Numéro d'ordre : 4725

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

École Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur

par

Asma MAACHOU-VAXELAIRE
Ingénieur ENSEIRB

en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : Automatique, Productique, Signal et Image

Identification par modèle non entier non linéaire : Application à la modélisation de la diffusion thermique

---

Soutenue le 19/12/2012

Après avis de

Mme	M. GILSON-BAGREL	Maître de Conférences, HDR, à l'Université de Lorraine CRAN – UMR 7039 CNRS – Nancy	*Rapporteur*
M	T. POINOT	Professeur à l'Université de Poitiers LIAS – FR 3423 CNRS – Poitiers	*Rapporteur*

Devant la commission d'examen formée des rapporteurs et de

MM.	L. AUTRIQUE	Professeur à l'Université d'Angers, LISA-ISTIA – EA 4094 – Angers	*Président*
	J.-L. BATTAGLIA	Professeur à l'Université Bordeaux 1 I2M – UMR 5295 CNRS – Talence	
	R. MALTI	Maître de Conférences, HDR, à l'Université Bordeaux 1 IMS – UMR 5218 CNRS – Talence	*Directeur de Thèse*
	P. MELCHIOR	Maître de Conférences, à l'IPB IMS – UMR 5218 CNRS – Talence	*Co-directeur*
	A. OUSTALOUP	Professeur à l'IPB, IMS – UMR 5218 CNRS – Talence	
Mme.	A. VODA-BESANÇON	Maître de Conférences, HDR, à Polytech' Grenoble GIPSA-lab – UMR 5216 CNRS – GRenoble	

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système UMR 5218 CNRS
351 cours de la Libération – 33405 Talence Cedex – France
http ://www.ims-bordeaux.fr/

– 2012 –

On dit que le secret de la réussite, c'est d'être là où il faut quand il faut. Mais comme on ne sait jamais quand ce sera, il faut trouver l'endroit idéal et y rester planté.

Bill Watterson

Beaucoup de réflexion et non beaucoup de connaissances, voilà à quoi il faut tendre.

Democrite

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS) au sein de l'équipe CRONE du groupe Automatique, animé par le Professeur Alain Oustaloup et Pierre Melchior.

Je tiens à remercier, en premier lieu, Messieurs Rachid Malti et Pierre Melchior, co-directeurs de ma thèse, pour m'avoir fait confiance et confié ce projet. Qu'ils soient assurés de ma sincère reconnaissance pour leur encadrement et leur enthousiasme tout au long de ces années. Je remercie particulièrement Monsieur Rachid Malti, Maître de Conférences, HDR, à l'Université Bordeaux 1, pour la patience, la rigueur, l'attention et les précieux conseils qu'il a su me prodiguer. Je remercie également Monsieur Pierre Melchior, Maître de Conférences à l'Institut Polytechnique de Bordeaux (IPB), pour sa disponibilité, son écoute et ses conseils tant professionnels que personnels.

Je remercie aussi Monsieur Alain Oustaloup, Professeur à l'IPB, ancien directeur de ma thèse et membre du jury, pour la passion, la joie et l'enthousiasme partagés pendant la durée de mes travaux.

Je remercie Monsieur Fréderic Noël, Ingénieur d'étude à THERMICAR, pour son accompagnement et son expertise lors des expériences sur banc réel au laboratoire I2M à l'ENSAM de Bordeaux.

Je remercie également Monsieur Jean-Luc Battaglia, Professeur à l'ENSAM, non seulement d'avoir accepté de participer à ce jury mais également pour sa disponibilité, son expérience et son expertise tout au long du projet ANR qu'il a coordonné et dont provient le financement de ma thèse.

Je tiens à remercier les membres du jury de thèse de toute l'attention qu'ils m'ont

manifestée, à commencer par Madame Marion Gilson-Bagrel, Maître de Conférences, HDR, à l'Université de Lorraine et Monsieur Thierry Poinot, Professeur à l'Université de Poitiers qui ont eu la charge de rapporter sur mes travaux. Je remercie aussi Monsieur Laurent Autrique, Professeur à l'Université d'Angers, qui m'a fait l'honneur de présider le jury et Madame Alina Voda-Besançon, Maître de Conférences, HDR, à Polytech' Grenoble, d'avoir accepté de participer à ce jury.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du pôle P3S et plus particulièrement aux membres de l'équipe CRONE parmi lesquels j'ai trouvé un environnement de travail agréable. Je remercie les permanents, qui ont à cœur de partager certaines traditions et le "bon vieux temps" autour d'un bon vin, et surtout mes comparses doctorants : Firas mon maître Jedi, Stéphane qui est passé du coté obscur de la Force, Mathieu mon binôme de bureau et grand chef des doctorants, le "petit" Lamine geek vidéoludique et aussi Ben J, Audrey, Huy Cuong, Chayapol et tous ceux que je n'ai pas cités. Je remercie également Valérie et Josette pour leur bonne humeur et sans qui les tracas administratifs auraient eu raison de moi.

Enfin, "last but not least", je remercie ma famille qui, malgré la distance, m'a témoigné son soutien pendant les moments difficiles, mon mari qui a dû me supporter les plus mauvais jours, et mes amis qui m'ont entourée et réconfortée pendant toutes ces années.

Table des matières

Introduction générale 1

1 Introduction aux systèmes non entiers et application à la modélisation de phénomènes de diffusion thermique 7

1.1 Introduction 8

1.2 Intégration et dérivation non entières 9

1.2.1 Définition 9

1.2.2 Transformée de Laplace 10

1.3 Représentation des systèmes non entiers 11

1.3.1 Equation différentielle 11

1.3.2 Fonction de transfert 12

1.3.3 Pseudo-représentation d'état 12

1.4 Stabilité de systèmes non entiers 13

1.4.1 Définition de la stabilité entrée bornée sortie bornée, *Bounded-Input Bounded-Output (BIBO)* 13

1.4.2 Analyse de la stabilité 14

1.5 Simulation de systèmes non entiers 15

1.5.1 Discrétisation temporelle de l'opérateur non entier 15

1.5.2 Synthèse fréquentielle de l'opérateur non entier 16

1.6 Intérêt de la dérivation non entière pour la modélisation de phénomènes de diffusion thermique 18

1.6.1 Introduction à la diffusion thermique 18

1.6.2 Diffusion thermique en milieu semi-infini plan 20

1.7 Conclusion 22

2 Identification par modèle linéaire non entier et modélisation de la diffusion thermique autour de plusieurs températures 25

2.1 Introduction 26

2.2 Etat de l'art de l'identification par modèle linéaire non entier 29

2.2.1 Estimation des coefficients linéaires et des ordres de dérivation . . . 30
2.2.1.1 Modèle basé sur la forme développée d'une fonction de transfert . . . 31
2.2.1.2 Modèle basé sur la décomposition modale d'une fonction de transfert . . . 34
2.2.2 Estimation des coefficients linéaires . . . 36
2.2.2.1 Méthode des moindres carrés (**mc**) . . . 37
2.2.2.2 Méthode des moindres carrés avec filtre à variables d'état (**fve**) . . . 37
2.2.2.3 Méthode de la variable instrumentale avec filtre à variables d'état (**vi/fve**) . . . 40
2.2.2.4 Méthode de la variable instrumentale optimale (**srivcf**) . . . 41
2.2.2.5 Modèle basé sur les fonctions orthogonales . . . 44
2.3 Identification par modèles linéaires non entiers du transfert température/-flux dans un échantillon de fer ARMCO . . . 48
2.3.1 Modélisation d'un échantillon de fer ARMCO sous COMSOL pour la génération de données par éléments finis . . . 48
2.3.2 Identification du transfert température/flux autour de 600K . . . 53
2.3.3 Identification autour de plusieurs points de fonctionnement . . . 55
2.4 Conclusion . . . 59

3 Modèle non linéaire basé sur les séries de Volterra : choix des noyaux en présence de connaissances physiques du système 61
3.1 Introduction . . . 62
3.2 Séries de Volterra en modélisation de systèmes non linéaires à dérivées entières : état de l'art . . . 64
3.2.1 Des modèles linéaires aux modèles non linéaires . . . 64
3.2.2 Détermination de la structure des noyaux . . . 66
3.2.2.1 Décomposition en série de Taylor . . . 66
3.2.2.2 Méthode du sondage harmonique . . . 67
3.2.2.3 Expression analytique des noyaux de Volterra . . . 68
3.2.2.4 Algèbre de George . . . 69
3.3 Séries de Volterra en modélisation de systèmes non linéaires à dérivées non entières : application en thermique . . . 74
3.3.1 De l'équation de la chaleur aux noyaux de Volterra . . . 74

3.3.2 Solution analytique explicite pour $H_1(s_1)$ et $H_2(s_{1:2})$ 76
3.3.3 Solution générale pour $H_n(0, s_{1:n})$ 78
3.3.4 Simulation et analyse 79
3.3.5 Noyaux simplifiés intrinsèques 81
3.4 Conclusion 83

4 Modèle non linéaire basé sur les séries de Volterra : choix des noyaux en absence de connaissances physiques du système 85

4.1 Introduction 87
4.2 Séries de Volterra en identification de systèmes non linéaires à dérivées entières : état de l'art 87
4.2.1 Introduction 87
4.2.2 Choix de la structure des noyaux 88
4.2.2.1 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de Hammerstein . 88
4.2.2.2 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de Wiener 89
4.2.2.3 Noyaux de Volterra basés sur le modèle d'Uryson 89
4.2.2.4 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de projection-poursuite 91
4.2.2.5 Noyaux de Volterra basés sur les bases orthogonales 91
4.3 Séries de Volterra en identification de systèmes non linéaires à dérivées non entières 93
4.3.1 Fonctions génératrices de bases orthogonales non entières 93
4.3.2 Noyaux basés sur les fonctions génératrices de bases orthogonales non entières 94
4.3.3 Estimation paramétrique 95
4.3.3.1 Estimation des coefficients linéaires du modèle 98
4.3.3.2 Estimation des paramètres non linéaires du modèle 99
4.3.3.3 Algorithme de programmation non linéaire pour l'estimation paramètrique du modèle 101
4.4 Identification de la diffusion thermique à partir des données de simulation . 102
4.4.1 Protocole expérimental 102
4.4.2 Estimation paramétrique 103
4.5 Identification de la diffusion thermique à partir des données expérimentales 107
4.5.1 Protocole expérimental 107
4.5.2 Estimation paramétrique 108

4.6 Comparaison des modèles obtenus avec les données expérimentales 113
4.7 Conclusion 117

Table des figures

1 Résolution d'un problème inverse 2

1.1 Régions de stabilité : un système est stable si et seulement si les s^{ν}-pôles sont à l'intérieur du domaine grisé 14
1.2 Diagrammes de Bode de l'opérateur non entier, de sa synthèse par distribution récursive de pôles et de zéros et la courbe de lissage correspondante 17
1.3 Modélisation du transfert température $(T(x,t))$/flux (φ) dans un milieu semi-infini plan 20
1.4 Comparaison des diagrammes de Bode du modèle théorique et des modèles approchés jusqu'à l'ordre 2 du transfert thermique flux/température 23

2.1 Etapes composant la procédure d'identification d'un système 27
2.2 Modèle à erreur de sortie 32
2.3 Décomposition modale 35
2.4 Modèle à erreur d'équation 36
2.5 Méthode itérative **vi/fve** pour modèles non entiers ($\gamma = \beta_0, \ldots, \beta_{m_B}$ et $\mu = \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_A}$) 42
2.6 Méthode itérative **srivcf** 45
2.7 Géométrie de l'échantillon de fer ARMCO 49
2.8 Caractéristiques thermiques du fer ARMCO en fonction de la température en Kelvin 51
2.9 Données d'identification et de validation autour de 600K, la température constante de 600K ayant été retranchée de la sortie 52
2.10 Comparaison entre la sortie du système et celle du modèle d'ordre 4 sur les données de validation à 600K 54
2.11 Erreur résiduelle entre la sortie simulée par éléments finis et la sortie du modèle linéaire non entier 55
2.12 Diagrammes de Bode de G_{400},G_{600},G_{800},G_{1000},G_{1040} 56

2.13 Diagrammes de Bode de G_{1040},G_{1070} . . . 57
2.14 Modèles LPV et quasi-LPV . . . 58
2.15 Courbes d'interpolation polynomiale d'ordre 4 pour chaque paramètre du modèle . . . 59
2.16 Courbes d'interpolation polynomiale d'ordre 4 pour les paramètres variant dans l'intervalle [-0.2 ;1.2] . . . 60

3.1 Approximation de la sortie $y(t)$ à partir du développement en série de l'entrée $u(t)$. . . . 65
3.2 Opérations élémentaires de l'algèbre de George . . . 70
3.3 Système en cascade . . . 73
3.4 Modélisation du transfert température $(T(x,t))$/flux (φ) dans un milieu semi-infini plan . . . 75
3.5 Température simulée en $x = 0$ grâce aux calculs des noyaux de Volterra H_1, H_2 et H_3, la somme des contributions linéaire et non linéaires $T(t) = T_1(t) + T_2(t) + T_3(t)$ étant comparée à la sortie du modèle par éléments finis pour $\varphi(t) = \varphi_0 = 3 \times 10^6\,\mathrm{W/m^2}$. . . . 80
3.6 Variation de la conductivité thermique pour les 3 valeurs de flux . . . 81
3.7 Température $T(x = 0, t)$ calculée par éléments finis (cercle) et par la relation (3.95) avec $\alpha = 1.7$ pour les 3 valeurs de flux . . . 83

4.1 Modèle d'Hammerstein . . . 89
4.2 Modèle de Wiener . . . 89
4.3 Modèle d'Uryson . . . 90
4.4 Noyau quadratique développé sur une base de 3 fonctions orthonormales . 92
4.5 Noyau de Volterra d'ordre k développé sur une base de M fonctions génératrices . . . 96
4.6 Noyau quadratique développé sur une base de 3 fonctions génératrices . . . 96
4.7 Méthode d'estimation des paramètres . . . 101
4.8 Géométrie de l'échantillon de fer ARMCO (dimensions en mm) . . . 102
4.9 Données d'identification et de validation, la température ambiante de 300K ayant été soustraite . . . 104
4.10 Comparaison entre la sortie du système, celle du modèle linéaire et celle du modèle de Volterra avec la contribution des deux premiers noyaux sur les données de validation, la température ambiante de 300K ayant été soustraite. 106
4.11 Erreurs résiduelles entre la sortie du système et celles des modèles . . . 106

4.12 Banc expérimental du laboratoire I2M (Université de Bordeaux) 108
4.13 Echantillon de fer ARMCO isolé électriquement 109
4.14 Echantillon de fer ARMCO muni d'un thermocouple 109
4.15 Echantillon de fer ARMCO muni de fils conducteurs 110
4.16 Echantillon de fer ARMCO isolé thermiquement 110
4.17 Données d'identification et de validation, la température initiale de 940K ayant été soustraite 111
4.18 Comparaison entre la sortie du système, celle du modèle linéaire et celle du modèle de Volterra avec les contributions des deux premiers noyaux sur les données de validation, la température initiale de 940K ayant été soustraite 114
4.19 Erreurs résiduelles entre la sortie du système et celles des modèles. 115
4.20 Comparaison entre la sortie du banc expérimental, celle du modèle de Volterra et celle du modèle par éléments finis sur les données de validation . . 116
4.21 Erreurs résiduelles entre la sortie du banc expérimental et celles des modèles 116

Introduction générale

Contexte

Le concept et le formalisme mathématiques de la dérivation non entière ont été établis au début du XIX^{ème} siècle par des mathématiciens célèbres tels que *Laplace*, *Liouville*, *Abel*, *Riemann* et *Cauchy*. Cet opérateur constitue l'outil mathématique par excellence pour modéliser les systèmes physiques à mémoire longue, tels que les systèmes diffusifs, à l'aide d'un modèle compact. Sa synthèse et son application, dans les sciences physiques et les sciences pour l'ingénieur, remontent à la seconde moitié du XX^{ième} siècle. Aujourd'hui, l'intérêt de la dérivation non entière ne cesse de grandir, notamment dans le domaine de l'automatique pour la modélisation comme pour la commande (Machado *et al.*, 2011; Oldham and Spanier, 1972; Oustaloup, 1995; Podlubny, 1999).

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le projet ControlTherm financé par l'Agence Nationale de la Recherche dans le cadre du programme " Matériau et Procédés ". Ce projet vise à développer de nouveaux outils de coupe permettant d'estimer correctement le flux thermique généré lors de conditions d'usinage sévères de matériaux à haute valeur ajoutée, l'évolution du flux permettant de prévenir une éventuelle défaillance de l'outil. L'approche adoptée s'articule autour de deux étapes schématisées sur la figure 1. Dans un premier temps, un modèle entre le flux injecté à la pointe de l'outil et la température mesurée à la sonde est identifié hors ligne. Ensuite, la connaissance du modèle et de la température permet d'estimer le flux à la pointe de l'outil de coupe par modèle inverse en ligne. Le domaine d'application concerné par ce projet est celui de l'usinage de matériaux composites à forte valeur ajoutée en conditions sévères (température élevée). La température dans la zone de coupe, que ce soit dans un procédé d'usinage conventionnel ou bien à grande ou très grande vitesse (UGV ou UTGV), est un paramètre sensible. En effet, cette température conditionne principalement l'état de surface de la pièce usinée

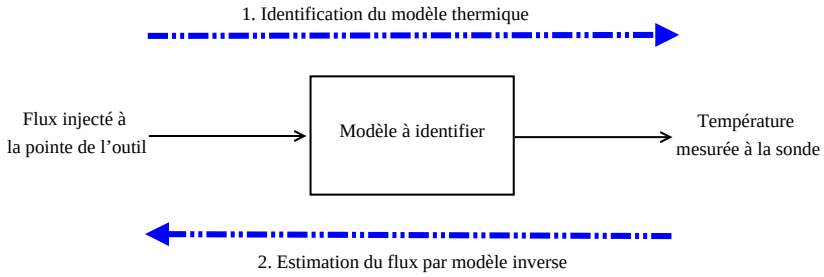


FIGURE 1 – Résolution d'un problème inverse

et donc son intégrité. Une élévation trop importante de la température à la surface de la pièce usinée favorise l'apparition de microfissures et de délaminages qui, à plus ou moins court terme en fonction des sollicitations auxquelles sera soumise la pièce, conduiront à une rapide diminution de ses propriétés mécaniques, voire à une destruction prématurée.

Ce projet fait appel à des compétences multidisciplinaires dans les domaines de la thermique et de l'automatique. Chaque partenaire du projet ANR apporte des compétences essentielles à la réalisation du projet et à sa réussite.

- L'Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux, I2M (ex-TREFLE), a développé depuis plusieurs années des compétences dans le domaine de la caractérisation thermique des matériaux et des systèmes à partir de méthodes inverses. Parmi les applications traitées, beaucoup concernent la thermique de l'usinage.
- Le Laboratoire National de métrologie et d'Essais, LNE, apporte une contribution essentielle à la réussite du projet du point de vue de la métrologie du banc de caractérisation de l'outil. En effet, un des points importants de ce travail concerne la mesure du flux de chaleur absorbé par l'outil.Le LNE développe depuis les années 1980 des bancs d'étalonnage de niveau primaire dans les domaines de la radiométrie laser et des mesures d'émissivité spectrale en fonction de la température.
- Le laboratoire d'Intégration du Matériau au système, IMS, est reconnu pour ses compétences dans le domaine de la dérivation non entière appliquée à l'automatique, notamment à travers le développement de la Commande Robuste d'Ordre Non Entier (commande CRONE). Il a initié depuis les années 1990 les travaux sur l'identification de systèmes à dérivées non entières et leur application en diffusion thermique. Ses travaux récents sur l'identification de systèmes à comportement non linéaire non entier seront particulièrement utiles à ce projet.

- La société Actarus est concernée par le transfert technologique et l'industrialisation d'outils de coupe munis de capteurs permettant une estimation du flux en temps réel.
- La société SLCA du groupe SAFRAN est intéressée par la mise au point de tels outils à des fins d'usinage de pièces à forte valeur ajoutée.

Objectifs de la thèse

La thèse concerne uniquement la première partie du projet : identification de la diffusion thermique. Initiés par la thèse de Le Lay (1998) et poursuivis par celles de Cois (2002), Aoun (2005), Sommacal (2007), Victor (2010), Bertrand (2011) et Khemane (2011), les travaux de recherche en identification de systèmes ont d'une part posé des fondements solides pour la modélisation de systèmes linéaires par modèles non entiers et ont montré d'autre part qu'il existe des systèmes qui se prêtent naturellement à une modélisation non entière, tels que les systèmes thermiques, électrochimiques ou biologiques. Cependant, de nombreux systèmes naturels sont non linéaires et ne sont qu'approchés par des modèles linéaires autour de points de fonctionnement. C'est pourquoi, il est nécessaire d'explorer une plus large classe de modèles pouvant être à la fois non entiers et non linéaires. L'objectif de cette thèse est donc de poursuivre les travaux entamés en identification de systèmes par modèles non entiers en se focalisant principalement sur les systèmes non entiers non linéaires. La méthode choisie consiste à étendre les modèles basés sur les séries de Volterra aux dérivées non entières afin d'obtenir un support théorique qui permet de prendre en compte les non-linéarités dans les systèmes non entiers et ainsi de définir une nouvelle classe de modèles pour l'identification de systèmes : la classe des modèles non entiers non linéaires.

Contributions spécifiques et organisation de la thèse

Le **chapitre 1** rappelle tout d'abord les notions mathématiques autour de la dérivation non entière. Les opérateurs non entiers d'intégration puis de dérivation y sont définis ; puis les diverses méthodes de représentation de systèmes non entiers sont rappelées. La stabilité des systèmes commensurables est abordée avant la présentation des méthodes de simulation de systèmes non entiers. Enfin, l'opérateur de dérivation non entière est appliqué dans le contexte du projet qui encadre cette thèse, à savoir la modélisation des phénomènes de diffusion thermique et en particulier la diffusion dans un milieu semi-infini

plan.

Le **chapitre 2** est consacré à l'identification par modèle linéaire non entier. Ce chapitre se décompose en deux parties. La première vise à présenter un état de l'art de l'identification par modèle linéaire non entier. Les méthodes d'identification développées jusqu'à présent peuvent être classifiées en deux catégories selon qu'elles soient basées sur la minimisation de l'erreur de sortie ou de l'erreur d'équation. La seconde partie présente une des contributions de ce mémoire qui consiste à identifier, autour de plusieurs points de fonctionnement, un modèle linéaire non entier du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO, à partir de données générées en simulation par éléments finis. Les modèles linéaires obtenus permettent d'une part de confirmer l'existence d'un comportement non linéaire pour de grandes variations de température (400K à 1000K) et, d'autre part, de construire un modèle à paramètres variants.

Le **chapitre 3** est consacré à l'extension des séries de Volterra aux dérivées non entières en présence de connaissances physiques du système. Après un état de l'art des différentes méthodes de calcul analytique des noyaux de Volterra en présence de telles connaissances, la principale contribution consiste à calculer les noyaux de Volterra pour la modélisation du transfert température/flux sur un système thermique en milieu semi-infini plan, à partir de l'équation de la chaleur, équation aux dérivées partielles non linéaires. Cette démarche est validée par la comparaison de la sortie du modèle par éléments finis avec la sortie du modèle de Volterra composée des contributions des trois premiers noyaux. Il apparaît clairement que ces noyaux font intervenir des opérateurs de dérivation d'ordre 0.5. Enfin, le noyau d'ordre 2 est manipulé afin d'obtenir un noyau intrinsèque simplifié permettant de modéliser à lui seul la contribution non linéaire du système.

Le **chapitre 4** traite de l'utilisation des séries de Volterra pour l'identification des systèmes non linéaires non entiers en absence de connaissances physiques du système. Après un état de l'art des différentes structures existantes pour le choix des noyaux en absence de connaissances physiques, la principale contribution consiste à sélectionner les noyaux de Volterra en se basant sur une combinaison de fonctions génératrices de bases orthogonales non entières. Une nouvelle classe de modèles à base de séries de Volterra non entières est ainsi développée. Cette démarche est ensuite appliquée à l'identification du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO à partir de données générées en simulation puis de données expérimentales. Enfin, le modèle par éléments

finis et le modèle de Volterra sont comparés au système expérimental.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes non entiers et application à la modélisation de phénomènes de diffusion thermique

1.1 Introduction **8**
1.2 Intégration et dérivation non entières **9**
1.2.1 Définition 9
1.2.2 Transformée de Laplace 10
1.3 Représentation des systèmes non entiers **11**
1.3.1 Equation différentielle 11
1.3.2 Fonction de transfert 12
1.3.3 Pseudo-représentation d'état 12
1.4 Stabilité de systèmes non entiers **13**
1.4.1 Définition de la stabilité entrée bornée sortie bornée, *Bounded-Input Bounded-Output (BIBO)* 13
1.4.2 Analyse de la stabilité 14
1.5 Simulation de systèmes non entiers **15**
1.5.1 Discrétisation temporelle de l'opérateur non entier 15
1.5.2 Synthèse fréquentielle de l'opérateur non entier 16
1.6 Intérêt de la dérivation non entière pour la modélisation de phénomènes de diffusion thermique **18**
1.6.1 Introduction à la diffusion thermique 18
1.6.2 Diffusion thermique en milieu semi-infini plan 20
1.7 Conclusion **22**

1.1 Introduction

Lorsque Liebniz utilise la notation $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ afin de généraliser à l'ordre n positif entier le concept de la dérivée, L'Hôpital l'interpelle sur la signification de cette notation dans le cas où $n = \frac{1}{2}$. C'est ainsi que, la notion de la dérivée non entière fait son apparition ouvrant la voie à de nombreux mathématiciens tels que Blaise Pascal, le Marquis de L'Hôpital, John Wallis ou d'Alembert dont les travaux vont permettre de définir la dérivée non entière $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ telle qu'on la connaît aujourd'hui (Miller and Ross, 1993). Par la suite, la dérivation à un ordre quelconque n'apparaît que de façon ponctuelle au cours du XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles, que ce soit dans les correspondances de Liebniz, ou en tant que remarques dans les travaux d'Euler. En 1812, Laplace définit la dérivée non entière par une intégrale et, Lacroix (1819) consacre moins de 2 des 700 pages de son ouvrage à ce sujet. Abel *et al.* (1881) emploient pour la première fois les opérateurs non entiers pour la résolution d'une équation intégrale soulevée par la formulation du problème tautochrone. Ce problème consiste à identifier la courbe sur laquelle une particule glisse jusqu'à son point le plus bas, sous l'influence uniforme de la gravité, dans un laps de temps indépendant de son point de départ. Une décennie plus tard, Liouville apporte une contribution majeure dans ce domaine dans ses ouvrages (Liouville, 1832*a*,*b*). Ce n'est qu'en 1974 que le premier ouvrage exclusivement consacré à ce sujet est publié par Oldham and Spanier (1974).

L'intérêt du mathématicien Spanier et du chimiste Oldham pour cet outil mathématique est né de la découverte en 1968 de la compacité et de la practicité apportées par l'approche utilisant l'opérateur de dérivation non entière lors de la résolution de certains problèmes électrochimiques, par rapport à l'approche traditionnelle de la loi de diffusion de Fick (Oldham and Spanier, 1974). Les deux derniers chapitres de leur ouvrage traitent particulièrement des applications possibles, notamment en diffusion dans des milieux semi-infinis ou finis, réécrivant de manière compacte la solution de ces problèmes dans des géométries diverses grâce à l'opérateur de dérivation d'ordre 0.5.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. L'intégration et la dérivation non entières sont introduites au paragraphe 1.2. Ensuite, les diverses représentations d'un système non entier sont énoncées au paragraphe 1.3. Puis, l'analyse de la stabilité est abordée au paragraphe 1.4. Les méthodes de simulation de systèmes non entiers, soit par discrétisation de l'opérateur non entier, soit par synthèse fréquentielle d'un dérivateur non entier, sont détaillées au paragraphe 1.5. Enfin, les systèmes non entiers sont appliqués à

la modélisation de phénomènes de diffusion thermique au paragraphe 1.6.

1.2 Intégration et dérivation non entières

1.2.1 Définition

Inspirée de la formule de *Cauchy*, la définition de *Riemann* de l'intégrale d'ordre $\gamma \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est donnée par :

$$\mathbf{I}_c^\gamma f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_c^t (t-\tau)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} c \in \mathbb{R} \\ \gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^- \end{cases} \tag{1.1}$$

où c et t sont les bornes d'intégration tel que $t \geq c$, f est supposée continue par morceaux sur $]c, \infty[$ et intégrable sur tout sous-intervalle fini de $[c, \infty[$ et Γ représente la fonction Gamma d'Euler définie pour les nombres complexes à partie réelle positive, $\gamma \in \mathbb{C}^+$, par :

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx, \tag{1.2}$$

et prolongée analytiquement sur l'ensemble des nombres complexes excepté les entiers négatifs, $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ grâce à la formule :

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda \Gamma(\lambda). \tag{1.3}$$

La définition (1.1) peut-être vue comme le produit de convolution $\star$

$$\mathbf{I}_c^\gamma f(t) = Y_\gamma \star f, \tag{1.4}$$

du noyau

$$Y_\gamma = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}, \tag{1.5}$$

et de la fonction f. Pour des valeurs particulières de c, l'intégrale non entière de *Riemann* (1.1) devient :

- l'intégrale de Liouville si $c = -\infty$:

$$\mathbf{I}_{-\infty}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.6}$$

- l'intégrale de Riemann-Liouville si $c = 0$:

$$\mathbf{I}_0^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau. \tag{1.7}$$

La dérivée d'ordre non entier $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ de *Riemann* d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est définie comme la dérivée entière d'ordre n d'une intégrale non entière d'ordre r (Oldham and Spanier, 1974), où n est le plus petit entier supérieur à $\mathfrak{Re}(\gamma)$ et $r = n - \gamma$:

$$\mathbf{D}_c^{\gamma} f(t) = \mathbf{D}^n \mathbf{I}_c^r f(t). \tag{1.8}$$

Comme dans le cas de l'intégrale non entière, la dérivée de *Riemann* (1.8) devient la dérivée de Riemann-Liouville si $c = 0$. Dans la mesure où les réponses impulsionnelles de systèmes causaux sont définies à partir de $t = 0$, la définition de Riemann-Liouville se trouve naturellement la plus utilisée en automatique. Afin de simplifier l'écriture, les notations suivantes seront adoptées :

$$\mathbf{I}^{\gamma} f(t) = \mathbf{I}_0^{\gamma} f(t), \tag{1.9}$$

$$\mathbf{D}^{\gamma} f(t) = \mathbf{D}_0^{\gamma} f(t). \tag{1.10}$$

1.2.2 Transformée de Laplace

L'interprétation de l'équation (1.1) comme le produit de convolution (1.4) permet le calcul de la transformée de Laplace de l'intégrale non entière (Oldham and Spanier, 1974), (Miller and Ross, 1993) :

$$\mathscr{L}\{\mathbf{I}^{\gamma} f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \mathscr{L}\{t^{\gamma-1}\} \mathscr{L}\{f(t)\} = s^{-\gamma} F(s) \tag{1.11}$$

avec $\mathfrak{Re}(\gamma) > 0$, $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ et s la variable de Laplace.

Compte tenu de (1.8) et de la définition de la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n entier d'une fonction temporelle f donnée par

$$\mathscr{L}\{\mathbf{D}^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \mathbf{D}^k f(t)|_{t=0^+}, \tag{1.12}$$

la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre γ non entier de la fonction f s'écrit (Oldham and Spanier, 1974) :

$$\mathscr{L}\{\mathbf{D}^{\gamma} f(t)\} = s^{\gamma} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \mathbf{D}^k (\mathbf{I}^r f(t))|_{t=0^+}. \tag{1.13}$$

Dans le cas où f est causale, l'expression (1.13) devient :

$$\mathscr{L}\{\mathbf{D}^{\gamma} f(t)\} = s^{\gamma} F(s). \tag{1.14}$$

1.3 Représentation des systèmes non entiers

Dans cette section, les systèmes sont considérés à temps continus, linéaires et invariants dans le temps (LTI), monovariables, strictement propres et régis par une équation différentielle aux dérivées non entières. L'étude d'un système non entier à dérivées complexes pose problème du fait que la dérivée non entière complexe d'une fonction réelle est à valeurs complexes. Par conséquent, l'ordre de dérivation et d'intégration sera restreint aux nombres réels. Plusieurs modes de représentation de systèmes non entiers existent : équation différentielle, fonction de transfert et pseudo-représentation d'état.

1.3.1 Equation différentielle

Dans le cas monovariable, un modèle mathématique non entier est généralement basé sur une équation différentielle non entière :

$$y(t) + a_1 \mathbf{D}^{\alpha_1} y(t) + \cdots + a_N \mathbf{D}^{\alpha_N} y(t) = b_0 \mathbf{D}^{\beta_0} u(t) + b_1 \mathbf{D}^{\beta_1} u(t) + \cdots + b_M \mathbf{D}^{\beta_M} u(t), \quad (1.15)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement l'entrée et la sortie du système, $(a_j, b_i) \in \mathbb{R}^2$ et les ordres de dérivation sont ordonnés pour des raisons évidentes d'identifiabilité :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N, \qquad 0 \leqslant \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_M. \quad (1.16)$$

Comme dans le cas d'une équation différentielle à dérivées entières, les ordres de dérivation doivent vérifier la contrainte $\alpha_N > \beta_M$ pour que le système soit strictement propre.

De plus, s'il existe un ordre commensurable ν, tel que tous les ordres de dérivation de l'équation différentielle (1.15) sont ses multiples entiers, alors l'équation (1.15) peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle de type séquentielle (Cois, 2002; Miller and Ross, 1993) :

$$y(t) + a_1 \overbrace{\mathbf{D}^{\nu}(\ldots(\mathbf{D}^{\nu} y(t))}^{\frac{\alpha_1}{\nu}\text{fois}} + \ldots + a_N \overbrace{\mathbf{D}^{\nu}(\ldots(\mathbf{D}^{\nu} y(t))}^{\frac{\alpha_N}{\nu}\text{fois}} = b_0 \overbrace{\mathbf{D}^{\nu}(\ldots(\mathbf{D}^{\nu} u(t))}^{\frac{\beta_0}{\nu}\text{fois}} + b_1 \overbrace{\mathbf{D}^{\nu}(\ldots(\mathbf{D}^{\nu} u(t))}^{\frac{\beta_1}{\nu}\text{fois}} + \ldots + b_M \overbrace{\mathbf{D}^{\nu}(\ldots(\mathbf{D}^{\nu} u(t))}^{\frac{\beta_M}{\nu}\text{fois}}. \quad (1.17)$$

Dans le cas des systèmes rationnels, l'ordre commensurable vaut 1.

1.3.2 Fonction de transfert

La transformée de Laplace de l'équation différentielle (1.15), soit

$$Y(s) + a_1 s^{\alpha_1} Y(s) + \ldots + a_N s^{\alpha_N} Y(t) = b_0 s^{\beta_0} U(s) + b_1 s^{\beta_1} U(s) + \ldots + b_M s^{\beta_M} U(s), \quad (1.18)$$

détermine la forme classique d'une fonction de transfert non entière :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i s^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^{N} a_j s^{\alpha_j}}. \quad (1.19)$$

Si le système est commensurable d'ordre ν, cette fonction de transfert peut s'écrire :

$$F(s) = S(s^\nu) = \frac{Q(s^\nu)}{P(s^\nu)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} \tilde{b}_i s^{i\nu}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_j s^{j\nu}} \quad (1.20)$$

où $S = \frac{Q}{P}$ est une fonction de transfert rationnelle, Q et P deux polynômes premiers entre eux, les entiers m and n sont donnés par

$$m = \frac{\beta_M}{\nu} \qquad \text{et} \qquad n = \frac{\alpha_N}{\nu}, \quad (1.21)$$

et $\forall i' \in \{0, 1, \ldots, m\}, \forall j' \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{cases} \tilde{b_{i'}} = b_i \text{ si } \exists i \in \{0, 1, \ldots, M\} \text{ tel que } i'\nu = \beta_i \\ \tilde{b_{i'}} = 0 \text{ sinon} \\ \tilde{a_{j'}} = a_j \text{ si } \exists j \in \{1, \ldots, N\} \text{ tel que } j'\nu = \alpha_j \\ \tilde{a_{j'}} = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.22)$$

1.3.3 Pseudo-représentation d'état

Par analogie au cas entier, il est possible de définir un modèle non entier à l'aide du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\gamma x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.23)$$

où u est le vecteur d'entrée et y le vecteur de sortie. Les matrices A, B, C et D sont de dimension appropriée et à coefficients constants appelées respectivement matrice d'évolution, matrice de commande, matrice d'observation et matrice d'action directe.

La pseudo-représentation d'état fait l'objet de deux niveaux de généralisation (Oustaloup, 1995). Dans le premier niveau de généralisation, les ordres de dérivation de toutes les équations différentielles élémentaires sont les mêmes et donnés par l'ordre commensurable. La première équation décrit l'évolution du vecteur $x(t)$ appelé pseudo-état et dans laquelle $x(t)$ fait l'objet d'une dérivation d'ordre γ entière ou non entière. La seconde est une équation de sortie classique. Dans le second niveau de généralisation, la pseudo-représentation d'état est fondée sur plusieurs ordres de dérivation quelconques. Le vecteur du pseudo-état $x = (x_1, \cdots, x_n)$ est de dimension n où chaque élément x_i est dérivé à un ordre γ_i du vecteur $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ composé des ordres de dérivation et de dimension n également.

1.4 Stabilité de systèmes non entiers

Il existe de nombreuses conditions de stabilité de systèmes linéaires non entiers (Matignon, 1998; Sabatier *et al.*, 2008). Dans la suite de ce paragraphe, seules les conditions de stabilité de type entrée bornée sortie bornée ou *bounded input, bounded output (BIBO)* sont considérées.

1.4.1 Définition de la stabilité entrée bornée sortie bornée, *Bounded-Input Bounded-Output (BIBO)*

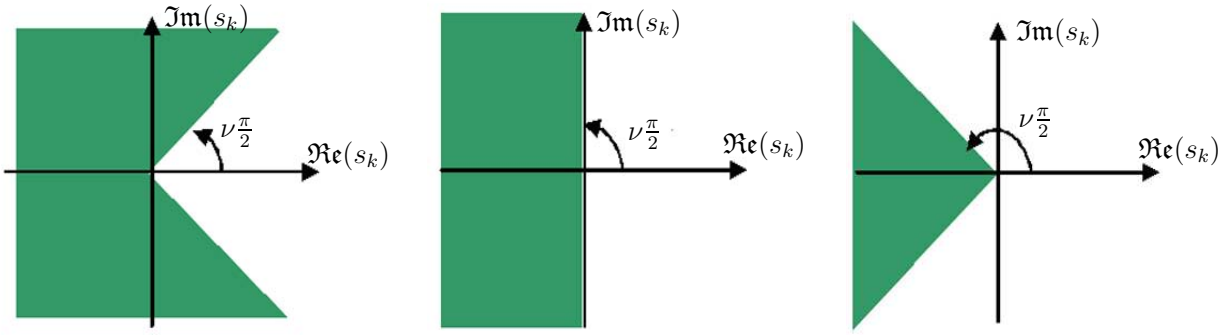
Un système monovariable est stable dans le sens "BIBO" si pour chaque entrée u bornée, la sortie y est également bornée :

$$\forall u \in L_\infty[0, \infty[\text{ on a } y \in L_\infty[0, \infty[. \tag{1.24}$$

On vérifie alors :

$$\| y \|_\infty \leq \| h \|_1 \| u \|_\infty, \tag{1.25}$$

avec h la réponse impulsionnelle du système considéré.



$0 < \nu < 1$ $\nu = 1$ $1 < \nu < 2$

FIGURE 1.1 – Régions de stabilité : un système est stable si et seulement si les s^ν-pôles sont à l'intérieur du domaine grisé

1.4.2 Analyse de la stabilité

Matignon (1998) a émis une conjecture, démontrée plus tard par Bonnet and Partington (2002), amenant à un premier résultat général, concernant la stabilité BIBO des systèmes non entiers, résumé au théorème suivant.

Théorème 1. *Soit une fonction de transfert rationnelle ou irrationnelle* $F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$. *$F(s)$ est dite BIBO-stable si et seulement si :*

$$\forall s/\Re e(s), \geq 0 \qquad \exists M, \mid F(s) \mid \leq M. \tag{1.26}$$

De plus, dans le cas où $F(s)$ est irréductible, la propriété de stabilité devient :

$$\forall s_k \in \mathbb{C}/P(s_k) = 0, \qquad \mid \arg(s_k) \mid > \frac{\pi}{2}. \tag{1.27}$$

De plus, si F est commensurable d'ordre $\nu \in]0, 1]$ et irréductible, Matignon a établi la condition de stabilité énoncée au théorème suivant en raisonnant sur les s^ν-pôles.

Théorème 2. *Soit une fonction de transfert commensurable, rationnelle en s^ν et irréductible $F(s) = \frac{Q(s^\nu)}{P(s^\nu)}$ tel que $0 < \nu < 1$. $F(s)$ est BIBO-stable si et seulement si :*

$$\forall s_k \in \mathbb{C}/P(s_k) = 0, \qquad \mid \arg(s_k) \mid > \nu\frac{\pi}{2}. \tag{1.28}$$

Hotzel and Fliess (1998), Aoun (2005) et Moze (2007) généralisent ce théorème au cas où $\nu \in]0, 2[$. Ainsi, la figure 1.1 illustre les domaines de stabilité pour différentes valeurs de l'ordre commensurable. Le système est stable si les s^ν-pôles se situent dans la zone grisée.

1.5 Simulation de systèmes non entiers

Il existe deux façons de simuler les systèmes non entiers : soit en discrétisant l'opérateur non entier dans le domaine temporel, soit en synthétisant une fonction de transfert rationnelle à partir de la fonction de transfert non entière dans le domaine fréquentiel et en appliquant ensuite les méthodes de simulation temporelle de fonctions de transfert rationnelles.

