perp}^{ds(\mathbf{x})} = 0, \quad (7.2)$$

où $E_{a,\perp}^{ds(\mathbf{x})}$ désigne le flux normal du champ électrique $\mathbf{E}_a^{ds(\mathbf{x})}$ issu des charges situées sur l'élément de surface élémentaire $ds(\mathbf{x})$. Comme la composante normale du champ créé par un petit élément de charge vaut en son centre exactement $+\sigma/(2\epsilon)$ à l'extérieur, et $-\sigma/(2\epsilon)$ à l'intérieur du capteur. Ce résultat, on le déduit du calcul classique du champ électrique au voisinage d'une plaque uniformément chargée, où ici la plaque est remplacée par l'élément de surface $ds(\mathbf{x})$ de dimension $2R \times 2\eta$ avec $\eta \ll R$ (fig7.2). On peut donc encore écrire :

$$\left(\int_{\partial\mathcal{I}-\{\mathbf{x}\}} \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} ds' + \int_{\partial\mathcal{C}} \frac{\sigma(\mathbf{x}')}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} ds' + \mathbf{E}_a^{\text{ext}} \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \frac{\sigma(\mathbf{x})}{2\epsilon} = 0. \quad (7.3)$$

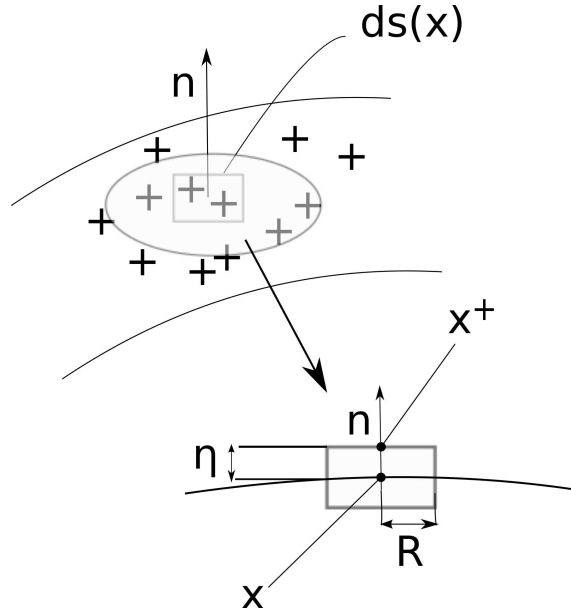


FIGURE 7.2 – Schéma conduisant au calcul du champ créé par une distribution de charges localisée sur l'élément de surface $ds(\mathbf{x})$ centrée sur un point $\mathbf{x}$ de la surface isolante du capteur. Cet élément de surface a une épaisseur η bien plus petite que ses dimensions transverses de l'ordre de R . Le champ appliqué par ces charges au point $\mathbf{x}^+$, situées de part et d'autre de l'élément de surface et de densité surfacique σ , vaut dans ce cas $\sigma/2\epsilon$.

En découpant la surface de notre capteur en éléments finis, on peut réécrire l'intégrale comme une somme discrète :

$$\left[\sum_{j=1}^{n^{\text{is}}} \sum_{l=1}^{N_j^{\text{is}}} (1 - \delta_{j,i} \delta_{k,l}) \frac{\sigma_{j,l}^{\text{is}} ds_{j,l}^{\text{is}}}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{is}}}{|\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{is}}|^3} + \sum_{j=1}^{n^{\text{cd}}} \sum_{l=1}^{N_j^{\text{cd}}} \frac{\sigma_{j,l}^{\text{cd}} ds_{j,l}^{\text{cd}}}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{cd}}}{|\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{cd}}|^3} + \mathbf{E}_a^{\text{ext}}(\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}}) \right]_{\perp} + \frac{\sigma_{i,k}^{\text{is}}}{2\epsilon} = 0. \quad (7.4)$$

Le découpage s'opérant avec n^{is} groupes, chacun comprenant N_j^{is} surfaces isolantes élémentaires et n^{cd} groupes, chacun comprenant N_j^{cd} surfaces conductrices élémentaires.

Nous introduisons alors les matrices G connectant les densités de charges et la composante normale du champ électrique total extérieur sur les faces isolantes :

$$\begin{aligned} G_{i,i;k,k}^{\text{is, is}} &= 1, \\ G_{i,i;k,l \neq k}^{\text{is, is}} &= \frac{ds_{i,l}^{\text{is}} (\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{i,l}^{\text{is}}) \cdot \mathbf{n}_{i,k}^{\text{is}}}{2\pi |\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{i,l}^{\text{is}}|^3}, \\ G_{i,j;k,l \neq k}^{\text{is, is}} &= \frac{ds_{j,l}^{\text{is}} (\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{is}}) \cdot \mathbf{n}_{i,k}^{\text{is}}}{2\pi |\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{is}}|^3}, \\ G_{i,j;k,l \neq k}^{\text{is, cd}} &= \frac{ds_{j,l}^{\text{cd}} (\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{cd}}) \cdot \mathbf{n}_{i,k}^{\text{is}}}{2\pi |\mathbf{x}_{i,k}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{cd}}|^3}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Ceci nous conduit à reformuler l'équation (7.4) en un premier système algébrique :

$$G^{\text{is, cd}} \cdot \sigma^{\text{cd}} + G^{\text{is, is}} \cdot \sigma^{\text{is}} = -2\epsilon E_{a,\perp}^{\text{ext}}, \quad (7.6)$$

où σ^{cd} et σ^{is} sont les vecteurs de densités de charges mesurées au centre des divers éléments de surface, de dimensions respectives $N^{\text{cd, tot}} = \sum_{j=1}^{n^{\text{cd}}} N_j^{\text{cd}}$ et $N^{\text{is, tot}} = \sum_{j=1}^{n^{\text{is}}} N_j^{\text{is}}$. Nous constatons que pour déterminer les densités de charges, nous avons besoin d'une autre contrainte. Celle-ci vient de l'expression du potentiel. Le potentiel V_i au point $\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}$, centre du $k^{\text{ème}}$ élément de la $i^{\text{ème}}$ électrode, peut être obtenu de la manière suivante :

$$V_i = \sum_{j=1; j \neq i}^{n^{\text{cd}}} \sum_{l=1; l \neq k}^{N_j^{\text{cd}}} \frac{\sigma_{j,l}^{\text{cd}}}{4\pi\epsilon |\mathbf{x}_{j,l}^{\text{cd}} - \mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}|} ds_{j,l}^{\text{cd}} + \sum_{j=1}^{n^{\text{is}}} \sum_{l=1}^{N_j^{\text{is}}} \frac{\sigma_{j,l}^{\text{is}}}{4\pi\epsilon |\mathbf{x}_{j,l}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}|} ds_{j,l}^{\text{is}} + V_a^{\text{ext}}(\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}). \quad (7.7)$$

On introduit alors les matrices H connectant les densités de charges et les potentiels sur les parties conductrices du capteur :

$$H_{i,j;k,l}^{\text{cd, cd}} = \begin{cases} \frac{ds_{j,l}^{\text{cd}}}{4\pi |\mathbf{x}_{j,l}^{\text{cd}} - \mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}|} & \text{pour } i \neq j \text{ ou } k \neq l \\ O(\sqrt{ds_{i,k}^{\text{cd}}}) & \text{pour } i = j \text{ et } k = l \end{cases} \quad (7.8)$$

$$H_{i,j;k,l}^{\text{cd, is}} = \frac{ds_{j,l}^{\text{is}}}{4\pi |\mathbf{x}_{j,l}^{\text{is}} - \mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}|}.$$

On obtient alors le second système algébrique :

$$H^{\text{cd, cd}} \cdot \sigma^{\text{cd}} + H^{\text{cd, is}} \cdot \sigma^{\text{is}} = \epsilon (V^{\text{cd}} - V_a^{\text{ext}}), \quad (7.9)$$

où V^{cd} et V_a^{ext} sont les vecteurs des potentiels imposés aux électrodes et appliqué par l'extérieur au capteur, de dimensions tous deux égales à $N^{\text{cd, tot}}$. Supposons pour l'instant que nous n'avons aucune source extérieure, i.e. $E_{a,\perp}^{\text{ext}} = 0$ et $V_a^{\text{ext}} = 0$. Des deux systèmes algébriques, on déduit alors les distributions de charges présentes sur les faces isolantes et conductrices en l'absence d'objet :

$$\frac{\sigma^{\text{cd}}}{\epsilon} = \frac{1_{N^{\text{cd, tot}}}}{H^{\text{cd, cd}} - H^{\text{cd, is}} \cdot (G^{\text{is, is}})^{-1} \cdot G^{\text{is, cd}}} \cdot V^{\text{cd}}, \quad (7.10)$$

et :

$$\frac{\sigma^{\text{is}}}{\epsilon} = - \frac{(G^{\text{is, is}})^{-1} \cdot G^{\text{is, cd}}}{H^{\text{cd, cd}} - H^{\text{cd, is}} \cdot (G^{\text{is, is}})^{-1} \cdot G^{\text{is, cd}}} \cdot V^{\text{cd}}, \quad (7.11)$$

où le terme $1_{N^{\text{cd, tot}}}$ est la matrice identité de dimensions $N^{\text{cd, tot}} \times N^{\text{cd, tot}}$ avec $N^{\text{cd, tot}}$ le nombre total d'électrodes et où la division matricielle A/B doit désormais être comprise comme $A \cdot B^{-1}$.

