

THÈSE

*présentée
pour obtenir le titre de*

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Ecole Doctorale des Sciences Physiques et de l'Ingénieur
Spécialité : Automatique, Productique, Signal et Image, Ingénierie Cognitive

par

Guillaume Zinck

**Reconstruction d'hypersurfaces de champs de normales
sous contraintes**

—

Application à l'analyse stratigraphique des images sismiques

Soutenue le 18 décembre 2012 devant le jury composé de :

Claude PELLET	Professeur des Universités, Université de Bordeaux	Président
Jean-Marc CHASSERY	Directeur de Recherche CNRS, GIPSA-lab	Rapporteur
Xavier DESCOMBES	Directeur de Recherche INRIA, Sophia Antipolis	Rapporteur
Sébastien GUILLON	Ingénieur de Recherche, Total CSTJF Pau	Examineur
Olivier LAVIALLE	Professeur des Universités, IPB-Bordeaux Sciences Agro	Directeur de thèse
Marc DONIAS	Maître de Conférences, IPB-ENSEIRB-MATMECA	Co-directeur de thèse

Préparée à l'Université de Bordeaux 1
Laboratoire d'accueil : Laboratoire IMS
351 avenue de la Libération - 33405 Talence Cedex

« A quoi bon soulever des montagnes quand il est si simple de passer par-dessus ? »

– Boris Vian (1920–1959)

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à mes directeurs de thèse, aux côtés desquels j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler. Olivier Lavialle m'a accordé sa confiance pour la réalisation de cette thèse à fort caractère industriel malgré la grave crise sportive traversée. Marc Donias a su me transmettre (une partie de) l'immense rigueur dont il a fait preuve dans son encadrement au quotidien. La relation franche et sincère que nous avons entretenue pendant plus de trois ans a été une composante essentielle à la réussite de ce travail.

A travers Sébastien Guillon, je remercie le Centre Scientifique et Technique Jean-Féger du groupe Total à Pau, à l'origine de la thématique sismique et financeur de cette thèse. Je remercie également mes rapporteurs Jean-Marc Chassery et Xavier Descombes pour l'intérêt porté à mes travaux et les remarques constructives apportées, ainsi que Claude Pellet d'avoir accepté de présider mon jury.

Je témoigne toute ma gratitude à Jacques tant pour l'indispensable aide technique apportée à ce travail que pour sa patience et sa bonne humeur, même durant les dernières semaines de rédaction. J'exprime particulièrement ma reconnaissance à mes voisins de bureau Nouredine, le « meilleur d'entre nous » Abdou et Lionel, en outre fidèle partenaire de Mōlkky et maître ès Motus, qui ont supporté mon humeur et mon humour quotidiennement. Un grand merci à l'ensemble des doctorants et post-doctorants du laboratoire IMS qui m'ont accompagné durant ma thèse, notamment au sein du groupe Signal et Image : mes compagnons de rédaction Zoé et Vincent C., respectivement éphémère partenaire de rock et conseiller-marathon, nos illustres prédécesseurs Fred et son agenda non officiel des *happy hours* bordelais, Hector et sa verve footballistique, Vincent T., J-B., Cosmin, Asma, Nelly, Vlad, Rémi B. et Damien ainsi que les jeunes padawans Cornelia, Guillaume B. dit « le jardinier », Julien M. dit « le braconnier », Olivier R., Tim, Clément, Vincent P. et Benjamin F. Merci également à l'équipe des membres permanents, spécialement Audrey et ses bons mots ésotériques, mon associé dans la dégustation de bières belges et roumaines Yannick, J-F., Guillaume F., J-P., Christian et Rémi M. J'adresse un remerciement particulier au Pr. Pierre Baylou, relecteur attentif de mon mémoire. Je salue enfin l'ensemble du personnel de l'Institut Polytechnique de Bordeaux que j'ai côtoyé durant mon service d'enseignement, notamment les membres des départements Electronique et Télécommunication de l'ENSEIRB-MATMECA.

Remerciements

Ce travail de thèse n'aurait pu aboutir sans le concours de mes amis, qui ont toujours su répondre présent au moment idoine. Je remercie tout d'abord les anciens Enseirbiens, Emeline, « l'homme parfait » Ludo, Julien, Sébastien, Olivier D., Simon, Sam, Roland, Nico et Jérémie depuis son yacht, auxquels j'associe Louise, Florence, Isabelle et Katia. Mes remerciements vont ensuite aux jeunes ou futurs docteurs Iona, Benjamin M., Inigo, Baudouin, Aurélie et Laetitia pour leur soutien personnel et professionnel sans faille. Merci également à Elsa, Eric, Ivan, Laure, Jérémie, Anne et Mikaël qui m'ont accompagné malgré l'éloignement géographique. Je n'oublie pas de saluer les membres de l'association racingstub.com ainsi que de la Fédération des Supporters du RCS, en particulier son officieuse section « grand-ouest » aujourd'hui orpheline des docteurs Nico et Christophe, qui m'ont permis de continuer à vivre ma passion à distance. J'ai une pensée particulière pour Anaïs et Greg, en souvenir des stades champêtres et des improbables patelins visités ces trois dernières années.

Je remercie également les bénévoles d'AquiDoc, association des jeunes chercheurs d'Aquitaine dont j'ai été membre actif pendant plus de trois ans. Je les félicite pour le travail accompli et leur souhaite une pleine réussite dans leurs projets futurs, nonobstant les difficultés et les mauvaises volontés.

Enfin, j'ai eu la chance d'accomplir ce travail de thèse dans un environnement familial stable. Je remercie sincèrement l'ensemble des membres de ma famille qui m'a encouragé et fait confiance, notamment mes parents et mon frère. Je dédie ce mémoire à mes grands-parents qui ont été des soutiens permanents et n'ont jamais ménagé leurs efforts pour comprendre mes problématiques quotidiennes.

Résumé

Cette thèse traite de la reconstruction d'hypersurfaces au sein de champs de normales en dimension quelconque et trouve des applications dans l'analyse des empreintes digitales (lignes dermiques), des images satellites météorologiques (lieux de turbulence) et astrophysiques (bras de galaxies) ainsi que dans l'analyse stratigraphique des images sismiques (horizons). Les méthodes développées s'appuient sur la minimisation d'une équation aux dérivées partielles non linéaire reliant une hypersurface au pendage déduit d'un champ de normales. Elles prennent en compte des contraintes diverses telles que des points de passages, des frontières, des bornes et des discontinuités.

La contribution principale de la thèse réside dans l'introduction d'un changement d'espace du pendage qui permet de reconstruire aussi bien des hypersurfaces exprimées sous des formes implicites dans les repères de définition des champs de normales que des horizons sismiques de manière rapide et interactive. Deux schémas de reconstruction d'horizons sismiques unidimensionnels présentant une discontinuité d'amplitude et de lieu inconnus sont également proposés.

Mots-clés : Reconstruction d'hypersurfaces, Equation aux dérivées partielles, Equation de Poisson, Changements d'espace, Champ de normales, Analyse stratigraphique, Images sismiques.

Abstract

This thesis deals with the reconstruction of hypersurfaces from a finite-dimensional normal vector field. Application scopes can be found in the analysis of fingerprints (epidermal ridges), meteorological images (eddies and cyclones), astrophysical images (galaxy arms) and in the stratigraphic analysis of seismic images (horizons). The hypersurfaces are obtained by solving a non-linear partial derivative equation relied on the local dip deduced from a normal vector field. Several constraints such as boundaries, bounds, points belonging to the hypersurface or discontinuities can be considered.

The major contribution of this thesis consists in a local dip transformation which allows to reconstruct implicit hypersurfaces as well as seismic horizons by a fast and interactive method. Two schemes dedicated to the reconstruction of discontinuous one-dimensional seismic horizons are also proposed when the discontinuity location and jump are unknown.

Keywords : Hypersurfaces reconstruction, Partial derivative equation, Poisson equation, Local dip transformation, Normal vector field, Stratigraphic analysis, Seismic images.

Table des matières

Introduction	1
1 Reconstruction d’hypersurfaces sous contraintes	5
1.1 Introduction	6
1.2 Hypersurfaces explicites	8
1.2.1 Notion de pendage	8
1.2.2 Equation de définition d’une hypersurface	9
1.2.3 Reconstruction itérative par minimisation sous contraintes	10
1.2.3.1 Contraintes de valeurs	13
1.2.3.1.1 Frontière	16
1.2.3.1.2 Points discrets	16
1.2.3.2 Contraintes de bornes	17
1.2.4 Reconstruction numérique	20
1.2.4.1 Contraintes de valeurs	21
1.2.4.1.1 Frontière	26
1.2.4.1.2 Points discrets	28
1.2.4.2 Contraintes de bornes	32
1.2.5 Prise en compte d’un terme de pondération	32
1.2.6 Exemples dans un espace bidimensionnel	33
1.3 Prise en compte de discontinuités dans un espace bidimensionnel	38
1.3.1 Domaine continu	40
1.3.2 Domaine discret	43
1.3.3 Exemples	47
1.4 Conclusion	49
2 Reconstruction par changement d’espace conjoint	51
2.1 Introduction	52
2.2 Hypersurfaces implicites	52
2.2.1 Equation de définition d’une hypersurface	52
2.2.2 Transformation du pendage	54
2.2.3 Reconstruction numérique	56

Table des matières

2.3	Changements d'espace usuels	56
2.3.1	Translation	57
2.3.2	Rotation	57
2.3.2.1	Bidimensionnelle	57
2.3.2.2	Tridimensionnelle	58
2.3.3	Passage en coordonnées N -sphériques	59
2.3.3.1	Bidimensionnelles	59
2.3.3.2	Tridimensionnelles	60
2.3.4	Passage en coordonnées spirales	60
2.4	Applications dans un espace bidimensionnel	62
2.4.1	Images synthétiques	62
2.4.2	Dactyloscopie	67
2.4.3	Météorologie	72
2.4.3.1	Tourbillons océaniques	72
2.4.3.2	Cyclones	74
2.4.4	Astrophysique	77
2.5	Applications dans un espace tridimensionnel	79
2.6	Conclusion	81
3	Application à l'analyse stratigraphique des images sismiques	83
3.1	Introduction	84
3.2	Reconstruction d'horizons sismiques sous contraintes	86
3.2.1	Points de passage	87
3.2.2	A priori stratigraphiques	88
3.2.3	A priori structuraux	89
3.3	Reconstruction rapide et interactive par parties	92
3.3.1	Subdivision rectangulaire	95
3.3.2	Subdivision quadrangulaire	97
3.3.2.1	Construction du pavage	97
3.3.2.2	Reconstruction rapide sur un pseudo-rectangle	99
3.3.2.3	Application au quadrangle	100
3.3.2.4	Reconstruction de l'horizon complet	101
3.3.3	Exemple	102
3.3.3.1	Cas bidimensionnel	103
3.3.3.2	Cas tridimensionnel	105
3.3.3.2.1	Reconstruction complète	106
3.3.3.2.2	Reconstruction incrémentale	112
3.4	Détection automatique de discontinuités dans un espace bidimensionnel	112
3.4.1	Principe	113
3.4.2	Exemple	115

3.5 Conclusion	117
Conclusion	119
Annexes	125
A Estimation d'un champ de normales	125
B Minimisation sous contraintes d'une fonctionnelle	127
B.1 Absence de contraintes	127
B.2 Contraintes de valeurs	128
B.3 Contraintes de bornes	128
B.4 Dérivée fonctionnelle	128
C Résolution rapide de l'équation de Poisson	131
C.1 Conditions aux limites	133
C.2 Conditions sur la moyenne	135
C.2.1 Point d'application	136
C.2.2 Point précédent ou suivant	138
D Acquisition d'images sismiques	141
E Aplatissement d'images sismiques par l'approche <i>GeoTime</i>	143
E.1 Principe	143
E.2 Approche <i>GeoTime</i>	144
E.3 Exemples	147
Bibliographie	149

Acronymes et notations

EDP	Equation aux Dérivées Partielles
RSB	Rapport Signal sur Bruit
BFGS	Algorithme de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno
$\llbracket a, b \rrbracket$	Intervalle d'entiers entre a et b
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	Ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la classe de régularité sur Ω est au moins égale à k
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}$
$[\cdot]$	Fonction partie entière par excès
$\circ$	Opérateur de composition de fonctions
∇	Opérateur gradient
Δ	Opérateur Laplacien
div	Opérateur divergence
$\langle f \rangle$	Valeur moyenne de la fonction f
TFD	Transformée de Fourier Discrète
TFD^{-1}	Transformée de Fourier Discrète Inverse
$*$	Opérateur de convolution
$\circledast$	Opérateur de convolution circulaire
$\odot$	Opérateur produit terme à terme (de vecteurs ou de matrices)
$\wedge$	Opérateur produit vectoriel
A^{-1}	Inverse de la matrice A
A^T	Transposée de la matrice A

Introduction

Ce mémoire traite d'hypersurfaces orthogonales à un champ de normales d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est-à-dire de surfaces de codimension 1 ou de dimension « juste inférieure ». Notre objectif est la reconstruction d'hypersurfaces sous des contraintes qui peuvent être de valeurs ou de bornes. Les contraintes de valeurs consistent à fixer la valeur d'une hypersurface en un nombre fini de points ou sur la frontière de son domaine de définition tandis que les contraintes de bornes consistent à délimiter le lieu d'évolution d'une hypersurface par deux hypersurfaces connues.

La reconstruction d'hypersurfaces trouve de nombreuses applications dans des espaces de dimension 2 et 3. Par exemple, les lignes dermiques sont les hypersurfaces des images d'empreintes digitales. Leur reconstruction sous des contraintes déduites de points singuliers locaux est à la base de plusieurs méthodes d'extraction des caractéristiques d'une empreinte. Dans le domaine météorologique, les lignes d'isovaleurs d'images satellites de cyclones ou représentant la température à la surface de la mer peuvent être vues comme des hypersurfaces. Leur estimation contribue à la détection du lieu et au suivi au cours du temps de turbulences telles que les tourbillons. En astrophysique, l'évolution temporelle des galaxies peut être étudiée par la reconstruction d'hypersurfaces décrivant le lieu des bras galactiques sur des photos satellites. La reconstruction d'horizons sismiques, qui correspondent aux hypersurfaces d'images de dimension 2 ou 3, est en outre une étape essentielle de l'analyse stratigraphique de la Terre, *i.e.* de l'étude de la succession de ses différentes couches géologiques.

Un champ de normales est estimable sur les images précédemment citées par différentes méthodes classiques [Don99]. L'approche retenue dans ce mémoire est fondée sur une estimation du gradient à l'aide de filtres convolutifs suivie d'une « régularisation » par une analyse en composantes principales. Paramétrée par les dimensions des supports d'estimation du gradient et de la régularisation, elle conduit à un champ de normales régulier, lentement variable et généralement faiblement bruité.

Plusieurs méthodes locales et globales de reconstruction d'une hypersurface ont été développées dans la littérature. Les approches locales (suivi par mesure de similarité, « intégration » du champ de normales, etc.) sont naturellement sensibles au bruit et un unique point peut être im-

posé en tant que contrainte. Les approches globales classiques (contours actifs [Kas88], ensembles de niveaux [Osh88], etc.) sont généralement plus robustes au bruit mais présentent plusieurs inconvénients. Par exemple, certaines ne permettent pas la prise en compte de contraintes tandis que d'autres se limitent uniquement au cas de surfaces fermées. Nous nous intéressons dans ce mémoire à une approche globale qui consiste à minimiser sous des contraintes de valeurs ou de bornes une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire reliant une hypersurface au champ de normales [Lom06b] [Lom06c]. Dans le cas de contraintes de valeurs, des méthodes de type *Shape from Shading* [Dur07] dont l'objectif est la reconstruction de reliefs tridimensionnels reposent à première vue sur un lien analogue entre une surface et un champ de normales. Bien qu'elles mettent également en œuvre une équation de Poisson, elles se différencient de notre problématique dans laquelle la surface et le champ de normales sont de dimensionnalité distincte. L'approche considérée dans ce mémoire, robuste au bruit et peu dépendante des paramètres d'estimation du champ de normales, permet de reconstruire une hypersurface continue qui est exprimée sous une forme explicite dans le repère de définition du champ de normales. Dans le cas d'une hypersurface exprimée sous une forme implicite, nous proposons une approche de reconstruction par minimisation d'une EDP fondée sur un changement d'espace de l'hypersurface. Elle suppose l'existence d'un repère dans lequel l'hypersurface est exprimable sous une forme explicite et s'appuie sur la connaissance des équations du changement d'espace entre ce repère et le repère de définition du champ de normales.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre d'une collaboration contractuelle entre le groupe Total et le laboratoire IMS sur le thème de l'analyse des images sismiques.

Ce document s'articule en trois parties.

Le premier chapitre traite des hypersurfaces exprimables sous une forme explicite. Les algorithmes de reconstruction d'hypersurfaces continues sont décrits en détail selon les contraintes considérées dans les domaines continu et discret. Les principales techniques permettant une reconstruction numérique par la méthode des éléments finis sont également introduites. Nous nous intéressons plus particulièrement aux approches rapides de reconstruction sous des contraintes de valeurs. Dans un espace bidimensionnel, une approche développée pour les courbes continues par morceaux est en outre proposée.

Le second chapitre concerne les hypersurfaces exprimables sous une forme implicite. Nous y présentons notre approche de reconstruction par changement d'espace et son application aussi bien à des images synthétiques de dimension 2 et 3 qu'à des images réelles provenant de domaines d'analyse des empreintes digitales, des turbulences météorologiques et des phénomènes astrophysiques.

Le troisième chapitre traite plus particulièrement de l'application des approches de recons-

truction d'hypersurfaces explicites aux horizons des images sismiques. En présence de contraintes définies par plusieurs points, notre contribution comprend une approche locale qui permet de reconstruire un horizon par parties de manière rapide et interactive et qui se substitue à une reconstruction globale coûteuse en temps de calcul. Fondée sur un pavage efficace du domaine de reconstruction, la méthode met en œuvre un changement de support considéré comme un cas particulier d'un changement d'espace introduit au chapitre précédent. Nous nous intéressons également à la reconstruction d'horizons unidimensionnels segmentés en deux parties par une discontinuité quasi-verticale dans les cas où l'amplitude et le lieu de la discontinuité sont inconnus.

Cinq annexes sont présentées à la fin de ce mémoire. La première annexe présente la technique classique d'estimation d'un champ de normales retenue dans ce travail. La deuxième annexe introduit des résultats théoriques sur la minimisation d'une EDP non linéaire. La troisième annexe décrit les approches rapides de résolution d'une équation de Poisson en dimension 1, qui nous intéressent particulièrement dans le troisième chapitre. Les deux dernières annexes sont dédiées aux images sismiques. Elles présentent respectivement une méthode classique d'acquisition d'images et l'approche *GeoTime* développée au sein du laboratoire IMS qui consiste en l'aplanissement d'une donnée sismique par changement d'espace afin d'en favoriser la segmentation.

Chapitre 1

Reconstruction d'hypersurfaces sous contraintes

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Hypersurfaces explicites	8
1.2.1	Notion de pendage	8
1.2.2	Equation de définition d'une hypersurface	9
1.2.3	Reconstruction itérative par minimisation sous contraintes	10
1.2.3.1	Contraintes de valeurs	13
1.2.3.2	Contraintes de bornes	17
1.2.4	Reconstruction numérique	20
1.2.4.1	Contraintes de valeurs	21
1.2.4.2	Contraintes de bornes	32
1.2.5	Prise en compte d'un terme de pondération	32
1.2.6	Exemples dans un espace bidimensionnel	33
1.3	Prise en compte de discontinuités dans un espace bidimensionnel	38
1.3.1	Domaine continu	40
1.3.2	Domaine discret	43
1.3.3	Exemples	47
1.4	Conclusion	49

1.1 Introduction

La reconstruction d'hypersurfaces d'un espace vectoriel de dimension finie sous contraintes a fait l'objet de nombreux travaux ces trente dernières années. Les méthodes développées dans la littérature se classent en deux catégories : les méthodes locales (suivi par mesure de similarité, « intégration » d'un champ d'orientation, etc.) et les méthodes globales (contours actifs, ensembles de niveaux, minimisation d'une équation aux dérivées partielles, etc.). Les approches locales sont les plus intuitives et les plus simples à implémenter mais elles sont naturellement sensibles au bruit. Elles consistent à reconstruire l'hypersurface point par point à partir d'un point initial. Les approches globales conduisent à une reconstruction *via* une optimisation globale, par essence plus robuste au bruit que les approches locales. Elles permettent de prendre en compte plusieurs types de contraintes ainsi que d'éventuelles discontinuités.

La reconstruction par mesure de similarité (ou de corrélation) est la plus basique : considérant une hypersurface comme un isocontour d'intensité d'une image, elle est fondée sur un critère de similarité entre le voisinage des points candidats [Don99]. L'hypersurface obtenue est souvent fidèle à l'isocontour attendu mais est très bruitée dans les zones localement inhomogènes. La reconstruction par « intégration » d'un champ d'orientation nécessite la connaissance d'un champ de normales par définition orthogonal en tout point à l'hypersurface. Dans le cas bidimensionnel, une hypersurface unique est ainsi calculée en « intégrant » selon les vecteurs tangents obtenus à partir des vecteurs normaux, à l'aide d'intégrateurs d'Euler ou de Runge-Kutta [Sta95] [Lai05]. En dimension N supérieure, une infinité d'hypersurfaces peuvent être engendrées en « intégrant » dans les $N-1$ directions possibles [Hul92]. En pratique, l'hypersurface reconstruite dérive progressivement, plus ou moins rapidement selon la qualité de l'estimation du champ de normales, et s'éloigne inéluctablement de l'hypersurface initialement suivie par l'accumulation des erreurs successives.

Les contours actifs, aussi appelés *snakes*, sont des approches dites « contours ». Ils consistent en un suivi explicite de l'hypersurface (ouverte ou fermée), représentée par un ensemble de points discrets. Ils ont été introduits en dimension 2 par Kass *et al.* en 1988 [Kas88] puis développés et étendus à des dimensions supérieures dans les années quatre-vingt dix [Coh93] [Cas97]. A partir d'une position initiale, un ensemble de points évolue vers l'hypersurface jusqu'à en épouser le contour. L'évolution résulte de l'action de trois types de contraintes. Les contraintes « propres » sont des contraintes de régularité traduisant les paramètres locaux le long du contour (forme, élasticité, courbure, normale, etc.). Les contraintes « potentielles » sont des contraintes d'attaches aux données mettant en jeu des informations sur le gradient et l'intensité de l'hypersurface. Enfin, les contraintes « externes » sont des contraintes spécifiques introduites par l'utilisateur. Elles permettent par exemple d'imposer la distance minimale entre deux points consécutifs ou encore la position des deux points extrémaux de la reconstruction [Fua96]. En pratique, il s'agit de minimiser une fonctionnelle appelée « intégrale de contours » qui dépend

des contraintes citées précédemment. Les méthodes de contours actifs présentent l'inconvénient d'une faible robustesse au bruit. L'ensemble initial de points doit également être proche de la solution cherchée pour éviter de converger vers un minimum local de la fonctionnelle, et ce malgré les améliorations proposées par Cohen [Coh91]. De plus, les changements de topologie ne sont pas pris en compte : une unique hypersurface est détectée, et d'éventuelles discontinuités ne peuvent pas être introduites. Les méthodes se révèlent parfois instables numériquement car elles nécessitent le calcul de dérivées jusqu'à l'ordre 4. Enfin, aucun point autre que les extrémités de l'ensemble à reconstruire ne peut être imposé dans les méthodes classiques.

Les ensembles de niveaux sont des approches dites « régions ». Elles reconstruisent uniquement des hypersurfaces fermées par un suivi global implicite. Les caractéristiques globales de la région comprise à l'intérieur de l'hypersurface sont prises en compte en plus de paramètres locaux le long du contour. Formalisées par Osher et Sethian en 1988 [Osh88], plusieurs variantes ont été développées par la suite [Sus94] [Enr02]. Dans un espace de dimension N , un ensemble de niveaux est un contour actif de dimension $N-1$ correspondant à l'isovaleur nulle d'une fonction appelée « *level set* ». A partir d'une position initiale, l'hypersurface est déterminée au cours du temps par la localisation de l'ensemble pour lequel la fonction « *level set* » s'annule. Le caractère global des méthodes basées sur les ensembles de niveaux leur confère une meilleure robustesse au bruit que les méthodes de contours actifs. Les changements de topologie sont également gérés, l'hypersurface pouvant se diviser en plusieurs parties ou bien fusionner. La stabilité numérique est de plus assurée. Les méthodes se limitent cependant aux hypersurfaces fermées et nécessitent l'introduction d'une dimension supplémentaire qui complexifie l'implémentation et requiert une taille mémoire importante.

L'approche globale proposée par Lomask *et al.* [Lom06b] [Lom06c] nous intéresse plus particulièrement dans ce chapitre. Elle consiste à minimiser une équation aux dérivées partielles non linéaire reliant une hypersurface au champ de normales. Robuste au bruit, elle permet de reconstruire une hypersurface continue qui est exprimée sous une forme explicite dans le repère de définition du champ de normales. Deux catégories de contraintes peuvent être introduites : les contraintes de valeurs, c'est-à-dire la connaissance de l'hypersurface en un nombre fini de points ou sur la frontière de son domaine de définition, et les contraintes de bornes, lorsque le lieu d'évolution de l'hypersurface est bornée et que ses bornes sont connues.

Ce chapitre se scinde en deux parties. La première partie formalise l'approche de reconstruction d'une hypersurface par minimisation d'une EDP sous contraintes. Les variantes de l'algorithme itératif de reconstruction sont présentées selon les contraintes considérées. Les différentes étapes sont exposées dans les domaines continu et discret. La reconstruction numérique d'une hypersurface par la méthode des éléments finis est également introduite. La deuxième partie présente notre contribution concernant la reconstruction sous contraintes de valeurs de courbes continues par morceaux dans un espace bidimensionnel : les courbes sont ainsi décomposées en

une somme de courbes continue et discontinue.

1.2 Hypersurfaces explicites

Dans cette partie, nous nous intéressons à la reconstruction d'hypersurfaces explicites d'un espace vectoriel E_N de dimension N sur $\mathbb{R}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$ défini par une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ et un centre O . Une hypersurface explicite est représentée (voir figure 1.1) par une fonction explicite f définie sur un domaine compact (*i.e.* fermé borné) Ω de $\mathbb{R}^{N-1}$ par $x_N = f(x)$, où x désigne la variable $(x_1, \dots, x_{N-1})$. La classe de régularité de la fonction f sur Ω est ici considérée au moins égale à 2.

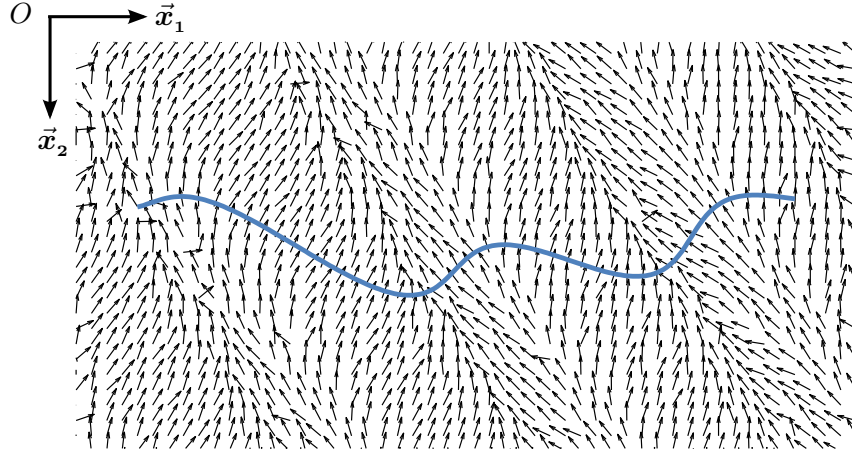


Figure 1.1 – *Hypersurface d'un champ de normales bidimensionnel exprimée sous une forme explicite dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$.*

1.2.1 Notion de pendage

Le terme *pendage* est issu du vocabulaire géologique où il désigne l'orientation locale d'une structure géologique. Ainsi en dimension 2, il représente simplement l'inclinaison de la structure par rapport à l'horizontale. En dimension 3, il regroupe à la fois la direction de plus forte pente de la structure ainsi que son inclinaison par rapport à l'horizontale dans cette direction. Dans ce mémoire, la notion de pendage est étendue au cas d'hypersurfaces explicites dans un espace vectoriel de dimension finie muni d'un repère orthonormé.

Ainsi, pour un point X appartenant à E_N , le pendage exprimé dans le repère $\mathcal{R}$ est un vecteur Θ de dimension $N-1$ dont la i -ième composante Θ_i correspond à l'angle orienté entre le i -ième vecteur $\vec{x}_i$ de $\mathcal{B}$ et l'hyperplan $\mathcal{P}$ tangent à l'hypersurface (voir figure 1.2).

1.2.2 Equation de définition d'une hypersurface

Une hypersurface explicite vérifie une équation aux dérivées partielles non linéaire liant la fonction f à la tangente $\mathbf{p}$ du pendage exprimé dans le repère $\mathcal{R}$ [Lom06c]. En effet, le gradient de la fonction f est égal à la tangente du pendage le long de f :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})), \quad (1.1)$$

où ∇ désigne l'opérateur gradient. La classe de régularité de la fonction vectorielle $\mathbf{p}$ sur Ω est considérée au moins égale à 1. Au point X , les $N-1$ composantes p_i de $\mathbf{p}$ sont reliées au champ de normales par la relation

$$\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad p_i(X) = -\frac{n_i(X)}{n_N(X)}, \quad (1.2)$$

où n_i est la i -ième composante du vecteur normal $\mathbf{n}$ (voir figure 1.2).

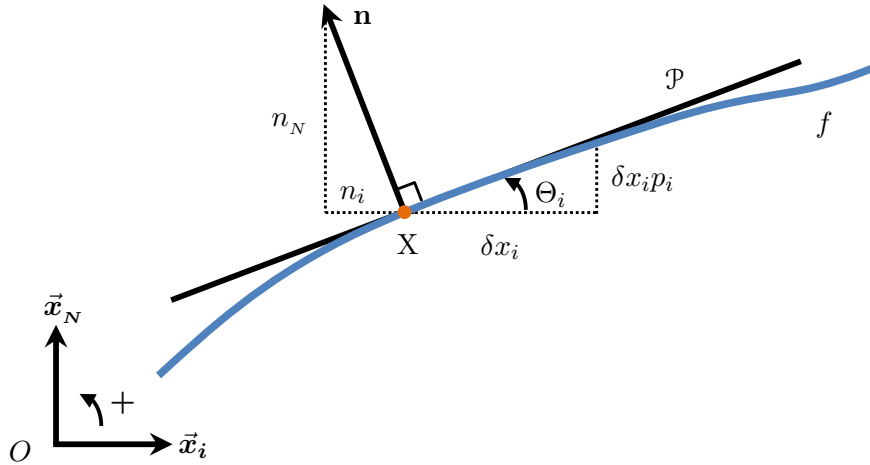


Figure 1.2 – Intersection de l'hypersurface f et du plan $(\vec{x}_i, \vec{x}_N)$: représentation de la i -ième composante Θ_i du pendage. Au point $X = (x, f(x))$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{n_i}{n_N}$.

Démonstration. Au point $X = (x, f(x))$, considérons un déplacement infinitésimal positif δx tel que le point $(x + \delta x, f(x + \delta x))$ appartienne à l'hyperplan tangent $\mathcal{P}$. En désignant par δx_i le déplacement le long du vecteur $\vec{x}_i$ (voir figure 1.2), la i -ième composante du gradient de la fonction f au point x s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{f(x + \delta x_i \vec{x}_i) - f(x)}{\delta x_i}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\delta x_i p_i(\mathbf{X})}{\delta x_i} \\
 &= \tan \Theta_i(\mathbf{X}) \\
 &= -\frac{n_i(\mathbf{X})}{n_N(\mathbf{X})}.
 \end{aligned}$$

□

1.2.3 Reconstruction itérative par minimisation sous contraintes

La reconstruction d'une hypersurface s'obtient en minimisant sous contraintes l'erreur quadratique moyenne sur Ω entre le gradient de la fonction f et la tangente du pendage. La fonction f vérifie le problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$f = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2(\Omega)} \mathcal{J}[g] \text{ sous la contrainte } f \in I, \quad (1.3)$$

où $\mathcal{C}^2(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la classe de régularité sur Ω est au moins égale à 2. La fonctionnelle $\mathcal{J}$ est définie par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} : \mathcal{C}^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 g &\longmapsto \int_{\Omega} \|\nabla g(\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\|^2 d\mathbf{x},
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

en désignant par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Sa classe de régularité sur $\mathcal{C}^2(\Omega)$ est au moins égale à 1. Dans la littérature, la fonctionnelle $\mathcal{J}$ est couramment appelée *fonction objectif* ou *critère*. L'ensemble I est un sous-ensemble de $\mathcal{C}^2(\Omega)$ appelé *ensemble des contraintes* qui permet d'imposer des contraintes à l'hypersurface sur un sous-domaine Ω_I de Ω . Les contraintes peuvent être classées en deux catégories :

- Contraintes de valeurs qui se subdivisent en deux types.
 - Frontière : la valeur de la fonction f est fixée sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine (voir figure 1.3a) ; l'ensemble I s'écrit

$$I = \{g \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad g(\mathbf{x}) \text{ fixé}\}. \quad (1.5)$$

- Points discrets : la valeur de la fonction f est fixée en un nombre fini de points appartenant à Ω (voir figure 1.3b) ; en désignant par Ω_P l'ensemble union de ces points,

l'ensemble I s'écrit

$$I = \{g \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid \forall x \in \Omega_p, \quad g(x) \text{ fixé}\}. \quad (1.6)$$

- Contraintes de bornes : la fonction f est bornée et ses bornes sont fixées (voir figures 1.3c et 1.3d) ; l'ensemble I s'écrit

$$I = \{g \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid \forall x \in \Omega, \quad f_{low}(x) \leq g(x) \leq f_{up}(x)\}, \quad (1.7)$$

où f_{low} et f_{up} sont deux fonctions appartenant à $\mathcal{C}^2(\Omega)$. En pratique, l'intérêt des contraintes de bornes est double. D'une part, elles permettent d'imposer exactement le lieu souhaité d'une hypersurface dans une région du domaine Ω . Les fonctions f_{low} et f_{up} sont alors localement égales (voir figure 1.3c). D'autre part, elles permettent de fixer l'hypersurface en un nombre fini de points en plus d'imposer ses limites. Les fonctions f_{low} et f_{up} sont alors ponctuellement égales (voir figure 1.3d).

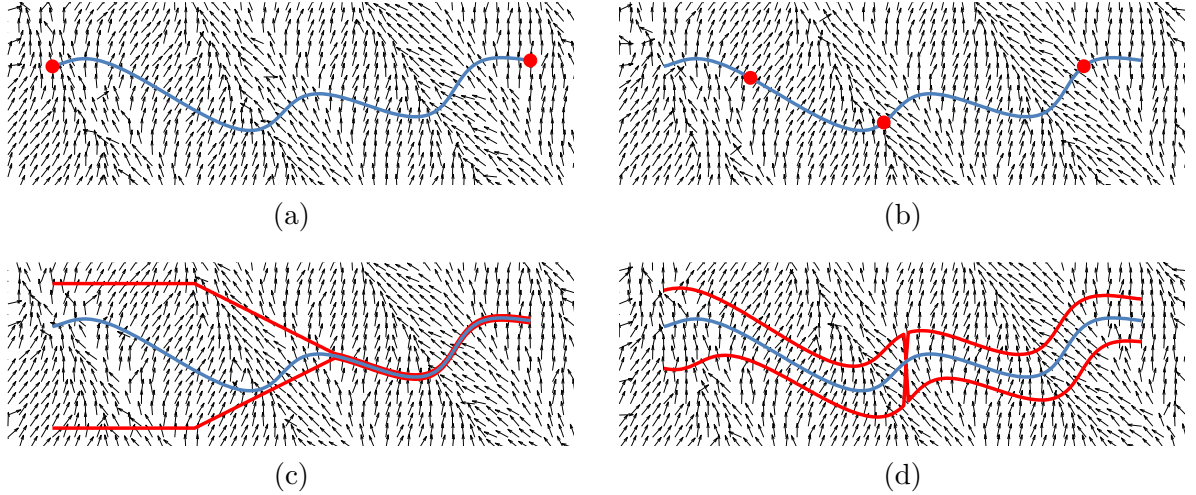


Figure 1.3 – Hypersurface d'un champ de normales bidimensionnel sous contraintes (en rouge) : (a) frontière ; (b) 3 points ; (c) bornes fixant l'hypersurface sur sa partie droite ; (d) bornes fixant l'hypersurface en un point.

Le problème (1.3) admet au moins une solution globale au sens des moindres carrés sur les trois ensembles I présentés ci-dessus en raison de leur compacité [Gil00] [Bre05]. La méthode de résolution diffère selon la catégorie de contraintes imposées à l'hypersurface. En l'absence de contraintes, toute fonction f minimisant le critère (1.4) vérifie (voir annexe B) l'équation

d'Euler-Lagrange [Gel64] [Aze97] [Gou03] :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f](\mathbf{x}) = 0. \quad (1.8)$$

La dérivée fonctionnelle de $\mathcal{J}$ par rapport à la variable f s'exprime par

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(\Omega), \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f] = -\Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{p}(\cdot, f)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial p_i^2}{\partial f}(\cdot, f), \quad (1.9)$$

où Δ et div désignent respectivement l'opérateur Laplacien et l'opérateur divergence en dimension $N-1$:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad (1.10)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}. \quad (1.11)$$

Pour des contraintes de valeurs, toute fonction f solution du problème (1.3) vérifie également l'équation (1.8) si le problème est sous-déterminé ou admet une unique solution. Sinon, elle minimise de manière quadratique la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{J}$ sur Ω . La non-linéarité de cette dérivée, qui se traduit par les deux derniers termes de l'équation (1.9), impose une résolution itérative du problème pour satisfaire les contraintes [Lom06b] [Lom06c].

Pour des contraintes de bornes, l'équation (1.8) n'est plus valable. L'ensemble I étant un sous-ensemble convexe complet non vide de $\mathcal{C}^2(\Omega)$, toute fonction f solution du problème (1.3) vérifie

$$\forall f^* \in I, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f](\mathbf{x})(f^*(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})) \geq 0. \quad (1.12)$$

Une méthode itérative de minimisation du critère (1.4) adaptée aux contraintes de bornes et mettant en jeu la dérivée (1.9), appelée méthode à direction de descente projetée, peut être appliquée pour satisfaire les contraintes [Aze97].

Pour les deux catégories de contraintes proposées, le caractère itératif de l'algorithme de résolution implique une solution tributaire du choix d'initialisation. Cette solution peut ainsi correspondre simplement à un minimum local de $\mathcal{J}$ sur I .

1.2.3.1 Contraintes de valeurs

A partir d'une fonction d'initialisation f_0 , le procédé itératif proposé par Lomask *et al.* [Lom06b] [Lom06c] génère une suite d'itérés f_k de telle sorte que l'itéré d'indice $k + 1$ vérifie sous les contraintes (1.5) ou (1.6) une équation mettant en jeu le pendage le long de l'itéré d'indice k :

$$f_{k+1} = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2(\Omega)} \int_{\Omega} \|\nabla g(x) - \mathbf{p}(x, f_k(x))\|^2 dx. \quad (1.13)$$

L'algorithme d'estimation de f comporte trois phases (voir figure 1.4) : une phase initiale, une phase itérative et une phase finale. La phase itérative se décompose en trois étapes (le calcul d'un résidu, le calcul d'un terme de mise à jour et une mise à jour) et le processus se poursuit tant qu'un critère d'arrêt n'est pas vérifié.

- Phase initiale :

La fonction d'initialisation f_0 peut être choisie dans l'ensemble des contraintes (1.5) ou (1.6) ou être quelconque mais ses valeurs sur le domaine Ω_I concerné par les contraintes ($\partial\Omega$ ou Ω_P) sont supposées « proches » de celles imposées. En pratique, la fonction d'initialisation est généralement une fonction constante, par exemple égale à la valeur moyenne de l'ensemble des valeurs imposées par les contraintes.

- Calcul du résidu :

Le résidu est défini comme la différence entre le gradient de f_k et la tangente du pendage :

$$\forall x \in \Omega, \quad \mathbf{r}_k(x) = \nabla f_k(x) - \mathbf{p}(x, f_k(x)). \quad (1.14)$$

- Calcul du terme de mise à jour :

Le terme de mise à jour δf_k s'obtient par la minimisation linéaire sous contrainte d'une erreur quadratique moyenne sur Ω mettant en jeu l'opposé du résidu. Il vérifie :

$$\delta f_k = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2(\Omega)} \int_{\Omega} \|\nabla g(x) + \mathbf{r}_k(x)\|^2 dx \quad (1.15)$$

sous la contrainte $\delta f_k \in \delta I_k$.

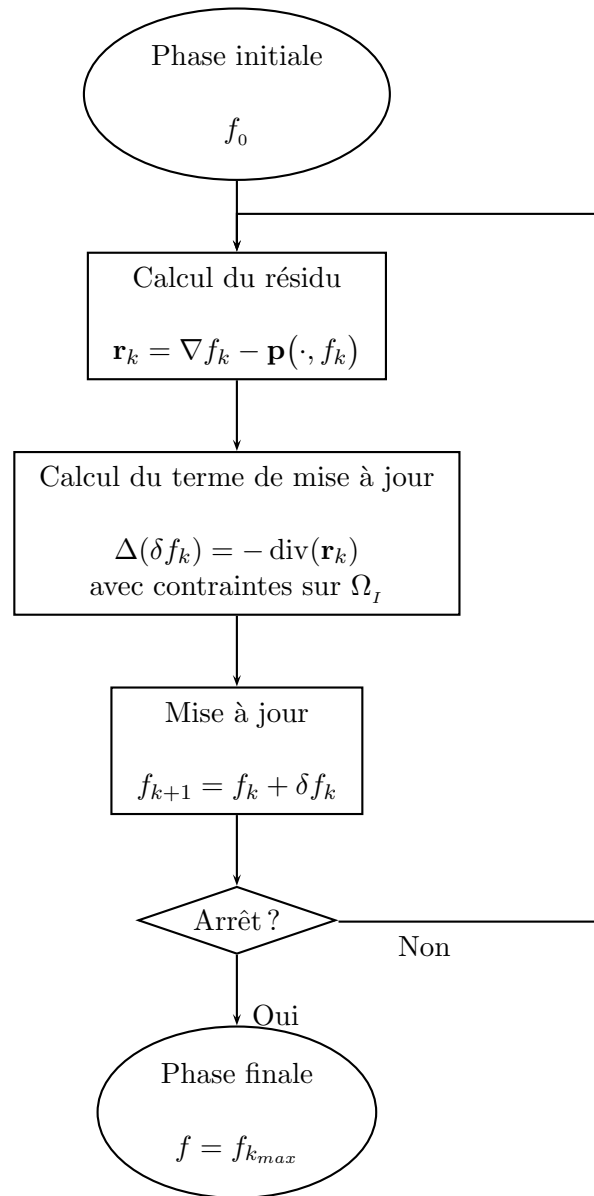


Figure 1.4 – *Reconstruction itérative sous contraintes de valeurs.*

L'ensemble δI_k est un sous-ensemble de $\mathcal{C}^2(\Omega)$ qui dépend des ensembles des contraintes (1.5) ou (1.6) ainsi que de la fonction d'initialisation. Dans le cas où f_0 appartient à l'ensemble des contraintes (1.5) ou (1.6), il impose à chaque itération une mise à jour nulle sur Ω_I . Dans le cas contraire, il permet d'imposer la valeur de f sur Ω_I en un nombre fini d'itérations à définir. Lorsque cette valeur est fixée en une itération, l'ensemble δI_k s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta I_0 &= \{g \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid \forall \mathbf{x} \in \Omega_I, \quad g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x})\} \\ \text{et } \delta I_k &= \{g \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid \forall \mathbf{x} \in \Omega_I, \quad g(\mathbf{x}) = 0\} \quad \forall k > 0.\end{aligned}\tag{1.16}$$

En l'absence de contraintes, toute fonction δf_k solution du problème (1.15) vérifie (voir annexe B) l'équation d'Euler-Lagrange

$$\Delta(\delta f_k) = -\text{div}(\mathbf{r}_k).\tag{1.17}$$

Cette équation aux dérivées partielles linéaire est une *équation de Poisson*. Pour des contraintes de valeurs, elle est associée à des conditions concernant δf_k sur Ω_I . Lorsque la valeur de f sur Ω_I est fixée en une itération, ces conditions s'expriment par :

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} \in \Omega_I, \quad \delta f_0(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) - f_0(\mathbf{x}) \\ \text{et } \delta f_k(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall k > 0.\end{aligned}\tag{1.18}$$

- Mise à jour :

La fonction f_{k+1} est obtenue en sommant f_k et δf_k :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad f_{k+1}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) + \delta f_k(\mathbf{x}).\tag{1.19}$$

- Critères d'arrêt :

Deux critères d'arrêt de l'algorithme sont proposés dans [Lom06c]. Ils considèrent respectivement le résidu et la différence normalisée entre les résidus estimés lors de deux itérations consécutives. Le processus est arrêté respectivement lorsque les quantités $\|\mathbf{r}_k\|$ ou $\left\|\frac{\mathbf{r}_{k-1}-\mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_0}\right\|$ sont strictement

inférieures à une constante positive ϵ à fixer empiriquement. Afin de garantir l'arrêt systématique de l'algorithme, une alternative consiste à imposer un nombre d'itérations k_{max} maximal. Dans ce mémoire, nous imposons systématiquement ce nombre k_{max} .

- Phase finale :

La fonction f est finalement la fonction obtenue à la dernière itération.

1.2.3.1.1 Frontière

Lorsque la valeur de f est fixée sur la frontière du domaine Ω , le problème (1.17)-(1.18) avec $\Omega_I = \partial\Omega$, appelé *problème aux limites*, est un problème inverse « bien posé ». Il admet une solution δf_k unique qui dépend des données de manière continue.

1.2.3.1.2 Points discrets

Lorsque la valeur de f est fixée en un nombre fini de points du domaine Ω , le problème (1.17)-(1.18) avec $\Omega_I = \Omega_P$, appelé *problème « intérieur »*, est un problème inverse « mal posé ». Selon la dimension de Ω et le nombre de points imposés, il admet une infinité de solutions (problème sous-déterminé), une solution unique (problème « bien posé ») ou uniquement une solution au sens des moindres carrés (problème sur-déterminé). Dans le cas d'un problème sous-déterminé, le gradient de la fonction δf_k le long du vecteur normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur du domaine doit être fixé en un certain nombre de points afin de garantir une solution unique.

Prenons l'exemple du cas où Ω est un domaine unidimensionnel. La fonction δf_k est alors définie à deux constantes additives près. Le problème est donc sous-déterminé si un unique point est imposé, bien posé si deux points sont imposés et sur-déterminé si plus de deux points sont imposés.

Cas particulier : point discret unique. Lorsque la valeur de f est fixée en un unique point de coordonnées $(x^P, f(x^P))$, les conditions associées à l'équation de Poisson (1.17) peuvent être modifiées. Au lieu d'une contrainte de valeur sur la fonction δf_k au point x^P , la valeur moyenne de δf_k peut être imposée de manière équivalente de telle sorte que $f_k(x^P) = f(x^P)$ à chaque itération. L'équation (1.18) est alors remplacée par :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 0, \quad < \delta f_k > = \int_{\Omega} \delta f_k(x) dx \text{ fixée} \\ \text{telle que} \quad & f_k(x^P) = f(x^P). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Ce changement de contraintes permet une résolution numérique rapide du problème sur les domaines unidimensionnels et sur certains domaines particuliers en dimension supérieure (voir paragraphe 1.2.4). Il trouve un intérêt pratique lorsque plusieurs points sont concernés par les contraintes : l'algorithme de reconstruction peut alors être initialisé avec une hypersurface obtenue « rapidement » en particulierisant un point.

Remarque : la détermination pratique de la valeur moyenne de δf_k à imposer à chaque itération n'est pas triviale ; une variante possible est donc de la choisir nulle, le respect des contraintes étant alors assuré par une modification de l'équation de mise à jour (1.19) ; la fonction f_{k+1} est obtenue de telle sorte que $f_k(\mathbf{x}^P) = f(\mathbf{x}^P)$ à chaque itération :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad f_{k+1}(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}) + \delta f_k(\mathbf{x}) - [f_k(\mathbf{x}^P) + \delta f_k(\mathbf{x}^P)] + f(\mathbf{x}^P). \quad (1.21)$$

1.2.3.2 Contraintes de bornes

A partir d'une fonction initiale f_0 appartenant à l'ensemble I des contraintes (1.7), le procédé itératif génère une suite d'itérés f_k appartenant à I telle que le critère $\mathcal{J}$ vérifie $\mathcal{J}[f_{k+1}] \leq \mathcal{J}[f_k]$. L'algorithme à direction de descente projetée [Aze97] [Gou03] [Bon06] permettant d'estimer f comporte également trois phases (voir figure 1.5) : une phase initiale, une phase itérative et une phase finale. La phase itérative se décompose en trois étapes (le calcul d'un « pseudo-itéré », la projection de ce dernier sur l'ensemble des contraintes et le calcul de l'itéré suivant) et le processus se poursuit tant qu'un critère d'arrêt n'est pas vérifié.

- Phase initiale :

La fonction d'initialisation f_0 est choisie dans l'ensemble des contraintes (1.7). En pratique, elle est généralement égale à la fonction f_{low} ou f_{up} ou encore à la moyenne de ces deux fonctions.

- Calcul d'un « pseudo-itéré » :

Un « pseudo-itéré » $f'_k = f_k + s'_k d'_k$ est calculé de telle sorte que $\mathcal{J}[f'_k] \leq \mathcal{J}[f_k]$, où d'_k est une direction de descente pour $\mathcal{J}$ et s'_k un pas positif à effectuer dans cette direction.

Les directions de descente mettent en jeu le gradient du critère $\mathcal{J}$, défini par l'équation (1.9). Un choix simple de direction de descente d'_k est la direction dite « de plus forte descente », qui correspond à l'opposé du gradient de $\mathcal{J}$. Néanmoins, la convergence de l'algorithme est alors relativement lente. D'autres possibilités généralement plus rapides sont la direction du gradient conjugué et ses variantes, les directions de Fletcher-Reeves et Polak-Ribière [Fle64] [Pol69]. Si la classe de régularité de $\mathcal{J}$ est au moins égale à deux, des directions prenant en compte une

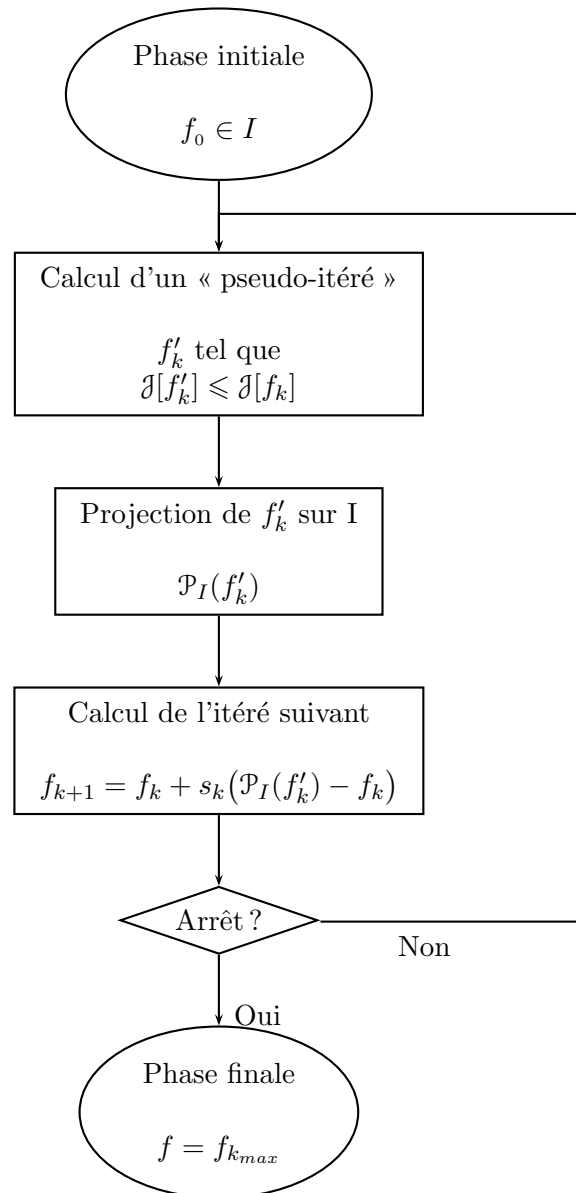


Figure 1.5 – *Reconstruction itérative sous contraintes de bornes.*

information de courbure se révèlent plus performantes. La direction dite « de Newton » dépend ainsi de l'inverse du hessien de $\mathcal{J}$:

$$d'_k = -\frac{\frac{d\mathcal{J}}{df}[f_k]}{\frac{d^2\mathcal{J}}{df^2}[f_k]}. \quad (1.22)$$

En pratique, l'estimation d'une dérivée seconde est coûteuse en calcul. Par conséquent, des méthodes dites « de quasi-Newton » sont fondées sur une approximation plus ou moins précise de l'inverse du hessien [Kel03]. Citons, parmi les algorithmes efficaces, l'algorithme de Davidson-Fletcher-Powell [Fle63] et l'algorithme de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [Bro70] qui ne nécessitent pas une réestimation du hessien à chaque itération.

