AIX MARSEILLE UNIVERSITÉ

Physique des Interactions Ioniques et Moléculaire
UMR 7345

Thèse pour obtenir le grade de docteur
Discipline : Astrophysique, Rayonnement et Plasmas
Ecole Doctorale : Physique et Sciences de la Matière

Dynamique des îlots magnétiques en présence de feuille de courant et en milieu turbulent

Alexandre Poyé

Thèse présentée et soutenue publiquement le 28/11/2012 devant le jury composé de Madame et Messieurs :

O. Agullo	Maître de Conférence, France, Aix Marseille Université	(Co-Directeur de thèse)
S. Benkadda	Directeur de Recherche CNRS, France, Aix Marseille Université	(Directeur de thèse)
X. Garbet	Directeur de Recherche CEA, France, CEA Cadarache	(Président)
D. Grasso	Professeur, Italie, Istituto dei sistemi complessi - CNR and Politecnico di Torino	(Rapporteur)
W. Horton	Professeur, USA, University of Texas	
H. Lütjens	Chargé de Recherche CNRS, France, Ecole Polytechnique	
J. M. Rax	Professeur, France, Ecole Polytechnique	(Rapporteur)

Faire une thèse.

J'ai voulu faire une thèse pour apporter un quelque chose au monde de la physique. Une pierre à l'édifice. Un caillou plutôt.

Vanité que ce gravier que vous tenez entre les mains.

La seule chose qui se soit élevée, en réalité, c'est moi même. Et uniquement parce que l'on m'a porté, supporté, supporté (l'autre sens), poussé (des fois dans le gouffre), retenu (devant un gouffre trop profond). Cette thèse contient les efforts de tous, concentrés en un individu. Il me faut alors remercier toutes ces personnes qui ont participé, de près, de loin et de manière plus variées que je n'aurais pu l'imaginer.

Comme dans un film avec trop de vedettes pour que cela tienne sur une tête d'affiche, je choisi l'ordre d'apparition à l'écran : les rencontres. La pellicule a un peu brûlé avec les dernières prises, intenses. Il faudra donc pardonner les ellipses, les faux raccords, et peut-être même les inversions de bobines.

La première scène se passe à Aix-en-Provence, dans un restaurant vide, vu l'heure. C'est à ce rendez-vous que je recontre Saddri Benkadda : mon futur directeur de thèse. Il se battra pour m'obtenir un financement : il m'honore alors de sa confiance. Pour cela je l'en remercie. Saddri m'aura par la suite ouvert son réseau scientifique et m'aura permis de participer aux conférences internationales, toujours avec bienveillance.

Une fois installé dans le laboratoire PIIM, je recontre mon autre directeur de thèse : Olivier Agullo. Et je me retrouve donc dans son bureau, à lui expliquer par le menu, que je ne souhaite pas faire de théorie, que je suis meilleur en expérimental mais que, éventuellement, je veux bien apprendre le numérique... un peu. Je n'ai toujours pas compris comment Olivier a réussi à diriger la tête de mûle que je peux être pendant trois ans, car la thèse est finalement certes numérique mais aussi théorique. Olivier sera présent à toutes les étapes de la thèse : scientifiquement et humainement.

Un laboratoire est aussi une salle de bal pendant laquelle les chercheurs valsent et dansent trois ans, ou plus. Les premiers partenaires de danse sont Guillaume Fuhr, Magali Muraglia, Nicolas Dubuit, Shimpeï Futatani et Thibaut Voslion. Ils m'ont accepté dans leur ronde si rapidement que je ne me souviens plus du moment exact où je suis passé de nouvel arrivant à thésar du labo. Ils m'ont accepté avec mes excentricités (*Tu veux vraiment que nous venions faire du cerf-volant ?*), mon caractère de cochon (*Parfaitement, je suis sûr qu'on peut faire du tearing avec Matlab ! Et je vais vous le prouver !*). A eux seuls, ils auront transformé la ville hostile (pour un nordiste)

de Marseille en un home, sweet home. Pendant toute la thèse, ils prodigueront de précieux conseils mais surtout, ils deviendront des amis.

Puis il est temps de sortir du laboratoire rassurant pour s'exposer au monde scientifique. Andreï Smolyakov m'attend à l'aéroport de Saskatoon pour une collaboration. Il m'y attend avec une vraie veste et de vrais gants : prévoyant mon ignorance du vrai climat canadien. C'est un signe des qualités humaines qui l'animent. Il aura pour moi la patience d'expliquer et de réexpliquer et je suis content que la collaboration perdure au-delà de la thèse. (I could have written this part in English, but i am pretty sure you will handle it in French. Cheers and thank you).