7.2 Formule exacte du courant total

7.2.1 Sans objet

Cherchons à présent le courant total mesuré par les électrodes. Nous en établissons l'expression ici en l'absence d'objet. Construire l'expression du courant total requiert la connaissance de la composante normale du champ total au niveau des électrodes. En procédant par une méthode semblable à celle ayant abouti à l'établissement de la composante normale du champ total sur les faces isolantes du capteur (7.4), nous obtenons :

$$E_{\perp}(\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}) = \frac{\sigma_{i,k}^{\text{cd}}}{2\epsilon} + \left[\sum_{j=1}^{n^{\text{cd}}} \sum_{l=1}^{N_j^{\text{cd}}} (1 - \delta_{j,i} \delta_{k,l}) \frac{\sigma_{j,l}^{\text{cd}}}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{cd}}}{|\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{cd}}|^3} ds_{j,l}^{\text{cd}} + \sum_{j=1}^{n^{\text{is}}} \sum_{l=1}^{N_j^{\text{is}}} \frac{\sigma_{j,l}^{\text{is}}}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{is}}}{|\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}} - \mathbf{x}_{j,l}^{\text{is}}|^3} ds_{j,l}^{\text{is}} + \mathbf{E}_a^{\text{ext}}(\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}) \right] \cdot \mathbf{n}_{i,k}^{\text{cd}}, \quad (7.12)$$

où d'après nos hypothèses, le champ $\mathbf{E}_a^{\text{ext}}(M_{i,k}^{\text{cd}})$ disparaît (pas d'objet extérieur). On peut alors transformer cette égalité et utiliser les matrices G relatives aux surfaces conductrices analogues à celles définies auparavant en (7.5) :

$$E_{\perp} = \frac{1}{2\epsilon} (G^{\text{cd, cd}} \cdot \sigma^{\text{cd}} + G^{\text{cd, is}} \cdot \sigma^{\text{is}}). \quad (7.13)$$

En utilisant alors les expressions établies (7.10) et (7.11) des densités de charges, on obtient :

$$E_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{G^{\text{cd, cd}} - G^{\text{cd, is}} \cdot (G^{\text{is, is}})^{-1} \cdot G^{\text{is, cd}}}{H^{\text{cd, cd}} - H^{\text{cd, is}} \cdot (G^{\text{is, is}})^{-1} \cdot G^{\text{is, cd}}} \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.14)$$

En définissant les matrices $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= G^{\text{cd, cd}} - G^{\text{cd, is}} \cdot (G^{\text{is, is}})^{-1} \cdot G^{\text{is, cd}}, \\ \mathcal{H} &= H^{\text{cd, cd}} - H^{\text{cd, is}} \cdot (G^{\text{is, is}})^{-1} \cdot G^{\text{is, cd}}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

on peut écrire plus synthétiquement (7.16) :

$$E_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}} \cdot V^{\text{cd, tot}}, \quad (7.16)$$

où $V^{\text{cd, tot}}$ est le vecteur des potentiels de dimension $N^{\text{cd, tot}}$. Nous déduisons alors le courant total mesuré sur le i -ème groupe contenant N_i^{cd} éléments de surfaces :

$$I_i = \gamma \sum_{k=1}^{N_i^{\text{cd}}} E_{\perp}(\mathbf{x}_{i,k}^{\text{cd}}) ds_{i,k}^{\text{cd}}, \quad (7.17)$$

où γ est la conductivité du milieu, considérée comme uniforme. De manière générale, d'après la loi d'Ohm, nous pouvons relier les courants aux potentiels par la matrice de conductance $C^{(0)}$ de dimensions $N^{\text{cd,tot}} \times N^{\text{cd,tot}}$:

$$I = C^{(0)} \cdot V^{\text{cd}}, \quad (7.18)$$

où cette fois-ci V^{cd} est le vecteur des potentiels de dimension N^{cd} et où l'on identifie ici la matrice de conductance à :

$$C_{i,j}^{(0)} = \sum_{l=1}^{N_j^{\text{cd}}} \sum_{k=1}^{N_i^{\text{cd}}} ds_{i,k}^{\text{cd}} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{H}} \right)_{i,j;k,l}. \quad (7.19)$$

N'oublions pas cependant que le capteur doit rester en équilibre électrocinétique, c'est à dire que la somme de tous les courants mesurés sur ses électrodes est nulle. Pour cela nous pouvons chercher le potentiel commun à ajouter sur chaque groupe d'électrodes, de manière à satisfaire à cette condition¹, i.e. :

$$\sum_i I_i = \sum_{i=1}^{n^{\text{cd}}} \left[C^{(0)} \cdot (V^{\text{cd}} + k \mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}) \right]_i = 0, \quad (7.20)$$

où $\mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}$ est un vecteur colonne unité de $N^{\text{cd,tot}}$ lignes et k une constante réelle.

De la condition (7.20), nous obtenons l'expression de la constante k :

$$k = - \frac{\mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}^T \cdot C^{(0)} \cdot V^{\text{cd}}}{\mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}^T \cdot C^{(0)} \cdot \mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}} = - \sum_{j=1}^{N^{\text{cd,tot}}} \kappa_j(C^{(0)}) V_j^{\text{cd}} \quad (7.21)$$

avec :

$$\kappa_j(C^{(0)}) = \frac{(\mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}^T \cdot C^{(0)})_j}{\mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}^T \cdot C^{(0)} \cdot \mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}}. \quad (7.22)$$

Les nouveaux potentiels $\tilde{V}^{\text{cd}}$ obtenus après l'ajout de la constante k s'écrivent alors :

$$\tilde{V}^{\text{cd}} = V^{\text{cd}} - \mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}} (\kappa^T \cdot V^{\text{cd}}) = \hat{P}(C^{(0)}) \cdot V^{\text{cd}}, \text{ avec } \hat{P} = \mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}} - \mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}} \otimes \kappa^T. \quad (7.23)$$

Satisfaire à la condition d'équilibre électrocinétique (7.20) revient alors à multiplier le vecteur des potentiels par la matrice $\hat{P}$ dans (7.18) :

$$I = C^{(0)} \cdot \hat{P} \cdot V^{\text{cd}} = \left[C^{(0)} - \frac{(C^{(0)} \cdot \mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}) \otimes (\mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}} \cdot C^{(0)})}{\mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}^T \cdot C^{(0)} \cdot \mathbf{1}_{N^{\text{cd,tot}}}} \right] \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.24)$$

Comme nous le voyons dans cette dernière expression, le courant à vide pour un capteur de forme arbitraire se déduit de la matrice de conductance à vide $C^{(0)}$. Cette dernière, nous

1. De manière générale, il peut exister un courant de fuite à l'infini pour n potentiels indépendants.

l'avons déjà exprimée à l'occasion de la modélisation du capteur prototype d'électrolocation (6.30), à la différence que, auparavant elle s'obtenait à l'aide d'une résolution directe des équations de l'électrolocation alors qu'ici, afin de faire ressortir des analyses physiques, elle s'obtient par une résolution indirecte des équations de l'électrolocation. On qualifiera alors la méthode présente comme reposant sur une *BEM indirecte* par opposition à la *BEM directe*, présentée au chapitre 2, et que nous avons utilisée jusque là.

7.2.2 Avec objet

Nous nous proposons d'établir une expression exacte du courant, cette fois en présence d'un objet. Nous illustrons le principe avec le cas d'un objet isolant. Pour un objet isolant, nous vérifions, tout comme pour la partie isolante du capteur, l'égalité suivante :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (7.25)$$

pour tout point à la surface de l'objet. Le champ total est formé du champ appliqué $\mathbf{E}_a$, provenant du capteur actif, et du champ induit $\mathbf{E}_i$, venant de la réponse de l'objet. En utilisant des matrices $G^{\text{ob},\text{ob}}$, analogues des matrices G définies précédemment (7.5), qui connectent cette fois les densités de charges σ^{ob} et la composante normale du champ électrique total extérieur sur la surface de l'objet, on peut réécrire la précédente équation :

$$(\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_i) \cdot \mathbf{n} = E_{a,\perp} + 2\pi\epsilon G^{\text{ob},\text{ob}} \cdot \sigma^{\text{ob}} = 0. \quad (7.26)$$

Le champ appliqué provenant ici du capteur peut être exprimé à partir des densités de charges existantes à sa surface :

$$E_{a,\perp} = 2\pi\epsilon [G^{\text{ob},\text{cd}} \cdot \sigma^{\text{cd}} + G^{\text{ob},\text{is}} \cdot \sigma^{\text{is}}]. \quad (7.27)$$

On en déduit alors la densité de charge induite sur l'objet par le capteur :

$$\sigma^{\text{ob}} = -(G^{\text{ob},\text{ob}})^{-1} \cdot [G^{\text{ob},\text{cd}} \cdot \sigma^{\text{cd}} + G^{\text{ob},\text{is}} \cdot \sigma^{\text{is}}]. \quad (7.28)$$

Si on revient maintenant sur le premier système algébrique (7.6), les deux dernières égalités nous permettent d'y intégrer la présence de l'objet :

$$\begin{pmatrix} G_{\text{wob}}^{\text{is},\text{cd}} & G_{\text{wob}}^{\text{is},\text{is}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma^{\text{cd}} \\ \sigma^{\text{is}} \end{pmatrix} = 0, \quad (7.29)$$

où l'indice *wob* signifie *avec objet* et où les matrices G_{wob} *avec objet* qui expriment la contribution de l'objet en champ électrique, sont définies de la manière suivante :

$$G_{\text{wob}}^{\text{cd}/\text{is},\text{cd}/\text{is}} = G^{\text{cd}/\text{is},\text{cd}/\text{is}} - G^{\text{cd}/\text{is},\text{ob}} \cdot (G^{\text{ob},\text{ob}})^{-1} \cdot G^{\text{ob},\text{cd}/\text{is}}. \quad (7.30)$$