Le pas s'_k , s'il n'est pas fixé par l'algorithme d'estimation de la direction de descente choisie, peut être déterminé par une méthode de recherche linéaire *via* les critères d'Armijo, de Goldstein ou encore de Wolfe [Noc99].

- Projection du « pseudo-itéré » sur l'ensemble des contraintes :

La détermination du projeté $\mathcal{P}_I(f'_k)$ vérifie le problème d'optimisation :

$$\mathcal{P}_I(f'_k) = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2(\Omega)} \int_{\Omega} \|g(x) - f'_k(x)\|^2 dx \quad (1.23)$$

sous la contrainte $\mathcal{P}_I(f'_k) \in I$.

L'ensemble I étant un sous-ensemble convexe complet non vide de $\mathcal{C}^2(\Omega)$, le théorème de la projection sur un convexe complet assure l'existence et l'unicité de $\mathcal{P}_I(f'_k)$:

$$\mathcal{P}_I(f'_k) = \begin{cases} f_{low} & \text{si } f'_k < f_{low} \\ f'_k & \text{si } f'_k \in I \\ f_{up} & \text{si } f'_k > f_{up} \end{cases}. \quad (1.24)$$

- Calcul de l'itéré suivant :

Le point clé de l'algorithme est le fait que la fonction $d_k = \mathcal{P}_I(f'_k) - f_k$ est une direction de descente pour $\mathcal{J}$ [Aze97]. Un pas s_k est déterminé de telle sorte que $\mathcal{J}[f_k + s_k d_k] \leq \mathcal{J}[f_k]$ puis la fonction $f_k + s_k d_k$ est sélectionnée comme l'itéré suivant.

- Critères d'arrêt :

Un critère d'arrêt possible de l'algorithme considère la différence entre deux itérés consécutifs. Le processus est arrêté lorsque la quantité $\|f_{k+1} - f_k\|$ est strictement inférieure à une constante positive ϵ à fixer empiriquement. Afin de garantir l'arrêt systématique de l'algorithme, un nombre d'itérations k_{max} maximal est généralement imposé. Dans ce mémoire, nous imposons systématiquement ce nombre k_{max} .

- Phase finale :

La fonction f est finalement la fonction obtenue à la dernière itération.

1.2.4 Reconstruction numérique

Dans ce mémoire, le problème (1.3) est résolu numériquement par la méthode des éléments finis [Str08] [Zie09], dans laquelle le domaine Ω est discrétisé par une grille composée de M_Ω points et l'hypersurface reconstruite correspond à une version échantillonnée d'un signal continu. Les méthodes présentées dans ce paragraphe supposent un échantillonnage régulier de la direction associée à chacune des $N-1$ dimensions de Ω . La grille considérée coïncide de plus avec la frontière $\partial\Omega$ en un nombre $M_{\partial\Omega}$ de points et les coordonnées des points imposés par les contraintes de valeurs appartiennent à la grille.

A chaque itération de l'algorithme de reconstruction, les étapes de calcul du résidu (1.14) et de l'estimation de la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{J}$ (1.9) requièrent la détermination de la tangente du pendage le long de l'hypersurface obtenue à l'itération précédente. Les valeurs de l'hypersurface n'étant pas entières, une méthode d'interpolation (par exemple au plus proche voisin, N -linéaire, ou par analyse en composantes principales) est nécessaire afin d'estimer les valeurs utiles du champ de normales à partir d'une donnée discrète.

Dans la méthode des éléments finis, les opérateurs différentiels sont approximés par des différences finies. Les dérivées première et seconde dans une direction donnée sont respectivement estimées à l'aide de trois échantillons consécutifs par les filtres convolutifs discrets suivants :

$$\frac{1}{2h_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

et

$$\frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

où h_i désigne le pas d'échantillonnage dans la direction i . Ces filtres sont appliqués directement aux points intérieurs du domaine mais requièrent un échantillon supplémentaire lorsque le point d'application appartient à la frontière. Pour l'estimation d'une dérivée première, l'échantillon supplémentaire est habituellement choisi égal soit à l'opposé de l'échantillon du point d'application, soit à l'opposé de l'échantillon du point précédent ou suivant. Pour l'estimation d'une dérivée seconde, l'échantillon supplémentaire est habituellement choisi égal soit à l'échantillon du point d'application (voir figure 1.6a), soit à l'échantillon du point précédent ou suivant (voir figure 1.6b).



Figure 1.6 – Estimation d'une dérivée seconde dans une direction donnée sur la frontière du domaine : ajout d'un échantillon (en noir) aux échantillons d'un signal (en orange). (a) Échantillon du point d'application; (b) Échantillon du point précédent et suivant.

Dans la suite du paragraphe, nous passons en revue les méthodes de reconstruction selon les contraintes considérées. En vue des applications présentées dans le troisième chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement à l'efficacité calculatoire des méthodes dans le cas de contraintes de valeurs.

1.2.4.1 Contraintes de valeurs

Dans le cas de contraintes de valeurs, l'efficacité calculatoire de la reconstruction est déterminée par l'estimation du terme de mise à jour. La discrétisation de l'équation de Poisson (1.17) associée à des conditions aux limites ou « intérieures » conduit à la résolution d'un système matriciel

$$A\underline{f} = \underline{b}, \quad (1.27)$$

où A est une matrice de rang r comportant m lignes et n colonnes, $\underline{b}$ est un vecteur de données de taille m et $\underline{f}$ est un vecteur de taille n à déterminer, qui dépendent tous trois de la grille d'échantillonnage et du type de contraintes considérés.

La solution du système (1.27) se note

$$\underline{f} = A^* \underline{b}, \quad (1.28)$$

où A^* désigne une matrice de taille $n \times m$. En pratique, le calcul explicite de A^* est très coûteux. Différentes approches de résolution permettant de l'éviter sont ainsi proposées dans la littérature. Le choix de l'approche est lié à la forme du domaine Ω et à la structure « peu couplée » du système (1.27). En effet, chaque inconnue ne dépend que d'un faible nombre de données : l'opérateur Laplacien étant une somme de dérivées secondes, sa détermination avec le filtre (1.26) nécessite uniquement $2^N + 1$ valeurs sur un domaine de dimension N . Par conséquent, la proportion des coefficients non nuls de la matrice A est faible et elle est dite creuse. Pour certains domaines particuliers, elle présente une structure partitionnée, par exemple tridiagonale par bloc. Les méthodes décrites ci-dessous sont plus ou moins adaptées au caractère creux de A . Néanmoins, leurs performances peuvent être améliorées au niveau de l'espace mémoire occupé, du temps de transfert des données voire du nombre d'opérations effectué puisque seuls les éléments non nuls de la matrice nécessitent d'être stockés [Meu99]. A titre d'exemple, nous pouvons citer les bibliothèques scientifiques BLAS [Duf02] et CSPARSE [Dav06] offrant des implémentations efficaces en langage C et C++.

Pour l'ensemble des domaines, deux types d'approches matricielles peuvent être mis en œuvre : les approches directes et les approches itératives. Les approches directes fournissent, en l'absence d'erreurs d'arrondi, la solution exacte en un nombre fini d'opérations, de l'ordre de r^3 où r est le rang de la matrice A . Au contraire, les approches itératives construisent à partir d'un vecteur initial une suite de vecteurs qui converge vers le vecteur solution. La solution exacte n'est pas atteinte mais le coût calculatoire des approches itératives à chaque itération est de l'ordre de r^2 : une telle approche est ainsi compétitive si elle converge en un nombre d'itérations indépendant de r ou croissant de manière sous-linéaire avec r . Les approches directes faisant appel à une décomposition de la matrice A , elles peuvent être efficaces lors de la mise en œuvre de l'algorithme itératif de reconstruction d'hypersurfaces. En effet, le système matriciel (1.27) est résolu à chaque itération avec la même matrice A : une unique décomposition est donc nécessaire. Cependant, les approches itératives s'avèrent plus rapides pour un faible nombre d'itérations k_{max} dans le cas de données de grande taille.

Pour des domaines unidimensionnels et hyperrectangulaires, qui sont la généralisation de domaines rectangulaires en dimension supérieure, des approches « rapides » se révèlent très efficaces pour des contraintes de type frontière ou point discret unique. Similairement aux méthodes directes, elles fournissent la solution exacte en un nombre fini d'opérations mais leur coût calculatoire est plus faible, de l'ordre de $r \log r$. Ces approches nous intéressent plus particulièrement dans cette thèse.

Enfin, pour des domaines difféomorphes à un hyperrectangle, une étape efficace préalable à la résolution du système (1.27) est l'introduction d'un changement de support transformant le domaine initial en hyperrectangle. L'application d'approches directes et itératives sur le domaine transformé permet de réduire le temps de calcul par rapport à leur application sur le domaine

initial. Les approches rapides ne sont pas utilisables, excepté pour des domaines de la forme d'une hypersphère, qui est la généralisation d'un disque en dimension quelconque, dans le cas de contraintes de type frontière ou point discret unique.

Approches directes. Ces approches sont fondées sur les propriétés des matrices triangulaires [Duf86]. Si le système (1.27) est triangulaire, *i.e.* si A est une matrice triangulaire inversible, les composantes du vecteur $\underline{f}$ se déterminent séquentiellement en partant respectivement de la première composante (méthode de descente) lorsque A est triangulaire inférieure ou de la dernière composante (méthode de remontée) lorsque A est triangulaire supérieure, avec un nombre d'opérations de l'ordre de r . Cette technique de résolution s'étend aux matrices A de rang complet qui sont de la forme

$$\begin{bmatrix} \Lambda \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

lorsque $m > n$ et de la forme

$$\begin{bmatrix} \Lambda & 0 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

lorsque $m < n$, où Λ est une matrice triangulaire inversible de taille $r \times r$ et 0 désigne la matrice nulle complémentaire. De telles matrices sont appelées matrices pseudo-triangulaires dans ce mémoire. Les approches directes consistent donc en deux étapes. L'étape de factorisation transforme tout d'abord le système (1.27) en un système équivalent, c'est-à-dire ayant la même solution, en décomposant la matrice A en produit de matrices unitaires et de matrices triangulaires ou pseudo-triangulaires. Cette étape requiert r^3 opérations. Etant donné que les inverses des matrices unitaires sont leurs transposées, l'étape de résolution résout ensuite ce système *via* la résolution successive de plusieurs systèmes triangulaires.

Approches itératives. Ces approches peuvent être classées en deux catégories : les méthodes stationnaires et les méthodes non-stationnaires [You71] [Saa02].

Les méthodes stationnaires correspondent en général à des méthodes de relaxation. La suite de vecteurs est obtenue par une relation de récurrence de la forme

$$\underline{f}_{l+1} = B\underline{f}_l + \underline{c}, \quad (1.31)$$

où B est une matrice appelée matrice d'itération et $\underline{c}$ est un vecteur lié à A et $\underline{b}$. La matrice B et le vecteur $\underline{c}$ ne dépendent pas de l'indice d'itération. L'itéré suivant est calculé par la résolution d'un système linéaire de faible coût, mettant en jeu une matrice triangulaire ou

pseudo-triangulaire.

Les méthodes non-stationnaires sont principalement des méthodes de direction de descente (aussi appelées méthodes de projection). La suite de vecteurs est obtenue par une relation de récurrence de la forme

$$\underline{f}_{l+1} = \underline{f}_l + s_l \underline{d}_l, \quad (1.32)$$

où le scalaire s_l et le vecteur $\underline{d}_l$ désignent respectivement le pas de descente et la direction de descente à l'itération l . La vitesse de convergence dépend du choix du pas et de la direction de descente à chaque itération. La convergence des méthodes à direction de descente peut être accélérée par un préconditionnement du système (1.27). Ce dernier est remplacé par un système équivalent plus rapide à résoudre. En pratique, les deux termes de l'égalité (1.27) sont multipliés à gauche et/ou à droite par une matrice appelée *préconditionneur* présentant des propriétés particulières. Le choix du préconditionneur est un problème délicat n'ayant pas de solution générale. Le lecteur pourra consulter [Bru95] pour plus de détails.

Les critères d'arrêt d'une approche itérative sont similaires à ceux décrits au paragraphe 1.2.3.1 pour l'algorithme de reconstruction. En notant $\underline{r}_l$ le résidu à l'itération l défini par $A\underline{f}_l - \underline{b}$, le processus est arrêté lorsque les quantités $\|\underline{r}_l\|$ ou $\left\| \frac{\underline{r}_{l-1} - \underline{r}_l}{\underline{r}_0} \right\|$ sont strictement inférieures à une constante positive ϵ à fixer empiriquement. Afin de garantir l'arrêt systématique de l'algorithme, une alternative consiste à imposer un nombre maximal d'itérations.

Dans la plupart des cas, les méthodes non-stationnaires convergent plus rapidement et sont numériquement plus stables. Des algorithmes stationnaires sont parfois mis en œuvre pour un faible nombre d'itérations afin de préconditionner les algorithmes non-stationnaires.

Approches rapides. Ces approches sont fondées sur les propriétés de réversibilité, de périodicité et d'estimation rapide de la transformée de Fourier discrète [Hoc65] [Pol02] [Pin03]. Lorsqu'elles sont applicables, la résolution du système matriciel (1.27) s'opère dans le domaine fréquentiel suite à un agrandissement des signaux et nécessite uniquement le calcul de deux transformées de Fourier discrètes (une transformée directe et une transformée inverse), le coût calculatoire d'une transformée étant de l'ordre de $r \log r$ opérations.

L'agrandissement des signaux consiste à appliquer un miroir discret périodique à l'ensemble ou à une partie des composantes des vecteurs $\underline{f}$ et $\underline{b}$. Les restrictions sur une période des signaux obtenus après application du miroir, respectivement notés $\tilde{\underline{f}}$ et $\tilde{\underline{b}}$, sont alors liées par une convolution circulaire :

$$\tilde{\underline{b}} = \tilde{\underline{f}} \otimes \phi^\Delta, \quad (1.33)$$

où $\otimes$ désigne l'opérateur de convolution circulaire et où ϕ^Δ est un filtre représentant l'opérateur Laplacien discret. Dans le domaine fréquentiel, l'équation (1.33) devient

$$\text{TFD}(\tilde{\underline{b}}) = \text{TFD}(\tilde{\underline{f}}) \odot \text{TFD}(\phi^\Delta), \quad (1.34)$$

où $\odot$ et TFD désignent respectivement le produit terme à terme (de vecteurs ou de matrices) et la transformée de Fourier discrète. La restriction $\tilde{\underline{f}}$ est ainsi déterminée par la relation

$$\tilde{\underline{f}} = \text{TFD}^{-1} [\text{TFD}(\tilde{\underline{b}}) \odot \Phi^\Delta], \quad (1.35)$$

où TFD^{-1} désigne la transformée de Fourier discrète inverse. Le filtre Φ^Δ correspond à l'inverse de l'opérateur Laplacien dans le domaine fréquentiel. Ces approches rapides sont présentées en détail pour un domaine unidimensionnel dans l'annexe C. Une bibliothèque très performante pour le calcul de transformées de Fourier discrètes est la bibliothèque FFTW [Fri98].

Approches par changement de support. Deux domaines sont dit difféomorphes s'il existe une application bijective différentiable appelée difféomorphisme transformant l'un en l'autre. Les domaines difféomorphes à un hyperrectangle de dimension N sont appelés dans ce mémoire *pseudo-rectangles* de dimension N . Par exemple en dimension 2, le disque et l'ensemble des quadrangles non croisés sont des pseudo-rectangles (voir figure 1.7).

Les problèmes aux limites (respectivement « intérieurs ») décrits précédemment sur un domaine pseudo-rectangulaire peuvent être transformés par un difféomorphisme en d'autres problèmes aux limites (respectivement « intérieurs ») sur un domaine hyperrectangulaire [Bel71] [Zho98]. L'équation de Poisson est transformée en une équation aux dérivées partielles différente : l'opérateur Laplacien qui ne prend en compte que les dérivées secondes avec des coefficients unitaires est remplacé par un opérateur différentiel à coefficients variables mettant en jeu les dérivées premières et secondes. Le problème sur un domaine hyperrectangulaire fait donc intervenir un plus grand nombre de termes mais le coût calculatoire de sa résolution est néanmoins réduit en raison de la structure de la matrice A associée qui est une matrice par bloc. Dans le cas d'un domaine hypersphérique, le système peut être résolu par une approche rapide dans le domaine fréquentiel. Décrite par [Swa73] dans le cas d'un disque, cette méthode mettant en jeu des transformées de Fourier se généralise en dimension quelconque. Dans les autres cas, le recours aux approches directes ou itératives est indispensable.

Dans la suite, nous déclinons les approches directes, itératives et rapides aux contraintes de

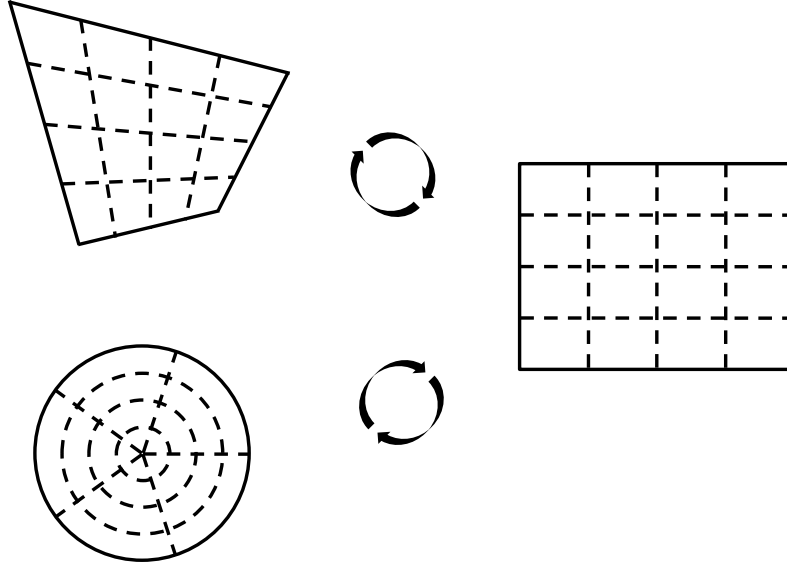


Figure 1.7 – Exemples de domaines pseudo-rectangulaires en dimension 2.

type frontière et points discrets.

1.2.4.1.1 Frontière

Dans le cas de contraintes de type frontière, la matrice A du système (1.27) traduit l'application de l'opérateur Laplacien sur les points d'échantillonnage à l'intérieur du domaine Ω . Il s'agit d'une matrice inversible de taille $n \times n$, où n correspond au nombre de points situés à l'intérieur du domaine, à savoir $M_\Omega - M_{\partial\Omega}$. Le vecteur $\underline{f}$ contient les n inconnues tandis que le vecteur $\underline{b}$ contient le terme de droite de l'équation (1.17) ainsi que les valeurs de δf sur $\partial\Omega$.

Le système (1.27) admet une unique solution, qui se note

$$\underline{f} = A^{-1}\underline{b}, \quad (1.36)$$

où A^{-1} désigne l'inverse de la matrice A .

Approches directes. Lorsque A est inversible, une méthode de factorisation classique est la factorisation LU. La matrice A se décompose sous la forme d'un produit de matrices

$$A = P_1^T L U P_2^T, \quad (1.37)$$

où T désigne l'opérateur de transposition, P_1 et P_2 sont des matrices unitaires dites de permu-

tations, L est une matrice triangulaire inférieure inversible et U est une matrice triangulaire supérieure inversible. La méthode d'élimination de Gauss conduit, par exemple, à cette factorisation par des opérations élémentaires sur les lignes de A déterminées à l'aide d'éléments particuliers de A appelés pivots. Une stratégie appropriée de choix des pivots garantit la stabilité numérique de la méthode. L'étape de résolution du système consiste à multiplier $\underline{b}$ par P_1 avant de résoudre successivement deux systèmes triangulaires : le système $L\underline{f}'' = P_1\underline{b}$ est traité par une méthode de descente tandis que le système $U\underline{f}' = \underline{f}''$ est résolu par une méthode de remontée. La solution $\underline{f}$ s'obtient finalement en multipliant $\underline{f}'$ par P_2 .

Pour des matrices particulières, d'autres types de factorisation moins coûteuses existent. Lorsque la matrice A est une matrice symétrique, elle peut se décomposer sous la forme d'un produit de matrices

$$A = LDL^T, \quad (1.38)$$

où L est une matrice triangulaire inférieure inversible et D est une matrice diagonale inversible (factorisation de Crout). Dans le cas où la matrice est définie positive, la matrice D est égale à la matrice identité et la matrice L est unique en considérant ses éléments diagonaux strictement positifs (factorisation de Cholesky).

Approches itératives. Les méthodes de relaxation sont fondées sur une décomposition de la matrice A sous la forme

$$A = E - F, \quad (1.39)$$

où E est une matrice « facilement » inversible. Nous pouvons citer, par exemple, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel où E est respectivement choisie de sorte à être diagonale inversible et tridiagonale inférieure inversible. Ces méthodes se généralisent par l'introduction d'un paramètre de relaxation non nul noté w . Elles sont alors appelées respectivement méthode de sur-relaxation de Jacobi (JOR) et méthode de sur-relaxation successive (SOR). Pour des valeurs judicieuses de w , ces méthodes sont plus efficaces que les méthodes non-relaxées. En pratique, la valeur optimale de w appartient à $]0, 2[$ mais n'est pas évidente à déterminer (tâtonnement, dichotomie, etc.). Des conditions de convergence sur w voire des expressions exactes de sa valeur optimale existent néanmoins pour des matrices A particulières. Les méthodes de Jacobi et JOR sont facilement parallélisables, chaque composante de $\underline{f}_{l+1}$ pouvant être calculée indépendamment des autres alors que ce calcul ne peut se faire que séquentiellement dans les méthodes de Gauss-Siedel et SOR. Cependant, le stockage de $\underline{f}_l$ n'est pas nécessaire dans ces dernières, d'où un gain d'espace mémoire.

De nombreuses méthodes de direction de descente sont décrites dans la littérature. Les plus efficaces consistent à construire les vecteurs $\underline{d}_l$ afin qu'ils forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et à exprimer le vecteur solution dans cette base. A chaque itération, le vecteur $\underline{d}_{l+1}$ est une combinaison linéaire de $\underline{d}_l$ et de la direction de plus forte descente, qui correspond à l'opposé du résidu $A\underline{f}_l - \underline{b}$. La détermination du pas et de la direction de descente dépend de la structure de la matrice A . Lorsque A est symétrique définie positive, la méthode la plus efficiente est l'algorithme du gradient conjugué [Hes52] [Ash90] [Erh00]. Les directions vérifient $\underline{d}_i^T A \underline{d}_j = 0$ si $i \neq j$. L'algorithme converge en r itérations au maximum. Dans les exemples de ce manuscrit, nous privilégions cet algorithme dans les cas où il est applicable. Lorsque A est symétrique mais indéfinie, les méthodes de Lanczos, du résidu minimal (MINRES), LQ symétrique (SYMMLQ) ou des résidus conjugués peuvent être mises en œuvre. Lorsque A est non symétrique, son pré-conditionnement par sa matrice transposée conduit à une matrice symétrique définie positive permettant l'application de la méthode du gradient conjugué. Une variante est la méthode du résidu minimal généralisé (GMRES). Enfin, d'autres algorithmes adaptés sont l'algorithme du gradient bi-conjugué et ses variantes CGS et QMR [Fre91].

Approches rapides. Pour des contraintes de type frontière, un miroir périodique impair est appliqué aux vecteurs $\underline{f}$ et $\underline{b}$. Pour le miroir considéré, la transformée de Fourier du signal $\widetilde{\underline{f}}$ (respectivement $\widetilde{\underline{b}}$) est équivalente à la transformée en sinus de type I du signal $\underline{f}$ (respectivement $\underline{b}$), ce qui permet de diminuer encore le temps de calcul (voir annexe C).

1.2.4.1.2 Points discrets

Dans le cas de contraintes de type points discrets, les q points fixés peuvent être pris en compte par deux approches différentes. La méthode présentée par Lomask [Lom06b] conduit à une solution pour laquelle les valeurs des contraintes sont parfaitement respectées. En effet, les échantillons connus du terme de mise à jour sont exclus du système matriciel (1.27) et seuls les échantillons inconnus sont calculés. Cependant, la méthode présente deux inconvénients majeurs. Premièrement, les termes de mise à jour de dimension 1 ne sont pas obtenus par une optimisation globale : la solution du système matriciel est calculée indépendamment sur chaque ensemble de points délimité soit par une limite du domaine Ω et l'abscisse d'une contrainte, soit par deux contraintes d'abscisses consécutives. Deuxièmement, la méthode ne permet pas une résolution du système par une approche rapide lorsqu'un unique point est imposé. La méthode alternative que nous proposons dans ce paragraphe consiste en une optimisation globale sur l'ensemble des points d'échantillonnage de Ω . Les échantillons connus sont intégrés au système matriciel et ré-estimés. Par conséquent, leurs valeurs finales bien que très proches de leurs valeurs initiales ne sont pas rigoureusement égales.

Considérons le vecteur $\underline{f}$ contenant les M_Ω valeurs de δf sur la grille d'échantillonnage dont $M_\Omega - q$ sont inconnues, le vecteur $\underline{b}'$ contenant le terme de droite de l'équation (1.17) et la matrice

A' traduisant l'application de l'opérateur Laplacien sur l'ensemble des points d'échantillonnage du domaine Ω . La matrice A' est une matrice carrée singulière de taille $n \times n$, avec $n = M_\Omega$. Dans la méthode de Lomask, la matrice A du système (1.27) est égale à la matrice A' privée de ses q lignes correspondant aux contraintes. Il s'agit d'une matrice rectangulaire de taille $m \times n$ avec $m = n - q$ et de rang complet (*i.e.* $r = m$). Le vecteur $\underline{b}$ est égal au vecteur $\underline{b}'$ également privé de ses q composantes correspondant aux contraintes. Le système (1.27) est ainsi un système sous-déterminé qui admet une infinité de solutions. La matrice A étant de rang complet, la solution de norme minimale, appelée *pseudo-solution* du système (1.27) est solution de l'équation normale

$$A^T A \underline{f} = A^T \underline{b}. \quad (1.40)$$

Son expression est donnée par l'équation (1.28) où la matrice A^* est la *pseudo-inverse de Moore-Penrose* pour un système sous-déterminé [Ben03] :

$$A^* = A^T (A A^T)^{-1}. \quad (1.41)$$

L'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\underline{f} = A^* \underline{b} + (I_n - A^* A) \underline{f}', \quad (1.42)$$

où I_n est la matrice identité de taille n et $\underline{f}'$ un vecteur arbitraire de taille n .

Dans la méthode alternative que nous proposons, la matrice A est une matrice rectangulaire de taille $m \times n$ avec $m = n + q$ et de rang complet (*i.e.* $r = n$). Elle est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} A' \\ D \end{bmatrix}, \quad (1.43)$$

où D est une matrice de taille $q \times n$. Pour chacune des lignes de D , toutes les composantes sont nulles exceptée celle correspondant à la contrainte fixée par la ligne. Le vecteur $\underline{b}$ est de la forme

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{b}' \\ \underline{d} \end{bmatrix}, \quad (1.44)$$

où $\underline{d}$ est un vecteur de taille q contenant les valeurs des contraintes. Le système (1.27) est alors un système sur-déterminé quelle que soit la valeur de q , bien que le problème puisse être sous-déterminé dans le domaine continu. Le vecteur $\underline{f}$ recherché est donc le vecteur qui minimise

$\|A\underline{f} - \underline{b}\|^2$. La matrice A étant de rang complet, ce vecteur, appelé *pseudo-solution* du système (1.27), est unique. Il est solution de l'équation normale (1.40). Son expression est donnée par l'équation (1.28) où la matrice A^* est la *pseudo-inverse de Moore-Penrose* pour un système sur-déterminé [Ben03] :

$$A^* = (A^T A)^{-1} A^T. \quad (1.45)$$

Une technique naïve de résolution de l'équation (1.40) revient à calculer explicitement la matrice inversible AA^T ou $A^T A$ puis à appliquer les méthodes de résolution présentées au paragraphe 1.2.4.1.1. Cependant, pour des raisons de complexité calculatoire, il est plus pertinent de s'appuyer sur le caractère creux de A . Les approches présentées dans la suite permettent donc de déterminer une pseudo-solution sans calculer explicitement A^* . Elles concernent le cas d'un système sur-déterminé. Les méthodes sont analogues dans le cas d'un système sous-déterminé en permutant les rôles de A et A^T .

Approches directes. Une méthode de factorisation classique est la décomposition de A en valeurs singulières. La matrice A peut se factoriser sous la forme

$$A = V_1 D V_2^T, \quad (1.46)$$

où V_1 et V_2 sont des matrices unitaires respectivement de taille $m \times m$ et $n \times n$, et D une matrice $m \times n$ dont les coefficients diagonaux positifs ou nuls sont les valeurs singulières de A . La décomposition en valeurs singulières de A^* s'obtient immédiatement à partir de celle de A :

$$A^* = V_2 D^* V_1^T, \quad (1.47)$$

où D^* désigne la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice D . Elle s'obtient à partir de D en inversant ses éléments diagonaux non nuls, en gardant tous ses éléments nuls, et en transposant le résultat. Par conséquent, les n premières lignes du produit $D V_2^T \underline{f}$ sont égales aux n premières lignes du produit $V_1^T \underline{b}$: le vecteur $\underline{f}$ s'obtient par résolution d'un système diagonal. Il est à noter que des travaux récents traitent de la décomposition en valeurs singulières de matrices creuses. Cependant, le gain espéré par ces approches en complexité calculatoire se heurte en pratique à des difficultés de mise en œuvre.

Une méthode alternative est la décomposition QR de A . La matrice peut se factoriser sous la forme

$$A = QR, \quad (1.48)$$

où Q est une matrice unitaire orthogonale de taille $m \times m$ et R est une matrice pseudo-triangulaire de taille $m \times n$ qui s'écrit

$$\begin{bmatrix} \Lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

où Λ est une matrice triangulaire supérieure de taille $n \times n$ et 0 est la matrice nulle complémentaire. L'inverse d'une matrice orthogonale étant égale à sa transposée, la réécriture de l'équation (1.40) sous la forme

$$R^T R \underline{f} = A^T \underline{b}, \quad (1.50)$$

conduit alors à la résolution de deux systèmes pseudo-triangulaires. Plusieurs méthodes de détermination de la factorisation QR ont été développées, telles que celle de Householder, de Givens ou encore de Schmidt.

Approches itératives. Les approches itératives sont fondées sur le fait que la matrice $A^T A$ est symétrique définie positive [Fle76]. Les méthodes décrites au paragraphe 1.2.4.1.1 sont donc applicables et des modifications adaptées [Pai75] [Bjo79] évitent le calcul explicite du produit $A^T A$. Similairement au cas de contraintes de type frontière, la méthode la plus efficace est celle du gradient conjugué, que nous privilégions dans les exemples de ce mémoire.

Approches rapides. Pour une contrainte de type point discret unique, le système matriciel (1.27) peut être résolu par une approche rapide lorsqu'il est sur-déterminé. La matrice A et le vecteur $\underline{b}$ sont alors respectivement de la forme (1.43) et (1.44), D est une matrice de taille $1 \times n$ qui s'écrit

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

et l'unique composante de $\underline{d}$ contient la valeur de la contrainte fixée. En imposant la valeur moyenne de δf au lieu de la contrainte de valeur, la matrice D devient :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

tandis que la composante de $\underline{d}$ est remplacée par la valeur $n < \delta f >$. Bien que ce changement de contraintes modifie le système numérique à résoudre, il permet une résolution dans le domaine

fréquentiel. A cette fin, un miroir périodique pair est appliqué aux vecteurs $\underline{f}$ et $\underline{b}'$. Deux miroirs différents existent, dépendant du choix de l'échantillon supplémentaire effectué pour le calcul des dérivées secondes sur les points d'échantillonnage appartenant à la frontière du domaine (voir figure 1.6). Selon le miroir considéré, la transformée de Fourier du signal $\tilde{\underline{f}}$ (respectivement $\tilde{\underline{b}}$) est équivalente à la transformée en cosinus de type I ou II du signal $\underline{f}$ (respectivement $\underline{b}'$), ce qui permet de diminuer sensiblement le temps de calcul (voir annexe C).

1.2.4.2 Contraintes de bornes

Dans le cas de contraintes de bornes, plusieurs optimisations numériques de méthodes itératives à direction de descente projetée ont été élaborées pour accélérer la convergence et diminuer les ressources mémoires nécessaires [Ber82] [Con88]. Un algorithme à convergence rapide et à mémoire limitée est l'algorithme L-BFGS-B, adaptation de l'algorithme BFGS aux contraintes de type bornes [Byr95] [Xia08]. La direction et le pas de descente conduisant au calcul du « pseudo-itéré » sont déterminés par l'algorithme BFGS en approximant l'inverse du hessien discret de $\mathcal{J}$ sur la grille d'échantillonnage par une matrice symétrique définie positive. Dans ce mémoire, nous nous appuyons sur l'algorithme initialement développé en Fortran puis traduit en langage C par Zhu *et al.* [Zhu97].

Remarque : le calcul des termes $\frac{\partial p_i^2}{\partial \underline{f}}$ de la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{J}$ (1.9) revient à dériver les composantes d'une fonction vectorielle par rapport à une fonction ; en pratique, l'estimation numérique de ces termes est complexe ; similairement aux travaux de Lomask [Lom06c], nous négligeons ces termes dans la suite.

1.2.5 Prise en compte d'un terme de pondération

Dans le cas de contraintes de valeurs, un terme de pondération sur le résidu peut être introduit selon la confiance que nous accordons à certaines valeurs de ce résidu. Ainsi, dans les régions où le champ de normales est supposé fiable, la pondération du résidu associé est choisie proche de 1. Au contraire, dans les régions où le champ est bruité, mal estimé voire incorrect, la pondération est choisie proche de 0. L'influence du champ de normales dans ces régions est par conséquent affaiblie dans la méthode d'optimisation globale mise en œuvre pour reconstruire une hypersurface. L'équation de définition du résidu (1.14) est alors remplacée par l'équation

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{r}_k(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) [\nabla f_k(\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x}, f_k(\mathbf{x}))], \quad (1.53)$$

où w est une fonction dont la classe de régularité sur Ω est au moins égale à 1.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au cas d'une pondération binaire dans le cadre d'une reconstruction numérique d'une hypersurface : le signal discret $\underline{w}$ correspondant à w

contient alors uniquement des échantillons nuls ou égaux à 1. Le terme de pondération intervient exclusivement dans la résolution de l'équation de Poisson. En supposant que le poids n'influe par sur l'opérateur Laplacien (voir [Lom06a], pages 16 à 18), le vecteur $\underline{b}$ du système (1.27) est multiplié terme à terme par le vecteur $\underline{w}$:

$$A\underline{f} = \underline{w} \odot \underline{b}. \quad (1.54)$$

Ce nouveau système peut alors être résolu par les approches présentées au paragraphe 1.2.4.

1.2.6 Exemples dans un espace bidimensionnel

L'approche de reconstruction d'hypersurfaces sous contraintes par minimisation d'une équation aux dérivées partielles est évaluée sur des images synthétiques bidimensionnelles de taille 1024×1024 pixels construites à partir d'un modèle mathématique. De manière évidente, les hypersurfaces des images traitées sont leurs lignes d'isovaleurs. Afin de tester la robustesse de l'approche par rapport à de rapides variations du pendage, le modèle mathématique est choisi de telle sorte que les lignes d'isovaleurs ne soient ni monotones, ni parallèles entre elles. Dans l'exemple présenté ci-dessous (voir figure 1.8), l'intensité I de l'image suit un modèle sinusoïdal à fréquences variables dans les deux directions de l'image :

$$I(x_1, x_2) = 127 \sin \left(\frac{1}{1 + (x_1 - 0,5)^2} [2\pi f_s x_2 + 2\pi a \sin(2\pi (f_{x_1} x_1 + f_{x_2} x_2))] \right), \quad (1.55)$$

où f_s , a , f_{x_1} et f_{x_2} sont des constantes réelles respectivement égales à 17, $\frac{1}{4}$, 4 et 5.

Dans ce paragraphe, nous prenons en compte des contraintes de valeurs (point unique, 3 points et frontière) et de bornes. L'équation de Poisson est résolue par une approche rapide dans le cas de contraintes de type point discret unique¹ ou frontière et par une approche itérative du gradient conjugué (300 itérations) en considérant un système matriciel sur-déterminé dans le cas de contraintes de type points discrets multiples. Dans le cas de contraintes de bornes, les bornes sont construites de sorte à imposer le passage de l'hypersurface par un point donné, choisi ici égal au point considéré comme contrainte de type point discret unique. Le champ de normales considéré est exact, c'est-à-dire calculé analytiquement à partir du modèle mathématique de l'image, ou estimé par une méthode fondée sur une analyse en composantes principales du

1. Il est à noter que le système matriciel est alors modifié (voir paragraphe 1.2.4.1.2) par rapport à une approche directe ou itérative mais la différence entre les hypersurfaces reconstruites est insignifiante.

champ de gradients (voir annexe A). Le champ exact (non normalisé) est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1(x_1, x_2) = \frac{-2(x_1-0,5)}{(1+(x_1-0,5)^2)^2} [2\pi f_s + 2\pi a \sin(2\pi (f_{x_1} x_1 + f_{x_2} x_2))] \\ \quad + \frac{4\pi^2 a f_{x_1}}{1+(x_1-0,5)^2} \cos(2\pi (f_{x_1} x_1 + f_{x_2} x_2)) \\ n_2(x_1, x_2) = \frac{1}{1+(x_1-0,5)^2} [2\pi f_s + 4\pi^2 a f_{x_2} \cos(2\pi (f_{x_1} x_1 + f_{x_2} x_2))] \end{array} \right.$$

tandis que la méthode d'estimation est paramétrée par deux écarts-types σ_g et σ_{acp} : le premier concerne le support d'estimation du champ de gradient et le second concerne le support de calcul de l'analyse en composantes principales. Afin d'éprouver la robustesse au bruit de l'algorithme, l'image initiale est contaminée par un bruit blanc gaussien centré engendrant un rapport signal sur bruit² (RSB) égal à 5 puis est définie sur 256 niveaux.

Une hypersurface reconstruite est comparée au modèle mathématique associé *via* l'erreur de norme L^2 et l'erreur maximale, respectivement définies par

$$E_{L^2} = \frac{1}{M_\Omega} \sqrt{\sum_{n=1}^{M_\Omega} [f(x(n)) - f_{mod}(x(n))]^2} \quad (1.56)$$

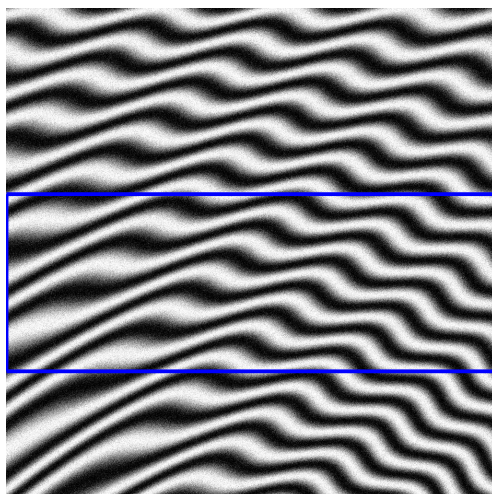
$$\text{et } E_{max} = \max_{n \in \llbracket 1, M_\Omega \rrbracket} |f(x(n)) - f_{mod}(x(n))|, \quad (1.57)$$

où M_Ω désigne le nombre de points d'échantillonnage du domaine de reconstruction, f l'hypersurface reconstruite et f_{mod} l'hypersurface théorique. Le modèle mathématique d'une hypersurface est déterminée à l'aide d'une méthode du point fixe, aucune expression analytique n'étant disponible en raison de la complexité du modèle de l'image. En présence de bruit, une hypersurface reconstruite est considérée comme étant égale à la moyenne des hypersurfaces estimées sur 1000 images. Dans l'exemple ci-dessous, le domaine de reconstruction est centré au milieu de l'image afin de s'affranchir des effets de bords lors de l'estimation du champ de normales. Il est discrétisé sur 924 points respectant l'échantillonnage naturel de la donnée. Pour l'ensemble des reconstructions, l'algorithme est initialisé avec une fonction correspondant à la moyenne des valeurs des contraintes considérées et le nombre d'itérations maximal est fixé à 300. Les dérivées sur la frontière du domaine sont estimées en choisissant l'échantillon du point d'application ou son opposé comme échantillon supplémentaire³.

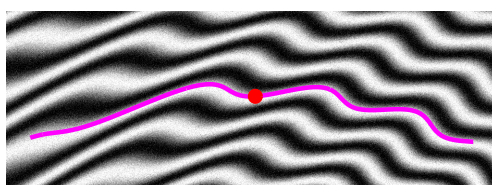
Dans un premier temps, un unique point est pris en compte comme contrainte. L'hypersurface obtenue à partir du champ de normales exact est très proche du modèle, les erreurs de

2. Dans ce mémoire, le rapport signal sur bruit est défini comme le quotient de l'écart-type du signal et de l'écart-type du bruit.

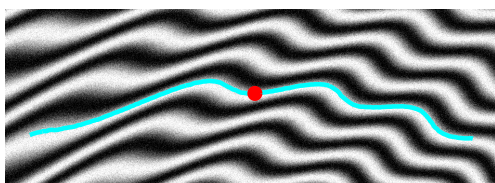
3. Le choix de l'échantillon précédent ou suivant conduit à des résultats similaires.



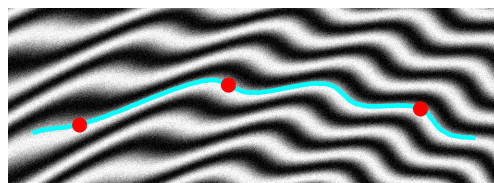
(a)



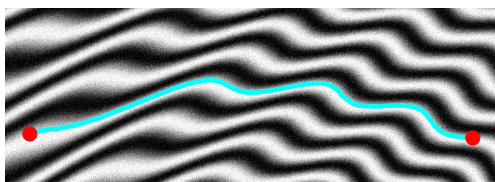
(b)



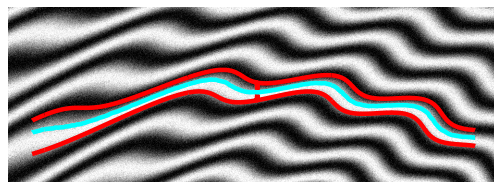
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure 1.8 – *Reconstruction d’une hypersurface unidimensionnelle sous contraintes (en rouge) à partir d’un champ de normales estimé. (a) Image bruitée ($RSB = 5$). Le rectangle bleu encadre la zone présentée sur les autres images; (b) Modèle; (c) Point unique; (d) 3 points; (e) Frontière; (f) Bornes.*

norme L^2 et maximale étant respectivement égales à $7,68 \cdot 10^{-5}$ et $1,1 \cdot 10^{-2}$ pixel. L'approche est ainsi très précise malgré son caractère non linéaire. Le champ de normales est ensuite estimé. La figure 1.9 représente l'erreur de norme L^2 en fonction des paramètres d'estimation σ_g et σ_{acp} en présence ou pas de bruit. Elle met en évidence la convergence de l'algorithme pour des paramètres dont les valeurs sont comprises entre 0,5 et 7. La méthode est par conséquent peu sensible aux paramètres d'estimation du champ de normales. Néanmoins, l'erreur est plus importante pour certains couples de valeurs situés dans des zones perturbées. Dans la suite, les valeurs des couples de paramètres sont choisies éloignées des zones perturbées de sorte à éviter un lissage trop fort et à s'affranchir des erreurs de reconstructions locales. Le champ de normales est par conséquent estimé avec les paramètres $\sigma_g = \sigma_{acp} = 1$ sans bruit additif et $\sigma_g = \sigma_{acp} = 2$ avec un RSB de 5. Les erreurs de norme L^2 et maximales mesurées pour les hypersurfaces reconstruites sont supérieures en présence de bruit mais restent néanmoins marginales (respectivement de l'ordre de 10^{-2} et 1,5 pixels, voir la première ligne du tableau 1.1), illustrant ainsi la précision de la méthode même lorsque le champ de normales est peu fiable. La différence entre les hypersurfaces reconstruites et le modèle est représentée sur la figure 1.10. Il est à noter que les différences les plus importantes sont relevées dans les zones où le pendage est le plus élevé et qu'elles sont plus marquées en présence de bruit. Ce phénomène peut s'expliquer en considérant que l'erreur intrinsèque d'estimation du champ de normales est amplifié lors du calcul du pendage par l'application de la fonction tangente qui est croissante et non linéaire.

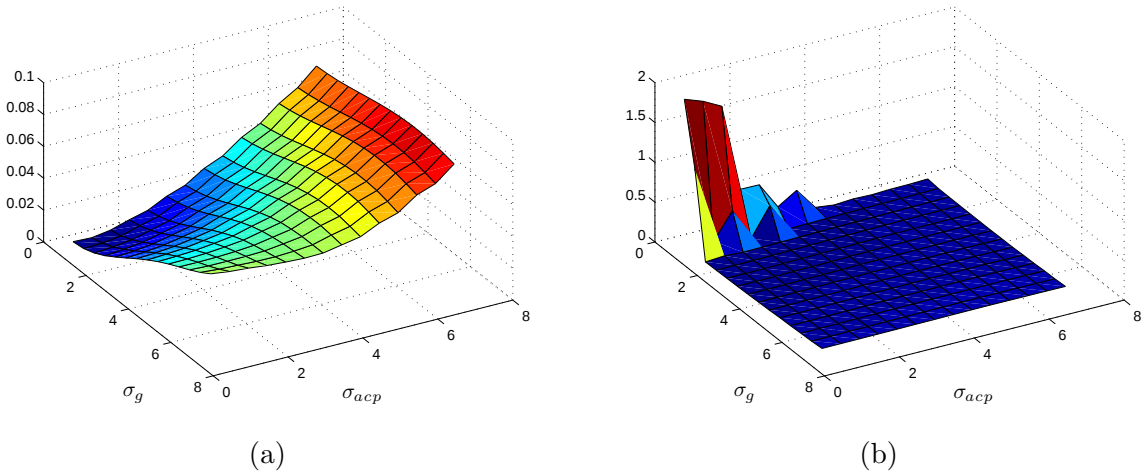


Figure 1.9 – Erreur de norme L^2 selon les paramètres d'estimation du champ de normales. (a) Cas non bruité; (b) Cas bruité (RSB = 5).

Dans un deuxième temps, d'autres contraintes sont prises en compte : 3 points, des frontières et des bornes. Le champ de normales est estimé avec les mêmes paramètres que précédemment. Les erreurs de norme L^2 et maximale sont consignées dans le tableau 1.1. Elles sont pour l'ensemble des contraintes respectivement inférieures à $2,53 \cdot 10^{-2}$ et 1,45 pixels, confirmant ainsi la précision et la robustesse au bruit de la méthode. Dans le cas où trois points sont imposés,

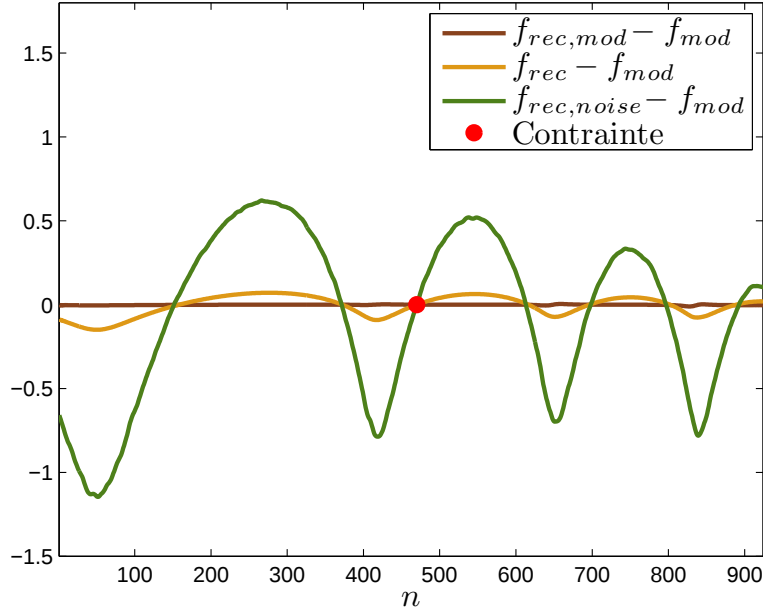


Figure 1.10 – Différence entre les hypersurfaces reconstruites et le modèle f_{mod} . $f_{rec,mod}$: champ de normales exact; f_{rec} : $RSB = \infty$, champ de normales estimé ($\sigma_g = \sigma_{acp} = 1$); $f_{rec,noise}$: $RSB = 5$, champ de normales estimé ($\sigma_g = \sigma_{acp} = 2$).

Contraintes	RSB = ∞		RSB = 5	
	E_{L^2}	E_{max}	E_{L^2}	E_{max}
Point unique	2.10^{-3}	0,15	$1,64.10^{-2}$	1,15
3 points	$1,19.10^{-2}$	0,412	$1,77.10^{-2}$	1,33
Frontière	$3,4.10^{-3}$	0,166	$2,53.10^{-2}$	1,45
Bornes	$3,64.10^{-3}$	0,195	$2,12.10^{-2}$	1,26

Tableau 1.1 – Erreur de norme L^2 et maximale selon le type de contraintes en présence ou pas de bruit.

les valeurs finales des contraintes diffèrent très légèrement (de l'ordre de 10^{-5} pixel) des valeurs initiales en raison de la sur-détermination du système matriciel résolu à chaque itération (cf. paragraphe 1.2.4.1.2). L'hypersurface obtenue pour des contraintes de bornes est quasiment égale à celle obtenue pour la contrainte de type point unique étant donné que le même point est imposé.

1.3 Prise en compte de discontinuités dans un espace bidimensionnel

Dans ce paragraphe, nous considérons une courbe d'un espace vectoriel bidimensionnel définie sur un segment Ω compris entre deux abscisses x_A et x_B et présentant une discontinuité à l'abscisse $x_\alpha \in]x_A, x_B[$. Elle peut être représentée par une fonction explicite f caractérisée par un saut d'amplitude

$$C_c = \lim_{x \rightarrow x_\alpha^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_\alpha^-} f(x). \quad (1.58)$$

La classe de régularité de f sur $\Omega - \{x_\alpha\}$ est au moins égale à 2.

Afin de reconstruire cette courbe en suivant les procédés présentés au paragraphe 1.2.3, nous proposons [Zin11a] [Zin11b] de décomposer (voir figure 1.11) la fonction f en la somme d'une fonction $\tilde{f}$ dont la classe de régularité sur Ω est au moins égale à 2 et d'une fonction discontinue $\hat{f}$:

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \tilde{f}(x) + \hat{f}(x). \quad (1.59)$$

La fonction $\tilde{f}$ vérifie une équation aux dérivées partielles liant la courbe à la tangente du pendage telle que

$$\forall x \in \Omega, \quad \nabla \tilde{f}(x) = \mathbf{p}(x, \tilde{f}(x) + \hat{f}(x)), \quad (1.60)$$

tandis que la fonction $\hat{f}$ est définie par la somme de deux fonctions de Heaviside :

$$\forall x \in \Omega, \quad \hat{f}(x) = -\beta C_c h_H(x_\alpha - x) + (1 - \beta) C_c h_H(x - x_\alpha), \quad (1.61)$$

où β est un réel choisi entre 0 et 1 et h_H désigne la fonction de Heaviside discontinue en 0 et définie par

$$h_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}. \quad (1.62)$$

Le paramètre β assure la superposition (voir figure 1.12) de f et de $\tilde{f}$ soit à gauche de la discontinuité ($\beta = 0$), soit à droite ($\beta = 1$), ou tout autre positionnement intermédiaire ($\beta \in]0, 1[$).