1.5.1 Discrétisation temporelle de l'opérateur non entier

Afin de simuler un système non entier, l'opérateur de dérivation non entière peut être remplacé par une approximation numérique, afin d'obtenir une équation récurrente directement simulable. La dérivée d'ordre non entier au sens de *Grünwald-Letnikov* peut être obtenue par la généralisation aux réels de la définition de la dérivation entière (Grünwald, 1867), (Miller and Ross, 1993), (Podlubny, 1999), (Oustaloup, 1995). En effet, la dérivée à gauche d'ordre 1 d'une fonction f s'écrit :

$$\mathbf{D}f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{1.29}$$

De même, la dérivée à l'ordre 2 conduit à :

$$\mathbf{D}^2 f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \tag{1.30}$$

Cette forme suggère une généralisation à un ordre de dérivation γ quelconque :

$$\mathbf{D}^\gamma f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\gamma} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{n} \rfloor} (-1)^k \binom{\gamma}{k} f(t-kh), \tag{1.31}$$

où $\binom{\gamma}{k}$ désigne le coefficient du binôme de *Newton* généralisé à des nombres réels :

$$\binom{\gamma}{k} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\gamma-k+1)} = \frac{\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-k+1)}{k!}. \tag{1.32}$$

La fonction Γ possédant des singularités pour tout entier négatif, il vient :

$$\binom{\gamma}{k} = 0 \quad \text{pour tout} \quad \gamma - k = -1, -2, -3, \cdots \tag{1.33}$$

Pour une évaluation numérique de l'équation (1.31), le paramètre infinitésimal h est remplacé par la période d'échantillonnage :

$$\mathbf{D}^{\gamma} f(t) = \frac{1}{h^{\gamma}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{n} \rfloor} (-1)^k \binom{\gamma}{k} f((t-k)h) + O(h). \tag{1.34}$$

Pour la dérivée d'ordre 1, mis à part $k = 0$ et $k = 1$, les coefficients de la pondération $(-1)^k \binom{\nu}{k}$ sont nuls. La dérivée entière fournit donc une caractérisation locale de la fonction. En revanche, pour des ordres γ non entiers, les coefficients de pondération ne s'annulent pas. La valeur à chaque instant est alors une combinaison linéaire de toutes les valeurs de la fonction $f((K-k)h), k = 0, 1, \cdots, K$. La dérivée non entière d'une fonction à un instant t prend en compte les valeurs de cette fonction à tous les temps passés, donnant ainsi une caractérisation globale de cette fonction. Par conséquent, les systèmes non entiers sont souvent assimilés à des systèmes à mémoires longues.

1.5.2 Synthèse fréquentielle de l'opérateur non entier

L'approche basée sur une distribution de pôles et de zéros résulte des travaux de (Oustaloup, 1995) sur la synthèse d'un dérivateur non entier borné en fréquence. Les systèmes réels ont généralement un comportement non entier sur une bande de fréquence donnée, limitée par la fréquence de Nyquist pour la borne supérieure et par le spectre du signal d'entrée pour la borne inférieure. La dérivée non entière est de fait limitée à un intervalle fréquentiel borné. La synthèse du dérivateur d'ordre non entier repose alors sur une distribution récursive d'un nombre fini de pôles et de zéros.
Dans une première phase, cette approche consiste à remplacer chaque opérateur s^{γ} d'ordre non entier tel que $\gamma \in [-1, 1]$ par un opérateur $s^{\gamma}_{[\omega_A, \omega_B]}$ borné en fréquence sur la bande $[\omega_A, \omega_B]$:

$$s^{-\gamma}_{[\omega_A, \omega_B]} = s^{-\gamma}, \quad \forall \omega \in [\omega_A, \omega_B], \tag{1.35}$$

dont l'expression symbolique est

$$s^{-\gamma}_{[\omega_A, \omega_B]} = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{-\gamma}, \tag{1.36}$$

où $\omega_b < \omega_h$ désignent les fréquences transitionnelles basse et haute, fixées de part et d'autre de $[\omega_A, \omega_B]$ conformément à $\omega_b = \chi^{-1}\omega_A$ et $\omega_h = \chi\omega_B$, χ étant généralement

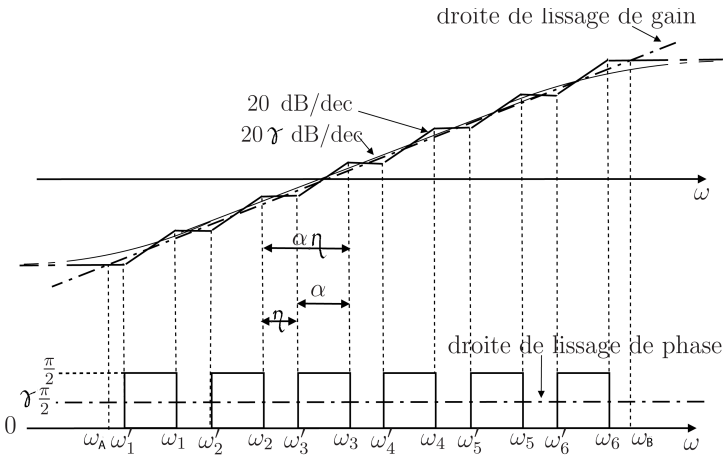


FIGURE 1.2 – Diagrammes de Bode de l'opérateur non entier, de sa synthèse par distribution récursive de pôles et de zéros et la courbe de lissage correspondante

choisi à 10 ou 100 (Oustaloup, 1995). C_0 est fixé de manière à ce que le gain du terme de droite soit égal au gain du terme de gauche

$$C_0 = \frac{|j\omega_c|^{-\gamma}}{\left|\frac{1+j\frac{1}{\omega_h}}{1+j\frac{1}{\omega_b}}\right|^{-\gamma}}, \tag{1.37}$$

à la pulsation médiane :

$$\omega_c = \frac{\omega_b + \omega_h}{2}. \tag{1.38}$$

Dans une seconde phase, la synthèse de l'opérateur non entier borné en fréquence repose sur une distribution récursive de zéros et de pôles réels, dont le principe est illustré sur la figure 1.2 :

$$s^{-\gamma}_{[\omega_A,\omega_B]} = C_0\left(\frac{\omega_u}{\omega_h}\right)^{\gamma} \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1+\frac{s}{\omega'_k}}{1+\frac{s}{\omega_k}}\right), \tag{1.39}$$

où $\omega_u = (\omega_h\ \omega_b)^{0.5}$. Les fréquences ω'_k et ω_k, correspondant respectivement aux zéros et aux pôles de rang k, sont déterminées par les relations récursives :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \alpha\eta > 1, \\ \frac{\omega_k}{\omega'_k} = \alpha > 0, \\ \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k} = \eta > 0, \\ \gamma = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

avec les rapports α et η, appelés facteurs récursifs, définis par :

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{\gamma}{N}}, \\ \eta &= \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{(1-\gamma)}{N}}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

1.6 Intérêt de la dérivation non entière pour la modélisation de phénomènes de diffusion thermique

1.6.1 Introduction à la diffusion thermique

Il existe trois types de transfert de chaleur :

- Diffusion ou conduction : Une source de chaleur provoque la vibration des atomes proches. Ces vibrations se propagent de proche en proche aux atomes voisins créant de la chaleur qui se diffuse dans le matériau. L'état d'excitation dépend de l'intensité de la source et se mesure par la température. Deux grandeurs sont à prendre en compte :

- la conductivité thermique λ en $Wm^{-1}K^{-1}$ qui est la propension d'un matériau à conduire la chaleur,
- et la capacité thermique ou calorifique C_p en $J.kg^{-1}.K^{-1}$ qui est la quantité d'énergie qu'il faut fournir à un kg de matériau pour augmenter sa température de un Kelvin.

A partir de ces deux grandeurs, la diffusivité thermique α en $m^2.s^{-1}$ définit la rapidité à laquelle la chaleur se diffuse,

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \tag{1.42}$$

et l'effusivité thermique e en $J.K^{-1}.m^{-2}.s^{-1/2}$ caractérise la capacité d'un matériau à échanger de l'énergie thermique avec son environnement,

$$e = \sqrt{\lambda \rho C_p} \tag{1.43}$$

où ρ est la masse volumique du matériau. Ces caractéristiques, C_p, λ, α et ρ, sont généralement considérées constantes pour de petites variations de température.

- Convection : Le transfert de chaleur se fait par transport de matière. La chaleur est alors fournie par un fluide en mouvement ou à un fluide en mouvement.

- Rayonnement : Il est produit par tout corps dont la température est supérieure à $0K$.

Ce paragraphe traite du transfert de chaleur par diffusion. Les hypothèses suivantes sont considérées :

- seul le transfert de chaleur par conduction est pris en compte, la convection et le rayonnement étant négligés ;
- le transfert de chaleur est unidirectionnel ;
- le matériau est homogène et isotrope, de conductivité λ et de diffusivité α.

Le bilan thermique (somme des flux entrants et des flux sortants) à un point M permet d'écrire :

$$\mathrm{div}(\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T) = \rho C_p \left(\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} \right). \tag{1.44}$$

où div est l'opérateur divergence ayant pour expression en coordonnées cartésiennes

$$\mathrm{div}\, \overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{1.45}$$

et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est l'opérateur gradient, qui définit le vecteur gradient de température

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T = \left(\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} \right) \tag{1.46}$$

en coordonnées cartésiennes. Dans le cas de faibles variations de température, λ ne dépend pas de T et $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}) = \triangle$. L'équation (1.44) peut alors s'écrire

$$\lambda \triangle T = \rho C_p \left(\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} \right), \tag{1.47}$$

où $\triangle$ représente l'opérateur Laplacien ayant pour expression en coordonnées cartésiennes :

$$\triangle \overrightarrow{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}. \tag{1.48}$$

A l'équation (1.47) viennent s'ajouter les conditions initiales et les conditions aux limites :

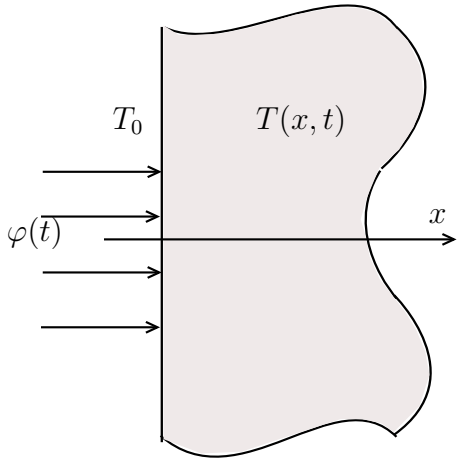


FIGURE 1.3 – Modélisation du transfert température ($T(x,t)$)/flux (φ) dans un milieu semi-infini plan

– la température initiale est nulle en tout point M de la géométrie

$$T(M,t) = 0, \quad t = 0, \tag{1.49}$$

– le milieu est soumis à un flux $\varphi(t)$ à la surface normale :

$$\overrightarrow{\varphi} = -\lambda S \overrightarrow{\text{grad}}\, T(M,t). \tag{1.50}$$

Dans la suite de la thèse, l'application traitée est assimilée à un milieu semi-infini plan. La section suivante traite donc de la résolution de l'équation (1.47) pour cette géométrie.

1.6.2 Diffusion thermique en milieu semi-infini plan

Soit un milieu semi-infini plan soumis à un flux $\varphi(t)$ à sa surface S conformément à la figure 1.3. L'étude d'un milieu semi-infini plan correspond au cas d'une géométrie à une dimension où le point de mesure M est caractérisé par son abscisse x en coordonnées cartésiennes. L'équation de la chaleur (1.44) se simplifie ainsi :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}. \tag{1.51}$$

Les équations (1.49) et (1.50) deviennent quant à elles :

$$T(x,t) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leq x < \infty, t = 0, \tag{1.52}$$

et

$$\varphi(t) = -\lambda S \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}, x = 0, t > 0. \tag{1.53}$$

Etant en milieu semi-infini, la condition à la limite :

$$\lim_{x\to\infty} T(x,t) = 0, \tag{1.54}$$

s'ajoute aux précédentes équations. La transformée de Laplace par rapport à la variable t de (1.51) permet de transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation aux dérivées ordinaires :

$$s\overline{T}(x,s) = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T}(x,s)}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \overline{T}(x,s) = \mathscr{L}\{T(x,t)\}, \tag{1.55}$$

dont la solution s'écrit :

$$\overline{T}(x,s) = C_1 \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right) + C_1 \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x\right) = K1e^{\frac{s}{\alpha}x} + K_2 e^{-\frac{s}{\alpha}x}. \tag{1.56}$$

Or, $\lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x} = \infty$. Par conséquent, d'après la condition à la limite (1.54), $K_1 = 0$. La prise en compte de la condition à la limite (1.53) sur le flux permet de déterminer K_2 :

$$\overline{\phi}(s) = \lambda K_2 S \sqrt{\frac{s}{\alpha}} e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}0} \tag{1.57}$$

$$\Rightarrow K_2 = \frac{\overline{\phi}(s)}{\lambda\sqrt{\frac{s}{\alpha}}S} \tag{1.58}$$

avec $\overline{\phi}$ la transformée de Laplace de φ. Le transfert $H(x,s)$ entre le flux $\overline{\phi}$ et la température $\overline{T}$ s'écrit alors :

$$H(x,s) = \frac{\overline{T}(x,s)}{\overline{\phi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p S}} e^{-x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}}. \tag{1.59}$$

Par conséquent, pour $x = 0$, le transfert thermique est défini à partir d'un intégrateur d'ordre 0.5 :

$$H(0,s) = \frac{\overline{T}(0,s)}{\overline{\phi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p S}}. \tag{1.60}$$

Pour $x > 0$, l'approximation de Padé d'ordre P du terme exponentiel :

$$e^{-z} = \sum_{k=0}^{P} \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}(z)^k, \tag{1.61}$$

permet de réécrire (1.59), pour une coordonnée fixe $x = x^*$ ainsi

$$H(x^*,s) \approx \widetilde{H}_P(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p S}} \frac{\sum_{k=0}^{P} \frac{(2P-k)!}{k!(P-k!)}(-x^*\sqrt{\frac{s}{\alpha}})^k}{\sum_{k=0}^{P} \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!}(x^*\sqrt{\frac{s}{\alpha}})^k}, \tag{1.62}$$

où l'indice P de H_P désigne l'ordre de l'approximation de Padé. Ainsi l'approximation d'ordre 0 se réduit à un intégrateur non entier pur d'ordre 0.5 :

$$\widetilde{H}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p S}}. \tag{1.63}$$

L'approximation d'ordre 1 et l'approximation d'ordre 2 sont respectivement données par :

$$\widetilde{H}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p S}} \frac{-\frac{x^*}{\sqrt{\alpha}}s^{0.5} + 2}{\frac{x^*}{\sqrt{\alpha}}s^{0.5} + 2}, \tag{1.64}$$

$$\widetilde{H}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p S}} \frac{\frac{x^{*2}}{\alpha}s - \frac{6x^*}{\sqrt{\alpha}}s^{0.5} + 12}{\frac{x^{*2}}{\alpha}s + \frac{6x^*}{\sqrt{\alpha}}s^{0.5} + 12}. \tag{1.65}$$

Supposons un capteur placé à 2 mm de la surface excitée d'un milieu plan semi-infini composé de fer ARMCO[1] de conductivité $\lambda = 75.3\ W.m^{-1}.K^{-1}$, de capacité thermique $C_p = 470\ W.Kg^{-1}.K^{-1}$, de masse volumique $\rho = 7970\ Kg.m^{-3}$ et de diffusivité $\alpha = 20.09 \times 10^{-}6\ m^2.s^{-1}$. Le fer ARMCO est souvent utilisé comme étalon car il est reconnu pour sa pureté. La période d'échantillonnage est fixée à $T_s = 0.1\ s$. La pulsation de Nyquist est alors de 31.4 rad.s^{-1}. La figure 1.4 montre que les diagrammes de Bode des approximations (1.63), (1.64) et (1.65) ont une allure similaire à celle du modèle théorique (1.59) dans la bande de fréquence considérée. Ce résultat met en avant la propriété de compacité de l'opérateur non entier, puisqu'un modèle ayant un faible nombre de paramètres suffit à donner une bonne approximation du modèle théorique (1.59).

De plus (Oldham and Spanier, 1974), (Cois, 2002), (Battaglia, 2008) ont montré que dans un milieu semi-infini ou fini, la résolution de l'équation (1.47) pour une géométrie plane, cylindrique ou sphérique conduit à un transfert entre le flux et la température d'ordre commensurable non entier égal à 0.5.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les définitions de l'intégrale et de la dérivée non entières ont été rappelées. Grâce à ces opérateurs, la classe des systèmes rationnels continus est étendue à la classe des systèmes non entiers continus. Plusieurs formes de représentations de ces systèmes ont été décrites et une première propriété des fonctions de transfert non entières à

[1] originellement développé par la société **A**merican **R**olling **M**ill **Co**mpany en 1909, d'où l'acronyme.

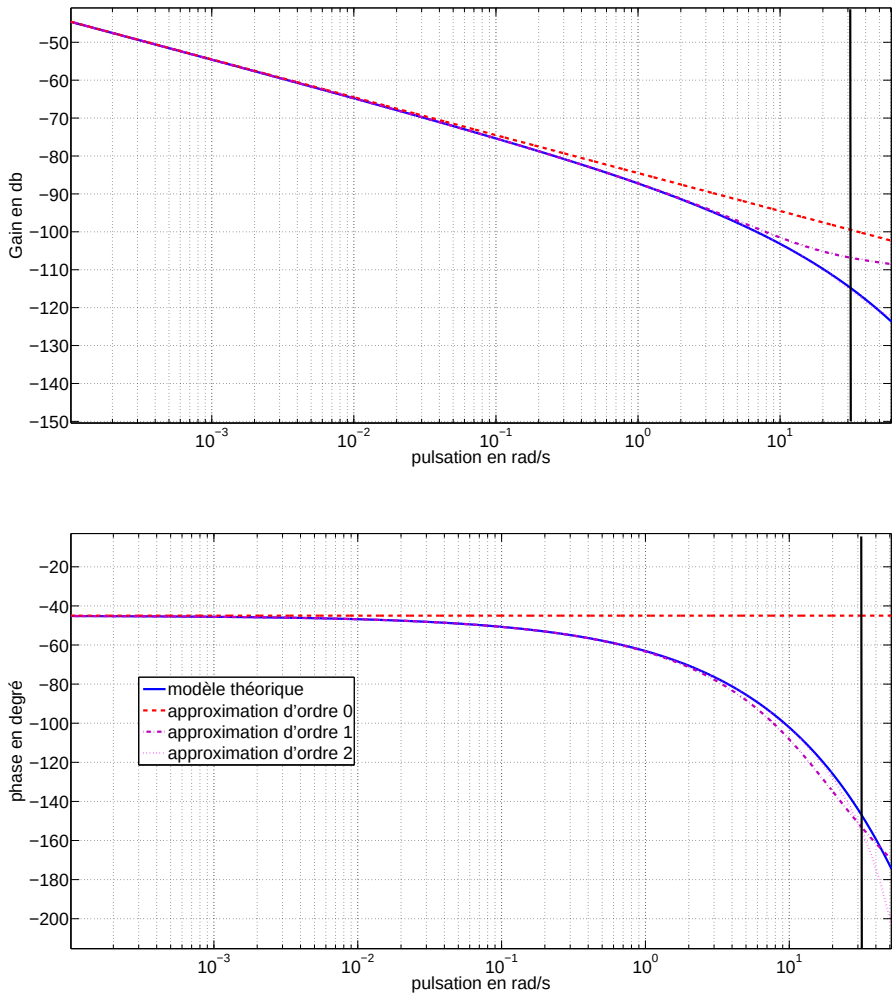


FIGURE 1.4 – Comparaison des diagrammes de Bode du modèle théorique et des modèles approchés jusqu'à l'ordre 2 du transfert thermique flux/température

été présentée : la stabilité au sens entrée bornée sortie bornée. Deux méthodes de simulation ont ensuite été détaillées : par discrétisation temporelle et par synthèse fréquentielle de l'opérateur non entier.

Enfin, l'étude de la modélisation de la conduction thermique, dans un milieu semi-infini plan, a permis d'établir le passage de l'équation de la chaleur à une fonction de transfert non entière dont les ordres de dérivation sont multiples de 0.5.

Chapitre 2

Identification par modèle linéaire non entier et modélisation de la diffusion thermique autour de plusieurs températures

2.1 Introduction **26**
2.2 Etat de l'art de l'identification par modèle linéaire non entier **29**
2.2.1 Estimation des coefficients linéaires et des ordres de dérivation 30
2.2.1.1 Modèle basé sur la forme développée d'une fonction de transfert 31
2.2.1.2 Modèle basé sur la décomposition modale d'une fonction de transfert 34
2.2.2 Estimation des coefficients linéaires 36
2.2.2.1 Méthode des moindres carrés (**mc**) 37
2.2.2.2 Méthode des moindres carrés avec filtre à variables d'état (**fve**) 37
2.2.2.3 Méthode de la variable instrumentale avec filtre à variables d'état (**vi/fve**) 40
2.2.2.4 Méthode de la variable instrumentale optimale (**srivcf**) 41
2.2.2.5 Modèle basé sur les fonctions orthogonales 44
2.3 Identification par modèles linéaires non entiers du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO **48**
2.3.1 Modélisation d'un échantillon de fer ARMCO sous COMSOL pour la génération de données par éléments finis 48
2.3.2 Identification du transfert température/flux autour de 600K . . 53
2.3.3 Identification autour de plusieurs points de fonctionnement . . 55
2.4 Conclusion **59**

2.1 Introduction

L'identification permet d'obtenir un modèle mathématique d'un système physique à partir de mesures et de connaissances *a priori*. Ces modèles peuvent servir en :

- commande, afin de réguler le système ou de le stabiliser,
- prédiction, afin de déterminer les sorties à des instants futurs,
- simulation, afin de diminuer le coût et le temps des expériences,
- détection de défauts, afin de réagir aux éventuels dysfonctionnements,
- optimisation, afin d'améliorer le rendement d'un processus,
- analyse, afin de caractériser des paramètres inconnus et non mesurables.

L'identification comporte différentes étapes synthétisées sur la figure 2.1. Evidemment, le choix de la structure du modèle est lié aux connaissances *a priori* du système et aux finalités de l'identification. Ensuite, un modèle paramétrique adéquat qui dépend des connaissances *a priori* du système est choisi. Ces connaissances permettent de se placer soit dans un contexte boite blanche, où la structure est déduite d'une analyse théorique et des lois fondamentales qui régissent le système, soit dans un contexte boîte noire, où la structure et le nombre de paramètres du modèle sont déduits à partir des seules données d'entrées et de sorties. Généralement les connaissances *a priori* permettent de fixer certains éléments du modèle, comme le nombre de paramètres ou l'ordre, tout en ayant à en déterminer d'autres. L'identification peut se faire soit autour d'un point de fonctionnement, où le modèle est linéaire, soit dans une grande plage de fonctionnement ou le comportement du système peut être non linéaire. Une autre problématique consiste à fixer un signal d'entrée adapté. Celui-ci doit être riche en fréquence (et en amplitude dans le cas de l'identification de systèmes non linéaires) et borné par la réalité du système. Par exemple, dans la cadre d'une identification de systèmes linéaires, des Signaux Binaires Pseudo-Aléatoires (SBPA) sont généralement utilisés. Enfin, se pose le problème de la validation. Celle-ci s'effectue d'abord par une verification de la cohérence entre les connaissances *a priori* du système et le comportement du modèle (bornes du signal de sortie, temps de réponse, ...). Ensuite, une validation *a posteriori* est effectuée qui permet de déterminer la précision du modèle grâce au calcul d'un critère de qualité. Cette validation est effectuée sur des jeux de données entrées-sorties différents de ceux ayant servis à l'identification.

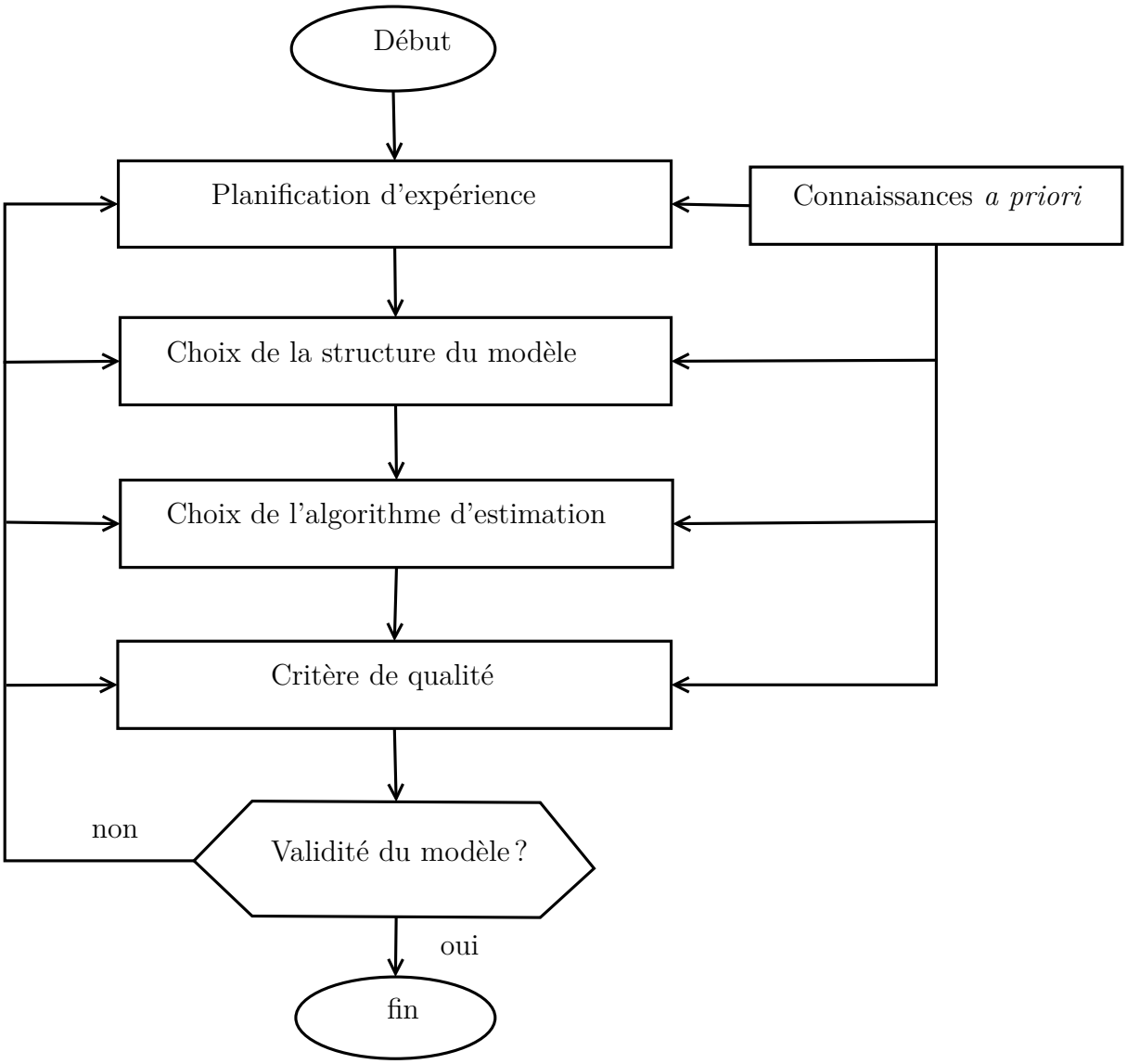


FIGURE 2.1 – Etapes composant la procédure d'identification d'un système

Les modèles non entiers ont prouvé leur efficacité pour la modélisation de la diffusion thermique autour d'une température ambiante et pour de petites variations de température. De part leur compacité paramétrique, les modèles non entiers, comparés aux modèles entiers ou aux modèles par éléments finis, sont particulièrement adaptés à la modélisation de tels systèmes diffusifs. Oldham and Spanier (1970, 1972, 1973) ont été les premiers à utiliser la dérivation non entière pour modéliser les phénomènes de diffusion. Ils ont montré que les systèmes diffusifs peuvent être modélisés par des fonctions de transfert ayant des ordres de dérivation multiples de 0.5. En rhéologie, la viscoélasticité de certains polymères peut être décrite au travers d'équations non entières (Adolfsson, 2004; Heymans, 2004). Les courants de Foucault dans les machines à induction obéissent à des phénomènes diffusifs modélisés par des dérivées non entières (Benchellal *et al.*, 2004). En électrochimie, la diffusion des charges dans les batteries d'acide est régie par des modèles de Randles (Cugnet *et al.*, 2010; Rodrigues *et al.*, 2000; Sabatier *et al.*, 2006) impliquant un intégrateur d'ordre 0.5. Le transfert tension/courant est décrit (Bertrand *et al.*, 2010; Houcem *et al.*, 2012) par des modèles à dérivées non entières. Pour les systèmes thermiques semi-infinis, Battaglia (2008); Battaglia *et al.* (2000) et Agrawal (2004) ont montré que la solution exacte de l'équation de la chaleur, qui lie le flux thermique injecté en surface à la température, contient un intégrateur d'ordre 0.5 (voir équation (1.59) du chapitre 1).

La contribution principale de ce chapitre est l'identification autour de plusieurs points de fonctionnement d'un modèle linéaire non entier de la diffusion thermique dans un échantillon de fer ARMCO à partir de données générées en simulation par éléments finis. Les modèles obtenus permettent d'une part de confirmer l'existence d'un comportement non linéaire pour de grandes variations de température(400K à 1000K) et, d'autre part, de construire un modèle à paramètres variants.

Ce chapitre se décompose en deux parties. La première vise à présenter un état de l'art de l'identification par modèle linéaire non entier. Ces méthodes d'identification sont présentées en fonction des connaissances *a priori* du système et plus particulièrement de la connaissance ou non des ordres de dérivation. Ensuite, la seconde partie applique une méthode d'identification par minimisation de l'erreur de sortie à la modélisation de la diffusion dans un échantillon de fer ARMCO autour de différents points de fonctionnement.

2.2 Etat de l'art de l'identification par modèle linéaire non entier

Les travaux sur l'identification par modèles non entiers ont été initiés dans les années 1990 par Oustaloup (1995), Mathieu *et al.* (1995) et Le Lay (1998). Depuis, de nombreux développements ont suivi et plusieurs algorithmes d'identification basés sur des modèles non entiers ont été développés dans la littérature (Aoun *et al.*, 2007; Battaglia and Kusiak, 2005; Cois *et al.*, 2000, 2001; Gabano *et al.*, 2011; Houcem *et al.*, 2012; Khemane *et al.*, 2010; Lin *et al.*, 2001; Malti *et al.*, 2005; Poinot and Trigeassou, 2004; Victor *et al.*, 2013). Cois *et al.* (2000) ont étendu la méthode d'identification par erreur de sortie en utilisant la représentation modale des modèles non entiers. Cois *et al.* (2001) ont proposé d'associer la méthode de prédiction de l'erreur à la variable instrumentale et au filtre à variables d'état, méthode améliorée par Victor *et al.* (2013) avec un choix optimal des variables instrumentales. Aoun *et al.* (2007) et Malti *et al.* (2005) ont utilisé les bases orthogonales non entières pour l'approximation des systèmes et l'estimation de leur paramètres. Battaglia and Kusiak (2005) ont implémenté une méthode récursive des moindres carrés pour l'estimation de paramètres de modèles thermiques. Dans le même contexte, Lin *et al.* (2001) et Poinot and Trigeassou (2004) estiment par erreur de sortie les paramètres de représentation d'état servant à approcher des systèmes diffusifs comme des modèles thermiques ou électro-chimiques. Gabano *et al.* (2011) et Houcem *et al.* (2012) ont estimé les paramètres de modèles Linéaires à Paramètres Variables (LPV) pour modéliser la conduction thermique dans un milieu homogène ou le transfert tension/courant des ultracapacités. Dans un contexte incertain ou de faibles non-linéarités, une méthode ensembliste peut aussi être envisagée (Khemane *et al.*, 2010) comme pour l'identification de la dynamique du conducteur.

Le chapitre 1 a permis d'établir que la modélisation de la conduction thermique conduit à une fonction de transfert non entière. Par conséquent, on considère que le système S à identifier appartient à la classe $\mathcal{M}$ de systèmes à dérivées non entières. Quelle que soit la structure retenue pour le modèle, elle fera intervenir des grandeurs à estimer à partir des données recueillis sur le système et des connaissances disponibles *à priori*. Ces grandeurs sont rassemblées dans le vecteur de paramètres θ et l'on parle alors d'un modèle paramétrique. L'ensemble paramétrique admissible *a priori* est noté $D_{\mathcal{M}}$. Soit $G(s)$ le modèle particulier obtenu en affectant la valeurs des paramètres du vecteur θ. Ce vecteur θ peut contenir les coefficients linéaires du modèle mais aussi les ordres de

dérivation, non linéaires par rapport au modèle.

2.2.1 Estimation des coefficients linéaires et des ordres de dérivation

Plusieurs approches peuvent être mise en place afin d'estimer le vecteur de paramètres composé des coefficients linéaires du modèle et des ordres de dérivation. Ces approches diffèrent alors dans le mode de représentation du modèle.

Considérons le système :

$$y^*(t) = y(t) + e(t) \tag{2.1}$$

où $y(t)$ est la sortie non bruitée du système, $e(t)$ un bruit blanc additive et

$$\widehat{y}(t,\theta) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} \star u(t) \tag{2.2}$$

la sortie estimée du modèle affecté des valeurs des paramètres du vecteur θ.

La première approche utilise la forme développée d'une fonction de transfert non entière (Le Lay, 1998) et la seconde est basée sur une décomposition modale (Cois *et al.*, 2000).

On appelle erreur de sortie la différence entre la sortie du système et celle du modèle :

$$\varepsilon(t_k,\theta) = y^*(t_k) - \widehat{y}(t_k,\theta). \tag{2.3}$$

Le plus souvent on souhaite que cette erreur de sortie soit aussi proche que possible de 0. Ceci pose alors le problème de l'échelle de valeurs utilisée pour effectuer la comparaison. Cette échelle de valeurs prendra la forme d'une fonction scalaire J, appelée critère, dont la forme générale s'écrit (Ljung, 1999) :

$$J(\theta) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} l(\varepsilon_F(t_k,\theta)), \tag{2.4}$$

où

$$\varepsilon_F(t_k,\theta) = L(q)\varepsilon(t_k,\theta), \tag{2.5}$$

l est une fonction à valeur scalaire et L est un filtre stable linéaire. Diviser par K, le nombre de données, permet de comparer des critères obtenus pour des nombres de données

différents. Le vecteur optimal $\widehat{\theta}$ au sens de J, des paramètres à identifier, est alors défini par :

$$\widehat{\theta} = \arg \min_{\theta \in D_{\mathcal{M}}} J(\theta), \tag{2.6}$$

où $D_{\mathcal{M}}$ est le domaine des valeurs possibles de θ. Le choix du critère traduit le but fixé pour la modélisation. On trouve dans la littérature (Ljung, 1999; Richalet, 1991/1998; Walter and Pronzato, 1994) différents arguments pour choisir entre les nombreux critères existants. Deux familles de critères sont généralement utilisées (Ljung, 1999) : les critères quadratiques et les critères au sens du maximum de vraisemblance qui correspondent à des définitions particulières de la fonction l ou du préfiltre L. Cependant d'autres critères existent aussi, comme la somme des erreurs en valeur absolue (Walter and Pronzato, 1994) ou le critère d'Akaike qui introduit une pénalité sur le nombre de paramètres. Le critère quadratique est de loin le plus utilisé à cause de son caractère intuitif et du fait qu'il se prête bien aux calculs requis lors de son optimisation. Il peut se mettre sous la forme :

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{2} (y(t_k) - \widehat{y}(t_k, \theta))^2, \tag{2.7}$$

soit $l(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon^2$ et $L = 1$. Ce critère est utilisé dans l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Il peut être pondéré en assignant différents poids $\alpha_k \geq 0$ aux échantillons de l'erreur $\varepsilon(t_k)$.

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k (y(t_k) - \widehat{y}(t_k, \theta))^2. \tag{2.8}$$

Les coefficients $\alpha_k \geq 0$ traduisent à la fois la confiance dans les données expérimentales et l'importance accordée au modèle. Par exemple,

- $\alpha_t = 0$ élimine une donnée considérée comme non significative ou aberrante,
- $\alpha_t = (y(t))^{-2}$ permet de considérer une erreur relative et améliore la restitution des sorties de faibles amplitudes.

2.2.1.1 Modèle basé sur la forme développée d'une fonction de transfert

A partir d'une formulation indépendante de la méthode de simulation de l'opérateur non entier proposée dans Malti *et al.* (2008), l'estimation du modèle se réduit à l'estimation des paramètres de la fonction de transfert non entière :

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i s^{\beta_i}}{1 + \sum_{j=1}^{N} a_j s^{\alpha_j}}, \tag{2.9}$$

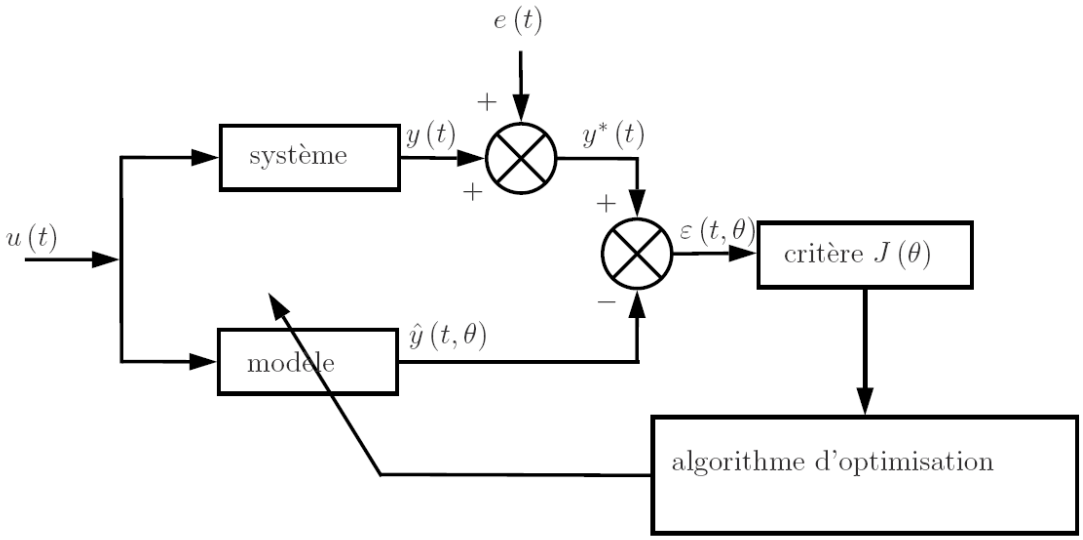


FIGURE 2.2 – Modèle à erreur de sortie

à savoir $\theta = [b_0, \ldots b_M, a_1, \ldots a_N, \beta_0, \ldots \beta_M,\ \alpha_1, \ldots \alpha_N]^{\mathrm{T}}$. Les ordres de dérivation sont supposés ordonnés pour une raison évidente d'identifiabilité :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_M. \tag{2.10}$$

La sortie estimée :

$$\hat{y}(t_k, \hat{\theta}) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} \star u(t_k) \tag{2.11}$$

étant non linéaire en $\hat{\theta}$, des algorithmes fondés sur le gradient, tel que l'algorithme de Marquardt (1963), sont utilisés pour estimer $\hat{\theta}$ itérativement par erreur de sortie (figure 2.2) :

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left\{ \left[\mathbf{J}'' + \zeta \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{J}' \right\}_{\theta = \hat{\theta}_i} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}' = -\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon\left(t_k\right) \mathbf{S}\left(t_k, \theta\right) \text{: gradient} \\ \mathbf{J}'' \approx \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{S}\left(t_k, \theta\right) \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\left(t_k, \theta\right) \text{: Hessien} \\ \mathbf{S}\left(t_k, \theta\right) = \frac{\partial \hat{y}(t_k, \theta)}{\partial \theta} \text{ : fonctions de sensibilité de la sortie} \\ \zeta \ : \quad \text{paramètre de Marquardt} \end{cases} \tag{2.13}$$

Seule la convergence vers un minimum local est garantie par l'algorithme de Marquardt (1963).

Les fonctions de sensibilité des sorties sont alors calculées en différenciant la sortie du modèle (2.9) par rapport aux éléments de θ :

$$\frac{\partial \hat{y}\,(t,\theta)}{\partial b_i} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta_i}}{1+\sum_{j=1}^{N} a_j s^{\alpha_j}}\right\} \star u(t)\,;\; \frac{\partial \hat{y}\,(t,\theta)}{\partial a_j} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-\sum_{i=0}^{M} b_i s^{\beta_i+\alpha_j}}{\left(1+\sum_{j=1}^{N} a_j s^{\alpha_j}\right)^2}\right\} \star u(t)$$

$$\frac{\partial \hat{y}\,(t,\theta)}{\partial \beta_i} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{b_i \ln(s) s^{\beta_i}}{1+\sum_{j=1}^{N} a_j s^{\alpha_j}}\right\} \star u(t)\,;\; \frac{\partial \hat{y}\,(t,\theta)}{\partial \alpha_j} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-a_j \ln(s)\sum_{i=0}^{M} b_i s^{\beta_i+\alpha_j}}{\left(1+\sum_{j=1}^{N} a_j s^{\alpha_j}\right)^2}\right\} \star u(t),$$

où $\star$ désigne le produit de convolution. Les deux premières fonctions de sensibilité peuvent être calculées aisément. En revanche, les deux suivantes sont plus problématiques en raison de la présence du terme $\ln(s)$, plus difficile à simuler dans le domaine temporel. Les fonctions de sensibilité $\frac{\partial \hat{y}(t,\theta)}{\partial \beta_i}$ et $\frac{\partial \hat{y}(t,\theta)}{\partial \alpha_j}$ peuvent alors être calculées numériquement plutôt qu'analytiquement.