La même opération est réalisée pour les contributions de l'objet en potentiel. Une intégration de cette contribution dans le second système algébrique (7.9) nous donne :

$$\begin{pmatrix} H_{\text{wob}}^{\text{cd},\text{cd}} & H_{\text{wob}}^{\text{cd},\text{is}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma^{\text{cd}} \\ \sigma^{\text{is}} \end{pmatrix} = \epsilon V^{\text{cd}}, \quad (7.31)$$

où les matrices H_{wob} sont définies comme suit :

$$H_{\text{wob}}^{\text{cd},\text{cd}/\text{is}} = H^{\text{cd},\text{cd}/\text{is}} - H^{\text{cd},\text{ob}} \cdot (G^{\text{ob},\text{ob}})^{-1} \cdot G^{\text{ob},\text{cd}/\text{is}}. \quad (7.32)$$

La présence de l'objet modifie les opérateurs et modifie la répartition des charges sur le capteur. Cette nouvelle répartition s'obtient simplement en remplaçant les anciens opérateurs par les nouveaux dans l'expression des distributions de charges sans objet (7.10, 7.11) :

$$\sigma_{\text{wob}}^{\text{cd}} = \frac{1}{H_{\text{wob}}^{\text{cd,cd}} - H_{\text{wob}}^{\text{cd,is}} \cdot \left(G_{\text{wob}}^{\text{is,is}}\right)^{-1} \cdot G_{\text{wob}}^{\text{is,cd}}} \epsilon \cdot V^{\text{cd}} \quad (7.33)$$

et :

$$\sigma_{\text{wob}}^{\text{is}} = - \frac{\left(G_{\text{wob}}^{\text{is,is}}\right)^{-1} \cdot G_{\text{wob}}^{\text{is,cd}}}{H_{\text{wob}}^{\text{cd,cd}} - H_{\text{wob}}^{\text{cd,is}} \cdot \left(G_{\text{wob}}^{\text{is,is}}\right)^{-1} \cdot G_{\text{wob}}^{\text{is,cd}}} \epsilon \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.34)$$

Avec cette nouvelle répartition des charges, nous pouvons chercher le nouveau courant total mesuré. Pour cela, comme pour le cas où il n'y avait pas d'objet, on va d'abord chercher l'expression de la composante normale du champ total, cette fois en présence d'objet. L'expression du champ total sur les électrodes (7.12) fait intervenir la contribution en champ de l'objet au niveau des électrodes. Cette contribution s'écrit :

$$E_{\text{a},\perp}^{\text{ext,cd}} = \frac{1}{2\epsilon} G^{\text{cd,ob}} \cdot \sigma^{\text{ob}}. \quad (7.35)$$

Si à présent, nous intégrons l'expression de la densité de charge induite dans cette égalité et dans (7.12), nous obtenons un autre système donnant le champ total en présence d'objet sur les électrodes :

$$E_{\perp,\text{wob}} = \frac{1}{2\epsilon} \left(G_{\text{wob}}^{\text{cd,cd}} \cdot \sigma_{\text{wob}}^{\text{cd}} + G_{\text{wob}}^{\text{cd,is}} \cdot \sigma_{\text{wob}}^{\text{is}} \right). \quad (7.36)$$

Enfin, on en déduit assez aisément le champ total en présence d'objet :

$$E_{\perp,\text{wob}} = \frac{1}{2} \frac{\left[G^{\text{cd,cd}} - G^{\text{cd,is}} \cdot \left(G^{\text{is,is}}\right)^{-1} \cdot G^{\text{is,cd}} \right]_{\text{wob}}}{\left[H^{\text{cd,cd}} - H^{\text{cd,is}} \cdot \left(G^{\text{is,is}}\right)^{-1} \cdot G^{\text{is,cd}} \right]_{\text{wob}}} \epsilon \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.37)$$

De la même manière que dans le cas sans objet, nous en déduisons le courant auquel nous appliquons un opérateur $\hat{P}_{\text{wob}}$ pour assurer l'équilibre électrocinétique :

$$I_{\text{wob}} = C_{\text{wob}}^{(0)} \cdot \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}} = \left[C_{\text{wob}}^{(0)} - \frac{\left(C_{\text{wob}}^{(0)} \cdot 1_{N^{\text{cd,tot}}} \right) \otimes \left(1_{N^{\text{cd,tot}}} \cdot C_{\text{wob}}^{(0)} \right)}{1_{N^{\text{cd,tot}}}^T \cdot C^{(0)} \cdot 1_{N^{\text{cd,tot}}}} \right]_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}} \quad (7.38)$$

Où nous avons introduit la matrice $C_{\text{wob}}^{(0)}$ de dimensions $N^{\text{cd,tot}} \times N^{\text{cd,tot}}$ définie par :

$$C_{\text{wob}}^{(0)} = \frac{\gamma}{2} ds^{\text{cd}} \cdot \frac{\left[G^{\text{cd,cd}} - G^{\text{cd,is}} \cdot \left(G^{\text{is,is}}\right)^{-1} \cdot G^{\text{is,cd}} \right]_{\text{wob}}}{\left[H^{\text{cd,cd}} - H^{\text{cd,is}} \cdot \left(G^{\text{is,is}}\right)^{-1} \cdot G^{\text{is,cd}} \right]_{\text{wob}}} = \frac{\gamma}{2} ds^{\text{cd}} \cdot \frac{\mathcal{G}_{\text{wob}}}{\mathcal{H}_{\text{wob}}}. \quad (7.39)$$

Nous nous apercevons que le courant en présence d'objet possède la même structure que celui établi en l'absence d'objet (7.24). Ce résultat en tant que tel constitue à notre

connaissance un résultat original. Dans la section suivante, nous discuterons les structures des matrices "wob", notamment aux figures 7.3 et 7.4.

7.3 Réduction de modèle : prise en charge de "l'interaction" avec des larges faces isolantes

Nous avons établi dans la section précédente une relation exacte prenant en compte numériquement toutes les interactions possibles existant au sein du capteur, ainsi qu'entre le capteur et l'objet et la réponse de l'objet. Dans cette section, nous nous intéresserons à hiérarchiser ces interactions dans une fenêtre paramétrique convenable pour l'électrolocation, c'est à dire que nous énoncerons d'abord les rapports dimensionnels de tous les entités en interaction, et que, suivant ces rapports, nous réduirons une première fois la formule exacte des courants, pour ne prendre en compte que les "interactions" conducteurs/conducteurs avant de considérer l'ordre suivant de la réduction et considérer en plus les "interactions" isolants/isolants. Nous verrons que la nature des premières interactions est en tout point semblable dans sa forme à celle existante dans les modèles de capteurs à géométrie cylindrique. Il sera question notamment à partir de la hiérarchisation bien établie des dites "interactions" de décider si il est utile de prendre en compte les parties isolantes dans la modélisation étant donné leur complexité et leur degré de perturbation pour des géométries de capteur réalistes.

7.3.1 Rapports dimensionnels de réduction

Nous considérons tout au long de cette section que les électrodes ont une dimension équivalente à R_{cd} , que la courbure des faces isolantes ont une courbure de l'ordre de $R_{is} \gg R_{cd}$, comme c'est le cas notamment dans la géométrie du capteur final du projet ANGELS. Rappelons que dans le cas des capteurs à géométrie cylindrique ces deux dernières quantités étaient égales. Nous considérons aussi que la taille des objets est de l'ordre de R_{ob} , et que, pour simplifier notre approche, comme nous l'avons toujours fait jusqu'à présent, les objets seront toujours de petite taille ou de taille modérée, c'est à dire que nous devons vérifier que $R_{ob} \ll d$ où d est la plus distance de l'objet au capteur. De même nous considérerons que relativement à cette distance, les électrodes sont elles aussi de petite taille ($R_{cd} \ll d$). Nous n'imposerons cependant pas de contrainte vis-à-vis du rapport entre la distance d et le rayon de courbure des faces isolantes, ce qui nous amènera à distinguer 2 champs de perception : la perception haptique pour laquelle $d < R_{is}$ et la perception lointaine pour laquelle $d > R_{is}$. Suivant ces hypothèses nous pouvons donner une dimension caractéristique aux matrices G et H :

$$\begin{aligned}
 G^{cd,cd} &= G^{is,is} = 1, \\
 H^{cd,cd} &= R_{cd}, \\
 G^{is,cd} &= \frac{R_{cd}^2}{R_{is}^2}, \\
 H^{cd,is} &= R_{is}, \\
 G^{cd,is} &= 1.
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

Pour $G^{\text{cd},\text{cd}}$ et $G^{\text{is},\text{is}}$, leurs valeurs viennent de leur définition. Pour $H^{\text{cd},\text{cd}}$, il faut considérer que sa dimension vient principalement de la perturbation en potentiel d'une électrode sur elle-même, et qu'elle vaut $O(ds^{\text{cd}}/R_{\text{cd}}) = O(R_{\text{cd}})$. Concernant l'opérateur en champ $G^{\text{is},\text{cd}}$, on peut s'appuyer sur sa définition et trouver $O(R_{\text{cd}}^2/R_{\text{is}}^2)$. Pour $H^{\text{cd},\text{is}}$, on peut considérer l'intégrale $\int_{r=R_{\text{cd}}}^{R_{\text{is}}} \sigma^{\text{is}} ds^{\text{is}}/r$ et l'approximer à $\int_{r=R_{\text{cd}}}^{R_{\text{is}}} \sigma^{\text{is}} r dr d\phi/r$, soit pour une distribution de charge relativement homogène et $R_{\text{cd}} \ll R_{\text{is}}$, écrire que cela vaut $O(R_{\text{is}})$. Pour $G^{\text{cd},\text{is}}$ enfin, on peut répéter le même raisonnement que pour $H^{\text{cd},\text{is}}$, et trouver $O(1)$. Si l'on considère la formule du courant à vide (7.24), nous trouvons à partir de la précédente analyse dimensionnelle :

$$I \simeq \gamma R_{\text{cd}}^2 \frac{1 - 1 \times 1 \times \frac{R_{\text{cd}}^2}{R_{\text{is}}^2}}{R_{\text{cd}} - R_{\text{is}} \times 1 \times \frac{R_{\text{cd}}^2}{R_{\text{is}}^2}} V = \gamma \times O\left(R_{\text{cd}}\left(1 + \frac{R_{\text{cd}}}{R_{\text{is}}}\right)\right), \quad (7.41)$$

où la contribution de la partie isolante est de l'ordre de $O(R_{\text{cd}}/R_{\text{is}})$.