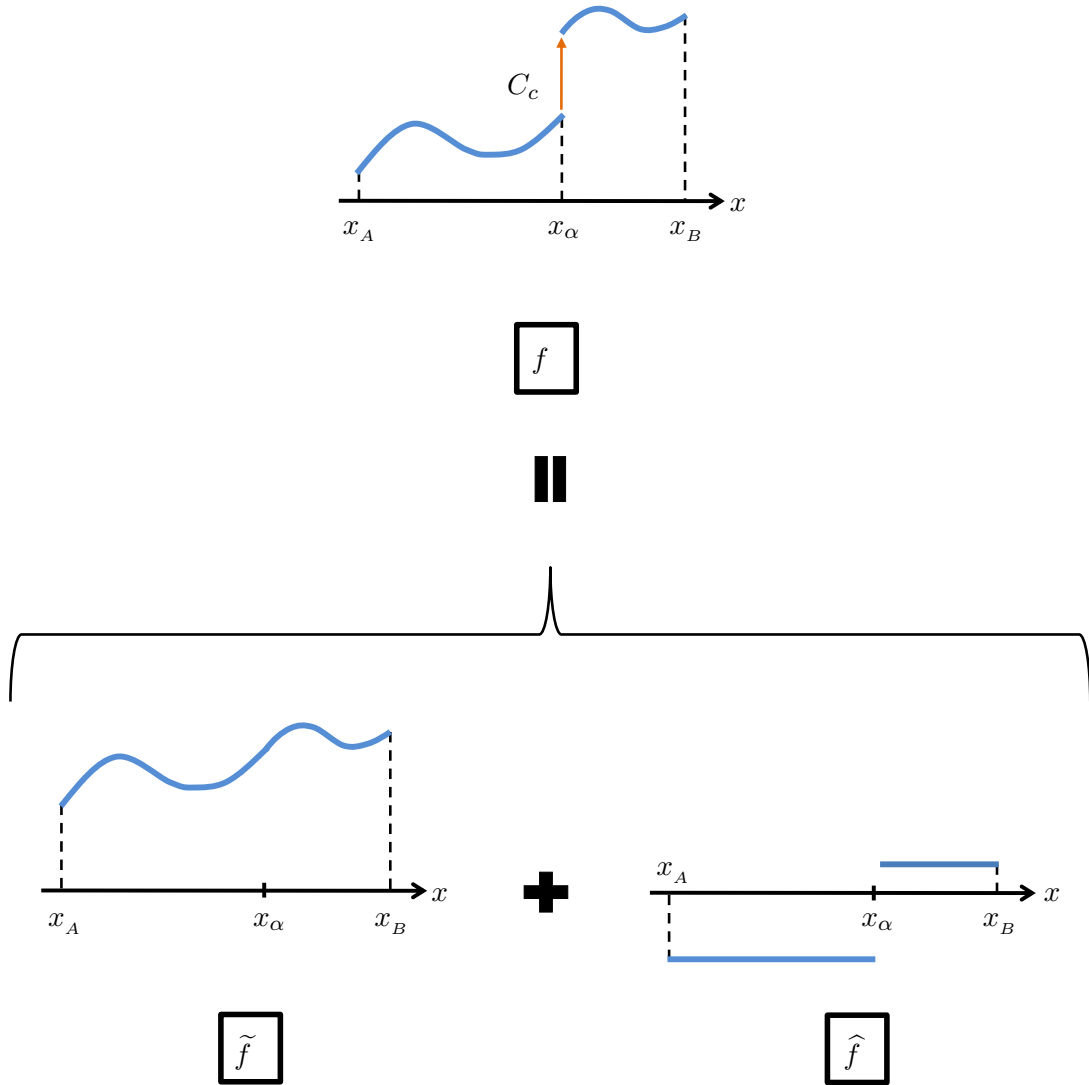


Figure 1.11 – Décomposition de f en la somme $\tilde{f} + \hat{f}$.

La reconstruction de l'hypersurface s'obtient alors par la minimisation sous contraintes de l'erreur quadratique moyenne sur Ω entre le gradient de la fonction $\tilde{f}$ et la tangente du pendage le long de f . La fonction $\tilde{f}$ vérifie le problème d'optimisation suivant :

$$\tilde{f} = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2(\Omega)} \hat{\mathcal{J}}[g] \text{ sous la contrainte } f \in I, \quad (1.63)$$

où la fonctionnelle $\hat{\mathcal{J}}$ est définie par :

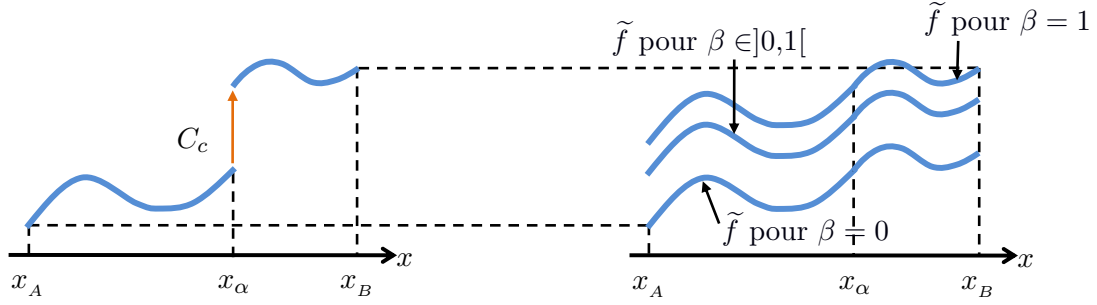


Figure 1.12 – Influence de la valeur de β sur la fonction $\tilde{f}$.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{J}}: \mathcal{C}^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \int_{\Omega} \left\| \nabla g(x) - \mathbf{p}\left(x, g(x) + \widehat{f}(x)\right) \right\|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Les contraintes de valeurs prises en compte dans la suite de ce paragraphe ont été introduites au paragraphe 1.2.3.

Remarque : l'approche présentée dans ce paragraphe se généralise à une courbe continue par morceaux comportant un nombre fini d de discontinuités d'amplitudes C_{c_i} aux abscisses x_{α_i} ; la fonction représentant cette courbe peut se décomposer en la somme d'une fonction continue et d'une fonction discontinue qui s'écrit sous la forme

$$\forall x \in \Omega, \quad \widehat{f}(x) = \sum_{i=1}^d [-\beta_i C_{c_i} h_H(x_{\alpha_i} - x) + (1 - \beta_i) C_{c_i} h_H(x - x_{\alpha_i})], \quad (1.65)$$

où les β_i sont des réels non indépendants.

1.3.1 Domaine continu

L'algorithme d'estimation de f comporte les mêmes phases que l'algorithme décrit au paragraphe 1.2.3.1 avec des adaptations dues à l'hypothèse de discontinuité (voir figure 1.13).

- Phase initiale :

La fonction d'initialisation $\tilde{f}_0$ peut être choisie quelconque ou de telle sorte que f_0 appartienne à l'ensemble des contraintes (1.5) ou (1.6). En pratique, la fonction d'initialisation est souvent une fonction constante, notée $\tilde{\beta}$. Dans le cas de contraintes de type frontière, $\tilde{\beta}$ peut être comprise entre $f(x_A)$ et $f(x_B)$ et contrôlée par β :

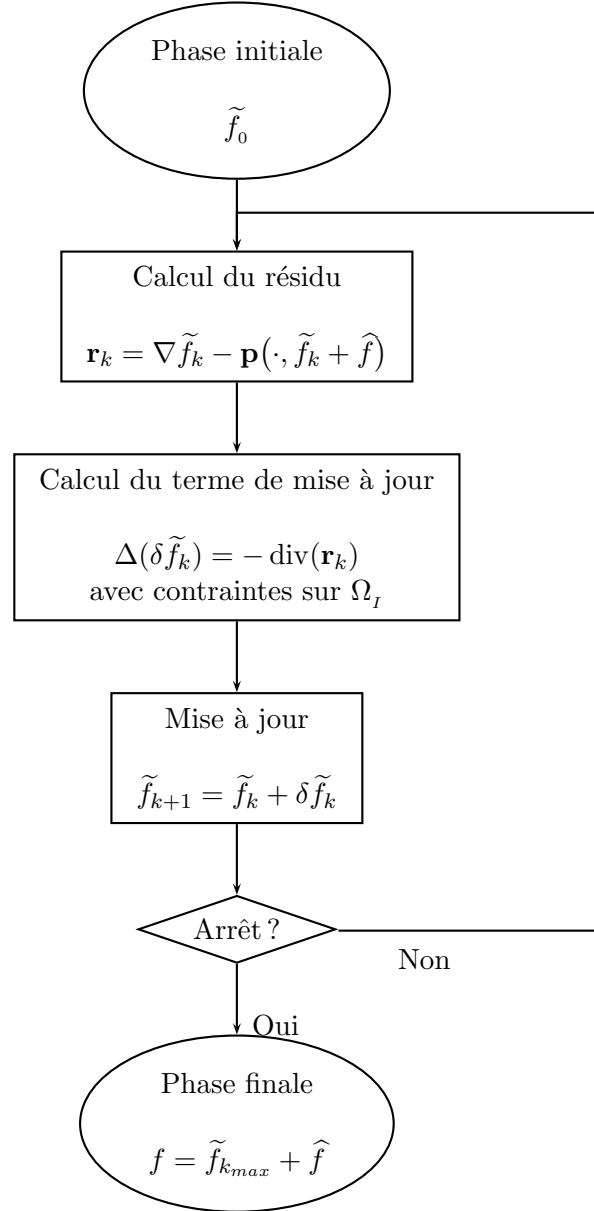


Figure 1.13 – Reconstruction itérative sous contraintes de valeurs en présence d’une discontinuité (domaine continu).

$$\forall x \in \Omega, \quad \tilde{f}_0(x) = \tilde{\beta} = f(x_A) + \beta(f(x_B) - f(x_A)). \quad (1.66)$$

Pour des contraintes de type points discrets, $\tilde{\beta}$ peut être égale à la valeur moyenne des valeurs de l'ensemble des points imposés. Si tous les points sont inférieurs (respectivement supérieurs) à x_α , le paramètre β est généralement pris égal à 0 (respectivement à 1).

- Calcul du résidu :

Le résidu est défini comme la différence entre le gradient de $\tilde{f}_k$ et la tangente du pendage :

$$\forall x \in \Omega, \quad \mathbf{r}_k(x) = \nabla \tilde{f}_k(x) - \mathbf{p}(x, \tilde{f}_k(x) + \hat{f}(x)). \quad (1.67)$$

- Calcul du terme de mise à jour :

Le terme de mise à jour $\delta \tilde{f}_k$ s'obtient par la minimisation linéaire sous contrainte d'une erreur quadratique moyenne sur Ω mettant en jeu l'opposé du résidu. Il vérifie :

$$\delta \tilde{f}_k = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2(\Omega)} \int_{\Omega} \|\nabla g(x) + \mathbf{r}_k(x)\|^2 dx \quad (1.68)$$

sous la contrainte $\delta \tilde{f}_k \in \delta \tilde{I}_k$.

L'ensemble $\delta \tilde{I}_k$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}^2(\Omega)$ qui dépend des ensembles des contraintes (1.5) ou (1.6) ainsi que de la fonction d'initialisation. Dans le cas où f_0 appartient à l'ensemble des contraintes (1.5) ou (1.6), il impose à chaque itération une mise à jour nulle sur le domaine Ω_I . Dans le cas contraire, il permet d'imposer la valeur de $\tilde{f}$ sur Ω_I en un nombre fini d'itérations à définir. Lorsque cette valeur est fixée en une itération, l'ensemble $\delta \tilde{I}_k$ s'écrit :

$$\delta \tilde{I}_0 = \left\{ g \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid \forall x \in \Omega_I, \quad g(x) = f(x) - \tilde{f}_0(x) - \hat{f}(x) \right\} \quad (1.69)$$

$$\text{et } \delta \tilde{I}_k = \left\{ g \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid \forall x \in \Omega_I, \quad g(x) = 0 \right\} \quad \forall k > 0.$$

Toute solution $\delta \tilde{f}_k$ du problème (1.15) vérifie l'équation de Poisson

$$\Delta(\delta \tilde{f}_k) = -\text{div}(\mathbf{r}_k). \quad (1.70)$$

1.3 - Prise en compte de discontinuités dans un espace bidimensionnel

Cette équation est associée à des conditions sur Ω_I . Lorsque la valeur de $\tilde{f}$ sur Ω_I est fixée en une itération, ces conditions s'expriment par :

$$\begin{aligned}\forall x \in \Omega_I, \quad \delta \tilde{f}_0(x) &= f(x) - \tilde{f}_0(x) - \hat{f}(x) \\ \text{et } \delta \tilde{f}_k(x) &= 0 \quad \forall k > 0.\end{aligned}\tag{1.71}$$

- Mise à jour :

La fonction $\tilde{f}_{k+1}$ est obtenue en sommant $\tilde{f}_k$ et $\delta \tilde{f}_k$:

$$\forall x \in \Omega, \quad \tilde{f}_{k+1}(x) = \tilde{f}_k(x) + \delta \tilde{f}_k(x).\tag{1.72}$$

- Critères d'arrêt :

Les critères d'arrêt possibles sont identiques à ceux présentés au paragraphe 1.2.3.1. Dans ce mémoire, nous imposons un nombre d'itérations k_{max} maximal.

- Phase finale :

La fonction f est finalement obtenue en sommant $\tilde{f}$ et $\hat{f}$.

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \tilde{f}_{k_{max}}(x) + \hat{f}(x).\tag{1.73}$$

Le problème aux limites (1.70)-(1.71) avec $\Omega_I = \partial\Omega$ est un problème inverse « bien posé ». Le problème « intérieur » (1.70)-(1.71) avec $\Omega_I = \Omega_P$ est un problème inverse « mal posé ». Il admet une infinité de solutions si un unique point est imposé, une unique solution si deux points sont imposés, et une solution au sens des moindres carrées si plus de deux points sont imposés.

1.3.2 Domaine discret

La résolution numérique du problème (1.63) nécessite d'échantillonner le segment Ω sur M_Ω points et de considérer une discontinuité « discrète » d'amplitude

$$C_d = f(x(n_\alpha + 1)) - f(x(n_\alpha)),\tag{1.74}$$

où $x(n_\alpha)$ désigne le point d'échantillonnage juste inférieur à l'abscisse x_α (voir figure 1.14). Les termes de mise à jour $\delta \tilde{f}(x(n_\alpha))$ et $\delta \tilde{f}(x(n_\alpha + 1))$ ayant *a priori* une valeur différente, la valeur de $\tilde{f}$ sur le domaine Ω_I ne peut généralement pas être fixée en un nombre fini d'itérations. L'algorithme précédent est par conséquent modifié (voir figure 1.15) par l'introduction de conditions incrémentales associées à l'équation de Poisson. Ces conditions dépendent d'une amplitude C_k initialisée en fonction de C_d et $\tilde{f}_0$ puis mise à jour à chaque itération. Elles impliquent également une mise à jour de la fonction discontinue $\hat{f}$.

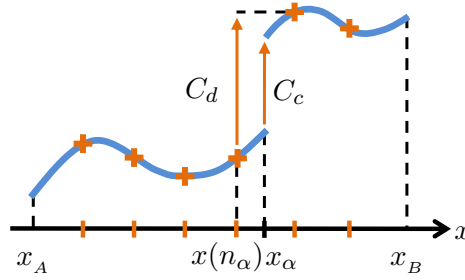


Figure 1.14 – Saut discret et saut continu.

- Phase d'initialisation :

La fonction $\tilde{f}_0$ dans le domaine discret est initialisée par la version échantillonnée de la fonction dans le domaine continu. Le saut et la fonction discontinue vérifient :

$$C_0 = C_d - [\tilde{f}_0(x(n_\alpha + 1)) - \tilde{f}_0(x(n_\alpha))] \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \llbracket 1, M_\Omega \rrbracket, \quad \hat{f}_0(x(n)) = & -\beta C_0 h_H(x(n_\alpha + 1 - n)) \\ & + (1 - \beta) C_0 h_H(x(n - n_\alpha)). \end{aligned} \quad (1.76)$$

- Calcul du résidu :

$$\forall n \in \llbracket 1, M_\Omega \rrbracket, \quad \mathbf{r}_k(x(n)) = \nabla \tilde{f}_k(x(n)) - \mathbf{p}(x(n), \tilde{f}_k(x(n)) + \hat{f}_k(x(n))). \quad (1.77)$$

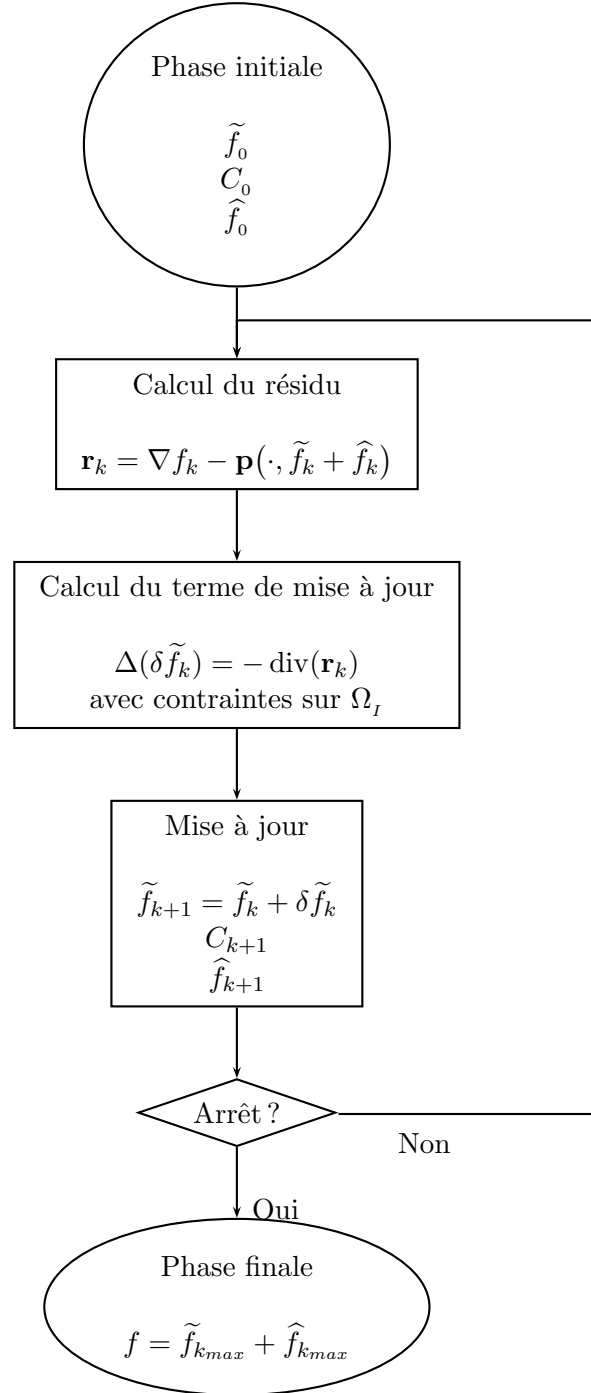


Figure 1.15 – Reconstruction itérative sous contraintes de valeurs en présence d’une discontinuité (domaine discret).

- Calcul du terme de mise à jour :

L'équation de Poisson (1.70) est associée à des conditions incrémentales :

$$\forall n \in \Omega_I, \quad \delta \tilde{f}_0(x(n)) = f(x(n)) - \tilde{f}_0(x(n)) - \hat{f}_0(x(n)) \quad (1.78)$$

$$\text{et } \delta \tilde{f}_k(x(n)) = \hat{f}_{k-1}(x(n)) - \hat{f}_k(x(n)) \quad \forall k > 0. \quad (1.79)$$

Démonstration. Pour les points correspondant à des contraintes, la valeur de la fonction continue $\tilde{f}$ à l'itération $k > 1$ est égale par définition à la différence entre la valeur de la contrainte et la valeur de la fonction discontinue $\hat{f}$ à l'itération précédente :

$$\forall n \in \Omega_I, \quad \tilde{f}_k(x(n)) = f(x(n)) - \hat{f}_{k-1}(x(n)) \quad \forall k > 1. \quad (1.80)$$

Remplacer $\tilde{f}_{k+1}(x(n))$ et $\tilde{f}_k(x(n))$ par cette définition dans l'équation du terme de mise à jour (1.81) conduit bien à l'équation (1.79). $\square$

- Mise à jour :

$$\forall n \in \llbracket 1, M_\Omega \rrbracket, \quad \tilde{f}_{k+1}(x(n)) = \tilde{f}_k(x(n)) + \delta \tilde{f}_k(x(n)) \quad (1.81)$$

$$C_{k+1} = C_d - [\tilde{f}_{k+1}(x(n_\alpha + 1)) - \tilde{f}_{k+1}(x(n_\alpha))] \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{k+1}(x(n)) &= -\beta C_{k+1} h_H(x(n_\alpha + 1 - n)) \\ &\quad + (1 - \beta) C_{k+1} h_H(x(n - n_\alpha)). \end{aligned} \quad (1.83)$$

La convergence vers 0 de la différence $C_{k-1} - C_k$, qui entraîne celle de $\delta \tilde{f}_k$ sur Ω_I , assure à l'algorithme les mêmes propriétés que dans le domaine continu.

- Phase finale :

$$\forall n \in \llbracket 1, M_\Omega \rrbracket, \quad f(x(n)) = \tilde{f}_{k_{max}}(x(n)) + \hat{f}_{k_{max}}(x(n)). \quad (1.84)$$

1.3.3 Exemples

L'approche de reconstruction prenant en compte des discontinuités est évaluée sur des images synthétiques semblables à celles présentées au paragraphe 1.2.6 et construites à partir d'un modèle modifié comportant une discontinuité d'amplitude non entière $C_d = 28,3$ à l'abscisse $n_\alpha = 600$ (voir figure 1.16). Le champ de normales est estimé avec les mêmes paramètres que dans l'exemple sans discontinuité. Le domaine de reconstruction est composé de $M_\Omega = 924$ points d'échantillonnage. Pour des contraintes de type point(s) discret(s), la fonction $\tilde{f}$ est initialisée par une fonction correspondant à la moyenne des valeurs des contraintes. Pour des contraintes de type frontière, elle est initialisée par la fonction constante définie par l'équation (1.66) avec $\beta = \frac{n_\alpha}{M_\Omega}$. L'équation de Poisson est résolue par une approche rapide tandis que le nombre d'itérations maximal k_{max} est fixé à 300. Les erreurs de norme L^2 et maximale sont consignées dans le tableau 1.2. Elles sont pour l'ensemble des contraintes respectivement inférieures à 0,1 et 1,6 pixels, prouvant ainsi la précision et la robustesse au bruit de la méthode. Elles sont légèrement supérieures aux erreurs observées en l'absence de discontinuité, notamment en raison de la faible fiabilité de l'estimation du champ de normales autour de la discontinuité.

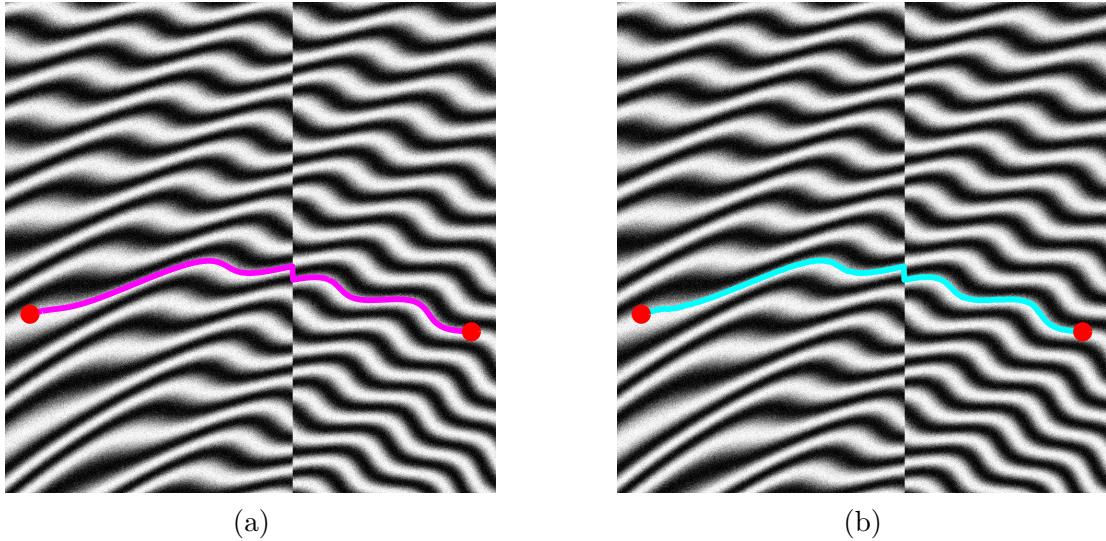


Figure 1.16 – *Reconstruction d'une hypersurface unidimensionnelle discontinue ($C_d = 28,3$ et $n_\alpha = 600$) sous des contraintes de type frontière (en rouge). (a) Modèle; (b) $RSB = 5$, champ de normales estimé ($\sigma_g = \sigma_{acp} = 2$).*

Dans le cas de contraintes de type frontière, la figure 1.17 montre l'évolution selon le nombre d'itérations de la moyenne de la fonction f estimée sur 1000 images pour un RSB de 5. La convergence de l'approche est assurée par la convergence de la différence $C_{k-1} - C_k$ vers 0 (voir figure 1.18). Ces contraintes sont mises en application sur des images sismiques dans le troisième chapitre.

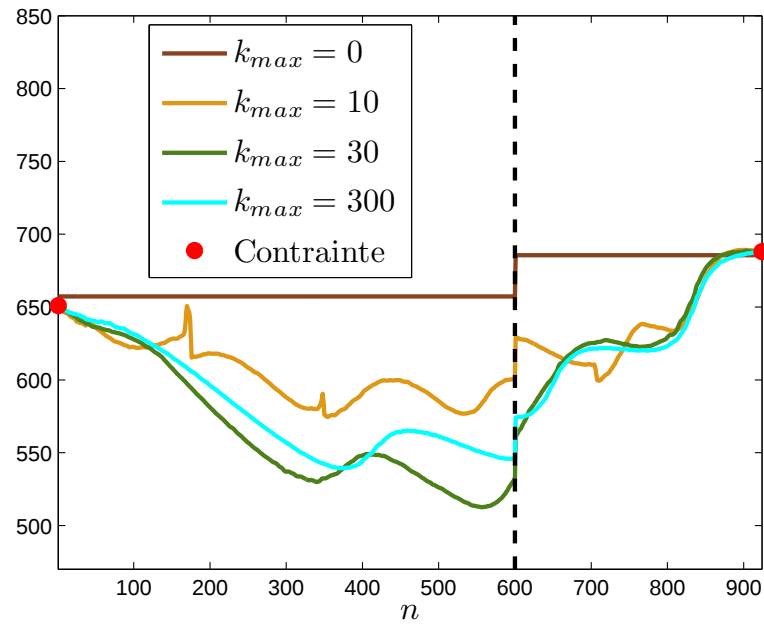


Figure 1.17 – Hypersurface reconstruite selon le nombre d'itérations.

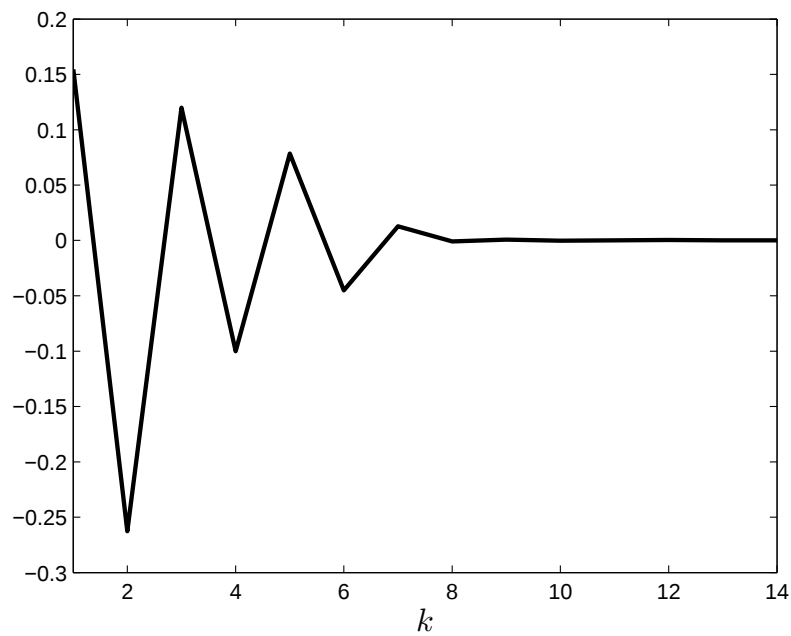


Figure 1.18 – Différence $C_{k-1} - C_k$ selon le nombre d'itération k .

Contraintes	RSB = ∞		RSB = 5	
	E_{L^2}	E_{max}	E_{L^2}	E_{max}
Point unique	$3,51 \cdot 10^{-3}$	0,238	$1,93 \cdot 10^{-2}$	1,42
3 points	$2,31 \cdot 10^{-2}$	0,622	$4,94 \cdot 10^{-2}$	1,58
Frontière	$4,82 \cdot 10^{-3}$	0,22	$2,46 \cdot 10^{-2}$	1,48

Tableau 1.2 – Erreur de norme L^2 et maximale selon le type de contraintes en présence ou pas de bruit.

1.4 Conclusion

L'approche globale de reconstruction d'hypersurfaces d'un espace de dimension finie présentée dans ce chapitre est fondée sur la minimisation d'une équation aux dérivées partielles reliant l'hypersurface au champ de normales associé. Elle permet de reconstruire des hypersurfaces continues en dimension quelconque ou présentant une discontinuité en dimension 2 qui sont exprimées sous une forme explicite dans le repère de définition des normales. Deux catégories de contraintes peuvent être introduites : les contraintes de valeurs qui s'appuient sur la connaissance de l'hypersurface en un nombre fini de points ou sur la frontière de son domaine de définition et les contraintes de bornes lorsque l'hypersurface est bornée et que ses bornes sont connues. Les résultats obtenus sur des images synthétiques bidimensionnelles sont satisfaisants aussi bien dans le cas d'un champ de normales analytique ou estimé par des techniques classiques. Les hypersurfaces reconstruites sont fidèles aux modèles théoriques même en présence d'un bruit important.

Chapitre 2

Reconstruction par changement d'espace conjoint

Sommaire

2.1	Introduction	52
2.2	Hypersurfaces implicites	52
2.2.1	Equation de définition d'une hypersurface	52
2.2.2	Transformation du pendage	54
2.2.3	Reconstruction numérique	56
2.3	Changements d'espace usuels	56
2.3.1	Translation	57
2.3.2	Rotation	57
2.3.2.1	Bidimensionnelle	57
2.3.2.2	Tridimensionnelle	58
2.3.3	Passage en coordonnées N -sphériques	59
2.3.3.1	Bidimensionnelles	59
2.3.3.2	Tridimensionnelles	60
2.3.4	Passage en coordonnées spiraliqes	60
2.4	Applications dans un espace bidimensionnel	62
2.4.1	Images synthétiques	62
2.4.2	Dactyloscopie	67
2.4.3	Météorologie	72
2.4.3.1	Tourbillons océaniques	72
2.4.3.2	Cyclones	74
2.4.4	Astrophysique	77
2.5	Applications dans un espace tridimensionnel	79
2.6	Conclusion	81

2.1 Introduction

La reconstruction d'hypersurfaces d'un champ de normales trouve de nombreuses applications dans des espaces de dimension 2 et 3. Outre l'analyse stratigraphique des images sismiques (horizons) qui fait l'objet du troisième chapitre, elle contribue à l'analyse des empreintes digitales (lignes dermiques), des images météorologiques (lieux de turbulences) ou astrophysiques (bras de galaxies). Dans de nombreux cas, les hypersurfaces considérées sont exprimées sous une forme implicite, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas être représentées par une fonction explicite telle que définie au premier chapitre. La méthode de reconstruction standard par minimisation d'une équation aux dérivées partielles mettant en jeu le pendage n'est par conséquent pas directement applicable.

Nous proposons dans ce chapitre une approche de reconstruction d'une hypersurface implicite dont le point clé est le changement d'espace du pendage [Zin12]. En supposant l'existence d'un repère dans lequel l'hypersurface est exprimable sous une forme explicite, la reconstruction est obtenue par minimisation d'une EDP faisant intervenir le pendage dans le nouveau repère. L'approche nécessite de connaître les équations de changement d'espace entre le repère dans lequel est connu un champ de normales et le repère dans lequel l'hypersurface est explicite.

Ce chapitre est organisé en quatre parties. La première partie décrit la méthode de reconstruction par transformation du pendage tandis que la deuxième partie présente des changements d'espace qui sont mis en œuvre dans les applications en dimension 2 et 3 exposées dans les deux dernières parties.

2.2 Hypersurfaces implicites

Dans cette partie, nous nous intéressons à la reconstruction d'hypersurfaces implicites d'un espace vectoriel E_N de dimension finie N sur $\mathbb{R}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}_x$ défini par une base orthonormée $\mathcal{B}_x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ et un centre O_x . Une hypersurface implicite (voir figure 2.1) est représentée par une fonction implicite f_x définie sur un domaine Ω_x de $\mathbb{R}^N$ par $f_x(\mathbf{x}, x_N) = 0$, où $\mathbf{x}$ désigne la variable $(x_1, \dots, x_{N-1})$.

2.2.1 Equation de définition d'une hypersurface

Supposons l'existence d'un repère orthonormé $\mathcal{R}_y$ de E_N dans lequel l'hypersurface est représentée par une fonction explicite f_y dont la classe de régularité sur un domaine compact Ω_y de $\mathbb{R}^{N-1}$ est considérée au moins égale à 2. Notons $\mathcal{B}_y = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_N)$ la base et O_y le centre du repère $\mathcal{R}_y$.

Chaque point de E_N est alors défini dans les repères $\mathcal{R}_x$ et $\mathcal{R}_y$ respectivement par ses coordonnées $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_N)$ et $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_N)$. Le passage du repère $\mathcal{R}_x$ au repère $\mathcal{R}_y$ s'exprime

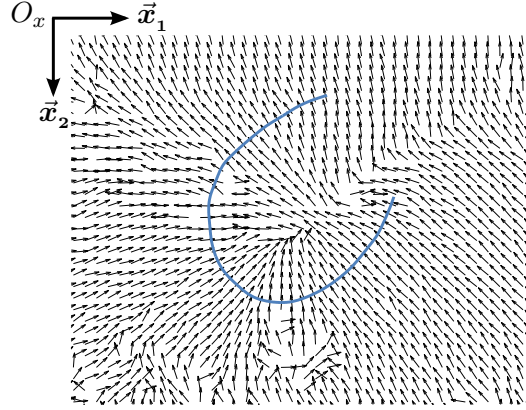


Figure 2.1 – Hypersurface d'un champ de normales bidimensionnel exprimée sous une forme implicite dans le repère $(O_x, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

par un difféomorphisme $\mathcal{F}$. Il s'agit d'une application (ou transformation) bijective différentiable dont l'application bijective réciproque est également différentiable. L'application directe est intégralement caractérisée par son Jacobien (ou matrice jacobienne) $J_{\mathcal{F}}$ en tout point X :

$$J_{\mathcal{F}}(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_N}(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_N}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial x_N}(X) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

En tout point Y , l'application réciproque est également caractérisée par son Jacobien $J_{\mathcal{F}^{-1}}$, qui est égal à l'inverse du Jacobien $J_{\mathcal{F}}$ de l'application directe :

$$J_{\mathcal{F}^{-1}}(Y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(Y) & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N}(Y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1}(Y) & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N}(Y) \end{bmatrix} = [J_{\mathcal{F}}(X)]^{-1}. \quad (2.2)$$

Dans le repère $\mathcal{R}_y$, l'hypersurface vérifie l'équation aux dérivées partielles non linéaire introduite au chapitre 1. Le gradient de la fonction f_y est ainsi égal à la tangente du pendage le long de f_y :

$$\forall y \in \Omega_y, \quad \nabla f_y(y) = \mathbf{p}_y(y, f_y(y)), \quad (2.3)$$

où y désigne la variable $(y_1, \dots, y_{N-1})$. La classe de régularité de la fonction vectorielle $\mathbf{p}_y$ est considérée au moins égale à 1. La reconstruction de l'hypersurface s'obtient alors par la minimisation sous contraintes de l'erreur quadratique moyenne sur Ω_y entre le gradient de la fonction

f_y et la tangente du pendage. La fonction f_y vérifie le problème d'optimisation non linéaire

$$f_y = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2(\Omega_y)} \int_{\Omega_y} \|\nabla g(y) - \mathbf{p}_y(y, g(y))\|^2 dy \quad (2.4)$$

sous des contraintes de valeurs ou de bornes (voir paragraphe 1.2.3).

2.2.2 Transformation du pendage

Pour un point Y de E_N , le pendage exprimé dans le repère $\mathcal{R}_y$ est un vecteur de dimension $N-1$ dont la i -ième composante correspond à l'angle orienté entre le i -ième vecteur $\vec{y}_i$ de $\mathcal{B}_y$ et l'hyperplan $\mathcal{P}_y$ tangent à l'hypersurface (voir figure 2.2). Les composantes $p_{y,i}$ de sa tangente $\mathbf{p}_y$ sont reliées au champ de normales et au Jacobien de l'application $\mathcal{F}^{-1}$ par la relation

$$\forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad p_{y,i}(Y) = - \frac{\sum_{j=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(Y) n_j(\mathcal{F}^{-1}(Y))}{\sum_{j=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial y_N}(Y) n_j(\mathcal{F}^{-1}(Y))}, \quad (2.5)$$

où n_j est la j -ième composante du vecteur normal $\mathbf{n}$.

Démonstration. Au point $Y = (y, f_y(y))$, considérons un vecteur $\mathbf{p}_{y,i}$ appartenant à l'intersection entre l'hyperplan tangent $\mathcal{P}_y$ et le plan $(\vec{y}_i, \vec{y}_N)$ (voir figure 2.2). D'après un résultat classique de géométrie différentielle [Ber92], la transformation réciproque $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{p}_{y,i})$ de ce vecteur appartient à l'hyperplan tangent $\mathcal{P}_x$ et est par conséquent orthogonale au vecteur normal $\mathbf{n}^1$ estimé au point $\mathcal{F}^{-1}(Y)$. La valeur $p_{y,i}$ est donc obtenue en annulant le produit scalaire entre les vecteurs $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{p}_{y,i})$ et $\mathbf{n}$.

Pour un déplacement infinitésimal positif δy_i le long du vecteur $\vec{y}_i$, le vecteur $\mathbf{p}_{y,i}$ et sa transformation réciproque sont exprimés respectivement dans les repères $\mathcal{R}_y$ et $\mathcal{R}_x$ par

$$\mathbf{p}_{y,i} = \delta y_i \vec{y}_i + \delta y_i p_{y,i} \vec{y}_N \quad (2.6)$$

$$\text{et } \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{p}_{y,i}) = \sum_{j=1}^N \delta x_j \vec{x}_j. \quad (2.7)$$

Les composantes du vecteur $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{p}_{y,i})$ sont approximées par un développement limité à l'ordre 1 de la fonction $\mathcal{F}^{-1}$:

1. Il est à noter que dans le cas où l'application $\mathcal{F}$ ne conserve pas les angles, elle ne conserve pas non plus les vecteurs normaux.

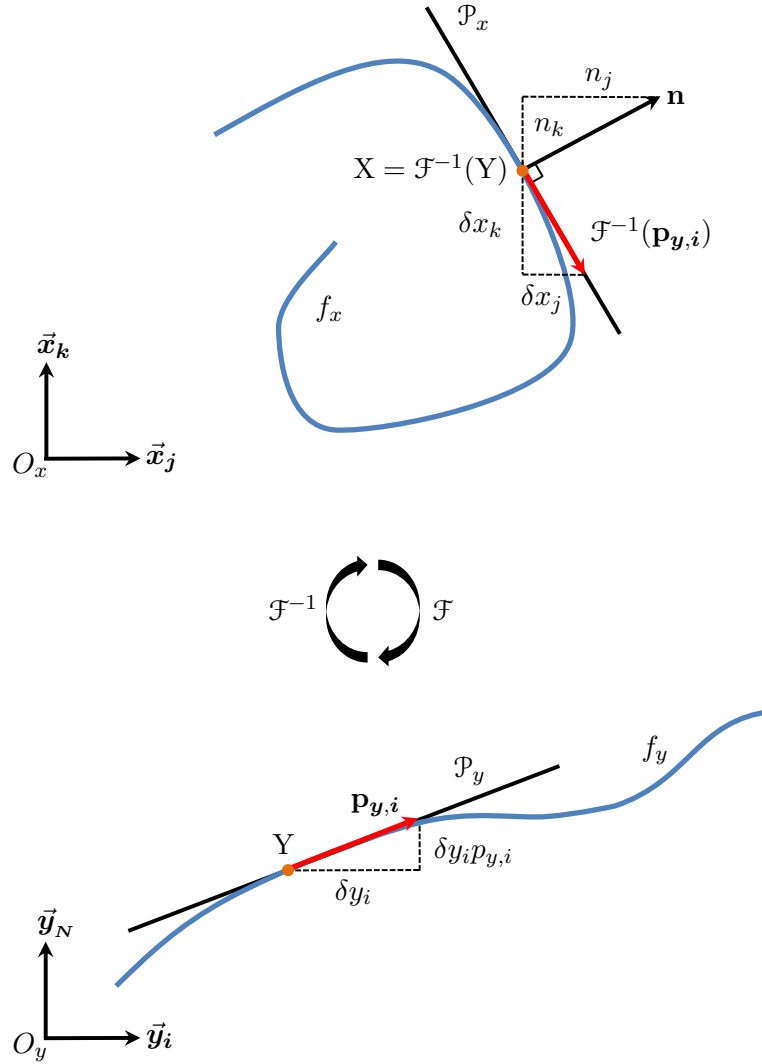


Figure 2.2 – Transformation du pendage par changement d'espace : intersection de l'hypersurface implicite f_x et du plan $(\vec{x}_j, \vec{x}_k)$, et intersection de l'hypersurface explicite f_y et du plan $(\vec{y}_i, \vec{y}_N)$.

$$\begin{aligned}
 \delta x_j &\approx \mathcal{F}_j^{-1}(Y + \mathbf{p}_{y,i}) - \mathcal{F}_j^{-1}(Y) \\
 &\approx \delta y_i \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(Y) + \delta y_i p_{y,i} \frac{\partial x_j}{\partial y_N}(Y),
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\mathcal{F}_j^{-1}$ désigne la j -ième composante de $\mathcal{F}^{-1}$.

Annuler le produit scalaire entre $\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{p}_{y,i})$ et $\mathbf{n}$ conduit alors à l'équation

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}(\mathbf{Y}) + p_{y,i} \frac{\partial x_j}{\partial y_N}(\mathbf{Y}) \right) n_j (\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{Y})) = 0, \quad (2.9)$$

dont la solution est exprimée par l'équation (2.5). $\square$

2.2.3 Reconstruction numérique

Le problème (2.4) est résolu numériquement dans le repère transformé $\mathcal{R}_y$ par la méthode des éléments finis présentée au paragraphe 1.2.4. Le domaine Ω_y est discrétisé par une grille composée de M_Ω points, en supposant un échantillonnage régulier dans chacune des $N-1$ dimensions du domaine. Lorsque les contraintes sont définies dans le repère initial $\mathcal{R}_x$, leurs $N-1$ premières coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_y$ ne coïncident pas forcément avec un point de la grille. Etant donné que la méthode des éléments finis requiert des contraintes de valeurs appartenant à la grille, un ajustement de ces coordonnées est nécessaire. Généralement, les coordonnées sont remplacées par les coordonnées du point de la grille le plus proche. Dans certains cas, la discrétisation du domaine Ω_y s'adapte cependant aux contraintes. Pour une contrainte de type point unique, les coordonnées de la contrainte sont considérées comme un point de la grille et le domaine est défini sur un nombre de points d'échantillonnage donné de part et d'autre de la contrainte dans chaque dimension. Pour des contraintes de type frontière en dimension 2, le pas d'échantillonnage est choisi de telle sorte que les deux points frontières appartiennent à la grille. Ces choix de discrétisation sont appliqués dans la suite de ce chapitre.

Similairement au cas sans changement d'espace, la détermination de la tangente du pendage à chaque itération de l'algorithme se fait « à la volée », pour chaque point de la grille. Etant donné que la transformation inverse de chaque valeur de l'hypersurface ne coïncide pas avec l'échantillonnage naturel du champ de normales, une méthode d'interpolation au plus proche voisin, N -linéaire ou par analyse en composantes principales est mise en œuvre. Cette dernière étant la plus robuste au bruit, elle est retenue pour les applications présentées dans les paragraphes suivants.

2.3 Changements d'espace usuels

Cette partie introduit des transformations usuelles de changement d'espace mises en application en dimension 2 et 3 dans les parties suivantes pour reconstruire des hypersurfaces implicites. Les matrices jacobiniennes des transformations réciproques, utiles à la transformation du pendage, sont également présentées.

Lorsque plusieurs transformations sont appliquées successivement, la matrice jacobienne de la transformation composée réciproque est égale au produit des matrices jacobiniennes des différentes transformations réciproques dans l'ordre d'application des transformations directes. Considérons

une transformation $\mathcal{F}$ définie comme la composée de n transformations :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n \circ \mathcal{F}_{n-1} \circ \dots \circ \mathcal{F}_1, \quad (2.10)$$

où $\circ$ désigne l'opérateur de composition. La transformation réciproque est alors définie comme la composée suivante :

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}_1^{-1} \circ \dots \circ \mathcal{F}_{n-1}^{-1} \circ \mathcal{F}_n^{-1}. \quad (2.11)$$

Sa matrice jacobienne est donc égale en tout point Y au produit

$$J_{\mathcal{F}^{-1}}(Y) = \left[\prod_{i=1}^{n-1} J_{\mathcal{F}_i^{-1}}(\mathcal{F}_{i+1}^{-1} \circ \dots \circ \mathcal{F}_n^{-1}(Y)) \right] J_{\mathcal{F}_n^{-1}}(Y). \quad (2.12)$$

2.3.1 Translation

La translation correspond à un glissement du repère $\mathcal{R}_x$ le long des N vecteurs de la base $\mathcal{B}_x$. En notant $(x_1^{O_y}, \dots, x_N^{O_y})$ les coordonnées du centre O_y du repère translaté $\mathcal{R}_y$ dans le repère initial $\mathcal{R}_x$, les coordonnées X et Y sont liées par les relations

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad y_i = x_i - x_i^{O_y}. \quad (2.13)$$

Le Jacobien de la transformation réciproque en tout point Y est la matrice identité de taille N :

$$J_{\mathcal{F}^{-1}}(Y) = I_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

2.3.2 Rotation

2.3.2.1 Bidimensionnelle

Dans un espace vectoriel bidimensionnel, la rotation est définie par un angle θ dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Les coordonnées X et Y sont liées par les relations

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ y_2 &= x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{cases}. \quad (2.15)$$

Le Jacobien de la transformation réciproque en tout point Y est la matrice :

$$J_{\mathcal{F}^{-1}}(Y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

2.3.2.2 Tridimensionnelle

Dans un espace vectoriel tridimensionnel, la rotation peut être définie par un axe et un angle. L'axe de rotation noté $\vec{r}$ est un vecteur unitaire qui engendre et oriente la droite des vecteurs invariants par cette rotation. L'angle de rotation noté θ est l'angle de la rotation plane associée, c'est-à-dire l'angle de la restriction de la rotation au plan Π orthogonal à l'axe $\vec{r}$ (voir figure 2.3 dans le cas particulier où $\vec{r} = \vec{x}_3$). En notant (r_1, r_2, r_3) les composantes du vecteur $\vec{r}$ dans le repère $\mathcal{R}_x$, les coordonnées X et Y sont liées par les relations

$$\begin{cases} y_1 &= [r_1^2 + (1 - r_1^2)c]x_1 + [r_1r_2(1 - c) - r_3s]x_2 + [r_1r_2(1 - c) + r_2s]x_3 \\ y_2 &= [r_1r_2(1 - c) + r_3s]x_1 + [r_2^2 + (1 - r_2^2)c]x_2 + [r_2r_3(1 - c) - r_1s]x_3 \\ y_3 &= [r_1r_3(1 - c) - r_2s]x_1 + [r_2r_3(1 - c) + r_1s]x_2 + [r_3^2 + (1 - r_3^2)c]x_3 \end{cases}, \quad (2.17)$$

où c et s désignent respectivement $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

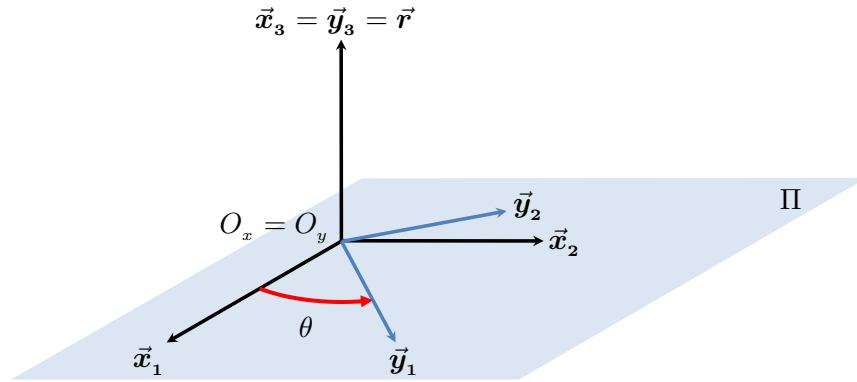


Figure 2.3 – Rotation tridimensionnelle d'axe $\vec{r}$ et d'angle θ .

Le Jacobien de la transformation réciproque en tout point Y est la matrice :

$$J_{\mathcal{F}^{-1}}(Y) = \begin{bmatrix} r_1^2 + (1 - r_1^2)c & r_1r_2(1 - c) + r_3s & r_1r_3(1 - c) - r_2s \\ r_1r_2(1 - c) - r_3s & r_2^2 + (1 - r_2^2)c & r_2r_3(1 - c) + r_1s \\ r_1r_3(1 - c) - r_2s & r_2r_3(1 - c) + r_1s & r_3^2 + (1 - r_3^2)c \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

2.3.3 Passage en coordonnées N -sphériques

Dans un espace vectoriel de dimension N , chaque point peut être défini par ses N coordonnées sphériques qui sont constituées d'une coordonnée radiale et de $N-1$ coordonnées angulaires. La coordonnée radiale, souvent appelée rayon et notée ρ , traduit la distance euclidienne du point au centre O_y (égal au centre O_x du repère initial). Plusieurs conventions concernant la définition des coordonnées angulaires existent dans la littérature, selon le domaine d'application (mathématiques, physique, astronomie, etc.). Dans la convention adoptée dans ce mémoire, les coordonnées angulaires sont définies de telle sorte que la première d'entre-elles et les $N-2$ suivantes appartiennent respectivement aux intervalles $] - \pi, \pi]$ et $[0, \pi]$. Nous présentons ici en détail les coordonnées sphériques bidimensionnelles et tridimensionnelles.

2.3.3.1 Bidimensionnelles

Dans un espace vectoriel bidimensionnel, les coordonnées sphériques sont appelées coordonnées polaires. L'unique coordonnée angulaire, généralement appelée angle polaire et notée θ , exprime la mesure dans le sens trigonométrique de l'angle entre l'axe polaire $\vec{x}_1$ et le vecteur joignant O_x au point. Les coordonnées X et Y sont liées par les relations

$$\begin{cases} y_1 &= \theta &= \arctan(x_1, x_2) \\ y_2 &= \rho &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases} . \quad (2.19)$$

La fonction $\arctan(x_1, x_2)$ correspond à l'arc tangente du quotient $\frac{x_2}{x_1}$ en prenant notamment en compte le quadrant du repère $\mathcal{R}_x$ dans lequel se trouve le point (x_1, x_2) . Le résultat appartient à l'intervalle $] - \pi, \pi]$.

$$\arctan(x_1, x_2) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} . \quad (2.20)$$

Le Jacobien de la transformation réciproque en tout point Y est la matrice :

$$J_{\mathcal{T}^{-1}}(Y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} . \quad (2.21)$$

2.3.3.2 Tridimensionnelles

Dans un espace vectoriel tridimensionnel, les coordonnées angulaires sont généralement notées θ et ϕ . L'angle θ exprime la mesure dans le sens trigonométrique de l'angle entre l'axe $\vec{x}_1$ et le projeté orthogonal du point dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ tandis que l'angle ϕ exprime l'angle orienté entre l'axe $\vec{x}_3$ et le vecteur joignant O_x au point (voir figure 2.4). Les coordonnées X et Y sont liées par les relations

$$\begin{cases} y_1 = \theta = \arctan(x_1, x_2) \\ y_2 = \phi = \arccos\left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\right) \\ y_3 = \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{cases} \quad (2.22)$$

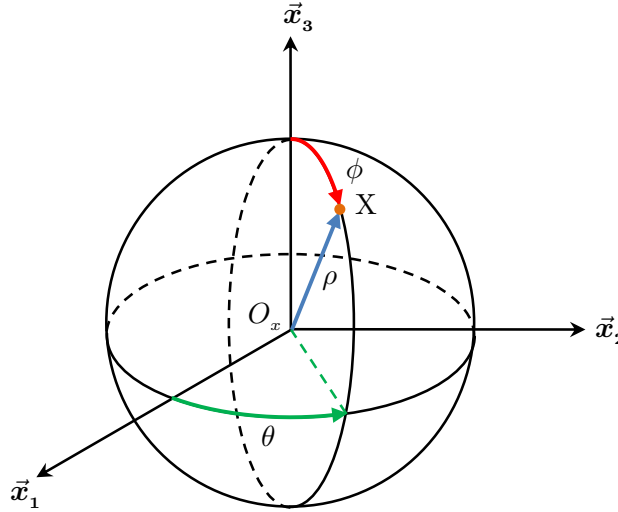


Figure 2.4 – Passage en coordonnées sphériques.