En supposant que le bruit additionnel, e, est gaussien et blanc de moyenne nulle, l'estimation de la matrice de covariance des paramètres est donnée par (Ljung, 1999) :

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\theta}\right) = \sigma^2 \left(\sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{S}\left(t_k,\hat{\theta}\right)\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\left(t_k,\hat{\theta}\right)\right)^{-1}, \tag{2.14}$$

où σ^2 est la vraie variance de e. Or, cette variance n'étant pas connue, elle peut être estimée grâce à l'erreur résiduelle :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K-2(N+M+1)} \sum_{k=0}^{K-1} \left(y(t_k) - \hat{y}(t_k,\hat{\theta})\right). \tag{2.15}$$

Les variances des paramètres sont sur la diagonale de la matrice de covariance (2.14) et les coefficients de covariance en dehors.

Remarque *Quand le nombre de paramètres du système (2.9) est grand, les algorithmes d'optimisation appliqués sur θ sont mal-conditionnés. Une façon de réduire le nombre de paramètres consiste à optimiser l'ordre commensurable ν au lieu d'optimiser tous les ordres de dérivation. La fonction de transfert non entière s'écrit alors :*

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^{i\nu}}{1 + \sum_{j=1}^{n} a_j s^{j\nu}}, \tag{2.16}$$

avec $m = \frac{\beta_M}{\nu}$ *et* $n = \frac{\alpha_N}{\nu}$. *Les ordres du numérateur et du dénominateur,* $\alpha_N = n\nu$ *et* $\beta_M = m\nu$ *respectivement, sont fixés comme dans le cas entier. Ainsi, le système est entièrement caractérisé par le vecteur de paramètres* $\theta = [a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_M, \nu]$. *Plutôt que d'estimer* $2(N + M + 1)$ *paramètres du modèle (2.9), seulement* $N + M + 2$ *le sont.*

On rappelle que lors de l'identification de systèmes stables non entiers, le théorème de stabilité de Matignon (théorème 2, p.14) restreint les variations de l'ordre commensurable à l'intervalle $]0, 2[$.

On reprend alors la même démarche que précédemment en considérant les fonctions de sensibilité des sorties suivantes :

$$\frac{\partial \hat{y}(t,\theta)}{\partial b_i} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^{i\nu}}{1 + \sum_{j=1}^{m} a_j s^{j\nu}}\right\} \star u(t); \frac{\partial \hat{y}(t,\theta)}{\partial a_j} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-\sum_{i=0}^{n} b_i s^{(i+j)\nu}}{\left(1 + \sum_{j=1}^{m} a_j s^{j\nu}\right)^2}\right\} \star u(t)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(t,\theta)}{\partial \nu} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} i b_i s^{i\nu}\left(1 + \sum_{j=0}^{m} b_j s^{j\nu}\right)}{\left(1 + \sum_{j=0}^{m} a_j s^{j\nu}\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i s^{i\nu} \sum_{j=0}^{m} j a_j s^{j\nu}}{\left(1 + \sum_{j=0}^{m} a_j s^{j\nu}\right)^2}\right) \ln(s)\right\} \star u(t).$$

2.2.1.2 Modèle basé sur la décomposition modale d'une fonction de transfert

L'idée d'optimiser l'ordre commensurable plutôt que tous les ordres de dérivation a d'abord été introduite dans (Cois *et al.*, 2000) en utilisant la forme modale d'une fonction de transfert :

$$G(s) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{q=1}^{v_l} \frac{A_{l,q}}{(s^\nu - s_l)^q}, \tag{2.17}$$

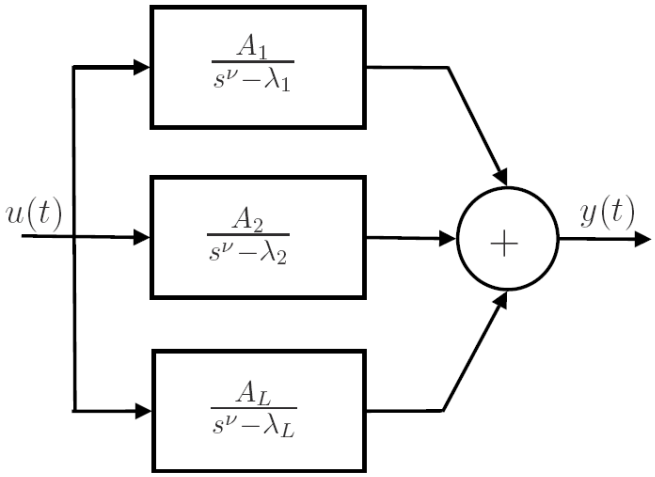


FIGURE 2.3 – Décomposition modale

où $s_l, l = 1, \cdots, L$ représentent les s^ν-pôles de multiplicité v_l. En général, les s^ν-pôles peuvent être réels ou complexes conjugués. Cois *et al.* ont cependant contraint les s^ν-pôles à l'ensemble des réels et leur multiplicité à 1. La classe de modèle plus restreinte ainsi obtenue s'écrit (voir figure 2.3) :

$$G(s) = \sum_{l=1}^{L} \frac{A_l}{s^\nu - s_l}. \tag{2.18}$$

Le vecteur de paramètres correspondant

$$\theta^{\mathrm{T}} = [A_1, s_1, \ldots, A_L, s_L, \nu], \tag{2.19}$$

est donc estimé par minimisation de la norme quadratique de l'erreur de sortie (2.3). Dans ce cas, les paramètres sont estimés par la méthode de Marquardt (1963) selon la formule (2.12), le gradient et le Hessien sont calculés selon (2.13), et les fonctions de sensibilité sont données par :

$$\frac{\partial \hat{y}(t,\theta)}{\partial A_l} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\nu - s_l}\right\} \star u(t) \quad ; \quad \frac{\partial \hat{y}(t,\theta)}{\partial s_l} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A_l}{(s^\nu - s_l)^2}\right\} \star u(t), \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(t,\theta)}{\partial \nu} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{l=1}^{L} -\frac{A_l s^\nu \ln(s)}{(s^\nu - s_l)^2}\right\} \star u(t). \tag{2.21}$$

On note également la présence de l'élément $\ln(s)$ dans la dernière fonction de sensibilité rendant le calcul analytique de la dérivée partielle plus compliqué. En supposant le

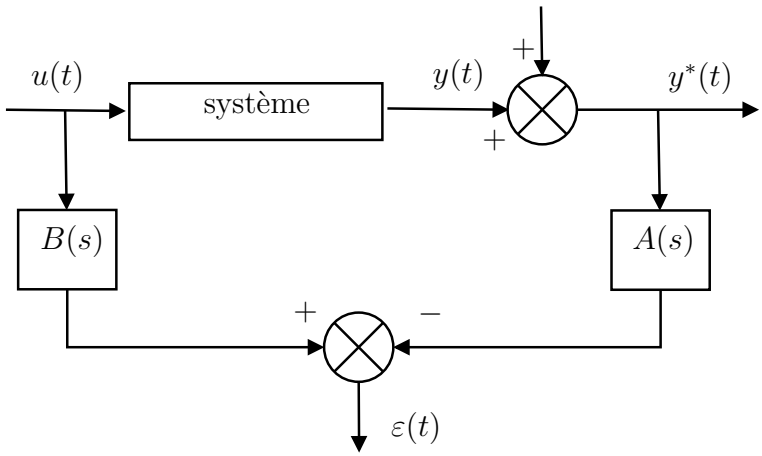


FIGURE 2.4 – Modèle à erreur d'équation

bruit e gaussien et blanc de moyenne nulle, l'estimation de la matrice de covariance des paramètres est donnée par :

$$\operatorname{cov}\left(\hat{\theta}\right) = \sigma^2 \left(\sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{S}\left(t_k, \hat{\theta}\right) \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\left(t_k, \hat{\theta}\right) \right)^{-1}, \tag{2.22}$$

où, σ^2, la variance de e est estimée à partir l'erreur résiduelle :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K - (2L+1)} \sum_{k=0}^{K-1} \left(y(t_k) - \hat{y}(t_k, \hat{\theta}) \right)^2. \tag{2.23}$$

2.2.2 Estimation des coefficients linéaires

Lorsqu'une analyse préalable permet de fixer *a priori* les ordres de dérivation du modèle seuls les coefficients font l'objet d'une estimation paramétrique. Le critère est linéaire vis-à-vis des paramètres et permet une estimation directe par moindres carrés.

Une fois les ordres de dérivation fixés, l'objectif principal consiste à estimer le vecteur des paramètres θ du modèle à temps continu à partir de K couples d'échantillons des signaux d'entrée/sortie par exemple par la minimisation de la norme ℓ_2 de l'erreur d'équation ε (voir figure 2.4) :

$$J(\theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon^2(t_k, \theta), \tag{2.24}$$

avec

$$\varepsilon(t, \theta) = y^*(t) - \varphi^*(t)^{\mathrm{T}} \theta, \tag{2.25}$$

et

$$\varphi^*(t)^{\mathrm{T}} = \left[u^{(\beta_0)}(t), \cdots, u^{(\beta_M)}(t), -y^{*(\alpha_1)}(t), \cdots, -y^{*(\alpha_N)}(t)\right]. \tag{2.26}$$

2.2.2.1 Méthode des moindres carrés (mc)

L'estimation du vecteur de paramètre θ se formule comme un problème de minimisation :

$$\hat{\theta}^{mc} = \arg\min_{\theta} \left\| \left[\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \varphi^*(t_k)\varphi^*(t_k)^{\mathrm{T}}\right]\theta - \left[\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \varphi^*(t_k)y^*(t_k)\right]\right\|^2, \tag{2.27}$$

et s'obtient par la formule des moindres carrés (**mc**)

$$\hat{\theta}^{mc} = \left[\mathbf{\Phi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^*\right]^{-1}\mathbf{\Phi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{Y}^*, \tag{2.28}$$

où $\mathbf{Y}^*$ est le vecteur colonne de sortie et où $\mathbf{\Phi}^*$ est la matrice de régression dont les colonnes sont des dérivées non entières des signaux d'entrée et de sortie :

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^* &= \left[y^*(t_0),\, y^*(t_1), \ldots, y^*(t_{K-1})\right]^{\mathrm{T}},\\ \mathbf{\Phi}^* &= \left[\varphi^*(t_0),\, \varphi^*(t_1), \ldots, \varphi^*(t_{K-1})\right]^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

La différentiation directe aussi bien non entière qu'entière d'une sortie bruitée amplifie le bruit et par conséquent conduit à des résultats erronés. L'utilisation du filtre à variables d'état est alors préconisée.

2.2.2.2 Méthode des moindres carrés avec filtre à variables d'état (fve)

La méthode des filtres à variables d'état est une des approches conventionnelles d'identification par modèles à temps continu. Elle repose sur la minimisation de la norme quadratique de l'erreur d'équation (figure 2.4) et se décompose en deux étapes :

- la première consiste à appliquer un filtrage linéaire aux données échantillonnées afin de reconstruire les dérivées filtrées des signaux d'entrée et de sortie. Cette étape est spécifique aux approches d'identification par modèles à temps continu de type erreur d'équation ;

– la seconde étape est dédiée à l'estimation paramétrique à l'aide de techniques d'estimation de type moindres carrés ; cette étape n'est pas spécifique aux approches d'identification à temps continu. La plupart des algorithmes d'estimation paramétrique à temps discret peuvent cependant être adaptés à temps continu.

En appliquant la transformée de *Laplace* à l'équation différentielle non bruitée :

$$Y(s) + \sum_{j=1}^{N} a_j s^{\alpha_j} Y(s) = \sum_{i=0}^{M} b_i s^{\beta_i} U(s), \tag{2.30}$$

l'application d'un filtre linéaire $F(s) = 1/E(s)$ à l'équation (2.30) donne :

$$\frac{1}{E(s)} Y(s) + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{s^{\alpha_j}}{E(s)} Y(s) = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{s^{\beta_i}}{E(s)} U(s), \tag{2.31}$$

Le filtre à variable d'état (**fve**) proposé dans Cois *et al.* (2001) est le filtre de *Poisson* étendu aux systèmes non entiers

$$F_\gamma(s) = \frac{s^\gamma}{E(s)} = \frac{s^\gamma}{\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^\nu + 1\right)^{N_f}}, \tag{2.32}$$

où ω_c représente la fréquence de coupure du filtre. L'ordre N_f est souvent choisi de manière à satisfaire la relation :

$$N_f > \frac{\alpha_N}{\nu},\ N_f \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

L'étape de pré-filtrage parallèle des signaux d'entrée/sortie par **fve** est une pratique courante en identification permettant d'améliorer l'efficacité statistique des estimateurs. Cette étape de pré-filtrage est implicite dans le cas de l'identification directe de modèles continus. Le rôle du pré-filtrage est double : garder le comportement dérivateur dans la bande fréquentielle d'intérêt et filtrer le bruit aux hautes fréquences ; le second rôle est de diminuer la variance de l'estimateur.

L'équation (2.30) s'écrit alors :

$$F_0(s)\, Y(s) + \sum_{j=1}^{N} a_j F_{\alpha_j}(s)\, Y(s) = \sum_{i=0}^{M} b_i F_{\beta_i}(s) U(s). \tag{2.34}$$

Remarque *Le filtre (2.32) introduit néanmoins une distorsion autour de la fréquence de coupure ω_c. De plus, des problèmes numériques peuvent apparaître quand l'ordre ν est*

très petit résultant alors en un ordre du filtre N_f très grand (2.33). Au lieu d'utiliser le filtre $F_\gamma(s)$ de (2.32), il est préférable d'utiliser le filtre de Poisson non entier modifié :

$$F_\gamma(s) = \frac{s^\gamma}{\left(\frac{s}{\omega_c}+1\right)^{N_f}}, \tag{2.35}$$

avec la condition moins restrictive sur l'ordre entier N_f : $N_f > \alpha_{m_A}$. Les deux filtres (2.32) et (2.35) nécessitent néanmoins l'ajustement d'un autre paramètre : la pulsation de coupure ω_c. En effet, si la pulsation de coupure est très haute, le bruit de mesure aux hautes fréquences est mal filtré ; si elle est trop basse, le filtre est alors mal adapté et les signaux filtrés sont trop appauvris. L'utilisateur doit donc régler ces deux paramètres du filtre : la pulsation de coupure ω_c et l'ordre N_f du filtre. De manière intuitive, la bande passante du filtre F_γ ***fve*** *doit être conforme à la plage de fréquences dans laquelle l'adéquation entre le système et le modèle est recherchée.*

Cependant, bien que ce filtre introduise une distorsion autour de la fréquence de coupure, l'approximation de la dérivée est généralement suffisante, et permet surtout d'initialiser d'autres algorithmes fondés sur la variable instrumentale. Ainsi, les dérivées filtrées des signaux d'entrée $u_f^{(\beta_i)}$ et de sortie $y_f^{(\alpha_j)}$ sont obtenues à la sortie des filtres (2.35) :

$$\begin{cases} u_f^{(\beta_i)}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{F_{\beta_i}(s)\right\} \star u(t), & i = 1, \ldots, n, \\ y_f^{*(\alpha_j)}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{F_{\alpha_j}(s)\right\} \star y^*(t), & j = 0, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.36}$$

L'estimation paramétrique se fait en minimisant la norme ℓ_2 :

$$J_f(\theta) = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon_f^2(t_k, \theta), \tag{2.37}$$

de l'erreur d'équation filtrée ε_f, par rapport au vecteur de paramètres $\theta = [b_0, b_1, \ldots, \ b_M, a_1, \ldots, a_N]^{\mathrm{T}}$, avec

$$\begin{aligned} &\varepsilon_f(t,\theta) = y_f^*(t) - \varphi_f^*(t)^{\mathrm{T}}\theta, \\ &\varphi_f^*(t)^{\mathrm{T}} = \left[u_f^{(\beta_0)}(t), \cdots, u_f^{(\beta_M)}(t), -y_f^{*(\alpha_1)}(t), \cdots, -y_f^{*(\alpha_N)}(t)\right]. \end{aligned} \tag{2.38}$$

L'estimée se formule alors comme le problème de minimisation :

$$\hat{\theta}^{mc/fve} = \arg\min_\theta \left\| \left[\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \varphi_f^*(t_k)\varphi_f^*(t_k)^{\mathrm{T}}\right]\theta - \left[\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \varphi_f^*(t_k) y^*(t_k)\right] \right\|^2, \tag{2.39}$$

et s'obtient par la formule des moindres carrés combinée au **fve** :

$$\hat{\theta}^{mc/fve} = \left[{\boldsymbol{\Phi}_f^*}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_f^*\right]^{-1} {\boldsymbol{\Phi}_f^*}^{\mathrm{T}} \mathbf{Y}_f^*, \tag{2.40}$$

où $\mathbf{Y}_f^*$ est le vecteur colonne de la sortie filtrée et où $\boldsymbol{\Phi}_f^*$ est la matrice de régression filtrée dont les colonnes sont les dérivées non entières filtrées des signaux d'entrée et de sortie :

$$\mathbf{Y}_f^* = \left[y_f^*(t_0), y_f^*(t_1), \ldots, y_f^*(t_{K-1})\right]^{\mathrm{T}}, \tag{2.41}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_f^* = \left[\varphi_f^*(t_0), \varphi_f^*(t_1), \ldots, \varphi_f^*(t_{K-1})\right]^{\mathrm{T}}. \tag{2.42}$$

Non seulement cette approche n'est pas à variance minimale, mais elle requiert également un affinage du filtre au préalable : l'estimation paramétrique est fortement dépendante de la fréquence de coupure ω_c et de l'ordre N_f du filtre à variables d'état. De plus, comme dans le cas entier, les auteurs de Cois *et al.* (2001) ont montré dans le cas non entier que l'estimateur des moindres carrés est biaisé en présence de bruit de mesure car le vecteur de régression $\varphi_f^*(t)$ est corrélé au bruit additif e. Ils proposent alors d'introduire l'estimateur de la variable instrumentale pour remédier au biais.

2.2.2.3 Méthode de la variable instrumentale avec filtre à variables d'état (vi/fve)

L'estimateur de la variable instrumentale est une variante classique de la méthode des moindres carrés (Ljung, 1999; Söderström and Stoica, 1989) reposant sur des techniques de régression linéaire.

Le principe de la variable instrumentale (**vi**) a été étendu au cas non entier par Cois *et al.* (2001). Il consiste à introduire un vecteur φ_f^{vi}, dont les composantes sont appelées instruments ou variables instrumentales. Les instruments de φ_f^{vi} doivent être suffisamment corrélés avec le vecteur de régression φ_f^* mais non corrélés avec le bruit additif sur la sortie e (E[.] représentant l'espérance mathématique) :

$$\begin{cases} \mathrm{E}\left[\varphi_f^{vi}(t){\varphi_f^*}^{\mathrm{T}}(t)\right] & \text{est non singulière,} \\ \mathrm{E}\left[\varphi_f^{vi}(t)e(t)\right] = 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

L'estimateur de la variable instrumentale à modèle auxiliaire (Young, 1970) nécessite de définir le vecteur de régression des variables instrumentales suivant :

$$\varphi_f^{vi}(t)^{\mathrm{T}} = \left[u_f^{(\beta_0)}(t), \cdots, u_f^{(\beta_M)}(t), -y_f^{vi(\alpha_1)}(t,\theta), \cdots, -y_f^{vi(\alpha_N)}(t,\theta)\right], \tag{2.44}$$

où y_f^{vi} représente la sortie d'un modèle auxiliaire : $y^{vi}(t,\theta) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\tilde{G}(s)\right\} \star u(t)$. Le modèle auxiliaire $\tilde{G}(s)$ peut être fixé par l'utilisateur ou calculé par une des méthodes précédentes, la méthode **mc/fve** apportant une meilleure estimation que les moindres carrés classiques.

L'estimée utilisant de la variable instrumentale se formule alors comme le problème de minimisation de :

$$\hat{\theta}^{vi/fve} = \arg\min_{\theta} \left\| \left[\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \varphi_f^{vi}(t_k)\varphi_f^*(t_k)^{\mathrm{T}}\right]\theta - \left[\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \varphi_f^{vi}(t_k)y_f^*(t_k)\right]\right\|^2. \tag{2.45}$$

L'estimateur **vi** à modèle auxiliaire associé aux **fve** est donné par :

$$\hat{\theta}^{vi/fve} = \left[\mathbf{\Phi}_f^{vi\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}_f^*\right]^{-1}\mathbf{\Phi}_f^{vi\mathrm{T}}\mathbf{Y}_f^*, \tag{2.46}$$

où $\mathbf{\Phi}_f^*$ et $\mathbf{Y}_f^*$ sont issus de (2.41), et où

$$\mathbf{\Phi}_f^{vi} = \left[\varphi_f^{vi}(t_0), \varphi_f^{vi}(t_1), \ldots, \varphi_f^{vi}(t_{K-1})\right]^{\mathrm{T}}. \tag{2.47}$$

Afin d'améliorer la corrélation entre les matrices de régression $\varphi_f^{\mathbf{vi}}(t)$ et $\varphi_f^*(t)$, une procédure itérative de mise à jour des instruments et du modèle auxiliaire est préconisée dans Cois *et al.* (2001) : l'estimation paramétrique est améliorée en s'affranchissant du biais et en réduisant la variance des paramètres. Le vecteur des paramètres s'écrit alors :

$$\hat{\theta}_{\text{iter}}^{vi/fve} = \left[\mathbf{\Phi}_f^{vi\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}_f^*\right]^{-1}\mathbf{\Phi}_f^{vi\mathrm{T}}\mathbf{Y}_f^*. \tag{2.48}$$

En présence de bruit blanc, la méthode de la variable instrumentale combinée aux filtres à variables d'état (**vi/fve**) permet d'obtenir une estimation asymptotiquement sans biais ; mais n'étant pas à variance minimale, elle ne peut être considérée comme optimale. D'autre part, elle requiert un affinage du filtre en amont : l'estimation paramétrique est fortement dépendante de la fréquence de coupure ω_c et de l'ordre N_f du filtre. Un résumé du mécanisme itératif **vi** est illustré sur la figure 2.5.

2.2.2.4 Méthode de la variable instrumentale optimale (srivcf)

Lorsque le bruit de mesure additif $e(t)$ est blanc, il est préférable de minimiser l'erreur de sortie de mesure :

$$\varepsilon = y^*(t) - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{B(s)}{A(s)}\right\} \star u(t), \tag{2.49}$$

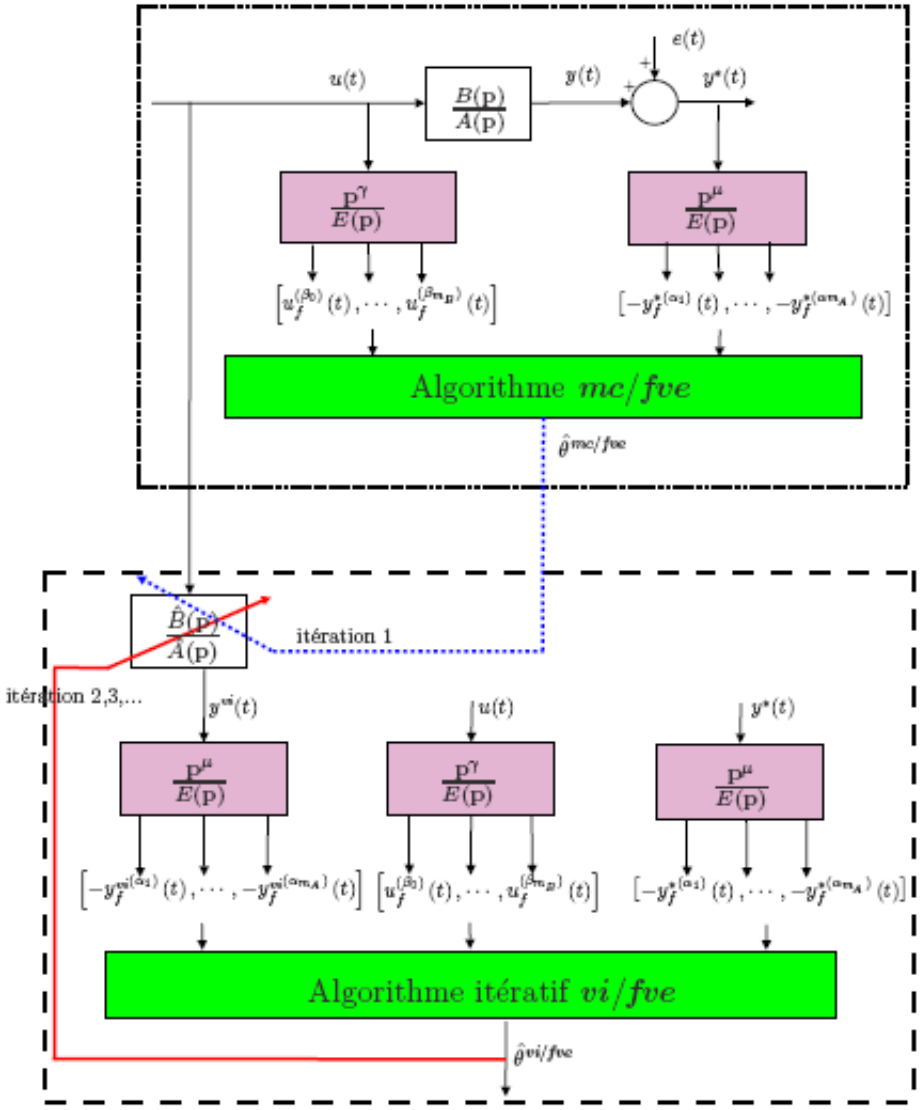


FIGURE 2.5 – Méthode itérative **vi/fve** pour modèles non entiers ($\gamma = \beta_0, \ldots, \beta_{m_B}$ et $\mu = \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_A}$)

qui peut aussi se présenter sous la forme

$$\varepsilon(t) = \mathscr{L}^{-1}\{A(s)\} \star \left(\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{A(s)} \right\} \star y^*(t) \right) - \mathscr{L}^{-1}\{B(s)\} \star \left(\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{A(s)} \right\} \star u(t) \right), \tag{2.50}$$

soit, sous la forme développée

$$\varepsilon = y_f^*(t) + a_1 y_f^{*(\alpha_1)}(t) + \cdots + a_N y_f^{*(\alpha_N)}(t) - b_0 u_f^{(\beta_0)}(t) - b_1 u_f^{(\beta_1)}(t) - \cdots - b_M u_f^{(\beta_M)}(t) \tag{2.51}$$

avec

$$u_f = \mathscr{L}^{-1}\{F^{opt}(s)\} \star u(t), \tag{2.52}$$

$$y_f = \mathscr{L}^{-1}\{F^{opt}(s)\} \star y(t) \tag{2.53}$$

et

$$F^{opt}(s) = \frac{1}{A(s)}. \tag{2.54}$$

Cependant, le vrai dénominateur du modèle $A(s)$ est inconnu. Par conséquent, cette méthode utilise un algorithme de préfiltrage itératif. A chaque itération, le filtre et un modèle auxiliaire servant à générer la variable instrumentale sont mis à jour. Ce filtre F^{opt} est alors remplacé par une estimée calculée itérativement :

$$F_{iter}(s) = \frac{1}{\hat{A}(s)} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{N} \hat{a}_j s^{\alpha_j}}, \tag{2.55}$$

avec $iter = 1, 2, \cdots$ le numéro de l'itération et $\hat{a}_j$ l'estimée du coefficient a_j à l'itération $iter$. L'initialisation de cet algorithme peut se faire à partir de l'estimée obtenue par filtre à variable d'état (2.35). Les dérivées filtrées de l'entrée, de la sortie et de la variable instrumentale sont recalculées à chaque itération par :

$$u_f = \mathscr{L}^{-1}\{F_{iter}(s)\} \star u(t), \tag{2.56}$$

$$y_f^* = \mathscr{L}^{-1}\{F_{iter}(s)\} \star y^*(t), \tag{2.57}$$

$$y_f^{iv} = \mathscr{L}^{-1}\{F_{iter}(s)\} \star y^{iv}(t), \tag{2.58}$$

où y^{iv} est la sortie du modèle auxiliaire :

$$y_f^{iv}(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{\hat{B}(s)}{\hat{A}(s)} \right\} \star u(t), \tag{2.59}$$

mise à jour en fonction des estimations précédentes de $\hat{B}$ et $\hat{A}$. Ensuite, le vecteur de régression :

$$\varphi_f^*(t) = \begin{bmatrix} u_f^{(\beta_1)}(t) & \cdots & u_f^{(\beta_M)}(t) & -y_f^{*(\alpha_1)}(t) & \cdots & -y_f^{*(\alpha_N)}(t) \end{bmatrix}, \tag{2.60}$$

et le vecteur instrumental :

$$\varphi_f^{iv}(t) = \begin{bmatrix} u_f^{(\beta_1)}(t) & \cdots & u_f^{(\beta_M)}(t) & y_f^{(\alpha_1)\ iv}(t) & \cdots & y_f^{(\alpha_N)\ iv}(t) \end{bmatrix}, \tag{2.61}$$

sont déduits. La formulation du problème d'optimisation devient :

$$\widehat{\theta}_{iter}^{srivcf} = \arg\min_{\theta} \left\| \left[\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \varphi_f^{iv}(t_k) \varphi_f^*(t_k)^T \right] \theta - \left[\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \varphi_f^{iv}(t_k) y_f^*(t_k)^T \right] \right\|^2, \tag{2.62}$$

dont la solution à chaque itération conduit à :

$$\hat{\theta} = [\mathbf{\Phi_f^{ivT}} \mathbf{\Phi_f^*}]^{-1} \mathbf{\Phi_f^{ivT}} \mathbf{Y_f^*}, \tag{2.63}$$

avec

$$\mathbf{\Phi}_f^* = \begin{bmatrix} \varphi_f^{*T}(t_0) & \varphi_f^{*T}(t_1) & \cdots & \varphi_f^{*T}(t_{K-1}) \end{bmatrix}, \tag{2.64}$$

$$\mathbf{\Phi}_f^* = \begin{bmatrix} \varphi_f^{ivT}(t_0) & \varphi_f^{ivT}(t_1) & \cdots & \varphi_f^{ivT}(t_{K-1}) \end{bmatrix}, \tag{2.65}$$

$$\mathbf{Y}_f^* = \begin{bmatrix} y_f^{*T}(t_0) & y_f^{*T}(t_1) & \cdots & y_f^{*T}(t_{K-1}) \end{bmatrix}. \tag{2.66}$$

La procédure est répétée jusqu'à convergence de l'algorithme itératif. La méthode **srivcf** n'est pas biaisée en présence d'un bruit additif blanc et est à variance minimale (Victor *et al.*, 2013). Elle est résumée sur la figure 2.6.

2.2.2.5 Modèle basé sur les fonctions orthogonales

A partir des travaux de Wahlberg (1991), Aoun *et al.* (2007) et Malti *et al.* (2005) ont étendu la méthode d'identification utilisant les bases orthogonales aux systèmes non entiers. Le système à identifier est alors représenté par une combinaison linéaire de fonctions orthogonales :

$$G(s) = \sum_{m=m_0}^{M} g_m G_m(s), \tag{2.67}$$

où le vecteur de paramètres $\theta = [g_{m_0}, \ldots, g_M]^{\mathrm{T}}$ est composé de coefficients de *Fourier* et où les fonctions G_m, $m = m_0, \ldots, M$, désignent les fonctions orthogonales de la base non entière. Trois familles de fonctions orthogonales non entières ont été synthétisées :

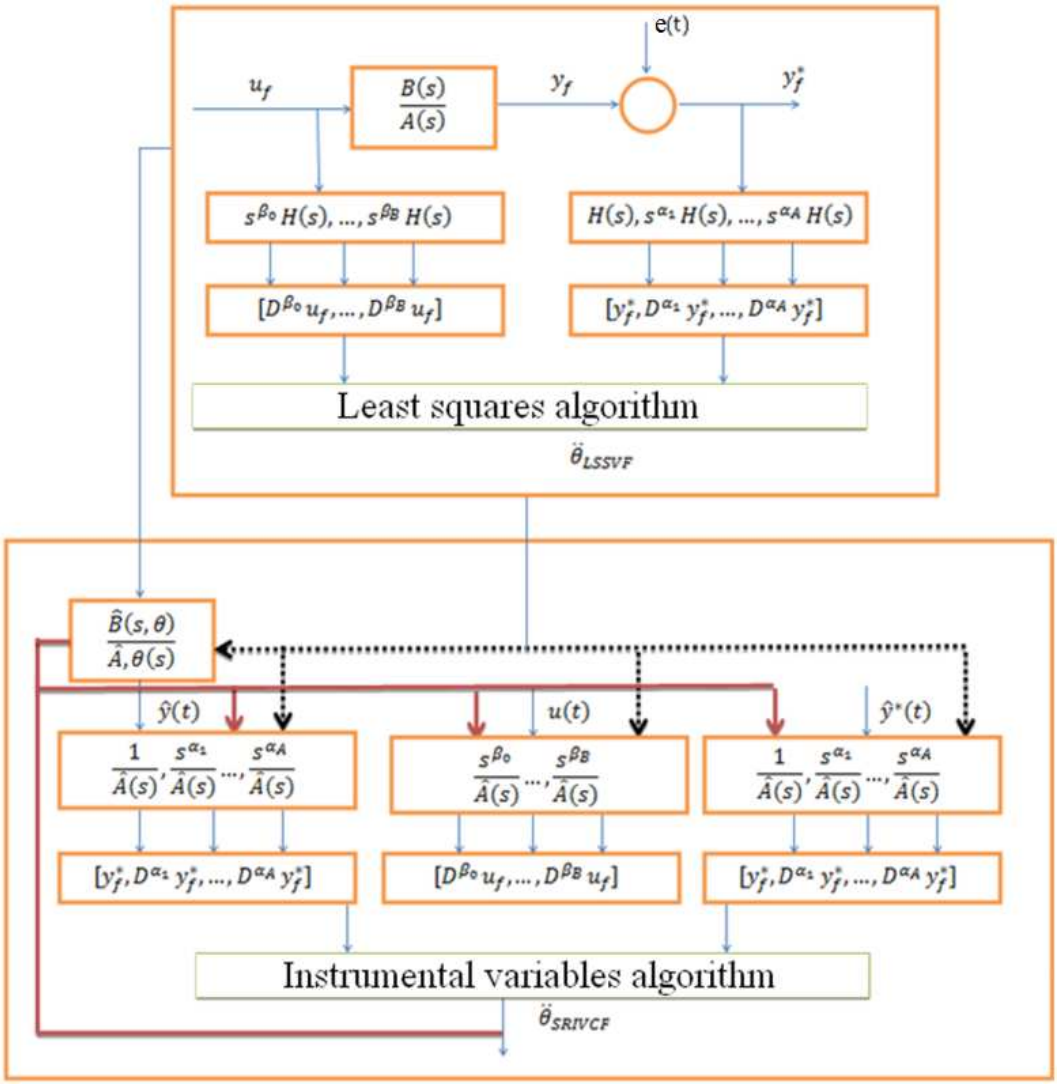


FIGURE 2.6 – Méthode itérative **srivcf**

– les fonctions de *Laguerre* non entières (Aoun *et al.*, 2007), caractérisées par la présence d'un s^ν-pôle unique, formées à partir des fonctions génératrices

$$G_m = \frac{1}{(s^\nu + \lambda)^m}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nu \in]0, 2[\\ \lambda \in \mathbb{R}^{*+} \\ m \geq m_0 = \lfloor \frac{1}{2\nu} \rfloor + 1 \end{cases} ; \tag{2.68}$$

– les fonctions de *Kautz* non entières (Malti *et al.*, 2004), caractérisées par la présence de deux s^ν-pôles complexes conjugués, formées à partir des fonctions génératrices définies par paires G'_m et G''_m dont la première paire est donnée par

$$\begin{cases} G'_{m_0} = \frac{1}{(s^\nu+\lambda)^{m_0}} \\ G''_{m_0} = \frac{1}{(s^\nu+\lambda)^{m_0}} \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nu \in]0, 2[\\ \lambda \in \mathbb{C} \,/\, \arg(-\lambda) > \nu\frac{\pi}{2} \\ m_0 = \lfloor \frac{1}{2\nu} \rfloor + 1 \end{cases} ; \tag{2.69}$$

– les fonctions issues de la *Base Orthogonale Généralisée* (BOG) non entière (Malti *et al.*, 2005), caractérisées par des s^ν-pôles choisis soit réels soit complexes conjugués et déduites des bases non entières de *Laguerre* et de *Kautz*.
En effet, si le premier s^ν-pôle est réel, la première fonction génératrice est identique à celle de la base de *Laguerre* (2.68). Si le premier s^ν-pôle est complexe, alors le deuxième est obligatoirement son conjugué et les deux premières fonctions génératrices sont identiques à celles de la base de *Kautz* (2.69).

Après un choix adéquat des fonctions génératrices et de leur orthogonalisation, seuls les coefficients de *Fourier* g_m sont estimés par minimisation de l'erreur quadratique (2.37) selon l'estimateur des moindres carrés :

$$\hat{\theta} = \left(\mathbf{\Phi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^*\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{Y}^*, \tag{2.70}$$

où $\mathbf{Y}^*$ est le vecteur de sortie

$$\mathbf{Y}^* = \begin{bmatrix} y^*(t_0) & y^*(t_1) & \dots & y^*(t_{K-1}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

et où $\mathbf{\Phi}^*$ est la matrice de régression dont les colonnes représentent les sorties des différentes fonctions de la base :

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^* &= [\varphi_G(t_0), \varphi_G(t_1), \dots, \varphi_G(t_{K-1})]^{\mathrm{T}}, \\ \varphi_G(t_k) &= [y_{G_{m_0}}(t_k), y_{G_{m_0+1}}(t_k), \dots, y_{G_M}(t_k)], \\ y_{G_m}(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{G_m(s)\} \star u(t). \end{aligned} \tag{2.71}$$

La matrice de covariance est alors donnée par :

$$\mathrm{cov}\left(\hat{\mathbf{g}}\right) = \sigma^2 \left(\mathbf{\Phi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^*\right)^{-1},$$

où la variance σ^2 est estimée par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K-(M-m_0+1)} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\varepsilon\left(t_k, \hat{\theta}\right)\right)^2. \tag{2.72}$$

Remarque *Aoun (2005) présente également un autre algorithme d'estimation permettant de calculer l'ordre ν et les s^ν-pôles optimaux des fonctions orthogonales. Cependant, si tous les paramètres (s^ν-pôles et ordre commensurable ν) des fonctions orthogonales sont estimés, l'utilisation des fonctions orthogonales ne présente plus d'intérêt. C'est pourquoi seul l'algorithme permettant d'estimer les coefficients de Fourier a été présenté.*

La densité de la base de Laguerre non entière dans l'espace de *Hardy* $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$, des fonctions de transfert analytiques dans le demi-plan droit du plan complexe, a été démontrée par Aoun *et al.* (2007) (voir théorème 1 ci-dessous). La démonstration de la densité des bases orthogonales non entières (BOG) dans $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$ s'est avérée plus difficile. La densité de la BOG non entière a finalement été établie par Akçay (2008), suite aux travaux initiaux de Aoun *et al.* (2007) et Malti *et al.* (2005), (voir théorème 2, et 3 ci-dessous).

Theorème 1 (Aoun *et al.*, 2007) (Complétude de la base de Laguerre non entière).

La série de fonctions $\{G_m\}_{m=m_0,m_0+1,\cdots,\infty}$ définie en (2.68) ayant un ordre commensurable $\nu \in]0,2[$ et tous les s^ν-pôles identiques et positifs :

$$\lambda_{m_0} = \lambda_{m_0+1} = \cdots = \lambda_\infty = \lambda \in \mathbb{R} > 0 \tag{2.73}$$

où l'indice de la premiere fonction m_0 est défini par (2.68), est dense dans $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}+)$.

Theorème 2 (Complétude de la BOG non entière pour $\nu \in (0,1)$ (Akçay, 2008).

La série de fonctions $\{G_m\}_{m=m_0,m_0+1,\cdots,\infty}$ définie par (2.68) et (2.69) ayant un ordre commensurable $\nu \in]0,1[$ et des s^ν-pôles complexes $\lambda_m \in \mathbb{C}^+$ tels que (2.69) est respectée et où l'indice de la première fonction m_0 est défini par (2.69), est dense dans $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$.

Theorème 3(Complétude de la BOG non entière pour $\nu \in [1,2)$ (Akçay, 2008). La série de fonctions $\{G_m\}_{m=m_0,m_0+1,\cdots,\infty}$ définie en (2.68) et (2.69) ayant un ordre commensurable $\nu \in [1,2)$ et des s^ν-pôles complexes $\lambda_m \in \mathbb{C}^+$ tels que (2.69) est respectée et où l'indice de la première fonction m_0 est défini par (2.68) et (2.69), est dense dans $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$ si

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k \frac{r_k^a \cos(a\theta_k)}{1+r_k^{2a}} = \infty \tag{2.74}$$

où $\lambda_k = r_k e^{j\theta_k}$ et $a = (2-\overline{\nu})^{-1}$.

La condition exprimée au théorème 3, qualifiée de douce par Akçay (2008), n'est effectivement pas très contraignante, puisqu'il est relativement aisé de trouver une suite de s^ν-pôles telle que la série (2.74) soit divergente. Les théorèmes 1-3 permettent d'utiliser les bases orthogonales non entières pour approcher n'importe quelle fonction de transfert (rationnelle ou non entière) appartement à $\mathcal{H}_2(\mathbb{C}^+)$ par des fonctions orthogonales non entières.

Puisque les systèmes non entiers se distinguent des systèmes entiers par une convergence des réponses temporelles lente d'ordre polynômial, la représentation de systèmes non entiers sur des bases orthogonales non entières est plus appropriée, puisqu'elle permet d'emblée de se positionner dans la classe des modèles non entiers.