7.3.2 "Interaction" conducteurs/conducteurs

La précédente analyse dimensionnelle des opérateurs a permis, dans le domaine de perception défini, d'établir une hiérarchie dans les éléments du capteur contribuant à l'expression du courant. Il est déduit de l'analyse que le premier ordre se manifeste par une *interaction* entre conducteurs. Il est raisonnable de penser que l'interaction avec les objets peut alors s'écrire à l'ordre dominant en ne considérant que les parties conductrices du capteur. Une approximation du courant exact peut être résumée par :

$$I_{\text{wob}} \simeq \frac{\gamma}{2} [G^{\text{cd},\text{cd}}]_{\text{wob}} \cdot [H^{\text{cd},\text{cd}}]_{\text{wob}}^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \cdot \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.42)$$

Pour continuer à approximer un peu plus cette expression, il nous reste à définir *les petits* rentrant en jeu. En écrivant les opérateurs $H_{\text{wob}}^{\text{cd},\text{cd}}$ (7.32) et $G_{\text{wob}}^{\text{cd},\text{cd}}$ (7.30) comme les sommes $H^{\text{cd},\text{cd}} + \delta H^{\text{cd},\text{cd}}$ et $G^{\text{cd},\text{cd}} + \delta G^{\text{cd},\text{cd}}$, nous pouvons chercher à caractériser la petitesse des opérateurs $\delta H^{\text{cd},\text{cd}}$ et $\delta G^{\text{cd},\text{cd}}$ par une simple analyse dimensionnelle :

$$\begin{aligned} \delta H^{\text{cd},\text{cd}} &= H^{\text{cd},\text{ob}} \cdot (G^{\text{ob},\text{ob}})^{-1} \cdot G^{\text{ob},\text{cd}} = \frac{R_{\text{ob}}^3}{d^2} \times 1 \times \frac{R_{\text{cd}}^2}{d^2}, \\ \delta G^{\text{cd},\text{cd}} &= G^{\text{cd},\text{ob}} \cdot (G^{\text{ob},\text{ob}})^{-1} \cdot G^{\text{ob},\text{cd}} = \frac{R_{\text{ob}}^3}{d^3} \times 1 \times \frac{R_{\text{cd}}^2}{d^2}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

où pour $G^{\text{ob},\text{cd}}$, on a considéré sa définition et on l'a interprété comme le champ créé par les charges réparties sur une surface R_{cd}^2 des électrodes au niveau de l'objet situé à une distance d d'où le rapport R_{cd}^2/d^2 ; pour $G^{\text{ob},\text{ob}}$ nous avons au même titre que les opérateurs G définissant les auto-influences ($G^{\text{cd},\text{cd}}$ et $G^{\text{is},\text{is}}$) trouvé la dimension 1, pour $H^{\text{cd},\text{ob}}$ nous avons interprété sa définition comme le potentiel induit par l'objet sur les électrodes; c'est typiquement la dimension du modèle de Rasnow c'est à dire R_{ob}^3/d^2 . Enfin la dimension de $G^{\text{cd},\text{ob}}$ se déduit de la dimension du dernier opérateur puisque $G^{\text{cd},\text{ob}}$ est la dérivée de $H^{\text{cd},\text{ob}}$ par rapport à la distance, d'où $\dim(G^{\text{cd},\text{ob}}) = R_{\text{ob}}^3/d^3$. Il apparaît alors à la lecture de cette nouvelle analyse dimensionnelle que les écarts $\delta H^{\text{cd},\text{cd}}$ et $\delta G^{\text{cd},\text{cd}}$ sont bien systématiquement négligeables au vu des hiérarchies du problème :

$$\begin{aligned} \frac{\delta H^{\text{cd},\text{cd}}}{H^{\text{cd},\text{cd}}} &= \frac{R_{\text{ob}}^3 R_{\text{cd}}}{d^4} \ll 1, \\ \frac{\delta G^{\text{cd},\text{cd}}}{G^{\text{cd},\text{cd}}} &= \frac{R_{\text{ob}}^3 R_{\text{cd}}^2}{d^5} \ll 1. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Ecrivant alors le courant venant des interactions entre électrodes comme :

$$I_{\text{wob}} \simeq \frac{\gamma}{2} [\mathcal{G} - \delta G^{\text{cd,cd}}] \cdot [\mathcal{H} - \delta H^{\text{cd,cd}}]^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \cdot \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}}, \quad (7.45)$$

on peut écrire au vu des opérateurs identifiés comme les petits dans l'expression :

$$\begin{aligned} I_{\text{wob}} &\simeq \frac{\gamma}{2} [\mathcal{G} - \delta G^{\text{cd,cd}} + G^{\text{cd,cd}} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot \delta H^{\text{cd,cd}}] \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \cdot \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}} \\ &\simeq I_{\infty} + \delta I^{(1)} + \delta I^{(2)}, \end{aligned} \quad (7.46)$$

où l'on identifie :

1. le courant à vide I_{∞} comme :

$$I_{\infty} = \frac{\gamma}{2} \mathcal{G} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \cdot \hat{P} \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.47)$$

2. le courant $\delta I^{(1)}$ venant de la perturbation en potentiel par l'objet sur les électrodes du capteur comme :

$$\delta I^{(1)} = \frac{\gamma}{2} [\mathcal{G} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot \delta H^{\text{cd,cd}}] \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \cdot \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.48)$$

Ce courant est analogue au courant de perturbation du modèle poly-sphérique (5.20) et au courant axial issu de la méthode des réflexions (6.81). Il vient physiquement du rééquilibrage des charges pour maintenir le potentiel imposé sur les électrodes du capteur (fig. 7.3). Par rapport au courant à vide (7.24), cette perturbation est grande comme :

$$\frac{\delta I^{(1)}}{I_{\infty}} = \frac{\delta H^{\text{cd,cd}}}{H^{\text{cd,cd}}}. \quad (7.49)$$

Et donc du fait de l'analyse dimensionnelle faite en (7.44) :

$$\frac{\delta I^{(1)}}{I_{\infty}} = \frac{R_{\text{ob}}^3 R_{\text{cd}}}{d^4} \ll 1. \quad (7.50)$$

3. le courant $\delta I^{(2)}$ venant du gradient de la perturbation en potentiel et exprimé comme :

$$\delta I^{(2)} = -\frac{\gamma}{2} [\delta G^{\text{cd,cd}}] \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \cdot \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.51)$$

Ce courant est analogue à celui trouvé dans la méthode des réflexions, et doit son existence au fait que les électrodes en contact avec les isolants ne sont pas des surfaces fermées comme pour le modèle poly-sphérique et que le gradient associé au potentiel perturbatif va induire une modification du flux, i.e. du courant. Ce courant par rapport au courant à vide est de l'ordre de :

$$\frac{\delta I^{(2)}}{I_{\infty}} = \frac{\delta G^{\text{cd,cd}}}{G^{\text{cd,cd}}}. \quad (7.52)$$

Soit, d'après l'analyse dimensionnelle faite en (7.44) :

$$\frac{\delta I^{(2)}}{I_{\infty}} = \frac{R_{\text{ob}}^3 R_{\text{cd}}^2}{d^5} = \frac{R_{\text{cd}}}{d} \times \frac{\delta I^{(1)}}{I_{\infty}} \ll 1. \quad (7.53)$$

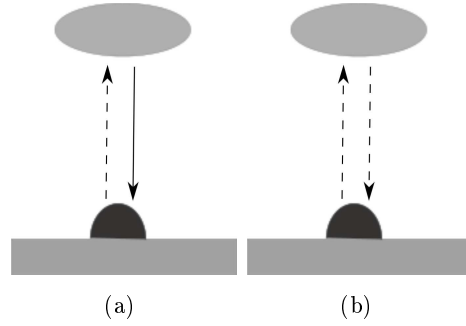


FIGURE 7.3 – Un schéma de la nature des interactions en jeu entre les conducteurs et l'objet aboutissant aux courants $\delta I^{(1)}$ et $\delta I^{(2)}$. Les flèches en trait continu et en trait discontinu représentent respectivement les perturbations en potentiel et en champ venant de charges situées sur le capteur et sur l'objet. Ici, on a représenté : a) la perturbation venant de l'opérateur $\delta H^{\text{cd},\text{cd}}$ et b) la perturbation venant de l'opérateur $\delta G^{\text{cd},\text{cd}}$.