Le Jacobien de la transformation réciproque en tout point Y est la matrice :

$$J_{\mathcal{T}^{-1}}(Y) = \begin{bmatrix} -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ 0 & -\rho \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

2.3.4 Passage en coordonnées spiraliqes

Dans un espace vectoriel bidimensionnel, les coordonnées spiraliqes sont une alternative aux coordonnées polaires. Une spirale est une courbe plane qui s'éloigne de plus en plus d'un point appelé centre autour duquel elle décrit des révolutions. Il existe différents types de spirales,

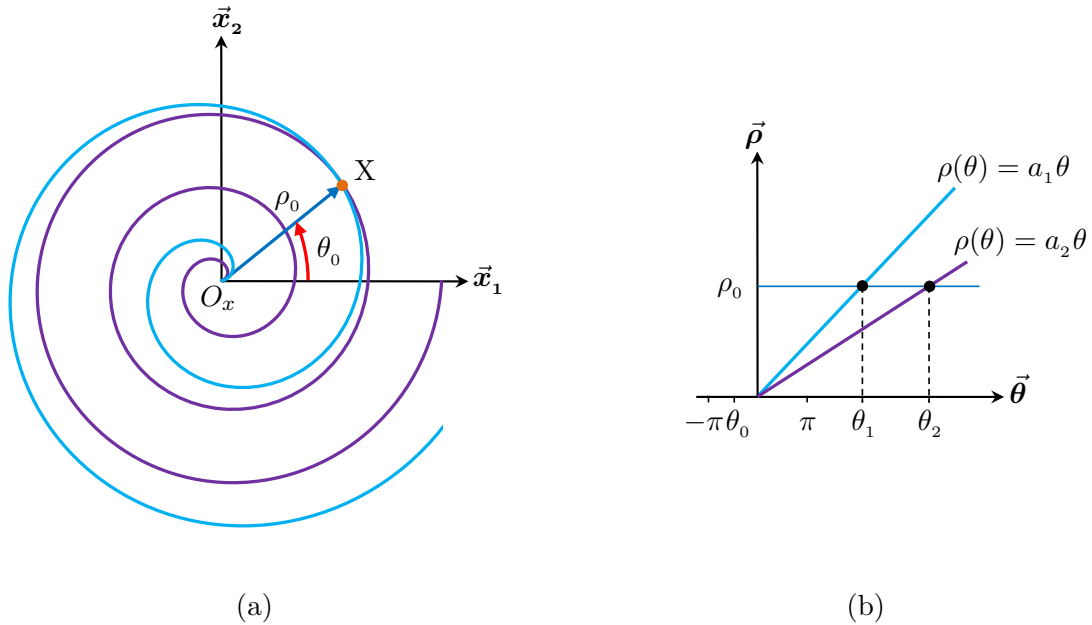


Figure 2.5 – Passage en coordonnées spiraliqes. Deux exemples de spirales arithmétiques positives passant par un point X de coordonnées spiraliqes (θ_1, a_1) et (θ_2, a_2) . Les coordonnées (θ_0, ρ_0) sont les coordonnées polaires de X . (a) Dans le repère initial $\mathcal{R}_x$; (b) Dans le repère polaire.

les plus courantes étant la spirale arithmétique (ou d'Archimède), la spirale logarithmique et la spirale hyperbolique. Nous nous concentrons ici sur la spirale arithmétique (voir figure 2.5). Dans le repère polaire, une spirale arithmétique est une droite linéaire d'équation

$$\rho(\theta) = a\theta, \quad (2.24)$$

où a est un réel et θ décrit soit un intervalle compris dans l'intervalle $[0, +\infty[$, la spirale étant alors dite positive, soit un intervalle compris dans l'intervalle $]-\infty, 0]$, la spirale étant alors dite négative. Pour une valeur donnée de a , les spirales positive et négative associées ont la même forme mais tournent dans le sens contraire.

Les coordonnées spiraliqes définissent un point par une coordonnée angulaire et une coordonnée radiale. Pour tout point, il existe une infinité de coordonnées spiraliqes possibles se différenciant par le choix de la coordonnée angulaire. Cette dernière, notée θ , exprime un angle qui correspond à l'angle polaire auquel il peut être ajouté un multiple de 2π . La coordonnée radiale, notée a , correspond au coefficient directeur de la droite linéaire passant par le point dans le repère polaire. Les coordonnées X et Y sont alors liées par les relations

$$\begin{cases} y_1 &= \theta &= \arctan(x_1, x_2) + 2\pi l_\theta \\ y_2 &= a &= \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\theta} \end{cases}, \quad (2.25)$$

où l_θ est un entier relatif. Le Jacobien de la transformation réciproque en tout point Y est la matrice :

$$J_{\mathcal{F}^{-1}}(Y) = \begin{bmatrix} a(\cos \theta - \theta \sin \theta) & \theta \cos \theta \\ a(\sin \theta + \theta \cos \theta) & \theta \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

2.4 Applications dans un espace bidimensionnel

2.4.1 Images synthétiques

L'approche de reconstruction d'hypersurfaces par changement d'espace du pendage est évaluée sur une image synthétique bidimensionnelle de taille 256×256 pixels (voir figure 2.6) construite à partir d'un modèle mathématique d'intensité I représentant une spirale logarithmique positive :

$$I(x_1, x_2) = 127 \sin \left(\frac{1}{c_1} \ln \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{c_2} \right) - \arctan(x_1, x_2) \right), \quad (2.27)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes réelles respectivement égales à 0,05 et 20. De manière évidente, les hypersurfaces de l'image traitée sont ses lignes d'isovaleurs. Elles sont représentables par une fonction explicite dans plusieurs repères tels le repère polaire, le repère spiranique arithmétique ou logarithmique positif, en choisissant le centre de ces repères égal au centre de l'image. Nous nous intéressons ici aux repères polaire et spiranique arithmétique positif pour différents choix du paramètre l_θ , l'intérêt du repère spiranique logarithmique étant moindre vu que les hypersurfaces y sont représentées par des fonctions constantes. Dans le repère polaire, le modèle mathématique de l'hypersurface passant par un point de coordonnées polaires (θ^P, ρ^P) est

$$f_{y,mod,pol}(\theta) = \rho^P e^{c_1(\theta - \theta^P)}, \quad (2.28)$$

où e désigne la fonction exponentielle. Dans le repère spiranique, le modèle mathématique de l'hypersurface passant par un point de coordonnées spiraniques (θ^P, a^P) est

$$f_{y,mod,spi}(\theta) = a^P \frac{\theta^P}{\theta} e^{c_1(\theta - \theta^P)}. \quad (2.29)$$

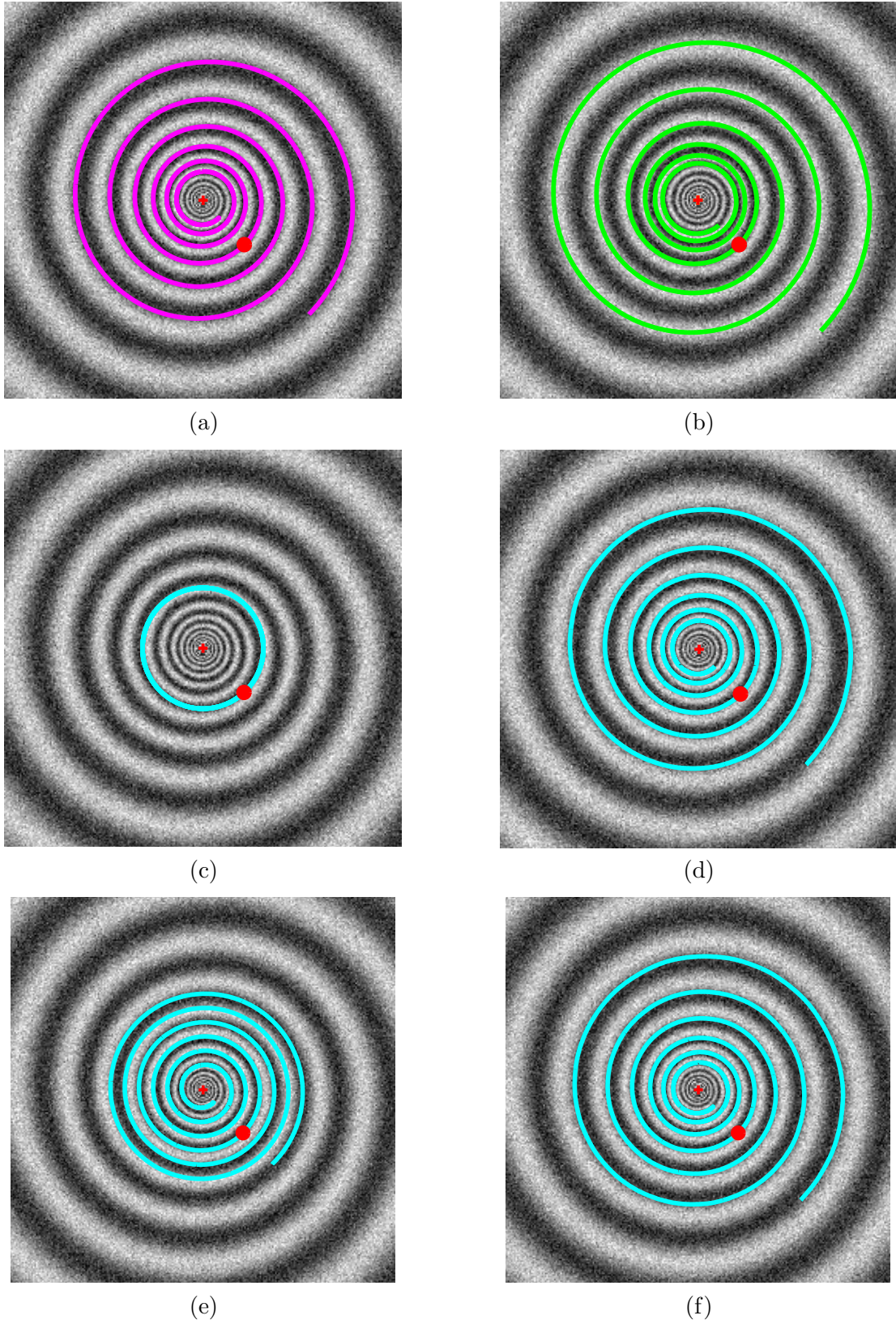


Figure 2.6 – *Reconstruction d'une hypersurface unidimensionnelle sous la contrainte d'un point (représenté par un disque rouge). La croix rouge correspond au centre O_y . (a) Modèle; (b) Intégration du champ de normales; (c) Initialisation (repère polaire); (d) Reconstruction (repère polaire); (e) Initialisation (repère spirallique, $l_0 = 4$); (f) Reconstruction (repère spirallique, $l_0 = 4$).*

Dans ce paragraphe, nous prenons en compte des contraintes de valeurs (point unique, 3 points et frontière) et de bornes. Dans le cas de contraintes de valeurs, l'équation de Poisson est résolue avec les mêmes approches que celles présentées au paragraphe 1.2.6. Dans le cas de contraintes de bornes, les bornes sont construites de sorte à imposer le passage de l'hypersurface par un point donné, choisi ici égal au point considéré comme contrainte de type point discret unique. Le champ de normales considéré est exact ou estimé par une méthode fondée sur une analyse en composantes principales du champ de gradients (voir annexe A). Le champ exact (non normalisé) est défini par :

$$\begin{cases} n_1(x_1, x_2) &= \frac{x_1 + c_1 x_2}{c_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ n_2(x_1, x_2) &= \frac{x_2 - c_1 x_1}{c_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{cases}.$$

La robustesse au bruit de l'algorithme est également évaluée en contaminant l'image initiale par un bruit blanc gaussien centré engendrant un RSB de 5 puis en la définissant sur 256 niveaux.

Une hypersurface reconstruite est comparée au modèle dans le repère transformé (différence, erreurs de norme L^2 et maximale) et dans le repère initial (moyenne, valeur maximale et écart-type de la distance euclidienne). Similairement à l'exemple du paragraphe 1.2.6, une hypersurface reconstruite en présence de bruit est considérée comme étant égale à la moyenne des hypersurfaces estimées sur 1000 images. Dans l'exemple présenté ci-dessous, le domaine de reconstruction Ω_y est un segment de longueur 12π choisi de sorte à s'affranchir des effets de bords liés à une estimation du champ de normales. Pour l'ensemble des reconstructions, chaque segment de longueur 2π du domaine de reconstruction est discrétisé sur 1000 points², le nombre total de points d'échantillonnage M_Ω étant ainsi égal à 6000. Lorsqu'un unique point est imposé comme contrainte, un point d'échantillonnage supplémentaire est ajouté de sorte que M_Ω soit impair : la contrainte coïncide alors avec le milieu de la grille d'échantillonnage et le domaine est discrétisé sur 3000 points de part et d'autre de la contrainte. L'algorithme de reconstruction est initialisé avec une fonction égale à la moyenne des coordonnées radiales des contraintes considérées et le nombre d'itérations maximal est fixé à 300. Les dérivées sur la frontière du domaine sont estimées en choisissant l'échantillon du point d'application ou son opposé comme échantillon supplémentaire.

Dans un premier temps, un unique point est pris en compte comme contrainte. L'hypersurface obtenue à partir du champ de normales exact est extrêmement proche du modèle, la moyenne, l'écart-type et la valeur maximale de la distance euclidienne étant respectivement

2. Le choix de la grille d'échantillonnage du domaine de reconstruction dépend généralement de la forme des hypersurfaces et du bruit additif. Il est à noter que les résultats obtenus en échantillonnant chaque segment de longueur 2π par un nombre de points compris entre 250 et 2000 sont également satisfaisants.

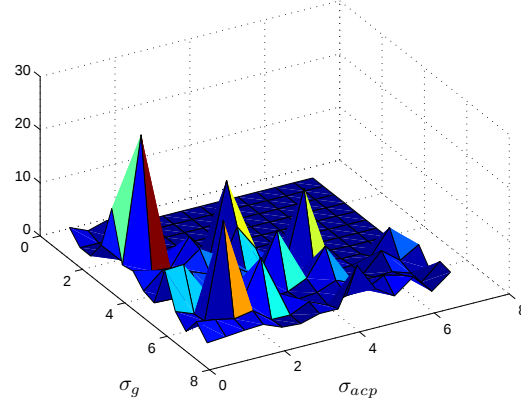


Figure 2.7 – Distance euclidienne moyenne selon les paramètres d’estimation du champ de normales (reconstruction dans le domaine polaire).

égales à $1,69 \cdot 10^{-7}$, $3 \cdot 10^{-7}$ et $1,55 \cdot 10^{-6}$ pixel. Le champ de normales est ensuite estimé en présence de bruit. La figure 2.7 représente la distance euclidienne moyenne en fonction des paramètres d’estimation du champ de normales σ_g et σ_{acp} . Elle met en évidence une convergence de l’algorithme pour des couples $\sigma_g < 4$ et $\sigma_{acp} > 3,5$ mais également une zone de valeurs dans laquelle l’hypersurface reconstruite est aberrante. Dans la suite, le champ de normales est estimé avec le couple $\sigma_g = 2$ et $\sigma_{acp} = 6$ éloigné de la zone de divergence. Les reconstructions sont d’abord étudiées dans les repères transformés (voir figure 2.8). Dans le repère polaire tout comme dans les repères spiraliqes pour une valeur de l_θ respectivement égale à 4, 10 et 100, les erreurs de norme L^2 et maximales (voir tableau 2.1) sont marginales (respectivement inférieures à $2 \cdot 10^{-3}$ et 0,2 pixel). Ces erreurs sont plus faibles dans les repères spiraliqes que polaires, et d’autant plus insignifiantes que le paramètre l_θ augmente. Ce phénomène s’explique par la forme des hypersurfaces selon le repère : l’erreur est d’autant plus faible que la fonction représentant l’hypersurface est proche d’une fonction constante (voir figure 2.9 : l’intervalle de variation de la fonction est de l’ordre de 80 dans le repère polaire tandis qu’il tend vers 0 lorsque l_θ augmente dans le repère spiraliqes).

	Polaire	Spiraliqes		
		$l_\theta = 4$	$l_\theta = 10$	$l_\theta = 100$
E_{L^2}	$1,06 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$2,27 \cdot 10^{-5}$	$1,77 \cdot 10^{-6}$
E_{max}	0,2	$3,49 \cdot 10^{-2}$	$4,83 \cdot 10^{-3}$	$3,38 \cdot 10^{-4}$

Tableau 2.1 – Erreur de norme L^2 et maximale selon le repère transformé.

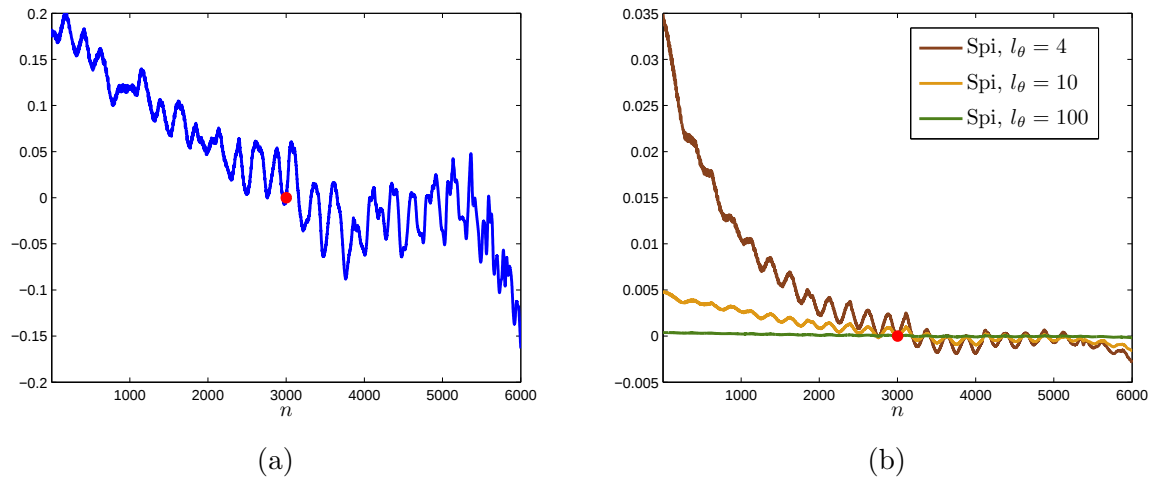


Figure 2.8 – Différence entre les hypersurfaces reconstruites et le modèle selon le repère transformé. Le disque rouge correspond à la contrainte. (a) Repère polaire; (b) Repère spiralique (Spi).

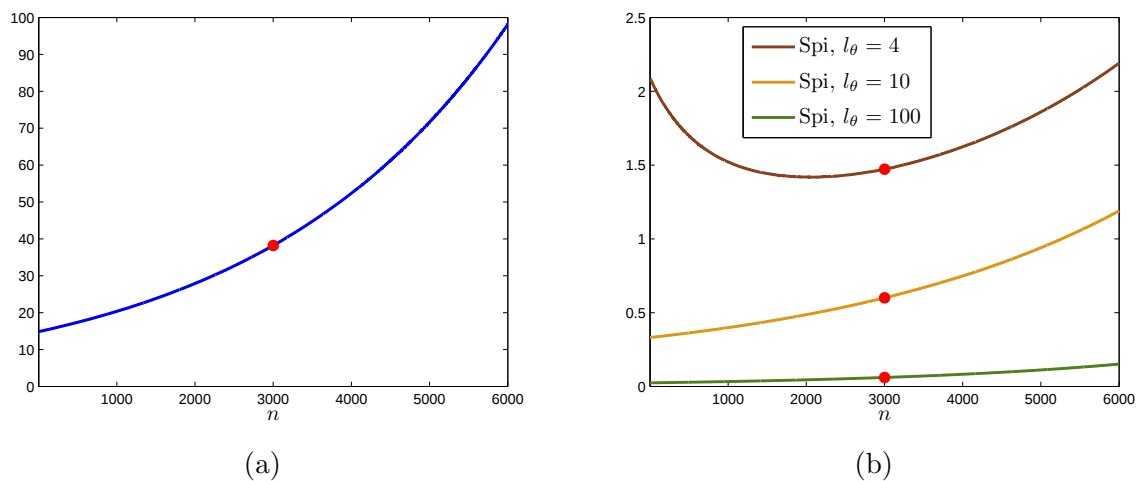


Figure 2.9 – Modèle des hypersurfaces selon le repère transformé. Le disque rouge correspond à la contrainte. (a) Repère polaire; (b) Repère spiralique (Spi).

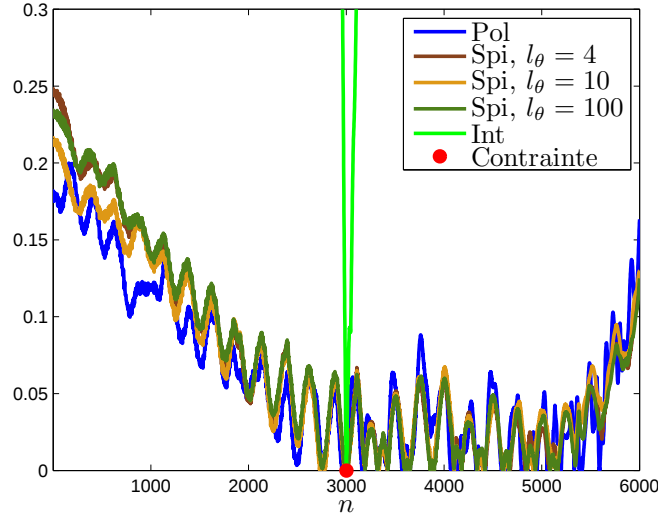


Figure 2.10 – Distance euclidienne selon le repère transformé polaire (*Pol*) ou spiraliq (*Spi*) et la reconstruction par intégration du champ de normales (*Int*).

Les reconstructions sont ensuite observées dans le repère initial. Pour les quatre choix de repère transformé, les moyennes, les valeurs maximales et les écarts-types des distances euclidiennes sont marginales (de l'ordre de 10^{-2} pixels, voir les premières lignes des tableaux 2.2 et 2.3), illustrant la précision et la robustesse au bruit de l'approche de reconstruction. Les quatre hypersurfaces sont quasiment superposées (voir figure 2.10) : aucun repère ne peut ainsi être privilégié par rapport aux autres. Le caractère localement chaotique des courbes représentant les distances peut s'expliquer par les erreurs occasionnées lors de l'estimation du pendage par interpolation, étant donné que deux points très proches dans l'espace transformé ne le sont pas nécessairement dans l'espace initial. Remarquons enfin que la reconstruction par intégration du champ de normales dérive très rapidement en s'éloignant de la contrainte (voir également figure 2.6b).

Dans un deuxième temps, d'autres contraintes sont prises en compte : 3 points, des frontières et des bornes. Les résultats présentés par les tableaux 2.2 et 2.3 confirment la précision et la robustesse au bruit de l'approche.

2.4.2 Dactyloscopie

La dactyloscopie est l'étude des dessins digitaux formés par une empreinte ou une trace digitale, résultat de l'apposition d'un doigt sur un capteur (optique, en silicium, thermique, ultrasonique, etc.). Les dessins digitaux sont composés de lignes noires ou claires représentant respectivement les crêtes et les plis dermiques (voir figure 2.11). Les empreintes digitales se distinguent non seulement par les lignes dermiques mais également par deux autres catégories de caractéristiques [Mie08] : les points singuliers locaux, généralement nommés minuties, et les

Contraintes	Polaire	Spiralique		
		$l_\theta = 4$	$l_\theta = 10$	$l_\theta = 100$
Point unique	$6,41.10^{-2}$ (0,2)	$7,19.10^{-2}$ (0,248)	$6,95.10^{-2}$ (0,217)	$7,3.10^{-2}$ (0,234)
3 points	$9,42.10^{-2}$ (0,145)	$9,52.10^{-2}$ (0,148)	$9,33.10^{-2}$ (0,132)	$9,42.10^{-2}$ (0,140)
Frontière	$4,33.10^{-2}$ (9,52.10 ⁻²)	$4,52.10^{-2}$ (0,11)	$4,23.10^{-2}$ (9,65.10 ⁻²)	$4,3.10^{-2}$ (9,64.10 ⁻²)
Bornes	$5,23.10^{-2}$ (9,12.10 ⁻²)	$5,22.10^{-2}$ (9,03.10 ⁻²)	$5,33.10^{-2}$ (9,12.10 ⁻²)	$5,19.10^{-2}$ (9,22.10 ⁻²)

Tableau 2.2 – Distance euclidienne moyenne (et maximale entre parenthèses) selon le repère transformé.

Contraintes	Polaire	Spiralique		
		$l_\theta = 4$	$l_\theta = 10$	$l_\theta = 100$
Point unique	$5,19.10^{-2}$	$6,45.10^{-2}$	$5,68.10^{-2}$	$6,43.10^{-2}$
3 points	$8,32.10^{-2}$	$8,29.10^{-2}$	$8,34.10^{-2}$	$8,36.10^{-2}$
Frontière	$3,65.10^{-2}$	$3,65.10^{-2}$	$3,71.10^{-2}$	$3,48.10^{-2}$
Bornes	$4,4.10^{-2}$	$4,42.10^{-2}$	$4,49.10^{-2}$	$4,46.10^{-2}$

Tableau 2.3 – Ecart-type de la distance euclidienne selon le repère transformé.

formes tridimensionnelles. Les minuties sont des points d'irrégularité se trouvant sur les lignes dermiques. Les deux types les plus courants sont les terminaisons et les bifurcations de lignes. Les formes tridimensionnelles regroupent les crêtes, les plis, les crevasses, les ruptures, les cicatrices, etc.

La reconstruction de lignes dermiques est une composante essentielle de la dactyloscopie. Premièrement, elle est à la base de nombreuses approches de détection et d'extraction des caractéristiques sus-citées d'une empreinte, en particulier des minuties [Mal09], très utiles notamment en médecine légale et pour la police scientifique. En effet, le caractère quasi-unique et permanent d'une empreinte digitale en fait un outil biométrique très utilisé pour l'identification des individus. Deuxièmement, à partir uniquement de la connaissance de minuties et d'un champ

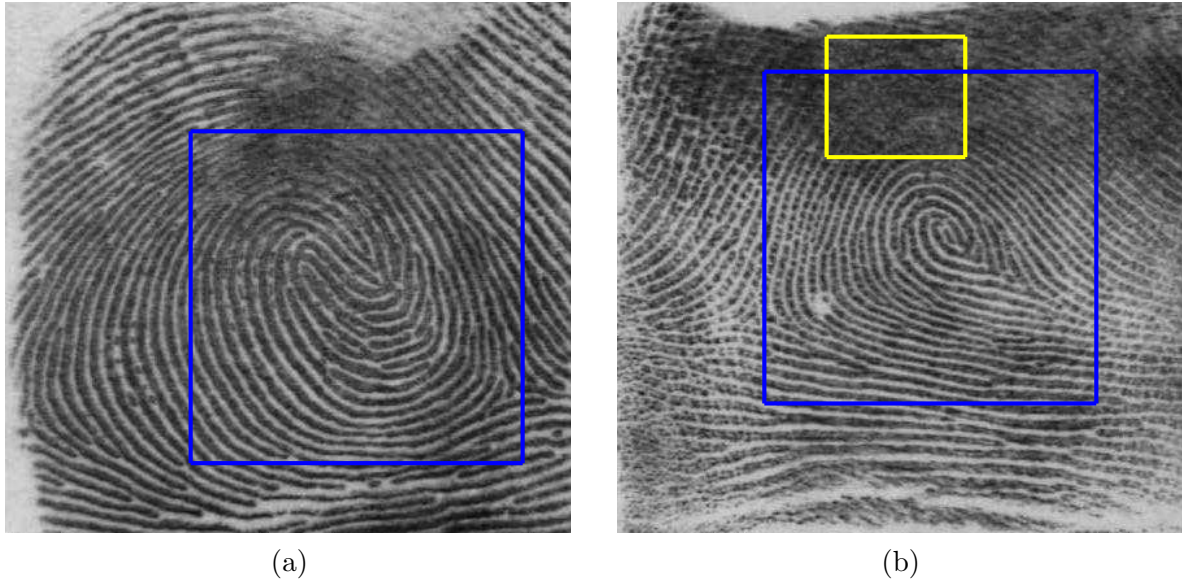


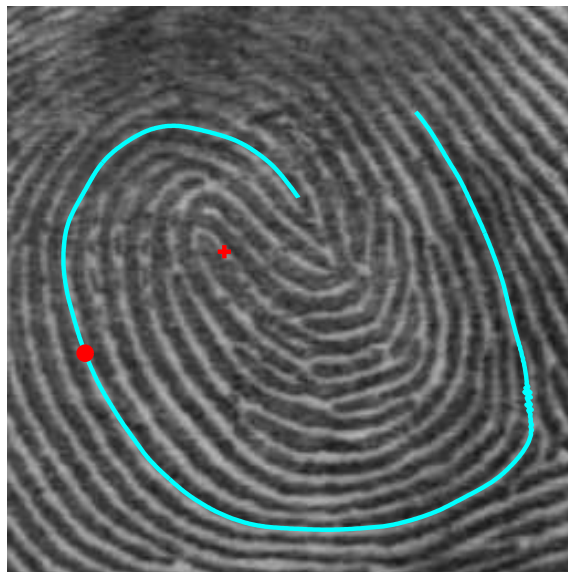
Figure 2.11 – Exemples d’empreintes digitales de taille 438×408 pixels. Les rectangles bleus encadrent les zones agrandies présentées respectivement par les figures 2.12 et 2.13, tandis que le rectangle jaune encadre une zone de « faible » qualité. Source : [Ros07].

d’orientation [Ros07] ou en présence d’images de faible qualité avec des zones fortement bruitées durant leur acquisition [Rah07], la reconstruction de lignes est une étape de la reconstruction complète de l’empreinte et de l’étude de sa structure. Plusieurs méthodes automatiques de reconstruction de lignes ont été développées dans la littérature. La plupart nécessitent une conversion de l’empreinte digitale en image binaire, en réduisant la largeur des lignes à un seul pixel [Rat95] [Mal09]. Dans un objectif de reconnaissance de minuties, la perte d’information suite à la binarisation entraîne cependant des probabilités de fausse détection non négligeables. D’autres approches travaillent directement sur les images originales en niveaux de gris. Les lignes sont reconstruites par intégration d’un champ de normales [Mai97] [Ros07], par un filtrage de Gabor [Gao10] ou encore par une technique multirésolution avec un pré-traitement afin de rehausser l’image [Fro08].

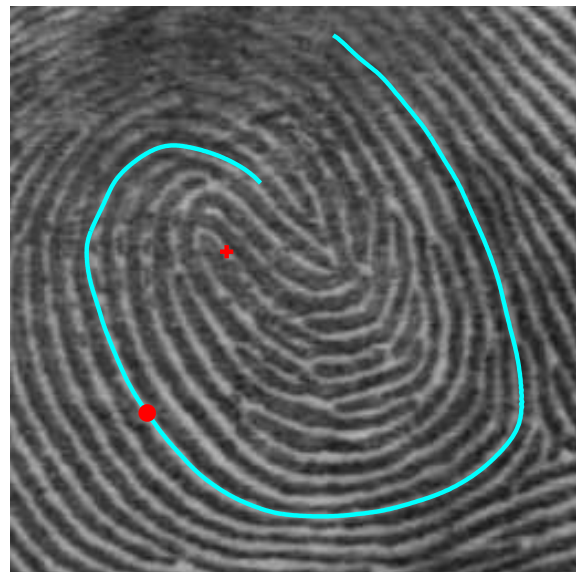
Les lignes dermiques étant les hypersurfaces d’un dessin digital, nous proposons de les reconstruire par l’approche globale de minimisation d’une EDP, suite à l’estimation du champ de normales. Cette méthode est robuste au bruit, ne requiert pas de rehaussement ou de binarisation de l’image, et permet un contrôle *a priori* du domaine de reconstruction. De nombreuses lignes étant des hypersurfaces implicites dans le repère cartésien d’estimation des normales, la connaissance d’un repère dans lequel la ligne est exprimée sous forme explicite est nécessaire. Dans la majorité des cas, le repère polaire est adapté. Son centre associé peut être choisi comme le centre de l’empreinte, détectable directement à partir du champ de normales [Kek09].

La figure 2.12, agrandissement de taille 256×256 pixels d’une partie de la figure 2.11a, pré-

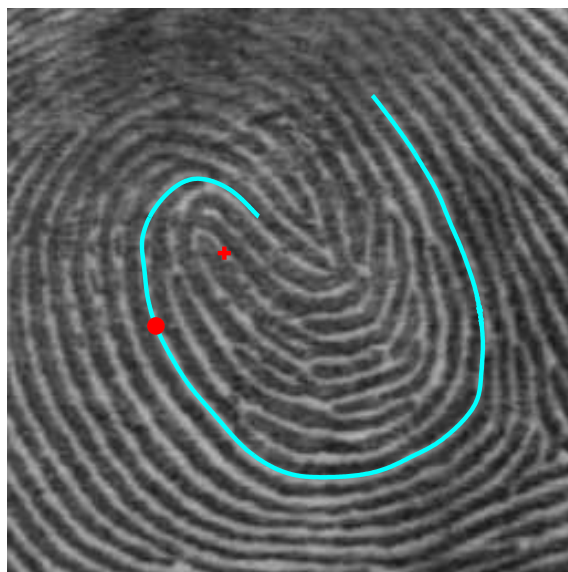
sente quatre exemples de reconstruction de lignes à partir de points contraintes. Le champ de normales est estimé avec les paramètres $\sigma_g = 2$ et $\sigma_{acp} = 6$. Les lignes sont reconstruites dans un repère polaire sur un domaine de longueur 2π centré sur le point contraint. L'algorithme est initialisé par une fonction constante égale à la valeur de la coordonnée radiale du point contraint. L'équation de Poisson est résolue par une approche rapide. La convergence est atteinte au bout de 30 itérations pour 1001 points d'échantillonnage. Les lignes reconstruites semblent se superposer de manière satisfaisante aux lignes observables.



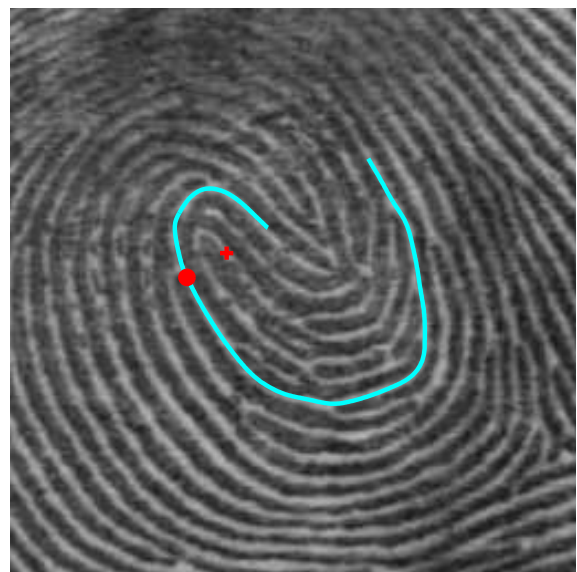
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 2.12 – *Reconstruction de lignes dermiques sous la contrainte d'un point (représenté par un disque rouge). La croix rouge correspond au centre du repère polaire de reconstruction.*

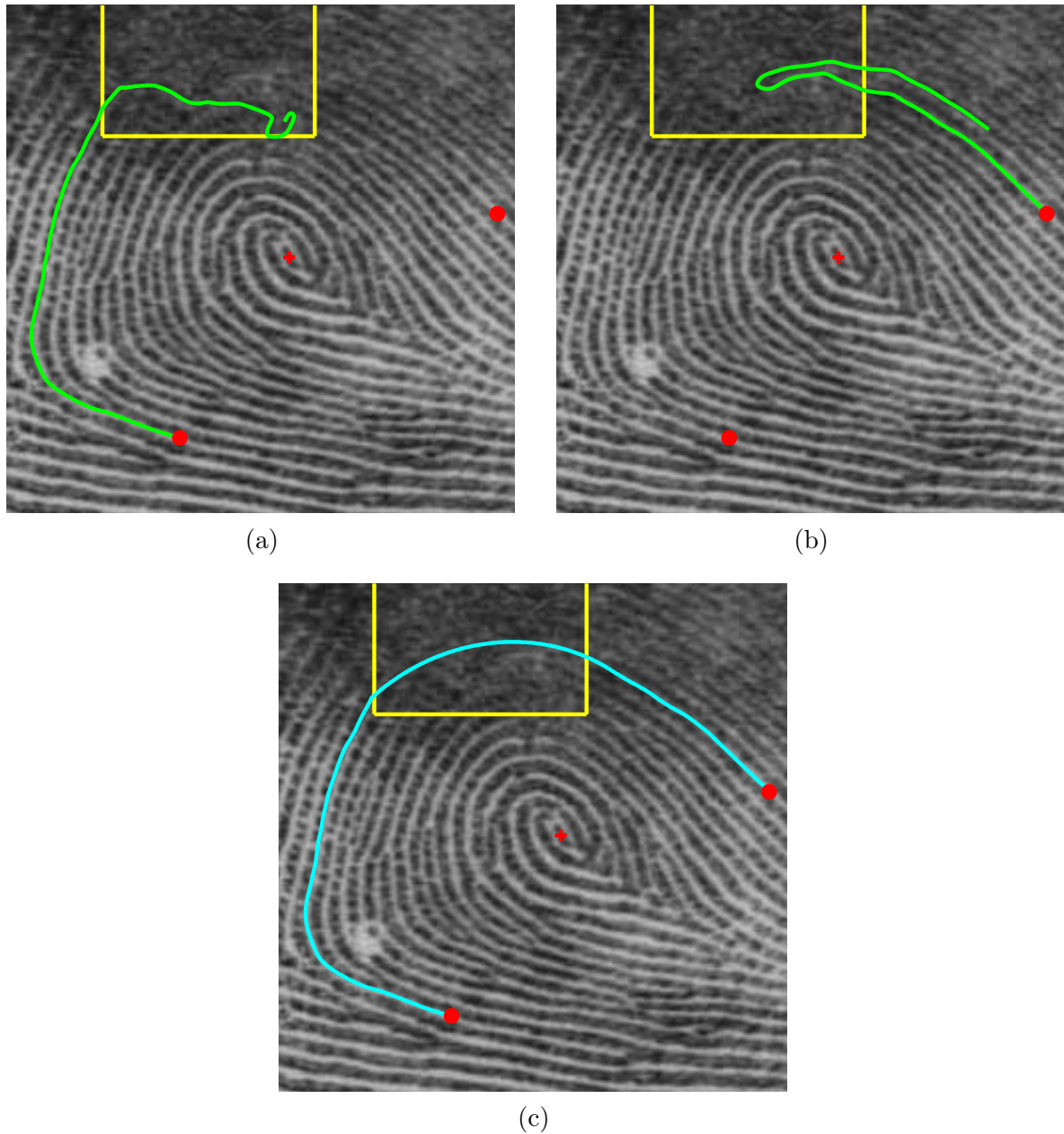


Figure 2.13 – *Reconstruction de lignes dermiques sous des contraintes de type frontière (représentées par des disques rouges). La croix rouge correspond au centre du repère polaire de reconstruction. Le rectangle jaune encadre une zone de « faible » qualité. (a)-(b) Intégration du champ d'orientation ; (c) Approche globale avec prise en compte d'un terme de pondération.*

Certains travaux s'intéressent aux relations de voisinage entre les minuties en cherchant à déterminer la ligne dermique qui les relie [Mie10]. L'application de notre méthode sous des contraintes de type frontière se présente comme une alternative à ces travaux. La reconstruction se révèle cependant difficile dans les zones de l'image où la qualité de l'empreinte est faible. Ces zones fortement bruitées proviennent généralement d'un mauvais contact entre la surface du doigt d'un utilisateur et le capteur d'empreintes digitale ou d'un défaut de ce dernier. Elles conduisent à un champ de normales localement perturbé et peu fiable.

Considérons l'exemple de l'empreinte présentée figure 2.11b, dont une partie de taille 256×256 pixels est agrandie figure 2.13, et qui présente une zone de faible qualité délimitée par un rectangle jaune. Le champ de normales est également estimé avec les paramètres $\sigma_g = 2$ et $\sigma_{acp} = 6$. Les deux lignes indépendantes obtenues par intégration du champ d'orientation en partant des deux points frontières semblent suivre les lignes observables dans la zone non perturbée mais dérivent très rapidement dans la zone bruitée (voir figures 2.13a et 2.13b). La reconstruction de la ligne complète est donc impossible par cette approche. Au contraire, la reconstruction par notre approche globale sous des contraintes de type frontière permet d'obtenir un résultat satisfaisant, y compris dans la zone bruitée (voir figure 2.13c). L'algorithme est ici initialisé par une fonction constante égale à la moyenne des valeurs des coordonnées radiales des points frontières. A chaque itération, un terme de pondération binaire est affecté au terme de droite de l'équation de Poisson afin d'annuler les valeurs du résidu dans la zone de faible qualité (voir paragraphe 1.2.5). L'équation de Poisson est résolue par une approche rapide et la convergence dans un repère polaire est atteinte au bout de 30 itérations pour 500 points d'échantillonnage.

2.4.3 Météorologie

La météorologie est la science qui étudie les phénomènes atmosphériques, notamment en vue d'établir des prévisions de l'évolution du temps ou de la qualité de l'air à court comme à long terme. Les phénomènes étudiés concernent la formation et l'évolution des nuages, des précipitations et du vent en fonction de paramètres mesurés tels que la pression, la température et l'humidité. Nous nous concentrons ici sur une branche particulière de la météorologie qui consiste en la détection du lieu et le suivi dans le temps et dans l'espace de tourbillons océaniques et de cyclones. Les images traitées sont issues de deux types d'images satellites, à savoir les images représentant la température à la surface de l'eau, appelées images SST (*Sea Surface Temperature*), et les images aériennes de cyclones.

2.4.3.1 Tourbillons océaniques

Un tourbillon (ou gyre) océanique est une masse d'eau océanique formée d'un ensemble de courants marins qui tournoie rapidement avec violence sous l'effet de la force de Coriolis. Les objectifs de l'étude des tourbillons océaniques sont multiples : le suivi des évolutions des courants marins, la localisation des phénomènes de remontée d'eau (*upwelling*), l'analyse des fronts

thermiques, etc.

Les tourbillons océaniques sont généralement détectés sur des images SST obtenues par thermographie satellitaire. L'émission infrarouge des premiers millimètres de la mer est captée par le radiomètre de satellites météorologiques tels METEOSAT ou NOAA. Reliée à la température par la loi du corps noir, elle permet l'estimation de la température de surface de la mer. Les images SST (voir figure 2.14) sont des images couleurs codées en format RVB. Une couleur est associée à une plage de température donnée, les températures les plus faibles étant par convention associées au bleu et les plus fortes au rouge.

Les tourbillons correspondant à une zone de fortes températures apparaissent sous la forme d'une zone rouge sur les images SST. Dans l'état de l'art, la détection du lieu des tourbillons comprend souvent une phase de recherche du centre puis une approximation du lieu par un cercle ou une ellipse [Fer09]. Les méthodes sont fondées sur des analyses de textures [Tur09], une information d'orientation provenant d'un champ de vélocité [Soo05], des mesures de flot optique [Ima08], des techniques liées aux réseaux de neurones [Hai08] ou encore des approches multirésolutions liées aux ondelettes [Kar10]. Le suivi temporel des tourbillons est ensuite assuré par application de ces méthodes sur des relevés de température effectués à des instants successifs.

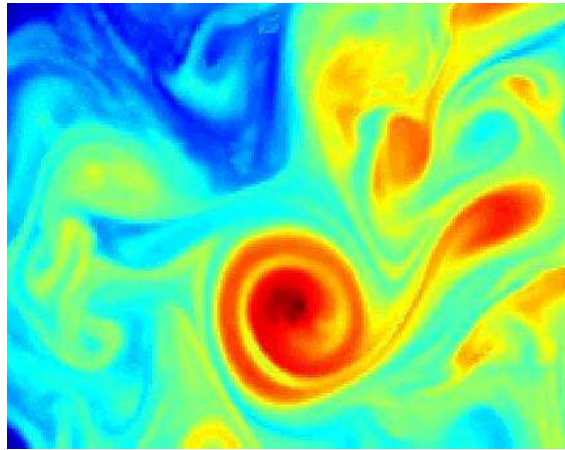


Figure 2.14 – Exemple d'image SST de taille 434×342 pixels représentant un tourbillon océanique. Source : [Kar10].

Sans nous limiter à une ellipse, nous proposons de reconstruire le lieu exact du contour d'un tourbillon qui correspond à une ligne d'isovaleur d'une image SST. Le champ de normales est estimé à partir de l'information de luminance RVB de l'image. Sur l'image représentée figure 2.14, de taille 434×342 pixels, le tourbillon océanique se décompose en deux parties : une partie principale, de forme spirallique, est située dans la zone rouge au centre de l'image et une partie secondaire, semblable à une ellipse, est observable dans la partie droite de l'image. Le champ de normales est estimé avec les paramètres $\sigma_g = 2$ et $\sigma_{acp} = 6$. En supposant connus les centres

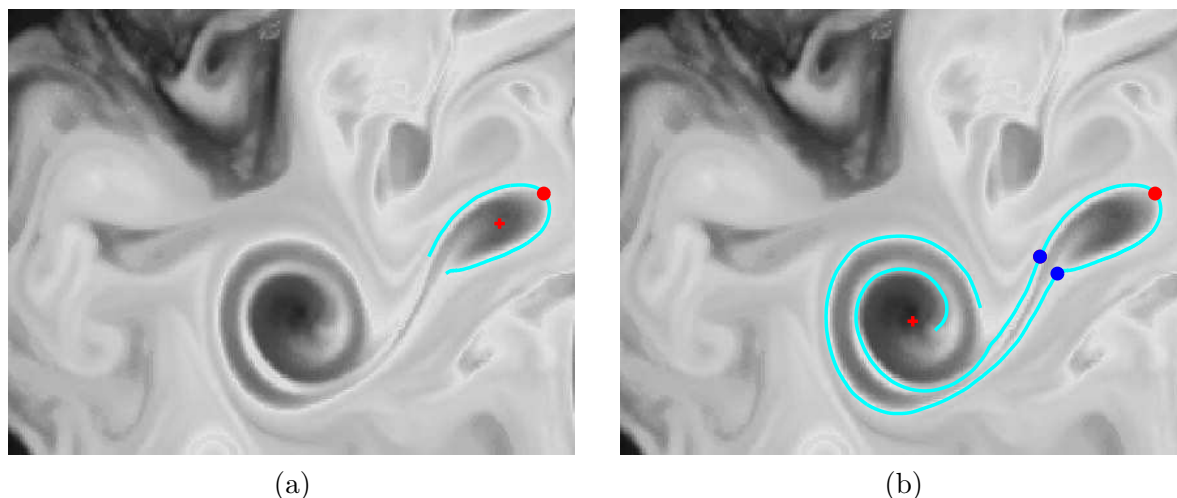


Figure 2.15 – *Reconstruction par parties du lieu du tourbillon océanique. La croix rouge correspond au centre du repère de reconstruction. (a) Partie secondaire sous la contrainte d'un point (représenté par un disque rouge) ; (b) Partie principale sous la contrainte de points correspondant aux extrémités de la partie secondaire (représentés par des disques bleus).*

respectifs des deux parties, le contour du tourbillon est reconstruit en deux étapes successives. La partie secondaire est tout d'abord reconstruite dans un repère polaire sous la contrainte d'un point (voir figure 2.15a). Les deux points aux extrémités de la courbe reconstruite sont alors considérés comme des contraintes pour la reconstruction dans un repère spirالية des deux courbes correspondant à la partie principale (voir figure 2.15b). Pour les trois reconstructions, l'algorithme est initialisé par une fonction constante égale à la valeur de la coordonnée radiale de la contrainte. L'équation de Poisson est résolue par une approche itérative du gradient conjugué (300 itérations). La convergence est atteinte au bout de 30 itérations pour 1001 points d'échantillonnage. La similarité entre les lieux observés et reconstruits est satisfaisante.

2.4.3.2 Cyclones

Un cyclone (ou système cyclonique) est une zone de quelques centaines de kilomètres carrés au sein de laquelle l'air atmosphérique est en rotation autour d'un centre de basse pression locale. Selon le lieu où il se forme, sa source d'énergie et sa structure interne, un cyclone est dit de type tropical, extratropical, subtropical ou polaire. Le centre du cyclone, appelé cœur ou œil, est une zone de quelques dizaines de kilomètres carrés dans laquelle la pression atmosphérique est très basse et la température plus élevée que dans le reste du cyclone. L'anneau nuageux qui encercle le cœur, appelé bras du cyclone, est un tourbillon (ou vortex) matérialisé par l'enroulement spirالية d'une ou de plusieurs bandes de nuages autour d'un centre de rotation situé dans le cœur. À l'intérieur du tourbillon soufflent des vents puissants, dont la vitesse augmente de la périphérie vers le centre, pouvant atteindre les trois cent kilomètres par heure. La direction du vent détermine l'orientation de l'anneau nuageux : la rotation d'un cyclone se fait dans le sens direct dans l'hémisphère nord et dans le sens indirect dans l'hémisphère sud.

Le cyclone compte parmi les phénomènes météorologiques les plus violents. Lors de son passage, il cause généralement en mer une forte houle couplée à une augmentation du niveau de l'eau de plusieurs mètres et s'accompagne souvent de pluies fortes et abondantes. Certains cyclones se révélant dévastateurs, leur prévision est au centre des préoccupations des météorologistes. La plupart des travaux cherchent à prédire le lieu et la trajectoire des cyclones afin d'évaluer leur intensité. La méthode de référence de Dvorak [Dvo75] se base sur des photos satellites des spectres visibles et infrarouges d'un cyclone. Plusieurs travaux sur les images des spectres visibles [Hos99] [Liu06] [Ho09] et infrarouges [Pin10] ont ensuite amélioré cette méthode.

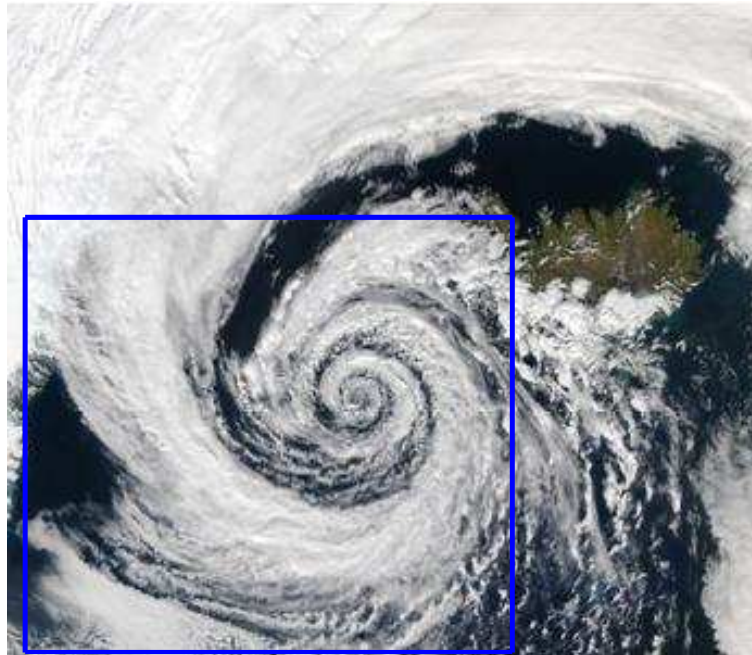


Figure 2.16 – Exemple d'image satellite de taille 348×302 pixels représentant un cyclone. Le rectangle bleu encadre la zone agrandie présentée par la figure 2.17. Source : NASA - Satellite Aqua MODIS, 04/09/2003.

Nous proposons ici de reconstruire le lieu d'un cyclone sur une image codée en format RVB (voir figure 2.16), provenant de satellites tels que QuickSCAT ou Aqua MODIS. Il s'agit de reconstruire une famille de lignes d'isovaleurs de l'image décrivant l'extension du bras du cyclone. Chaque ligne est une hypersurface générée par la méthode de minimisation d'une EDP à partir d'un point dans un repère spiraliqque dont le centre est situé dans le cœur du cyclone (identifiable par exemple par des approches automatiques [Zha05]). L'ensemble des points est disposé à intervalle régulier sur une demi-droite ayant pour origine le centre du repère spiraliqque. Afin d'éviter que les hypersurfaces obtenues ne s'intersectent, la reconstruction est séquentielle et prend également en compte des contraintes de bornes. Sur l'image de taille 348×302 pixels considérée dans ce paragraphe, cinq hypersurfaces (voir figure 2.17c) sont ainsi générées successivement sur un domaine Ω_y de longueur 4π centré sur les points considérés. Les deux hypersurfaces extrêmes sont tout d'abord générées indépendamment sous la contrainte d'un point (voir figure 2.17b).