2.3 Identification par modèles linéaires non entiers du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO

2.3.1 Modélisation d'un échantillon de fer ARMCO sous COMSOL pour la génération de données par éléments finis

Ce travail vise à infirmer l'hypothèse de linéarité du transfert de chaleur dans un échantillon de fer ARMCO pour de grandes variations de température et à préparer l'expérimentation sur un banc réel servant à l'acquisition de données. Les données sont collectées à partir d'une simulation par éléments finis réalisée grâce au logiciel COMSOL. Le modèle est créé pour une analyse temporelle à partir du module transfert de chaleur par conduction de COMSOL. L'échantillon est représenté en 3D par un cylindrique de rayon

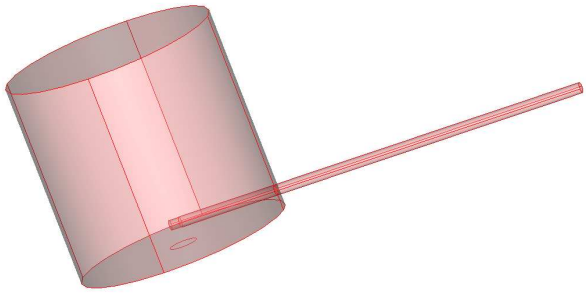


FIGURE 2.7 – Géométrie de l'échantillon de fer ARMCO

$R = 10$ mm et de hauteur $e = 20$ mm. Une face du cylindre est soumise à un flux thermique appliqué sur un disque de rayon $r = 1.25$ mm. Un thermocouple de type K, de diamètre 0.5 mm, est placé à l'intérieur de l'échantillon à une distance $d = 2$ mm de la surface excitée. Plus le thermocouple est près, plus la sensibilité au flux est élevée et plus le terme en $s^{0.5}$ est prépondérant dans (1.59). La température initiale du cylindre est fixée à celle du point de fonctionnement, et la paroi de l'échantillon est entourée d'un isolant dont la conductivité thermique est très faible. Le transfert de chaleur (1.44) à l'intérieur de l'échantillon est modélisé par éléments finis. La technique de maillage est laissée à la valeur par défaut : quadratique de Lagrange.

Le simulateur Comsol présente une configuration idéale, c'est-à-dire sans bruit de mesure et sans séparation entre le thermocouple de l'échantillon de fer et entre l'échantillon de fer et l'isolant. L'air ou la colle entre les éléments peuvent changer les caractéristiques thermiques. De plus, la période d'échantillonnage de $h = 0.01$s est atteignable par le système d'acquisition du banc d'essai réel dont est inspirée la simulation. Une séquence binaire pseudo-aléatoire (sbpa) d'amplitude comprise entre 0 et 38×10^4 W/m^2 et de durée totale de 10 secondes est choisie comme signal d'entrée (densité de flux). Pour chaque point de fonctionnement, deux jeux de données sont générés : un jeu dédié à l'identification et l'autre à la validation. Le modèle géométrique de l'échantillon est présenté sur la figure 2.7.

Pour les simulations, les propriétés thermiques (conductivité thermique et chaleur spécifique) du matériau sont nécessaires. Ces données ont été collectées par le Laboratoire National de métrologie et d'Essais (LNE) pour différentes températures. La capacité thermique a été mesurée par calorimétrie différentielle à balayage (Differential Scanning

Température (K)	300	400	500	600	700	800	900
ρ (kg.m^{-3})	7970	7941	7910	7877	7842	7805	7770
Cp (J.kg^{-1}.K^{-1})	470	502	542	571	614	667	732
λ (W.m^{-1}.K^{-1})	75.3	66.0	58.6	51.0	45.4	40.5	34.7
α(10^{-6} m^2.s^{-1})	20.09	16.56	13.68	11.35	9.44	7.77	6.10

Température (K)	1000	1020	1030	1040	1050	1060	1070
ρ (kg.m^{-3})	7736	7729	7726	7723	7719	7716	7713
Cp (J.kg^{-1}.K^{-1})	938	1029	1085	1131	892	829	791
λ (W.m^{-1}.K^{-1})	30.1	29.4	29.0	28.1	26.3	26.8	27.0
α(10^{-6} m^2.s^{-1})	4.15	3.70	3.46	3.21	3.82	4.19	4.43

Tableau 2.1 – Mesures des caractéristiques thermiques du fer ARMCO en fonction de la température en Kelvin

Calorimetry, DSC) et la conductivité thermique a été mesurée par la méthode “flash”. Les valeurs sont reportées au tableau 2.1 et tracées sur la figure 2.8. Pour chaque point de mesure, une expérience a été nécessaire.

La conductivité thermique comme la capacité thermique varient en fonction de la température. De plus, autour de la température de Curie[1], aux environs de $1040K$, les caractéristiques thermiques varient fortement. Donc pour de grandes variations de température, l'hypothèse de linéarité n'est plus vérifiée. Or, dans la mesure où l'on cherche à identifier des modèles linéaires, il est nécessaire que le signal d'entrée ne provoque pas de grandes variations de température de façon à rester dans le domaine de linéarité, comme sur la figure 2.9 qui présente les données d'identification et de validation utilisées pour l'identification du modèle thermique autour de la température de fonctionnement de 600K.

La durée de l'expérience étant courte par rapport au temps nécessaire à la diffusion thermique pour atteindre les limites de l'échantillon, celui-ci est considéré comme un milieu semi infini plan. L'équation (1.62) du chapitre 1 montre que la fonction de transfert entre le flux injecté et la température présente un intégrateur pur d'ordre 0.5 et est commensurable d'ordre 0.5. Par conséquent, le modèle choisi pour l'identification du transfert

[1]Dans un matériau ferromagnétique ou ferrimagnétique la température de Curie ou point de Curie, est la température à laquelle le matériau perd son aimantation spontanée. Au-dessus de cette température, le matériau est dans un état désordonné dit paramagnétique. Source : fr.wikipédia.org.

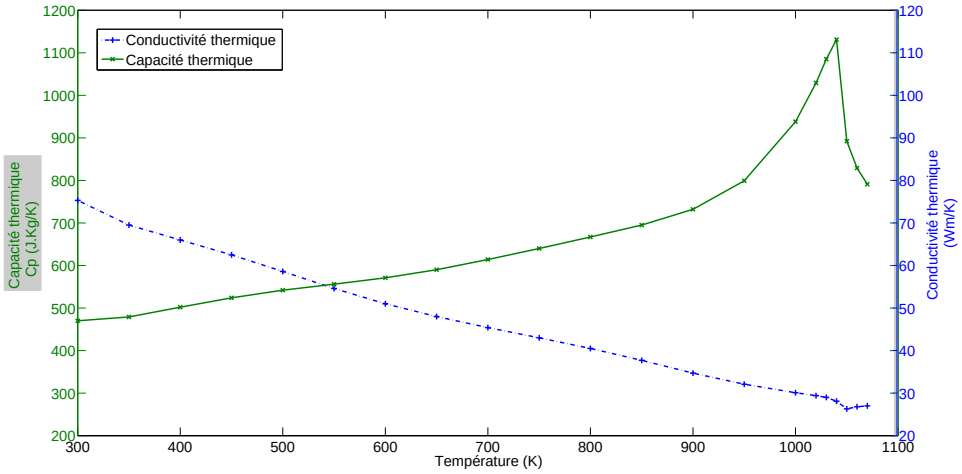


FIGURE 2.8 – Caractéristiques thermiques du fer ARMCO en fonction de la température en Kelvin

flux température est du type :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^{i\nu}}{s^{0.5}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_j s^{j\nu}\right)}. \tag{2.75}$$

Ce modèle contenant un intégrateur pur d'ordre 0.5, le signal d'entrée est préalablement intégré :

$$\widetilde{U}(s) = \frac{U(s)}{s^{0.5}}, \tag{2.76}$$

avant l'estimation des coefficients b_i et a_j rassemblés dans le vecteur de paramètres

$$\theta = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_m \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n], \tag{2.77}$$

du modèle à identifier :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{\widetilde{U}(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^{i\nu}}{1 + \sum_{j=1}^{n} a_j s^{j\nu}}. \tag{2.78}$$

K données sont collectées de $k = 0$ to $k = K - 1$.

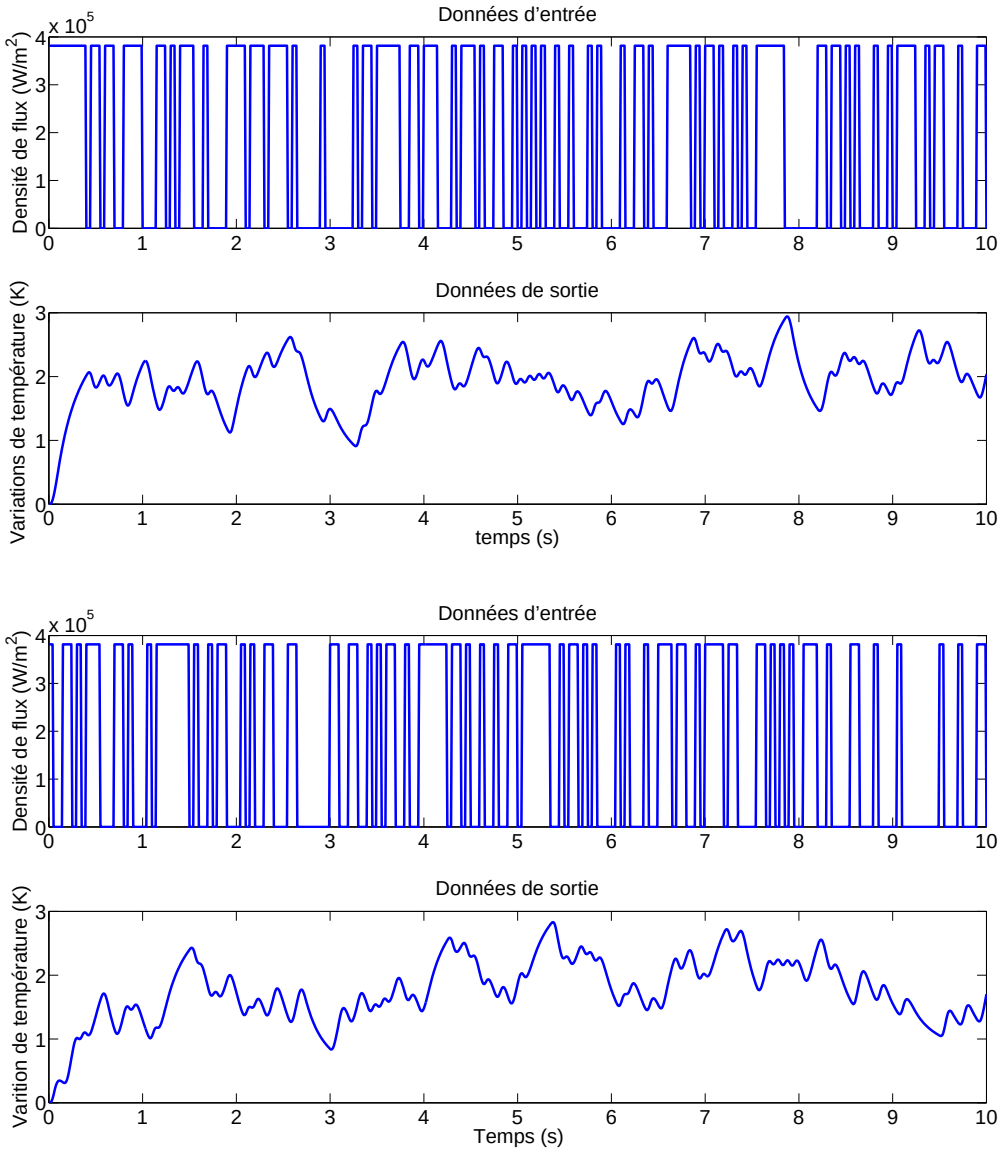


FIGURE 2.9 – Données d'identification et de validation autour de 600K, la température constante de 600K ayant été retranchée de la sortie

Tableau 2.2 – Valeurs des critères J_{id} et J_{val} en fonction de m

m	1	2	3	4	5	6
J_{id}	9.65	0.45	0.39	0.06	0.06	0.06
J_{val}	10.96	0.52	0.42	0.09	0.09	0.09

2.3.2 Identification du transfert température/flux autour de 600K

Dans l'exemple considéré, un modèle entre l'entrée intégrée $\widetilde{u}$ et la sortie y_{id} entachée d'un bruit blanc gaussien de rapport signal sur bruit (RSB) de 20 dB est identifié autour de la température de fonctionnement 600K. La sortie bruitée y^*_{id} est simulée pour 300 réalisations de bruit. Un modèle à erreur de sortie basé sur la forme développée d'une fonction de transfert est identifié pour chaque réalisation de bruit. La qualité de l'identification est quantifié par les critères basés sur la norme ℓ_2 normalisée de l'erreur sur les données d'identification

$$J_{id} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1}(y^*_{id}(kh) - \hat{y}_{id}(kh))^2}{\sum_{k=0}^{K-1}(y^*_{id}(kh))^2} \times 100, \tag{2.79}$$

et de validation :

$$J_{val} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1}(y^*_{val}(kh) - \hat{y}_{val}(kh))^2}{\sum_{k=0}^{K-1}(y^*_{val}(kh))^2} \times 100. \tag{2.80}$$

Par analogie aux systèmes rationnels, l'ordre du numérateur est fixé à l'ordre du dénominateur moins l'ordre commensurable : $n = m - 1$ de (2.78). Ensuite, les critères résiduels J_{id} et J_{val} sont évalués en fonction de m et reportés au tableau 2.2.

A partir du tableau 2.2, $m = 4$ apparaît comme un choix de troncature pertinent, puisque pour $m > 4$, les critères J_{id} et J_{val} n'évoluent plus. Par conséquent, le modèle d'ordre commensurable 0.5 suivant :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5} + b_2 s + b_3 s^{1.5}}{1 + a_1 s^{0.5} + a_2 s + a_3 s^{1.5} + a_4 s^2} \tag{2.81}$$

est choisi, le vecteur de paramètres à identifier s'écrivant alors :

$$\theta = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] \tag{2.82}$$

Après une simulation de Monte-Carlo, l'estimation du vecteur de paramètres du modèle de la diffusion thermique dans un échantillon de fer ARMCO autour de 600K est

Tableau 2.3 – Paramètres estimés du modèle linéaire d'ordre 4

θ	b_0	b_1	b_2
Estimation	1.11×10^{-6}	4.16×10^{-6}	-5.51×10^{-7}
écart-type	0.02×10^{-6}	0.10×10^{-6}	0.82×10^{-7}
θ	b_3	a_1	a_2
Estimation	1.00×10^{-8}	-0.07	0.28
écart-type	1.00×10^{-8}	0.02	0.02
θ	a_3	a_4	
Estimated	-0.04	0.91×10^{-2}	
écart-type	0.00	0.10×10^{-2}	

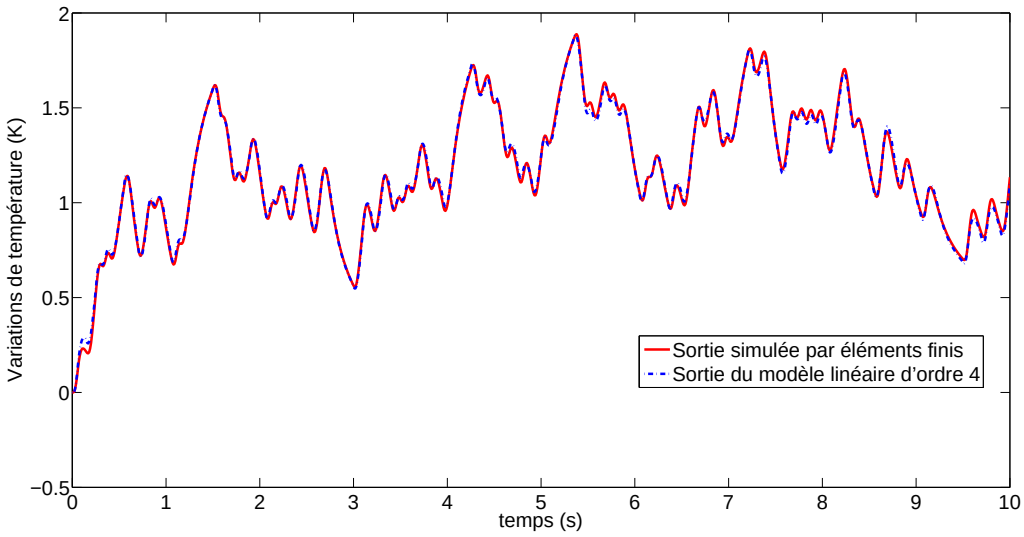


FIGURE 2.10 – Comparaison entre la sortie du système et celle du modèle d'ordre 4 sur les données de validation à 600K

donnée par le tableau 2.3. La sortie de ce modèle est comparée à la sortie simulée par éléments finis sur les données de validation sur la figure 2.10. Il apparaît que le modèle d'ordre 4 est prédictif.

Le tracé de l'erreur sur la figure 2.11 montre bien une erreur centrée sur 0.

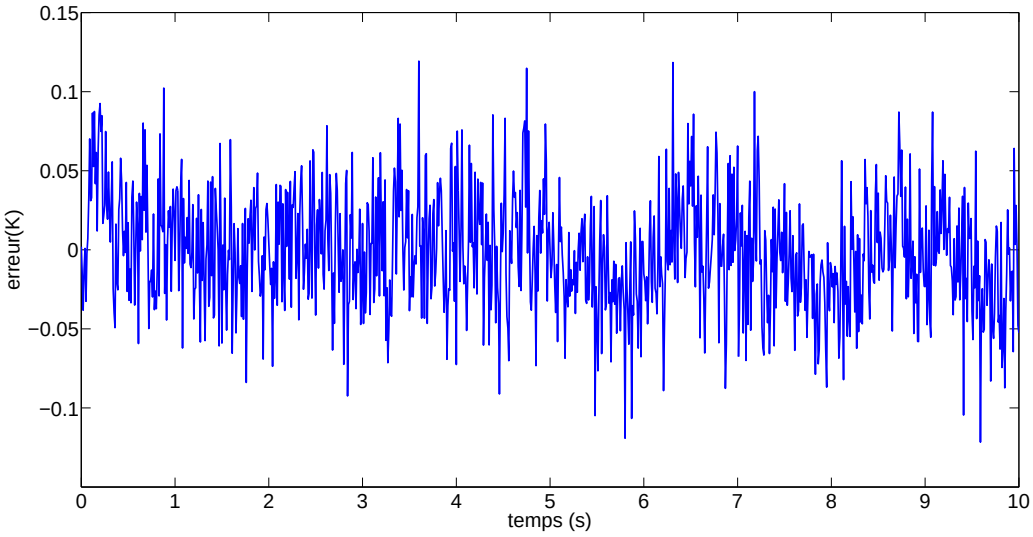


FIGURE 2.11 – Erreur résiduelle entre la sortie simulée par éléments finis et la sortie du modèle linéaire non entier

2.3.3 Identification autour de plusieurs points de fonctionnement

L'échantillon de fer ARMCO est maintenant identifié à différentes températures, à savoir 400, 600, 1000, 1040 et 1070K. Les modèles température/flux obtenus pour ces températures sont respectivement donnés par :

$$G_{400}(s) = \frac{(1.04 + \ 3.01\ s^{0.5} - 3.01 \times 10^{-1}\ s - 0.39 \times 10^{-2}\ s^{1.5}) \times 10^{-6}}{s^{0.5}(1 - 0.13s^{0.5} + 0.23s - 0.03s^{1.5} + 0.68 \times 10^{-2}s^2)}, \tag{2.83}$$

$$G_{600}(s) = \frac{(0.94 + \ 4.63\ s^{0.5} - 8.59 \times 10^{-1}\ s - 3.92 \times 10^{-2}\ s^{1.5}) \times 10^{-6}}{s^{0.5}(1 - 0.04s^{0.5} + 0.24s - 0.03s^{1.5} + 0.75 \times 10^{-2}s^2)}, \tag{2.84}$$

$$G_{800}(s) = \frac{(0.92 + \ 6.09\ s^{0.5} - 1.36\ s - 8.11 \times 10^{-2}\ s^{1.5}) \times 10^{-6}}{s^{0.5}(1 + 0.02s^{0.5} + 0.30s - 0.04s^{1.5} + 1.08 \times 10^{-2}s^2)}, \tag{2.85}$$

$$G_{1000}(s) = \frac{(0.67 + \ 9.60\ s^{0.5} - 2.61\ s - 19.7 \times 10^{-2}\ s^{1.5}) \times 10^{-6}}{s^{0.5}(1 + 0.29s^{0.5} + 0.48s - 0.05s^{1.5} + 3.19 \times 10^{-2}s^2)}, \tag{2.86}$$

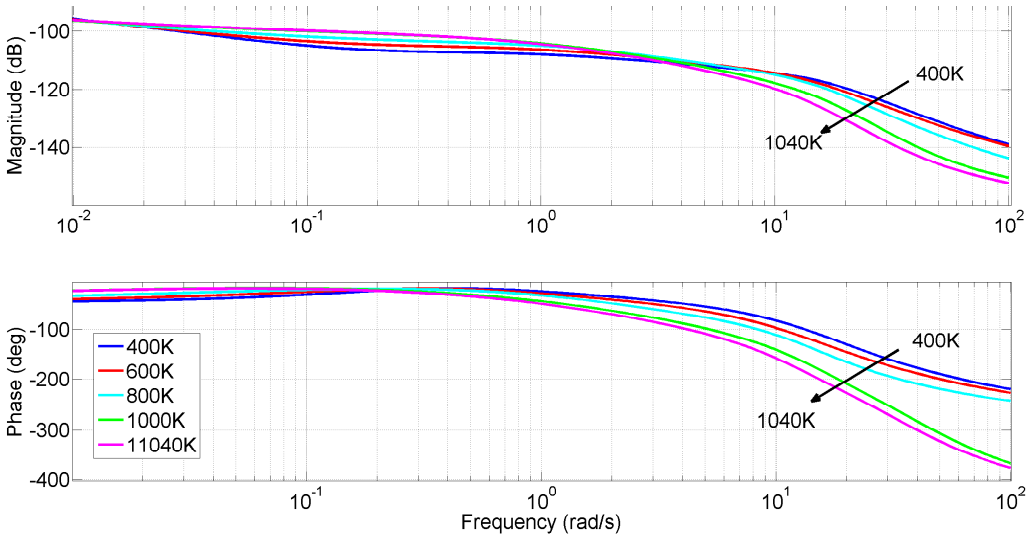


FIGURE 2.12 – Diagrammes de Bode de G_{400},G_{600},G_{800},G_{1000},G_{1040}

$$G_{1040}(s) = \frac{(0.69 + \ 9.78\ s^{0.5} - 2.94\ s - 24.6 \times 10^{-2}\ s^{1.5}) \times 10^{-6}}{s^{0.5}(1 + 0.29s^{0.5} + 0.57s - 0.06s^{1.5} + 4.51 \times 10^{-2}s^{2})}, \tag{2.87}$$

et

$$G_{1070}(s) = \frac{(1.00 + \ 9.39\ s^{0.5} - 2.51\ s - 19.2 \times 10^{-2}\ s^{1.5}) \times 10^{-6}}{s^{0.5}(1 + 0.10s^{0.5} + 0.52s - 0.08s^{1.5} + 3.02 \times 10^{-2}s^{2})}. \tag{2.88}$$

Les diagrammes de Bode des modèles pour des températures allant de 400K au point de Curie sont tracés sur la figure 2.12 et les diagrammes de Bode des modèles pour les températures supérieures au point de Curie sont tracés sur la figure 2.13. Il apparaît clairement que les modèles identifiés sont différents, ce qui confirme le comportement non linéaire du système thermique étudié pour de grandes variations de température. De plus, la figure 2.12 montre que la phase se déplace progressivement vers la gauche lorsque la température augmente alors qu'au dessus de la température de Curie, la figure 2.13 montre que ce déplacement est inversé.

Les différents modèles ainsi identifiés peuvent servir à modéliser le comportement de la diffusion thermique sur toute la plage de température étudiée. En effet, il est possible de construire un modèle Linéaire à Paramètres Variants (LPV) comme cela a été fait par Gabano *et al.* (2010). Un modèle LPV continu est défini sous la forme de fonction de

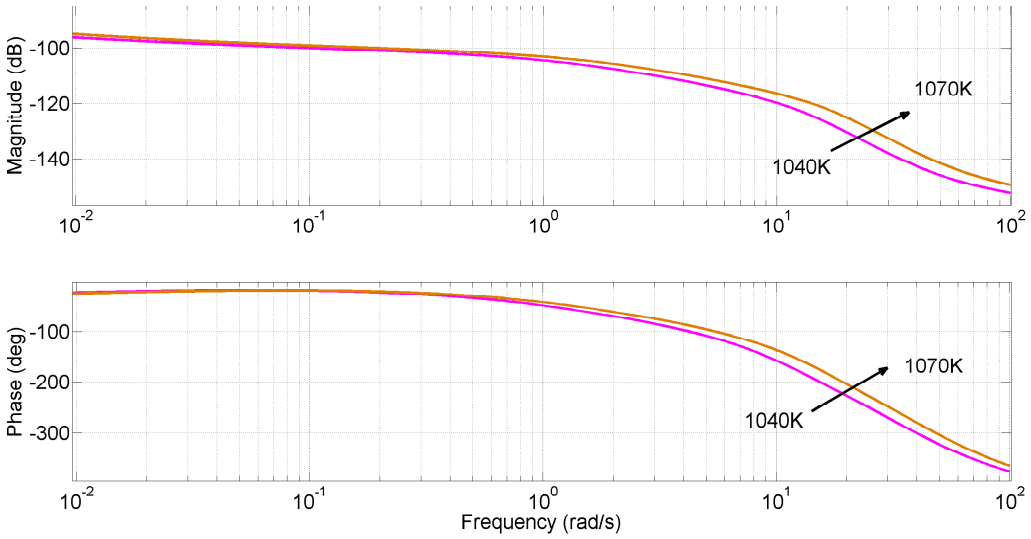


FIGURE 2.13 – Diagrammes de Bode de G_{1040},G_{1070}

transfert par :

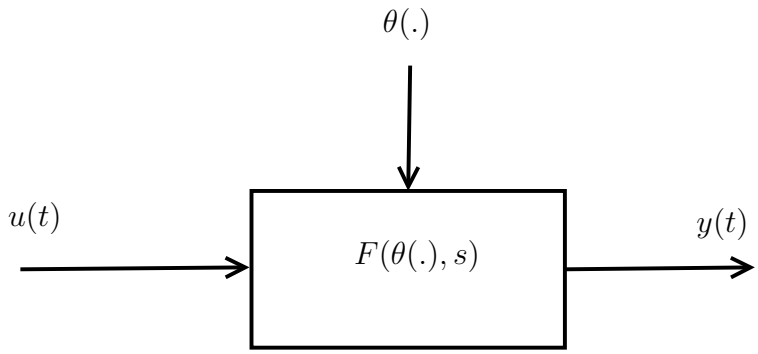
$$F(\theta(.),s) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i(\theta(.))s^{i\nu}}{1+\sum_{j=1}^{N} a_j(\theta(.))s^{j\nu}}, \tag{2.89}$$

où b_i et a_j dépendent du vecteur de paramètres $\theta(.)$, qui prend ses valeurs dans l'espace de paramètres $\mathfrak{P}_\theta$ qui est l'ensemble convexe

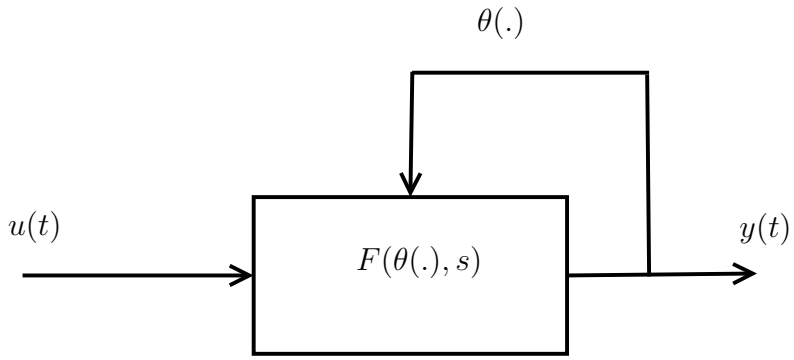
$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_\theta = \{\theta(.) = [b_0(.) \ \cdots \ b_M(.) \ a_1(.) \ \cdots \ a_N]\} \in \mathbb{R}^n,\\ \text{avec} \quad b_i(.) \in [\underline{b_i} \ \overline{b_i}] \ \forall i = 0,\cdots,M \text{ et } \ a_j(.) \in [\underline{a_j} \ \overline{a_j}] \ \forall j = 1,\cdots,N.\end{aligned} \tag{2.90}$$

Les paramètres $\theta(.)$ peuvent dépendre du temps, mais aussi de l'état du système, on parle alors de système quasi-LPV (voir figure 2.14). On remarque que si le vecteur de paramètres est constant, on retrouve un système classique.

Cette méthode d'identification comporte deux parties. Dans la première partie, différents modèles linéaires sont identifiés autour de différents points de fonctionnement appartenant à la plage de température étudiée comme cela à été fait dans ce paragraphe. Dans la seconde partie, la variation de chaque paramètre par rapport à la température est obtenue par interpolation polynomiale. On obtient alors un modèle non entier LPV permettant de décrire le transfert flux/température pour n'importe quel point de fonc-



a) Modèle LPV



b) Modèle quasi-LPV

FIGURE 2.14 – Modèles LPV et quasi-LPV

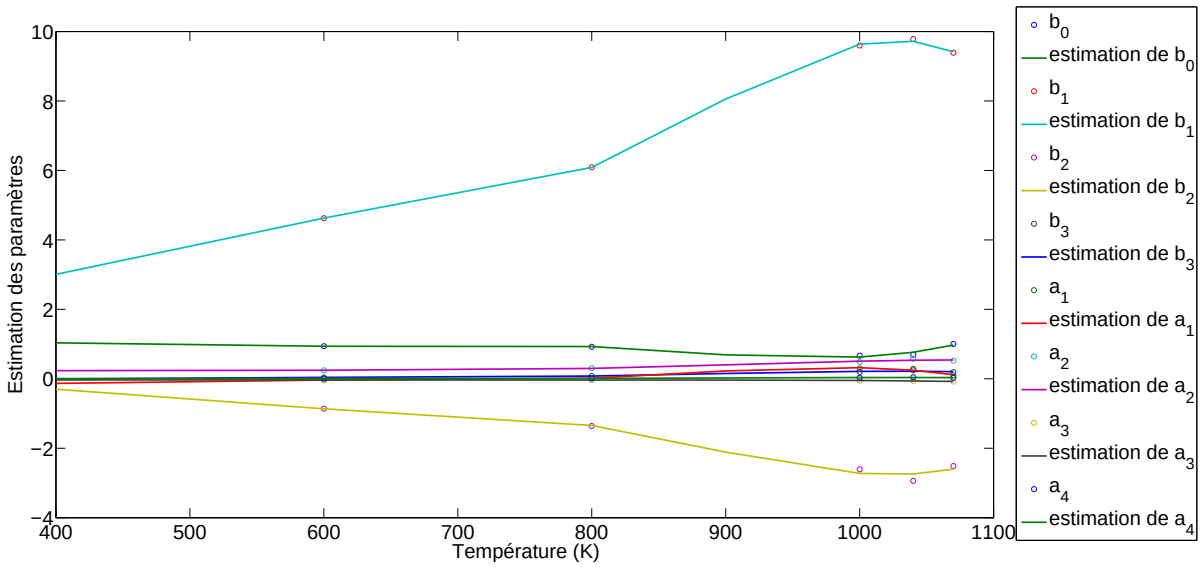


FIGURE 2.15 – Courbes d'interpolation polynomiale d'ordre 4 pour chaque paramètre du modèle

tionnement de la plage considérée. Les figures 2.15 et 2.16 présentent les courbes d'interpolation polynomiale d'ordre 4 tirées des modèles identifiés dans ce paragraphe. Plusieurs travaux de l'Université de Poitiers (Gabano *et al.*, 2010, 2011) ont été réalisés autour des méthodes LPV et quasi-LPV. Cependant, la mise en place d'un tel modèle nécessite plusieurs mesures et l'identification de plusieurs modèles . Ainsi la suite de la thèse portera sur la mise en place d'une méthode d'identification de modèles non linéaires basée sur les séries de Volterra permettant d'obtenir un seul modèle et limitant le nombre d'expériences nécessaires.

2.4 Conclusion

Un état de l'art des méthodes d'identification par modèles non entiers est d'abord présenté dans ce chapitre. Deux types de modèles ont été principalement détaillés : les modèles à erreur de sortie, où les coefficients et les ordres de dérivation sont estimés, et les modèles à erreur d'équation, où seuls les coefficients sont calculés. Si le nombre de paramètres est grand, une façon de le réduire consiste à estimer l'ordre commensurable au lieu d'estimer tous les ordres de dérivation.

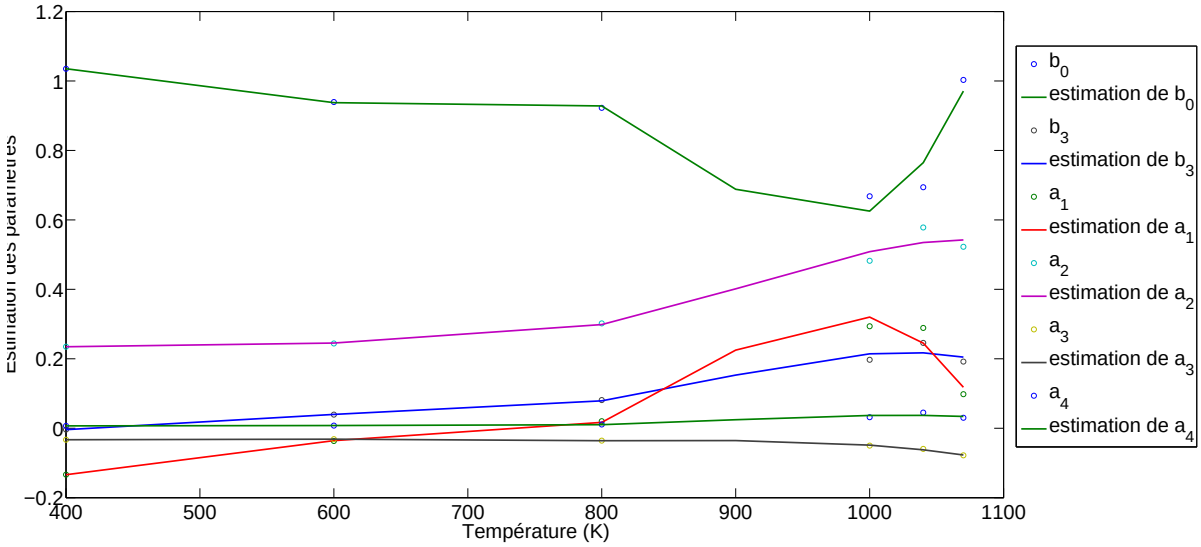


FIGURE 2.16 – Courbes d'interpolation polynomiale d'ordre 4 pour les paramètres variant dans l'intervalle [-0.2 ;1.2]

Un modèle à erreur de sortie basé sur la forme développée d'une fonction de transfert a ensuite été appliqué pour la modélisation de la diffusion dans un échantillon de fer ARMCO. Les résultats de cette modélisation autour de plusieurs points de fonctionnement permettent d'insister sur deux points.

D'abord, les six modèles identifiés sont différents. Cela s'explique par la variation des propriétés thermiques du matériau en fonction de la température. Un simple modèle linéaire n'est alors plus suffisant pour modéliser la diffusion thermique pour de grandes variations de température. Ce travail a donné lieu à deux communications (Maachou *et al.* (2010*a*) et Maachou *et al.* (2010*b*)) et une publications dans la revue NonLinear Dynamics (Maachou *et al.*, 2012*b*).

Ensuite, l'identification de la diffusion thermique dans un échantillon de fer ARMCO a nécessité plusieurs d'expériences au LNE pour obtenir les caractéristiques thermiques ou encore l'identification de plusieurs modèles. Bien que très coûteuses en temps et en argent, ces mesures ne sont pas toujours accessibles. Ainsi la suite de la thèse portera sur la mise en place d'une méthode d'identification de modèles non linéaires basée sur les séries de Volterra permettant d'obtenir un seul modèle et limitant le nombre d'expériences nécessaires.

Chapitre 3

Modèle non linéaire basé sur les séries de Volterra : choix des noyaux en présence de connaissances physiques du système

3.1 Introduction 62
3.2 Séries de Volterra en modélisation de systèmes non linéaires à dérivées entières : état de l'art 64
3.2.1 Des modèles linéaires aux modèles non linéaires 64
3.2.2 Détermination de la structure des noyaux 66
3.2.2.1 Décomposition en série de Taylor 66
3.2.2.2 Méthode du sondage harmonique 67
3.2.2.3 Expression analytique des noyaux de Volterra 68
3.2.2.4 Algèbre de George 69
3.3 Séries de Volterra en modélisation de systèmes non linéaires à dérivées non entières : application en thermique 74
3.3.1 De l'équation de la chaleur aux noyaux de Volterra 74
3.3.2 Solution analytique explicite pour $H_1(s_1)$ et $H_2(s_{1:2})$ 76
3.3.3 Solution générale pour $H_n(0, s_{1:n})$ 78
3.3.4 Simulation et analyse 79
3.3.5 Noyaux simplifiés intrinsèques 81
3.4 Conclusion 83

3.1 Introduction

Ce chapitre permet d'étendre les séries de Volterra aux modèles non entiers. Deux raisons ont motivé le choix d'utiliser les séries de Volterra pour modéliser les systèmes non linéaires non entiers : d'abord un modèle par série de Volterra permet de séparer la contribution de la partie linéaire de la contribution de la partie non linéaire. Ensuite, les séries de Volterra pouvant être considérées comme une généralisation des modèles linéaires, cette généralisation peut être utilisée pour rendre l'inversion plus simple en s'inspirant des techniques existantes pour les modèles linéaires. Dans la mesure où le comportement d'un système modélisé par des séries de Volterra dépend des noyaux de Volterra, une partie de la procédure d'identification consiste à choisir ces noyaux, puis à estimer leurs paramètres. Le choix des noyaux de Volterra peut se faire soit à partir de connaissances physiques en déterminant un modèle analytique permettant d'identifier ces noyaux termes à termes, soit en absence de connaissances physiques après avoir imposé l'expression des noyaux de Volterra en fonction de différents critères comme la forme des non-linéarités ou le nombre de paramètres. Ce chapitre présente les différentes méthodes existantes pour le choix des noyaux de Volterra dans le cas où les connaissances *a priori* permettent de déterminer les noyaux analytiquement.

La contribution théorique principale de ce chapitre consiste à trouver une expression analytique des noyaux de Volterra dans le cas de la diffusion thermique dans un milieu semi-infini plan. Cette forme analytique des noyaux a été développée à partir de l'équation de la diffusion thermique en milieu semi-infini plan pour une variation linéaire de la conductivité et de la capacité thermiques. Il apparaît que ces noyaux font intervenir des opérateurs de dérivation non entiers d'ordre 0.5. Cette démarche est validée par la comparaison de la sortie du modèle par éléments finis avec la sortie du modèle de Volterra composée des contributions des trois premiers noyaux. Cette expression analytique est ensuite manipulée dans le but d'obtenir un noyau simplifié intrinsèque permettant de modéliser la contribution non linéaire d'un système thermique.

D'abord dans la section 3.2, un état de l'art sur les séries de Volterra pour la modélisation de systèmes à dérivées entières est réalisé. Ensuite, la modélisation par séries de Volterra pour les systèmes non entiers est abordée dans la section 3.3, au travers de la modélisation de la diffusion thermique dans un milieu semi-infini plan à une dimension. A partir de l'équation de la chaleur, une expression analytique des noyaux est déduite,

puis simplifiée afin d'obtenir un noyau intrinsèque d'ordre 2.

3.2 Séries de Volterra en modélisation de systèmes non linéaires à dérivées entières : état de l'art

3.2.1 Des modèles linéaires aux modèles non linéaires

Un système linéaire sans mémoire reliant l'entrée $u(t)$ à la sortie $y_1(t)$ est décrit par l'équation :

$$y_1(t) = \gamma\, u(t), \tag{3.1}$$

où γ est un gain linéaire. Soit Δt la période d'échantillonnage choisie aussi faible que possible. Pour les systèmes dynamiques, la sortie au temps $t = n\,\Delta t$ dépend de la contribution au temps t mais aussi aux instants précédents depuis $t = 0$. Par conséquent, la sortie d'un système linéaire peut s'écrire comme la somme pondérée des contributions passées :

$$y_1(n\,\Delta t) = \sum_{i=0}^{n} h_1(i\,\Delta t)\; u((n-i)\;\Delta t). \tag{3.2}$$

En considérant $\Delta t \to 0$, l'équation précédente s'écrit en temps continu :

$$y_1(t) = \int_0^t h_1(\tau)\; u(t-\tau)\; \mathrm{d}\tau. \tag{3.3}$$

On retrouve le produit de convolution classique où $h_1(t)$ est la réponse impulsionnelle du système linéaire.