7.3.3 Rôle des faces isolantes

Nous abordons maintenant la prise en compte de l'interaction avec les isolants et l'objet. Nous nous limiterons ici à faire intervenir l'interaction avec les isolants présente dans le dénominateur $\mathcal{H}_{\text{wob}}$ de $C_{\text{wob}}^{(0)}$ (7.39), étant donné que si l'on se fie à notre première analyse dimensionnelle (7.41), la contribution au courant total venant des opérateurs définissant la perturbation en potentiel reste plus importante que la contribution au courant total venant des opérateurs définissant la perturbation en champ. Ceci conduit à identifier 3 autres courants en plus de ceux définissant les interactions conducteurs/conducteurs :

$$\delta I^{(3)} = -\frac{\gamma}{2} \mathcal{G} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot \delta H^{\text{cd},\text{is}} \cdot G_{\text{is},\text{is}}^{-1} \cdot G^{\text{is},\text{cd}} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \cdot \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}}, \quad (7.54)$$

$$\delta I^{(4)} = -\frac{\gamma}{2} \mathcal{G} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot H^{\text{cd},\text{is}} \cdot G_{\text{is},\text{is}}^{-1} \cdot \delta G^{\text{is},\text{cd}} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}} \quad (7.55)$$

et

$$\delta I^{(5)} = \frac{\gamma}{2} \mathcal{G} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot H^{\text{cd},\text{is}} \cdot G_{\text{is},\text{is}}^{-1} \cdot \delta G^{\text{is},\text{is}} \cdot G_{\text{is},\text{is}}^{-1} \cdot G^{\text{is},\text{cd}} \cdot \mathcal{H}^{-1} \cdot ds^{\text{cd}} \cdot \hat{P}_{\text{wob}} \cdot V^{\text{cd}}. \quad (7.56)$$

Notons à ce stade que ces trois derniers courants expriment directement l'interaction avec les faces isolantes, laquelle du fait de la géométrie de nos premiers capteurs prototypes n'a pour l'instant pas été prise en compte. Pour représenter la contribution des isolants à la perturbation de l'objet nous avons représenté sur la figure 7.4 les interactions principales entre les faces isolantes, l'objet et les électrodes qui donnent lieu aux courants $\delta I^{(3)}$, $\delta I^{(4)}$ et $\delta I^{(5)}$. Selon que l'on se trouve dans une situation où l'objet est plus ou moins proche du capteur, les courants de perturbation liés à la contribution des faces isolantes (7.54, 7.55 et 7.56) interviennent plus ou moins. En effet dans le chapitre 5 de [Benachenhou et al., 2011], une étude plus systématique est réalisée pour quantifier l'ordre de grandeur des courants de perturbation liés aux faces isolantes en fonction du rapprochement de l'objet. Nous rapportons ci-dessous un tableau synthétisant les différentes tendances :

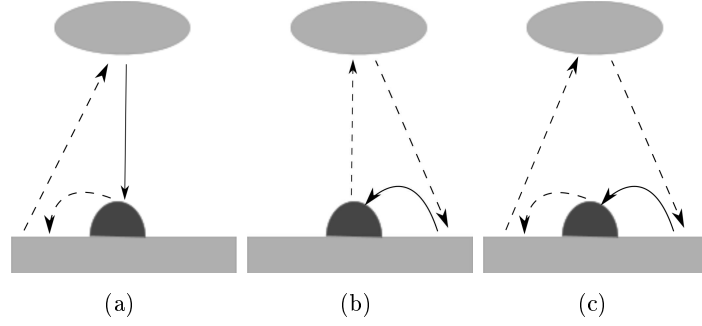


FIGURE 7.4 – Un schéma de la nature des interactions en jeu entre les conducteurs, les faces isolantes et l'objet aboutissant principalement aux courants $\delta I^{(3)}$, $\delta I^{(4)}$ et $\delta I^{(5)}$. Les flèches en trait continu et en trait discontinu représentent respectivement les perturbations en potentiel et en champ venant de charges situées sur le capteur et sur l'objet. Ici, on a représenté : a) la perturbation venant de l'opérateur $\delta H^{\text{cd, is}}$, b) la perturbation venant de l'opérateur $\delta G^{\text{is, cd}}$ et c) la perturbation venant de l'opérateur $\delta G^{\text{is, is}}$.

	$d \leq R_{\text{is, T}}$	$R_{\text{is, T}} \leq d \leq R_{\text{is}}$	$d \geq R_{\text{is}}$
$\delta H^{\text{cd, is}} \rightarrow \delta I^{(3)}$	$\left(\frac{d}{R_{\text{is}}}\right)^2$	1	1
$\delta G^{\text{is, cd}} \rightarrow \delta I^{(4)}$	1	1	$\frac{R_{\text{is}}}{d}$
$\delta G_{\text{is, is}}^{-1} \rightarrow \delta I^{(5)}$	$\left(\frac{d}{R_{\text{is}}}\right)^2$	1	$\frac{R_{\text{is}}}{d}$

Ce tableau recense les ordres de grandeur de perturbation induite par un objet en tenant compte des faces isolantes et suivant 3 régimes : le régime haptique, le régime intermédiaire et le régime lointain définis respectivement par $d \leq R_{\text{is, T}}$, $R_{\text{is, T}} \leq d \leq R_{\text{is}}$ et $d \geq R_{\text{is}}$, les nombres représentant ici l'importance rapportée à la perturbation $\delta I^{(1)}$. $R_{\text{is, T}}$ désigne le rayon transverse du capteur. Nous constatons à la lecture de ce tableau qu'au moins un des trois courants définis en (7.54), (7.55) et (7.56) intervient dans chacun des trois régimes. Par exemple, dans le régime haptique, le courant $\delta I^{(4)}$ doit être pris en compte en plus des courants issus des interactions entre les conducteurs (7.48) et (7.51). Ceci tendrait à indiquer que l'hypothèse de départ formulée à la section 7.3.2 consistant à ne tenir compte exclusivement que des faces conductrices est probablement trop simpliste.

7.4 Evolution du courant sur un capteur présentant de larges faces isolantes en présence d'objet

7.4.1 La scène test

Pour nous donner une bonne idée de l'évolution du courant avec l'importance des isolants, nous avons mis au point un simulateur de *type éléments finis en surface* (BEM) pour calculer le courant exact donné par (7.38) sur un capteur présentant de larges faces isolantes par rapport à la taille des électrodes. Pour simplifier, nous avons choisi un capteur de section elliptique modulable présentant deux rayons a_x et a_y , ayant une longueur L suivant l'axe z et disposant sur chacune de ses 2 faces latérales orientées perpendiculairement à l'axe y , de deux groupes d'électrodes placés symétriquement par rapport aux axes x et y . Nous avons ensuite fait déplacer suivant l'axe z une petite sphère isolante à une distance

d fixe de l'une des deux faces. On peut voir sur le schéma 7.5 une illustration de la scène avec : une sphère (en bleu) au départ de sa trajectoire, les faces isolantes (en rouge) et les 4 groupes d'électrodes (en vert).

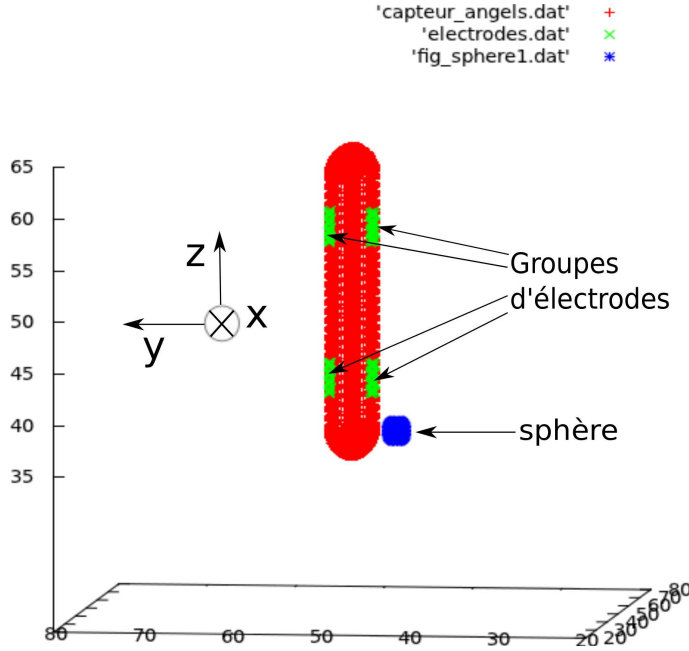


FIGURE 7.5 – Un schéma de la scène avec un capteur présentant de larges faces isolantes (rouge), 4 groupes d'électrodes symétriquement répartis (en vert) et une sphère isolante (en bleu).

De plus, pour profiter de la symétrie de répartition des groupes d'électrodes, nous avons imposé un potentiel $-v$ aux 2 groupes d'électrodes situés vers le bas (selon $z-$) du capteur et un potentiel $+v$ aux deux groupes situés vers le haut du capteur (selon $z+$). Le capteur nous apparaît alors avec cette symétrie géométrique et électrique comme un grand dipôle mesurant 2 courants : un courant positif I_p venant de la somme des courants mesurés sur les groupes de potentiel $+v$ et un courant négatif I_m venant de la somme des courants mesurés sur les groupes de potentiel $-v$, vérifiant $I_p + I_m = 0$.

7.5 Comparaison avec le modèle poly-sphérique

Comme nous n'avions plus le temps pour encoder les courants réduits $\delta I^{(1)}$, $\delta I^{(2)}$, ..., $\delta I^{(5)}$, issus de l'approximation du courant total exact, nous avons tout de même tenu à faire comprendre au lecteur l'intérêt de la modélisation de la contribution des faces isolantes, en comparant le courant total calculé par la BEM avec notre premier modèle réduit, le PSM, qui s'apparente en nature avec le terme $\delta I^{(1)}$. Pour ce faire, nous avons choisi une configuration de capteur pouvant favoriser l'utilisation du modèle PSM, sans pour autant diminuer l'importance de la surface isolante. Comme le modèle poly-sphérique vient essentiellement d'une interaction entre conducteurs de taille calibrée, remplacer directement les actuels groupes d'électrodes par les électrodes sphériques de notre modèle donne lieu à des interactions fortes entre toutes les électrodes. Or compte tenu de la présence d'un

corps isolant on ne saurait envisager que les interactions soient aussi intenses d'une face à l'autre que sur une même face. C'est pourquoi pour utiliser ici le PSM avons nous besoin d'imposer des potentiels de valeur identique par rapport à l'axe du capteur, pour empêcher comme l'isolant le fait dans la réalité, que le courant ne traverse le corps du capteur.