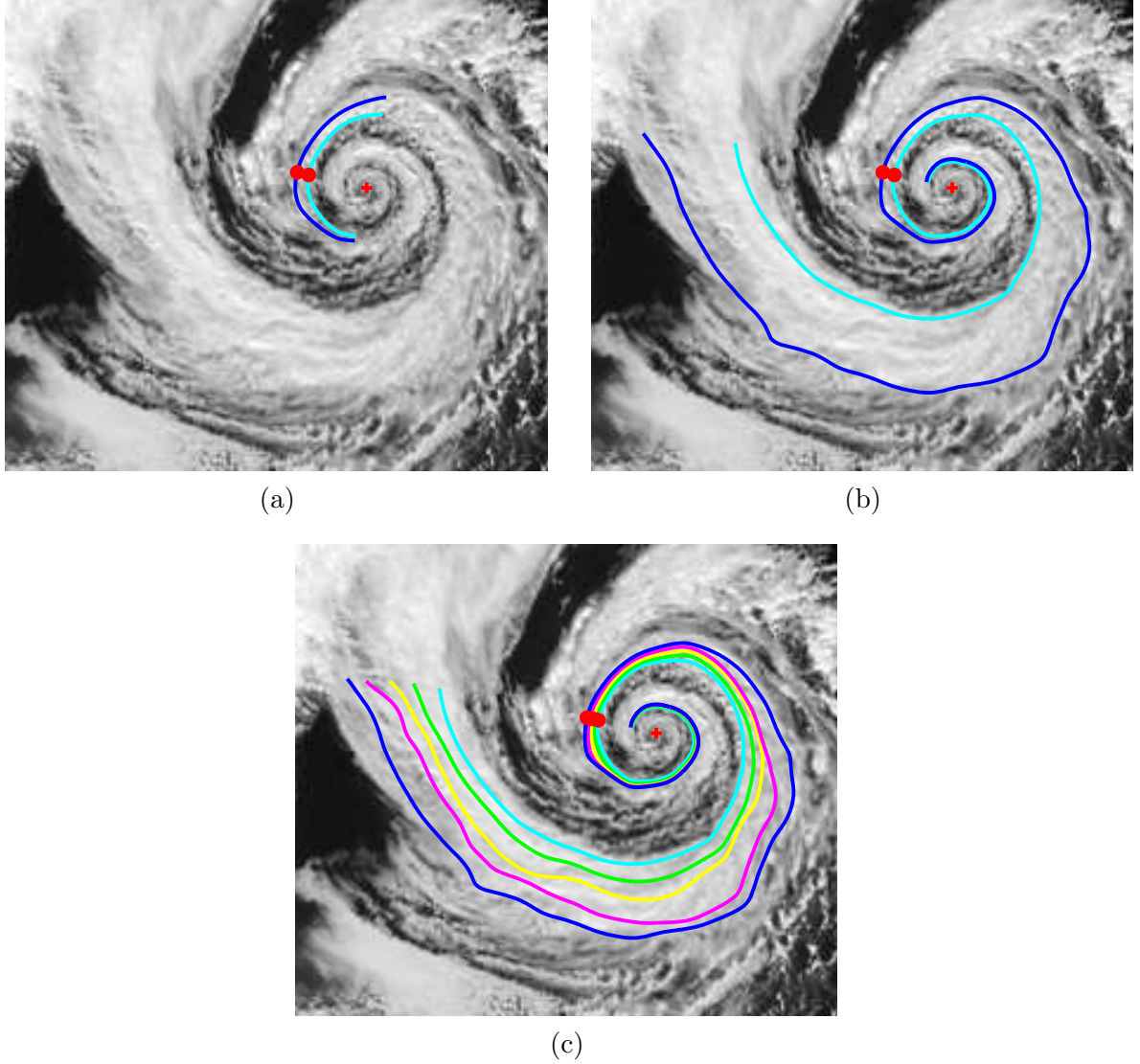


Figure 2.17 – *Reconstruction du lieu du cyclone par extension progressive du domaine sous la contrainte de points (représentés par des disques rouges). La croix rouge correspond au centre du repère spiralique de reconstruction. Reconstruction des hypersurfaces extrêmes (a) sur le domaine initial; (b) sur le domaine complet. (c) Reconstruction de 5 hypersurfaces non intersectantes.*

Elles contribuent ensuite à la construction de contraintes de bornes utiles à la reconstruction de l'hypersurface centrale : les bornes de l'hypersurface centrale correspondent aux hypersurfaces extrêmes auxquelles est ajoutée une fonction de Dirac de sorte à imposer le passage de l'hypersurface par le point central. Les trois hypersurfaces reconstruites permettent enfin de définir similairement les bornes des deux dernières hypersurfaces.

Le champ de normales est estimé avec les paramètres $\sigma_g = 4$ et $\sigma_{acp} = 8$ à partir de l'information de luminance RVB de l'image. Le repère spiralique de reconstruction est paramétré par une valeur $l_\theta = 100$. L'algorithme de reconstruction des hypersurfaces extrêmes est initialisé

par une fonction constante sur 2001 points d'échantillonnage égale à la valeur de la coordonnée radiale des points contraintes tandis que l'équation de Poisson à chaque itération est résolue par une approche rapide. Malgré un nombre important d'itérations (300), les hypersurfaces obtenues sont erronées : elles ne convergent pas vers le lieu du bras du cyclone et ne respectent pas sa structure. Cette instabilité de la méthode de reconstruction par minimisation d'une EDP s'explique par un champ de normales extrêmement peu fiable et un choix d'initialisation de l'algorithme trop éloigné de l'hypersurface attendue. L'estimation du champ de normales est en effet perturbée par l'épaisseur extrêmement variable du bras et par la présence d'un fort bruit, lié à la superposition des couches nuageuses et à l'effet du vent.

Aussi, afin d'obtenir des reconstructions satisfaisantes des deux hypersurfaces extrêmes, nous présentons une approche *ad hoc* d'extension itérative du domaine de reconstruction. Une partie des deux hypersurfaces est tout d'abord reconstruite sur un domaine initial Ω_0 de longueur inférieur à Ω_y et centré sur le point contrainte avec une initialisation obtenue par intégration des vecteurs tangents déduits des vecteurs normaux (voir figure 2.17a). A chaque itération, une partie des hypersurfaces est ensuite reconstruite sur un domaine Ω_i obtenu par extension du domaine considéré à l'itération précédente, en initialisant l'algorithme par les hypersurfaces précédemment estimées prolongées sur le domaine Ω_i par une valeur constante. L'innovation apportée aux hypersurfaces lors d'une itération donnée est ainsi marginale par rapport à la partie stable provenant des hypersurfaces générées précédemment. Au final, les hypersurfaces sont reconstruites sur le domaine complet à partir d'une initialisation proche de l'hypersurface exacte (voir figure 2.17b).

Pour l'exemple présenté, les hypersurfaces extrêmes sont obtenues sur le domaine Ω_y à partir d'un domaine initial Ω_0 de longueur π (discrétisé sur 501 points) étendu 6 fois consécutivement, l'innovation correspondant à une longueur $\frac{\pi}{2}$ à chaque extension. Les reconstructions obtenues semblent correctement localisées au sein du bras du cyclone. Trois autres hypersurfaces sont ensuite reconstruites en initialisant l'algorithme par la fonction moyenne des deux bornes et en fixant le nombre d'itérations maximal à 300. Elles correspondent également au lieu observable du bras.

2.4.4 Astrophysique

L'astrophysique est une branche de l'astronomie qui concerne principalement la physique et l'étude des propriétés des objets de l'univers, telles que leur forme, leur luminosité, leur densité, leur température et leur composition chimique. La discipline qui nous intéresse dans ce paragraphe est l'étude des galaxies. Les galaxies sont des assemblages d'étoiles, de gaz, de poussières et de matière noire. Elles sont généralement classées selon des critères morphologiques (séquence de Hubble) en trois catégories : elliptiques, spirales et irrégulières. Nous nous intéressons aux galaxies spirales qui consistent en un disque aplati constitué de bras de structure spirale formés d'étoiles qui encerclent un bulbe galactique central.



Figure 2.18 – Image de taille 640×444 pixels représentant la galaxie spirale M51. Source : NASA - Télescope spatial Hubble, janvier 2005.

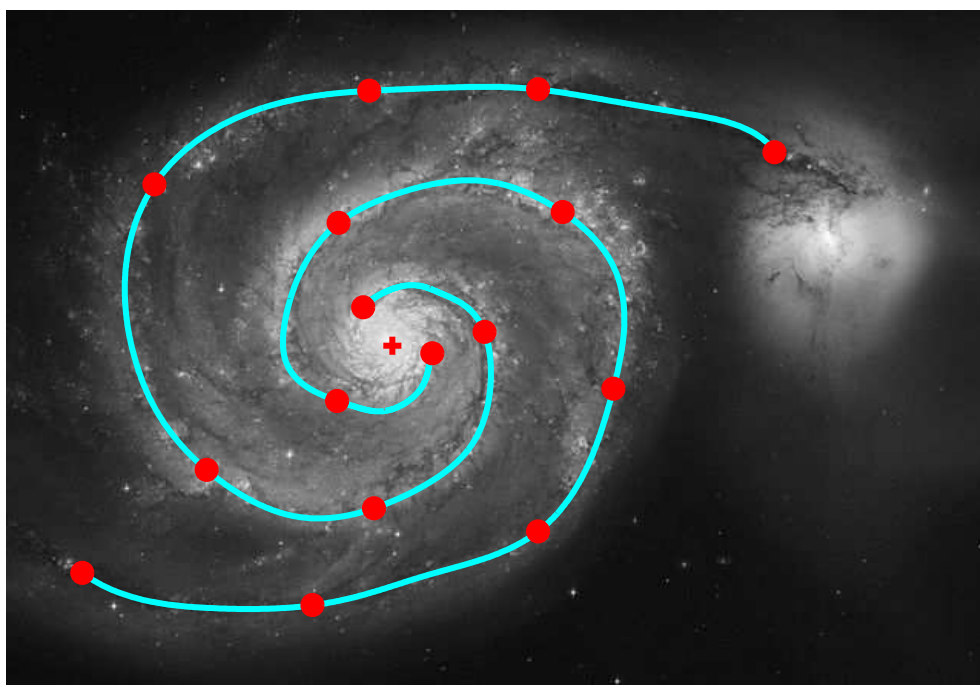


Figure 2.19 – Reconstruction du lieu des bras de la galaxie sous la contrainte de 8 points (représentés par des disques rouges). La croix rouge correspond au centre du repère polaire de reconstruction.

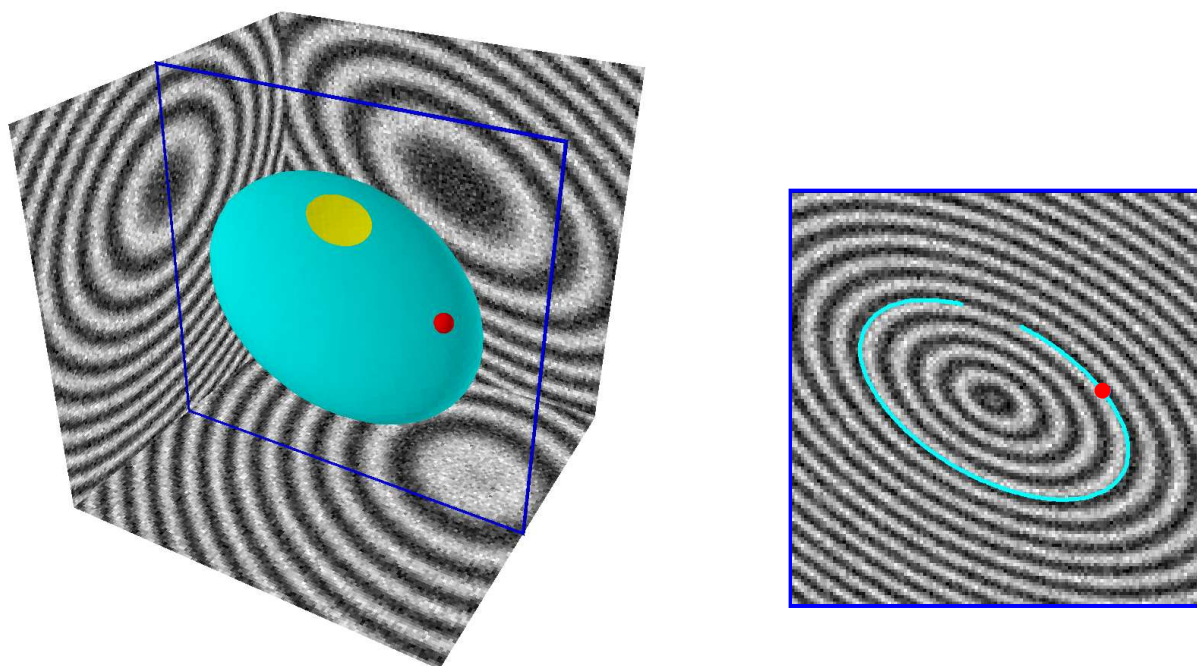
Plusieurs travaux récents [Au06] [Dav12] portent sur l'étude morphologique des galaxies dans le but d'étudier leur évolution au cours du temps. A partir d'une information de texture et d'orientation d'une image satellite, ils présentent des approches automatiques décrivant la forme de la structure des galaxies (centre et rayon) ainsi que la géométrie de leur bras. Nous suggérons de caractériser le lieu d'un bras galactique à partir de la connaissance de la position d'un certain nombre d'amas d'étoiles appartenant à ce bras. En considérant un bras comme une « pseudo-isoaleur » d'une image satellite, le lieu est reconstruit par la méthode de minimisation d'EDP sous des contraintes de type points discrets dans un repère polaire ou spirالية. Il est à noter que la méthode requiert la connaissance de la séquence de la position des contraintes sur le domaine de définition dans le repère transformé.

L'approche est testée sur une photographie satellite (format RVB, 640×444 pixels) de la galaxie spirale M51 observée en janvier 2005 par le télescope spatial Hubble (voir figure 2.18). Sa structure est constituée de deux bras spirales principaux composés de plusieurs milliards d'amas d'étoiles, respectivement représentés par des lignes marrons et des tâches rouges et blanches. Les lignes étant fortement perturbées par du bruit, le champ de normales est estimé avec des paramètres relativement élevés ($\sigma_g = 4$ et $\sigma_{acp} = 10$) à partir de l'information de luminosité RVB de l'image. Huit amas d'étoiles ordonnés sont considérés par bras. La reconstruction est obtenue dans un repère polaire sur un domaine dont la longueur est comprise entre 2π et 4π et délimité par le premier et le dernier amas de chaque séquence. L'algorithme est initialisé par une fonction constante égale à la moyenne des valeurs des coordonnées radiales des contraintes tandis que l'équation de Poisson définie par un système matriciel sur-déterminé est résolu par l'approche itérative (300 itérations) du gradient conjugué. La convergence est atteinte au bout de 100 itérations pour 1500 points d'échantillonnage. Les bras reconstruits (voir figure 2.19) semblent confondus avec les bras observables.

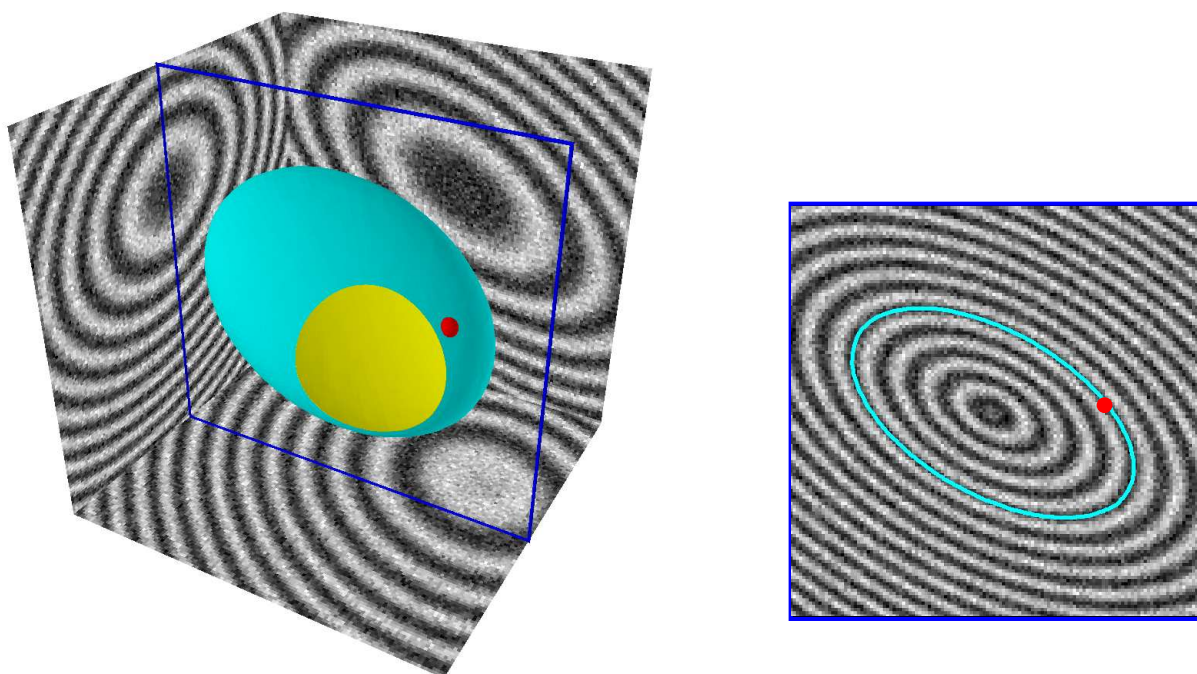
2.5 Applications dans un espace tridimensionnel

L'approche de reconstruction d'hypersurfaces par changement d'espace du pendage est également évaluée sur une image synthétique tridimensionnelle de taille 128×128×128 pixels (voir figure 2.20) construite à partir d'un modèle mathématique d'intensité représentant un ellipsoïde. Les hypersurfaces de l'image sont ses surfaces d'isovaleurs. Chaque hypersurface est représentable par une fonction explicite dans un repère sphérique dont la base est obtenue par une rotation tridimensionnelle R d'axe $\vec{r}$ et d'angle φ de la base cartésienne initiale et dont le centre est placé à l'intérieur de l'hypersurface considérée. L'approche permettant le contrôle du domaine de reconstruction, une hypersurface peut être reconstruite intégralement (il s'agit alors d'une surface fermée) ou partiellement.

Dans l'exemple présenté sur la figure 2.20, une partie d'un ellipsoïde est reconstruite sous la contrainte d'un point sur un domaine Ω_y correspondant au rectangle $] -\pi, \pi] \times [0, \pi - \phi_0]$ où ϕ_0



(a)



(b)

Figure 2.20 – *Reconstruction d'une partie d'une hypersurface tridimensionnelle sous la contrainte d'un point (représenté par une sphère rouge). Les images bidimensionnelles sont des coupes délimitées par un rectangle bleu dans les images tridimensionnelles. (a) $S = (64, 29, 60)$, $\phi_0 = \frac{\pi}{9}$; (b) $S = (88, 63, 42)$, $\phi_0 = \frac{\pi}{5}$.*

appartient à l'intervalle $]0, \pi[$. En choisissant le centre du repère sphérique O_y égal au centre de l'ellipsoïde, le lieu de la partie non reconstruite de sommet S dépend uniquement du choix de la rotation R , dont l'axe et l'angle sont respectivement définis par

$$\vec{r} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{y}_3}{\|\vec{u}\|} \quad (2.30)$$

$$\text{et } \varphi = \arcsin(\|\vec{r}\|), \quad (2.31)$$

où $\vec{u}$ est le vecteur joignant O_y à S et $\wedge$ désigne l'opérateur produit vectoriel.

L'image est contaminée par un bruit blanc gaussien centré engendrant un rapport signal sur bruit de 5 et définie sur 256 niveaux avant l'estimation du champ de normales tridimensionnel avec les paramètres $\sigma_g = 2$ et $\sigma_{acp} = 6$. L'algorithme de reconstruction est initialisé par une fonction constante égale à la valeur de la coordonnée radiale de la contrainte tandis que l'équation de Poisson est résolue par une approche rapide. La convergence est atteinte au bout de 300 itérations pour une grille d'échantillonnage composée de 501×251 points. La figure 2.20 montre les reconstructions obtenues pour deux couples (S, ϕ_0) . Elles sont superposées avec le modèle théorique, les distances euclidiennes moyenne et maximale étant de l'ordre de 10^{-2} pixel.

2.6 Conclusion

L'approche présentée dans ce chapitre permet de reconstruire une hypersurface d'un champ de normales de dimension finie qui est exprimée sous une forme implicite. Elle est fondée sur un changement d'espace du pendage : en supposant la connaissance d'un repère dans lequel l'hypersurface est exprimée sous une forme explicite, elle consiste à minimiser l'équation aux dérivées partielles présentée au premier chapitre et qui met en jeu le pendage dans le nouveau repère. La méthode requiert les équations du changement de repère entre le repère initial dans lequel est défini le champ de normales et le nouveau repère. Elle prend en compte des contraintes de valeurs et de bornes. Le domaine de reconstruction étant contrôlé, une hypersurface peut être reconstruite intégralement ou partiellement.

Les résultats obtenus sur des images synthétiques bidimensionnelles et tridimensionnelles démontrent la robustesse au bruit de l'approche dans les cas où le champ de normales est peu fiable. La qualité des reconstructions semble ne pas dépendre du changement d'espace considéré. En dimension 2, la méthode trouve des applications dans la caractérisation des lignes dermiques d'empreintes digitales et la détermination des lieux de turbulences météorologiques et de bras galactiques.

Chapitre 3

Application à l'analyse stratigraphique des images sismiques

Sommaire

3.1	Introduction	84
3.2	Reconstruction d'horizons sismiques sous contraintes	86
3.2.1	Points de passage	87
3.2.2	A priori stratigraphiques	88
3.2.3	A priori structuraux	89
3.3	Reconstruction rapide et interactive par parties	92
3.3.1	Subdivision rectangulaire	95
3.3.2	Subdivision quadrangulaire	97
3.3.2.1	Construction du pavage	97
3.3.2.2	Reconstruction rapide sur un pseudo-rectangle	99
3.3.2.3	Application au quadrangle	100
3.3.2.4	Reconstruction de l'horizon complet	101
3.3.3	Exemple	102
3.3.3.1	Cas bidimensionnel	103
3.3.3.2	Cas tridimensionnel	105
3.4	Détection automatique de discontinuités dans un espace bidimensionnel	112
3.4.1	Principe	113
3.4.2	Exemple	115
3.5	Conclusion	117

3.1 Introduction

Une production pétrolière optimale s'appuie sur une connaissance et une interprétation très précise du contexte géologique des régions prospectées, qui atteignent quelques fois plusieurs centaines de kilomètres de long et de large. Généralement, les rares éléments géologiques disponibles, tels que ceux parfois visibles en surface, sont insuffisants à une compréhension satisfaisante du sous-sol. L'exploration géophysique permet de s'affranchir de cette carence naturelle d'information : des grandeurs physiques sont mesurées en surface ou dans des puits, puis interprétées en termes géologiques. La méthode d'acquisition la plus répandue, nommée sismique par réflexion (cf. annexe D), conduit à la formation d'images bidimensionnelles ou tridimensionnelles représentant la succession et les limites des couches géologiques (voir figure 3.1). Les images sont formées de la juxtaposition de signaux unidimensionnels, appelés traces sismiques, représentés en colonnes.

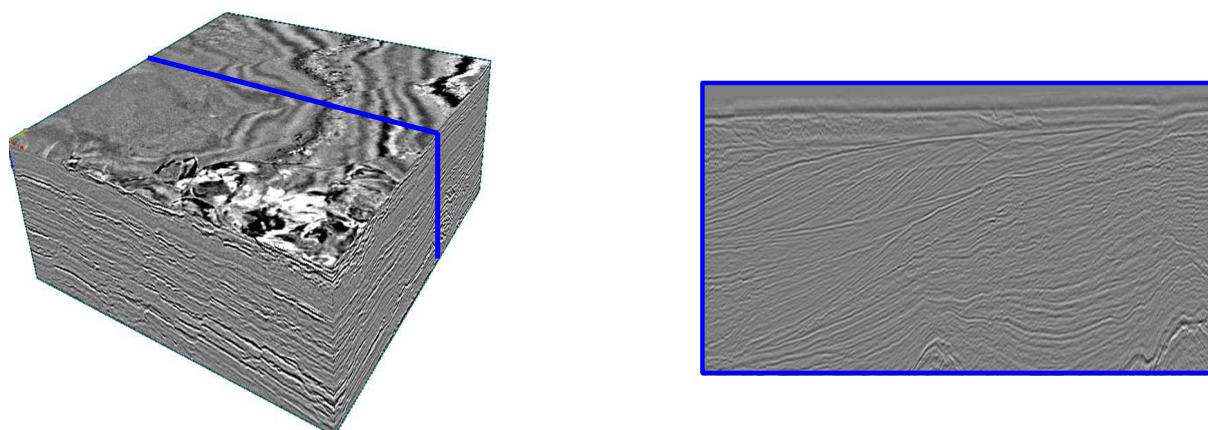
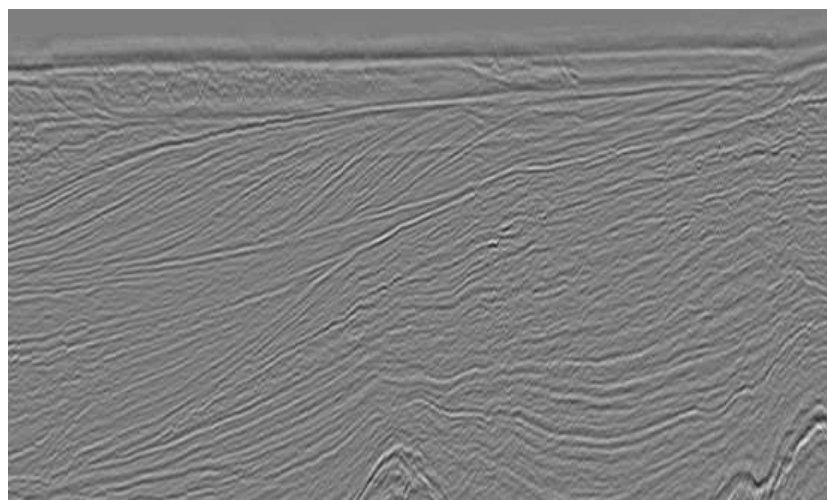


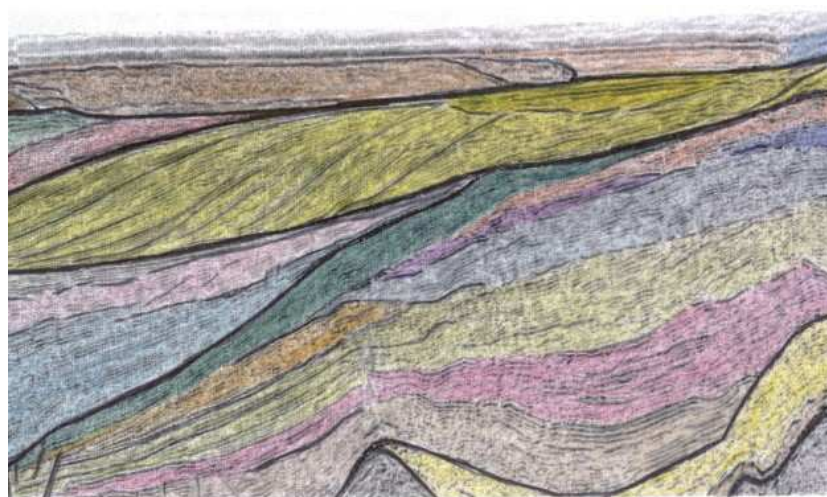
Figure 3.1 – *Image sismique tridimensionnelle et coupe bidimensionnelle associée.*

L'analyse des images sismiques a différents objectifs : la confirmation de modèles géologiques du sous-sol [Don01], l'étude d'une chronozone ou d'une séquence lithologique particulière, ou encore la caractérisation de réservoirs potentiels d'hydrocarbure [Hoy11]. Il s'agit souvent d'identifier des roches mères où des matières organiques décomposées se sont transformées en hydrocarbures, d'analyser les migrations possibles de ces hydrocarbures et de localiser les sites susceptibles de les avoir piégés. L'analyse des images sismiques est un processus complexe comportant plusieurs volets parmi lesquels figure l'analyse stratigraphique.

L'analyse stratigraphique consiste à identifier des séquences de dépôts sédimentaires. Une séquence de dépôts, ou séquence sismique, est une succession de couches délimitées par des structures surfaciques fortement marquées, nommées *horizons sismiques*, qui apparaissent sous la forme de lignes sombres ou claires (voir figure 3.2a). Affaire de géologues, l'identification ma-



(a)



(b)

Figure 3.2 – (a) Exemple d'image sismique et (b) son analyse par un expert. Sur l'image (b), chaque couleur représente une époque de dépôt différente et les lignes noires correspondent à des horizons sismiques.

nuelle (voir figure 3.2b) se révèle une tâche fastidieuse, notamment sur des données de grande taille, et sujette à des erreurs d'interprétation. La conjoncture actuelle, marquée par l'augmentation de la demande pétrolière avec l'appauvrissement des gisements existants et la nécessité d'examiner des zones stratigraphiques plus grandes et plus complexes, conduit à une automatisation des méthodes d'interprétation. Le partenariat entre le groupe Total et le laboratoire IMS s'inscrit dans le cadre de cette automatisation, les méthodes se formalisant en termes de traitement d'images. Les procédés développés sont intégrés au logiciel d'interprétation sismique SismageTM conçu par Total.

La reconstruction automatique d'horizons sismiques, qui constitue l'objet de ce chapitre, est une étape clé de l'analyse stratigraphique. A titre d'exemple, elle joue un rôle primordial dans l'approche *GeoTime* qui consiste en l'aplanissement d'une donnée sismique par changement d'espace afin d'en favoriser la segmentation. Cette technique classique d'identification de séquences de dépôts, présentée en détail dans l'annexe E, a fait l'objet de plusieurs travaux au sein du laboratoire [Don99] [Don01] [Tou08]. Deux types d'approches sont généralement mis en œuvre pour reconstruire un horizon sismique. Le premier est fondé sur l'« intégration » du champ de normales à partir d'un point initial [Lav93] [Bli05] tandis que le deuxième consiste à minimiser sous des contraintes de valeurs ou de bornes l'EDP présentée au paragraphe 1.2.3 qui met en jeu le pendage en considérant l'horizon comme une hypersurface explicite d'un espace de dimension 2 ou 3 [Lom06b] [Lom06c]. Cette dernière approche suppose un horizon dont la classe de régularité est au moins égale à 2. L'aspect généralement régulier des horizons (voir figure 3.2) légitime cette hypothèse.

Ce chapitre comprend trois parties. La première partie propose des exemples de reconstruction d'horizons sismiques par la méthode de minimisation d'une EDP sous différentes contraintes. La deuxième partie présente une méthode innovante de reconstruction rapide et interactive par parties d'un horizon respectant un ensemble de points, qui peut se substituer à la méthode de reconstruction globale coûteuse en temps de calcul. Fondée sur un pavage efficace du domaine de reconstruction, elle comprend un changement de support considéré comme un cas particulier du changement d'espace introduit au deuxième chapitre. La troisième partie décrit notre contribution à la reconstruction d'horizons unidimensionnels présentant une discontinuité quasi-verticale d'amplitude et de lieu inconnus. Dans l'ensemble du chapitre, les horizons reconstruits sont confrontés aux horizons observables sur les images sismiques bien que la comparaison puisse souffrir de l'absence de vérité terrain.

3.2 Reconstruction d'horizons sismiques sous contraintes

Dans cette partie, nous présentons des reconstructions d'horizons sismiques unidimensionnels par minimisation d'une EDP sous contraintes. Le champ de normales est estimé sur les images sismiques par la méthode classique présentée dans l'annexe A. Pour l'intégralité des images, les valeurs des paramètres considérées sont $\sigma_g = \sigma_{acp} = 1,5$ qui sont des valeurs généralement adaptées à des données sismiques. La discrétisation du domaine de reconstruction respecte l'échantillonnage naturel des données. Sauf indication contraire, l'algorithme de reconstruction est initialisé par un horizon égal à la moyenne des valeurs des contraintes. L'équation de Poisson discrète est résolue par une approche rapide dans le cas de contraintes de type point unique ou frontière et par une approche itérative du gradient conjugué pour 300 itérations en considérant un système matriciel sur-déterminé dans le cas de contraintes de type points multiples. En raison de la régularité des horizons sismiques, la convergence est atteinte rapidement : le nombre d'itérations maximal de l'algorithme retenu dans la suite est par conséquent égal à 30.

3.2.1 Points de passage

Toutes les approches de reconstruction présentées dans les deux premiers chapitres de ce mémoire s'appuient sur la connaissance minimale d'une contrainte de type point discret. Celle-ci peut être vue comme un point de passage de l'horizon à reconstruire et est désignée par le terme *germe* dans les travaux de Lomask [Lom06c]. A titre d'exemple, les horizons sont estimés dans l'approche *GeoTime* à partir de germes situés de manière régulière sur l'ensemble de la donnée. La figure 3.3 présente un exemple de reconstruction sur une image sismique de taille 401×151 pixels à partir d'un germe. L'horizon reconstruit semble se confondre avec l'horizon observé.

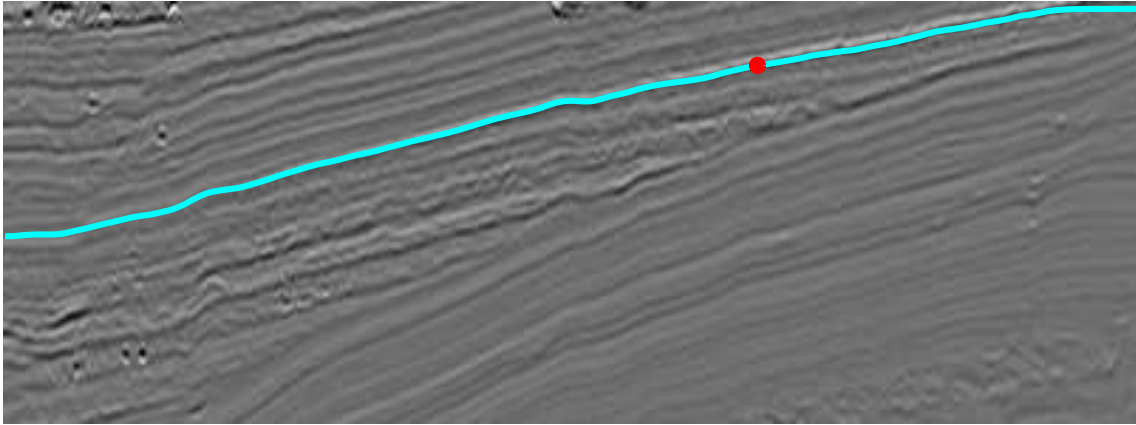
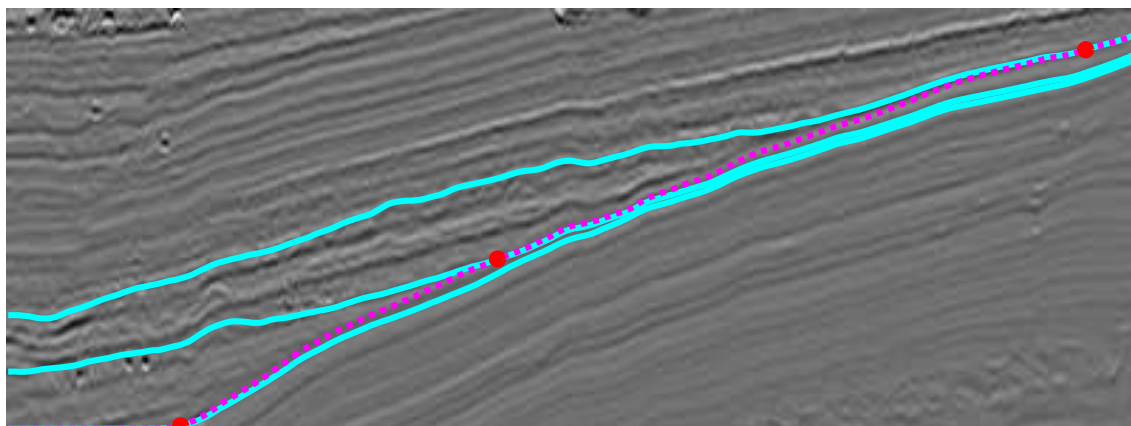


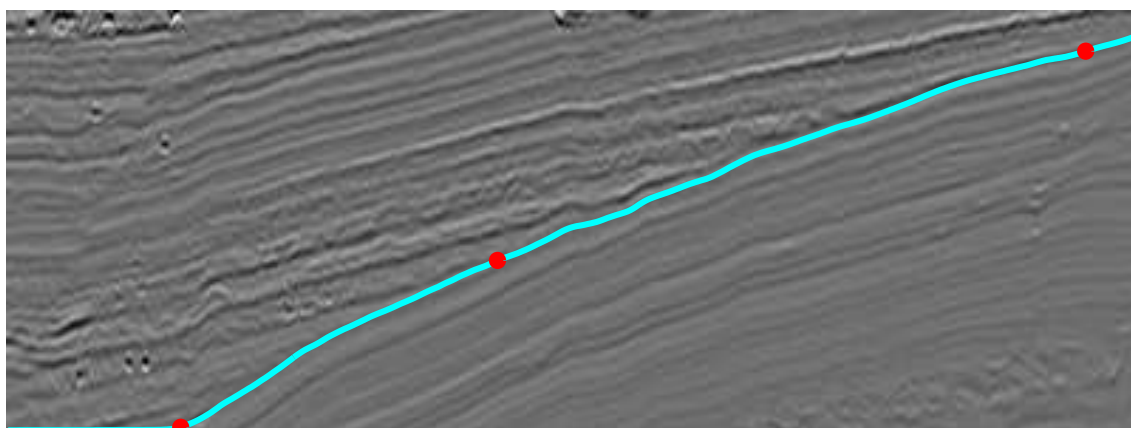
Figure 3.3 – Reconstruction d'un horizon sismique sous contrainte d'un point (représenté par un disque rouge).

Cependant, la connaissance d'un unique point de passage s'avère insuffisante pour assurer une reconstruction satisfaisante pour des horizons de grande taille ou à géométrie complexe, ou encore lorsque l'estimation du champ de normales est fortement bruitée (failles sismiques, zones chaotiques, structures *chenalisantes*, *diapirs de sel*, etc). Les horizons reconstruits dans ces différents contextes s'écartent sensiblement des lieux attendus et traversent les couches visibles. L'ajout de points de passage supplémentaires [Lom06b], généralement pointés sur l'image par des experts-géologues, permet d'y remédier.

Sur l'image sismique précédente, nous étudions la reconstruction d'un horizon situé à l'interface de deux régions distinctes sous la contrainte de trois points. Les reconstructions obtenues en considérant les points comme des germes indépendants correspondent à trois horizons très différents (voir figure 3.4a) qui ne coïncident pas avec l'horizon attendu, au contraire de la reconstruction obtenue en prenant en compte les trois points simultanément (voir figure 3.4b).



(a)



(b)

Figure 3.4 – *Reconstruction d'un horizon sismique (représenté par une ligne en pointillé magenta) situé à l'interface de deux régions sous contrainte de 3 points (représentés par des disques rouges). (a) Reconstructions en considérant les points indépendamment; (b) Reconstruction en considérant les points simultanément.*

3.2.2 A priori stratigraphiques

La connaissance de l'environnement stratigraphique d'un horizon peut également être prise en compte lors de sa reconstruction [Gui05]. Le lieu d'évolution de l'horizon est alors borné par deux horizons obtenus, par exemple, par le pointé manuel d'un expert ou par une reconstruction préalable. L'intérêt des contraintes de bornes est double. Premièrement, elle permettent d'imposer exactement le lieu souhaité d'un horizon dans une région du domaine de reconstruction en considérant deux bornes localement identiques. Deuxièmement, elle permettent d'imposer à un horizon simultanément un nombre fini de points de passage et des limites. En pratique, les points sont imposés en considérant deux bornes ponctuellement égales. Dans le cas de reconstructions séquentielles, la prise en compte de bornes conduit à des horizons non-intersectants contrairement à des reconstructions obtenues de manière parallèle et sans contraintes de bornes.

Sur l'image sismique de taille 604×270 pixels présentée par la figure 3.5, un horizon est reconstruit en considérant son lieu d'évolution connu dans la partie gauche de l'image. Il se confond également avec l'horizon attendu dans la partie droite.

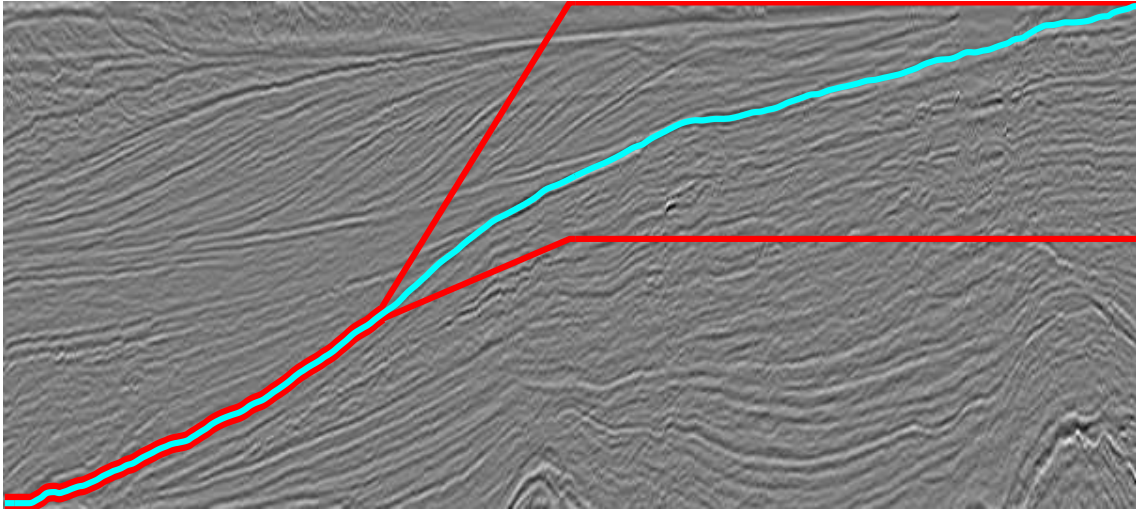


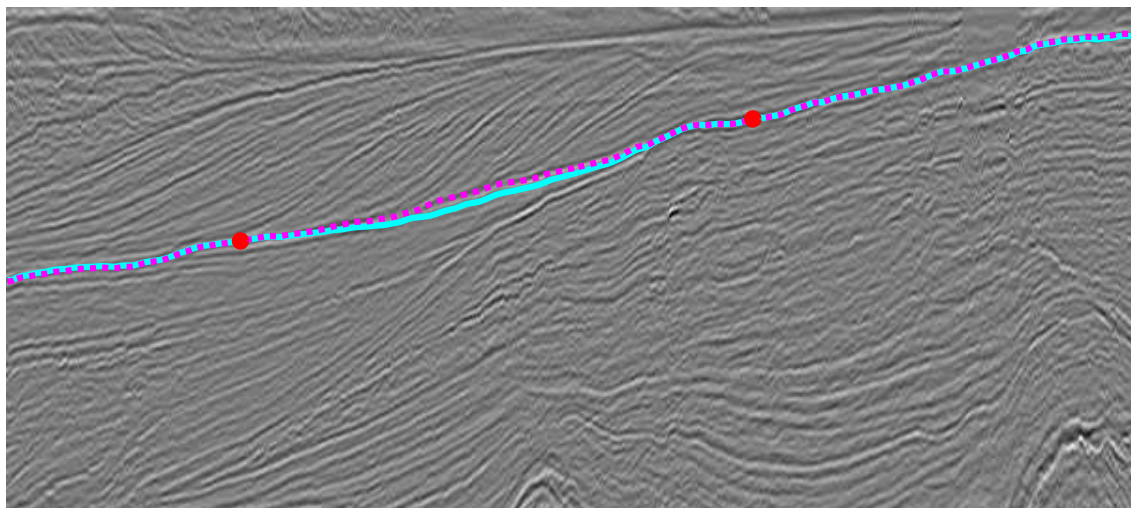
Figure 3.5 – *Reconstruction d'un horizon sismique sous contrainte de bornes (représentées par des lignes rouges).*

Sur la même image sismique, un horizon différent est reconstruit sous la contrainte de deux points (voir figure 3.6a). Etant donné qu'il semble s'écarter de l'horizon attendu dans une région située entre les deux points, des contraintes de bornes sont introduites (voir figure 3.6b) afin d'imposer également le lieu de l'horizon en plus des deux points. La qualité de l'horizon obtenu est satisfaisante.

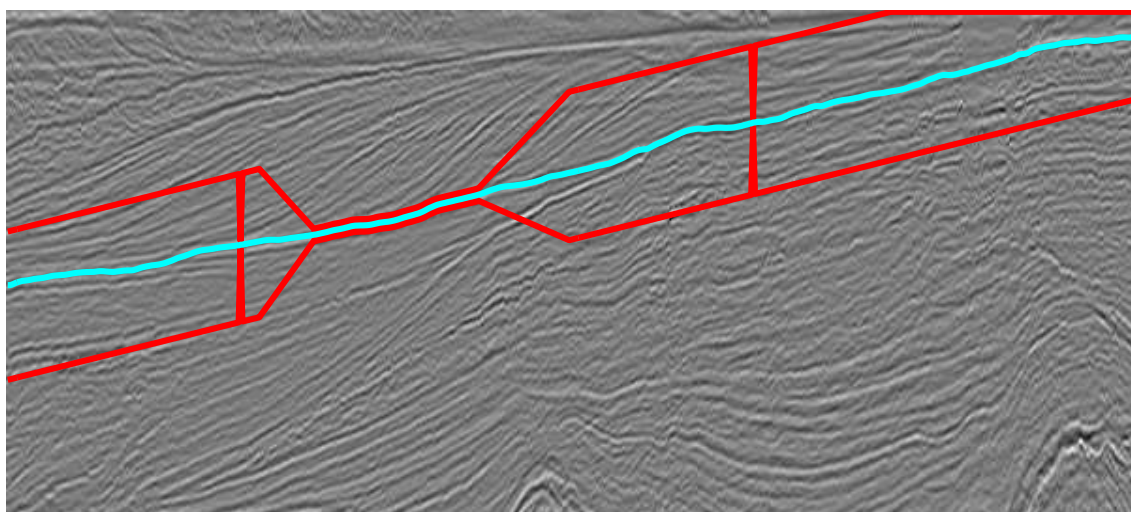
3.2.3 A priori structuraux

L'analyse stratigraphique d'une image sismique est parfois couplée à une analyse structurale qui consiste en la localisation de failles correspondant à des glissements, essentiellements verticaux, d'ensembles d'horizons (voir figure 3.7a). La cartographie des plans de failles permet ainsi de construire un schéma structural indispensable à l'interprétation géologique d'une donnée [Ger99] [Ran00] [Ber05] [Don07]. Lorsque ce schéma est binaire (voir figure 3.7b), indiquant les régions faillées, il peut être injecté dans l'algorithme de reconstruction d'horizons en tant que terme de pondération (cf. paragraphe 1.2.5) afin d'accorder une confiance nulle au résidu dans les régions faillées.

Sur l'image de taille 330×175 pixels présentée par la figure 3.7a, les deux horizons reconstruits sous la contrainte de deux points et avec prise en compte d'une pondération semblent globalement se superposer aux horizons attendus. Ils s'en écartent néanmoins dans certaines régions près des failles, où ils subissent des ruptures de régularité marquées par de rapides variations.

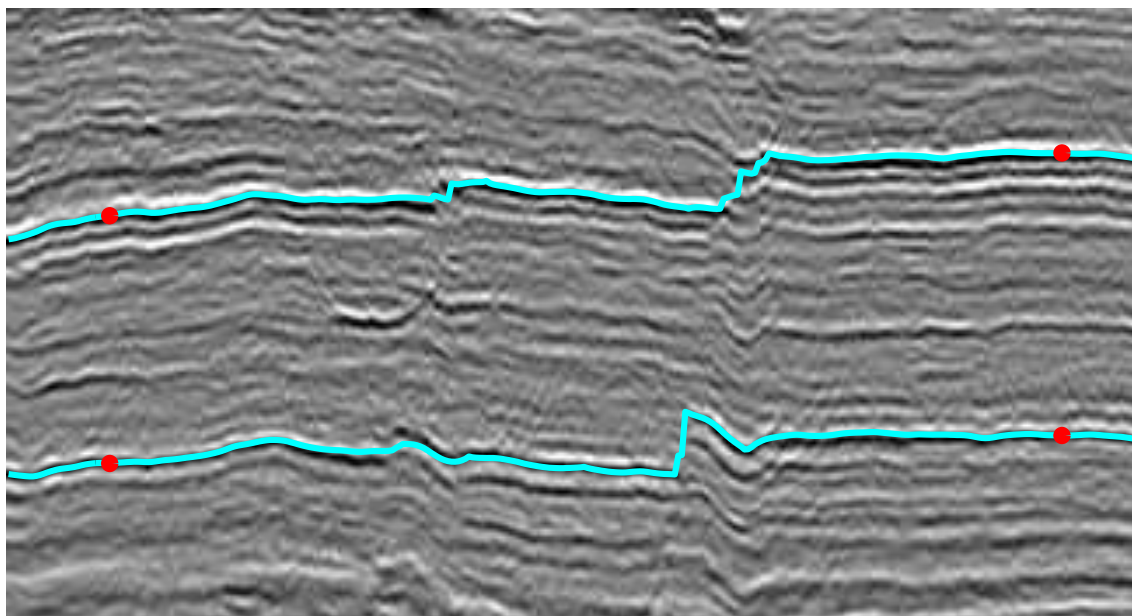


(a)

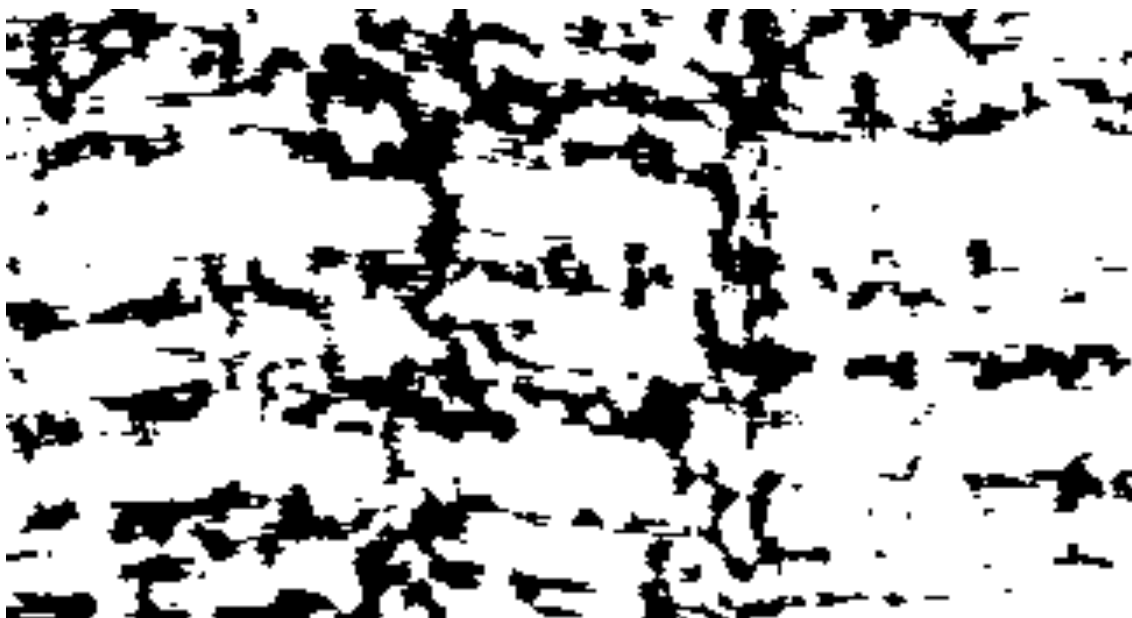


(b)

Figure 3.6 – *Reconstruction d'un horizon sismique (représenté par une ligne en pointillé magenta). (a) Reconstruction sous contrainte de 2 points (représentés par des disques rouges) ; (b) Reconstruction sous contraintes de bornes (représentées par des lignes rouges) imposant les 2 points ainsi que le lieu de l'horizon dans une région située entre ces 2 points.*



(a)



(b)

Figure 3.7 – *Reconstruction d'horizons sismiques (a) sous contrainte de 2 points (représentés par des disques rouges) avec prise en compte d'un terme de pondération correspondant à (b) un schéma structural binaire.*

3.3 Reconstruction rapide et interactive par parties

Sous des contraintes définies par plusieurs points, la reconstruction d'un horizon par les méthodes globales présentées dans le premier chapitre s'avère généralement coûteuse en temps de calcul. D'une part, les approches rapides de résolution de l'équation de Poisson discrète ne sont pas applicables. D'autre part, une réestimation complète de l'horizon est nécessaire en cas d'ajout ou de déplacement d'une contrainte. Nous proposons dans ce paragraphe une méthode alternative locale qui consiste en une reconstruction par parties, c'est-à-dire en une juxtaposition¹ de reconstructions indépendantes sur des sous-domaines pavant le domaine de reconstruction. Par essence sous-optimale, elle permet de reconstruire un horizon de manière rapide et interactive. Le caractère rapide de la méthode provient de la mise en œuvre sur chaque sous-domaine d'une approche efficiente de résolution de l'équation de Poisson discrète dans le domaine fréquentiel tandis que son caractère interactif (ou supervisé) se traduit par une réestimation en temps réel des seules parties de l'horizon « connectées » à la contrainte ajoutée ou déplacée. La continuité nécessaire des différentes parties de l'horizon s'obtient dans notre cas en imposant des valeurs identiques sur les frontières communes aux sous-domaines voisins. Les reconstructions partielles de l'horizon sur les sous-domaines mettent par conséquent en jeu des contraintes de type frontière. Il est à noter que la classe de régularité au moins égale à 1 du pendage traité assure une concordance des dérivées de l'horizon sur les frontières des sous-domaines bien que l'approche ne permette pas d'imposer la valeur de ces dérivées.