Pour un système non linéaire, soit le développement en série de la sortie y par rapport à l'entrée u au temps t :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, u(t)^k. \tag{3.4}$$

Comme représenté sur la figure 3.1, il s'agit de s'adapter au mieux à la sortie $y(t)$ au temps t en utilisant suffisamment de termes de la série. En considérant la sortie non linéaire de 2$^{\text{nd}}$ ordre, soit : $y_2(t) = \gamma_2\, u(t)^2$, la sortie $y_2(t)$ au temps $t = n\,\Delta t$ d'un système à mémoire est alors constituée de la somme pondérée des contributions au temps t et aux temps précédents depuis $t = 0$:

$$y_2(n\Delta t) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} h_2(i\Delta t, j\Delta t)\; u((n-i)\,\Delta t)\, u((n-j)\,\Delta t), \tag{3.5}$$

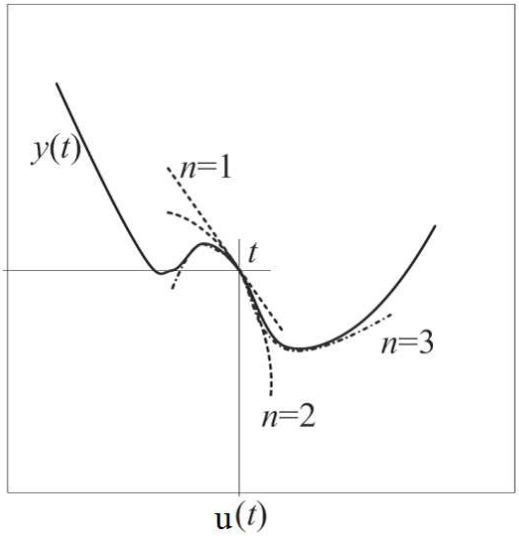


FIGURE 3.1 – Approximation de la sortie $y(t)$ à partir du développement en série de l'entrée $u(t)$.

soit, dans le domaine continu, lorsque $\Delta t \to 0$

$$y_2(t) = \int_0^t \int_0^t h_2(\tau_1, \tau_2)\, u(t-\tau_1)\, u(t-\tau_2)\, \mathrm{d}\tau_1\, \mathrm{d}\tau_2, \tag{3.6}$$

où $h_2(\tau_1, \tau_2)$ est le noyau de Volterra d'ordre 2.

Cette approche peut être généralisée à une non-linéarité d'ordre n, dont la sortie $y_n(t) = h_n\, u(t)^n$ s'exprime alors :

$$y_n(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n)\, u(t-\tau_1) \cdots, u(t-\tau_n)\, \mathrm{d}\tau_1 \cdots \mathrm{d}\tau_n \tag{3.7}$$

où $h_n(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ est le noyau de Volterra d'ordre n. Par conséquent, la sortie d'un système non linéaire à mémoire s'écrit :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)\,. \tag{3.8}$$

La transformée de Laplace $H_k(s_1, \cdots, s_k)$ du noyau de Volterra $h_k(t_1, \cdots, t_k)$ d'ordre k est donnée par (Crum and Heinen, 1974) :

$$H_k(s_1, \cdots, s_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \cdots, \tau_k) e^{-s_1\tau_1 \cdots - s_k\tau_k} d\tau_1 \cdots d\tau_k. \tag{3.9}$$

De plus, la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution (3.7) s'écrit :

$$Y_k(s_1, \cdots, s_k) = H_k(s_1, \cdots, s_k) U(s_1) \cdots U(s_k). \tag{3.10}$$

Par conséquent, la transformée de Laplace $Y(s_1, \cdots, s_k, \cdots)$ du signal de sortie $y(t)$ dans (3.8) est donnée par :

$$Y(s_1, \cdots, s_k, \cdots) = Y_1(s_1) + Y_2(s_1, s_2) + \cdots + Y_k(s_1, \cdots, s_k) + \cdots, \tag{3.11}$$

où

$$\begin{cases} Y_1(s_1) = H_1(s_1)U(s_1) \\ Y_2(s_1, s_2) = H_2(s_1, s_2)U(s_1)U(s_2) \\ \vdots \\ Y_k(s_1, \cdots, s_k) = H_k(s_1, \cdots, s_k)U(s_1)\cdots U(s_k). \end{cases} \tag{3.12}$$

Évidemment, le premier noyau $H_1(s_1)$ correspond à la partie linéaire du système, les autres noyaux contenant la partie non linéaire. Pour plus de simplicité, les noyaux sont supposés symétriques :

$$h_k(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k) = h_k(\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \cdots, \tau_{i_k}), \tag{3.13}$$

où $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ est toute permutation possible de $(1, 2, \cdots, k)$.

La difficulté principale liée à l'utilisation des séries de Volterra est le choix des noyaux. Ceux-ci peuvent être déterminés soit analytiquement, soit expérimentalement dans l'espace temporel ou dans l'espace opérationnel. Ce paragraphe présente les différentes méthodes pour le choix des noyaux de Volterra à dérivées entières dans le cas où les connaissances *a priori* permettent de déterminer les noyaux analytiquement.

3.2.2 Détermination de la structure des noyaux

3.2.2.1 Décomposition en série de Taylor

La première méthode pour déterminer les noyaux de Volterra d'un système consiste à décomposer en série de Taylor son modèle non linéaire, puis, par des manipulations analytiques, à faire apparaître des produits de convolution dans la relation entrée-sortie. Les expressions des noyaux de Volterra sont alors obtenues par identification termes à termes. Cette méthode est peu utilisée car elle nécessite une bonne connaissance du système et une articulation relativement simple entre les différents sous-systèmes. Pour cette raison, cette méthode n'est indiquée ici que par soucis de complétude. Le lecteur intéressé peut en trouver une illustration dans (Bard, 2005).

3.2.2.2 Méthode du sondage harmonique

Une méthode classique de détermination des noyaux de Volterra est la méthode du sondage harmonique ou "harmonic probing method" en anglais (Rugh, 1981). Elle consiste à considérer en entrée du système une somme d'exponentielles complexes :

$$u(t) = \sum_{r=1}^{n_t} e^{j\omega_r t}. \tag{3.14}$$

Dans ce cas, si le système est décomposable en série de Volterra, la réponse temporelle $y(t)$ s'exprime, d'après la relation (3.7) :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \cdots, \tau_k) \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n_t} e^{j\omega_r (t-\tau_i)} \right) d\tau_i. \tag{3.15}$$

L'équation (3.15) peut également s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t), \tag{3.16}$$

où

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \cdots, \tau_k) \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n_t} e^{j\omega_r (t-\tau_i)} \right) d\tau_i. \tag{3.17}$$

Or, si $n_t = 1$, la relation (3.17) devient pour $k = 1$:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) e^{j\omega_1 (t-\tau)} d\tau, \tag{3.18}$$

ce qui conduit de façon évidente à :

$$y_1(t) = H_1(j\omega_1) e^{j\omega_1 t}. \tag{3.19}$$

De même pour le noyau d'ordre 2, si $n_t = 2$:

$$u(t) = e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}, \tag{3.20}$$

alors, la formule (3.17) devient

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \left(e^{j\omega_1 (t-\tau_1)} + e^{j\omega_2 (t-\tau_1)} \right) \left(e^{j\omega_1 (t-\tau_2)} + e^{j\omega_2 (t-\tau_2)} \right) d\tau_1 d\tau_2, \tag{3.21}$$

soit en développant

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \prod_{i=1}^{k} (e^{j\omega_1 (t-\tau_1) + j\omega_1 (t-\tau_2)} + e^{j\omega_1 (t-\tau_1) + j\omega_2 (t-\tau_2)} + e^{j\omega_2 (t-\tau_1) + j\omega_1 (t-\tau_2)} + e^{j\omega_2 (t-\tau_1) + j\omega_2 (t-\tau_2)}) d\tau_1 d\tau_2. \tag{3.22}$$

En remarquant que, d'après la relation (3.9) :

$$H_2(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1\tau_1 - s_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2, \tag{3.23}$$

la relation (3.22) peut s'exprimer sous la forme :

$$y_2(t) = H_2(j\omega_1, j\omega_1) e^{j\omega_1 t} e^{j\omega_1 t} + 2H_2(j\omega_1, j\omega_2) e^{j\omega_1 t} e^{j\omega_2 t} + H_2(j\omega_2, j\omega_2) e^{j\omega_2 t} e^{j\omega_2 t}. \tag{3.24}$$

Ces résultats, démontrés pour les ordres $k = 1$ et $k = 2$, sont généralisables à toutes les réponses impulsionnelles des noyaux d'ordre $k > 0$ et se simplifient lorsque $n_t = k$:

$$y_k(t) = \sum_{\text{Toutes permutations de } \omega_{r1}, \omega_{r2}} H_k(j\omega_{r1}, \cdots, j\omega_{rn}) \prod_{i=1}^{k} e^{j\omega_{ri} t}. \tag{3.25}$$

Ainsi, lorsque l'entrée $u(t)$ du système non linéaire s'exprime comme une somme d'exponentielles complexes, la réponse temporelle $y(t)$ s'écrit en fonction des transformées de Laplace des noyaux de Volterra du système. Afin de déterminer ces noyaux, il suffit de remplacer la sortie et l'entrée du système par leur expression dans l'équation différentielle et d'identifier terme à terme les composants de l'équation. Cette méthode de détermination des noyaux de Volterra est assez efficace mais nécessite une approximation polynomiale correcte des phénomènes non linéaires.

3.2.2.3 Expression analytique des noyaux de Volterra

Le théorème de Lamnabhi-Lagarrigue (1994) donne une expression explicite des noyaux de Volterra à partir de l'étude des fonctionnelles causales analytiques et de l'application de la formule fondamentale de Fliess (1981) :

Théorème 3. *(Lamnabhi-Lagarrigue (1994)) La sortie $y(t)$ du système, donné par*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t)), \ x \in \mathbb{R}^n, \ x(0) = x_0 \\ y(t) = h(t, x(t)) \end{cases} \tag{3.26}$$

où les fonctions $f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x))^T$ et $g(x) = (g^1(x), \cdots, g^n(x))^T$, peuvent être développées en une série de Volterra :

$$y(t) = h_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\tau_2} \cdots \int_0^{\tau_n} h_n(t, \tau_n, \tau_{n-1}, \cdots, \tau_1) \prod_{j=1}^{n} u(\tau_j) d\tau_j \tag{3.27}$$

où chaque noyau est une fonction analytique de la forme :

$$\begin{cases} h_0(t) = \sum_{k\geq 0} A_0^k h(x_0)\frac{t^k}{k!} = e^{tA_0}h(x_0), \\ h_1(t,\tau_1) = \sum_{k_0,k_1\geq 0} A_0^{k_0}A_1A_0^{k_1}h(x_0)\frac{(t-\tau_1)^{k_1}\tau_1^{k_0}}{k_1!k_0!} = e^{\tau_1 A_0}A_1e^{(t-\tau_1)A_0}h(x_0), \\ \vdots \\ h_n(t,\tau_n,\cdots,\tau_1) = \sum_{k_0,\cdots,k_n\geq 0} A_0^{k_0}A_1A_0^{k_1}\cdots A_1A_0^{k_n}h(x_0)\frac{(t-\tau_n)^{k_n}\cdots\tau_1^{k_0}}{k_n!\cdots k_0!} \\ = e^{\tau_1 A_0}A_1e^{(\tau_2-\tau_1)A_0}\cdots A_1e^{(t-\tau_n)A_0}h(x_0), \end{cases} \tag{3.28}$$

avec

$$\begin{cases} A_0 = \sum_{j=1}^{n} f^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \\ A_1 = \sum_{j=1}^{n} g^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Cependant, l'expression des noyaux sous cette forme est relativement complexe.

3.2.2.4 Algèbre de George

Une autre méthode permettant de déterminer les noyaux de Volterra d'un système consiste à utiliser l'algèbre de George (1959), qui permet de décomposer le système non linéaire en plusieurs sous-systèmes qui admettent une représentation par une série de Volterra. Seules les propriétés majeures et les principes généraux de l'algèbre de George sont présentés ici. Dans le cadre d'une définition de cette algèbre, la notation opérationnelle $\underline{\mathbf{H}}[.]$ suivante est adoptée :

$$y(t) = \underline{\mathbf{H}}[u(t)] \tag{3.30}$$

Cette algèbre est munie de 3 opérations :

- l'addition notée '+ ' (voir figure 3.2a) ;
- la multiplication notée '•' (voir figure 3.2b) ;
- la mise en cascade notée '*' (voir figure 3.2c).

Elle possède également un élément neutre, noté $\underline{\mathbf{I}}$, et un élément nul, noté $\underline{\mathbf{0}}$, qui vérifient les relations :

$$\underline{\mathbf{I}} * \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}} * \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{H}} \tag{3.31}$$

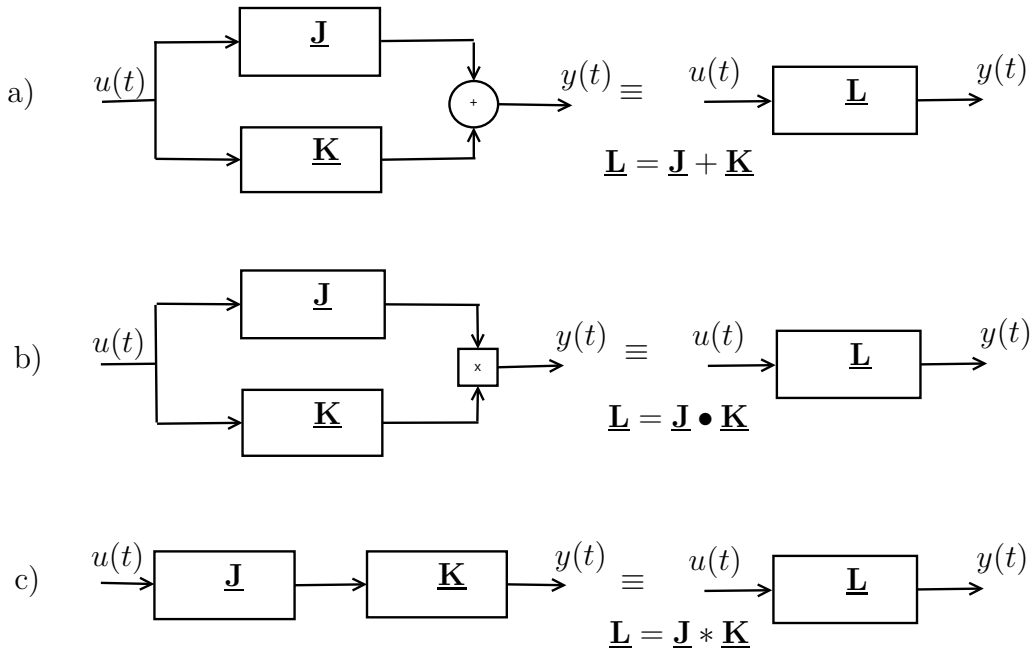


FIGURE 3.2 – Opérations élémentaires de l'algèbre de George

et

$$\underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{H}}. \tag{3.32}$$

Dix règles opératoires sont associées à cette algèbre.

Règle 1 : Commutativité par rapport à la loi +

$$\underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}} + \underline{\mathbf{J}} \tag{3.33}$$

Règle 2 : Associativité par rapport à la loi +

$$\underline{\mathbf{J}} + (\underline{\mathbf{K}} + \underline{\mathbf{L}}) = (\underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{K}}) + \underline{\mathbf{L}} \tag{3.34}$$

Règle 3 : Commutativité par rapport à la loi •

$$\underline{\mathbf{J}} \bullet \underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}} \bullet \underline{\mathbf{J}} \tag{3.35}$$

Règle 4 : Associativité par rapport à la loi •

$$\underline{\mathbf{J}} \bullet (\underline{\mathbf{K}} \bullet \underline{\mathbf{L}}) = (\underline{\mathbf{J}} \bullet \underline{\mathbf{K}}) \bullet \underline{\mathbf{L}} \tag{3.36}$$

Règle 5 : Associativité par rapport à la loi *

$$\underline{\mathbf{J}} * (\underline{\mathbf{K}} * \underline{\mathbf{L}}) = (\underline{\mathbf{J}} * \underline{\mathbf{K}}) * \underline{\mathbf{L}} \tag{3.37}$$

Règle 6 : Distributivité à droite de la loi + par rapport à la loi *

$$(\underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{K}}) * \underline{\mathbf{L}} = (\underline{\mathbf{J}} * \underline{\mathbf{L}}) + (\underline{\mathbf{K}} * \underline{\mathbf{L}}) \tag{3.38}$$

Règle 7 : Distributivité à droite de la loi • par rapport à la loi *

$$(\underline{\mathbf{J}} \bullet \underline{\mathbf{K}}) * \underline{\mathbf{L}} = (\underline{\mathbf{J}} * \underline{\mathbf{L}}) \bullet (\underline{\mathbf{K}} * \underline{\mathbf{L}}) \tag{3.39}$$

Règle 8 : Non commutativité de la loi *

$$\underline{\mathbf{J}} * \underline{\mathbf{K}} \neq \underline{\mathbf{K}} * \underline{\mathbf{J}} \tag{3.40}$$

Règle 9 : Non distributivité des lois + et • par rapport à la loi *

$$\underline{\mathbf{L}} * (\underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{K}}) \neq (\underline{\mathbf{L}} * \underline{\mathbf{J}}) + (\underline{\mathbf{L}} * \underline{\mathbf{K}}) \tag{3.41}$$

$$\underline{\mathbf{L}} * (\underline{\mathbf{J}} \bullet \underline{\mathbf{K}}) \neq (\underline{\mathbf{L}} * \underline{\mathbf{J}}) \bullet (\underline{\mathbf{L}} * \underline{\mathbf{K}}) \tag{3.42}$$

Cette règle possède néanmoins une exception dans le cas où $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{L}}_1$ est un système linéaire :

$$\underline{\mathbf{L}}_1 * (\underline{\mathbf{J}} \bullet \underline{\mathbf{K}}) = (\underline{\mathbf{L}}_1 * \underline{\mathbf{J}}) \bullet (\underline{\mathbf{L}}_1 * \underline{\mathbf{K}}). \tag{3.43}$$

Règle 10 : On introduit l'opération $\circ$, définie à partir de l'addition et de la mise en cascade, de la façon suivante :

$$\underline{\mathbf{A}}_s * (\underline{\mathbf{B}}_n + \underline{\mathbf{C}}_m + \cdots + \underline{\mathbf{P}}_p) = \underline{\mathbf{A}}_s \circ (\underline{\mathbf{B}}_n + \underline{\mathbf{C}}_m + \cdots + \underline{\mathbf{P}}_p)^s, \tag{3.44}$$

où $\underline{\mathbf{H}}^s = \underbrace{\underline{\mathbf{H}} \bullet \underline{\mathbf{H}} \cdots \underline{\mathbf{H}}}_{s\,fois}$. Une telle opération est distributive par rapport à la loi +. Un système non linéaire peut être décomposé en plusieurs sous-systèmes définis par une simple opération.

Concernant l'ordre du système résultant de l'addition, de la multiplication ou de la mise en cascade de deux systèmes, il est défini de la façon suivante :

- le système $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{A}}_n + \underline{\mathbf{B}}_m$ est d'ordre $\max(n, m)$;
- le système $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{A}}_n \bullet \underline{\mathbf{B}}_m$ est d'ordre $m + n$;

- le système $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{A}}_n * \underline{\mathbf{B}}_m$ est d'ordre nm ;
- le système $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{A}}_s * (\underline{\mathbf{B}}_n + \underline{\mathbf{C}}_m + ... + \underline{\mathbf{P}}_r)$ est d'ordre $n + m + ...r$.

Grâce à l'algèbre de George, il est possible de déduire la réponse impulsionnelle ou la transformée de Fourier d'un système résultant de l'association de plusieurs systèmes non linéaires. On démontre en effet que :

- pour un terme de la forme $\underline{\mathbf{L}}_n = \underline{\mathbf{K}}_n + \underline{\mathbf{J}}_n$, la réponse impulsionnelle et la transformée de Fourier correspondante sont données par les relations

$$l_n(t_1, \cdots, t_n) = k_n(t_1, \cdots, t_n) + j_n(t_1, \cdots, t_n) \tag{3.45}$$

et

$$L_n(s_1, \cdots, s_n) = K_n(s_1, \cdots, s_n) + J_n(s_1, \cdots, s_n) \tag{3.46}$$

- pour un terme de la forme $\underline{\mathbf{L}}_{n+m} = \underline{\mathbf{K}}_n \bullet \underline{\mathbf{J}}_m$, la réponse impulsionnelle et la transformée de Fourier correspondante sont données par

$$l_n(t_1, \cdots, t_{n+m}) = k_n(t_1, \cdots, t_n) j_m(t_{n+1}, \cdots, t_{n+m}) \tag{3.47}$$

et

$$L_n(s_1, \cdots, s_{n+m}) = K_n(s_1, \cdots, s_n) J_m(s_{n+1}, \cdots, s_{n+m}) \tag{3.48}$$

- pour un terme de la forme $\underline{\mathbf{L}}_{n+m+\cdots+r} = \underline{\mathbf{A}}_s \circ (\underline{\mathbf{B}}_n + \underline{\mathbf{C}}_m + \cdots + \underline{\mathbf{P}}_p)^s$, la réponse impulsionnelle et la transformée de Fourier correspondante sont données par

$$\begin{aligned} l_{n+m+\cdots+r}(t_1, \cdots, t_{n+m+\cdots+r}) = \int_0^{t_s} \cdots \int_0^{t_1} a_s(\tau_1, \cdots, \tau_s) b_n(t_1 - \tau_1, \cdots, t_n - \tau_1) \\ c_m(t_{n+1} - \tau_2, \cdots, t_{n+m} - \tau_2) \cdots p_r(t_{n+m+\cdots+1} - \tau_s, \cdots, t_{n+m+\cdots+r} - \tau_s) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_s \end{aligned} \tag{3.49}$$

et

$$\begin{aligned} L_{n+m+\cdots+r}(s_1, \cdots, s_{n+m+\cdots+r}) = \\ A_s(s_1 + \cdots + s_n, s_{n+1} + \cdots + s_{n+m}, \cdots, s_{n+m+\cdots+1} + \cdots + s_{n+m+\cdots+r}) \cdots B_n(s_1, \cdots, s_n) \\ C_m(s_{n+1}, \cdots, s_{n+m}) \cdots P_r(s_{n+m+\cdots+1}, \cdots, s_{n+m+\cdots+r}) \end{aligned} \tag{3.50}$$

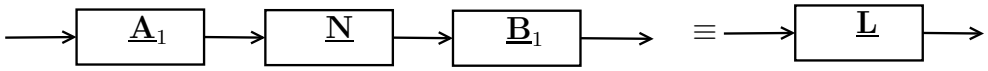


FIGURE 3.3 – Système en cascade

L'algèbre de George est un outil intéressant qui nécessite toutefois de disposer d'une représentation par séries de Volterra de chaque sous-système composant le système non linéaire initial.

Un exemple tiré de (George, 1959) illustre la manière dont cette algèbre permet de décrire un système en termes de ses sous-systèmes. Considérons le système $L = \underline{A_1} * \underline{N} * \underline{B_1}$ composé des deux systèmes linéaires $\underline{\mathbf{A}}_1$ et $\underline{\mathbf{B}}_1$ et de la non linéarité N en cascade (figure 3.3). La non linéarité traitée est de forme polynomiale composée d'une partie linéaire et d'une non linéarité cubique, $\underline{N} = \underline{N_1} + \underline{N_3}$, telle que $y(t) = \underline{\mathbf{N}}[u(t)] = n_1 u(t) + n_3 u(t)^3$. Le système L peut être vu comme un amplificateur avec une distortion non linéaire. La décomposition de $\underline{\mathbf{N}}$ permet d'écrire :

$$\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{A}}_1 * (\underline{\mathbf{N}}_1 + \underline{\mathbf{N}}_3) * \underline{\mathbf{B}}_1 \tag{3.51}$$

qui devient, d'après la règle 6 :

$$\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{A}}_1 * (\underline{\mathbf{N}}_1 * \underline{\mathbf{B}}_1 + \underline{\mathbf{N}}_3 * \underline{\mathbf{B}}_1). \tag{3.52}$$

A_1 étant un système linéaire, la règle 9 ne s'applique pas d'où :

$$\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{A}}_1 * \underline{\mathbf{N}}_1 * \underline{\mathbf{B}}_1 + \underline{\mathbf{A}}_1 * \underline{\mathbf{N}}_3 * \underline{\mathbf{B}}_1, \tag{3.53}$$

soit en remplaçant $\underline{\mathbf{N}}_1$ et $\underline{\mathbf{N}}_3$:

$$\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{A}}_1 * n_1 \underline{\mathbf{B}}_1 + \underline{\mathbf{A}}_1 * n_3 \underline{\mathbf{B}}_1^3. \tag{3.54}$$

On voit alors que le système $\underline{\mathbf{L}}$ s'écrit comme la somme de deux sous-systèmes $\underline{\mathbf{L}} = \underline{\mathbf{L}}_1 + \underline{\mathbf{L}}_3$ avec $\underline{\mathbf{L}}_1 = n_3 \underline{\mathbf{A}}_1$ et $\underline{\mathbf{L}}_3 = n_3 \underline{\mathbf{A}}_1 * \underline{\mathbf{B}}_1^3$. Cette outil sera également utilisé au paragraphe 3.3 afin de déterminer l'expression des noyaux de Volterra dans la cas de la diffusion thermique.

3.3 Séries de Volterra en modélisation de systèmes non linéaires à dérivées non entières : application en thermique

L'objectif de cette thèse est de poursuivre les travaux entamés en identification de systèmes par modèles non entiers (Cois, 2002; Le Lay, 1998) en se focalisant principalement sur les systèmes non entiers non linéaires et plus particulièrement sur la modélisation du transfert température/flux à de grandes variations de température. En milieu semi-infini, le transfert thermique monodimensionnel est régi par l'équation aux dérivées partielles non linéaire :

$$\rho C_p\left(T\right)\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\left(T\right)\frac{\partial T\left(x,t\right)}{\partial x}\right),\ 0<x<\infty,\ t>0, \tag{3.55}$$

la non-linéarité étant introduite par la dépendance des paramètres thermiques $C_p(T)$ et $\lambda(T)$ à la température d'où la notation utilisée. A de faibles variations de température C_p et λ sont constants et (3.55) se confond avec (1.51) ; mais, à de grandes variations de température, les caractéristiques thermiques peuvent varier fortement (voir figure 2.8) amplifiant l'effet non linéaire. La classe de modèles choisie est issue des séries de Volterra ayant des noyaux à dérivées non entières afin de prendre en compte à la fois le caractère non entier et non linéaire de la diffusion thermique. L'algèbre de George appliquée au transfert thermique monodimensionnel permet de synthétiser les noyaux de Volterra faisant intervenir des opérateurs non entiers d'ordre 0.5. Cette expression analytique est ensuite manipulée dans le but d'obtenir un noyau simplifié intrinsèque permettant de modéliser la contribution non linéaire du système thermique.

3.3.1 De l'équation de la chaleur aux noyaux de Volterra

Soit le milieu semi-infini plan de la figure 3.4 soumis à sa surface à un flux uniforme $\varphi\left(t\right)$. Le calcul des noyaux de Volterra se fait sous l'hypothèse que la capacité et la conductivité thermiques varient linéairement avec la température $T\left(t\right)$, hypothèse conforme aux mesures tracées sur la figure 2.8 pour une variation en dessous du point de Curie :

$$\rho\, C_p\left(T\right)=C_0+C_1\,T \tag{3.56}$$

$$\lambda\left(T\right)=\lambda_0+\lambda_1\,T, \tag{3.57}$$

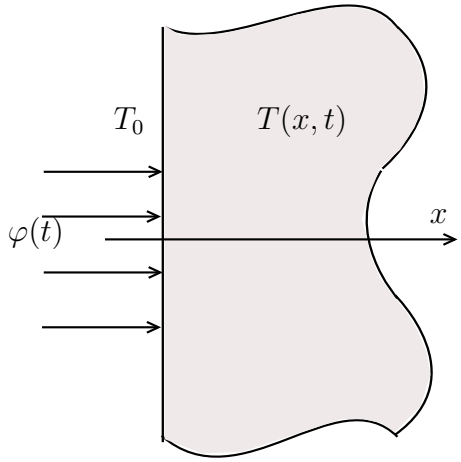


FIGURE 3.4 – Modélisation du transfert température ($T(x,t)$)/flux (φ) dans un milieu semi-infini plan

où C_0, C_1, λ_0 et λ_1 sont constants. Le transfert de chaleur dans un milieu semi-infini uni-dimensionnel est décrit par l'équation aux dérivées partielles (3.55) où $T(t)$ s'exprime sous la forme d'une série de Volterra

$$T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) = T_1(t) + T_2(t) + \cdots + T_k(t) + \cdots \tag{3.58}$$

avec

$$T_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(\tau_1, \cdots, \tau_k) \prod_{i=1}^{k} \varphi(t - \tau_i)\, \mathrm{d}\tau_i. \tag{3.59}$$

L'équation de la chaleur (3.55) est associée aux conditions aux limites :

$$-\lambda(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \varphi(t),\ x = 0,\ t > 0, \tag{3.60}$$

$$T(x,t) = 0,\ x \to \infty,\ t > 0 \tag{3.61}$$

et à la condition initiale :

$$T(x,t) = 0,\ 0 \leq x < \infty,\ t = 0. \tag{3.62}$$

L'application de la transformée de Laplace $\mathscr{L}^{(1)}$[1] sur t aux équations précédentes (3.55-3.62) en utilisant les expressions de $\lambda(T)$ et $\rho C_p(T)$ dans (3.56-3.57) conduit à :

$$s\,C_0\,\overline{T}(x,s) + C_1\left(\overline{T}(x,s) \star s\,\overline{T}(x,s)\right) = \lambda_0\frac{\partial^2\overline{T}(x,s)}{\partial x^2} + \lambda_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\theta(x,s) \star \frac{\partial\theta(x,s)}{\partial x}\right), \quad 0 < x < \infty \tag{3.63}$$

[1] l'exposant $^{(1)}$ désigne la transformée de Laplace usuelle par rapport à une variable.

$$-\lambda_0 \frac{\partial \overline{T}(x,s)}{\partial x} - \lambda_1 \left(\overline{T}(x,s) \star \frac{\partial \overline{T}(x,s)}{\partial x} \right) = \overline{\phi}(s),\ x = 0 \tag{3.64}$$

$$\overline{T}(x,s) = 0,\ x \to \infty \tag{3.65}$$

où $\overline{\phi}(s)$ désigne la transformée de Laplace de $\varphi(t)$, et $\overline{T}(x,s)$ la transformée de Laplace de $T(x,t)$ qui s'écrit

$$\overline{T}(s_1, \cdots) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{T}_k(s_1, \cdots, s_k) \tag{3.66}$$

avec

$$\overline{T}_k(s_1, \cdots, s_k) = H_k(s_1, \cdots, s_k)\ \overline{\phi}(s_1) \cdots \overline{\phi}(s_k). \tag{3.67}$$

Pour plus de commodité, les notations simplifiées, $s_{1:n} = s_1, \cdots, s_n$ et $\widehat{s}_{1:n} = s_1 + \cdots + s_n$ sont utilisées. Les équations (3.63-3.65) sont satisfaites pour toutes valeurs $\overline{T}_k(x, s_{1:k})$ de $\overline{T}(x,s)$. Alors, en remplaçant $\overline{T}_k(x, s_{1:k})$ par son expression (3.67) dans les relations (3.63-3.65), on obtient un système d'équations différentielles ordinaires pour chaque fonction de transfert généralisée $H_n(x, s_{1:n})$:

$$\widehat{s}_{1:n} C_0 H_n(x, s_{1:n}) + C_1 \sum_{j=1}^{n-1} \widehat{s}_{1:j} H_j(x, s_{1:j})\ H_{n-j}(x, s_{j+1:n}) = \lambda_0 \frac{\partial^2 H_n(x, s_{1:n})}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^{n-1} H_j(x, s_{1:j})\ \frac{\partial H_{n-j}(x, s_{j+1:n})}{\partial x} \right),\ 0 < x < \infty \tag{3.68}$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial H_n(x, s_{1:n})}{\partial x} - \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^{n-1} H_j(x, s_{1:j})\ \frac{\partial H_{n-j}(x, s_{j+1:n})}{\partial x} \right) = \overline{\phi}(s_1)\ \delta_{1,n},\ x = 0 \tag{3.69}$$

$$H_n(x, s_{1:n}) = 0,\ x \to \infty, \tag{3.70}$$

où

$$\delta_{1,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.71}$$

désigne l'opérateur de Kronecker. On note que le produit de convolution des équations (3.63) et (3.64) a été remplacé par un produit simple dans (3.68) et (3.69) grâce à la propriété de l'équation (3.48) déduite de l'algèbre de George.

3.3.2 Solution analytique explicite pour $H_1(s_1)$ et $H_2(s_{1:2})$

Poser $n = 1$ dans les relations (3.68-3.70) conduit à :

$$s_1 C_0 H_1(x, s_1) = \lambda_0 \frac{\partial^2 H_1(x, s_1)}{\partial x^2},\ 0 < x < \infty \tag{3.72}$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial H_1(x,s_1)}{\partial x} = \overline{\phi}(s_1),\ x=0 \tag{3.73}$$

$$H_1(x,s_1) = 0,\ x \to \infty. \tag{3.74}$$

On retrouve alors la solution linéaire connue de l'équation de la diffusion de la chaleur dans un milieu semi-infini ayant une conductivité thermique λ_0 et de capacité thermique C_0 :

$$H_1(x,s_1) = \frac{e^{-\sqrt{\frac{s_1}{a_0}}x}}{e_0\sqrt{s_1}}, \tag{3.75}$$

où $a_0 = \lambda_0/C_0$ est la diffusivité thermique et $e_0 = \sqrt{\lambda_0 C_0}$ l'effusivité thermique. La transformée de Laplace inverse $\mathscr{L}^{(1)^{-1}}$ de (3.75) fournit l'expression de la réponse impulsionnelle de la partie linéaire, qui correspond également à celle du premier noyau de Volterra :

$$h_1(x,t) = \frac{e^{-x^2/(4\,a_0\,t)}}{\sqrt{\pi\, e_0\, t}}. \tag{3.76}$$

Poser $n=2$ dans (3.68-3.70) revient à résoudre l'ensemble d'équations différentielles ordinaires suivantes :

$$(s_1+s_2)\ C_0\, H_2(x,s_{1:2}) + C_1\ (s_1+s_2)\ H_1(x,s_1)\ H_1(x,s_2) =$$
$$\lambda_0 \frac{\partial^2 H_2(x,s_{1:2})}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(H_1(x,s_1)\ \frac{\partial H_1(x,s_2)}{\partial x}\right),\ 0<x<\infty \tag{3.77}$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial H_2(x,s_{1:2})}{\partial x} - \lambda_1\left(H_1(x,s_1)\ \frac{\partial H_1(x,s_2)}{\partial x}\right) = 0,\ x=0 \tag{3.78}$$

$$H_2(x,s_{1:2}) = 0,\ x \to \infty \tag{3.79}$$

La substitution de l'expression (3.75) de $H_1(x,s_1)$ dans (3.77) et (3.78) permet d'obtenir l'équation suivante :

$$(s_1+s_2)\ C_0\, H_2(x,s_{1:2}) + C_1\ (s_1+s_2)\ \frac{e^{-\sqrt{\frac{s_1}{a_0}}x}}{e_0\sqrt{s_1}}\frac{e^{-\sqrt{\frac{s_2}{a_0}}x}}{e_0\sqrt{s_2}} =$$
$$\lambda_0 \frac{\partial^2 H_2(x,s_{1:2})}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{e^{-\sqrt{(\frac{s_1}{a_0})}x}}{e_0\sqrt{s_1}}\sqrt{\frac{s_2}{a_0}}\frac{e^{-\sqrt{(\frac{s_2}{a_0})}x}}{e_0\sqrt{s_2}}\right),\ 0<x<\infty \tag{3.80}$$

qui se simplifie :

$$\lambda_0 \frac{\partial^2 H_2(x,s_{1:2})}{\partial x^2} - (s_1+s_2)\ C_0\, H_2(x,s_{1:2}) =$$
$$\left(\frac{C_1\ (s_1+s_2)}{e_0^2\sqrt{s_1 s_2}} + \frac{\lambda_1(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}{e_0^2 a_0\sqrt{s_1}}\right) e^{-\frac{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}{\sqrt{a_0}}x},\ 0<x<\infty. \tag{3.81}$$

La résolution de l'équation différentielle ordinaire non homogène d'ordre 2 :

$$\lambda_0 \frac{d^2 H_2\left(x, s_{1:2}\right)}{dx^2} - \left(s_1 + s_2\right) C_0 H_2\left(x, s_{1:2}\right) = \left(\frac{C_1\ \left(s_1 + s_2\right)}{e_0^2 \sqrt{s_1 s_2}} + \frac{\lambda_1 (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})}{e_0^2 a_0 \sqrt{s_1}}\right) e^{-\frac{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}}{\sqrt{a_0}} x},\ 0 < x < \infty, \quad (3.82)$$

permet d'aboutir, à l'aide des conditions aux limites, à la solution pour $H_2\left(x, s_{1:2}\right)$:

$$H_2\left(x, s_{1:2}\right) = D_2\, e^{-\beta_2 x} + \frac{A_2}{B_2^2 - \beta_2^2} e^{-B_2 x}, \quad (3.83)$$

avec :

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{s_1 + s_2}{a_0}},\ B_2 = \frac{\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}}{\sqrt{a_0}},\ A_2 = -\frac{\lambda_1 \left(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}\right)}{\lambda_0\, e_0^2\, a_0\, \sqrt{s_1}} - \frac{C_1\ \left(s_1 + s_2\right)}{\lambda_0\, e_0^2\, \sqrt{s_1\, s_2}} \quad (3.84)$$

et :

$$D_2 = -\frac{1}{\beta_2}\left(\frac{A_2\, B_2}{B_2^2 - \beta_2^2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_0\, e_0^2\, \sqrt{a_0}\, \sqrt{s_1}}\right). \quad (3.85)$$

Notons la présence de $\sqrt{s_1}$, $\sqrt{s_2}$ et $\sqrt{s_1 + s_2}$ dans les expressions (3.83-3.85) qui se traduit dans le domaine temporel par des dérivées non entières d'ordre 0.5.

3.3.3 Solution générale pour $H_n\left(0, s_{1:n}\right)$

L'approche précédente peut être généralisée quel que soit l'ordre n, la relation (3.68) étant équivalente à :

$$\frac{\mathrm{d}^2 H_n\left(x, s_{1:n}\right)}{\mathrm{d}x^2} - \beta^2\, H_n\left(x, s_{1:n}\right) = \frac{\mathrm{d} f_{n-1}\left(x\right)}{\mathrm{d}x} + g_{n-1}\left(x\right),\ 0 < x < \infty \quad (3.86)$$

avec $\beta = \sqrt{\widehat{s}_{1:n}/a_0}$,

$$f_{n-1}\left(x\right) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\left(\sum_{j=1}^{n-1} H_j\left(x, s_{1:j}\right)\ \frac{\mathrm{d} H_{n-j}\left(x, s_{j+1:n}\right)}{\mathrm{d}x}\right), \quad (3.87)$$

$$g_{n-1}\left(x\right) = -\frac{C_1}{\lambda_0} \sum_{j=1}^{n-1} \widehat{s}_{1:j}\, H_j\left(x, s_{1:j}\right)\ H_{n-j}\left(x, s_{j+1:n}\right) \quad (3.88)$$

et la condition aux limites (3.69) qui s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d} H_n\left(x, s_{1:n}\right)}{\mathrm{d}x} = f_{n-1}\left(x\right) - \frac{\psi\left(s_1\right)}{\lambda_0} \delta_{1,n},\ x = 0. \quad (3.89)$$

La seconde condition aux limites (3.70) reste inchangée :

$$H_n\left(x, s_{1:n}\right) = 0,\ x \to \infty \tag{3.90}$$

Il apparaît de (3.86) que le noyau $H_n\left(s_{1:n}\right)$ est la solution de l'équation différentielle ordinaire non homogène, avec un terme non homogène s'exprimant à partir des précédents noyaux $H_1\left(x, s_1\right), \cdots, H_{n-1}\left(x, s_{1:n-1}\right)$ impliqués dans les fonctions $f_{n-1}\left(x\right)$ et $g_{n-1}\left(x\right)$. Après calculs, la solution en $x = 0$ s'écrit :

$$H_n\left(0, s_{1:n}\right) = -\frac{1}{\beta}\left(f_{n-1}\left(0\right) + \int_0^\infty e^{-\beta\, z}\left(\frac{\mathrm{d}f_{n-1}\left(z\right)}{\mathrm{d}z} + g_{n-1}\left(z\right)\right)\mathrm{d}z\right). \tag{3.91}$$

La solution est obtenue analytiquement pour $n = 2$ en (3.83) et peut être également exprimée analytiquement pour $n = 3$. En revanche, pour des ordres plus élevés, il est recommandé de résoudre (3.91) à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique ou par intégration numérique.