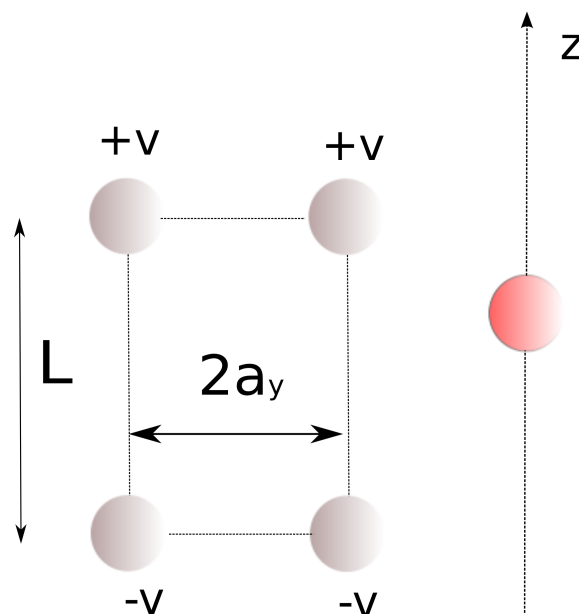


FIGURE 7.6 – Schéma équivalent par le modèle poly-sphérique d'un capteur présentant une large surface isolante. Les électrodes placées en lieu et place des électrodes du capteur réel (7.5) ont un même potentiel de part et d'autre de l'axe du capteur réel pour empêcher un passage de courant d'une face à l'autre à l'endroit où se trouve le corps isolant dans le capteur réel. Ici les paramètres choisis sont : $a_y = 3.5$ cm, $L = 9.7$ cm et $v = 0.5$ V.

Nous avons pris soin aussi conformément à notre analyse dimensionnelle (7.41) de choisir pour le capteur réel une taille d'électrodes bien plus petite que la dimension du corps isolant, et de limiter essentiellement les interactions aux interactions entre conducteurs comme il en strictement question dans le modèle poly-sphérique. Malgré une bonne calibration du modèle, nous n'avons pas pu obtenir un accord assez satisfaisant entre le PSM et les courbes du simulateur pour une sphère isolante passant à côté du capteur le long d'une des ses faces à une distance de 4cm (fig. 7.7).

En effet, même si la calibration du modèle PSM permet de reproduire les mêmes tendances que le courant total calculé par la BEM (en donnant une erreur relative sur le courant total de l'ordre de 10^{-5}), les pics de perturbation du courant calculé par la BEM sont plus prononcés que ceux du PSM. En effet, la perturbation induite par la sphère représente typiquement 1/10000 du courant à vide qui lui est de l'ordre du mA. En regardant de plus près les courbes, on voit que l'erreur relative entre les valeurs de perturbation (correspondant ici sur les courbes au quatrième chiffre après la virgule du courant calculé en mA) est d'environ 35%, soit de 15% supérieure typiquement à l'erreur relative dans la modélisation PSM de nos premiers prototypes de capteurs.

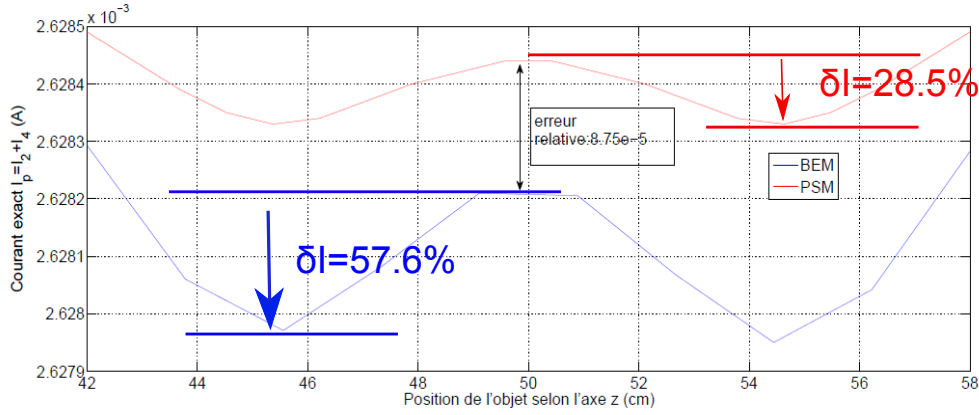


FIGURE 7.7 – Comparaison entre le modèle PSM et le simulateur pour une sphère isolante de 1cm de rayon passant à 4cm le long d'une face du capteur. Celui-ci présente des électrodes de petite taille ($R^{cd} \simeq 1.2\text{cm}$) par rapport au rayon de courbure de sa face isolante ($R^{is} = 3.5\text{cm}$). Les potentiels sont imposés avec une même valeur de part et d'autre de l'axe du capteur. Les 2 groupes placés selon des coordonnées z plus grandes ont un potentiel $+v$ tandis les 2 autres groupes placés selon des coordonnées z plus petites ont un potentiel $-v$.

7.6 Bilan et perspectives

Nous avons caractérisé les influences d'un corps isolant de forme arbitraire sur la mesure. Une formulation intégrale adéquate nous a permis de trouver une expression exacte du courant total quelle que soit la topologie des conducteurs et des isolants. Une analyse dimensionnelle de l'expression du courant nous a permis de préciser les conditions de réduction et d'utilisation de modèle rapide. Une comparaison entre un de nos modèles rapides, le PSM, et la valeur numérique du courant exact calculé par une méthode numérique de type BEM ne nous a pas donné une entière satisfaction, ce qui nous a fait comprendre l'intérêt de la modélisation de la contribution spécifique des faces isolantes au courant total. Faute de temps, nous n'avons pas pu mener à terme le calcul numérique des courants venant de la contribution des faces isolantes. Nous tâcherons cependant de terminer cette étude pour la présenter lors de la soutenance orale des travaux de thèse. Après avoir terminé l'encodage des différents courants de perturbation, nous tenterons d'en donner une formulation rapide comme nous l'avons fait pour le capteur prototype d'électrollocation aux chapitres 5 et 6.

CONCLUSION

Nous avons, à partir de la formulation dite intégrale et des équations de Maxwell, pu aboutir avec une méthode originale (la méthode des réflexions) et une certaine intuition physique (le comportement poly-sphérique d'une géométrie de capteur donnée), à la mise au point de modèles rapides d'un capteur de géométrie réaliste du sens électrique. Les dits modèles, baptisés modèle poly-sphérique et modèle des réflexions, ne nécessitent qu'une unique calibration, hors ligne, avec un simulateur électrique type BEM pour prédire avec une précision de l'ordre du %, les courants mesurés sur nos prototypes de capteurs du sens électrique. Ces derniers peuvent, grâce à un très bon travail sur l'électronique, percevoir une perturbation relative de l'ordre de $1/10000$. D'autre part, les prototypes ont été conçus de telle manière à être insensibles à des facteurs physiques très perturbatifs en temps normal, comme la conductivité ou la température. La capacité de ces prototypes à pouvoir se reconfigurer, passant d'une mesure en courant à une mesure en potentiel, augure d'un avenir prometteur pour la capacité de perception de nos futurs robots. Si les modèles dits rapides ont donné entière satisfaction quand ils recherchaient les courants mesurés par nos prototypes, ils n'en sont pas moins efficaces dans la prédiction des courants sur des capteurs de forme arbitraire, présentant de larges faces isolantes, à condition de satisfaire à une configuration électrique et dimensionnelle des électrodes, bien déterminée par une étude rigoureuse de l'interaction entre les parties conductrices et isolantes du capteur. On peut ajouter que nos modèles rapides ne sauraient être limités par l'existence dans la littérature d'un nombre fini d'objets pour lesquels la réponse électrique est bien établie, et donc susceptible d'être reconnus par nos capteurs. En fait, par la mise au point d'un formalisme générique de la réponse, il est devenu envisageable d'obtenir la perception d'une très large gamme d'objets de conductivité arbitraire, dont la seule contrainte est de présenter un faible écart de sphéricité. Un tel formalisme, intégré à nos modèles rapides, nous permet entre autre de reconnaître un objet inconnu moyennant une simple trajectoire et une transformée de Fourier inverse du courant mesuré par nos prototypes de capteurs d'électrolocation (on peut se reporter à l'annexe pour plus de détails sur la méthode). C'est ainsi que nous proposons également par le dit formalisme, une solution au problème inverse relatif à l'électrolocation. Notons aussi que les chercheurs dans le projet ANGELS ont mis au point des approches sans modèle en temps réel, mais que leur validité demande à être testé avec des modèles d'électrolocation tels que ceux présentés dans cette thèse. Enfin, reste dans l'avenir à considérer dans nos présents modèles la prise en compte d'objets plus complexes mais que l'on rencontre inévitablement dans la nature comme par exemple les grands objets non plans.

Annexe : Éléments de résolution du problème inverse relatif à l'électrolocation

Ici nous allons nous intéresser à la faisabilité de l'extraction des dimensions d'un objet en fonction du courant mesuré. Pour illustrer la méthode nous choisirons un objet de forme ellipsoïdale dont la réponse est donnée par le formalisme que nous avons établi au chapitre 4. Un tel formalisme est bien approprié, comme nous le verrons ici, pour l'extraction des dimensions de l'objet inconnu. Afin d'illustrer le principe de la reconnaissance, considérons un capteur bipolaire tournant autour de l'objet inconnu, à une distance fixe ρ (fig. 7.8).