Au vu du sujet de thèse, à Marseille, je ne manque pas de faire un séminaire à l'étoile noire (le CEA Cadarache tel que je me l'imaginais). Sauf que je n'y ai découvert aucun Darth Vader, aucun Palpatine, mais plutôt un laboratoire comme le mien où Xavier Garbet m'offre un café et où l'on discute de physique et de choses et d'autres. Xavier Garbet est un homme incroyablement demandé. Il m'aura accordé du temps, des conseils et sa bienveillance.

La deuxième vague de danseurs arrive et peuple le couloir du haut. C'est à mon tour de participer à l'accueil et à l'intégration des arrivants Arnaud Monnier, Lénaïc Couëdel, Mattéo Faganello et Yann Camenen dans le laboratoire. Je crois que j'intègre bien mieux à Warcraft III qu'au Go. Je suis alors à la moitié de la thèse et les choses se corsent. Les conseils deviennent plus pragmatiques (*De toutes façons, c'est TA thèse.*) et plus pressants (*Tu ne lis pas assez.*). Mais en plus des discussions scientifiques, ces amis auront mis la pression pour ma réussite. C'est peut-être la meilleure preuve d'amitié qu'ils m'auront donnée.

Et au final : la soutenance, la fin du film. Je remercie mes rapporteurs Daniela Grasso et Jean-Marcel Rax ainsi que les membres du jury Wendell Horton et Hinrich Lütjens pour leurs critiques constructives. Tous ont autorisé une fin heureuse à cette histoire. Je remercie mes amis Jérôme jeannin et Nicolas Gouysse d'être descendus de Paris pour la voir.

Il reste d'autres personnes à remercier. Elles ne sont pas à proprement parler du domaine scientifique. Ma famille me regarde faire des études depuis plus de 10 ans. Mais désormais, c'est fini. Je ne peux pas faire plus. Je vous remercie tous pour votre si long soutien.

La dernière personne que je souhaite remercier ici est Stéphanie, ma femme. De ce film éprouvant, elle en a vu toutes les scènes, tous les décors, tous les envers. Elle a lu tout le script et pris finalement un rôle principal. Elle a su m'encourager, me

pousser. Elle a partager les joies et les doutes. Cette thèse n'aurait pas été possible sans elle.

Comme dans tout film, il y a le générique de fin. Pour rester dans le thème il faut lire très vite sur la chason *Bernard Lavillier* des Fatals Picards. Je remercie Peter Beyer, Fabrice Doveil, Cyril Rebont, Steven, Alexandre Escarguel, Mauricio Ottaviani, Laure Vermare, Raphaël Lemonnier, Clelia Dental, Elise Pépin, Alexandre Ourseau, Aurélien Lejeune, Rudy Klein, Gérard Bonhomme, Marion Rothiot, Laura Davy, Miho Janvier, Patrick Maget, Satoru Sugita, Yves Elskens, Tony Lefèvre, Aurélie Inglebert, Thomas Begou, Zainaba Kassim, Monika Fung, Mathieu Dutheil, Laetitia Thomas, Isabelle Boucher, Cécile Arnas, Jean-Marc Layet, Florence De Solminihac, Dominique Escande, Céline, Andreï Vinogradov, Hélène GrandClaude, Emanuelle et Dimitri Bossoreil, Cynthia Julien, Nicolas Claire, Camille et Fabrice Méro, Michel et Christelle Carette, Etienne Gravier, Alberto Marcus, Masatoshi Yagi, Marina Becoulet... Et j'en oublie probablement. Pardon !

Cette thèse aurait pu être sponsonrisée par les gâteaux Casino et Carrefour et par les stylos Pilot FriXion.