3.3.4 Simulation et analyse

Soit un matériau dont les constantes de (3.57) sont fixées à $C_0 = 10^6\,\mathrm{J/m^3K}$ et $C_1 = 0$ pour la capacité thermique, $\lambda_0 = 300\,\mathrm{W/m\,K}$ et $\lambda_1 = -0.08\,\mathrm{W/m\,K^2}$ pour la conductivité thermique. On considère la température sur la surface excitée ($x = 0$) puisqu'elle est le plus influencée par la non-linéarité. La relation (3.91) est utilisée pour calculer les noyaux de Volterra d'ordre 1, 2 et 3. Les expressions analytiques pour $n = 1$ et 2 ont déjà été présentées aux équations (3.75) et (3.83). Les données sont générées par éléments finis, en deux dimensions, sur un échantillon rectangulaire, dont les grandes dimensions par rapport aux temps de simulation permettent de considérer un milieu semi-infini, avec un flux constant de $\varphi\left(t\right) = \varphi_0 = 3 \times 10^6\,\mathrm{W/m^2}$ appliqué pendant 5 secondes. La température T calculée ainsi que la contribution de chaque noyau sont représentées sur la figure 3.5a, T_1 étant la sortie du noyau d'ordre 1 et donc la contribution linéaire du modèle (C_0 et λ_0 seulement), T_2 et T_3 étant les sorties des noyaux d'ordre 2 et 3 respectivement et donc la contribution non linéaire du modèle. La température est également simulée par éléments finis dans une configuration linéaire et non linéaire. La transformée de Laplace inverse $\mathscr{L}^{(k)^{-1}}$ est calculée par l'algorithme numérique de Gaver-Stehfest décrit dans Maillet *et al.* (2000). La figure 3.6 montre que la conductivité thermique varie de 300 W/m K à 265 W/m K. Comme la contribution non linéaire reste faible, la contribution linéaire de H_1

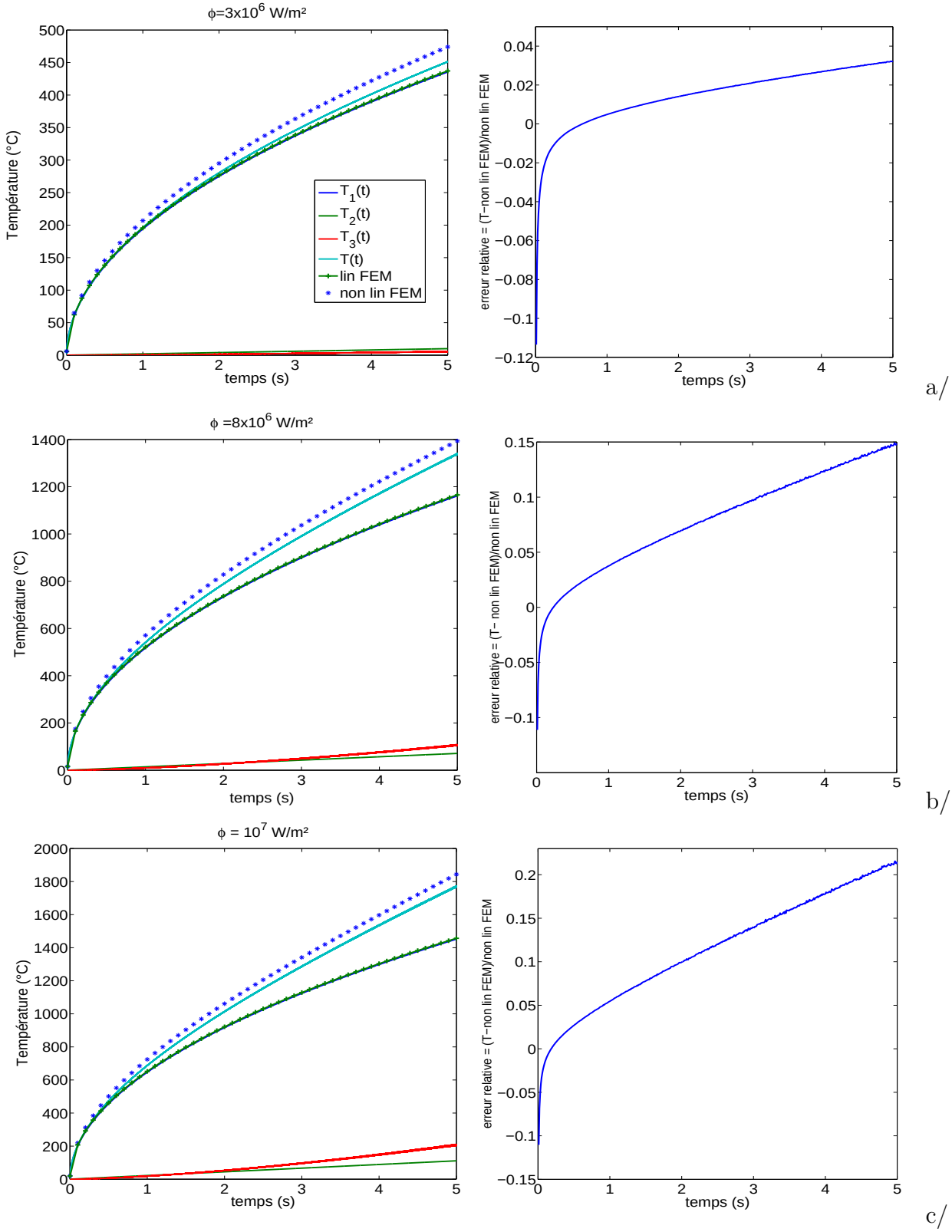


FIGURE 3.5 – Température simulée en $x = 0$ grâce aux calculs des noyaux de Volterra H_1, H_2 et H_3, la somme des contributions linéaire et non linéaires $T(t) = T_1(t) + T_2(t) + T_3(t)$ étant comparée à la sortie du modèle par éléments finis pour $\varphi(t) = \varphi_0 = 3 \times 10^6\,\mathrm{W/m^2}$.

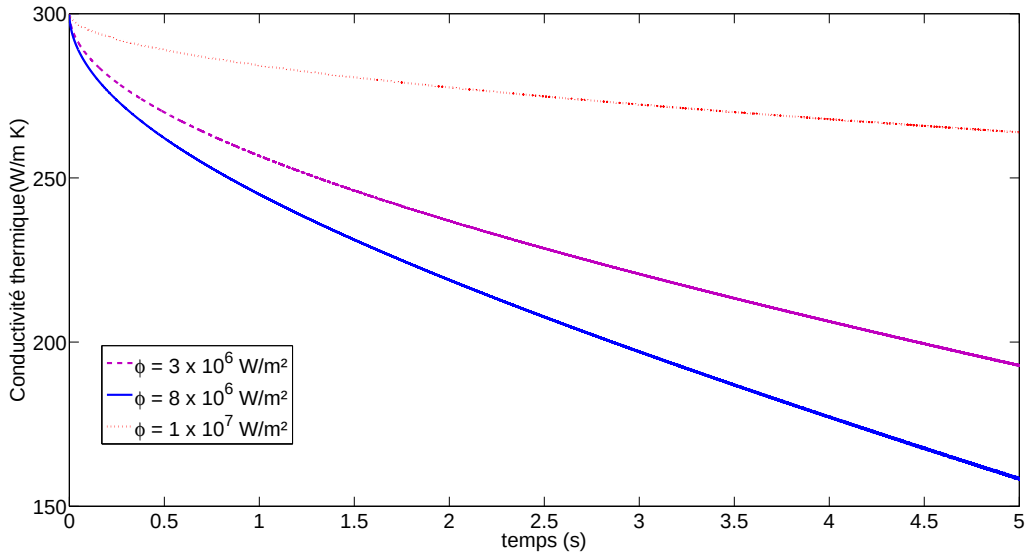


FIGURE 3.6 – Variation de la conductivité thermique pour les 3 valeurs de flux

domine largement. La contribution des noyaux d'ordre supérieur diminue lorsque l'ordre augmente.

Soit une densité de flux plus grande fixée à $\varphi(t) = \varphi_0 = 8 \times 10^6\,\mathrm{W/m^2}$ et à $\varphi(t) = \varphi_0 = 1 \times 10^7\,\mathrm{W/m^2}$. Les contributions de trois premiers noyaux à la température ainsi calculée en $x = 0$ sont reportées sur la figure 3.5b et c et comparées à la température simulée par éléments finis dans une configuration linéaire et non linéaire. La conductivité thermique reportée sur la figure 3.6 varie plus significativement, amplifiant l'effet non linéaire comparativement à la simulation précédente puisqu'il impacte pour presque 25% de la température calculée en fin de simulation pour le flux le plus important. On peut noter que le modèle par séries de Volterra permet de discriminer la contribution de la partie linéaire de celle de la partie non linéaire.

3.3.5 Noyaux simplifiés intrinsèques

L'objectif est de trouver un noyau d'ordre 2 plus simple capable de simuler correctement la contribution non linéaire du système. Soit un noyau quadratique noté $\widetilde{h_2}(x,t)$ capable de reproduire à lui seul la partie non linéaire du système tout en étant intrinsèque au modèle physique. En d'autres termes, changer la puissance du flux ne doit pas influer sur l'expression du noyau. Une réécriture de l'expression (3.83) de $H_2(x = 0, s_{1:2})$ avec

$C_1 = 0$, permet d'obtenir :

$$H_2\left(x=0, s_{1:2}\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0\, e_0^2}\left(\frac{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}}{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_1+s_2}} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{s_1}\,\sqrt{s_1+s_2}}. \tag{3.92}$$

A partir de la forme de l'expression (3.92), on décide de chercher expérimentalement le noyau $\widetilde{H_2}\left(0, s_{1:n}\right)$ d'ordre 2 modifié sous la forme :

$$\widetilde{H_2}\left(x=0, s_{1:2}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{s_1}\,\sqrt{s_1+s_2}}, \tag{3.93}$$

où α est un paramètre à estimer pour que la température simulée par éléments finis pour les 3 valeurs de flux puisse s'écrire :

$$T\left(x=0,t\right) = T_1\left(x=0,t\right) + \widetilde{T_2}\left(x=0,t\right) \tag{3.94}$$

où :

$$T_1\left(x=0,t\right) = \mathscr{L}^{(1)^{-1}}\left[H_1\left(x=0,s_1\right)\,\overline{\phi}\left(s_1\right)\right],$$

avec $H_1\left(x=0,s_1\right)$ donné par l'équation (3.75) et

$$\widetilde{T_2}\left(x=0,t\right) = \mathscr{L}^{(2)^{-1}}\left[\theta_2\left(s_1,s_2\right)\right] = \mathscr{L}^{(2)^{-1}}\left[\widetilde{H_2}\left(x=0,s_{1:2}\right)\,\overline{\phi}\left(s_1\right)\,\overline{\phi}\left(s_2\right)\right]. \tag{3.95}$$

La figure 3.7 montre que $\alpha = 1.7$ permet d'obtenir le résultat escompté quelle que soit la valeur du flux.

Bien que ce résultat ne soit valable que pour la configuration étudiée, il montre que le formalisme de Volterra permet de trouver une expression simplifiée pour une fonction de transfert intrinsèque de $\widetilde{H_2}\left(x=0,s_{1:2}\right)$ qui permet de modéliser le comportement non linéaire du système.

Finalement, basée sur cette fonction de transfert simplifiée, une solution analytique pour $\widetilde{T_2}\left(x=0,t\right)$ est obtenue :

$$\mathscr{L}_{s_1}^{(1)^{-1}}\left(\frac{a_2}{\sqrt{s_1}\,\sqrt{s_1+s_2}}\right) = \alpha\, e^{-\frac{s_2\,t_1}{2}}\, I_0\left(\frac{s_2\,t_1}{2}\right)\, U(t_1) \tag{3.96}$$

et :

$$\mathscr{L}_{s_2}^{(1)^{-1}}\left(a_2 e^{-\frac{s_2\,t_1}{2}}\, I_0\left(\frac{s_2\,t_1}{2}\right)\right) = \alpha\,\frac{U\left(t_2-\frac{t_1}{2}\right)}{\pi\sqrt{t_2\left(t_2-\frac{t_1}{2}\right)}} \tag{3.97}$$

Dans cette expression, $U\left(.\right)$ est la fonction de Heaviside et I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre 0.

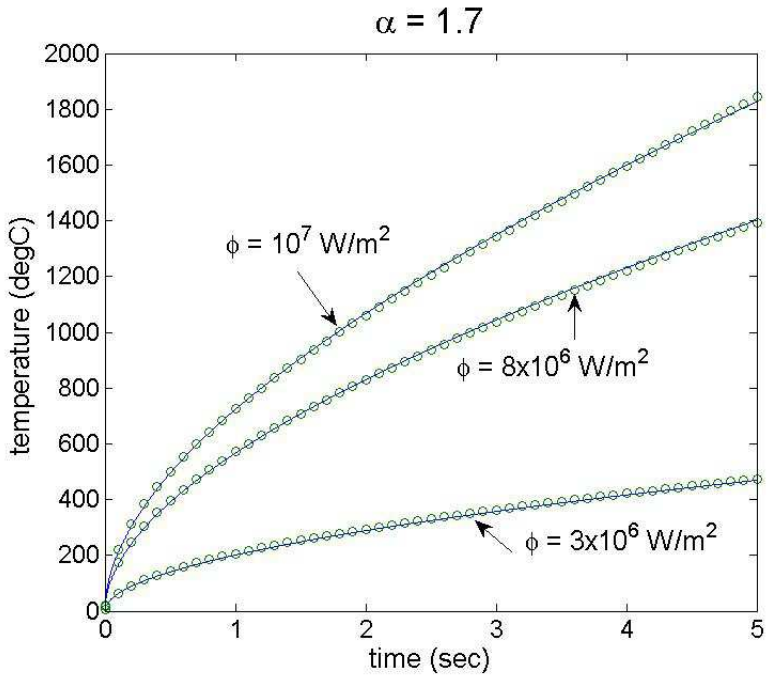


FIGURE 3.7 – Température $T(x=0,t)$ calculée par éléments finis (cercle) et par la relation (3.95) avec $\alpha = 1.7$ pour les 3 valeurs de flux

3.4 Conclusion

Ce chapitre présente les modèles non linéaires non entiers basés sur les séries de Volterra en présence de connaissances physiques du système. D'abord la définition d'un modèle par série de Volterra est présentée comme la généralisation du produit de convolution connu dans le cas des modèles linéaires. Ensuite, un état de l'art est exposé pour les modèles non linéaires à dérivées entières, où les noyaux sont déterminés de manière analytique à partir de différentes formes particulières que peuvent prendre les séries de Volterra. Dans le cas de systèmes non linéaires à dérivées non entières, une forme analytique des noyaux a été développée à partir de l'équation de la diffusion thermique en milieu semi-infini plan pour une variation linéaire de la conductivité et de la capacité thermiques.

Ce travail a donné lieu à la publication de l'article (Battaglia *et al.*, 2013) dans la revue Journal of Thermal science.

Deux perspectives intéressantes s'inscrivent dans la continuité directe de ce chapitre. La première consiste à étudier la forme des noyaux pour des géométries cylindrique et sphérique, en milieux semi-infini et fini, comme cela a été fait pour le cas linéaire dans

(Battaglia, 2008; Cois, 2002; Oldham and Spanier, 1972). La seconde perspective concerne la forme des non-linéarités. Les noyaux de Volterra pourraient être déterminés pour une capacité et une conductivité thermiques dont la dépendance par rapport à la température ne serait pas linéaire mais polynômiale.

Pour des cas plus généraux, l'expression analytique des noyaux peut être difficilement accessible. Par conséquent, une seconde méthode basée sur des fonctions génératrices de bases orthogonales est développée. Le dernier chapitre vise à présenter cette méthode et à l'appliquer dans le cas de la diffusion thermique dans un échantillon de fer ARMCO.

Chapitre 4

Modèle non linéaire basé sur les séries de Volterra : choix des noyaux en absence de connaissances physiques du système

4.1 Introduction 87
4.2 Séries de Volterra en identification de systèmes non linéaires à dérivées entières : état de l'art 87
4.2.1 Introduction 87
4.2.2 Choix de la structure des noyaux 88
4.2.2.1 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de Hammerstein 88
4.2.2.2 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de Wiener . . 89
4.2.2.3 Noyaux de Volterra basés sur le modèle d'Uryson . . 89
4.2.2.4 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de projection-poursuite 91
4.2.2.5 Noyaux de Volterra basés sur les bases orthogonales . 91
4.3 Séries de Volterra en identification de systèmes non linéaires à dérivées non entières 93
4.3.1 Fonctions génératrices de bases orthogonales non entières . . . 93
4.3.2 Noyaux basés sur les fonctions génératrices de bases orthogonales non entières 94
4.3.3 Estimation paramétrique 95
4.3.3.1 Estimation des coefficients linéaires du modèle 98
4.3.3.2 Estimation des paramètres non linéaires du modèle . 99
4.3.3.3 Algorithme de programmation non linéaire pour l'estimation paramètrique du modèle 101
4.4 Identification de la diffusion thermique à partir des données de simulation 102
4.4.1 Protocole expérimental 102

4.4.2 Estimation paramétrique 103
4.5 Identification de la diffusion thermique à partir des données expérimentales 107
4.5.1 Protocole expérimental 107
4.5.2 Estimation paramétrique 108
4.6 Comparaison des modèles obtenus avec les données expérimentales 113
4.7 Conclusion 117

4.1 Introduction

Dans la mesure où le comportement d'un système modélisé par des séries de Volterra dépend des noyaux de Volterra, une partie de la procédure d'identification consiste à choisir ces noyaux, puis à estimer leurs paramètres. Le chapitre précédent présentait les différentes méthodes pour le choix des noyaux de Volterra dans le cas où les connaissances *a priori* permettent de déterminer les noyaux analytiquement. Cependant, lorsque de telles connaissances ne sont pas disponibles, il est possible d'imposer la structure des noyaux, puis d'estimer les paramètres à partir de données expérimentales. Ce chapitre vise à présenter les méthodes de choix des noyaux de Volterra en absence de connaissances physiques du système.

La contribution principale de ce chapitre consiste à développer une démarche utilisant les séries de Volterra pour une identification de type boîte noire de systèmes non linéaires non entiers. Les noyaux de Volterra sont représentés par une combinaison de fonctions génératrices de bases orthogonales non entières. Une nouvelle classe de modèles non linéaires à base de séries de Volterra non entières est ainsi développée.

D'abord dans la section 4.2, un état de l'art sur les series de Volterra pour la modélisation de systèmes à dérivées entières est présenté. Ensuite, la modélisation par séries de Volterra non entières est abordée dans la section 4.3. Cette méthode est ensuite appliquée à la modélisation du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO à partir de données générées par éléments finis puis de données relevées expérimentalement.

4.2 Séries de Volterra en identification de systèmes non linéaires à dérivées entières : état de l'art

4.2.1 Introduction

Dans la plupart des cas, il est difficile d'obtenir une expression analytique des noyaux de Volterra notamment lorsque la structure des noyaux est inconnue ou lorsqu'elle est trop complexe. Dans ces cas, la structure des noyaux est fixée et ses paramètres estimés à partir de la réponse du système à des entrées choisies. Il est alors nécessaire de trouver un modèle

valide pour les noyaux de Volterra sur la plage de fonctionnement considérée du système non linéaire. Les principales structures de noyaux sont décrites dans ce paragraphe.

4.2.2 Choix de la structure des noyaux

4.2.2.1 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de Hammerstein

Le modèle de Hammerstein est un des plus simples et des plus connus de la famille plus générale des modèles non linéaires dynamiques orientés par blocs (Billings and Fakhoury, 1979). La structure du modèle de Hammerstein consiste en une non-linéarité statique $g(.)$ reliée en cascade avec un modèle linéaire dynamique défini par une fonction de transfert notée $F(s)$. Dans le cas particulier où le modèle linéaire est à réponse impulsionnelle finie et si la fonction $g(.)$ est un polynôme de degré n, on parle de modèle de Hammerstein fini. D'après la figure 4.1, la sortie intermédiaire peut s'écrire sous la forme

$$\psi(t) = g(u(t)) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u^i(t). \tag{4.1}$$

De même, la sortie générale $y(t)$ du modèle de Hammerstein s'écrit sous la forme

$$y(t) = \int_0^\infty f(\tau)\psi(t-\tau)d\tau, \tag{4.2}$$

où $\alpha(t)$ est la réponse impulsionnelle de la fonction de transfert $F(s)$. Si l'on combine ces deux expressions, on obtient finalement l'expression de $y(t)$ suivante

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \gamma_i f(\tau) u^i(t-\tau)d\tau. \tag{4.3}$$

De plus, en posant

$$h_i(\tau_1, \cdots, \tau_i) = \begin{cases} \gamma_i f(\tau) & \text{si} \quad \tau_1 = \cdots = \tau_i \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.4}$$

le modèle obtenu peut être vu comme un modèle de Volterra "diagonal", puisque les termes h_i sont non nuls seulement pour $\tau_1 = \cdots = \tau_i$. Les paramètres non nuls du modèle non linéaire ainsi obtenu sont proportionnels aux paramètres du modèle linéaire. Le modèle de Hammerstein peut donc être considéré comme une approximation du modèle de Volterra. Cette série de Volterra est plus simple à utiliser et plus parcimonieuse que la classe des modèles de Volterra générale définie par (3.7). La simplification de complexité

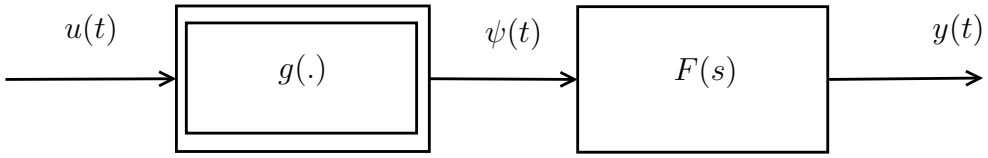


FIGURE 4.1 – Modèle d'Hammerstein

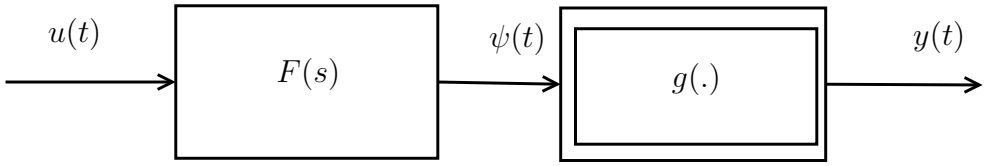


FIGURE 4.2 – Modèle de Wiener

est obtenue au détriment de la flexibilité du modèle : les restrictions inhérentes au modèle de Hammerstein l'empêchent de représenter autant de non-linéarités différentes que le modèle le plus général de (3.7).

4.2.2.2 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de Wiener

Le modèle de Wiener peut être vu comme le dual du modèle de Hammerstein (Doyle *et al.*, 2002; Rugh, 1981). Il comporte les deux mêmes blocs (non-linéarité statique et modèle linéaire dynamique) mais reliés dans l'ordre inverse comme sur la figure 4.2. Le signal d'entrée $u(t)$ passe d'abord par le modèle linéaire dynamique de fonction de transfert $F(s)$ pour donner le signal de sortie intermédiaire $\psi(t)$, lui-même transformé par la non-linéarité statique $g(.)$ pour donner le signal de sortie $y(t)$ du modèle. De la même manière que pour le modèle de Hammerstein, on peut définir un modèle de Wiener fini si le modèle linéaire est à réponse impulsionnelle finie, et si la fonction $g(.)$ est un polynôme de degré n (Bibes, 2004).

4.2.2.3 Noyaux de Volterra basés sur le modèle d'Uryson

Le modéle d'Uryson est généralement moins connu que les modèles de Hammerstein et de Wiener, mais il peut être considéré comme un sous-ensemble de la classe des modèles de Volterra (Doyle *et al.*, 2002). Il consiste à mettre en parallèle un certain nombre de modèles de Hammerstein (r modèles dans le cas de la figure 4.3).

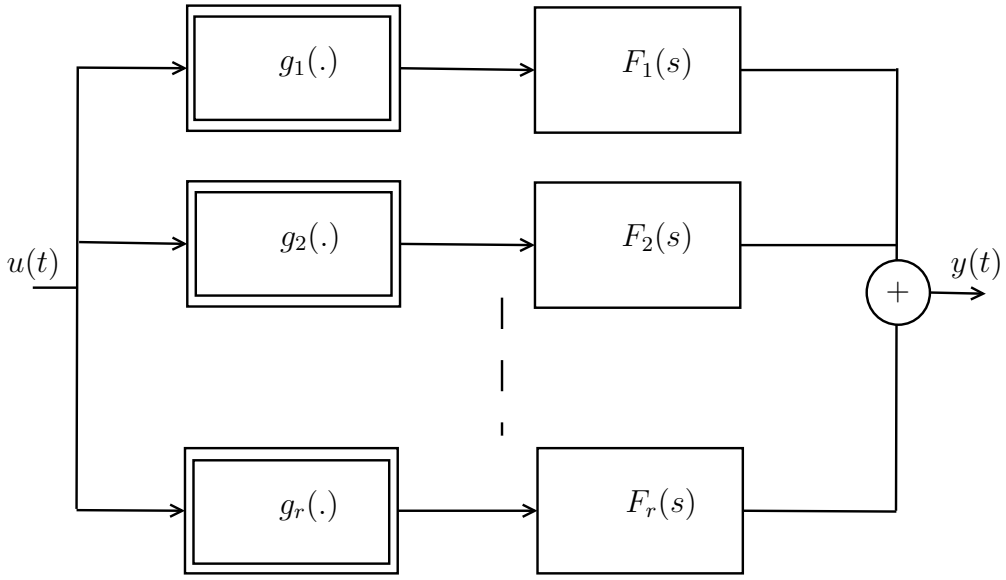


FIGURE 4.3 – Modèle d'Uryson

On suppose que les non-linéarités statiques $g_i(.)$ sont des polynômes d'ordre n_i $(i = 1, ..., r)$ et que les modèles linéaires dynamiques peuvent être représentés par des fonctions de transfert $F_i(s)$ $(i = 1, ..., r)$. La sortie $y_i(t)$ du $ième$ modèle de Hammerstein s'écrit alors :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i} \int_0^\infty \gamma_j^{(i)} f_i(\tau) u^j(t-\tau) d\tau. \tag{4.5}$$

La sortie globale $y(t)$ du modèle d'Uryson s'écrit donc sous la forme :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \int_0^\infty \gamma_j^{(i)} f_i(\tau) u^j(t-\tau) d\tau. \tag{4.6}$$

Les coefficients de ce modèle sont les suivants :

$$h_j(\tau_1, \cdots, \tau_j) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} \gamma_j^{(i)} f_i(\tau) & \text{si} \quad \tau_1 = \cdots = \tau_j \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases} \tag{4.7}$$

Comme dans le cas du modèle de Hammerstein, on remarque que le modèle d'Uryson peut être vu comme un modèle de Volterra "diagonal". Dans le cas où $r = 1$, on retrouve un modèle de Hammerstein classique, beaucoup plus simple que le modèle de Volterra classique mais moins efficace. Le couplage de plusieurs modèles de Hammerstein pallie au problème d'efficacité car on peut ainsi représenter davantage de systèmes non linéaires. Le modèle d'Uryson est donc plus flexible que le modèle de Hammerstein, mais il reste plus complexe et ne permet pas de représenter autant de types de non-linéarités que le modèle de Volterra (3.7).

4.2.2.4 Noyaux de Volterra basés sur le modèle de projection-poursuite

Le modèle de projection-poursuite peut être vu comme le dual du modèle d'Uryson (Doyle *et al.*, 2002). Le terme de projection-poursuite vient de la littérature consacrée aux statistiques et se réfère à une classe de modèles de régression non linéaire. Le modèle de projection-poursuite peut être obtenu à partir du modéle d'Uryson si l'on remplace chacun des sous-modèles de Hammerstein par des modèles de Wiener, en intervertissant la non-linéarité statique et le modèle linéaire dynamique (Bibes, 2004).

4.2.2.5 Noyaux de Volterra basés sur les bases orthogonales

On rappelle que la sortie d'un système à temps continu invariant dans le temps à mémoire évanouissante non linéaire mono-entrée/mono-sortie peut être développée en une série de Volterra

$$y\left(t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}y_{k}\left(t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{0}^{t}\cdots\int_{0}^{t}h_{k}\left(\tau_{1},\cdots,\tau_{k}\right)x\left(t-\tau_{1}\right)\cdots x\left(t-\tau_{k}\right)\mathrm{d}\tau_{1}\cdots\mathrm{d}\tau_{k}. \quad (4.8)$$

Dans le cas général, le noyau de Volterra $h_k(\tau_1, ..., \tau_k)$ est une fonction multivariable et admet donc un développement unique sur une base orthonormée de fonctions multivariables $\phi_{m_1 \ldots m_k}$ de l'espace $L_2([0,\infty[^{m_k})$ des fonctions de carrés sommables :

$$h_k(\tau_1, ..., \tau_k) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=1}^{\infty} c_{m_1,\cdots,m_k} \phi_{m_1,\cdots,m_k}(\tau_1 \cdots \tau_k). \quad (4.9)$$

En considérant les propriétés d'orthonormalité de la base de fonctions $\phi_{m_1,\ldots,m_k}$, Bibes (2004) a montré, en se basant sur les travaux de Monsion (1976), que la réponse $y_k(t)$ du noyau (4.9) à l'entrée $u(t)$ peut être approchée par :

$$\widetilde{y}_k(t) = \sum_{m_1=1}^{M_k} \cdots \sum_{m_k=1}^{m_{k-1}} b_{m_1,\cdots,m_k} I_{m_1}(t) \cdots I_{m_k}(t), \quad (4.10)$$

où le terme $I_{m_k}(t)$ est la réponse de la fonction orthonormée ϕ_{m_k} à l'entrée $u(t)$. La figure 4.4 illustre un noyau d'ordre 2 développé sur une base de 3 fonctions orthonormales.

Pour la suite de ce chapitre, le choix s'est porté sur les noyaux de Volterra s'exprimant sur les bases orthogonales. De surcroît, en plus du caractère non linéaire des modèles de diffusion thermique aux grandes variations de température, ils présentent un caractère non entier. Le paragraphe suivant porte sur l'expression des noyaux de Volterra pour des modèles non entiers, et plus particulièrement pour la modélisation de la diffusion thermique.

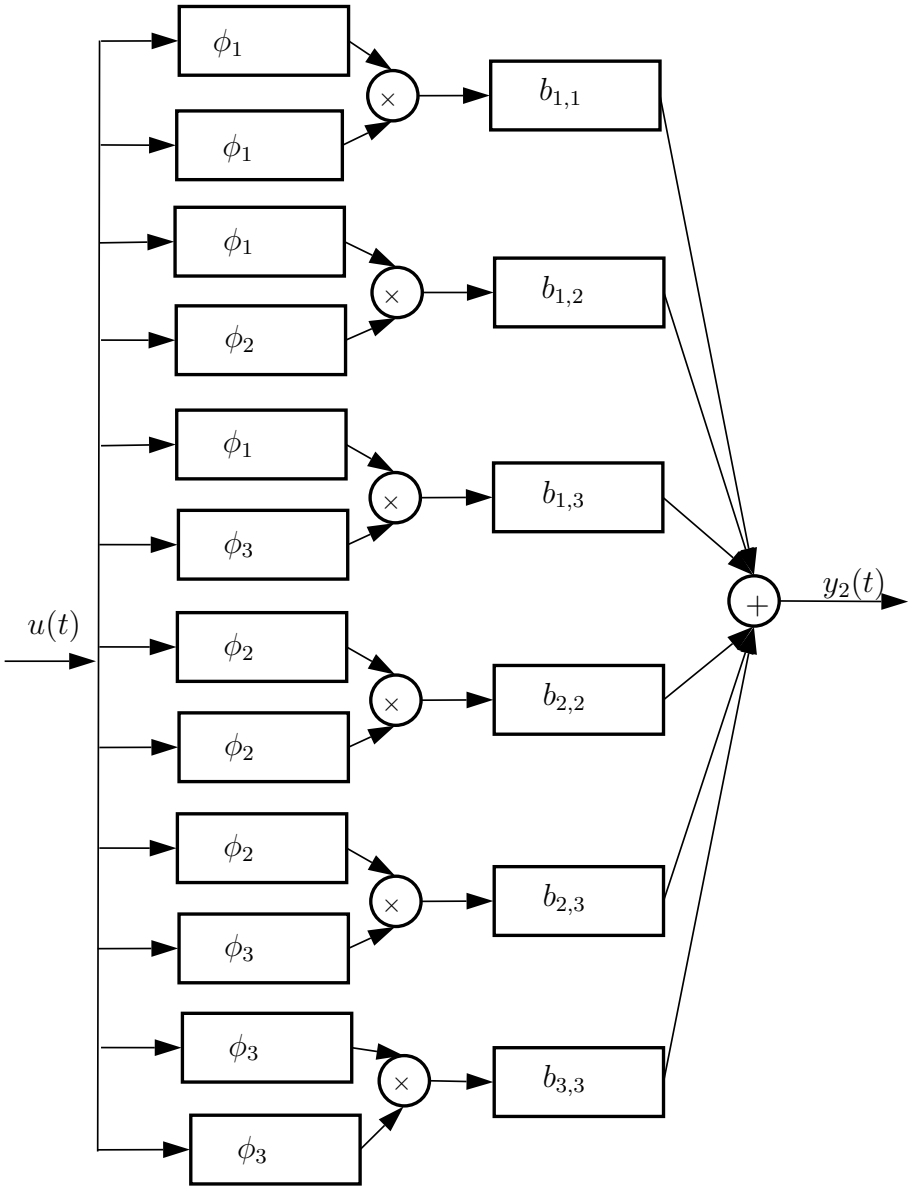


FIGURE 4.4 – Noyau quadratique développé sur une base de 3 fonctions orthonormales

4.3 Séries de Volterra en identification de systèmes non linéaires à dérivées non entières

Dans la mesure où le comportement d'un système modélisé par des séries de Volterra dépend des noyaux de Volterra h_k dans l'équation (3.7), l'identification consiste d'abord à choisir ces noyaux h_k puis à estimer l'ensemble des paramètres. Lorsque le système est non linéaire à dérivées non entières et lorsque la connaissance physique ne permet pas de définir les noyaux de Volterra par les techniques décrites au chapitre 3, alors une des techniques décrites dans ce chapitre peut être utilisée. Le choix s'est porté sur des noyaux de Volterra s'écrivant sous la forme de fonctions F_n génératrices de bases orthogonales non entières.

4.3.1 Fonctions génératrices de bases orthogonales non entières

Dans Malti *et al.* (2005) et Aoun *et al.* (2007), les fonctions formant des bases orthonormales ont été étendues aux dérivées non entières en appliquant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Shmidt à un ensemble de fonctions génératrices F_n dont les transformées de Laplace inverses $f_n(t)$ forment une base dans $L_2[0,\infty)$ (Akçay, 2008; Aoun *et al.*, 2007). En conséquence, la partie linéaire des séries de Volterra $h_1(t)$ peut toujours être approchée en utilisant ces fonctions génératrices de bases orthogonales :

$$h_1(t) \approx \sum_{n=1}^{M} b_n f_n(t), \tag{4.11}$$

où b_n est le coefficient de Fourier associé à f_n, et M l'ordre de troncature. Par exemple, un système linéaire caractérisé par la présence d'un s^ν-pole réel de la base de Laguerre non entière à $(-\lambda)$ peut s'écrire :

$$h_1(t) \approx \sum_{n=1}^{M} b_n l_n(t), \tag{4.12}$$

où l_n a pour transformée de Laplace :

$$L_n(s) = \frac{1}{(s^\nu + \lambda)^n}, \tag{4.13}$$

avec ν l'ordre non entier.

Lorsque les s^ν-poles du système sont réels et/ou complexes conjugués, la base orthogonale non entière généralisée peut être utilisée Malti *et al.* (2005). Ses fonctions génératrices sont définies itérativement par :

$$\begin{cases} F_n(s) = \frac{1}{s^\nu+\lambda_n}\phi_{n-1} \text{ où } \lambda_n \text{ est réelle ou} \\ F'_n(s) = \frac{s^\nu+\mathcal{R}e(\lambda_n)}{(s^\nu+\lambda_n)(s^\nu+\overline{\lambda}_n)}\phi_{n-1} \text{ et} \\ F''_n(s) = \frac{\mathcal{I}m(\lambda_n)}{(s^\nu+\lambda_n)(s^\nu+\overline{\lambda}_n)}\phi_{n-1} \text{ si } \lambda_n \text{ est complexe} \end{cases} \tag{4.14}$$

avec

$$\begin{cases} \phi_{n-1} = F_{n-1} \text{ si } n > 1 \text{ et } \lambda_{n-1} \text{ est réelle ou} \\ \phi_{n-1} = F'_{n-1} \text{ ou } F''_{n-1} \text{ si } n > 1 \text{ et } \lambda_{n-1} \text{ est complexe} \end{cases} \tag{4.15}$$

et

$$\begin{cases} F_1(s) = \frac{1}{s^\nu+\lambda_1} \text{ si } \lambda_1 \text{ est réelle ou} \\ F'_1(s) = \frac{s^\nu+\mathcal{R}e(\lambda_1)}{(s^\nu+\lambda_n)(s^\nu+\overline{\lambda}_1)} \text{ et} \\ F''_1(s) = \frac{\mathcal{I}m(\lambda_1)}{(s^\nu+\lambda_1)(s^\nu+\overline{\lambda}_1)} \text{ si } \lambda_1 \text{ est complexe.} \end{cases} \tag{4.16}$$

Par exemple, un système linéaire caractérisé par la présence de trois s^ν-poles de la base orthogonale généralisée, tels que $-\lambda_1 = \overline{-\lambda_2}$ complexes conjugués et $-\lambda_3$ réel, peut s'écrire à l'aide des trois fonctions génératrices de cette base :

$$h_1(t) \approx \sum_{n=1}^{3} b_n f_n(t), \tag{4.17}$$

avec f_n ayant pour transformée de Laplace :

$$\begin{cases} F_1(s) = \frac{s^\nu+\mathcal{R}e(\lambda_1)}{(s^\nu+\lambda_1)(s^\nu+\lambda_2)} \\ F_2(s) = \frac{\mathcal{I}m(\lambda_2)}{(s^\nu+\lambda_1)(s^\nu+\lambda_2)} \\ F_3(s) = \frac{1}{s^\nu+\lambda_3}F_2(s). \end{cases} \tag{4.18}$$

4.3.2 Noyaux basés sur les fonctions génératrices de bases orthogonales non entières

Grâce à ces fonctions génératrices de bases orthogonales non entières, la méthode décrite au paragraphe 4.2.2.5 peut être étendue au cas des systèmes non linéaires à dérivées non entières. De même que pour le cas monovariable, les fonctions $f_{m_1,\cdots,m_k}(t)$ telles que :

$$f_{m_1,\cdots,m_k} = \prod_{i=1}^{k} f_{m_i}, \tag{4.19}$$

forment une base dans $L_2([0,\infty)^k)$. En conséquence, les noyaux des séries de Volterra $h_k(t_1,\cdots,t_k)$ peuvent toujours s'écrire :

$$h_k(t_1,\cdots,t_k) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=1}^{\infty} b_{m_1,\cdots,m_k} f_{m_1,\cdots,m_k}(t_1,\cdots,t_k), \tag{4.20}$$

où $b_{m_1,\cdots,m_k}$ constituent les paramètres du développement. Alors, parallèlement au développement de Bibes (2004) pour les noyaux de Volterra exprimés à partir d'une base orthonormale entière, y_k de (4.8) peut être approchée par :

$$y_k(t) = \sum_{m_1=1}^{M} \cdots \sum_{m_k=1}^{m_{k-1}} c_{m_1,\cdots,m_k} \times I_{m_1} \cdots I_{m_k} \tag{4.21}$$

avec

$$I_{m_k} = \int_0^t f_{m_k}(\tau_k) u(t-\tau_k) d\tau_k. \tag{4.22}$$

M désigne le nombre de fonctions génératrices utilisées pour approcher les noyaux et m_k l'ordre des noyaux. Le noyau d'ordre k est présenté sur la figure 4.5. Par exemple, la sortie du noyau quadratique développé sur une base de trois fonctions génératrices, soit $M = 3$ et $m_k = 2$, illustré sur la figure 4.6, s'exprime :

$$y_2(t) = \sum_{m_1=1}^{3} \sum_{m_2=1}^{m_{k-1}} c_{m_1,m_2} \times I_{m_1} I_{m_2} \tag{4.23}$$

$$\text{avec} \quad I_{m_1} = \int_0^t f_{m_1}(\tau_1) u(t-\tau_1) d\tau_1 \tag{4.24}$$

$$\text{avec} \quad I_{m_2} = \int_0^t f_{m_2}(\tau_2) u(t-\tau_2) d\tau_2 \tag{4.25}$$

$$y_2(t) = \sum_{m_2=1}^{1} c_{1,m_2} \times I_1 I_{m_2} + \sum_{m_2=1}^{2} c_{2,m_2} \times I_2 I_{m_2} + \sum_{m_2=1}^{3} c_{3,m_2} \times I_3 I_{m_2} \tag{4.26}$$

$$y_2(t) = c_{1,1} \times I_1 I_1 + c_{2,1} \times I_2 I_1 + c_{2,2} \times I_2 I_2 + c_{3,1} \times I_3 I_1 + c_{3,2} \times I_3 I_2 + c_{3,3} \times I_3 I_3 \tag{4.27}$$

4.3.3 Estimation paramétrique

Soit les données d'entrée $u(t)$ et de sortie $y^*(t)$ collectées à intervalle régulier de $t = 0$ à $t = T_{final}$. La sortie mesurée $y^*(t)$ est supposée entachée d'un bruit blanc $e(t)$:

$$y^*(t) = y(t) + e(t), \tag{4.28}$$

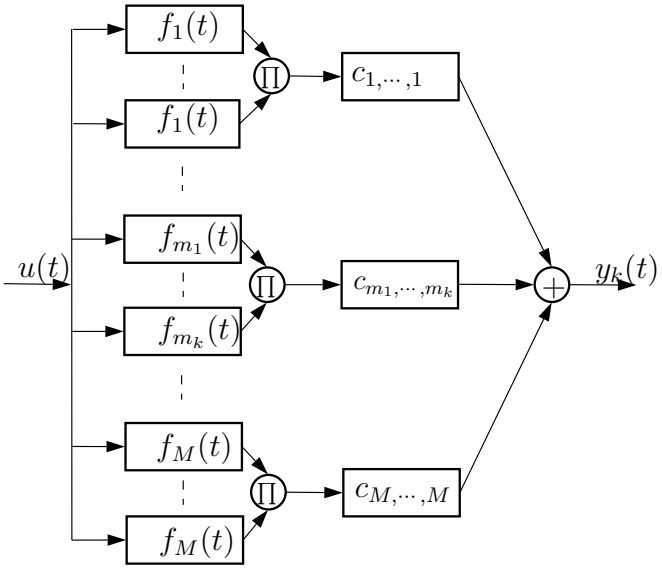


FIGURE 4.5 – Noyau de Volterra d'ordre k développé sur une base de M fonctions génératrices

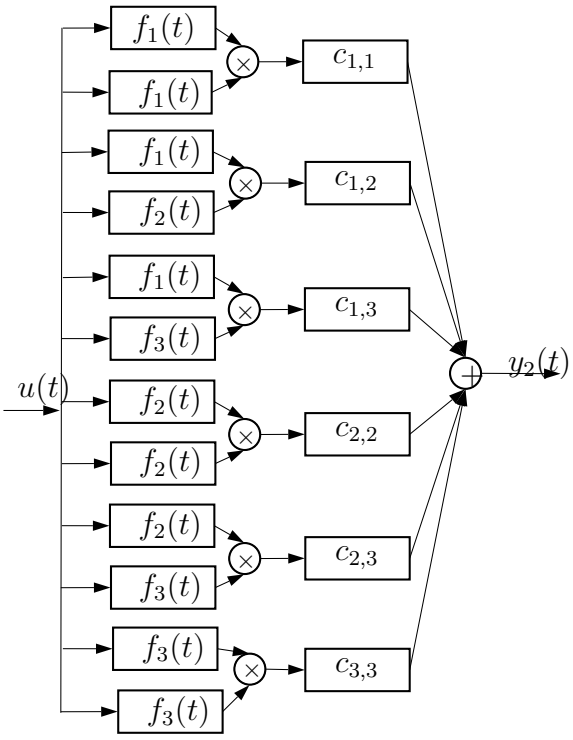


FIGURE 4.6 – Noyau quadratique développé sur une base de 3 fonctions génératrices

où $y(t)$ est la sortie non bruitée du système considéré. L'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ sont supposées reliées par la série de Volterra non entière (4.8) avec y_k définie par (4.21).