Dans la suite, nous nous concentrons sur le cas d'un domaine de reconstruction bidimensionnel Γ . D'après l'étude présentée dans le premier chapitre, une méthode de reconstruction rapide sous des contraintes de type frontière peut être mise en œuvre sur un domaine rectangulaire. Conformément à l'approche décrite dans le deuxième chapitre, il en est de même sur un domaine difféomorphe à un rectangle, appelé domaine pseudo-rectangulaire. En effet, le difféomorphisme bidimensionnel de changement de support transformant un pseudo-rectangle en rectangle peut être considéré comme un difféomorphisme tridimensionnel de changement d'espace dont la troisième composante est invariante. La transformation du pendage définie au paragraphe 2.2.2 au lieu de la modification de l'opérateur Laplacien introduite au paragraphe 1.2.3 autorise alors une résolution rapide de l'équation de Poisson. Nous proposons donc deux subdivisions (ou pavages) possibles du domaine Γ allant dans ce sens : une subdivision dite rectangulaire et une subdivision dite quadrangulaire. Elles consistent à paver le domaine Γ respectivement par des sous-domaines rectangulaires dont les côtés sont parallèles aux vecteurs du repère naturel de la donnée traitée et par des sous-domaines quadrangulaires non croisés. La valeur de l'horizon sur les segments correspondant aux frontières des sous-domaines est déterminée à partir des contraintes en considérant celles-ci comme des sommets des rectangles ou des quadrangles. Le nombre de sommets étant généralement supérieur au nombre de contraintes, les autres sommets sont des points générés (ou reconstruits) pour les besoins du pavage. Par conséquent, le fait

1. Par opposition à un recouvrement qui est une approche non traitée dans ce mémoire.

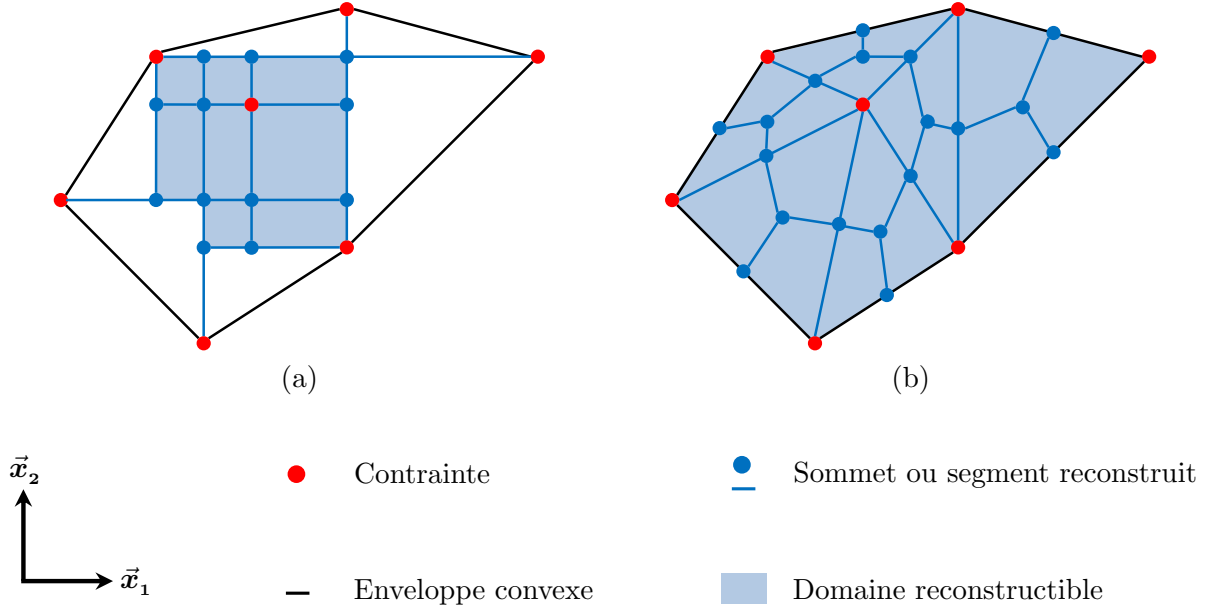


Figure 3.8 – *Domaines reconstructibles par parties à partir d'un ensemble de contraintes : (a) Subdivision rectangulaire ; (b) Subdivision quadrangulaire.*

d'imposer les frontières des sous-domaines restreint le domaine maximal reconstructible Γ au domaine délimité par l'enveloppe convexe formée par les contraintes (voir figure 3.8).

Suite au choix du pavage, la reconstruction par parties d'un horizon se décompose en trois étapes :

1. Reconstruction partielle de l'horizon sur les sommets et les segments formant les frontières des sous-domaines par une version rapide unidimensionnelle de l'algorithme de reconstruction.
2. Reconstruction partielle de l'horizon sur chaque sous-domaine par une version rapide bidimensionnelle de l'algorithme.
3. Reconstruction de l'horizon complet par juxtaposition de l'ensemble des parties reconstruites.

Concernant la méthode de reconstruction par subdivision rectangulaire (voir figure 3.8a), les sommets des sous-domaines sont de manière naturelle choisis parmi les intersections des lignes horizontales et verticales (*i.e.* parallèles aux vecteurs du repère naturel de la donnée traitée) qui passent par les contraintes et qui sont incluses dans le domaine Γ . Selon le nombre et la position des contraintes, certaines intersections ne sont pas considérées comme des sommets car elles n'appartiennent pas à un segment incluant dans Γ et reconstructible sous des contraintes de type frontière. Par conséquent, le domaine reconstructible peut ne pas correspondre au domaine

Γ dans son intégralité (cf. l'exemple de la figure 3.8a) voire même être vide. Certains rectangles obtenus peuvent également se caractériser par un rapport disproportionné entre leur longueur et leur largeur qui entraîne parfois une reconstruction partielle de faible qualité.

Le nombre de rectangles composant le domaine restructurable peut être augmenté, par exemple en subdivisant chaque rectangle en quatre rectangles de même proportion. Cette augmentation se traduit théoriquement par une diminution du temps de calcul nécessaire à la reconstruction d'un horizon car la méthode est fondée sur un calcul efficace des transformées de Fourier discrète. Cependant, le temps nécessaire à la génération des frontières supplémentaires est en pratique non négligeable et l'horizon obtenu peut être de plus faible qualité.

Concernant la méthode de reconstruction par subdivision quadrangulaire (voir figure 3.8b), les contraintes sont tout d'abord associées par une triangulation, c'est-à-dire considérées comme les sommets de triangles inclus dans le domaine Γ . Les sous-domaines sont ensuite obtenus en subdivisant chaque triangle en trois quadrangles en considérant son centre de gravité comme sommet commun des quadrangles. Par conséquent, les sommets des sous-domaines sont les contraintes, les milieux des côtés et les centres de gravité des triangles tandis que leurs frontières sont les côtés et des parties des médianes des triangles. Le domaine restructurable correspond ainsi à l'intégralité du domaine Γ . Un choix de triangulation permettant de s'affranchir de quadrangles dégénérés est celle de Delaunay [Del34] qui maximise le plus petit des trois angles de chaque triangle et évite ainsi des triangles « allongés ». Similairement au cas de la subdivision rectangulaire, l'augmentation du nombre de quadrangles ne se traduit pas forcément par une diminution du temps de calcul, d'autant plus que le nombre de difféomorphismes à estimer augmente également.

Dans le cas d'une reconstruction numérique, le changement de support entraîne une perte d'information car les grilles d'échantillonnages des domaines initial et transformé ne coïncident pas. Afin de minimiser cette perte, le pendage transformé est estimé « à la volée » durant les reconstructions, en chaque point de la grille d'échantillonnage du domaine transformé. L'horizon complet est finalement reconstruit sur les grilles d'échantillonnages des différents domaines transformés ou estimé sur la grille d'échantillonnage initiale par une méthode classique d'interpolation.

Dans les deux paragraphes suivants, nous nous intéressons en détail à la reconstruction par parties d'un horizon selon le choix du pavage.

Remarques :

- la reconstruction d'un horizon par parties sur un domaine unidimensionnel est un cas simplifié de l'approche présentée ci-dessus. Le domaine maximal restructurable est alors le segment délimité par les deux contraintes d'abscisses minimale et maximale tandis que les sous-domaines sont des segments juxtaposés délimités par des contraintes d'abscisses crois-

santes (voir figure 3.9). De manière évidente, l'horizon peut être reconstruit partiellement sur chaque sous-domaine sous des contraintes de type frontière par une approche rapide. Lors de l'ajout ou du déplacement d'une contrainte, seuls les deux segments délimités par cette contrainte sont réévalués.

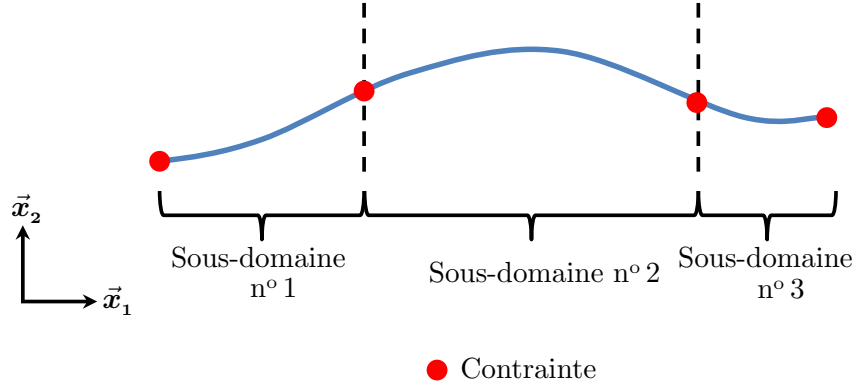


Figure 3.9 – *Reconstruction par parties sur un domaine unidimensionnel.*

- l'approche semble se généraliser à des domaines de dimension supérieure. Par exemple, un domaine tridimensionnel peut être pavé par des parallélépipèdes rectangles. La triangulation de Delaunay s'opère également en dimension 3 bien que la division des tétraèdres obtenus en hyperquadrangles ne soit pas évidente. Le changement de support transformant un hyperquadrangle en hyperrectangle se généralise également en dimension finie quelconque.

3.3.1 Subdivision rectangulaire

Dans la méthode de reconstruction d'un horizon par subdivision rectangulaire, l'identification de l'ensemble des sommets et des segments formant les frontières des sous-domaines peut apparaître évidente mais elle n'est en fait pas triviale car elle dépend du nombre et de la position des contraintes. A titre d'exemple, cet ensemble, et *a fortiori* le domaine reconstructible, est vide si aucun couple de contraintes n'appartient à une même ligne horizontale ou verticale. Nous avons ainsi recours à un algorithme hiérarchique qui reconstruit simultanément les sommets et les segments. Le nombre d'itérations bien que non déterminé *a priori* est cependant borné en fonction du nombre de contraintes. La figure 3.10 présente la reconstruction des sommets et des frontières des sous-domaines correspondant à l'ensemble de contraintes introduit par la figure 3.8. La reconstruction comporte ici six itérations. Nous nous appuyons sur cet exemple dans la description de l'algorithme ci-dessous.

L'algorithme est initialisé en considérant les contraintes comme des sommets. Chaque itération de l'algorithme comprend trois phases. La première phase consiste à reconstruire les

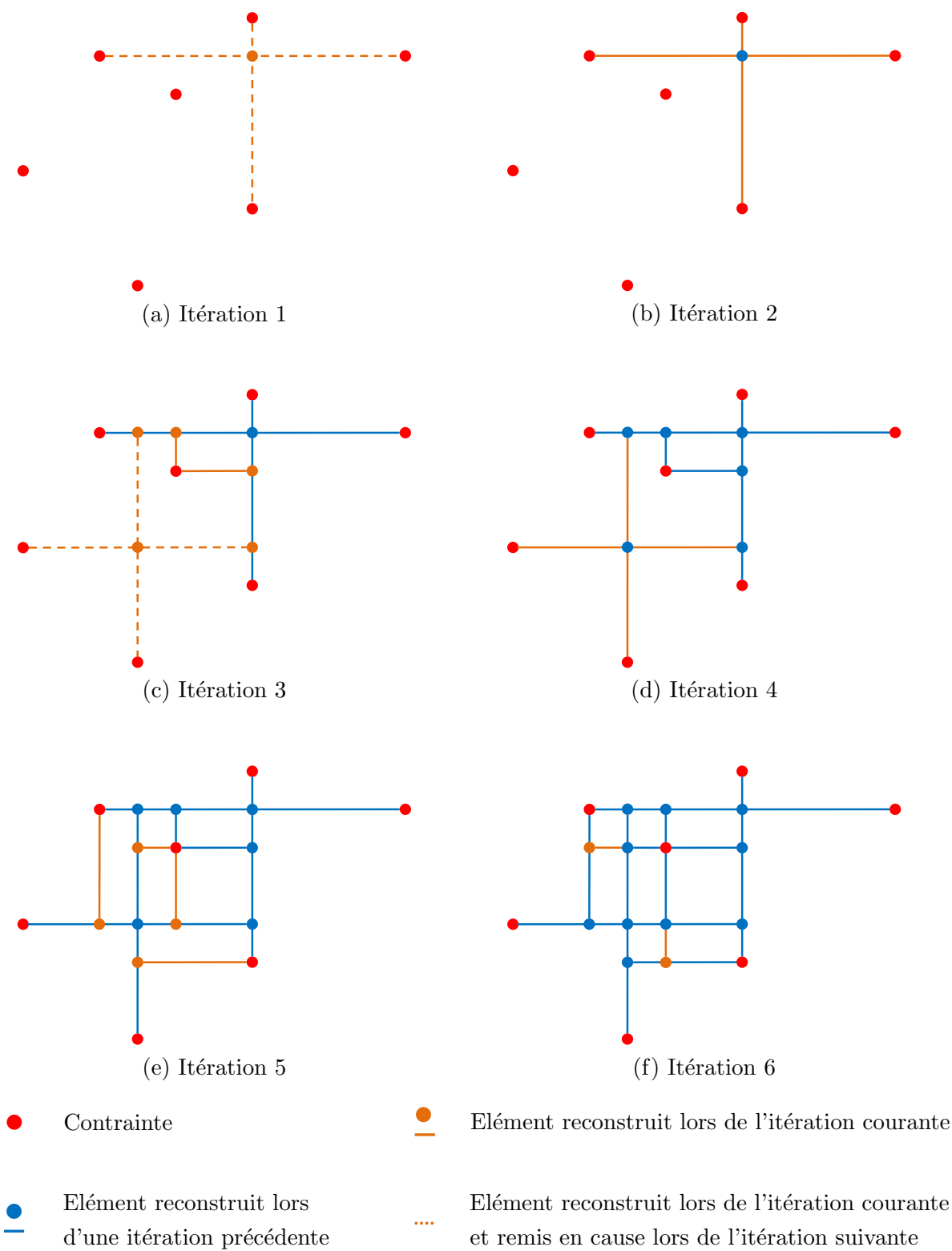


Figure 3.10 – *Reconstruction hiérarchique des sommets et des segments formant les frontières des sous-domaines dans la méthode de subdivision rectangulaire.*

sommets qui appartiennent à un segment reconstruit lors d'une itération précédente et qui sont situés sur la même ligne horizontale ou verticale qu'un autre sommet n'appartenant pas au segment considéré. La deuxième phase correspond à la reconstruction des segments délimités par des couples de sommets situés sur la même ligne horizontale ou verticale. Les segments délimitant les couples considérés durant la première phase sont en particulier reconstruits. Des exemples illustrant ces deux phases sont présentés sur les figures 3.10e et 3.10f. La troisième phase comprend la reconstruction des sommets qui sont les intersections de segments reconstruits durant la deuxième phase. Généralement, les deux valeurs correspondant à chacune des reconstructions ne sont pas identiques en chacun de ces sommets. La valeur de l'horizon est donc fixée à leur valeur moyenne. Les quatre segments délimités par un tel sommet sont remis en cause et réestimés durant la deuxième phase de l'itération suivante. Des exemples illustrant la troisième phase sont présentés sur les figures 3.10a et 3.10b. Le procédé est interrompu lorsque plus aucun sommet et aucun segment ne sont reconstruits durant respectivement la première et la deuxième phase.

3.3.2 Subdivision quadrangulaire

3.3.2.1 Construction du pavage

Dans la méthode de reconstruction d'un horizon par subdivision quadrangulaire, l'estimation des sommets et des segments formant les frontières des sous-domaines comporte quatre phases (voir figure 3.11 qui présente le cas des contraintes introduites par la figure 3.8). La première phase est la triangulation de Delaunay qui conduit à un ensemble de triangles constitués à partir des contraintes et qui s'opère à l'aide d'un algorithme itératif à la complexité calculatoire variable dont le nombre d'itérations est cependant borné. La deuxième phase (voir figure 3.11a) consiste à reconstruire les côtés des triangles et à en déterminer les milieux. Dans la troisième phase (voir figure 3.11b), il s'agit d'établir les centres de gravité de chaque triangle en calculant l'intersection de leurs médianes qui sont préalablement reconstruites. Du fait de l'indépendance de ces différentes reconstructions, les valeurs des intersections sont obtenues en moyennant les trois valeurs correspondantes aux centres de gravité. Enfin, les segments des quadrangles formés par les centres de gravité et les milieux des côtés des triangles ainsi que par les contraintes sont reconstruits dans la quatrième phase (voir figure 3.11c).

Lors de la mise en œuvre dans le domaine discret, les nombres de points d'échantillonnage des différentes reconstructions ne peuvent pas être choisis de manière indépendante. Ainsi, les longueurs discrètes des médianes doivent être déterminées de sorte qu'un point d'échantillonnage corresponde exactement à leur intersection. En outre, le changement de support mis en œuvre pour reconstruire partiellement l'horizon sur chaque sous-domaine s'appuie sur une reconstruction préalable de côtés de quadrangles dont les longueurs discrètes doivent nécessairement être identiques par paire. Les côtés opposés de quadrangles étant généralement de longueur différente, le nombre de points d'échantillonnage peut alors être choisi comme étant égal à l'entier le plus proche de la longueur du plus petit (Min) ou du plus grand (Max) côté ou encore de

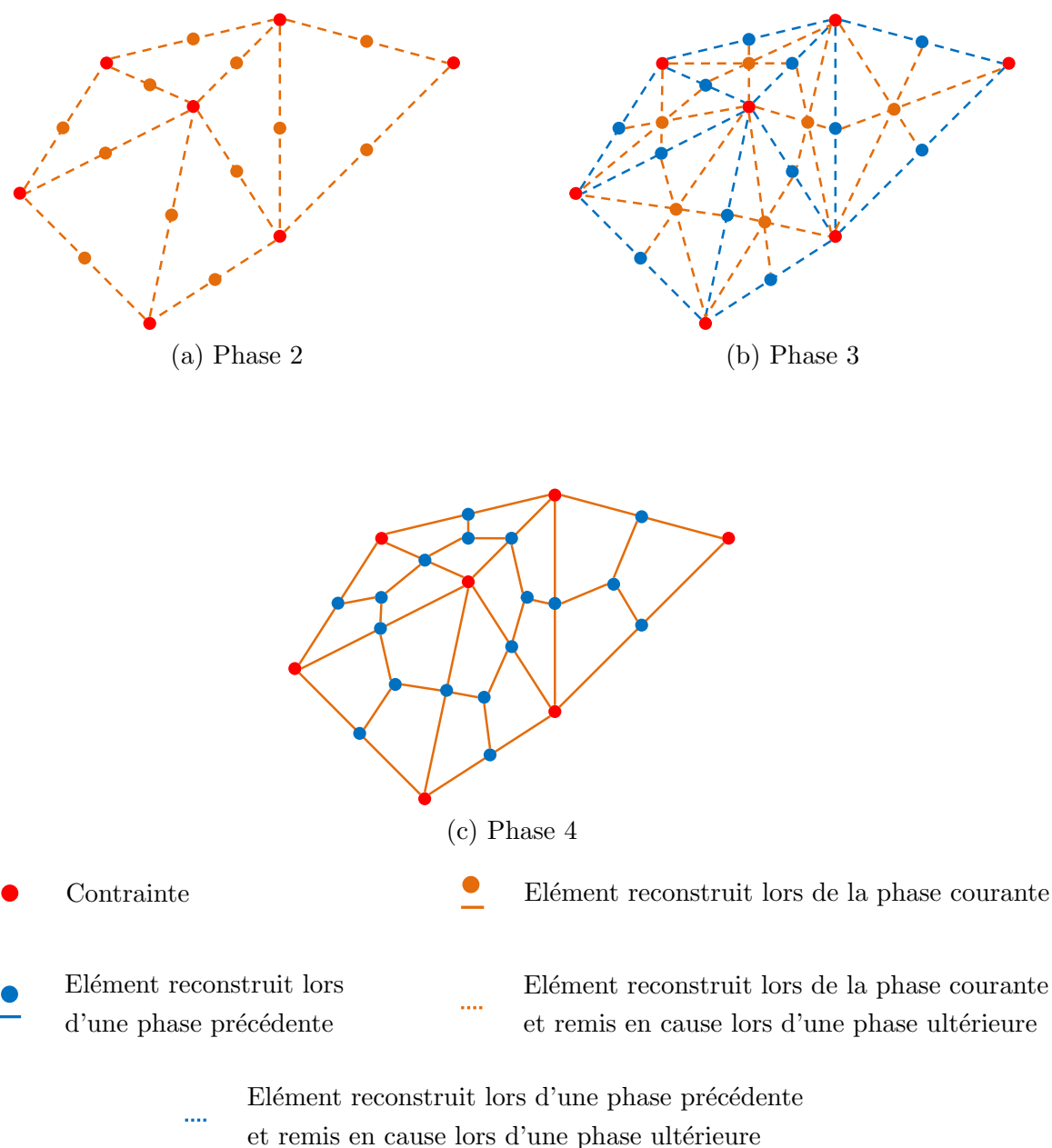


Figure 3.11 – *Reconstruction des sommets et des segments formant les frontières des sous-domaines dans la méthode de subdivision quadrangulaire après la phase de triangularisation.*

leur moyenne arithmétique ($\overline{\sum}$) ou géométrique ($\overline{\prod}$). Dans un objectif de diminution du temps de calcul, chaque dimension considérée peut en outre être remplacée par la dimension la plus proche qui est optimale pour un algorithme rapide de calcul de transformée de Fourier discrète. Par exemple, les dimensions optimales pour l'algorithme de la bibliothèque FFTW [Fri98] sont de la forme $2^a 3^b 5^c 7^d 11^e 13^f$, où $e + f$ est égal à 0 ou 1 et où les autres exposants sont arbitraires.

Dans la suite, nous décrivons l'approche rapide de reconstruction dédiée aux domaines pseudo-rectangulaires bidimensionnels et appliquée aux domaines quadrangulaires.

3.3.2.2 Reconstruction rapide sur un pseudo-rectangle

Ce paragraphe présente une approche rapide de reconstruction d'un horizon sismique sur un domaine pseudo-rectangulaire à partir de la connaissance de l'horizon sur la frontière du domaine ou d'un unique point de passage appartenant à l'horizon. Un difféomorphisme $\mathcal{F}$ est introduit pour transformer le pseudo-rectangle Ω_x défini dans le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ en un rectangle Ω_y défini dans un repère $(O, \vec{y}_1, \vec{y}_2)$. Ses deux composantes sont définies par

$$\forall (x_1, x_2) \in \Omega_x, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \mathcal{F}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(x_1, x_2) \\ \mathcal{F}_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \in \Omega_y. \quad (3.1)$$

Cette transformation de changement de support en dimension 2 est un cas particulier de la transformation de changement d'espace introduite au paragraphe 2.2 en dimension 3. L'horizon étant exprimable sous une forme explicite à la fois dans l'espace initial et dans l'espace transformé, la troisième composante du changement d'espace est invariante.

Sur le domaine rectangulaire, l'horizon est ainsi reconstruit par la résolution rapide du problème d'optimisation non linéaire (2.4). La tangente du pendage transformé $\mathbf{p}_y$ est liée à la tangente du pendage initial $\mathbf{p}_x$ par la relation

$$\mathbf{p}_y = [J_{\mathcal{F}}^T]^{-1} \mathbf{p}_x, \quad (3.2)$$

où $[J_{\mathcal{F}}^T]^{-1}$ désigne l'inverse de la transposée du Jacobien $J_{\mathcal{F}}$ du difféomorphisme $\mathcal{F}$. Cet inverse est défini au point $y = (y_1, y_2)$ par

$$[J_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}^{-1}(y))^T]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial x_2}{\partial y_1}(y) \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2}(y) & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}(y) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Démonstration. Considérons la transformation tridimensionnelle de changement d'espace dont la transformation $\mathcal{F}$ est un cas particulier. L'inverse du Jacobien de cette transformation estimé au point $Y = (y, f(y))$ appartenant à l'espace transformé est de la forme

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1}(Y) & \frac{\partial x_1}{\partial y_2}(Y) & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1}(Y) & \frac{\partial x_2}{\partial y_2}(Y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

où $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(Y) = \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y)$ et où f désigne la fonction représentant l'horizon à reconstruire. D'après l'équation (2.5), les deux composantes de la tangente du pendage transformé sont données par :

$\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$,

$$p_{y,i}(Y) = -\frac{\frac{\partial x_1}{\partial y_i}(y) n_1(X) + \frac{\partial x_2}{\partial y_i}(y) n_2(X)}{n_3(X)}, \quad (3.5)$$

où le point X est l'image du point Y par la transformation tridimensionnelle inverse. D'après la relation (1.2) entre le pendage et le champ de normales, ces composantes deviennent

$$p_{y,i}(Y) = \frac{\partial x_1}{\partial y_i}(y) p_{x,1}(X) + \frac{\partial x_2}{\partial y_i}(y) p_{x,2}(X). \quad (3.6)$$

Une écriture matricielle équivalente est bien définie par l'équation (3.2). $\square$

3.3.2.3 Application au quadrangle

Dans la méthode de reconstruction par subdivision quadrangulaire, le difféomorphisme $\mathcal{F}$ permettant de transformer un support rectangulaire en un support quadrangulaire est une homographie, définie par une matrice réelle $H = [h_{ji}]$ de taille 3×3 (voir figure 3.12). Il est défini par :

$$\forall (x_1, x_2) \in \Omega_x, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1(x_1, x_2) \\ \mathcal{F}_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + h_{13}}{h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}} \\ \frac{h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + h_{23}}{h_{31}x_1 + h_{32}x_2 + h_{33}} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Les quatres termes du Jacobien $J_{\mathcal{F}}$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(h_{11}h_{32}-h_{31}h_{12})x_2+h_{11}h_{33}-h_{31}h_{13}}{(h_{31}x_1+h_{32}x_2+h_{33})^2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(h_{21}h_{32}-h_{31}h_{22})x_2+h_{21}h_{33}-h_{31}h_{23}}{(h_{31}x_1+h_{32}x_2+h_{33})^2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{(h_{12}h_{31}-h_{32}h_{11})x_1+h_{12}h_{33}-h_{32}h_{13}}{(h_{31}x_1+h_{32}x_2+h_{33})^2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{(h_{22}h_{31}-h_{32}h_{21})x_1+h_{22}h_{33}-h_{32}h_{23}}{(h_{31}x_1+h_{32}x_2+h_{33})^2} \end{array} \right. . \quad (3.8)$$

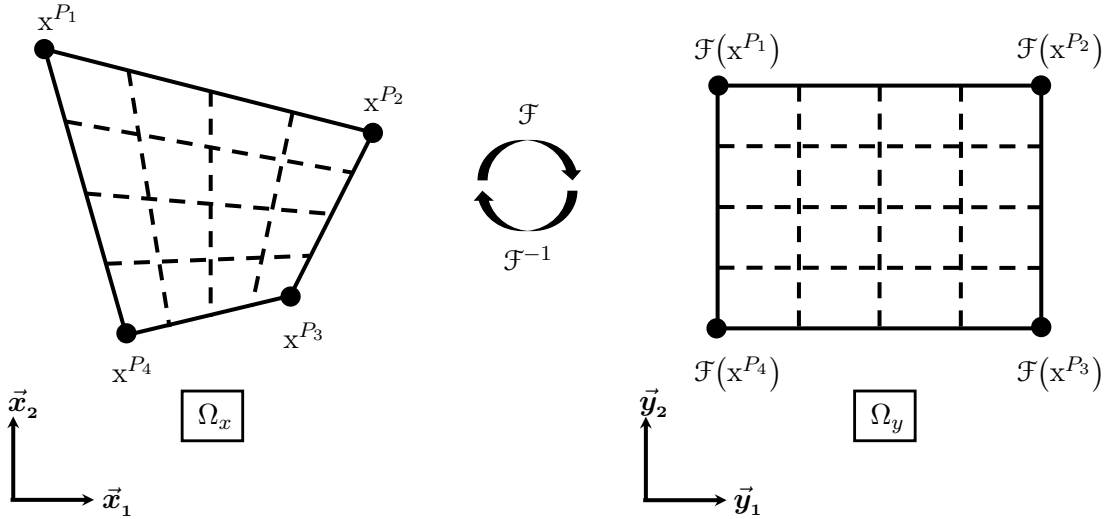


Figure 3.12 – *Domaine quadrangulaire Ω_x et domaine rectangulaire Ω_y obtenu par une homographie $\mathcal{F}$.*

3.3.2.4 Reconstruction de l'horizon complet

Lors d'une reconstruction numérique, l'horizon est exprimé sous la forme de reconstructions partielles définies sur des grilles d'échantillonnages indépendantes de sous-domaines transformés (voir figure 3.13a) qui sont, par essence, non parfaitement juxtaposables (voir agrandissement de la figure 3.13a). Une représentation d'un seul tenant est obtenue en mettant en adéquation les grilles de reconstruction ou en exprimant l'horizon sur la grille d'échantillonnage initiale de l'ensemble du domaine de reconstruction (voir figure 3.13b).

Dans le premier cas, il s'agit de rééchantillonner les différentes reconstructions de sorte à assurer des lieux d'échantillonnages identiques sur les frontières communes aux quadrangles. Les nouveaux nombres de points d'échantillonnage sont alors déterminés par un procédé itératif

prenant en compte la connexité des quadrangles ainsi que la contrainte que les longueurs discrètes des quadrangles sont nécessairement identiques par paire. Ces choix peuvent naturellement s'opérer en amont lors de la phase de reconstruction partielle mais avec un coût calculatoire plus élevé. Dans le second cas, il s'agit de mettre en oeuvre une technique d'interpolation classique, par exemple bilinéaire (voir figure 3.13b).

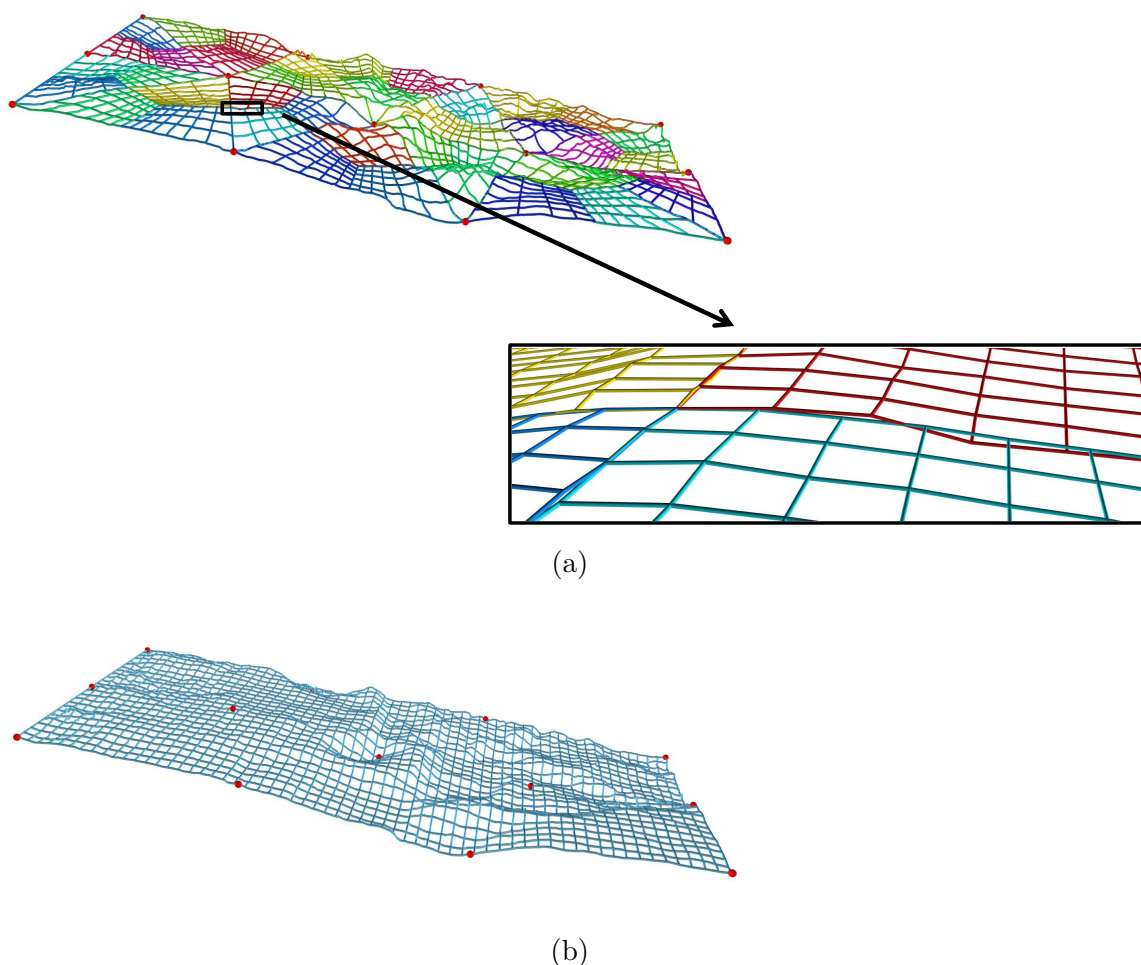


Figure 3.13 – *Reconstruction d'un horizon sismique complet par subdivision quadrangulaire sous la contrainte de 13 points (représentés par les sphères rouges) (a) sur les grilles d'échantillonnages indépendantes des sous-domaines ; (b) sur la grille d'échantillonnage initiale du domaine. Le zoom représente des reconstructions indépendantes de frontières communes à 4 quadrangles.*

3.3.3 Exemple

Les approches de reconstruction globale et locales sont évaluées sur des images sismiques de dimension 2 et 3. Elles sont comparées qualitativement et en terme de temps de calcul².

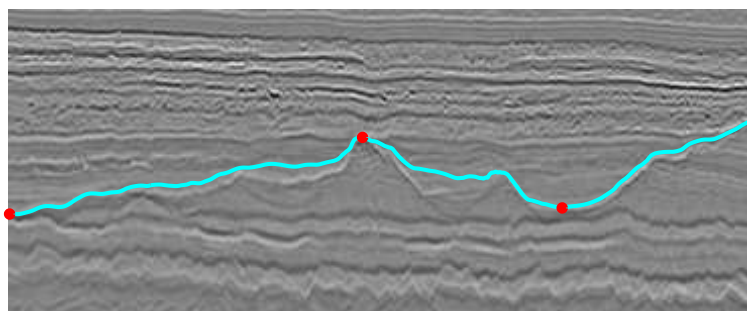
2. Les temps de calcul sont estimés pour une implémentation en langage C.

Les géométries complexes et les structures convergentes des données traitées conduisent à un pendage très bruité. Par conséquent, afin d'obtenir des reconstructions satisfaisantes, un certain nombre de contraintes de type points discrets sont placées séquentiellement dans les régions critiques des horizons à reconstruire (dômes, bassins, etc.). L'algorithme de la méthode de reconstruction par parties est initialisé sur chaque sous-domaine par un horizon constant égal à la valeur moyenne des valeurs des contraintes tandis que celui de la méthode par optimisation globale est initialisé par un horizon « proche » de la solution afin d'accélérer sa convergence. Nous choisissons ici l'horizon proposé par Lomask [Lom06b] et obtenu par une reconstruction rapide sous la contrainte d'un unique point de passage particulier. La convergence de toutes les approches est ainsi atteinte en fixant le nombre d'itérations de l'algorithme à 30. Concernant la méthode de reconstruction par optimisation globale, l'équation de Poisson discrète est résolue par l'approche itérative du gradient conjugué en considérant un système matriciel sur-déterminé. D'après l'étude présentée dans le premier chapitre, elle correspond à l'approche itérative sans préconditionnement la plus rapide. Elle est ici mise en œuvre avec un nombre d'itérations empiriquement fixé à 300. Par ailleurs, les approches directes également présentées dans ce chapitre permettraient vraisemblablement d'obtenir des temps de calculs plus faibles en s'appuyant sur le caractère creux de la matrice considérée dans l'équation de Poisson.

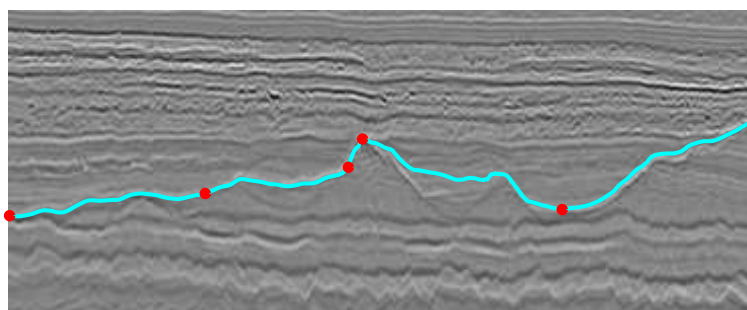
3.3.3.1 Cas bidimensionnel

Dans un premier temps, les approches sont évaluées sur une image bidimensionnelle de taille 370×151 pixels (voir figure 3.14). Six points sont placés séquentiellement à la suite de 2 points initiaux, l'ajout incrémental de points permettant d'affiner l'horizon dans les régions critiques (voir figures 3.14a et 3.14b). Pour 8 points, les reconstructions locale (voir figure 3.14c) et globale (voir figure 3.14d) sont satisfaisantes car proches de l'horizon attendu, mettant en évidence la précision et la robustesse au bruit des deux approches. Les temps nécessaires à ces reconstructions étant respectivement de 9 ms et 79 ms, les deux approches peuvent être considérées comme temps-réel sur cet exemple. Le temps nécessaire à une reconstruction globale augmentant de façon linéaire avec le domaine de reconstruction, le gain obtenu par une reconstruction locale peut s'avérer crucial sur une donnée plus grande.

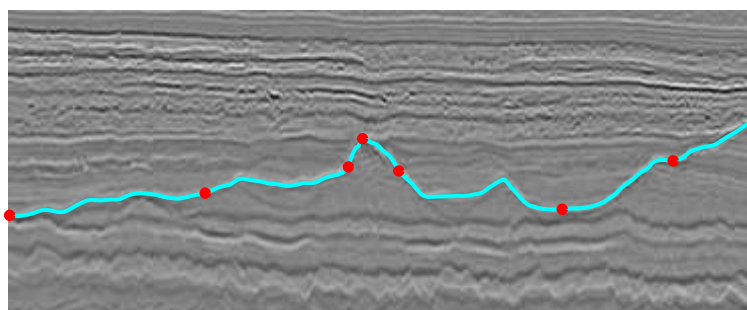
Le choix du nombre et de la position des contraintes est un compromis entre la qualité locale de l'horizon obtenu et le caractère optimal de la méthode de reconstruction par parties. En effet, l'ajout d'un nombre important de points dans des régions à géométries complexes ou pour lesquelles l'estimation du pendage est fortement bruitée permet d'obtenir une reconstruction de bonne qualité et d'assurer à l'horizon une classe de régularité au moins égale à 2 par parties. Cependant, de manière évidente, la sous-optimalité de la méthode augmente avec le nombre de contraintes et une forte densité de points peut conduire à des sous-domaines dégénérés. Dans l'exemple présenté sur la figure 3.15, cinq contraintes sont considérées. Lorsqu'elles sont espacées régulièrement sur le domaine de reconstruction sans tenir compte des géométries (voir figure 3.15a), la méthode est opérée sur des sous-domaines par définition non-dégénérés mais l'horizon



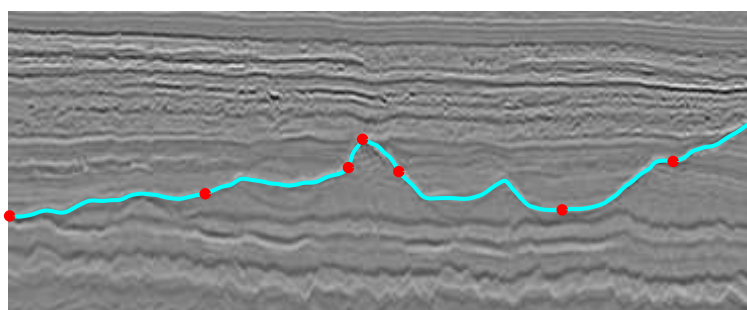
(a)



(b)

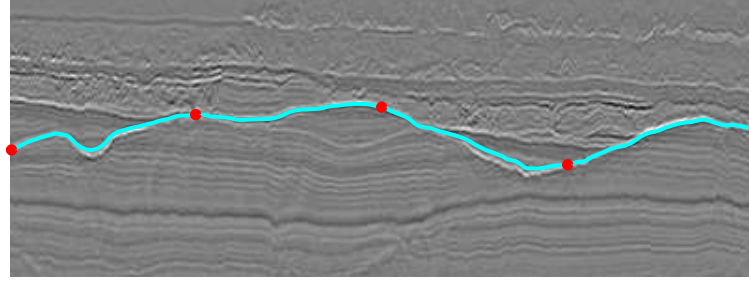


(c)

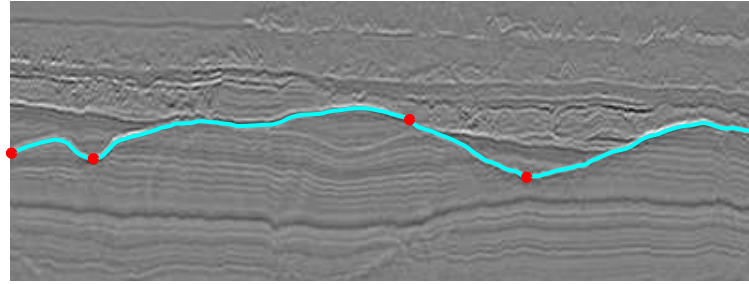


(d)

Figure 3.14 – *Reconstruction d'un horizon sismique par une approche locale sous contrainte de (a) 4 points, (b) 6 points, (c) 8 points et par (d) une approche globale sous contrainte de 8 points.*



(a)



(b)

Figure 3.15 – *Reconstruction d’un horizon sismique par une approche locale sous contrainte de 5 points (a) espacés régulièrement sur le domaine de reconstruction ; (b) placés dans les régions critiques.*

reconstruit ne coïncide pas avec l’horizon attendu dans les régions à géométries complexes. Au contraire, lorsque les contraintes sont placées dans les régions critiques (voir figure 3.15b), la qualité de la reconstruction est satisfaisante même si certains sous-domaines sont définis sur un faible nombre de points d’échantillonnage. Ce compromis concerne également le cas tridimensionnel.

3.3.3.2 Cas tridimensionnel

Dans un deuxième temps, les approches locales par subdivisions rectangulaire et quadrangulaire ainsi que l’approche globale sont testées sur une image tridimensionnelle de taille $1000 \times 400 \times 350$ pixels (voir figure 3.17). Le domaine de reconstruction est rectangulaire et une contrainte est fixée à chaque sommet afin d’obtenir un domaine restructurable identique pour les trois approches. Quatorze points sont placés séquentiellement à la suite de 13 points initiaux. Concernant les méthodes de reconstruction par parties, les 27 points engendrent 288 rectangles dont certains sont dégénérés (voir figure 3.16a) et 126 quadrangles (voir figure 3.16b). Dans la méthode par subdivision quadrangulaire, le nombre de points d’échantillonnage des côtés opposés des quadrangles est choisi égal à l’entier le plus proche de leur moyenne géométrique ($\overline{\Pi}$) et l’horizon complet est finalement estimé sur la grille d’échantillonnage initiale par une méthode d’interpolation bilinéaire.

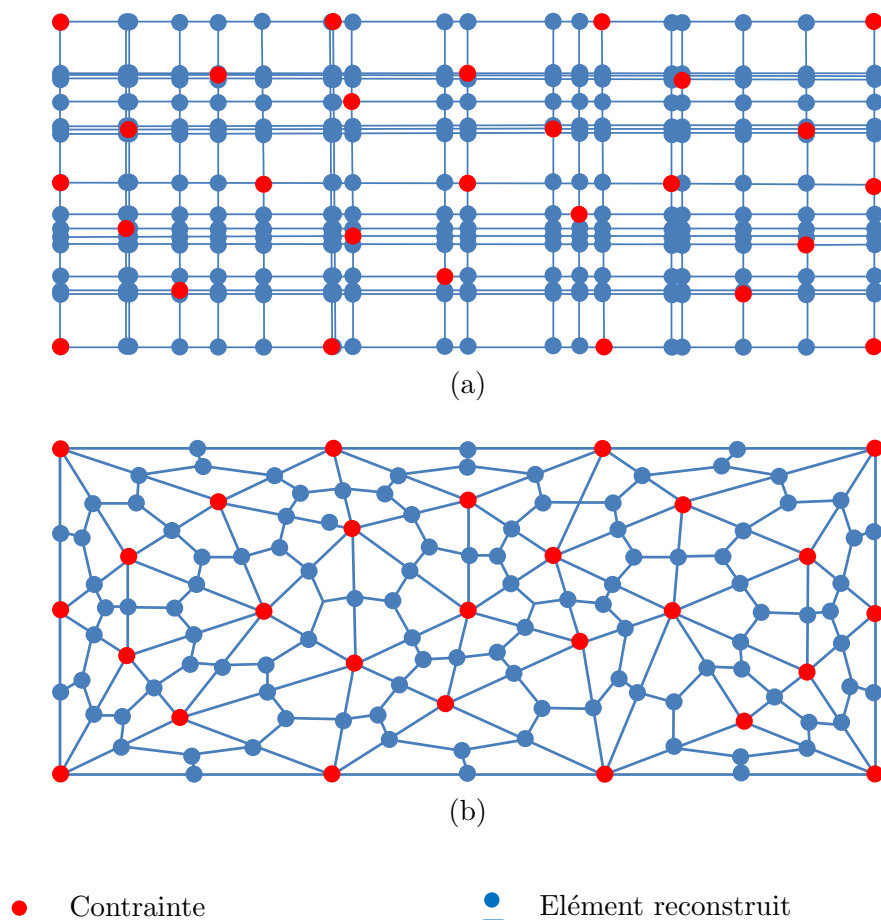


Figure 3.16 – Ensemble de rectangles (a) et de quadrangles (b) engendrés par 27 points.

3.3.3.2.1 Reconstruction complète

Les reconstructions pour 27 points sont présentées sur l'intégralité de la donnée par les figures 3.17, 3.18 et 3.19. Elles sont comparées qualitativement sur une coupe bidimensionnelle. Les trois reconstructions sont satisfaisantes (voir figure 3.21) car proches de l'horizon attendu. Les deux reconstructions par parties et l'horizon attendu sont indistinguables. Quelques différences sont cependant perceptibles avec la reconstruction par optimisation globale. En effet, cette dernière s'écarte de l'horizon attendu sur le dôme central et se superpose partiellement à un horizon différent dans la partie gauche de l'image (voir figures 3.21b et 3.21c). Les reconstructions par parties conduisent ainsi localement à des horizons de meilleure qualité. La figure 3.22 est un agrandissement de la coupe précédente autour du bassin central. Elle représente l'horizon reconstruit par subdivision quadrangulaire pour 13, 18, 23 et 27 points. Comme prévu, l'horizon reconstruit et l'horizon attendu sont de plus en plus proches à mesure que le nombre de points pris en considération augmente.

Le gain en terme de temps de calcul des méthodes de reconstruction par parties est évident.