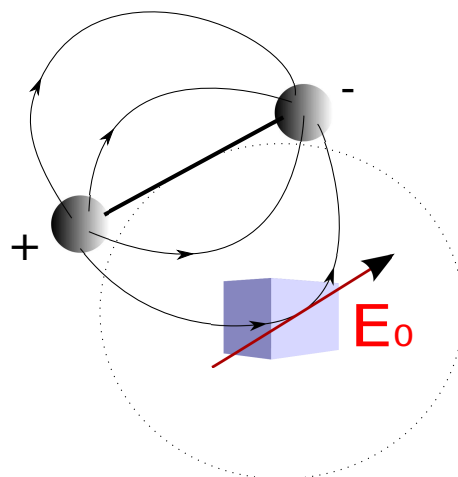


FIGURE 7.8 – Schéma du principe de reconnaissance d'objet à l'aide d'un capteur d'électrolocation. Le capteur d'électrolocation, à la manière de certains poissons électriques dans la nature, tourne autour d'un objet inconnu en mesurant la perturbation en courant de l'objet induite par l'établissement en son sein d'un champ électrique $\mathbf{E}_0$ rotatif. Les diverses orientations du champ électrique obtenues avec la rotation du capteur autour de l'objet conduisent à la mesure d'un courant électrique contenant un certain nombre d'harmoniques. Ayant une prédiction théorique de la relation existant entre les dimensions de l'objet inconnu et les dites harmoniques mesurées, du fait de la mise en place du formalisme générique de la réponse au chapitre IV, il nous est possible par une simple transformée de Fourier inverse du signal mesuré, d'extraire une à une les dimensions de l'objet et donc de le reconnaître.

Supposons que la polarisabilité α de l'ellipsoïde de dimensions inconnues soit donnée à l'aide de notre formalisme de réponse par² :

$$\alpha = \begin{pmatrix} -2 \left(C_{0,0}^3 + \frac{2C_{2,0}C_{0,0}^2}{\sqrt{5}} \right) \pi & 0 & 0 \\ 0 & -2 \left(C_{0,0}^3 - \frac{C_{0,0}^2C_{2,0}}{\sqrt{5}} \right) \pi & 0 \\ 0 & 0 & -2 \left(C_{0,0}^3 - \frac{C_{0,0}^2C_{2,0}}{\sqrt{5}} \right) \pi \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

Nous avons exprimé la perturbation en courant δI mesurée par ce capteur lors de sa trajectoire selon la méthode exposée au chapitre 5 (perturbation sur un capteur de type poly-sphérique) à l'aide du moment dipolaire $\mathbf{p} = \alpha \cdot \mathbf{E}_0$ issu du formalisme établi au chapitre 4 :

$$\delta I = - \frac{16\pi a^2 C_{0,0}^2 L^4 U \gamma (10C_{0,0} + \sqrt{5}C_{2,0}(1 - 3\cos(2\theta)))}{5(a-L)^2 (L^2 + 4\rho^2)^3}, \quad (7.58)$$

où a , L , U et γ sont respectivement le rayon des électrodes, la longueur du capteur, la tension imposée au capteur et la conductivité du milieu. La stratégie pour récupérer les coefficients de géométrie $C_{l,m}$ est simple. La perturbation en courant peut s'écrire comme une série de Fourier :

$$\delta I = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) \quad (7.59)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta I(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta I(t) \cos(nt) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta I(t) \sin(nt) dt \end{aligned} \quad (7.60)$$

Dans notre cas on trouve 2 coefficients :

$$\begin{aligned} a_0 &= - \frac{32\pi a^2 C_{0,0}^2 L^4 U \gamma (10C_{0,0} + \sqrt{5}C_{2,0})}{5(a-L)^2 (L^2 + 4\rho^2)^3} \\ a_2 &= \frac{48\pi a^2 C_{0,0}^2 C_{2,0} L^4 U \gamma}{\sqrt{5}(a-L)^2 (L^2 + 4\rho^2)^3} \end{aligned} \quad (7.61)$$

Dès lors on peut réécrire δI :

$$\delta I = \frac{a_0}{2} + a_2 \cos(2\theta) \quad (7.62)$$

Il suffit de prendre alors deux mesures pour retrouver les 2 inconnues $C_{0,0}$ et $C_{2,0}$, par exemple à $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 45^\circ$. On obtient finalement :

2. Le calcul de la polarisabilité est probablement inexact étant donné qu'il a été réalisé avec une première version du formalisme de la réponse qui était inexacte (la nouvelle version du formalisme de la réponse étant elle exacte comme cela a été montré dans le chapitre IV). Néanmoins pour illustrer la méthode de reconnaissance cette expression peut convenir.

$$\begin{aligned}C_{0,0} &= \left(\frac{-b\delta I(0)+2(b+c)+\delta I(45)}{c} \right)^{\frac{1}{3}} \\C_{2,0} &= \frac{2\delta I(45)}{bC_{0,0}^2} - \frac{aC_{0,0}}{b}\end{aligned}\tag{7.63}$$

Avec a , b et c tels que $a_0 = (aC_{0,0} + bC_{2,0}) C_{0,0}^2$ et $a_2 = cC_{2,0}C_{0,0}^2$.

Bibliographie

- C. Assad. *Electric field maps and boundary element simulations of electrolocation in weakly electric fish*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA, 1997.
- D. Babineau, A. Longtin, and J. Lewis. Modeling the electric field of weakly electric fish. *The Journal of Experimental biology*, 209 :3636–3651, 2006.
- V. Belevitch and J. Boersma. Some electrical problems for a torus. *Philips Journal of Research*, 38 :79–137, 1983.
- M.-R. Benachenhon, F. Boyer, P.-B. Gossiaux, B. Jawad, V. Lebastard, and M. Porez. Angels project wp2 d2.5 : Report on multi-agents electrical modeling. Technical report, Ecole des Mines de Nantes, 2011.
- M. Bennett. *Electroreception*. 1971.
- F. Boyer, P. Gossiaux, B. Jawad, V. Lebastard, and M.Porez. Model for a sensor inspired by electric fish (postprint). *IEEE transactions on robotics*, 2011.
- T. H. Bullock and C. D. Hopkins. *Electroreception*. Springer, 2005.
- A. Caputi. The electric organ discharge of pulse gymnotiforms : the transformation of a simple impulse into a complex spatio-temporel electromotor pattern. *The Journal of Experimental Biology*, 202 :1229–1241, 1999.
- A. Caputi, R. Budelli, and C. Bell. The electric image in weakly electric fish : physical images of resistive objects in gnathonemus petersii. *Journal of Experimental Biology*, 201(14) :2115–2128, 1998.
- A. Charoy. *Parasites et perturbations des électroniques*. Dunod, 1996.
- J.-P. Diard and B. L. G. C. Montella. *Cinétique électrochimique*. Hermann (Paris), 1996.
- J. Douglas and E. Garboczi. Intrinsic viscosity and the polarizability of particles having a wide range of shapes. *Advances in Chemical Physics*, 91 :85–153, 1995.
- T. Edwards and J. V. Bladel. Electrostatic dipole moment of a dielectric cube. *Applied scientific research, section B*, 9 :151–155, 1961.
- W. Ellison, A. Balana, G. Delbos, K. Lamkaouchi, L. Eymard, C. Guillou, and C. Prigent. New permittivity measurements of seawater. *Radio Science*, 33 :639–648, 1998.
- G. Emde. Active electrolocation of objects in weakly electric fish. *The Journal of Experimental Biology*, 202 :1205–1215, 1999.
-

-
- G. V. D. Emde, S. Schwarz, L. Gomez, R. Budelli, and K. Grant. Electric fish measure distance in the dark. *Letters to Nature, Nature*, 395 :890–894, 1998.
- L. Eyges and P. Gianino. Polarizabilities of rectangular dielectric cylinders and of a cube. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 27 :557–560, 1979.
- B. Felderhof and D. Palaniappan. Longitudinal and transverse polarizability of the conducting double sphere. *Journal of applied physics*, 88 :4947–4952, 2000.
- D. P. Fernandez, Y. Mulev, A. Goodwin, and J. L. Sengers. A database for the static dielectric constant of water and steam. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 25(1), 1995.
- P. Gossiaux. Réponse électrique d’un cylindre infini. Technical report, Ecole des Mines de Nantes, 2009a.
- P. Gossiaux. Méthode d’intégrales de frontière. Technical report, Ecole des Mines de Nantes, 2009b.
- P. Gossiaux. Electrical modeling of electrolocation, deliverable d.2.4 a), mono agent electric simulator, the fp7 angels project no : 231845. Technical report, Mine’s school of Nantes, 2010.
- P. Gossiaux, B. Jawad, V. Lebastard, F. Boyer, C. Chevallereau, and A. Girin. Analytical model for multipolar sensors and applications to electrolocation of elementary objects. Technical report, Ecole des Mines, 2010.
- M. Hamalainen and J. Sarvas. Feasibility of the homogeneous head model in the interpretation of neuromagnetic fields. *Physics in medicine and biology*, 32, 1987.
- J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds number hydrodynamics*. Prentice Hall, 1965.
- D. Herrick and T. Senior. The dipole moments of a dielectric cube. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 25 :590–592, 1977.
- J. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1962.
- B. Jawad. Extension du simulateur bem. Technical report, Ecole des Mines de Nantes, 2010.
- B. Jawad, P. Gossiaux, F. Boyer, V. Lebastard, F. Gomez, N. Servagent, S. Bouvier, A. Girin, and M. Porez. Sensor model for the navigation of underwater vehicles by the electric sense. In *Robotics and Biomimetics ROBIO IEEE*, 2010.
- L. A. Klein and C. T. Swift. An improved model for the dielectric constant of sea water at microwave frequencies. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, AP-25 :104–111, 1977.
- L. Landau and E. Lifshitz. *Electrodynamics of Continuous Media, second ed.* Pergamon Press, Oxford, 1984.
- V. Lebastard, C. Chevallereau, A. Amrouche, B. Jawad, A. Girin, F. Boyer, and P. Gossiaux. Underwater robot navigation around a sphere using electrolocation sense and kalman filter. In *IROS 2010 IEEE*, 2010a.
-