Soit le modèle

$$y(t) = \sum_{m_1=1}^{M} \cdots \sum_{m_k=1}^{m_{i-1}} c_{m_1,\cdots,m_k} \mathscr{L}^{-1}\{F_{m_1}(s_1)U(s_1)\} \cdots \mathscr{L}^{-1}\{F_{m_k}(s_k)U(s_k)\}, \tag{4.29}$$

avec F_{m_i} défini en (4.14). Alors, le vecteur de paramètres

$$\theta = \begin{bmatrix} C \\ \mu \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

est composé du vecteur C des coefficients linéaires,

$$C = [c_1, \cdots, c_M, c_{1,1}, \cdots, c_{M,M}, c_{1,\cdots,1}, \cdots, c_{M,\cdots,M}]^T \tag{4.31}$$

et du vecteur μ des coefficients non linéaires par rapport au modèle :

$$\mu = [\lambda_1, \ldots, \lambda_M, \nu]^T. \tag{4.32}$$

Le nombre de paramètres inconnus dépend alors de l'ordre de troncature M et du nombre N de noyaux. Par conséquent,

- pour le vecteur C, le nombre P_k de coefficients linéaires inconnus $c_{m_1,\cdots,m_k}$ associés au noyau d'ordre k est égal aux k-combinaisons avec répétitions parmi M fonctions génératrices :
$$P_k = \frac{(M+k-1)!}{(M-1)!k!}; \tag{4.33}$$
en conséquence, le nombre P_c de coefficients linéaires d'un modèle de Volterra d'ordre N est :
$$P_c = \sum_{k=1}^{N} P_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{(M+k-1)!}{(M-1)!k!}; \tag{4.34}$$
- pour le vecteur μ, le nombre de coefficients non linéaires inconnus $\lambda_1, \cdots, \lambda_M$ et ν, correspondant aux M s^ν-pôles associés aux fonctions génératrices et à l'ordre commensurable, est :
$$P_\mu = M + 1. \tag{4.35}$$

Évidemment, le nombre de paramètres croît considérablement avec M le nombre de fonctions génératrices (4.11) et N l'ordre de troncature des séries de Volterra. Par exemple,

pour un nombre de fonctions génératrices M égal à 3 et un nombre de noyaux de Volterra N égal à 3, le nombre de coefficients linéaires à déterminer est de 19, selon (4.34), et le nombre de coefficients non linéaires est égal à 4 (3 s^{ν}-poles et l'ordre commensurable), ce qui conduit à un total de 23 coefficients à estimer. Dans le cas où M est égal à 3 fonctions génératrices et N est égal à 2 noyaux de Volterra, le nombre total de paramètres à estimer est réduit à 9 coefficients linéaires pour toujours 4 coefficients non linéaires :

$$\mu = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \nu]^T, \tag{4.36}$$

ce qui conduit à 13 coefficients à estimer.

4.3.3.1 Estimation des coefficients linéaires du modèle

Selon les connaissances *a priori*, une programmation linéaire ou non linéaire peut être mise en place pour estimer les paramètres inconnus. Lorsque l'ordre commensurable et les pôles sont choisis en fonction des connaissances *a priori*, seuls les coefficients $c_{m_1 \cdots m_k}$ sont estimés (Maachou *et al.*, 2010*c*). Par exemple, la sortie $y(t)$ développée sur trois fonctions génératrices et deux noyaux s'écrit :

$$\begin{gathered} y(t) = y_1(t) + y_2(t) \ \text{ avec} \\ \begin{cases} y_1(t) = \sum_{m_1=1}^{3} c_{m_1} x_{m_1} \\ \text{avec } x_{m_1} = \int_0^t f_{m_1}(\tau_1) u(t-\tau_1) d\tau_1 \text{ ou } \ x_{m_1} = \mathscr{L}^{-1}\{F_{m_1}(s_1) U(s_1)\} \\ y_2(t) = \sum_{m_1=1}^{3} \sum_{m_2=1}^{m_1} c_{m_1,m_2} x_{m_1} x_{m_2} \\ \text{avec } x_{m_2} = \int_0^t f_{m_2}(\tau_2) u(t-\tau_2) d\tau_2 \text{ ou } \ x_{m_2} = \mathscr{L}^{-1}\{F_{m_2}(s_2) U(s_2)\} \end{cases} \end{gathered} \tag{4.37}$$

ou encore :

$$\begin{gathered} y(t) = y_1(t) + y_2(t) \ \text{ avec} \\ \begin{cases} y_1(t) = c_1 \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s_1)U(s_1)\} + c_2 \mathscr{L}^{-1}\{F_2(s_1)U(s_1)\} + c_3 \mathscr{L}^{-1}\{F_3(s_1)U(s_1)\} \\ y_2(t) = c_{1,1} \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s_2)U(s_2)\} + c_{1,2} \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s_2)U(s_2)\} + \\ c_{1,3} \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_3(s_2)U(s_2)\} + c_{2,2} \mathscr{L}^{-1}\{F_2(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s_2)U(s_2)\} + \\ c_{2,3} \mathscr{L}^{-1}\{F_2(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_3(s_2)U(s_2)\} + c_{3,3} \mathscr{L}^{-1}\{F_3(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_3(s_2)U(s_2)\}, \end{cases} \end{gathered} \tag{4.38}$$

avec F_1, F_2 et F_3 définies à l'équation (4.18). La sortie du modèle s'écrit alors :

$$y(t) = XC, \tag{4.39}$$

avec $C^T = [\ c_1 \quad \cdots \quad c_3 \quad c_{1,1} \quad \cdots \quad c_{3,3}\ ]$ et
$X = [\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s_1)U(s_1)\}, \quad \cdots, \quad \mathscr{L}^{-1}\{F_3(s_1)U(s_1)\}, \quad \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s_2)U(s_2)\}$
$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_2(s_2)U(s_2)\}, \quad \cdots \quad, \mathscr{L}^{-1}\{F_3(s_1)U(s_1)\}\mathscr{L}^{-1}\{F_3(s_2)U(s_2)\}]$.
Les coefficients optimaux $c_{i,j}$ sont calculés en minimisant la norme quadratique de l'erreur de sortie :

$$J_{id} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1}(y_{id}^*(kh) - \hat{y}_{id}(kh))^2}{\sum_{k=0}^{K-1}(y_{id}^*(kh))^2} \times 100, \tag{4.40}$$

où y_{id}^* est la sortie bruitée du système et $\widehat{y_{id}}$ la sortie estimée du modèle de Volterra.

Le vecteur de paramètres C peut alors être calculé par moindres carrés :

$$\widehat{C} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \tag{4.41}$$

dont la matrice de covariance associée est :

$$\mathrm{cov}(\widehat{C}) = \hat{\sigma}^2 (X^T X)^{-1}, \tag{4.42}$$

avec

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K-9} \sum_{k=0}^{K-1} \left(y_{id}^*(t_k) - \hat{y}_{id}(t_k, \hat{\theta}) \right). \tag{4.43}$$

4.3.3.2 Estimation des paramètres non linéaires du modèle

La méthode de programmation non linéaire (PNL) peut-être utilisée pour estimer l'ordre commensurable et les s^ν-poles. Ainsi, la méthode PNL est combinée à la programmation linéaire comme le montre la figure 4.7.

La première étape consiste à initialiser θ (4.36). Les trois s^ν-poles sont initialisés suite à une identification par un modèle linéaire non entier, de gain statique G_0 et de zeros $-z_1$ et $-z_2$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{2} \widetilde{b_i} s^{i\nu}}{1 + \sum_{j=1}^{3} \widetilde{a_j} s^{j\nu}} = G_0 \times \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)} \tag{4.44}$$

à l'aide de la méthode "*erreur de sortie*" (*oe*), décrite au paragraphe 2.2.1.1, afin de capturer la dynamique du système, alors que l'ordre commensurable ν est fixé à 0.5 grâce à une connaissance *a priori* du système. Comme pour les modèles linéaires, le nombre de fonctions génératrices M est choisi à l'ordre à partir duquel l'évolution du critère d'identification (4.40) est négligeable. D'autres critères peuvent être utilisés (Akaike (1974),

Young (1989)). Cependant, le choix de M doit prendre en compte l'augmentation du nombre de coefficients de la série de Volterra selon l'équation (4.34). Le vecteur μ_0 est construit :

$$\mu_0 = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \nu]. \tag{4.45}$$

Ensuite, le vecteur de coefficient C_0 de (4.31) est estimé par moindres carrées. Puis, le vecteur θ_0 est construit :

$$\theta_0 = [C_0, \mu_0]^T \tag{4.46}$$

Dans la troisième étape, le vecteur Θ (4.36) est estimé par programmation non linéaire. L'algorithme de Levenberg-Marquardt implementé dans la fonction *lsqnonlin* de la toolbox *optimisation* de MATLAB est utilisé et le vecteur de paramètres θ_k est estimé itérativement par :

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \left\{ [J'' + \zeta I]^{-1} J' \right\}_{\theta=\theta_k} \tag{4.47}$$

avec

$$\begin{cases} J' = -2 \sum_{k=0}^{K-1} \varepsilon(t_k) S(t_k, \theta) \\ J'' \approx 2 \sum_{k=0}^{K-1} S(t_k, \theta) S^T(t_k, \theta) \\ S(t_k, \theta) = \frac{\partial y(t_k, \theta)}{\partial \theta} \\ \zeta = \text{paramètre de Marquardt,} \end{cases} \tag{4.48}$$

où ε est l'erreur résiduelle :

$$\varepsilon_{id}(t) = y^*_{id}(t) - \hat{y}_{id}(t). \tag{4.49}$$

La troisième étape est réitérée jusqu'à convergence lorsque

$$\max_l \left| \frac{\theta_{l,k} - \theta_{l,k-1}}{\theta_{l,k}} \right| < \varepsilon, \tag{4.50}$$

où $\theta_{l,k}$ est l'élément l du vecteur θ estimé à l'itération k, ou jusqu'à ce que le nombre d'itération $\max_{iter}$, soit atteint. Comme tout algorithme basé sur le gradient, seule une convergence locale est garantie. L'estimation de la matrice de covariance des paramètres θ est donnée par :

$$\mathrm{cov}(\theta) = \hat{\sigma}^2 J''^{-1}, \tag{4.51}$$

avec

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{K - 13} \sum_{k=0}^{K-1} \left(y^*_{id}(t_k) - \hat{y}_{id}(t_k, \hat{\theta}) \right). \tag{4.52}$$

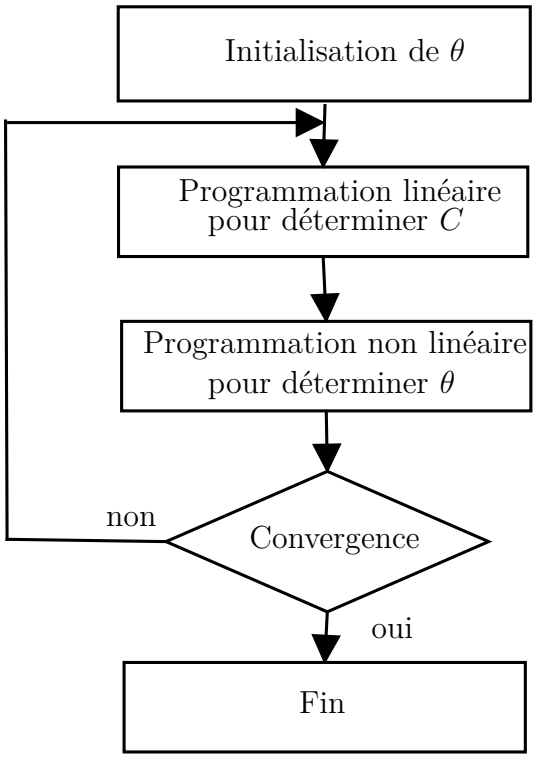


FIGURE 4.7 – Méthode d'estimation des paramètres

4.3.3.3 Algorithme de programmation non linéaire pour l'estimation paramètrique du modèle

Etape 1 : Initialisation de θ_0

Estimer ν_0 par une identification linéaire du modèle

Choisir N, le nombre de noyaux du modèle

Calculer F_1 à F_M où $M = \text{taille}(\nu_0 - 1)$

Estimer C_0 par moindres carrées avec : $C_0 = (X^T X)^{-1} X^T Y$.

iter $= 0$

Initialiser $\max_{iter}$

Etape 2 : Estimation de θ

$\theta_0 = [C_0, \nu_0]$

Tant que $\max_l \left| \frac{\theta_{l,k} - \theta_{l,k-1}}{\theta_{l,k}} \right| < \varepsilon$ ou iter$<$ $\max_{iter}$

- Calculer F_1 à F_M où $M = \text{taille}(\nu_0 - 1)$
- Estimer C_{iter} par moindres carrés
- $\theta_{k+1} = \theta_k - \left\{ [J'' + \zeta I]^{-1} J' \right\}_{\theta=\theta_k}$
- iter = iter+1

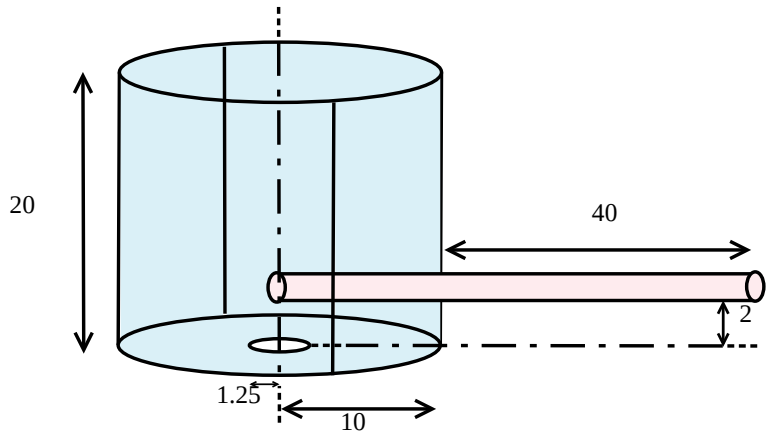


FIGURE 4.8 – Géométrie de l'échantillon de fer ARMCO (dimensions en mm)

Etape 3 : Fin de l'estimation

Calculer l'erreur entre le système et le modèle

Calculer la matrice de covariance

4.4 Identification de la diffusion thermique à partir des données de simulation

4.4.1 Protocole expérimental

Le banc expérimental utilise un échantillon de fer ARMCO de forme cylindrique de rayon $R = 10$mm et de hauteur $e = 20$mm. Une face du cylindre est soumise à un flux variable, uniformément distribué sur un disque de rayon $r = 1.25$mm. Un thermocouple de type K de diamètre 0.5 mm est placé à une distance $d = 2$mm de la surface excitée (voir la figure 4.8). Les non-linéarités sont dues aux propriétés thermiques dépendantes de la température et tracées sur la figure 2.8. La température du capteur est simulée par éléments finis, grâce au logiciel COMSOL, à partir d'une configuration en 3D, utilisant les éléments quadratiques de Lagrange. De plus, la période d'échantillonnage est fixée à $h = 0.01$s, valeur atteignable par le système d'acquisition du banc expérimental permettant de fixer la fréquence haute du signal d'entrée.

Deux signaux d'entrées sont générés, un pour l'identification, l'autre pour la validation. Ces signaux, représentés sur la figure 4.9, possèdent une amplitude variable de 0 à

1×10^8 W.m^{-2} et une durée totale de 25 s.

Afin de tester l'algorithme d'identification, un bruit blanc $e(t)$ de 20 dB est ajouté à la sortie non bruitée $y(t)$ générée par COMSOL :

$$y^*(t) = y(t) + e(t). \tag{4.53}$$

4.4.2 Estimation paramétrique

Afin de trouver un ordre de troncature adéquat et pour des raisons de comparaison, le système est d'abord identifié par un modèle linéaire. La durée de l'expérience étant courte par rapport au temps nécessaire à la diffusion thermique pour atteindre les limites de l'échantillon, celui-ci est considéré comme un milieu semi-infini plan. L'équation (1.62) du chapitre 1 montre que la fonction de transfert entre le flux injecté et la température présente un intégrateur pur d'ordre 0.5 et est commensurable d'ordre 0.5. Par conséquent, le modèle choisi pour l'identification du transfert flux température est du type :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^{i\nu}}{s^{0.5}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_j s^{j\nu}\right)}. \tag{4.54}$$

Ce modèle contenant un intégrateur pur d'ordre 0.5, le signal d'entrée est préalablement intégré :

$$\widetilde{U}(s) = \frac{U(s)}{s^{0.5}} \tag{4.55}$$

et l'identification du système est effectuée entre l'entrée intégrée et la sortie. Pour chaque ordre M de troncature dans (4.11), tous les coefficients du modèle linéaire sont estimés et les normes deux de l'erreur de sortie, calculées sur les données d'identification (4.40) et sur les données de validation $(u_{val},\, y^*_{val})$:

$$J_{val} = \frac{\sum_{k=0}^{K-1}(y^*_{val}(kh) - \hat{y}_{val}(kh))^2}{\sum_{k=0}^{K-1}(y^*_{val}(kh))^2} \times 100, \tag{4.56}$$

reportées au tableau 4.1. Une troncature d'ordre $M = 2$ est retenue, car pour $M \geq 2$ les critères d'identification et de validation ne s'améliorent plus de manière significative. Les deux s^ν-pôles et l'ordre commensurable $\nu = 0.5$ sont ensuite utilisés pour l'initialisation du vecteur μ (4.36) du modèle non linéaire :

$$\mu_0 = [\lambda_1,\ \lambda_2,\ \nu] = \ [-0.96 - 1.91i,\ -0.96 + 1.91i,\ 0.5]^T. \tag{4.57}$$

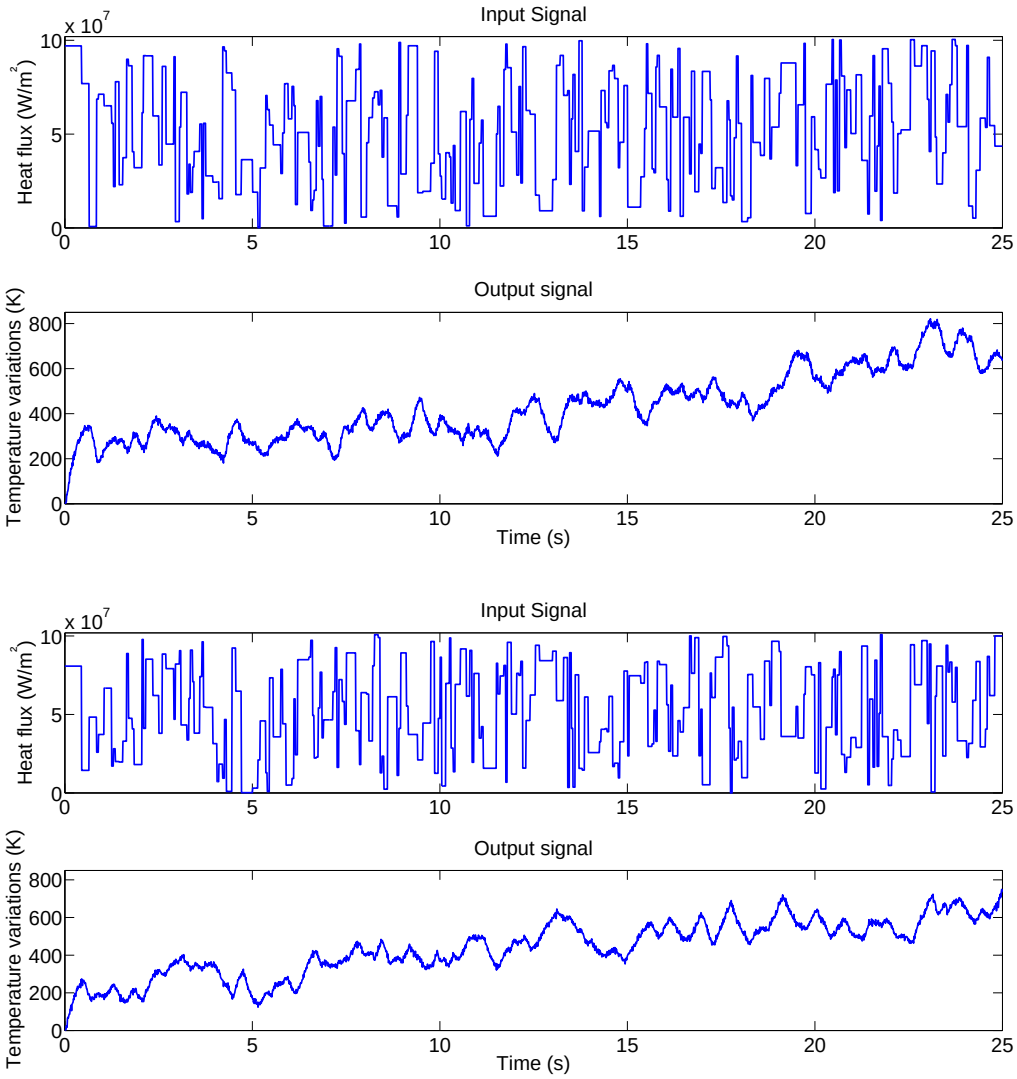


FIGURE 4.9 – Données d'identification et de validation, la température ambiante de 300K ayant été soustraite

Tableau 4.1 – Critères d'identification et de validation pour un modèle linéaire en fonction du nombre de s^{ν}-pôles

M	1	2	3	4
J_{id}	1.73	0.40	0.40	0.38
J_{val}	1.94	0.74	0.74	0.72

Tableau 4.2 – Paramètres estimés du modèle de Volterra, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

θ	c_1	c_2	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$
Estimation	4.28×10^{-6}	-4.08×10^{-6}	-0.68×10^{-10}	3.7×10^{-10}
écart-type	0.71×10^{-6}	0.19×10^{-6}	0.41×10^{-10}	4.6×10^{-10}
θ	$c_{2,2}$	$\mathfrak{Re}(\lambda_1)$	$\mathfrak{Im}(\lambda_1)$	ν
Estimation	-0.07×10^{-10}	-0.96	-1.18	0.35
écart-type	0.11×10^{-10}	0.05	0.23	0.03

L'estimation du vecteur θ de (4.30) est effectuée pour 300 réalisations de bruit de RSB 20dB. Le vecteur θ de (4.30) converge après optimisation vers les valeurs du tableau 4.2.

La sortie y^*_{val} du système obtenue par éléments finis et la sortie $\hat{y}_{val}$ du modèle de Volterra sont tracées, sur le jeu de validation, sur la figure 4.10. Leur écart $\varepsilon_{val}(t)$:

$$\varepsilon_{val}(t) = y^*_{val}(t) - \hat{y}_{val}(t), \tag{4.58}$$

est tracée sur la figure 4.11. De plus, la contribution de chaque noyau du modèle de Volterra est également indiquée sur cette figure, mettant en avant la contribution de la partie linéaire apportée par le premier noyau et celle de la partie non linéaire du modèle.

Comme attendu, la sortie du modèle de Volterra est plus proche de la sortie du système comparée à celle du modèle linéaire également tracée sur la figure 4.10. Les critères de vraissemblance sur les données d'identification et de validation donnés par :

$$R_T = 100\Big(1 - \frac{\|y^* - \widehat{y}\|_2}{\|y^* - \text{moyenne}(y^*)\|_2}\Big), \tag{4.59}$$

sont calculés et présentés dans le tableau 4.3. Le modèle de Volterra permet d'obtenir des résultats plus précis puisqu'en identification le critère de ressemblance augmente de 80.4% pour le modèle linéaire à 86.5% pour le modèle de Volterra. En validation, le critère de ressemblance augmente de 74.1% pour le modèle linéaire à 84.7% pour le modèle de Volterra. En effet le modèle linéaire est limité car il ne permet pas de prendre en compte toutes les non-linéarités qui sont mieux capturées par le modèle de Volterra d'ordre 2. Cette première identification à partir de données obtenues en simulation permet de conclure sur la validité de la méthode basée sur les séries de Volterra non entières pour l'identification de systèmes non linéaires non entiers.

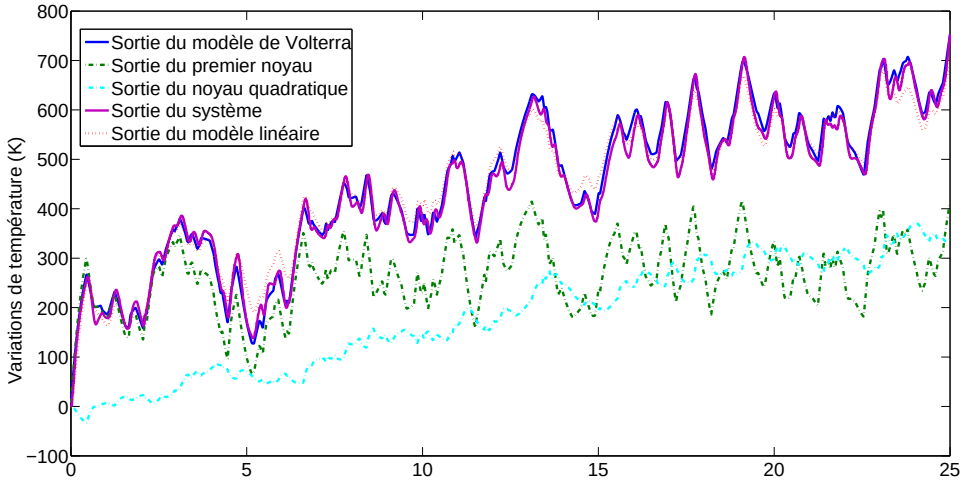


FIGURE 4.10 – Comparaison entre la sortie du système, celle du modèle linéaire et celle du modèle de Volterra avec la contribution des deux premiers noyaux sur les données de validation, la température ambiante de 300K ayant été soustraite.

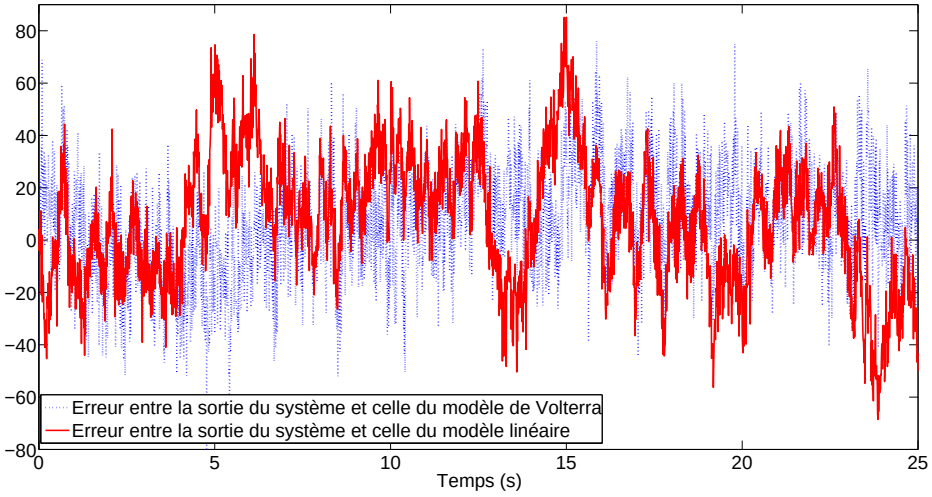


FIGURE 4.11 – Erreurs résiduelles entre la sortie du système et celles des modèles

Tableau 4.3 – Critères de vraissemblance calculés sur les données d'identification et de validation

Modèle	Linéaire	Volterra second ordre
R_{T_id}	80.4%	86.5%
R_{T_val}	74.1%	84.7%

4.5 Identification de la diffusion thermique à partir des données expérimentales

4.5.1 Protocole expérimental

Dans un second temps, les données d'entrée et de sortie sont générées à partir d'un dispositif expérimental basé au laboratoire I2M à Bordeaux (figure 4.12) et constitué :

- d'une photodiode rapide mesurant le flux réfléchi par l'échantillon afin de vérifier la forme et la puissance du signal d'entrée,
- d'un pyromètre mesurant la température de surface de l'échantillon
- d'une fibre et d'un dispositif optique permettant l'acheminement et la mise en forme du faisceau laser,
- d'une caméra et de ces accessoires (plusieurs filtres pour l'objectif et une mire) permettant de mesurer la surface excitée
- et de l'échantillon dans son support.

L'expérience consiste à injecter un flux généré par un laser fibré, de longueur d'onde 1 μm et piloté en interne par un générateur de fonction pouvant être modulé avec une fréquence maximale de 10 kHz, à la surface d'un échantillon de fer ARMCO. Le signal pilotant le laser, d'amplitude variable entre 0 et 5 V et de fréquences haute et basse conditionnées par la période d'échantillonnage et le temps de simulation, provoque une variation de la puissance du laser comprise entre 0 et 200 Watts. Le flux de chaleur équivalent à cette commande est calculé et tracé sur la figure 4.17. L'objectif est de fournir suffisamment d'énergie afin de provoquer de grandes variations de température. La puissance du laser permettant d'obtenir une variation de température d'environ 200 K et les variations des caractéristiques thermiques étant importantes autour du point de Curie ($1040K$), l'échantillon est d'abord chauffé jusqu'à $940K$. A cet effet, un fil conducteur est enroulé autour du fer ARMCO et un courant y est appliqué (figure 4.15). Afin d'éviter les court-circuits, l'échantillon est préalablement recouvert d'une peinture qui permet une isolation électrique (figure 4.13). Ensuite, afin d'éviter les pertes thermiques et les échanges avec le milieu extérieur, l'échantillon est recouvert d'un matériau isolant (figure 4.16). Un thermocouple est positionné à une distance $d = 2mm$ de la surface S où le flux

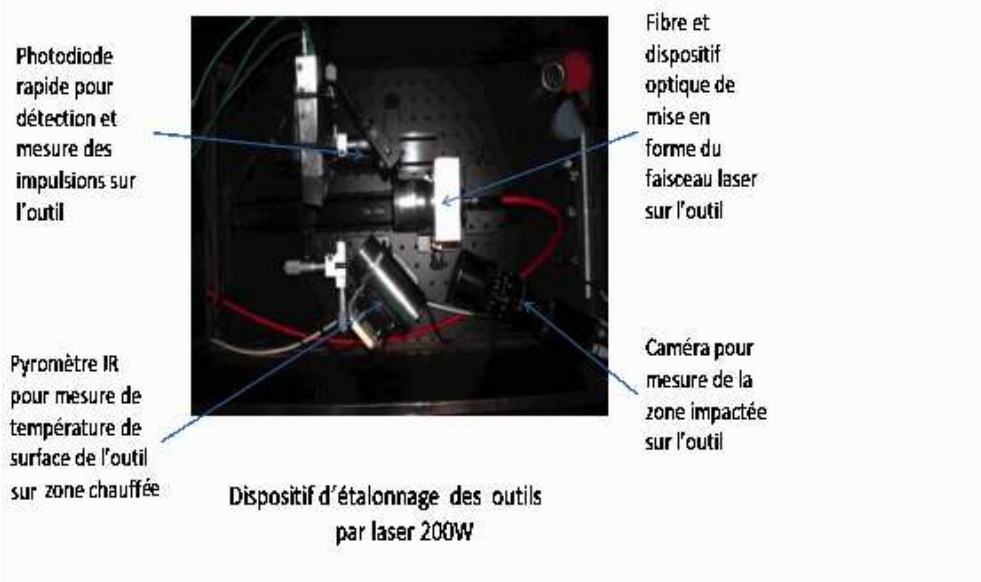


FIGURE 4.12 – Banc expérimental du laboratoire I2M (Université de Bordeaux)

est injecté dans un trou précédemment percé (figure 4.14). Cette surface S est un disque de 1.25mm de rayon.

Deux jeux de données sont générés : un jeu dédié à l'identification et l'autre à la validation, avec une excitation correspondant à la densité du flux thermique (W/m^2) et une sortie correspondant à l'écart de température (K).

4.5.2 Estimation paramétrique

Afin de trouver un ordre de troncature adéquat et pour des raisons de comparaison, le système est d'abord identifié par un modèle linéaire. La durée de l'expérience étant courte par rapport au temps nécessaire à la diffusion thermique pour atteindre les limites de l'échantillon, celui-ci est considéré comme un milieu semi-infini plan. L'équation (1.62) du chapitre 1 montre que la fonction de transfert entre le flux injecté et la température présente un intégrateur pur d'ordre 0.5 et est commensurable d'ordre 0.5. Par conséquent, le modèle choisi pour l'identification du transfert flux température est du type :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^{i\nu}}{s^{0.5}\left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_j s^{j\nu}\right)}. \tag{4.60}$$



FIGURE 4.13 – Echantillon de fer ARMCO isolé électriquement



FIGURE 4.14 – Echantillon de fer ARMCO muni d'un thermocouple

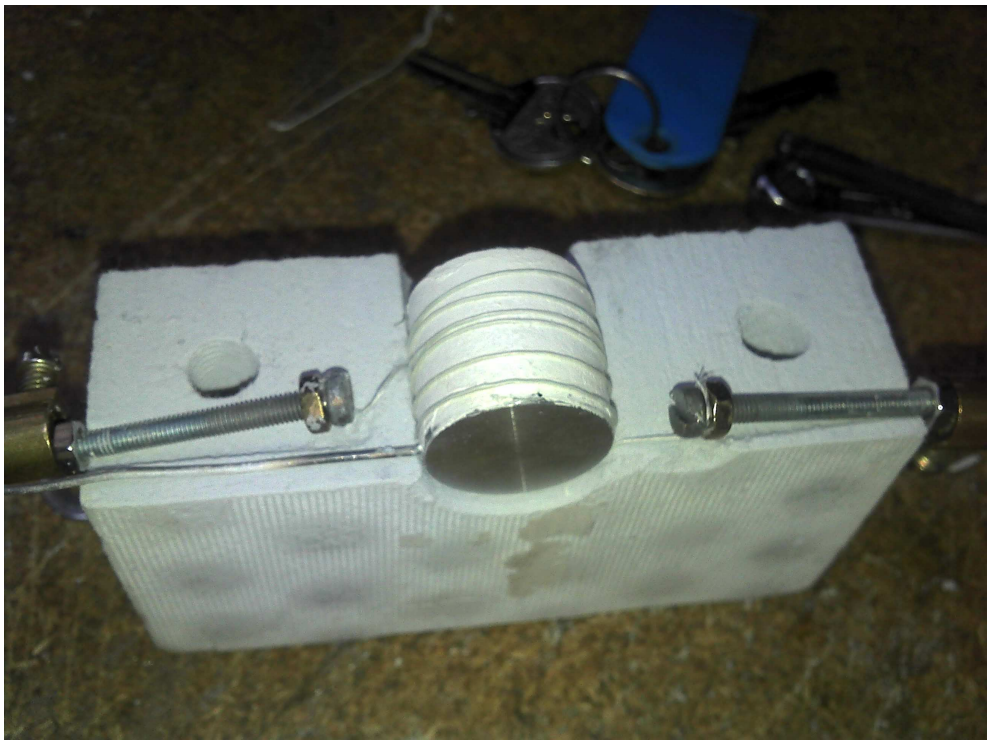


FIGURE 4.15 – Echantillon de fer ARMCO muni de fils conducteurs

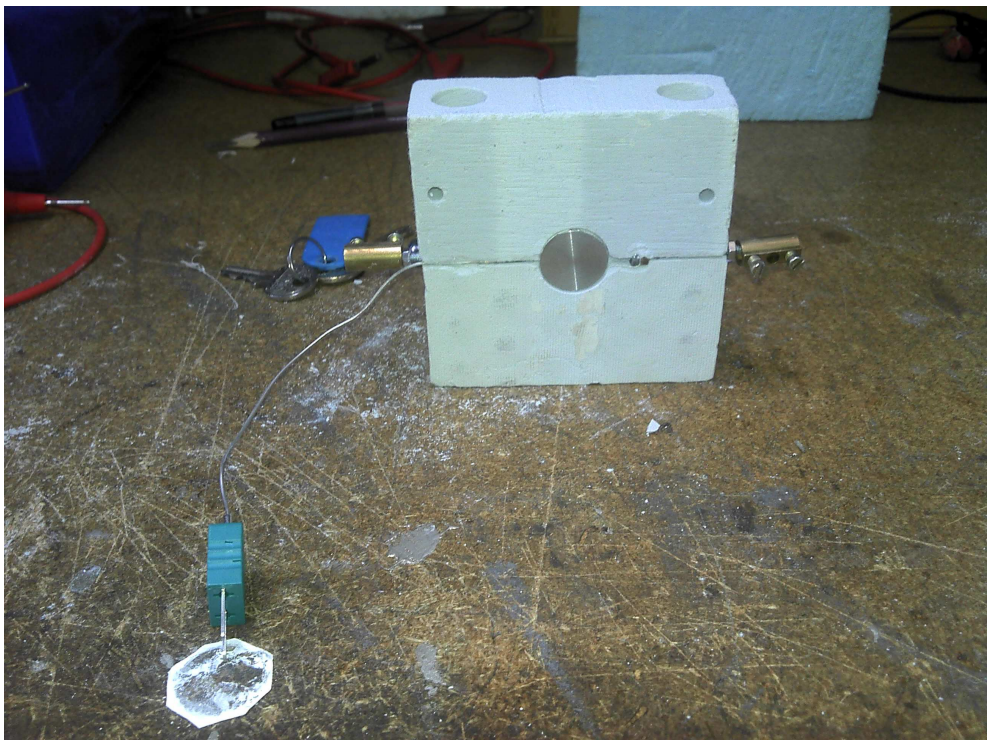


FIGURE 4.16 – Echantillon de fer ARMCO isolé thermiquement

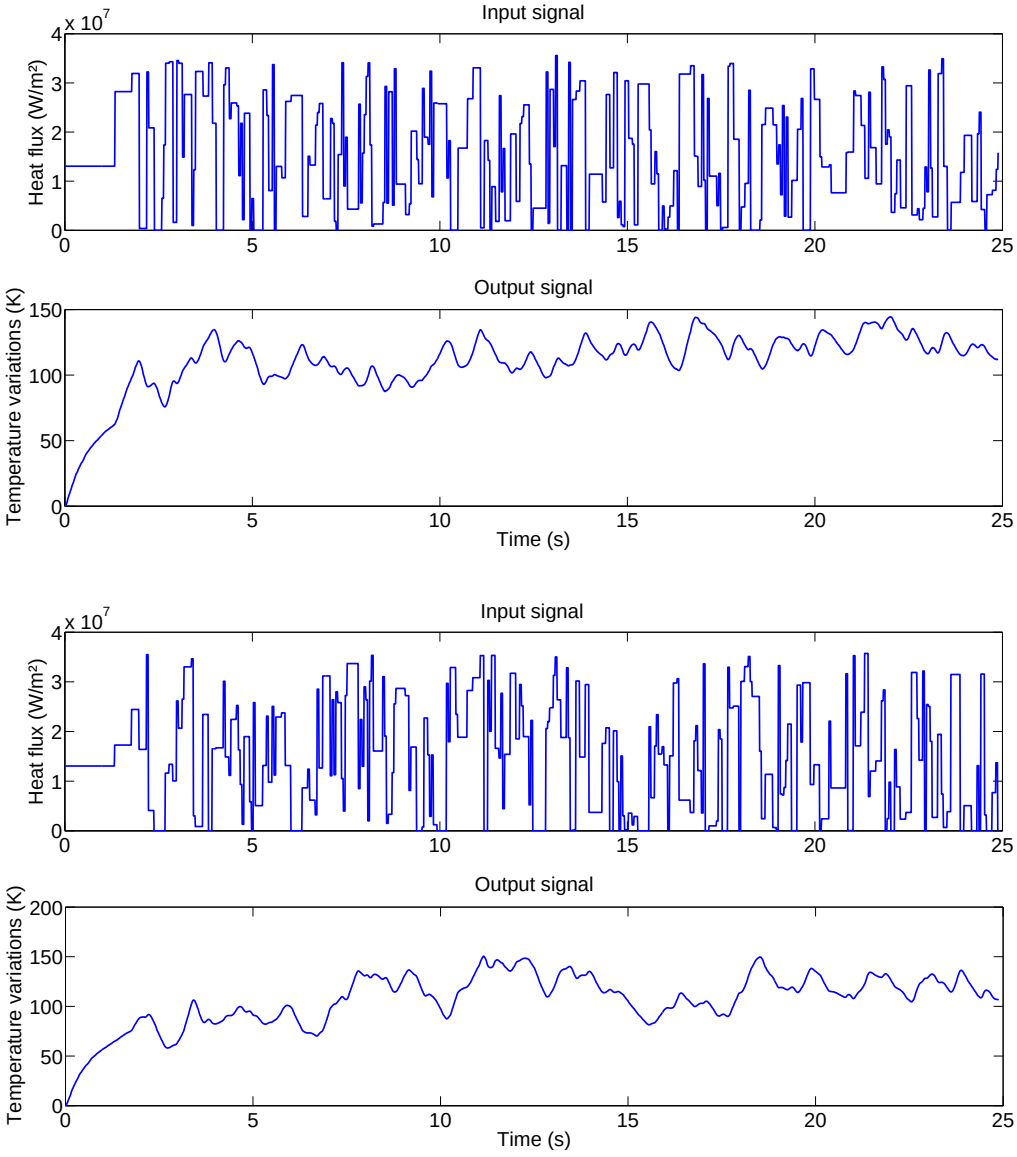


FIGURE 4.17 – Données d'identification et de validation, la température initiale de 940K ayant été soustraite

Tableau 4.4 – Critères d'identification et de validation pour un modèle linéaire en fonction du nombre de fonctions génératrices

M	1	2	3	4
J_{id}	5.06	4.49	0.03	0.02
J_{val}	5.68	5.03	0.07	0.06

Tableau 4.5 – Estimation des paramètres su modèle de Volterra, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

θ	c_1	c_2	c_3	
Estimation	-1.13×10^{-5}	16.92×10^{-5}	-1.49×10^{-5}	
écart-type	0.31×10^{-5}	3.05×10^{-5}	1.19×10^{-5}	
θ	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$	
Estimation	2.94×10^{-8}	2.42×10^{-8}	6.76×10^{-8}	
écart-type	0.92×10^{-8}	2.07×10^{-8}	2.73×10^{-8}	
θ	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$	$c_{3,3}$	
Estimation	-21.73×10^{-8}	9.83×10^{-8}	8.93×10^{-8}	
écart-type	8.16×10^{-8}	6.24×10^{-8}	3.28×10^{-8}	
θ	$\mathfrak{Re}(\lambda_1)$	$\mathfrak{Im}(\lambda_1)$	λ_3	ν
Estimation	0.11	-1.41	15.10	0.49
écart-type	0.08	0.01	2.89	0.02

Ce modèle contenant un intégrateur pur d'ordre 0.5, le signal d'entrée est préalablement intégré :

$$\widetilde{U}(s) = \frac{U(s)}{s^{0.5}} \tag{4.61}$$

et l'identification du système est effectuée entre l'entrée intégrée et la sortie. Pour chaque ordre de troncation M de (4.11), les coefficients du modèle linéaire sont estimés et la norme deux de l'erreur de sortie évaluée sur les données d'identification (4.40) et de validation (4.56) est reportée au tableau 4.4. Cela permet de tronquer (4.11) à $M = 3$, valeur pour laquelle l'évolution de J_{id} et J_{val} n'est pas significative, et d'initialiser μ dans (4.36) pour l'identification non linéaire à :

$$\mu_0 = [\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \nu] = [-0.15 - 1.39i; -0.15 + 1.39i; 17.35; 0.5]^T. \tag{4.62}$$

Le nombre de noyaux de Volterra est fixé à $N = 2$. Le vecteur θ de (4.30) converge après optimisation vers les valeurs du tableau 4.5.