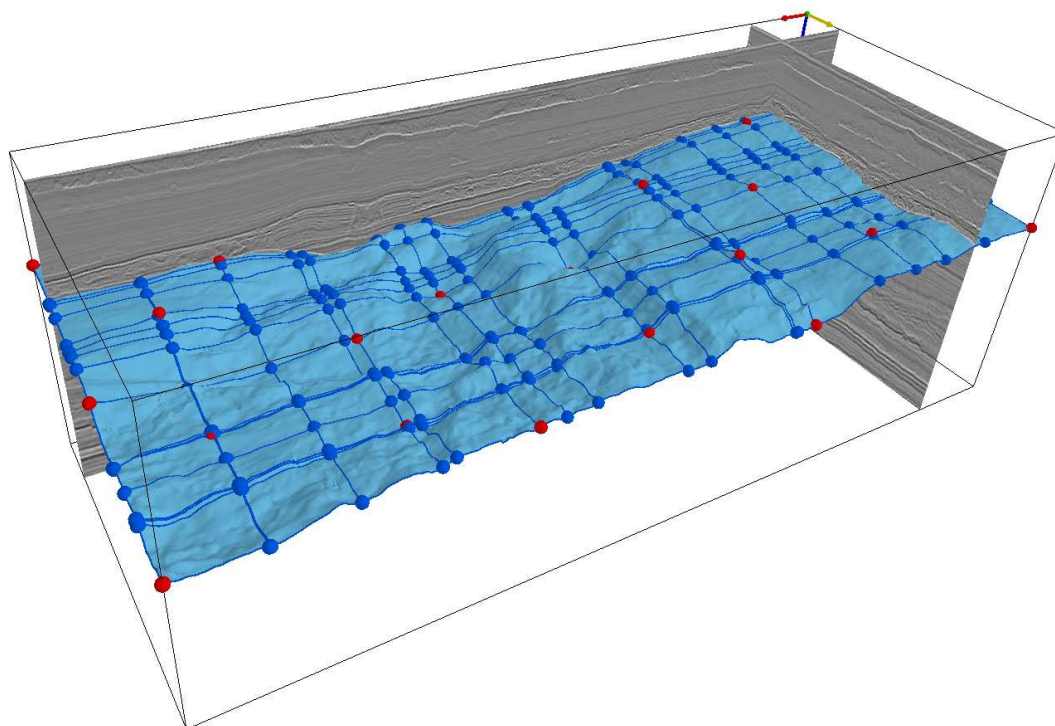


Figure 3.17 – *Reconstruction d'un horizon sismique par subdivision rectangulaire sous la contrainte de 27 points (représentés par les sphères rouges).*

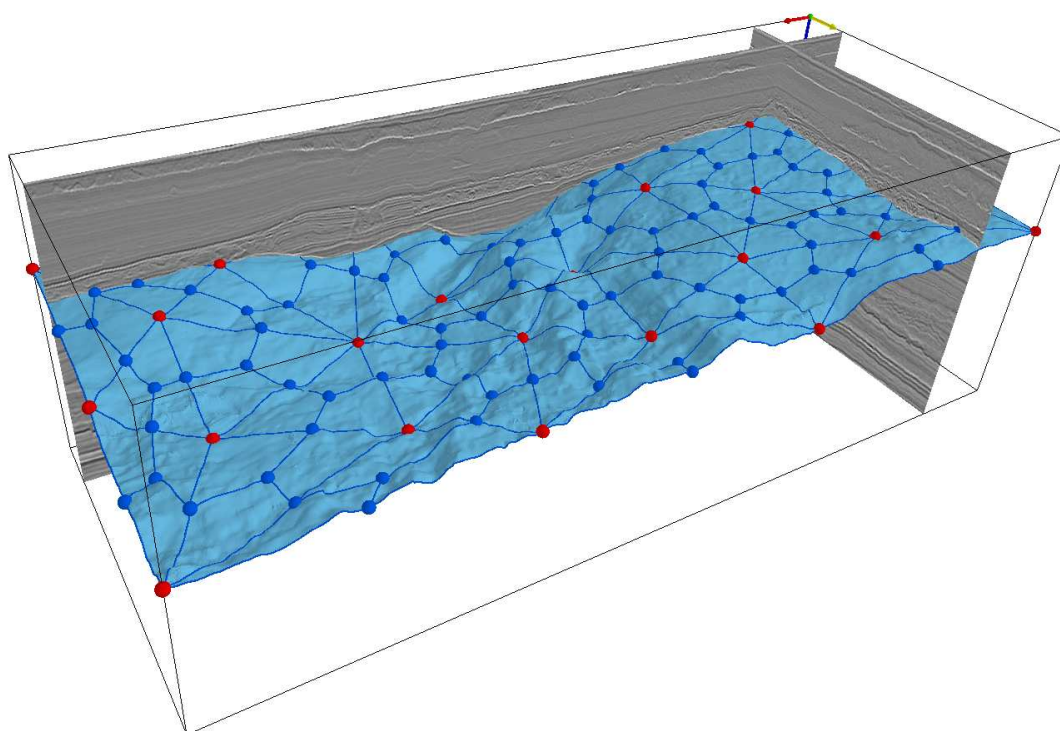


Figure 3.18 – *Reconstruction d'un horizon sismique par subdivision quadrangulaire sous la contrainte de 27 points (représentés par les sphères rouges).*

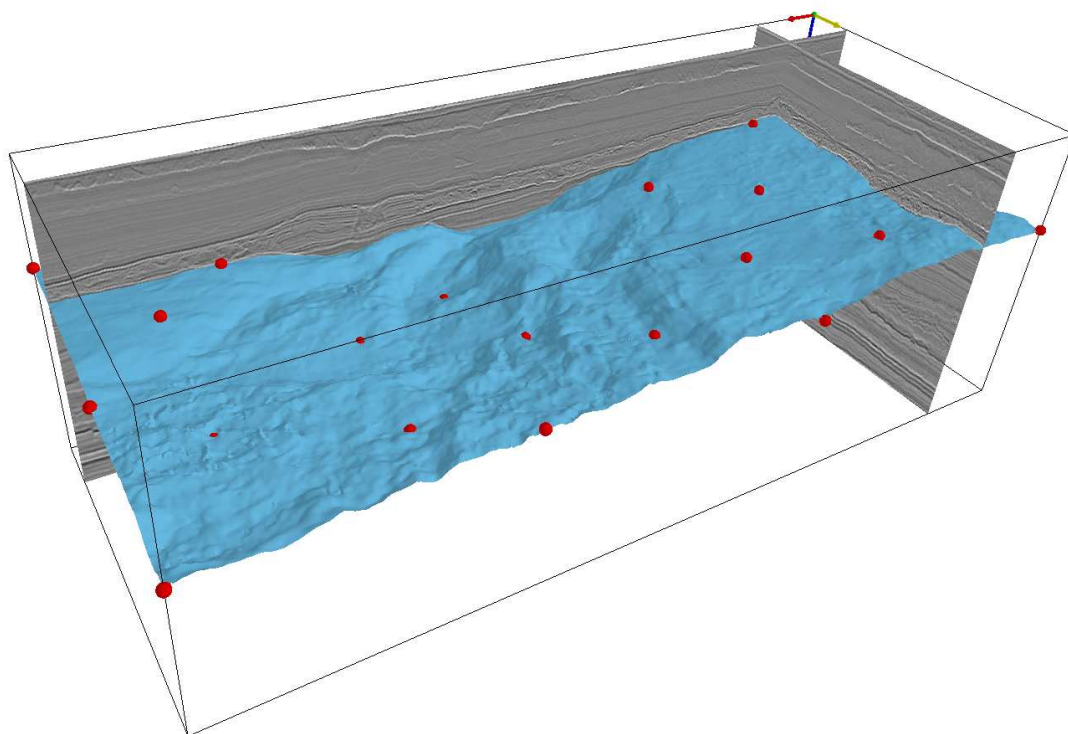


Figure 3.19 – *Reconstruction d'un horizon sismique par optimisation globale sous la contrainte de 27 points (représentés par les sphères rouges).*

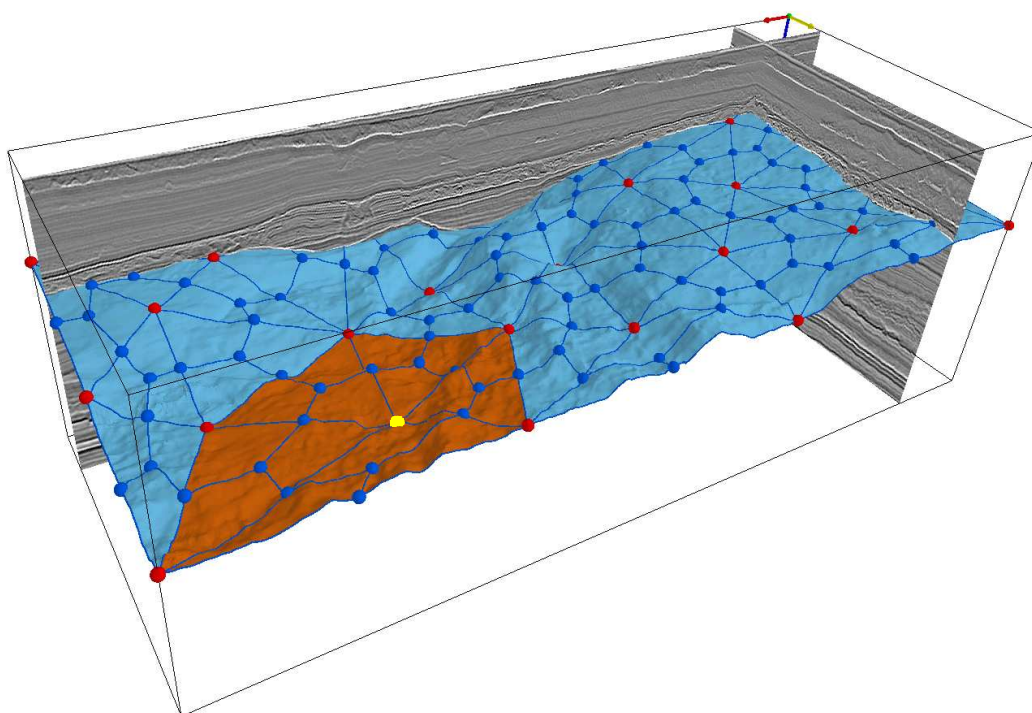
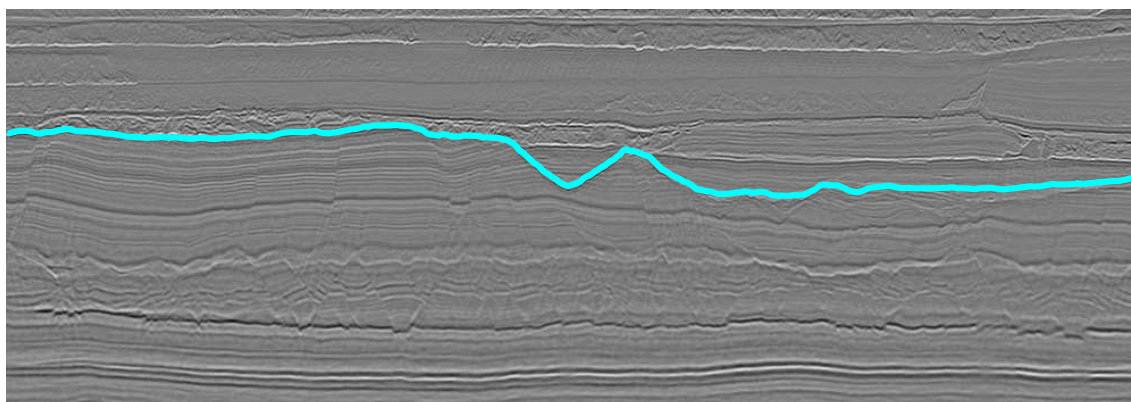
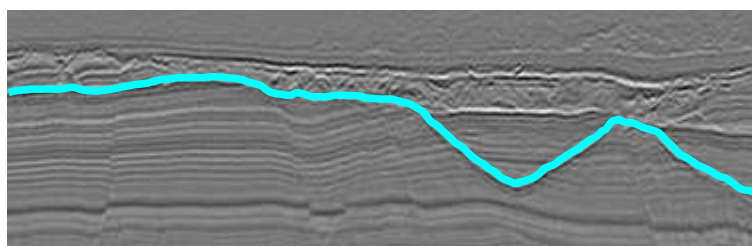


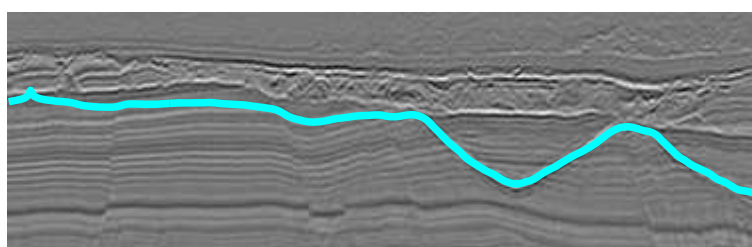
Figure 3.20 – *Reconstruction partielle d'un horizon sismique par subdivision quadrangulaire sous la contrainte de 27 points (représentés par les sphères rouges) suite au déplacement d'un point (en jaune) : seuls les quadrangles « connectés » à ce point (en orange) sont réestimés.*



(a)



(b)



(c)

Figure 3.21 – *Coupe bidimensionnelle d'un horizon sismique reconstruit sous la contrainte de 27 points. (a) Subdivision quadrangulaire ; (b) Subdivision quadrangulaire (zoom) ; (c) Optimisation globale (zoom).*

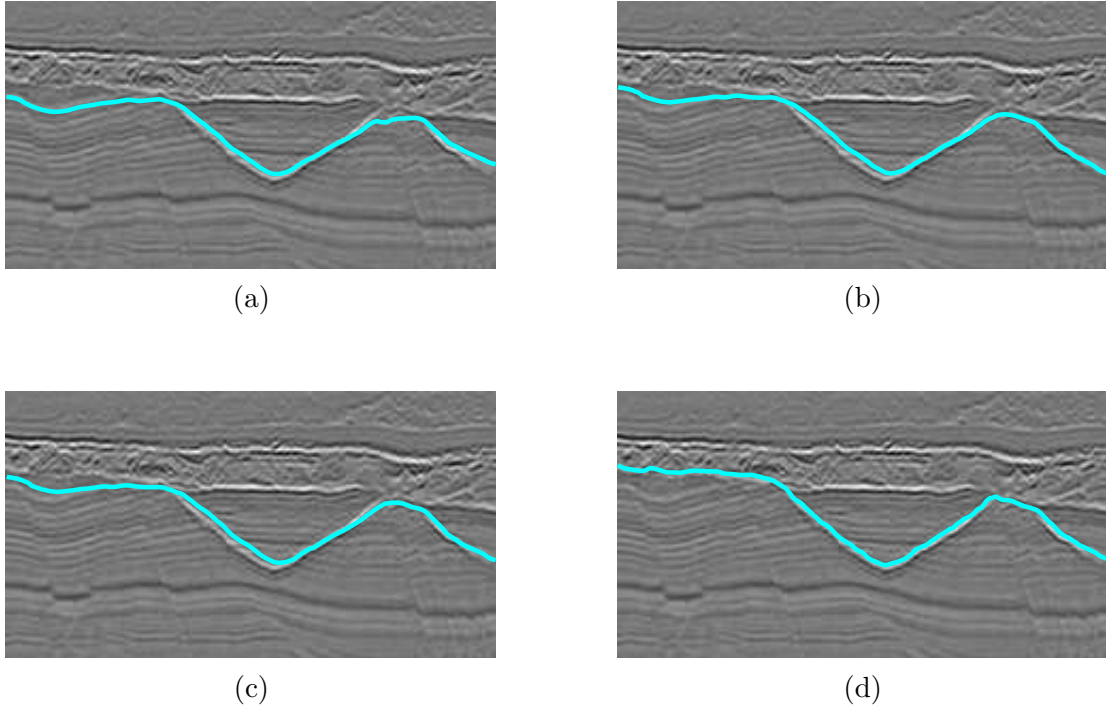


Figure 3.22 – Coupe bidimensionnelle d'un horizon sismique reconstruit par subdivision quadrangulaire sous la contrainte de (a) 13 points ; (b) 18 points ; (c) 23 points ; (d) 27 points.

En effet, pour 27 points imposés, un peu plus de 79 secondes sont nécessaires à la reconstruction de l'horizon par optimisation globale contre seulement 5,4 secondes par subdivision quadrangulaire et 2,95 secondes par subdivision rectangulaire. La méthode par subdivision rectangulaire est ainsi environ 27 fois plus rapide sur cet exemple que la méthode par optimisation globale. Ce gain s'explique principalement par deux raisons. Premièrement, le temps de calcul requis pour l'estimation de l'horizon d'initialisation de la reconstruction par optimisation globale est plus important que le temps requis pour la reconstruction de l'horizon complet par les méthodes par parties en faisant abstraction de l'étape de transformation du pendage. Deuxièmement, le terme de mise à jour est estimé en une seule étape par une approche rapide dans les méthodes par parties tandis qu'un nombre important d'itérations est nécessaire dans la méthode par optimisation globale.

Dans la méthode par subdivision quadrangulaire, le temps nécessaire aux calculs des transformées de Fourier discrètes pour un nombre de points fixé est cependant variable car il dépend de la dimension du domaine rectangulaire Ω_y . Le tableau 3.1 regroupe les temps de calculs mesurés pour 27 points. Les deuxième et troisième colonnes concernent respectivement les performances obtenues pour les dimensions Min, Max, $\overline{\Sigma}$ et $\overline{\Pi}$ du domaine Ω_y et leurs dimensions optimales associées au regard du calcul des transformées de Fourier (cf. paragraphe 3.3.2.1). L'horizon est ainsi reconstituable en 2,7 secondes, soit quasiment trente fois plus rapidement qu'en utilisant la méthode par optimisation globale.

3.3 - Reconstruction rapide et interactive par parties

Dimension de Ω_y	Subdivision quadrangulaire		Subdivision rectangulaire	Optimisation globale
	Dimension normale	Dimension optimale		
Min	3,3 (1,41)	2,7 (0,561)	2,95 (1,99)	79,1
Max	9,98 (5,47)	6,43 (2,41)		
$\overline{\Sigma}$	5,82 (2,9)	4,26 (1,56)		
$\overline{\Pi}$	5,4 (2,54)	3,78 (1,4)		

Tableau 3.1 – Temps de calcul en secondes selon la dimension des domaines rectangulaires pour 27 points. Les temps entre parenthèses sont les temps dédiés aux calculs des transformées de Fourier.

Nombre de contraintes	Subdivision rectangulaire		Subdivision quadrangulaire	
	Reconstruction complète	Reconstruction incrementale	Reconstruction complète	Reconstruction incrementale
13	4,14 (2,72)	–	3,8 (1,4)	–
18	4,1 (3,23)	2,41 (1,97)	3,73 (1,4)	0,627 (0,219)
23	2,98 (2,1)	0,862 (0,619)	3,72 (1,38)	0,603 (0,233)
27	2,95 (1,99)	0,903 (0,588)	3,78 (1,4)	0,5 (0,184)

Tableau 3.2 – Temps de calcul en secondes selon le nombre de contraintes pour les méthodes de reconstruction par parties. Les temps entre parenthèses sont les temps dédiés aux calculs des transformées de Fourier.

3.3.3.2.2 Reconstruction incrémentale

L'ajout ou le déplacement d'une contrainte provoque une réestimation complète de l'horizon par la méthode par optimisation globale. Le coût calculatoire de la méthode est donc indépendant du nombre de contraintes. Au contraire, seuls les sous-domaines « connectés » à la contrainte ajoutée ou déplacée sont recalculés avec un coût calculatoire réduit par les méthodes par parties (voir figure 3.20). L'horizon est ainsi reconstruit de manière incrémentale. Le tableau 3.2 présente les temps de calculs des reconstructions complète et incrémentale de l'horizon par les méthodes par parties en fonction d'un nombre croissant de contraintes. Pour un nombre de contraintes q donné, le temps de la reconstruction incrémentale correspond au temps nécessaire à la reconstruction de l'horizon sous q contraintes à partir de la connaissance de l'horizon sous $q - 1$ contraintes. La méthode de reconstruction complète la plus rapide varie selon le nombre de contraintes. Comme attendu, les reconstructions incrémentales sont extrêmement rapides par rapport aux reconstructions complètes, en particulier dans le cas d'une subdivision quadrangulaire où elles sont de l'ordre de la demi-seconde. La reconstruction incrémentale d'un horizon peut ainsi être considérée comme une méthode temps-réel qui permet une reconstruction interactive de l'horizon.

3.4 Détection automatique de discontinuités dans un espace bidimensionnel

Cette partie traite d'images sismiques bidimensionnelles formées d'horizons segmentés par des failles quasi-verticales. A partir de la connaissance de l'amplitude et du lieu des discontinuités, une reconstruction des horizons sous des contraintes de valeurs peut être obtenue par la méthode de minimisation d'une EDP présentée au paragraphe 1.3 et qui s'appuie sur la résolution d'une équation de Poisson associée à des conditions incrémentales. Cette méthode suppose que la classe de régularité des horizons reconstruits soit au moins égale à 2 en l'absence de discontinuité. L'aspect généralement régulier des horizons aux abords des failles (voir figure 3.25a) légitime cette hypothèse.

En pratique, les paramètres des discontinuités sont inconnus. Dans ce cas, leurs lieux peuvent tout d'abord être déterminés par la construction d'une carte des plans de failles similaire à celle présentée au paragraphe 3.2.3. Les horizons peuvent ensuite être reconstruits par la méthode de minimisation d'une EDP dédiée aux hypersurfaces continues en annulant la valeur du résidu pour les abscisses des lieux de discontinuité (cf. paragraphe 1.2.5). Cependant, cette approche peut conduire à des horizons localement peu réguliers qui s'écartent des horizons attendus près des failles (voir figure 3.7a).

Pour un horizon segmenté en deux parties par une unique discontinuité et dont les deux points frontière sont connus, nous proposons [Zin11a] [Zin11b] deux schémas *ad hoc* permettant de détecter automatiquement l'amplitude et le lieu de la discontinuité. Le cas d'horizons segmentés par plusieurs discontinuités peut alors être traité séquentiellement par une approche par parties.

3.4.1 Principe

La démarche de détermination des paramètres de la discontinuité retenue consiste à tester plusieurs candidats d'amplitude et de lieu (C_d, n_α) et à identifier le candidat optimal $(C_d^{opt}, n_\alpha^{opt})$ au sens d'un critère exprimant la pertinence de l'horizon obtenu. Une méthode naïve et coûteuse en temps de calcul consiste en un crible exhaustif suffisamment fin de l'amplitude et du lieu, un horizon étant alors reconstruit pour chaque candidat, par exemple pour 30 itérations. Le critère de pertinence considéré est le désordre d'orientation le long de la discontinuité qui est mesuré par un indicateur de cohérence. Décrit en détail dans [Ran00] [Don07], il est fondé sur une analyse de la matrice de covariance du champ de gradient estimé sur l points le long du segment

$$\left[(x(n_\alpha), f(x(n_\alpha))), (x(n_\alpha + 1), f(x(n_\alpha + 1))) \right],$$

où f désigne la fonction représentant un horizon reconstruit. Pour le candidat (C_d, n_α) , le critère est défini par

$$c(C_d, n_\alpha) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (3.9)$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice de covariance dans l'ordre décroissant. Il tend vers 0 en présence d'une faille, les deux valeurs propres étant très proches l'une de l'autre, et vers 1 dans le cas contraire. En raison notamment de sources de chaotisme autres que les failles, le minimum global du critère peut être atteint pour un candidat qui n'est pas le candidat idoine (voir figure 3.23 qui représente la réponse du critère de cohérence pour l'horizon supérieur de l'image sismique traitée au paragraphe 3.4.2). Par conséquent, nous proposons deux méthodes robustes de détermination du candidat optimal. Fondées sur des propriétés observées, elles consistent en une détermination séquentielle des paramètres de la discontinuité.

Une première méthode est fondée sur le fait que l'indicateur de cohérence est faible pour une plage relativement large d'amplitudes lorsque le lieu considéré est exact. La démarche de détermination du lieu optimal consiste donc à minimiser la moyenne $\bar{c}$ sur l'amplitude du critère de cohérence à n_α constant. L'amplitude optimale est ensuite déterminée grâce à une mesure de l'homogénéité de l'amplitude sismique à travers l'écart-type σ_s de l'amplitude le long d'un horizon qui est d'autant plus faible que le candidat C_d évalué est proche de la valeur exacte. Ainsi les paramètres du candidat optimal vérifient successivement

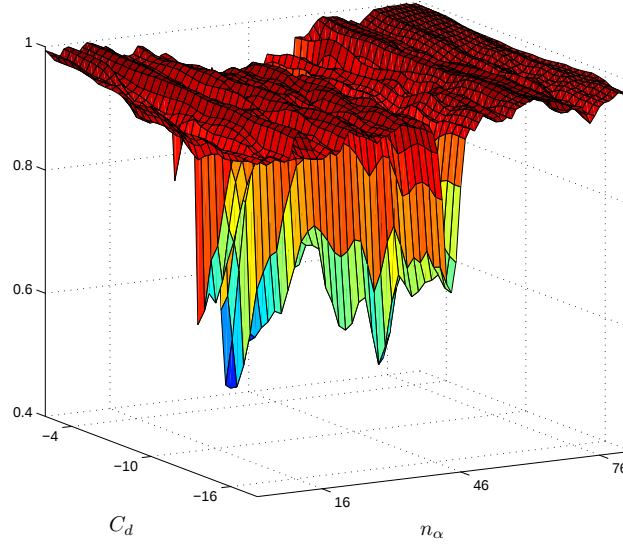


Figure 3.23 – Réponse du critère de cohérence correspondant à l'horizon supérieur de la figure 3.25.

$$n_\alpha^{opt} = \arg \min_{n_\alpha} \bar{c}(n_\alpha) \quad (3.10)$$

$$\text{et } C_d^{opt} = \arg \min_{C_d} \sigma_s(C_d, n_\alpha^{opt}). \quad (3.11)$$

La deuxième méthode proposée ne nécessite pas de crible exhaustif de l'amplitude et du lieu contrairement à la méthode précédente, et exploite une propriété différente : connaissant le lieu n_α , les conditions incrémentales, définies par les équations (1.78) et (1.79), tendent d'autant plus vite vers 0 que l'hypothèse C_d évaluée est proche de la valeur exacte. Dans le cas de contraintes de type frontière, les conditions incrémentales s'écrivent $\forall k > 0$:

$$\begin{cases} \delta \tilde{f}_k(x(1)) &= -\beta(C_{k-1} - C_k) \\ \delta \tilde{f}_k(x(M_\Omega)) &= (1 - \beta)(C_{k-1} - C_k) \end{cases}, \quad (3.12)$$

où M_Ω désigne le nombre de points d'échantillonnage compris entre les abscisses des points qui délimitent l'horizon, le saut C_k est défini par l'équation (1.82) et β est une constante réelle paramétrant la partie discontinue de l'horizon. A titre d'exemple, la figure 3.24 représente la quantité $|C_{k-1} - C_k|$ selon k pour l'horizon reconstruit sur l'image synthétique 1.16 en considérant plusieurs valeurs d'amplitude C_d et un lieu n_α exact.

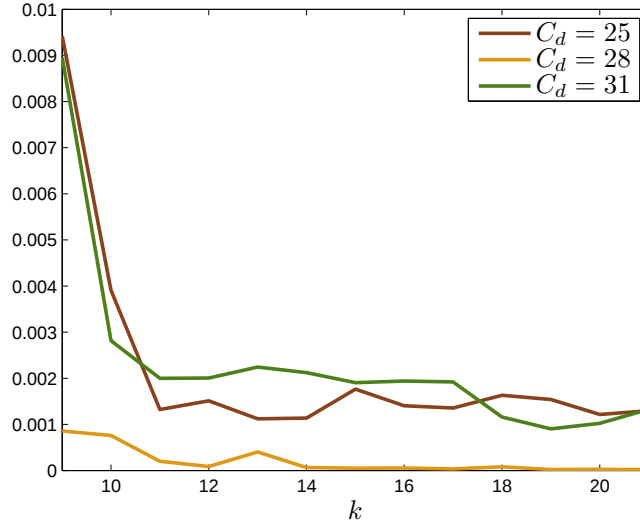


Figure 3.24 – Différence $|C_{k-1} - C_k|$ selon le nombre d'itérations k pour l'horizon reconstruit sur l'image synthétique 1.16 ($C_d^{opt} = 28,3$ et $n_\alpha^{opt} = 600$).

Cette méthode consiste donc en deux phases : le paramètre optimal C_d^{opt} est tout d'abord identifié pour toutes les valeurs possibles du lieu n_α tandis que l'hypothèse optimale n_α^{opt} correspondant à l'amplitude C_d^{opt} est ensuite déterminée. Concernant la première phase, un algorithme itératif de recherche du paramètre C_d^{opt} peut être mis en œuvre. L'approche retenue ici est dichotomique. Il s'agit de considérer trois hypothèses d'amplitude centrées sur une valeur *a priori* C_d^0 et régulièrement espacées d'un pas h_C . L'algorithme de reconstruction d'horizons est mis en œuvre pour un faible nombre d'itérations k_{max} (10 ou 11). L'amplitude pour laquelle la différence $|C_{k_{max}-1} - C_{k_{max}}|$ est minimale est alors substituée à C_d^0 et le procédé est répété m fois en divisant le pas h_C par 2 de sorte à atteindre une précision satisfaisante. Concernant la deuxième phase, le lieu optimal minimise le critère de cohérence décrit par l'équation (3.9) :

$$n_\alpha^{opt} = \arg \min_{n_\alpha} c(C_d^{opt}(n_\alpha), n_\alpha). \quad (3.13)$$

Une fois le candidat optimal identifié, une reconstruction de meilleure qualité est finalement obtenue par une mise en œuvre de l'algorithme de reconstruction pour 30 itérations.

3.4.2 Exemple

Les deux méthodes sont appliquées à de nombreuses images sismiques pour lesquelles l'amplitude et le lieu de la faille sont inconnues. La figure 3.25a représente un exemple d'image traitée (140×76 pixels) ainsi que les points délimitant deux horizons à reconstruire. L'étude ci-dessous concerne l'horizon supérieur. Les hypothèses de lieu sont choisies dans l'intervalle discret $[2, M_\Omega - 1]$ en respectant l'échantillonnage naturel de la donnée. Le paramètre l est fixé à 10.

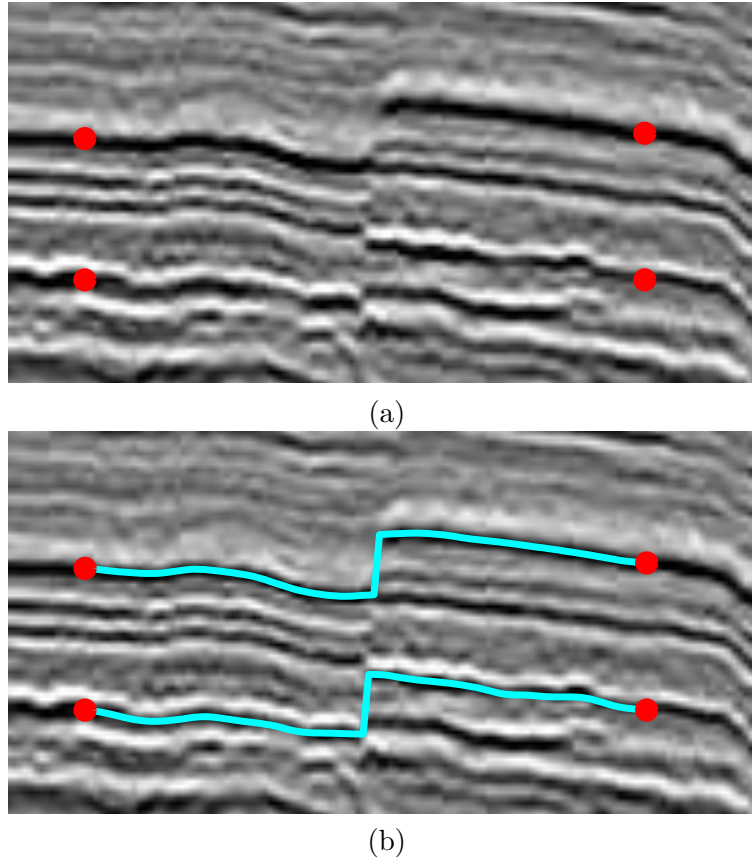


Figure 3.25 – Image sismique composée d'une faille quasi-v verticale (a) Points délimitant deux horizons (représentés par des disques rouges); (b) Horizons reconstruits suite à une détection automatique des paramètres de discontinuité.

Pour la méthode fondée sur la moyenne du critère de cohérence, les hypothèses d'amplitudes sont choisies dans l'intervalle discret $[-17, -2]$ avec un pas de 0,5. Le critère de la moyenne sur l'amplitude du critère de cohérence à n_α constant est très discriminant. Il est à noter que l'augmentation de la valeur de l n'affecte que très faiblement la réponse du critère de cohérence (voir figure 3.26a). Une fois le lieu optimal fixé, le critère d'homogénéité de l'amplitude sismique (voir figure 3.26b) permet une estimation précise de l'amplitude de la discontinuité.

Pour la méthode fondée sur l'exploitation des conditions incrémentales, les paramètres utilisés sont $C_d^0 = 0$, $h_C = 10$, $k_{max} = 11$ et $m = 5$. La figure 3.27a fait apparaître que les valeurs d'amplitude C_d^{opt} correspondant à chacun des lieux de discontinuité possibles sont variables tout en restant néanmoins proches de la valeur observable sur l'image sismique (autour de -10). Le choix $m = 5$ implique un pas h_C terminal inférieur au pixel. Enfin, le critère de cohérence (voir figure 3.27b) permettant d'identifier le lieu optimal n_α^{opt} est particulièrement discriminant (pour des valeurs de l comprises entre 5 et 20).

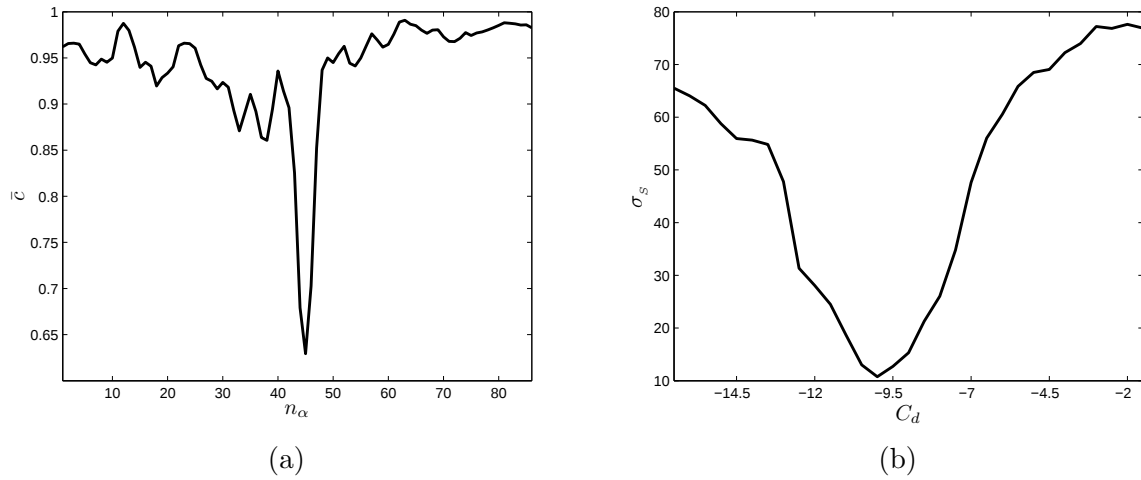


Figure 3.26 – (a) Moyenne du critère de cohérence selon n_α ; (b) Ecart-type de l'amplitude sismique le long des horizons testés selon C_d .

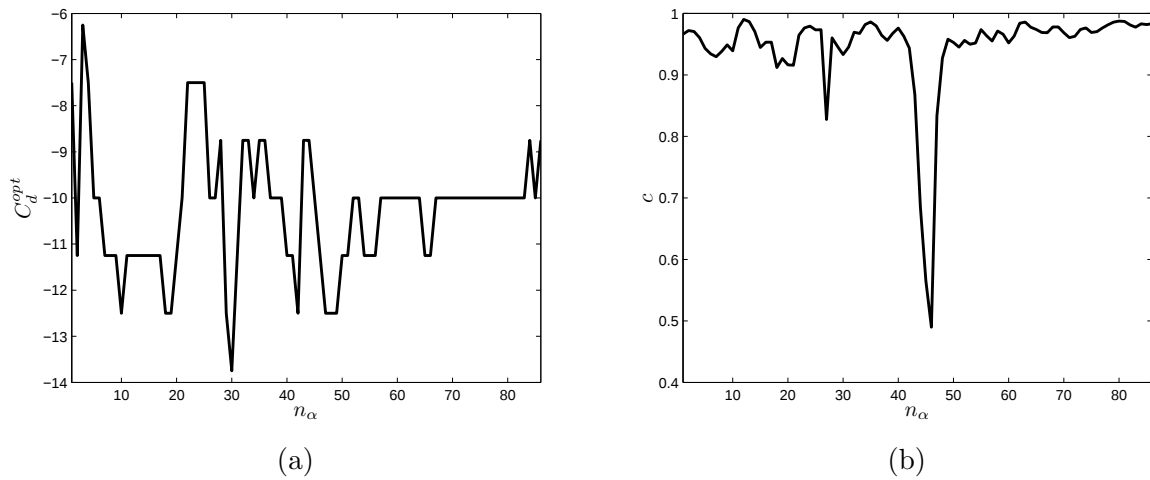


Figure 3.27 – (a) Amplitude optimale pour chaque lieu n_α testé; (b) Critère de cohérence selon n_α .

Au final, l'amplitude et le lieu de la discontinuité semblent parfaitement identifiées par les deux méthodes et les deux horizons reconstruits sont visuellement indistinguables et se confondent avec l'horizon observable. La figure figure 3.25b représente les deux horizons reconstruits sur l'exemple figure 3.25a par la méthode fondée sur la moyenne du critère de cohérence.

3.5 Conclusion

La méthode de reconstruction d'hypersurfaces par minimisation d'une EDP se révèle parfaitement adaptée à l'estimation d'horizons sismiques dans un objectif d'analyse stratigraphique en dimension 2 et 3. En présence de contraintes définies par plusieurs points, nous proposons une méthode de reconstruction rapide et interactive par parties d'un horizon fondée sur une subdivi-

sion efficace du domaine de reconstruction en sous-domaines difféomorphes à des rectangles. Le point clé de l'approche est le changement d'espace du pendage qui permet la résolution d'une équation de Poisson par une approche rapide. Sur les exemples de données sismiques réelles traitées, les résultats observés mettent en valeur la précision et la robustesse au bruit de l'approche. Le gain en terme de temps de calcul par rapport à une reconstruction de l'horizon par une méthode globale peut atteindre 30. L'approche permet en outre une reconstruction interactive « quasi temps-réel » d'un horizon lors de l'ajout ou du déplacement d'une contrainte, seuls les sous-domaines connectés au point ajouté ou déplacé étant alors recalculés. Enfin, la méthode proposée de reconstruction d'horizons sismiques segmentés en deux parties par une faille quasi-verticale s'avère efficace lorsque l'amplitude et le lieu de la discontinuité sont inconnus.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux hypersurfaces orthogonales à un champ de normales d'un espace vectoriel de dimension finie. Notre objectif est la reconstruction d'hypersurfaces sous des contraintes de valeurs ou de bornes. Les contraintes de valeurs consistent à fixer la valeur d'une hypersurface en un nombre fini de points ou sur la frontière de son domaine de définition tandis que les contraintes de bornes consistent à délimiter le lieu d'évolution d'une hypersurface par deux hypersurfaces connues : elles permettent, par exemple, de fixer le lieu exact d'une hypersurface dans une région d'intérêt. Les applications abordées dans ce travail concernent des données bidimensionnelles et tridimensionnelles représentant des photos satellites de cyclones et de galaxies ainsi que des images sismiques, d'empreintes digitales et SST. Un champ de normales est estimé sur les données traitées par une méthode classique fondée sur une estimation du gradient suivi d'une « régularisation ». L'approche de reconstruction retenue est une approche globale qui consiste en la minimisation d'une équation aux dérivées partielles non linéaire reliant une hypersurface au champ de normales. Elle permet de reconstruire des hypersurfaces continues qui sont exprimées sous une forme explicite dans le repère de définition du champ de normales.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté les modalités de la reconstruction d'hypersurfaces explicites selon les contraintes imposées. La notion de pendage a été introduite à cet effet. Les hypersurfaces sont obtenues par un algorithme itératif qui s'appuie sur la résolution d'une équation de Poisson associée à des conditions aux limites ou « intérieures » dans le cas de contraintes de valeurs et sur une projection de la solution dans l'ensemble des contraintes dans le cas de contraintes de bornes. La reconstruction numérique d'une hypersurface par la méthode des éléments finis a également été explicitée. Nous nous sommes particulièrement focalisés sur les contraintes de valeurs en présentant des approches directes, itératives et rapides de résolution de l'équation de Poisson discrète. La prise en compte d'un terme de pondération binaire permettant de neutraliser l'influence du champ de normales dans des régions peu fiables a en outre été explicitée. L'approche de reconstruction a été évaluée sur des images synthétiques. Pour l'ensemble des contraintes considérées, elle s'avère robuste au bruit et peu dépendante des paramètres d'estimation du champ de normales. Des régions où la tangente à l'hypersurface possède une forte pente entraînent toutefois une différence observée plus importante entre les reconstructions et le modèle et peuvent mettre en défaut la convergence de l'approche. Sous des contraintes de

valeurs, une extension de l'approche au cas de courbes continues par morceaux a été proposée. Elle possède les mêmes propriétés de convergence que l'approche dédiée aux courbes continues et s'appuie sur une équation de Poisson associée à des conditions incrémentales.

Le deuxième chapitre est dédié à la reconstruction d'hypersurfaces exprimées sous une forme implicite. En supposant l'existence d'un repère dans lequel une hypersurface est exprimable sous une forme explicite, nous avons proposé une approche de reconstruction dont le point clé est le changement d'espace du pendage. Fondée sur une propriété de conservation des hyperplans tangents par changement d'espace bijectif, elle consiste en la minimisation sous des contraintes de valeurs ou de bornes d'une EDP faisant intervenir le pendage dans le nouveau repère. Elle nécessite la connaissance des équations de changement d'espace entre le repère dans lequel est défini le champ de normales et le repère dans lequel l'hypersurface est explicite. L'approche a tout d'abord évaluée sur des images synthétiques. Similairement à l'approche sans changement d'espace, elle se révèle généralement robuste au bruit même si un champ de normales peu fiable peut conduire à une divergence. Nous avons en outre mis en évidence empiriquement que la qualité de la reconstruction ne dépend pas du choix du changement d'espace considéré. L'approche a ensuite été appliquée à des images réelles. Sous des contraintes déduites de points singuliers locaux, des lignes dermiques ont été reconstruites sur des images d'empreintes digitales parfois fortement bruitées. Les lieux de turbulences météorologiques ont également été estimés par des schémas *ad hoc* sur des images satellites de cyclones ou représentant la température à la surface de la mer, tout comme les lieux des bras de galaxies sur des photos satellites. Les courbes reconstruites sur l'ensemble des images considérées semblent se superposer aux courbes observables bien que la comparaison puisse souffrir de l'absence de vérité terrain.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté l'application de l'approche de reconstruction d'hypersurfaces à l'analyse stratigraphique d'images sismiques de dimension 2 et 3. L'approche permet en effet de reconstruire des horizons qui délimitent les différentes couches géologiques composant ces images. Les contraintes de valeurs et de bornes peuvent être considérées respectivement comme des points de passage et des *a priori* stratigraphiques des horizons à reconstruire. Un champ binaire indiquant la localisation de failles sismiques peut également être pris en considération comme terme de pondération. Dans le cas de contraintes définies par un ensemble de points, notre contribution consiste en une approche locale qui permet de reconstruire un horizon par parties de manière rapide et interactive. La méthode est fondée sur une subdivision du domaine de reconstruction en sous-domaines difféomorphes à des rectangles sur lesquels l'horizon est reconstruit partiellement par une approche rapide *via* un changement de support considéré comme un cas particulier du changement d'espace introduit au deuxième chapitre. Elle permet en outre une reconstruction interactive en temps réel d'un horizon, qui est d'un intérêt majeur vu les dimensions parfois importantes des données traitées. Les résultats obtenus sont satisfaisants qualitativement et en terme de temps de calcul par rapport à l'approche de reconstruction globale. Nous avons également mis à profit l'algorithme présenté dans le premier chapitre afin

de reconstruire des horizons unidimensionnels perturbés par des discontinuités quasi-verticales. Deux schémas permettant la détection des paramètres de discontinuités d'amplitudes et de lieux inconnus ont été proposés.

Parmi les suites envisagées au travail présenté dans ce mémoire, deux perspectives principales se dégagent. Un premier point concerne la reconstruction conjointe de plusieurs hypersurfaces non intersectantes en tenant compte d'éventuelles contraintes de distances. L'approche envisagée ici est fondée sur une extension des systèmes matriciels présentés dans le premier chapitre et s'appuie sur des prémices déjà existantes [Lom06a]. Un second point concerne la reconstruction d'une hypersurface bidimensionnelle implicite sous la contrainte de plusieurs points par une approche rapide. Il s'agit de la mise en cascade de changements d'espace permettant le passage de formes implicites à des formes explicites couplés à la prise en considération des contraintes sous une forme optimale en temps de calcul. Selon l'application envisagée, la mise en œuvre de la première partie de cette approche se heurte à l'utilisation de plusieurs changements d'espace se recouvrant partiellement.

Annexes

Annexe A

Estimation d'un champ de normales

Une reconstruction d'hypersurfaces par les différentes méthodes décrites au premier chapitre est très souvent précédée d'une estimation du champ de normales d'une image. Les approches d'estimation se répartissent en plusieurs catégories [Don99]. Certaines méthodes, fondées sur la modélisation de textures par des modèles markoviens, fournissent une estimation directe. D'autres approches mettant en jeu la transformée de Fourier ou de Hough pour une image binaire procèdent par changement d'espace de représentation : la détermination de l'orientation nécessite alors la recherche d'un pic d'accumulation ou d'énergie. Enfin, les méthodes les plus populaires consistent à appliquer un filtre directionnel spécifique dans un nombre prédéfini de directions et d'estimer l'orientation par une recherche de la réponse extrémale ou par une combinaison des réponses obtenues : matrices de cooccurrences, méthodes projectives (transformée de Radon), approches morphologiques, méthodes basées sur l'orientation locale des contours (filtres du gradient, filtres orientables), etc.

L'approche retenue dans ce manuscrit est basée sur des techniques désormais bien connues mettant en œuvre des filtres convolutifs estimant le gradient ainsi qu'une analyse en composantes principales [Don99] [Fom02] [Mar06]. Elle permet une réduction de l'effet du bruit contenu dans les images considérées ainsi qu'une « régularisation » du champ de normales. L'estimation comporte deux étapes. Une orientation locale orthogonale aux structures de l'image est d'abord estimée en chaque point par le calcul du champ des vecteurs gradients. Cette orientation étant généralement bruitée, une orientation moyenne est ensuite affectée à chaque point à partir d'une analyse en composantes principales des orientations locales des points situés dans son voisinage.

Chacune des deux étapes met en jeu un opérateur gaussien isotrope paramétré par un écart-type, respectivement noté σ_g et σ_{acp} , qui contrôle la taille du voisinage pris en considération dans les calculs. Sachant que 99% de l'information d'une gaussienne d'écart-type σ appartient à l'intervalle $[-3\sigma, 3\sigma]$, ce voisinage est centré sur le point considéré et comprend $2\lceil 3\sigma \rceil + 1$ points dans chaque direction, où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la fonction partie entière par excès. Concernant la première étape, le choix du paramètre σ_g est adapté à la structure de l'image. Si le voisinage est

Annexe A - Estimation d'un champ de normales

trop vaste, il englobe des pixels appartenant à des structures différentes et inhomogènes. Au contraire, s'il est trop étroit, l'opérateur de dérivation correspond à un opérateur local sur les voisins immédiats d'un point et conduit à une estimation très bruitée. Concernant la deuxième étape, plus la valeur de σ_{acp} est faible, plus l'estimation du champ de normales est sensible à des détails ponctuels. Au fur et à mesure qu'elle augmente, le champ fait de plus en plus abstraction de perturbations locales.

Considérons une image I de dimension finie N . Le champ G des gradients G_i est estimé selon les N directions associées aux dimensions de l'image par des filtres convolutifs gaussiens normalisés à caractère dérivatif selon la direction i considérée et à caractère « lisseur » selon les autres directions :

$$\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad G_i = I * h_{Di, \sigma_g}, \quad (\text{A.1})$$

où $*$ désigne l'opérateur de convolution et où

$$h_{Di, \sigma_g}(x) = -\frac{x_i}{\sigma_g^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_g^2} \sum_{k=1}^N x_k^2}, \quad (\text{A.2})$$

en désignant par x la variable $(x_1, \dots, x_N)$. Il est régularisé par une technique non linéaire qui consiste en pratique à étudier sa matrice de covariance $\mathcal{C}_G$. En effet, l'orientation moyenne ou dominante de G est caractérisée par le vecteur propre associé à la valeur propre de $\mathcal{C}_G$ la plus élevée. La composante d'indice (i, j) de $\mathcal{C}_G$ est définie au point x par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad \mathcal{C}_G^{i,j}(x) = \sum_{u_1} \dots \sum_{u_N} \omega(u) G_1(x+u) \dots G_N(x+u), \quad (\text{A.3})$$

où u désigne la variable discrète $(u_1, \dots, u_N)$ parcourant la voisinage considéré et où $\omega(u)$ est une pondération gaussienne normalisée :

$$\omega(u) = -\frac{1}{\sigma_{acp} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_{acp}^2} \sum_{k=1}^N u_k^2}. \quad (\text{A.4})$$

Annexe B

Minimisation sous contraintes d'une fonctionnelle

Cette annexe présente quelques résultats théoriques consacrés à la minimisation d'une fonctionnelle. Leurs démonstrations sont présentées dans [\[Gel64\]](#) [\[Aze97\]](#) [\[Gou03\]](#).

Soient N un entier naturel non nul et Ω un domaine compact de $\mathbb{R}^N$. Considérons :

- une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant d'une variable x et dont la classe de régularité est au moins égale à 2.
- une fonction $L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant de trois variables indépendantes x , $f(x)$ et $\nabla f(x)$ et dont la classe de régularité est au moins égale à 1.

Définissons alors la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathcal{C}^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_{\Omega} L(x, f(x), \nabla f(x)) dx, \end{aligned} \tag{B.1}$$

où $\mathcal{C}^2(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la classe de régularité sur Ω est au moins égale à 2. Nous nous intéressons dans ce manuscrit au problème d'optimisation :

$$f = \arg \min_{g \in \mathcal{C}^2(\Omega)} \mathcal{J}[g] \text{ sous la contrainte } f \in I, \tag{B.2}$$

où I est l'ensemble des contraintes.

B.1 Absence de contraintes

En l'absence de contraintes, une condition suffisante d'optimalité locale existe pour une fonctionnelle dont la classe de régularité est au moins égale à 2. Si une fonction f^* vérifie

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f^*](x) = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\text{et} \quad \frac{d^2\mathcal{J}}{df^2}[f^*](x) > 0, \quad (\text{B.4})$$

alors f^* est un minimum local de $\mathcal{J}$.

Les opérateurs $\frac{d\mathcal{J}}{df}$ et $\frac{d^2\mathcal{J}}{df^2}$ dénotent respectivement la dérivée première et seconde de $\mathcal{J}$ par rapport à f . La condition du second ordre (B.4), qui traduit une convexité locale de $\mathcal{J}$, est difficile à vérifier en pratique. Par conséquent, nous nous appuyons sur une condition nécessaire d'optimalité locale du premier ordre valable pour une fonctionnelle dont la classe de régularité est au moins égale à 1 : si une fonction f^* est un minimum local de $\mathcal{J}$, alors

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f^*](x) = 0. \quad (\text{B.5})$$

La résolution de l'équation (B.5), appelée *équation d'Euler-Lagrange*, permet de sélectionner un certain nombre de fonctions candidates à la minimisation de $\mathcal{J}$.

B.2 Contraintes de valeurs

Pour des contraintes de type frontière ou points discrets, l'ensemble I est défini respectivement par les équations (1.5) ou (1.6). Dans le cas où le problème (B.2) est sous-déterminé ou admet une solution unique, la condition d'optimalité précédente reste valable.

B.3 Contraintes de bornes

Pour des contraintes de bornes, l'ensemble I défini par l'équation (1.7) est un sous-ensemble convexe complet non vide de $\mathcal{C}^2(\Omega)$. Une condition nécessaire d'optimalité locale du premier ordre existe : si une fonction f^* appartenant à I est un minimum local de $\mathcal{J}$, alors

$$\forall f \in I, \quad \forall x \in \Omega, \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f^*](x)(f(x) - f^*(x)) \geq 0. \quad (\text{B.6})$$

B.4 Dérivée fonctionnelle

La dérivée fonctionnelle de $\mathcal{J}$ par rapport à la variable f , appelée dérivée de Fréchet, vérifie :

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(\Omega), \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f] = \frac{\partial L}{\partial f} - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial f_{x_i}}, \quad (\text{B.7})$$

où x_i désigne la i -ième composante de $\mathbf{x}$ et f_{x_i} est l'opérateur de dérivation partielle de f par rapport à x_i , noté $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Lorsque la fonction L est de la forme

$$\begin{aligned} L : \quad \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x})) &\longmapsto \|\nabla f(\mathbf{x}) - \mathbf{p}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\|^2, \end{aligned} \tag{B.8}$$

alors

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(\Omega), \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f] = -\Delta f + \operatorname{div}(\mathbf{p}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial p_i^2}{\partial f}. \tag{B.9}$$

Lorsque la fonction L est de la forme

$$\begin{aligned} L : \quad \Omega \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x})) &\longmapsto \|\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2, \end{aligned} \tag{B.10}$$

alors

$$\forall f \in \mathcal{C}^2(\Omega), \quad \frac{d\mathcal{J}}{df}[f] = -\Delta f - \operatorname{div}(\mathbf{r}). \tag{B.11}$$

Annexe C

Résolution rapide de l'équation de Poisson

Sur un domaine compact $\Omega \in \mathbb{R}^N$, où N est un entier naturel, soit à déterminer une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dont la classe de régularité sur Ω est au moins égale à 2 et vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\Delta f = u \quad \text{sur } \Omega, \tag{C.1}$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien et où $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée. L'équation (C.1) est une *équation de Poisson*, généralement associée à des conditions sur f . Dans cette annexe, nous nous intéressons aux approches « rapides » de résolution numérique de cette équation [Hoc65] [Pol02] [Pin03]. Ces approches sont applicables sur des domaines unidimensionnels et des domaines hyperrectangulaires en dimension supérieure. Elles nécessitent soit la connaissance de la valeur de f sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine (conditions aux limites), soit la connaissance de la valeur moyenne de f sur Ω (condition sur la moyenne).

Dans le cadre d'une résolution numérique du problème par la méthode des éléments finis, le domaine Ω est discrétisé par une grille composée de M_Ω points. Les approches présentées supposent un échantillonnage régulier de la direction associée à chacune des N dimensions de Ω . La grille considérée coïncide de plus avec la frontière $\partial\Omega$ en un nombre $M_{\partial\Omega}$ de points. Dans la méthode des éléments finis, l'opérateur Laplacien est approximé par des différences finies (voir paragraphe 1.2.4). La dérivée seconde dans une direction donnée est ainsi estimée à l'aide de trois échantillons consécutifs par le filtre convolutif discret suivant :

$$\frac{1}{h_i^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{C.2}$$

Annexe C - Résolution rapide de l'équation de Poisson

où h_i désigne le pas d'échantillonnage dans la direction i . Ce filtre est appliqué directement aux points intérieurs du domaine mais requiert un échantillon supplémentaire lorsque le point d'application appartient à la frontière. L'échantillon supplémentaire est habituellement choisi égal soit à l'échantillon du point d'application, soit à l'échantillon du point précédent ou suivant (voir figure 1.6).

La discrétisation de l'équation de Poisson associée à des conditions aux limites ou sur la moyenne conduit à la résolution d'un système matriciel

$$A\underline{f} = \underline{b}, \quad (\text{C.3})$$

où A est une matrice de rang r comportant m lignes et n colonnes, $\underline{b}$ est un vecteur de données de taille m et $\underline{f}$ est un vecteur de taille n à déterminer, qui dépendent tous trois de la grille de d'échantillonnage et du type de conditions considéré. La solution exacte du système (C.3) s'obtient par la multiplication matricielle

$$\underline{f} = A^* \underline{b}, \quad (\text{C.4})$$

où A^* désigne une matrice de taille $n \times m$ dépendant de la matrice A . La détermination de $\underline{f}$ nécessite environ r^3 opérations (voir paragraphe 1.2.4).

Cette solution s'obtient de manière équivalente en $r \log r$ opérations par un passage dans le domaine fréquentiel dans lequel est calculé l'inverse de l'opérateur Laplacien. Pour ce faire, un miroir discret périodique adapté aux conditions est appliqué à l'ensemble ou à une partie des composantes des vecteurs $\underline{f}$ et $\underline{b}$. Les restrictions sur une période des signaux obtenus après application du miroir, respectivement notés $\tilde{\underline{f}}$ et $\tilde{\underline{b}}$, sont alors liés par une convolution circulaire :

$$\tilde{\underline{b}} = \tilde{\underline{f}} \circledast \phi^\Delta, \quad (\text{C.5})$$

où $\circledast$ désigne l'opérateur de convolution circulaire et où ϕ^Δ est un filtre représentant l'opérateur Laplacien discret. Dans le domaine fréquentiel, l'équation (C.5) devient

$$\text{TFD}(\tilde{\underline{b}}) = \text{TFD}(\tilde{\underline{f}}) \odot \text{TFD}(\phi^\Delta), \quad (\text{C.6})$$

où $\odot$ et TFD désignent respectivement le produit terme à terme (de vecteurs ou de matrices) et la transformée de Fourier discrète. Le signal $\tilde{\underline{f}}$ est ainsi déterminé par la relation

$$\tilde{\underline{f}} = \text{TFD}^{-1} [\text{TFD}(\tilde{\underline{b}}) \odot \Phi^\Delta], \quad (\text{C.7})$$

où TFD^{-1} désigne la transformée de Fourier discrète inverse. Le filtre Φ^Δ correspond à l'inverse de l'opérateur Laplacien dans le domaine fréquentiel. Sa première composante correspond au rapport entre les valeurs moyennes des signaux $\tilde{f}$ et $\tilde{b}$. Selon le miroir considéré, la transformée de Fourier discrète est équivalente à une transformée en sinus ou en cosinus discrète.

Dans la suite, nous présentons en détail les approches rapides pour des domaines unidimensionnels, Ω étant alors un segment de $\mathbb{R}$. L'extension à des domaines hyperrectangulaires en dimension supérieure se fait sans difficulté. En dimension 1, l'équation de Poisson s'écrit :

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) = u(x). \quad (\text{C.8})$$

Le segment Ω est discrétisé par une grille de M_Ω points espacés par un pas d'échantillonnage h . La frontière $\partial\Omega$ est composée de 2 points (voir figure C.1). Les échantillons des fonctions f et u sont alors estimés en ces M_Ω points.

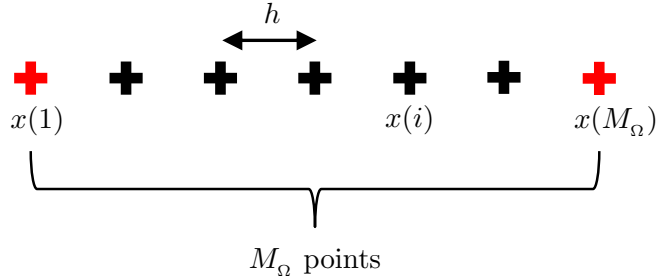


Figure C.1 – Grille d'échantillonnage sur M_Ω points. Les deux points en rouge composent la frontière du domaine.