-
- V. Lebastard, M. Porez, F. Boyer, and P. Gossiaux. Application of the boundary element method to the electrolocation of ideal insulating and/or conducting objects, deliverable d.2.4 b), mono agent electric simulator, the fp7 angels project no : 231845. Technical report, Mine's school of Nantes, 2010b.
- H. Lisssmann and K. Machin. The mechanism of object location in *gymnarchus niloticus* and similar fish. *The Journal of Experimental Biology*, (35) :451–486, 1958.
- Y. Liu. *Fast multipole boundary element method*. Cambridge university press, 2009.
- A. Longtin. Linking dynamics to function in weakly electric fish. *SIAMS News*, 40(2), 2007.
- M. MacIver and J. Solberg. Towards a biorobotic electrosensory system. *Autonomous robots*, 11 :263–266, 2001.
- M. MacIver, N. Sharabash, and M. Nelson. Prey-capture behavior in gymnotid electric fish : motion analysis and effects of water conductivity. *The Journal of Experimental Biology*, 204 :543–557, 2001.
- M. Mansfield, J. Douglas, and E. Garboczi. Intrinsic viscosity and the electrical polarizability of arbitrarily shaped objects. *Physical Review E*, 64 :61401–61416, 2001.
- J. C. Maxwell. *Traité d'électricité et de magnétisme*. 1885.
- W. Metzner and W. Heiligenberg. The coding of signals in the electric communication of the gymnotiform fish *eigenmannia* : From electroreceptors to neurons in the torus semicircularis of the midbrain. *Journal of Comparative Physiology A*, 169 :135–150, 1991.
- A. Migliaro, A. Caputi, and R. Budelli. Theoretical analysis of pre-receptor image conditioning in weakly electric fish. *PLoS Comp. Biol.*, 2005.
- M. Morse and H. Feshbach. *Mathematical methods in physics*. 1953.
- M. Nelson and M. MacIver. Sensory acquisition in active sensing systems. *Journal of Comparative Physiology A*, 192 :573–586, 2006.
- M. Nelson, M. MacIver, and S. Coombs. Modeling electrosensory and mechanosensory images during the predatory behavior of weakly electric fish. *Brain, Behavior and Evolution*, 59 :199–210, 2002.
- J. Perez. *Electromagnétisme, fondements et applications*. 2001.
- B. Rasnow. The effects of simple objects on the electric field of *apteronotus*. *Journal of Comparative Physiology A*, 3(178) :397–411, 1996.
- B. Rasnow and J. M. Bower. The electric organ discharges of the gymnotiform fishes. *Journal of Comparative Physiology A*, 178(3) :383–396, 1996.
- D. Redzic. An electrostatic problem : a point charge outside a dielectric prolate spheroid. *American journal of physics*, 62(12) :1118, 1994.
- D. Rother, A. Migliaro, R. Canetti, L. Gomez, A. Caputi, and R. Budelli. Electric images of two low resistance objects in weakly electric fish. *Biosystems*, 71 :171–179, 2003.
-

- M. Schiffer and G. Szego. Virtual mass and polarization. *Transactions of the American Mathematical Society*, 67 :130–205, 1949.
- N. Servagent, S. Bouvier, and F. Gomez. Principles and technologies of the electric sensing extended to the electrolocation of objects and agents, deliverable d.4.8, the fp7 angels project no : 231845. Technical report, Mine’s school of Nantes, 2011a.
- N. Servagent, B. Jawad, S. Bouvier, F. Boyer, A. Girin, F. Gomez, V. Lebastard, and P. Gossiaux. Bioinspired sensor for electrolocation and navigation in conducting media. *IEEE SENSORS JOURNAL (submitted)*, 2011b.
- A. Sihvola, P. Ylä-Oijala, S. J. Pää, and J. Avelin. Polarizabilities of platonic solids. *IEEE transactions on antennas and propagation*, 52(9), 2004.
- W. Smythe. Charged right circular cylinder. *Journal of Applied Physics*, 33 :2966–2967, 1962.
- J. Solberg, K. Lynch, and M. MacIver. Robotic electrolocation : Active underwater target localization. *International Conference on Robotics and Automation*, 2007.
- E. Somersalo, M. Cheney, and D. Isaacson. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM J. Appl. Math.*, 52 :1023–1040, 1992.
- P. Stoddard, H. Zakon, M. Markham, and L. MacAnelly. Regulation and modulation of electric waveforms in gymnotiform electric fish. *Journal of Comparative Physiology A*, 192 :613–624, 2006.
- C. Stok, J. Meijs, and M. Peters. Inverse solutions based meg and eeg applied to volume conductor analysis. *Physics in medicine and biology*, 32 :99–104, 1987.
- T. Taylor. Electric polarizability of a short right circular conducting cylinder. *Journal of Research of the National Bureau of Standards B. Mathematics and Mathematical Physics*, 64B :917–920, 1960.
- J. VanBladel. *Electromagnetic fields*. 1985.
- G. Vasilescu. *Bruits et signaux parasites*. Dunod, 1999.
- T. Vilhunen, J. P. Kaipio, P. J. V. T. Savolainen, and M. Vauhkonen. Simultaneous reconstruction of electrode contact impedances and internal electrical properties : I. theory. *Meas. Sci. Technol.*, 13 :1848–1854, 2002.
-

Publications de l'auteur

- M.-R. Benachenhou, F. Boyer, P.-B. Gossiaux, B. Jawad, V. Lebastard, and M. Porez. Angels project wp2 d2.5 : Report on multi-agents electrical modeling. Technical report, Ecole des Mines de Nantes, 2011.
- F. Boyer, P. Gossiaux, B. Jawad, V. Lebastard, and M.Porez. Model for a sensor inspired by electric fish (postprint). *IEEE transactions on robotics*, 2011.
- P. Gossiaux, B. Jawad, V. Lebastard, F. Boyer, C. Chevallereau, and A. Girin. Analytical model for multipolar sensors and applications to electrolocation of elementary objects. Technical report, Ecole des Mines, 2010.
- B. Jawad. Extension du simulateur bem. Technical report, Ecole des Mines de Nantes, 2010.
- B. Jawad, P. Gossiaux, F. Boyer, V. Lebastard, F.Gomez, N.Servagent, S.Bouvier, A.Girin, and M.Porez. Sensor model for the navigation of underwater vehicles by the electric sense. In *Robotics and Biomimetics ROBIO IEEE*, 2010.
- V. Lebastard, C. Chevallereau, A. Amrouche, B. Jawad, A. Girin, F. Boyer, and P. Gossiaux. Underwater robot navigation around a sphere using electrolocation sense and kalman filter. In *IROS 2010 IEEE*, 2010.
- N. Servagent, B. Jawad, S. Bouvier, F. Boyer, A. Girin, F. Gomez, V. Lebastard, and P. Gossiaux. Bioinspired sensor for electrolocation and navigation in conducting media. *IEEE SENSORS JOURNAL (submitted)*, 2011.
-

Brahim Khalil Jawad

Modélisation de l'électrolocation pour la bio-robotique Modelling of electrolocation for bio-robotics

Résumé

Le projet européen ANGELS a pour but de construire un robot anguille capable de naviguer par le sens électrique et de se scinder en plusieurs mono-agents pour des besoins d'exploration. Dans le cadre de ce projet, mon travail a consisté à élaborer un modèle de perception inspiré du poisson électrique, le challenge étant de faire de ce modèle un modèle de perception rapide et embarquable pour une détection en ligne par un engin sous-marin robotisé équipé du modèle. Deux modèles de perception ont été construits, s'appuyant tous deux sur une géométrie simple mais réaliste de capteur. Les deux modèles baptisés « modèle poly-sphérique » et « modèle des réflexions » provenant respectivement d'une intuition physique et d'une méthode mathématique appropriée se calibrent une fois pour toute avec un simulateur électrique, pour revêtir in fine une forme analytique. Couplés aux modèles existant de réponses électriques d'objets, les modèles de perception ont permis de faire effectuer à un robot capteur des tâches basiques d'évitement et de détection, ce qui est à ce jour une première dans l'histoire. En parallèle, nous avons développé un formalisme générique de réponse d'objet permettant d'étendre le champ d'applicabilité des modèles de perception. Enfin, nous avons commencé à estimer l'impact d'une géométrie complexe de capteur présentant de larges surfaces isolantes sur la mesure pour envisager la modélisation du sens électrique par un capteur de forme arbitraire.

Mots clés

Electrolocation, bio-robotique, électrostatique.

Abstract

The goal of the European project ANGELS is to build an eel-like robot capable to navigate by the electric sense and to divide itself in several mono-agents for exploration purposes. In the context of this project my work consisted in creating a perception model inspired from the electric fish with the virtue of being fast and so, to be usable in-line. Two models of perception were built and were based on a simple but realistic geometry of sensor.

The two models named after the « poly-spherical model » and the « reflexions model » which come respectively from a physical intuition and an appropriate mathematical model are calibrated once for all with an electrical simulator in order to have analytical forms. Coupled with models of the electrical response of objects, the two models of perception permit the robot to achieve some basic tasks like detection and obstacles' avoidance, which is a novelty in the history. In addition we have built a generic formalism of the electrical response that extends the application of the models of perception. Finally we have begun to estimate the influence of a complex geometry of sensor, that exhibits large insulating surfaces, on the measurement in order to open the way for the rapid modelling of a sensor of arbitrary shape.

Key Words

Electrolocation, bio-robotics, electrostatics