Les sorties du système réel et du modèle de Volterra calculées à partir des données de validation sont tracées sur la figure 4.18. De plus, la sortie de chaque noyau est représentée de manière à mettre en évidence la contribution de la partie linéaire et de la partie non

Tableau 4.6 – Critères de vraissemblance calculés sur les données d'identification et de validation

Modèle	Linéaire	Volterra second ordre
R_{T_id}	90.9%	95.4%
J_{T_val}	88.8%	93.0%

linéaire du modèle. La sortie du modèle linéaire est également tracée dans un but de comparaison. La sortie du modèle de Volterra est plus proche de la sortie du système réel comparée à celle du modèle linéaire, résultat confirmé par les écarts entre les données et les sorties des modèles tracées sur la figure 4.19. Les critères de vraissemblances calculés sur les données d'identification et de validation sont donnés au tableau 4.6. Le modèle de Volterra permet d'obtenir des résultats plus précis puisqu'en identification le critère de ressemblance augmente de 90.9% pour le modèle linéaire à 95.4% pour le modèle de Volterra. En validation, le critère de ressemblance augmente de 88.8% pour le modèle linéaire à 93% pour le modèle de Volterra. En effet, le modèle linéaire est limité car il ne permet pas de prendre en compte les non-linéarités qui sont mieux capturées par le modèle de Volterra d'ordre 2.

4.6 Comparaison des modèles obtenus avec les données expérimentales

Le modèle par éléments finis est comparé au système du banc expérimental. Le signal d'excitation des données de validation de la figure 4.17 est appliqué aux modèles par éléments finis et de Volterra. Les sorties de ces modèles sont comparées à celle du banc expérimental sur la figure 4.20 et les différences entre les sorties des modèles et celle du système sont tracées sur la figure 4.21. On peut alors constater que la sortie du modèle de Volterra est plus proche de la sortie du système comparée à la sortie du modèle par éléments finis pour les raisons suivantes.

– Le point de mesure est positionné sur l'axe de symétrie de l'échantillon, à 2mm de la surface excitée dans le modèle par éléments finis. Cependant, sur le banc expérimental, la position du thermocouple reste incertaine en raison de l'imprécision du perçage et du montage.

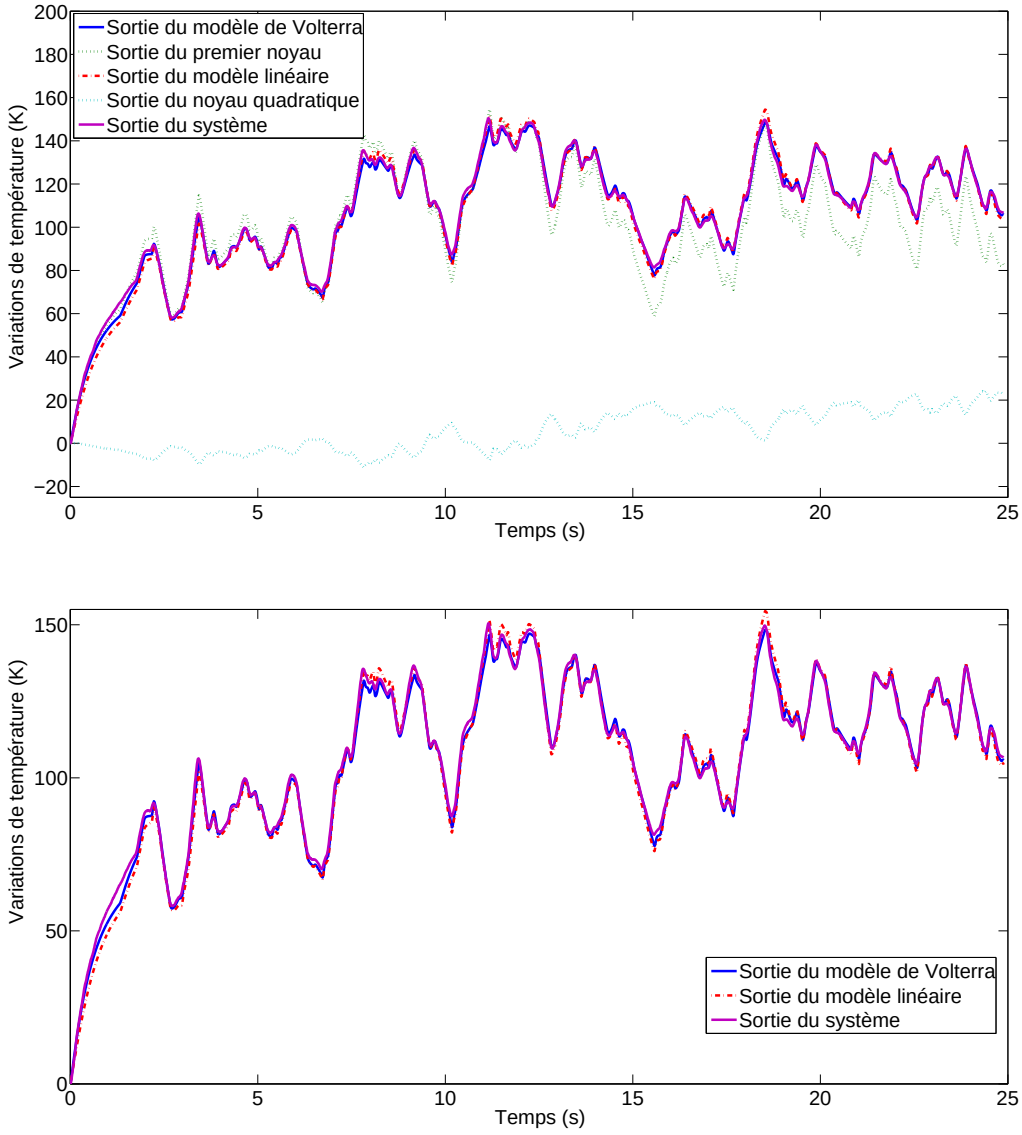


FIGURE 4.18 – Comparaison entre la sortie du système, celle du modèle linéaire et celle du modèle de Volterra avec les contributions des deux premiers noyaux sur les données de validation, la température initiale de 940K ayant été soustraite

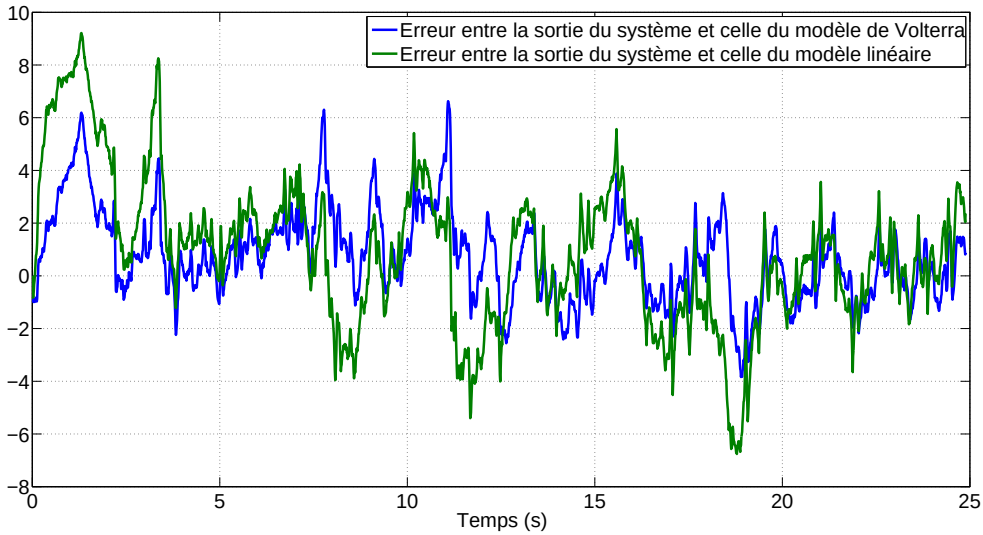


FIGURE 4.19 – Erreurs résiduelles entre la sortie du système et celles des modèles.

- L'interface entre l'échantillon et le thermocouple est considérée comme idéale. Cependant, sur le banc expérimental, le thermocouple est collé à l'échantillon pouvant engendrer un espace et de l'air entre les composants. Les caractéristiques de l'air ou de la colle ne sont pas prises en compte dans le modèle par éléments finis.
- L'émissivité[1] du fer ARMCO est fixée à 0.6 dans le modèle par éléments finis. Cependant, sur le banc expérimental, l'émissivité du fer dépend de différents paramètres comme l'oxydation ou le polissage de l'échantillon et est comprise entre 0.5 et 0.9.
- La conductivité et la capacité thermiques du thermocouple sont fixées à leur valeur à température ambiante dans le modèle par éléments finis. Cependant, sur le banc expérimental, les caractéristiques thermiques du thermocouple sont inconnues pour la plage de température $[940, 1140]$K considérée.
- Les limites externes de l'échantillon de fer sont supposées isolées et fixées à 940K. Cependant, sur le banc expérimental, la température initiale est atteinte grâce à un fil conducteur enroulé autour de l'échantillon, injectant un flux en permanence et pouvant provoquer une augmentation de la température pendant l'expérience.

En conséquence, contrairement au modèle par éléments finis qui nécessite plusieurs mesures et expériences afin de déterminer les propriétés thermiques du matériau en fonc-

[1] L'émissivité est le rapport entre le flux d'énergie émis par un corps quelconque et le flux d'énergie émis par un corps noir de forme et de température identiques.

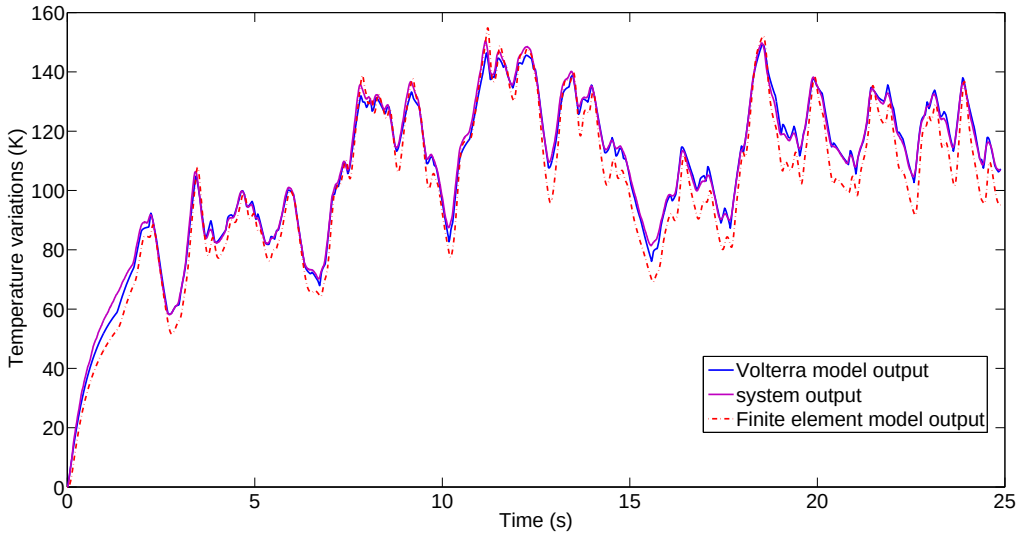


FIGURE 4.20 – Comparaison entre la sortie du banc expérimental, celle du modèle de Volterra et celle du modèle par éléments finis sur les données de validation

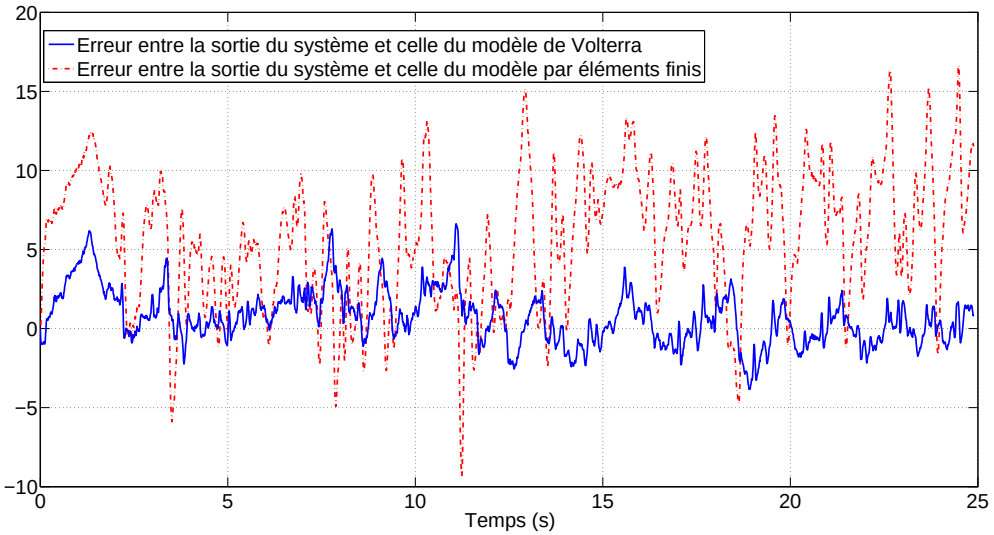


FIGURE 4.21 – Erreurs résiduelles entre la sortie du banc expérimental et celles des modèles

tion de la température et qui nécessite la connaissance exacte de la position des différents éléments composants le système, *l'identification permet, à partir d'une expérience et de peu de mesures, d'obtenir un modèle proche du système réel. D'autre part, le modèle par séries de Volterra non entières permet d'obtenir un modèle plus précis qu'un simple modèle linéaire non entier*, car il tient compte des non-linéarités apportées pour de grandes variations de température.

4.7 Conclusion

Ce chapitre présente une démarche utilisant les séries de Volterra pour une identification de type boîte noire. D'abord un état de l'art est exposé sur les séries de Volterra à dérivées non entières où les différentes techniques de choix des noyaux de Volterra sont présentées. Ensuite une extension des séries de Volterra aux dérivées non entières a été proposée. Basé sur les travaux antérieurs de l'équipe CRONE sur la modélisation par fonctions orthogonales, notre choix s'est porté sur une combinaison de fonctions orthogonales pour représenter les noyaux de Volterra à dérivées non entières. Nos travaux ont ainsi permis de proposer la nouvelle classe de modèles non linéaires à base de séries de Volterra non entières. Cette classe de modèles a été utilisée avec succès pour l'identification du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO à de grandes variations de température. L'apport des séries de Volterra est beaucoup plus visible sur les simulations par éléments finis, car la variation de la température obtenue est plus importante en simulation (environ 700 K) comparée à l'expérience réelle (environ 200K). Les séries de Volterra permettent de discriminer l'apport du modèle linéaire (noyau de Volterra d'ordre 1) de l'apport du modèle non linéaire (ici noyau de Volterra d'ordre 2). De plus, *l'identification d'un modèle par les série de Volterra conduit à un modèle approprié en ne mettant en place qu'une seule expérience* tandis que la modélisation par éléments finis conduit à un modèle moins précis alors qu'il a nécessité plus d'expériences et de mesures afin d'obtenir les caractéristiques thermiques en fonction de la température.

Ce travail a donné lieu a une communication (Maachou *et al.*, 2010*c*) et une publication dans le Journal Européen des Systèmes Automatisés (Maachou *et al.*, 2012*a*).

Toutefois, il reste encore des différences avec la sortie exacte mettant en avant deux nouvelles perspectives. L'utilisation d'un noyau de Volterra d'ordre 3 pourrait éventuel-

lement améliorer les résultats. Cependant, dans ce cas le nombre de paramètres est très important (4.34). Il peut alors être envisagé de ne garder que certains termes (les plus pertinents) du développement en séries de Volterra. Deux stratégies sont alors envisagées : la stratégie croissante qui consiste à initialiser le modèle non linéaire au modèle linéaire et à ajouter dans une procédure itérative la combinaison la plus pertinente. Cette étape est réitérée jusqu'à ce que la qualité de l'approximation soit jugée satisfaisante. La stratégie décroissante consiste, quant à elle, à considérer toutes les combinaisons de fonctions puis à supprimer les moins pertinentes.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

L'interpretation et la discussion des principaux résultats obtenus dans ce mémoire font l'objet de la conclusion.

Le **chapitre 1** rappelle tout d'abord les notions mathématiques autour de la dérivation non entière. Les opérateurs non entiers d'intégration puis de dérivation y sont définis ; puis les diverses méthodes de représentation de systèmes non entiers sont rappelées. La stabilité des systèmes commensurables est abordée avant la présentation des méthodes de simulation de systèmes non entiers. Enfin, l'opérateur de dérivation non entière est appliqué dans le contexte du projet qui encadre cette thèse, à savoir la modélisation des phénomènes de diffusion thermique et en particulier la diffusion dans un milieu semi-infini plan.

Le **chapitre 2** est consacré à l'identification par modèle linéaire non entier. Il se décompose en deux parties. La première vise à présenter un état de l'art de l'identification par modèle linéaire non entier. Les méthodes d'identification développées jusqu'à présent peuvent être classifiées en deux catégories selon qu'elles soient basées sur la minimisation de l'erreur de sortie ou de l'erreur d'équation. La seconde partie présente une des contributions de ce mémoire qui consiste à identifier, autour de plusieurs points de fonctionnement, un modèle linéaire non entier du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO, à partir de données générées en simulation par éléments finis. Les résultats de cette modélisation autour de plusieurs points de fonctionnement permettent d'insister sur deux points. D'abord, les modèles identifiés sont différents d'un point de fonctionnement à l'autre. Cela s'explique par la variation des propriétés thermiques du matériau en fonction de la température. Un simple modèle linéaire n'est alors plus suffisant pour modéliser la

diffusion thermique pour de grandes variations de température. Il est alors possible d'utiliser un modèle LPV comme cela à été fait dans le paragraphe 2.3.2. Ensuite, l'identification de la diffusion thermique dans un échantillon de fer ARMCO a nécessité plusieurs expériences au LNE pour obtenir les caractéristiques thermiques ou encore l'identification de plusieurs modèles. Bien que très coûteuses en temps et en argent, ces mesures ne sont pas toujours accessibles d'où la mise en place d'une méthode d'identification de modèles non linéaires basée sur les séries de Volterra permettant d'obtenir un seul modèle et limitant le nombre d'expériences nécessaires.

Le **chapitre 3** est consacré à l'extension des séries de Volterra aux dérivées non entières en présence de connaissances physiques du système. Après un état de l'art des différentes méthodes de calcul analytique des noyaux de Volterra en présence d'une telle connaissance, la principale contribution consiste à calculer les noyaux de Volterra pour la modélisation du transfert température/flux sur un système thermique en milieu semi-infini plan à partir de l'équation de la chaleur pour une variation linéaire de la capacité et de la conductivité thermiques. Cette démarche est validée par la comparaison de la sortie du modèle par éléments finis avec la sortie du modèle de Volterra composée des contributions des trois premiers noyaux. Il apparaît clairement que ces noyaux font intervenir des opérateurs d'ordre 0.5. Enfin, le noyau d'ordre 2 est manipulé afin d'obtenir un noyau intrinsèque simplifié permettant de modéliser à lui seul la contribution non linéaire du système.

Le **chapitre 4** traite de l'utilisation des séries de Volterra pour l'identification des systèmes non linéaires non entiers en absence de connaissances physiques du système. Après un état de l'art des différentes structures existantes pour le choix des noyaux en absence de connaissances physiques, la principale contribution consiste à sélectionner les noyaux de Volterra en se basant sur une combinaison de fonctions génératrices de bases orthogonales non entières. Une nouvelle classe de modèles à base de séries de Volterra non entières est ainsi développée. Cette démarche est validée à partir de l'identification du modèle non linéaire non entier du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO à partir de données générées en simulation puis de données expérimentales. Enfin, le modèle par éléments finis et le modèle de Volterra sont comparés au système expérimental. Il apparaît que l'apport des séries de Volterra est beaucoup plus visible sur les simulations par éléments finis, car la variation de la température obtenue est plus importante en simulation (environ 700 K) comparée à l'expérience réelle (environ 200K).

Les séries de Volterra permettent de discriminer l'apport du modèle linéaire (noyau de Volterra d'ordre 1) de l'apport du modèle non linéaire (ici noyau de Volterra d'ordre 2). De plus, l'identification d'un modèle par les série de Volterra conduit à un modèle approprié en ne mettant en place qu'une seule expérience tandis que la modélisation par éléments finis conduit à un modèle moins précis alors qu'il a nécessité plus d'expériences et de mesures afin d'obtenir les caractéristiques thermiques en fonction de la température.

Perspectives

Quant aux perspectives de recherche, elles s'inscrivent directement dans la continuité des travaux exposés dans ce mémoire.

La première perspective consiste à étudier la forme des noyaux de Volterra, à l'image du paragraphe 3.3, pour des géométries cylindrique et sphérique, en milieux semi-infini et fini, comme cela a été fait dans le cas linéaire dans (Battaglia, 2008; Cois, 2002; Oldham and Spanier, 1972). La deuxième perspective concerne la variation de la conductivité et de la capacité thermiques. Les noyaux de Volterra pourraient être déterminés pour une capacité et une conductivité thermiques dont la dépendance par rapport à la température ne serait pas linéaire, mais polynômiale.

Un autre objectif consiste à améliorer les modèles de Volterra basés sur les fonctions génératrices de bases orthogonales non entières. Bien que les modèles de Volterra aient prouvé leur efficacité, ils peuvent encore être améliorés, d'une part en choisissant de manière plus adéquate les noyaux de Volterra et d'autre part en augmentant le nombre de fonctions génératrices M et/ou de noyaux de Volterra N lorsque le système est fortement non linéaire. Cependant, le nombre de coefficients linéaires augmente considérablement avec M et N conformément à la relation (4.34). Par conséquent, une méthode devra être mise en place pour choisir les combinaisons de fonctions les plus pertinentes et éliminer celles qui le sont moins. Deux stratégies sont envisagées : la stratégie croissante qui consiste à initialiser le modèle non linéaire au modèle linéaire et à ajouter dans une procédure itérative la combinaison la plus pertinente. Cette étape est réitérée jusqu'à ce que la qualité de l'approximation soit jugée satisfaisante. La stratégie décroissante consiste, quant à elle, à considérer toutes les combinaisons de fonctions puis à supprimer les combinaisons les moins pertinentes.

Enfin, le dernier objectif concerne la deuxième partie du projet ANR et la résolution

inverse d'un problème en thermique. Cet objectif consiste à mettre en place une méthode d'inversion des modèles non linéaires non entiers. Deux stratégies sont envisagées. La première repose sur l'identification d'un modèle linéaire, à partir du modèle non linéaire, autour d'un point de fonctionnement et d'inverser ces modèles non entiers linéaires en s'appuyant sur les travaux de Battaglia *et al.* (2001). La seconde consiste à étendre la procédure de régularisation de Tikhonov and Arsenin (1977) aux systèmes non linéaires non entiers.

Références bibliographiques

Abel, N.H., L. Sylow and S. Lie (1881). *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*. Grøndahl & Søn.

Adolfsson, K. (2004). Nonlinear fractional order viscoelasticity at large strains. *Nonlinear Dynamics* **38**, 233–246.

Agrawal, O.P. (2004). Application of fractional derivatives in thermal analysis of disk brakes. *Nonlinear Dynamics* **38**, 191–206.

Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transaction on Automatic Control* **19**, 716–723.

Akçay, H. (2008). Synthesis of complete orthonormal fractional basis functions with prescribed poles. *IEEE Transactions on signal processing* **56**(10), 4716 – 4728.

Aoun, M. (2005). Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières. PhD thesis. Université Bordeaux 1. Talence, France.

Aoun, M., R. Malti, F. Levron and A. Oustaloup (2007). Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation. *Automatica* **43**(9), 1640 – 1648.

Bard, D. (2005). Compensation des non linéarités des systèmes haut-parleurs à pavillon. PhD thesis. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Suisse.

Battaglia, J.-L. (2008). *Heat transfer in materials forming processes*. Wiley Chippenham.

Battaglia, J.-L., A. Maachou, R. Malti and P. Melchior (2013). Nonlinear heat diffusion modeling using Volterra series.. *J. of Thermal Science*. In press.

Battaglia, J.-L. and A. Kusiak (2005). Estimation of heat fluxes during high-speed driling. *Int. J. of Adv. Manuf. Technol.* **39**, 750–758.

Battaglia, J.-L., L. Le Lay, J.-C. Batsale, A. Oustaloup and O. Cois (2000). Heat flux estimation through inverted non integer identification models. *Int. J. of Thermal Science* **39**(3), 374–389.

Battaglia, J.-L., O. Cois, L. Puigsegur and A. Oustaloup (2001). Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **44**(14), 2671–2680.

Benchellal, A., S. Bachir, T. Poinot and J.-C. Trigeassou (2004). Identification of a non-integer model of induction machines. In : *1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*. Bordeaux, France.

Bertrand, N. (2011). Caractérisation électrique, mise en évidence des phénomènes physico-chimiques et modélisation fractionnaire des supercondensateurs à électrodes à base de carbone activé. PhD thesis. Université Bordeaux 1. Talence, France.

Bertrand, N., J. Sabatier, O. Briat and J. Vinassa (2010). Embedded fractional nonlinear supercapacitor model and its parametric estimation method. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **57**(12), 3991 – 4000.

Bibes, G. (2004). Modélisation de procédés de traitements des eaux et reconstruction de grandeurs physico-chimiques. PhD thesis. Université de Poitiers. France.

Billings, S.A and S.Y. Fakhoury (1979). Non linear system identification using Hammerstein model. *Int. Journal Systems Sci.* **10**, 567–578.

Bonnet, Catherine and Jonathan R. Partington (2002). Analysis of fractional delay systems of retarded and neutral type. *Automatica* **38**(7), 1133 – 1138.

Cois, O. (2002). Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique. PhD thesis. Université Bordeaux 1. Talence, France.

Cois, O., A. Oustaloup, E. Battaglia and J.-L. Battaglia (2000). Non integer model from modal decomposition for time domain system identification. In : *12th IFAC Symposium on System Identification, SYSID*. Santa Barbara, USA.

Cois, O., A. Oustaloup, T. Poinot and J.-L. Battaglia (2001). Fractional state variable filter for system identification by fractional model. In : *IEEE 6th European Control Conference (ECC'2001)*. Porto, Portugal.

Crum, L.A. and J.A. Heinen (1974). Simultaneous reduction and expension of multidimensional laplace transform kernels. *SIAM Journal on applied mathematics* **26**(4), 753–771.

Cugnet, M., J. Sabatier, S. Laruelle, S. Grugeon, B. Sahut, A. Oustaloup and J.-M. Tarascon (2010). On lead-acid battery resistance and cranking capability estimation. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **57**(3), 9.9–917.

Doyle, F.J., R.K. Pearson and B.A. Ogunnaike (2002). *Identification and Control Using Volterra Models*. Springer.

Fliess, M. (1981). Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. *Bulletin de la S.M.F* **109**, 3–40.

Gabano, J.-D., T. Poinot and H. Kanoun (2010). Linear parameter-varying fractional modeling of a thermal system. Badajoz, Spain.

Gabano, J.-D., T. Poinot and H. Kanoun (2011). Identification of a thermal system using

continuous linear parameter-varying fractional modelling. *IET control theory and applications* **5**(7), 889–899.

George, D.A. (1959). Continuous non linear systems. *Technical Report*.

Grünwald, A.K. (1867). Ueber begrenzte derivationen und deren anwendung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **12**, 441–480.

Heymans, N. (2004). Fractional calculus description of non-linear viscoelastic behaviour of polymers. *Nonlinear Dynamics* **38**, 221–231.

Hotzel, R. and M. Fliess (1998). On linear systems with a fractional derivation : Introductory theory and examples. *Mathematics and Computers in Simulation* **45**, 385–395.

Houcem, K., J.D. Gabano and T. Poinot (2012). Ultracapacitor identification using continuous LPV fractional modelling. IFAC SYmposium on System IDentification (SYSID), Brussels, Belgique.

Khemane, F. (2011). Estimation fréquentielle par modèle non entier et approche ensembliste - Application à la modélisation de la dynamique du conducteur. PhD thesis. Université Bordeaux 1. Talence, France.

Khemane, F., R. Malti, X. Moreau and J.-L. Mermoz (2010). Identification de la dynamique du conducteur par modèle non entier. partie 2 : retour proprioceptif par approche ensembliste. In : *6ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*.

Lacroix, S.F. (1819). *Traité du clacul différentiel et du calcul intégral*. 2nd ed.. Courcier.

Lamnabhi-Lagarrigue, F. (1994). *Analyse des systèmes non linéaires*. Hermes Science Publications.

Le Lay, L. (1998). Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier. PhD thesis. Université Bordeaux 1. Talence, France.

Lin, J., T. Poinot, J.-C. Trigeassou and P. Coirault (2001). Parameter estimation of fractional systems : application to heat transfer. In : *IEEE, 6th European Control Conference (ECC'2001)*. Porto, Portugal.

Liouville, J. (1832*a*). Mémoire sur le calcul différentielles à indices quelconques. *L'école de polytechnique* **13**, 71–162.

Liouville, J. (1832*b*). Mémoire sur l'intégration de l'équation $(mx^2 + nx + p)\frac{d^2y}{dx^2} + (qx + r)\frac{dy}{dx} + sy = 0$ à l'aide des différentielles à indices quelconques. *L'école de polytechnique* **13**, 163–186.

Ljung, L. (1999). *System identification – Theory for the user*. Prentice-Hall.

Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2010*a*). Identification par modèles non entiers linéaires d'un système thermique à haute température. In : *6ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*.

Nancy, France.

Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2010*b*). Thermal identification using fractional linear models in high temperatures. In : *4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*. Badajoz, Spain.

Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2010*c*). Thermal system identification for large temperature variations using fractional Volterra series. In : *4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*. Badajoz, Spain.

Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2012*a*). Séries de volterra non entières appliquées à l'identification de systèmes thermiques non linéaires. *Journal Européen des Systèmes Automatisés* **46**(6-7), 649–672.

Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2012*b*). Thermal system identification using fractional models for high temperature levels around different operating points. *NonLinear Dynamics* **70**(2), 941–950.

Machado, J. T., V. Kiryakova and F. Mainardi (2011). Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **16**(3), 1140 – 1153.

Maillet, D., J.-C. Batsale, A. Degiovanni and C. Moyne (2000). *Thermal Quadrupoles*. Wiley.

Malti, R., M. Aoun and A. Oustaloup (2004). Synthesis of fractional Kautz-like basis with two periodically repeating complex conjugate modes. In : *1st IEEE International Symposium on Control, Communications and Signal Processing*. Hammamet, Tunisia.

Malti, R., M. Aoun, F. Levron and A. Oustaloup (2005). *Fractional Differentiation and its Applications. Vol. 1 – Mathematical tools, geometrical and physical aspects*. Chap. Unified construction of fractional generalized orthogonal bases, pp. 87–102. U-Books.

Malti, R., X. Moreau and F. Khemane (2008). Resonance of fractional transfer functions of the second kind. In : *3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*. Ankara, Turkey.

Marquardt, D.W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters. *J. Soc. Industr. Appl. Math.* **11**(2), 431–441.

Mathieu, B, A Oustaloup and F. Levron (1995). Transfer function parameter estimation by interpolation in the frequency domain. In : *IEEE, 3rd European Control Conference (EEC'95)*. Rome, Italie.

Matignon, D. (1998). Stability properties for generalized fractional differential systems.

ESAIM proceedings - Systèmes Différentiels Fractionnaires - Modèles, Méthodes et Applications.

Miller, K.S. and B. Ross (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley-Interscience.

Monsion, M. (1976). Identification par analyse de Fourier généralisée des systèmes non linéaires caractérisés par séries de Volterra. Application à un système physiologique. PhD thesis. Université de Bordeaux 1. Talence, France.

Moze, M. (2007). Commande CRONE des systèmes linéaires à paramètres variants. PhD thesis. Université de Bordeaux 1. Talence, France.

Oldham, K.B. and J. Spanier (1970). The remplacement of Fick's laws by a formulation involving semi-differentiation. *Electroanaly. Chem. Interfacial Electrochem* **26**, 331–341.

Oldham, K.B. and J. Spanier (1972). A general solution of the diffusive equation for semi-infinite geometries. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **39**, 655–669.

Oldham, K.B. and J. Spanier (1973). Diffusive transport to planar, cylindrical and spherical electrodes. *Electroanaly. Chem. Interfacial Electrochem.* **41**, 351–358.

Oldham, K.B. and J. Spanier (1974). *The fractionnal calculus - Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press.

Oustaloup, A. (1995). *La dérivation non-entière*. Hermès.

Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press.

Poinot, T. and J.-C. Trigeassou (2004). Identification of fractional systems using an output-error technique. *Nonlinear Dynamics* **38**, 133–154.

Richalet, J. (1991/1998). *Pratique de l'identification*. Hermes.

Rodrigues, S., N. Munichandraiah and A.-K. Shukla (2000). A review of state of charge indication of batteries by means of A.C. impedance measurements. *Journal of Power Sources* **87**, 12–20.

Rugh, W.J. (1981). *Non linear therory : the Volterra/Wiener approach*. Johns Hopkins University Press.

Sabatier, J., M. Aoun, A. Oustaloup, G. Grégoire, F. Ragot and P. Roy (2006). Fractional system identification for lead acid battery sate charge estimation. *Signal Processing* **86**(10), 2645–2657.

Sabatier, J., M. Moze and C. Farges (2008). LMI stability conditions for fractional order systems. *Computers and Mathematics with applications* **55**(5), 1594–1609.

Söderström, T. and P. Stoica (1989). *System identification*. Prentice-Hall international series in systems and control engineering. Prentice Hall.

Sommacal, L. (2007). Synthèse de la fonction d'Havriliak-Negami pour l'identification

temporelle par modèle non entier et modélisation du système musculaire. PhD thesis. Université Bordeaux 1. Talence, France.

Tikhonov, A. N. and V. Y. Arsenin (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*. V. H. Winston & Sons.

Victor, S. (2010). Identification par modèle non entier pour la poursuite robuste de trajectoire par platitude. PhD thesis. Université Bordeaux 1. Talence, France.

Victor, S., R. Malti, H. Garnier and A. Oustaloup (2013). Parameter and differentiation order estimation in fractional models. *Automatica*. (à paraître).

Wahlberg, B. (1991). System identification using Laguerre models. *IEEE Trans. Automatic Conctrol* **36**, 551–562.

Walter, E. and L. Pronzato (1994). *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson.

Young, P.C. (1970). An instrumental variable method for real-time identification of a noisy process. *Automatica* **6**, 271–287.

Young, P.C. (1989). *Control and dynamics systems : Advances in theory and applications*. Chap. Recursive estimation, forecasting and adaptative control, pp. 119–166. Number 30. Academid Press.

Bibliographie de l'auteur

Publications dans des revues internationales

[1] Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2012). Thermal system identification using fractional models for high temperature levels around different operating points. *NonLinear Dynamics* 70(2), 941-950.

[2] Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2012). Séries de Volterra non entières appliquées à l'identification de systèmes thermiques non linéaires. *Journal Européen des Systèmes Automatisés* 46(6-7),649-672.

[3] Battaglia, J.-L., A. Maachou, R. Malti and P. Melchior (2013). Nonlinear heat diffusion modeling using Volterra series. *J. of Thermal science*. In press.

Communications dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture

[1] Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2010). Identification par modèles non entiers linéaires d'un système thermique à haute température. *6ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*. Nancy, France.

[2] Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2010). Thermal identification using fractional linear models in high temperatures. *4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*. Badajoz, Spain.

[3] Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2010). Thermal system identification for large temperature variations using fractional

Volterra series. *4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications (FDA)*. Badajoz, Spain.

Communications dans des congrès nationaux avec actes et comité de lecture

[1] Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2011). Identification de systèmes thermiques soumis à de larges variations de température par des modèles utilisant les séries de Volterra non entières. *Journées Identification et Modélisation Expérimentale (JIME)*. Douai, France.

[2] Maachou, A., R. Malti, P. Melchior, J.-L. Battaglia, A. Oustaloup and B. Hay (2012). Application des séries de Volterra non entière à l'identification de systèmes thermiques en conditions extrêmes. *Congrès annuel de la Société Française de Thermique, Thermique en Conditions extrêmes (SFT)*. Bordeaux, France.

Résumé

L'objectif de cette thèse est de poursuivre les travaux entamés en identification de systèmes par modèles non entiers en se focalisant principalement sur les systèmes non entiers non linéaires. Le chapitre 1 rappelle les notions mathématiques autour de la dérivation non entière. Ensuite, l'opérateur de dérivation non entière est appliqué à la diffusion thermique dans un milieu semi-infini plan. Le chapitre 2 est consacré à l'identification par modèle linéaire non entier. Les modèles linéaires obtenus permettent d'une part de confirmer l'existence d'un comportement non linéaire pour de grandes variations de température (400K à 1000K) et, d'autre part, de construire un modèle à paramètres variants. Le chapitre 3 est consacré à l'extension des séries de Volterra aux dérivées non entières en présence de connaissances physiques du système. La principale contribution consiste à calculer les noyaux de Volterra pour la modélisation du transfert température/flux sur un système thermique en milieu semi-infini plan. Le chapitre 4 traite de l'utilisation des séries de Volterra pour l'identification des systèmes non linéaires non entiers en absence de connaissances physiques du système. La principale contribution consiste à sélectionner les noyaux de Volterra en se basant sur une combinaison de fonctions génératrices de bases orthogonales non entières. Cette démarche est ensuite appliquée à l'identification du transfert température/flux dans un échantillon de fer ARMCO.

Mots clés

Identification, Modèle non entier, Modèle non linéaire, Séries de Volterra, Diffusion thermique.

Abstract

The objective of this Ph.D thesis is to continue the work started on systems identification by fractional models focusing on fractional nonlinear systems. The first chapter recalls the mathematical background on fractional calculus. Then, the operator of fractional differentiation is applied to thermal diffusion in a semi-infinite plane medium. The second chapter is devoted to system identification by fractional linear models. The obtained linear models allow on one hand to confirm the existence of a non-linear behavior for large variations of temperature and, on the other hand, to build a linear parameter varying model. The chapter 3 is devoted to the extension of the Volterra series to fractional nonlinear models in the presence of physical knowledge on the system. The main contribution is to compute the Volterra kernels for modeling temperature versus heat flux in a thermal system in a semi-infinite plane medium. The chapter 4 discusses the use of Volterra series in system identification of fractional nonlinear models when no physical knowledge on the system is present. The main contribution is to select the Volterra kernels based on a combination of generating functions of fractional orthogonal bases. This approach is applied to the identification of temperature versus heat flux in an experimental set-up.

Keywords

System identification, Fractional model, Nonlinear model, Volterra series, Thermal diffusion.