C.1 Conditions aux limites

Le problème composé de l'équation (C.8) discrétisée et associée à des conditions aux limites possède n inconnues, qui correspondent aux $M_\Omega - 2$ échantillons de f sur les points intérieurs au domaine Ω . Ces inconnues sont déterminées par les équations :

$$\forall i \in \llbracket 2, M_\Omega - 1 \rrbracket, \quad \frac{1}{h^2} [f(x(i-1)) - 2f(x(i)) + f(x(i+1)))] = u(x(i)), \quad (\text{C.9})$$

où $f(x(1))$ et $f(x(M_\Omega))$ sont imposés par les conditions. La matrice A traduit donc l'application de l'opérateur Laplacien sur les points intérieurs au domaine Ω . Il s'agit d'une matrice carrée de taille $n \times n$ inversible (*i.e.* de rang n). Elle s'écrit :

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Le vecteur $\underline{f}$ contient les n échantillons inconnus de f tandis que le vecteur $\underline{b}$ contient les échantillons de u ainsi que les valeurs de f sur $\partial\Omega$, qui passent donc à droite de l'égalité (C.3) :

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f(x(2)) \\ \vdots \\ f(x(M_\Omega - 1)) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} u(x(2)) - \frac{1}{h^2}f(x(1)) \\ u(x(3)) \\ \vdots \\ u(x(M_\Omega - 2)) \\ u(x(M_\Omega - 1)) - \frac{1}{h^2}f(x(M_\Omega)) \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

La solution du système (C.3) vérifie alors :

$$\underline{f} = A^{-1}\underline{b} = \text{TSD}_I^{-1}[\text{TSD}_I(\underline{b}) \odot \Phi^{\Delta'}], \quad (\text{C.12})$$

où TSD_I et TSD_I^{-1} désignent respectivement la transformée en sinus discrète de type I et sa transformée inverse. Le filtre $\Phi^{\Delta'}$ est de taille n .

En effet, le miroir discret appliqué aux vecteurs $\underline{f}$ et $\underline{b}$ est un miroir impair de période $2n + 2$ (voir figure C.2).

Les restrictions sur une période des signaux obtenus après application du miroir sont donc de la forme suivante :

$$\underline{\tilde{g}} = \begin{bmatrix} \underline{g}(1) & \cdots & \underline{g}(n) & 0 & -\underline{g}(n) & \cdots & -\underline{g}(1) & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

où $\underline{g}$ désigne indifféremment $\underline{f}$ et $\underline{b}$ et où $\underline{g}(i)$ correspond au i -ième échantillon de $\underline{g}$. Le filtre ϕ^Δ

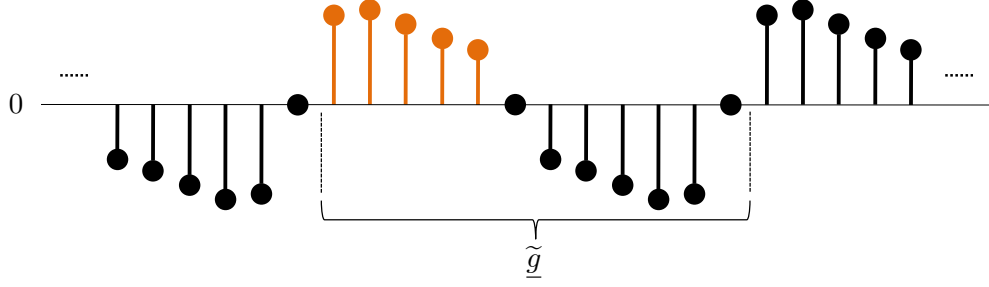


Figure C.2 – Miroir impair de période $2n + 2$ appliqué à un signal $\underline{g}$ de $n=5$ échantillons (en orange). Le signal $\tilde{\underline{g}}$ est la restriction sur une période du signal périodique.

est lui aussi de taille $2n + 2$:

$$\phi^\Delta = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.14})$$

Concernant le filtre Φ^Δ , la valeur de sa première composante n'a aucune importance, étant donné que $\tilde{f}$ et $\tilde{b}$ sont impairs donc de valeur moyenne nulle. Ses autres composantes sont données par :

$$\forall i \in \llbracket 2, 2n + 2 \rrbracket, \quad \Phi^\Delta(i) = \frac{h^2}{2 \cos \left(2\pi \frac{i-1}{2n+2} \right) - 2}. \quad (\text{C.15})$$

Pour le miroir considéré, la transformée de Fourier discrète du signal $\tilde{\underline{g}}$ est équivalente à la transformée en sinus discrète de type I du signal $\underline{g}$. Cette équivalence justifie l'équation (C.12) où $\Phi^{\Delta'}$ est le filtre Φ^Δ réduit à ses n premières composantes.

C.2 Conditions sur la moyenne

Le problème composé de l'équation (C.8) discrétisée et associée à une condition sur la moyenne possède n inconnues, qui correspondent aux M_Ω échantillons de f sur l'ensemble des points du domaine Ω . Ces inconnues sont déterminées par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 1, M_\Omega \rrbracket, \quad \frac{1}{h^2} [f(x(i-1)) - 2f(x(i)) + f(x(i+1))]] = u(x(i)) \\ \sum_{i=1}^{M_\Omega} f(x(i)) = M_\Omega \langle f \rangle, \end{array} \right. \quad (\text{C.16})$$

où $\langle f \rangle$ désigne la valeur moyenne de f . Les échantillons $f(x(0))$ et $f(x(M_\Omega + 1))$ dépendent du choix de l'échantillon supplémentaire considéré pour estimer l'opérateur Laplacien sur la frontière (voir figure 1.6). La matrice A est une matrice rectangulaire de taille $(n + 1) \times n$ et de

rang n . Elle est de la forme

$$A = \begin{bmatrix} A' \\ D \end{bmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

La matrice A' est une matrice carrée singulière de taille $n \times n$. Elle traduit l'application de l'opérateur Laplacien sur l'ensemble des points du domaine Ω . La matrice D une matrice de taille $1 \times n$ dont toutes les composantes sont égales à 1. Elle permet de fixer la valeur moyenne de f . Le vecteur $\underline{f}$ contient les n échantillons de f :

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f(x(1)) \\ \vdots \\ f(x(M_\Omega)) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

Le vecteur $\underline{b}$, de taille $n + 1$, est de la forme :

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} \underline{b}' \\ M_\Omega < f > \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Le vecteur $\underline{b}'$, de taille n , contient les échantillons de u :

$$\underline{b}' = \begin{bmatrix} u(x(1)) \\ \vdots \\ u(x(M_\Omega)) \end{bmatrix}. \quad (\text{C.20})$$

C.2.1 Point d'application

Dans le cas où l'échantillon supplémentaire est choisi égal à celui du point d'application du Laplacien, ce dernier s'écrit sur la frontière :

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} [f(x(2)) - f(x(1))] & = & u(x(1)) \\ \frac{1}{h^2} [f(x(M_\Omega - 1)) - f(x(M_\Omega))] & = & u(x(M_\Omega)) \end{cases}. \quad (\text{C.21})$$

Par conséquent, la matrice A' s'écrit :

$$A' = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.22})$$

La solution du système (C.3) vérifie alors :

$$\underline{f} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{b} = \text{TCD}_I^{-1} [\text{TCD}_I(\underline{b}') \odot \Phi^{\Delta'}], \quad (\text{C.23})$$

où TCD_I et TCD_I^{-1} désignent respectivement la transformée en cosinus discrète de type I et sa transformée inverse. Le filtre $\Phi^{\Delta'}$ est de taille n .

En effet, le miroir discret appliqué aux vecteurs $\underline{f}$ et $\underline{b}'$ est un miroir pair de période $2n$ (voir figure C.3).

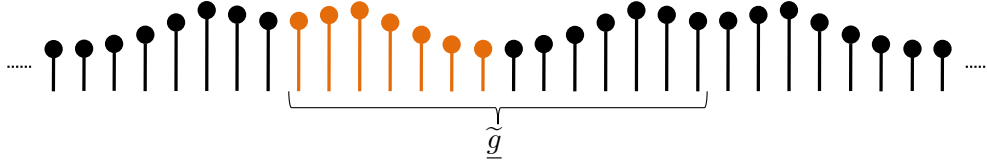


Figure C.3 – Miroir pair de période $2n$ appliqué à un signal $\underline{g}$ de $n=7$ échantillons (en orange). Le signal $\underline{\tilde{g}}$ est la restriction sur une période du signal périodique.

Les restrictions sur une période des signaux obtenus après application du miroir sont donc de la forme suivante :

$$\underline{\tilde{g}} = \begin{bmatrix} \underline{g}(1) & \cdots & \underline{g}(n) & \underline{g}(n) & \cdots & \underline{g}(1) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.24})$$

où $\underline{g}$ désigne indifféremment $\underline{f}$ et $\underline{b}'$. Le filtre ϕ^{Δ} est lui aussi de taille $2n$:

$$\phi^{\Delta} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.25})$$

Annexe C - Résolution rapide de l'équation de Poisson

Le signal $\underline{\tilde{f}}$ étant pair, sa valeur moyenne est égale à celle de $\underline{f}$. La valeur de la première composante du filtre Φ^Δ doit ainsi être choisie de telle sorte que $\langle \underline{\tilde{f}} \rangle = \langle \underline{f} \rangle$. Les autres composantes sont données par :

$$\forall i \in \llbracket 2, 2n \rrbracket, \quad \Phi^\Delta(i) = \frac{h^2}{2 \cos\left(2\pi \frac{i-1}{2n}\right) - 2}. \quad (\text{C.26})$$

Pour le miroir considéré, la transformée de Fourier discrète du signal $\underline{\tilde{g}}$ est équivalente à la transformée en cosinus discrète de type I du signal $\underline{g}$. Cette équivalence justifie l'équation (C.23) où $\Phi^{\Delta'}$ est le filtre Φ^Δ réduit à ses n premières composantes.

C.2.2 Point précédent ou suivant

Dans le cas où l'échantillon supplémentaire est choisi égal à celui du point précédent ou suivant le point d'application du Laplacien, ce dernier s'écrit sur la frontière :

$$\begin{cases} \frac{2}{h^2} [f(x(2)) - f(x(1))] & = u(x(1)) \\ \frac{2}{h^2} [f(x(M_\Omega - 1)) - f(x(M_\Omega))] & = u(x(M_\Omega)) \end{cases}. \quad (\text{C.27})$$

Par conséquent, la matrice A' s'écrit :

$$A' = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.28})$$

La solution du système (C.3) vérifie alors :

$$\underline{f} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{b} = \text{TCD}_{\text{II}}^{-1} [\text{TCD}_{\text{II}}(\underline{b}') \odot \Phi^{\Delta'}], \quad (\text{C.29})$$

où TCD_{II} et $\text{TCD}_{\text{II}}^{-1}$ désignent respectivement la transformée en cosinus discrète de type II et sa transformée inverse. Le filtre $\Phi^{\Delta'}$ est de taille n .

En effet, le miroir discret appliqué aux vecteurs $\underline{f}$ et $\underline{b}'$ est alors un miroir pair de période $2n - 2$ (voir figure C.4).

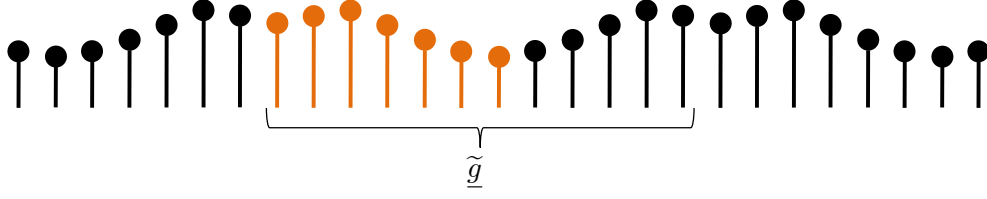


Figure C.4 – Miroir pair de période $2n - 2$ appliqué à un signal $\underline{g}$ de $n=7$ échantillons (en orange). Le signal $\underline{\tilde{g}}$ est la restriction sur une période du signal périodique.

Les restrictions sur une période des signaux obtenus après application du miroir sont donc de la forme suivante :

$$\underline{\tilde{g}} = \begin{bmatrix} \underline{g}(1) & \cdots & \underline{g}(n-1) & \underline{g}(n) & \underline{g}(n-1) & \cdots & \underline{g}(2) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.30})$$

où $\underline{g}$ désigne indifféremment $\underline{f}$ et $\underline{b'}$. Le filtre ϕ^Δ est lui aussi de taille $2n - 2$:

$$\phi^\Delta = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

Le signal $\underline{\tilde{f}}$ étant pair, sa valeur moyenne est égale à celle de $\underline{f}$. La valeur de la première composante du filtre Φ^Δ doit ainsi être choisie de telle sorte que $\langle \underline{\tilde{f}} \rangle = \langle \underline{f} \rangle$. Les autres composantes sont données par :

$$\forall i \in \llbracket 2, 2n - 2 \rrbracket, \quad \Phi^\Delta(i) = \frac{h^2}{2 \cos \left(2\pi \frac{i-1}{2n-2} \right) - 2}. \quad (\text{C.32})$$

Pour le miroir considéré, la transformée de Fourier discrète du signal $\underline{\tilde{g}}$ est équivalente à la transformée en cosinus discrète de type II du signal $\underline{g}$. Cette équivalence justifie l'équation (C.29) où $\Phi^{\Delta'}$ est le filtre Φ^Δ réduit à ses n premières composantes.

Annexe D

Acquisition d'images sismiques

La méthode d'acquisition d'images sismiques la plus répandue est nommée *sismique par réflexion*. Elle consiste à recueillir et à étudier les réflexions d'ondes acoustiques qui sont produites artificiellement en surface (sur terre ou en mer) et qui se propagent à travers les diverses couches géologiques formant le sous-sol [Gra90].

Sur terre, les ondes initiales sont générées par des charges explosives, enterrées et mises à feu sur commande, ou par des vibreurs posés à la surface du sol. Les ondes réfléchies sont recueillies à l'aide de capteurs nommés (géophones) qui convertissent les vibrations du sol en signal électrique. Les acquisitions sont réalisées le long d'une ligne préalablement définie et conduisent, par conséquent, à la formation de données ou d'images sismiques bidimensionnelles. En mer, les sources d'ondes sont des canons à air comprimé, actionnés régulièrement, tandis que les signaux sismiques sont reçus par des capteurs nommés hydrophones. L'ensemble des sources et des capteurs, repéré à l'aide de satellites (GPS), est remorqué à vitesse constante par un navire. Les mesures ainsi obtenues conduisent à la formation d'images tridimensionnelles.

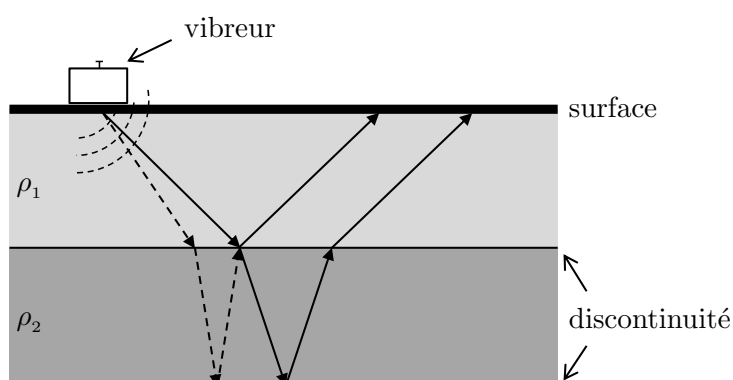


Figure D.1 – Propagation des ondes sismiques.

Les ondes produites artificiellement en surface se propagent dans le sous-sol. Les différentes

couches géologiques rencontrées sont des milieux homogènes ayant des propriétés acoustiques différentes. Leurs limites constituent donc des discontinuités qui donnent naissance à des ondes transmises, traversant les couches rencontrées, ainsi qu'à des ondes réfléchies remontant vers la surface (voir figure D.1) et recueillies par les capteurs décrits précédemment. L'ensemble des signaux reçus subit un traitement informatique qui prend en considération des phénomènes physiques complexes d'interférences, de convolutions et qui nécessite une importante puissance de calcul et de stockage. Les signaux monodimensionnels résultants sont appelés *traces sismiques* : représentés verticalement et juxtaposés, ils forment des images sismiques (voir figure D.2).

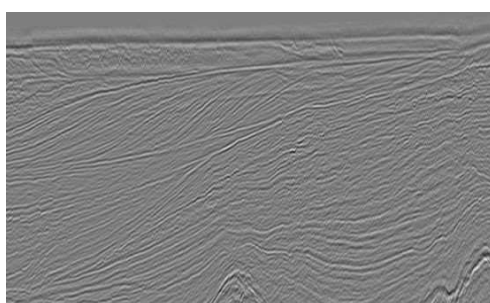


Figure D.2 – *Image sismique.*

Les pixels correspondant aux extrema locaux des *traces sismiques* forment des ensembles connexes désignés par les termes *horizons sismiques* (voir figure D.3). Il est important de noter que la composante verticale de ces images représente une information temporelle qu'il est possible de relier à une dimension spatiale par la connaissance des vitesses moyennes de propagation des ondes, généralement comprises entre 2000 et 4000 m/s.

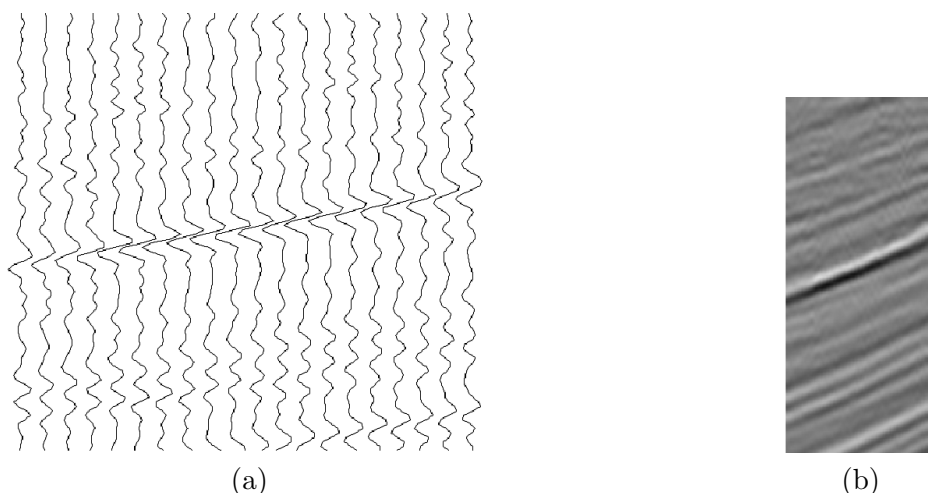


Figure D.3 – *Données sismiques : (a) traces, (b) image correspondante.*

Annexe E

Aplanissement d'images sismiques par l'approche *GeoTime*

E.1 Principe

L'aplanissement d'une image sismique bidimensionnelle ou tridimensionnelle est fondée sur un changement d'espace. La donnée est représentée dans l'espace de Wheeler [Whe58] : les dépôts sédimentaires apparaissent en couches, empilés les uns sur les autres le long d'un axe vertical qui traduit un pseudo-temps géologique, séparés par des frontières horizontales et latéralement arrêtés par des zones de non-dépôts ou d'érosion appelées *hiatus* (voir figure E.1).

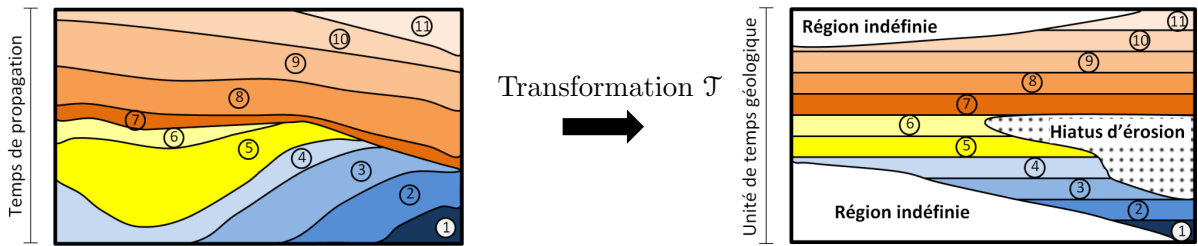
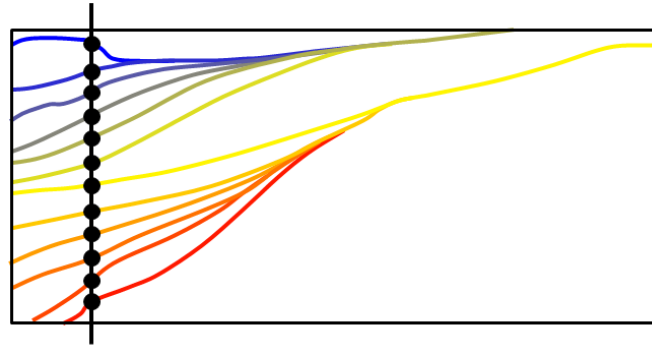


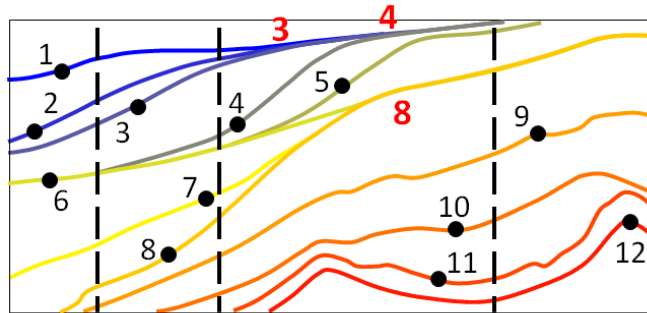
Figure E.1 – *Changement d'espace de représentation d'une donnée sismique.*

Plusieurs méthodes d'aplanissement sont proposées dans la littérature [Hoy11]. Les plus anciennes proposent des approches quasi-manuelles [Zen98] [Lee01] tandis que les méthodes plus récentes ne sont pas supervisées [Sta04] [Lig06] [Bru07] [Lom07] [Tou08] [Pau09]. Elles requièrent toutes une reconstruction d'horizons sismiques afin de déterminer la transformation de changement d'espace. Certains travaux s'appuient sur une information estimée de pendage. Lomask et Guitton [Lom06c] [Lom07], suite aux travaux de Bienati [Bie98], génèrent des horizons à partir de points (nommés *germes*) disposés le long d'une trace de référence (voir figure E.2a).

Il s'agit d'une solution locale dépendant du choix de la trace de référence et ne conduisant qu'à une représentation partielle de la donnée aplaniée. Au contraire, l'approche *GeoTime* [Don99] [Don01] [Tou08], développée dans le cadre du partenariat industriel entre Total et le laboratoire IMS, est fondée sur des germes situés sur l'ensemble de la donnée (voir figure E.2b) et offre une solution globale plus semblable à la représentation de Wheeler de la figure E.1.



(a)



(b)

Figure E.2 – Reconstruction d'horizons sismiques à partir de germes (a) disposés le long d'une trace de référence ; (b) situés sur l'ensemble de la donnée.

E.2 Approche *GeoTime*

Dans l'approche *GeoTime*, le changement d'espace est caractérisé par une transformation réversible $\mathcal{T}$ correspondant à une translation mettant en jeu un champ dense de déplacement f défini dans l'espace de Wheeler :

$$t = t_g + f(x_1, x_2, t_g), \quad (\text{E.1})$$

où t désigne l'axe temporel de l'espace initial de représentation de la donnée et t_g l'axe du pseudo-temps géologique dans l'espace de Wheeler (voir figure E.3). Le calcul de la transfor-

mation, dont le synoptique est présenté par la figure E.4, s'articule en trois étapes : génération et accumulation des horizons sismiques, intégration verticale de l'accumulateur et calcul de la position des isovaleurs.

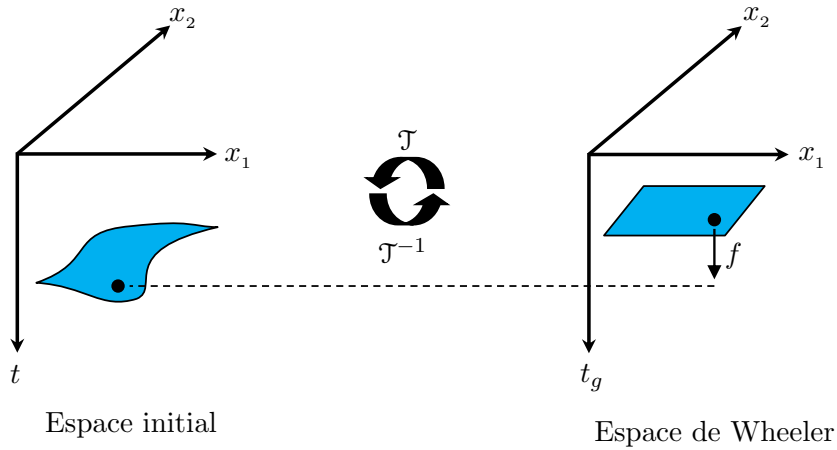


Figure E.3 – *Espaces de représentation d'une donnée sismique.*

Dans la première étape, les horizons sismiques sont générés à partir de germes. Les germes peuvent être choisis ponctuellement, par exemple en fonction de la qualité supposée de l'horizon construit, et obtenus par détection et sélection de maxima locaux de l'amplitude sismique. Ils peuvent également être définis selon une grille échantillonnée de manière grossière ou très fine, allant jusqu'à l'ensemble des points de l'image. Les horizons sont construits itérativement à partir du champ de pendage Θ estimé sur l'image I par la résolution de l'équation aux dérivées partielles présentée au paragraphe 1.2.3. L'addition de l'ensemble des horizons générés constitue un accumulateur (ou *stack*) S qui met en évidence des lieux de convergence sous la forme de focalisations très marquées. Lors de cette étape, tous les horizons contribuent à chaque trace de l'accumulateur.

La deuxième étape consiste à intégrer l'accumulateur obtenu selon une verticale pointant vers le bas de la donnée. Il s'agit en fait de dénombrer en tout point le nombre de réflecteurs générés et empilés depuis l'origine du temps d'acquisition. L'intégrale SI ainsi obtenue a la propriété d'être maximale et constante pour le dernier point de chaque trace : la valeur résultante est égale au nombre d'horizons générés lors de la première étape. Le lieu des points caractérisés par une valeur d'intégration particulière correspond alors à un pseudo-temps géologique. Les différents dépôts sédimentaires, bien que non véritablement segmentés ou isolés, apparaissent sous une forme continue.

Dans la troisième étape, le champ de déplacement f est obtenu en recherchant le lieu exact des isovaleurs dans chaque trace de l'accumulateur intégré. La démarche peut alors être vue

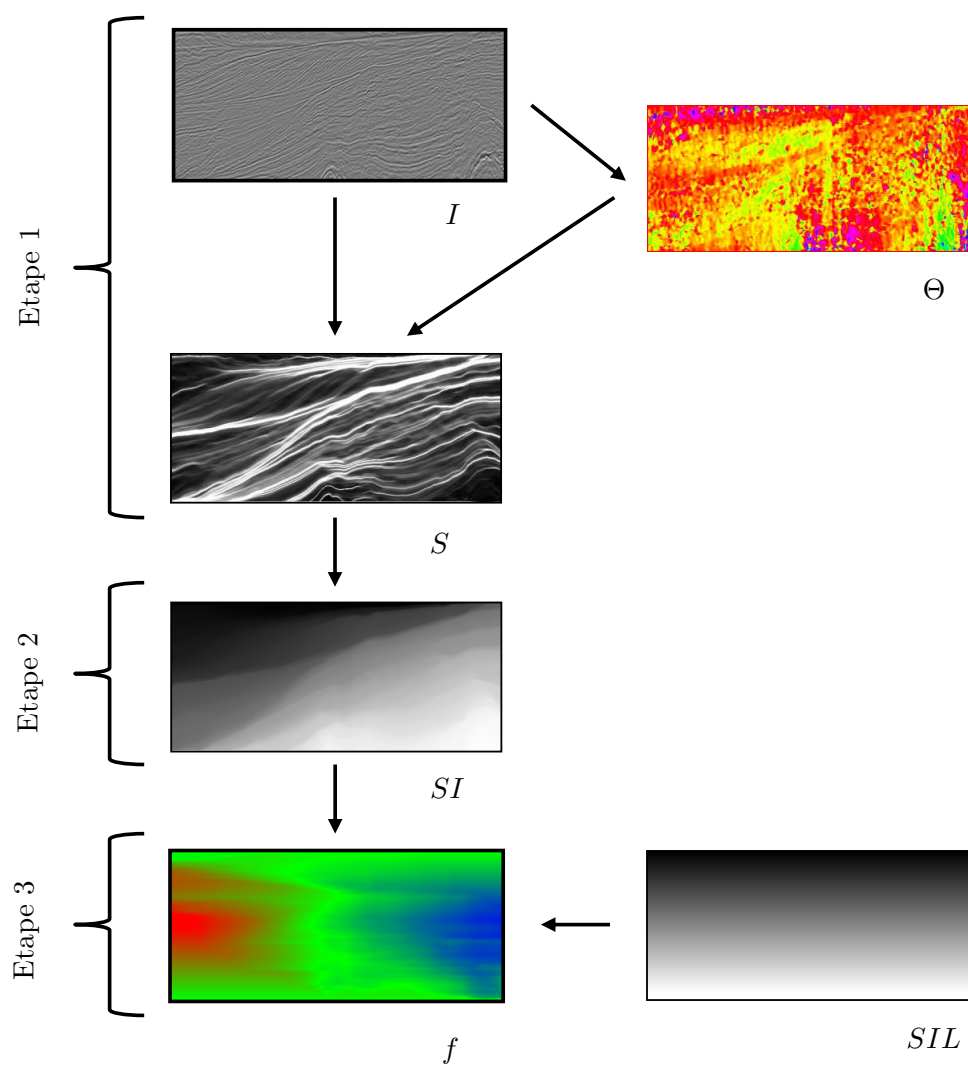
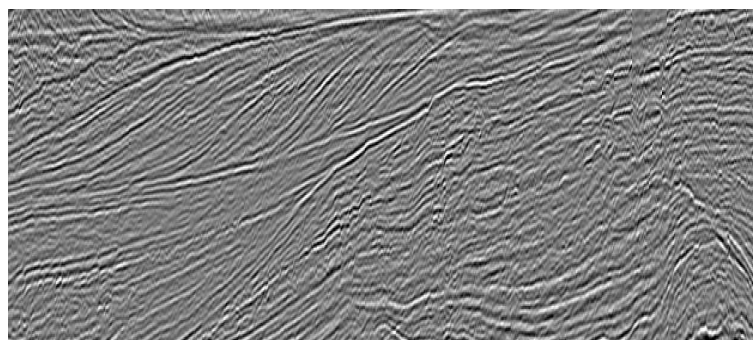


Figure E.4 – *Synoptique du calcul de la transformation.*

comme une comparaison de l'accumulateur intégré avec un accumulateur uniforme et intégré verticalement *SIL* : la translation f retenue est donnée par la différence d'ordonnée entre les points présentant la même valeur dans les deux accumulateurs intégrés.

E.3 Exemples

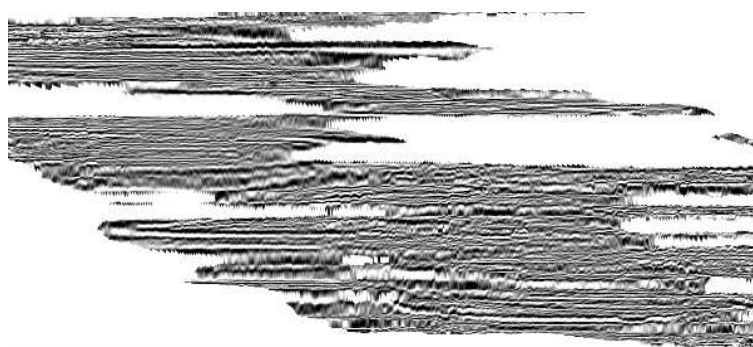
Les méthodes d'aplanissement de Lomask et *GeoTime* sont appliquées et comparées sur l'image sismique présentée figure E.5a. L'approche de Lomask (voir figure E.5b) n'offre qu'une représentation partielle de la donnée aplanie : la trace de référence étant placée à gauche de l'image, de nombreux horizons sont absents dans la partie droite. De plus, l'horizontalisation est très dissymétrique car la qualité des horizons semble se dégrader dans les zones situées loin des germes. Un choix de germes dans une autre trace conduit également à un résultat différent. Au contraire, l'approche *GeoTime* (voir figure E.5c) reconstruit la totalité des horizons qui sont d'une manière générale correctement aplanis et empilés bien que perturbés dans certaines régions. Les *hiatus* sont également représentés par les zones blanches.



(a)



(b)



(c)

Figure E.5 – Image sismique (a) et aplanissement associé (a) par la méthode de Lomask; (b) par l'approche *GeoTime*.

Bibliographie

- [Ash90] S. F. Ashby, T. A. Manteuffel et P. E. Saylor. « A taxonomy for conjugate gradient methods ». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 27, n°6, pp. 1542–1568, 1990. [28](#)
- [Au06] K. Au. *Inferring galaxy morphology through texture analysis*. Thèse, Carnegie Mellon University, 2006. [79](#)
- [Aze97] D. Azé. *Éléments d'analyse convexe et variationnelle*. Ellipses, 1997. [12](#), [17](#), [19](#), [127](#)
- [Bel71] R. Bellman et J. Casti. « Differential quadrature and long-term integration ». *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, n°2, pp. 235–238, 1971. [25](#)
- [Ben03] A. Ben-Israel et T. N. E. Greville. *Generalized inverses : theory and applications*. Springer, 2003. [29](#), [30](#)
- [Ber05] Y. Berthoumieu, M. Donias, S. Guillon et N. Keskes. « Extraction de plans de fracture dans un bloc sismique ». European Patent 5906898, 2005. [89](#)
- [Ber82] D. P. Bertsekas. « Projected Newton methods for optimization problems with simple constraints ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 20, n°2, pp. 221–246, 1982. [32](#)
- [Ber92] M. Berger et B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Presses Universitaires de France, 1992. [54](#)
- [Bie98] N. Bienati et U. Spagnolini. « Traveltime picking in 3-D data volumes ». Dans : *Extended Abstracts*, pp. 98–112, 60th EAGE Meeting, 1998. [143](#)
- [Bjo79] Å. Björck et T. Elfving. « Accelerated projection methods for computing pseudo-inverse solutions of systems of linear equations ». *BIT Numerical Mathematics*, Vol. 19, n°2, pp. 145–163, 1979. [31](#)
- [Bli05] A. Blinov et M. Petrou. « Reconstruction of 3-D horizons from 3-D seismic datasets ». *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 43, n°6, pp. 1421–1431, 2005. [86](#)
- [Bon06] J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal et C. A. Sagastizábal. *Numerical optimization : theoretical and practical aspects*. Springer-Verlag, 2006. [17](#)
- [Bre05] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 2005. [11](#)
- [Bro70] C. G. Broyden. « The convergence of a class of double rank minimization algorithms ». *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, Vol. 6, n°3, pp. 76–90, 1970. [19](#)

Bibliographie

- [Bru07] G. de Bruin et E. Bouanga. « Time attributes of stratigraphic surfaces, analyzed in the structural and Wheeler transformed domain ». Dans : *Extended Abstract*, 69th EAGE Meeting, 2007. [143](#)
- [Bru95] A. M. Bruaset. *A survey of preconditioned iterative methods*. Longman Scientific and Technical, 1995. [24](#)
- [Byr95] R. H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal et C. Zhu. « A limited memory algorithm for bound constrained optimization ». *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 16, n°5, pp. 1190–1208, 1995. [32](#)
- [Cas97] V. Caselles, R. Kimmel et G. Sapiro. « Geodesic active contours ». *International Journal of Computer Vision*, Vol. 22, n°1, pp. 61–79, 1997. [6](#)
- [Coh91] L. D. Cohen. « On active contour models and balloons ». *CVGIP : Image Understanding*, Vol. 53, n°2, pp. 211–218, 1991. [7](#)
- [Coh93] L. D. Cohen et I. Cohen. « Finite element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 15, n°11, pp. 1131–1147, 1993. [6](#)
- [Con88] A. R. Conn, N. I. M. Gould et P. L. Toint. « Global convergence of a class of trust region algorithms for optimization with simple bounds ». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 25, n°2, pp. 433–460, 1988. [32](#)
- [Dav06] T. A. Davis. *Direct methods for sparse linear systems (fundamentals of algorithms 2)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. [22](#)
- [Dav12] D. Davis et W. Hayes. « Automated quantitative description of spiral galaxy arm-segment structure ». Dans : *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 1138–1145, IEEE, 2012. [79](#)
- [Del34] B. Delaunay. « Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoi ». *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na*, Vol. 6, pp. 793–800, 1934. [94](#)
- [Don01] M. Donias, S. Guillon, P. Baylou, F. Pauget et N. Keskes. « Method of chrono-stratigraphic interpretation of a seismic cross section or block ». Elf Exploration Production, Patent US 0036294, November 1, 2001. [84](#), [86](#), [144](#)
- [Don07] M. Donias, C. David, Y. Berthoumieu, O. Lavialle, S. Guillon et N. Keskes. « New fault attribute based on robust directional scheme ». *Geophysics*, Vol. 72, n°4, pp. 39–46, 2007. [89](#), [113](#)
- [Don99] M. Donias. *Caractérisation de champs d'orientation par analyse en composantes principales et estimation de la courbure. Application aux images sismiques*. Thèse, Université Bordeaux 1, 1999. [1](#), [6](#), [86](#), [125](#), [144](#)
- [Duf02] I. Duff, M. Heroux et R. Pozo. « An overview of the sparse basic linear algebra subprograms : the new standard from the BLAS technical forum ». *ACM TOMS*, Vol. 28, n°2, pp. 239–267, 2002. [22](#)

- [Duf86] I. S. Duff, A. M. Erisman et J. K. Reid. *Direct methods for sparse matrices*. Oxford Science Publications, 1986. 23
- [Dur07] J.-D. Durou. *Shape from Shading - Eclairages, réflexions et perspectives*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Toulouse III, 2007. 2
- [Dvo75] V. Dvorak. « Tropical cyclone intensity analysis and forecasting from satellite imagery ». *AMS Journal*, Vol. 19, n°4, pp. 199–206, 1975. 75
- [Enr02] D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger et I. Mitchell. « A hybrid particle level set method for improved interface capturing ». *Journal of Computational Physics*, Vol. 183, n°1, pp. 83–116, 2002. 7
- [Erh00] J. Erhel et F. Guyomarc’h. « An augmented conjugate gradient method for solving consecutive symmetric positive definite linear systems ». *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 21, n°4, pp. 1279–1299, 2000. 28
- [Fer09] A. M. Fernandes. « Study on the automatic recognition of oceanic eddies in satellite images by ellipse center detection - The Iberian coast case ». *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 47, n°8, pp. 2478–2491, 2009. 73
- [Fle63] R. Fletcher et M. J. D. Powell. « A rapidly convergent descent method for minimization ». *The Computer Journal*, Vol. 6, n°2, pp. 163–168, 1963. 19
- [Fle64] R. Fletcher et C. Reeves. « Function minimization by conjugate gradients ». *The Computer Journal*, Vol. 7, n°2, pp. 149–154, 1964. 17
- [Fle76] R. Fletcher. *Conjugate gradient methods for indefinite systems*. Springer, 1976. 31
- [Fom02] S. Fomel. « Applications of plane-wave destruction filters ». *Geophysics*, Vol. 67, n°6, pp. 1946–1960, 2002. 125
- [Fre91] R. W. Freund et N. M. Nachtigal. « QMR : a quasi-minimal residual method for non-Hermitian linear systems ». *Numerische Mathematik*, Vol. 60, n°1, pp. 315–339, 1991. 28
- [Fri98] M. Frigo et S. G. Johnson. « FFTW : an adaptive software architecture for the FFT ». Dans : *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 1381–1384, IEEE, 1998. 25, 99
- [Fro08] H. Fronthaler, K. Kollreider et J. Bigun. « Local features for enhancement and minutiae extraction in fingerprints ». *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 17, n°3, pp. 354–363, 2008. 69
- [Fua96] P. Fua et C. Brechbuehler. « Imposing hard constraints on soft snakes ». Dans : *European Conference on Computer Vision*, pp. 495–506, Springer-Verlag, 1996. 6
- [Gao10] X. Gao, X. Chen, J. Cao, Z. Deng, C. Lui et J. Feng. « A novel method of fingerprint minutiae extraction based on Gabor phase ». Dans : *International Conference on Image Processing (ICIP)*, pp. 3077–3080, IEEE, 2010. 69
- [Gel64] I. Gelfand et S. Fomin. *Calculus of variations*. Prentice-Hall, 1964. 12, 127

Bibliographie

- [Ger99] A. Gersztenkorn et K. J. Marfurt. « Eigenstructure-based coherence computations as an aid to 3-D structural and stratigraphic mapping ». *Geophysics*, Vol. 64, n°5, pp. 1468–1479, 1999. [89](#)
- [Gil00] J. Giles. *Introduction to the analysis of normed linear spaces*. Cambridge University Press, 2000. [11](#)
- [Gou03] N. I. M. Gould et S. Leyffer. « An introduction to algorithms for nonlinear optimization ». Dans : *Frontiers in numerical analysis*, pp. 109–197, Springer-Verlag, 2003. [12](#), [17](#), [127](#)
- [Gra90] G. Grau. *La Recherche pétrolière*. Hermès, 1990. [141](#)
- [Gui05] A. Guitton, J. Lomask et S. Fomel. « Non-linear estimation of vertical delays ». Dans : *Annual Meeting Expanded Abstracts*, pp. 841–844, Society of Exploration Geophysicists (SEG), 2005. [88](#)
- [Hai08] J. Hai, Y. Xiaomei, G. Jianming et G. Zhenyu. « Automatic eddy extraction from SST imagery using artificial neural network ». Dans : *International Society for Photogrammetry and Remote Sensing*, pp. 279–282, 2008. [73](#)
- [Hes52] M. R. Hestenes et E. Stiefel. « Methods of conjugate gradients for solving linear systems ». *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Vol. 49, n°6, pp. 409–436, 1952. [28](#)
- [Ho09] S. S. Ho et A. Talukder. « Automated cyclone tracking using multiple remote satellite data via knowledge transfer ». Dans : *Aerospace conference*, pp. 1–7, IEEE, 2009. [75](#)
- [Hoc65] R. Hockney. « A fast direct solution of Poisson’s equation using Fourier analysis ». *Journal of the ACM*, Vol. 12, pp. 95–113, 1965. [24](#), [131](#)
- [Hos99] I. Hossain, J. Liu et J. You. « Tropical cyclone pattern recognition for intensity and forecasting analysis from satellite imagery ». Dans : *International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pp. 851–856, IEEE, 1999. [75](#)
- [Hoy11] J. Hoyes et T. Cheret. « A review of “global” interpretation methods for automated 3-D horizon picking ». *The Leading Edge*, Vol. 30, n°1, pp. 38–47, 2011. [84](#), [143](#)
- [Hul92] J. P. M. Hultquist. « Constructing stream surfaces in steady 3-D vector fields ». Dans : *Proceedings of the 3rd conference on Visualization '92*, pp. 171–178, IEEE, 1992. [6](#)
- [Ima08] Y. Imai, S. Nagata et K. Toyota. « Tracking of mesoscale eddies using optical flow method ». Dans : *OCEANS*, pp. 1–5, IEEE, 2008. [73](#)
- [Kar10] I. Karoui, H. Chauris, P. Garreay et P. Craneguy. « Multi-resolution eddy detection from ocean color and Sea Surface Temperature images ». Dans : *OCEANS*, pp. 1–6, IEEE, 2010. [73](#)
- [Kas88] M. Kass, A. Witkin et D. Terzopoulos. « Snakes : active contour models ». *International Journal of Computer Vision*, Vol. 1, n°4, pp. 321–331, 1988. [2](#), [6](#)
- [Kek09] H. B. Kekre et V. A. Bharadi. « Fingerprint’s core point detection using orientation field ». Dans : *International Conference on Advances in Computing, Control, and Telecommunication Technologies*, pp. 150–152, IEEE, 2009. [69](#)

- [Kel03] C. T. Kelley. *Solving nonlinear equations with Newton's method*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2003. [19](#)
- [Lai05] D. H. Laidlaw, R. M. Kirby, C. D. Jackson, J. S. Davidson, T. S. Miller, M. da Silva, W. H. Warren et M. J. Tarr. « Comparing 2-D vector field visualization methods : A user study ». *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 11, n°1, pp. 59–70, 2005. [6](#)
- [Lav93] P. Lavest et Y. Chipot. « Building complex horizons for 3-D seismic ». Dans : *Annual Meeting Expanded Abstracts*, pp. 159–161, Society of Exploration Geophysicists (SEG), 1993. [86](#)
- [Lee01] R. F. Lee. « Pitfalls in seismic data flattening ». *The Leading Edge*, Vol. 20, n°2, pp. 160–164, 2001. [143](#)
- [Lig06] H. Ligtenberg, G. de Bruin, N. Hemstra et C. Geel. « Sequence stratigraphic interpretation in the Wheeler transformed (flattened) seismic domain ». Dans : *Extended abstract*, 68th EAGE Meeting, 2006. [143](#)
- [Liu06] J. Liu, B. Feng, M. Wang et W. Luo. « Tropical cyclone forecast using angle features and time warping ». Dans : *International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, pp. 4330–4337, IEEE, 2006. [75](#)
- [Lom06a] J. Lomask. *Seismic volumetric flattening and segmentation*. Thèse, Stanford University, 2006. [33](#), [121](#)
- [Lom06b] J. Lomask et A. Guitton. « Flattening with geological constraints ». Dans : *Annual Meeting Expanded Abstracts*, pp. 1053–1056, Society of Exploration Geophysicists (SEG), 2006. [2](#), [7](#), [12](#), [13](#), [28](#), [86](#), [87](#), [103](#)
- [Lom06c] J. Lomask, A. Guitton, S. Fomel, J. Claerbout et A. Valenciano. « Flattening without picking ». *Geophysics*, Vol. 71, n°1, pp. 13–20, 2006. [2](#), [7](#), [9](#), [12](#), [13](#), [15](#), [32](#), [86](#), [87](#), [143](#)
- [Lom07] J. Lomask et A. Guitton. « Volumetric flattening : an interpretation tool ». *The Leading Edge*, Vol. 26, n°7, pp. 888–897, 2007. [143](#)
- [Mai97] D. Maio et D. Maltoni. « Direct gray-scale minutiae detection in fingerprints ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, n°1, pp. 27–40, 1997. [69](#)
- [Mal09] D. Maltoni, D. Maio, A. K. Jain et S. Prabhakar. *Handbook of fingerprint recognition*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2009. [68](#), [69](#)
- [Mar06] K. Marfurt. « Robust estimates of 3-D reflector dip and azimuth ». *Geophysics*, Vol. 71, n°4, pp. 29–40, 2006. [125](#)
- [Meu99] G. Meurant. *Computer solution of large linear systems*. North Holland, 1999. [22](#)
- [Mie08] K. Mieloch, A. Munk et P. Mihailescu. « Hierarchically linked extended features in fingerprints ». Dans : *Biometrics Symposium*, pp. 47–52, IEEE, 2008. [67](#)
- [Mie10] K. Mieloch, A. Munk et P. Mihailescu. « Improved fingerprint image segmentation and reconstruction of low quality areas ». Dans : *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, pp. 1241–1244, IEEE, 2010. [72](#)

Bibliographie

- [Noc99] J. Nocedal et S. Wright. *Numerical optimization*. Springer Verlag, 1999. [19](#)
- [Osh88] S. Osher et J. A. Sethian. « Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations ». *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, n°1, pp. 12–49, 1988. [2](#), [7](#)
- [Pai75] C. Paige et M. Saunders. « Solution of sparse indefinite systems of linear equations ». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 12, n°4, pp. 617–629, 1975. [31](#)
- [Pau09] F. Pauget, S. Lacaze et T. Valding. « A global approach in seismic interpretation based on cost function minimization ». Dans : *Annual Meeting Expanded Abstracts*, pp. 2592–2596, Society of Exploration Geophysicists (SEG), 2009. [143](#)
- [Pin03] M. A. Pinsky. *Partial differential equations and boundary-value problems with applications*. Waveland Press, 2003. [24](#), [131](#)
- [Pin10] M. F. Pineros, E. A. Ritchie et J. S. Tyo. « Detecting tropical cyclone genesis from remotely sensed infrared image data ». *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 7, n°4, pp. 826–830, 2010. [75](#)
- [Pol02] A. D. Polyanin. *Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists*. Chapman & Hall/CRC, 2002. [24](#), [131](#)
- [Pol69] E. Polak et G. Ribiere. « Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées ». *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, Vol. 16, pp. 35–43, 1969. [17](#)
- [Rah07] M. Rahmes, J. D. V. Allen, A. Elharti et G. B. Tenali. « Fingerprint reconstruction method using partial differential equation and exemplar-based inpainting methods ». Dans : *Biometrics Symposium*, pp. 1–6, IEEE, 2007. [69](#)
- [Ran00] T. Randen, E. Monsen, C. Signer, A. Abrahamsen, J. O. Hansen, J. S. T. Saeter et L. Sonneland. « Three-dimensional texture attributes for seismic data analysis ». Dans : *Annual Meeting Expanded Abstracts*, pp. 668–671, Society of Exploration Geophysicists (SEG), 2000. [89](#), [113](#)
- [Rat95] N. K. Ratha, S. Chen et A. Jain. « Adaptive flow orientation bBased feature extraction in fingerprint images ». *IEEE Transactions on Pattern Recognition*, Vol. 28, n°11, pp. 1657–1672, 1995. [69](#)
- [Ros07] A. Ross, J. Shah et A. K. Jain. « From template to image : reconstructing fingerprints from minutiae points ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 29, n°4, pp. 544–560, 2007. [69](#)
- [Saa02] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2002. [23](#)
- [Soo05] V. Sood, B. John, R. Balasubramanian et A. Tandon. « Segmentation and tracking of mesoscale eddies in numeric ocean models ». Dans : *International Conference on Image Processing (ICIP)*, pp. 469–472, IEEE, 2005. [73](#)
- [Sta04] T. J. Stark. « Relative geologic time (age) volumes - Relating every seismic sample to a geologically reasonable horizon ». *The Leading Edge*, Vol. 23, n°9, pp. 928–932, 2004. [143](#)

- [Sta95] D. Stalling et H. C. Hege. « Fast and resolution independent line integral convolution ». Dans : *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, pp. 249–258, ACM SIGGRAPH, 1995. [6](#)
- [Str08] G. Strang et G. Fix. *An analysis of the finite element method*. Wellesley-Cambridge, 2008. [20](#)
- [Sus94] M. Sussman, P. Smereka et S. Osher. « A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow ». *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, n°1, pp. 146–159, 1994. [7](#)
- [Swa73] P. Swarztrauber et R. Sweet. « The direct solution of the discrete Poisson equation on a disk ». *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 10, n°5, pp. 900–907, 1973. [25](#)
- [Tou08] V. Toujas, M. Donias, D. Jeantet, S. Guillon et Y. Berthoumieu. « A robust framework for GeoTime cube ». Dans : *International Conference on Image Processing (ICIP)*, pp. 1880–1883, IEEE, 2008. [86](#), [143](#), [144](#)
- [Tur09] A. Turiel, V. Nieves, E. Garcia-Ladona, J. Font, M. H. Rio et G. Larnicol. « The multifractal structure of satellite sea surface temperature maps can be used to obtain global maps of streamlines ». *Ocean Science Discussion*, Vol. 6, n°1, pp. 139–151, 2009. [73](#)
- [Whe58] H. E. Wheeler. « Time-stratigraphy ». *AAPG Bulletin*, Vol. 42, n°5, pp. 1047–1063, 1958. [143](#)
- [Xia08] Y. Xiao et H. Zhang. « Modified subspace limited memory BFGS algorithm for large-scale bound constrained optimization ». *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 222, n°2, pp. 429–439, 2008. [32](#)
- [You71] D. M. Young. *Iterative solution of large linear systems*. Academic Press, 1971. [23](#)
- [Zen98] H. Zeng, M. M. Backus, K. T. Barrow et N. Tyler. « Stratal slicing ; Part 1, Realistic 3-D seismic model ». *Geophysics*, Vol. 63, n°2, pp. 502–513, 1998. [143](#)
- [Zha05] Q. P. Zhang, L. L. Lail et W. C. Sun. « Intelligent location of tropical cyclone center ». Dans : *International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, pp. 423–428, IEEE, 2005. [75](#)
- [Zho98] H. Zhong et Y. He. « Solution of Poisson and Laplace equations by quadrilateral quadrature element ». *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, n°21, pp. 2805–2819, 1998. [25](#)
- [Zhu97] C. Zhu, R. H. Byrd, P. Lu et J. Nocedal. « L-BFGS-B : Fortran subroutines for large-scale bound-constrained optimization ». *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 23, n°4, pp. 550–560, 1997. [32](#)
- [Zie09] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor et J. Z. Zhu. *The finite element method : its basis and fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2009. [20](#)

Bibliographie

- [Zin11a] G. Zinck, M. Donias, S. Guillon et O. Lavialle. « Discontinuous seismic horizon tracking based on a Poisson equation with incremental Dirichlet boundary conditions ». Dans : *International Conference on Image Processing (ICIP)*, pp. 3385–3388, IEEE, 2011. [38](#), [113](#)
- [Zin11b] G. Zinck, M. Donias, S. Guillon et O. Lavialle. « Suivi d’un horizon sismique discontinu par résolution d’une équation de Poisson associée à des conditions de Dirichlet aux bords incrémentales ». Dans : *XXIIIème Colloque GRETSI*, 2011. [38](#), [113](#)
- [Zin12] G. Zinck, M. Donias et O. Lavialle. « N-dimensional surface reconstruction from a noisy normal vector field ». Dans : *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pp. 395–399, EURASIP, 2012. [52](#)