Résumé

La stabilité des plasmas de fusion est un enjeu crucial dans le cadre du développement de nouvelles sources d'énergie. L'interaction entre le plasma et le champ magnétique peut en effet amener à la destruction du confinement : c'est une disruption. Le sujet de cette thèse porte sur les îlots magnétiques, une des causes des disruptions. Ces îlots magnétiques sont observés expérimentalement et analytiquement. Les théories peuvent prévoir la croissance d'un îlot magnétique et sa taille, mais les restrictions sur le domaine de validité de la théorie sont fortes et elles dé-corrèlent largement les domaines de validité théoriques et expérimentaux. Dans une première partie, nous montrons que, génériquement, les méthodes de contrôle dynamiques d'évolution des îlots magnétiques, basées notamment sur une relation entre la taille de l'îlot et la perturbation de flux magnétique à la résonance, devraient prendre en compte la modification du flux magnétique moyenné le long de la ligne de champ. Nous donnons aussi des limites quant au cadre de notre assertion (coalescence des îlots, effondrement du point X, ...). La seconde partie de la thèse aborde un nouvel effet dû au courant de part et d'autre de l'îlot magnétique. Il change la dynamique de l'îlot et la perception que l'on en a. Jusqu'à présent la dynamique de l'îlot était étudiée principalement au travers de mécanismes actifs au niveau de la résonance. Nous démontrons que la présence de courant aux abords de l'îlot peuvent jouer un rôle très important sur sa croissance et sur sa taille finale. La troisième partie détaille comment la turbulence aux abords d'un îlot magnétique peut affecter sa croissance. Nous montrons que la turbulence générée par une instabilité de type interchange peut pénétrer dans une zone stable vis à vis de l'instabilité MHD de déchirement magnétique et induire par un mécanisme 3D la poussée d'un îlot.

Abstract

The fusion plasma stability is a critical point for the developpement of new energy source. The interaction between the plasma and the magnetic field can drive to the confinement descrution : it is a disruption. The topic of this thesis is the magnetic island, one of disruption causes. Those magnetic islands are observed theoretically and numerically. The theory can predict the growth and the final size of magnetic islands, but restrictions of its validity range are strong and they decorrelate the experimental and theoritical validity domain. In the first part, we show that the dynamic method of magnetic island control, based on the link between the island size and the perturbed magnetic flux at the resonance, should take in account the modification of the magnetic flux averaged along the field line. We show aswell the limitation of our assertion (magnetic island coalescence, X point collapse ...). The second part of the thesis address a new effet du to the current on sides of the magnetic island. This effect changes the magnetic island dynamics and the perception we got on it. Until now, the magnetic island dynamics have been studied through active mechanisms at the resonance. We show that the presence of current on sides can play an important role on the growth and saturation of the magnetic island. The last part of thesis details how the turbulence on the outskirts of a magnetic island can affect the island growth. We show that a turbulence generate by an interchange instability can penetrate into a stable zone concerning tearing mode and induce by a 3D mechanisme the growth of an magnetic island.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

Un nouveau smartphone va sortir. A raison d'une version par an, les esprits sarcastiques se demandent de quel gadget ils peuvent encore avoir besoin pour que cette nouvelle version soit une N-ième révolution technologique. Mais, il semble que le besoin soit là, puisque les réservations du nouvel appareil vont bon train. Peut-être que le problème réside plus dans l'origine de ce besoin que dans le besoin lui-même : il est dit, peut-être un peu naïvement, que le budget d'une journée de publicité pourrait résoudre le problème de la faim dans le monde. C'est notre société de consommation : l'achat comme finalité au bonheur. Et que cette hypothèse soit valide ou non, la consommation des ressources, matières premières et énergie, augmente de façon drastique. Tant et si bien que tous concèdent la nécessité de faire quelque chose. L'écologie devient un enjeu politique. Les désastres écologiques sont médiatisés, au moment du drame au moins, comme la catastrophe de la plateforme pétrolière BP. Les reportages sur les abérrations économiques atteignent nos postes de télévision : la production du coton qui assèche une mer entière, figure (1.1), la déforestation de l'amazonie pour la culture du soja ... Nous commençons en fait à comprendre que la gestion des ressources n'est pas uniquement un problème de militant écologiste et de sauvegarde des animaux : c'est le problème de tous.

La production d'un bien et sa consommation sont énergivores. Et ces deux aspects méritent notre attention pour réduire les dépenses des ressources. Cependant il est finalement plus efficace de rassembler quelques centaines de chercheurs pour développer un moteur hybride récupérateur d'énergie que d'obliger 6,5 milliards de personnes à prendre le bus. Dans le cadre de la production d'énergie, c'est exactement ce qui se passe : nous courrons après la fusion nucléaire mais nous ne débranchons pas nos chargeurs de téléphone.

Le travail que je présente ici ne pourra pas faire prendre le bus à la planète. Je fais partie des chercheurs qui travaillent sur un projet d'amélioration de la production

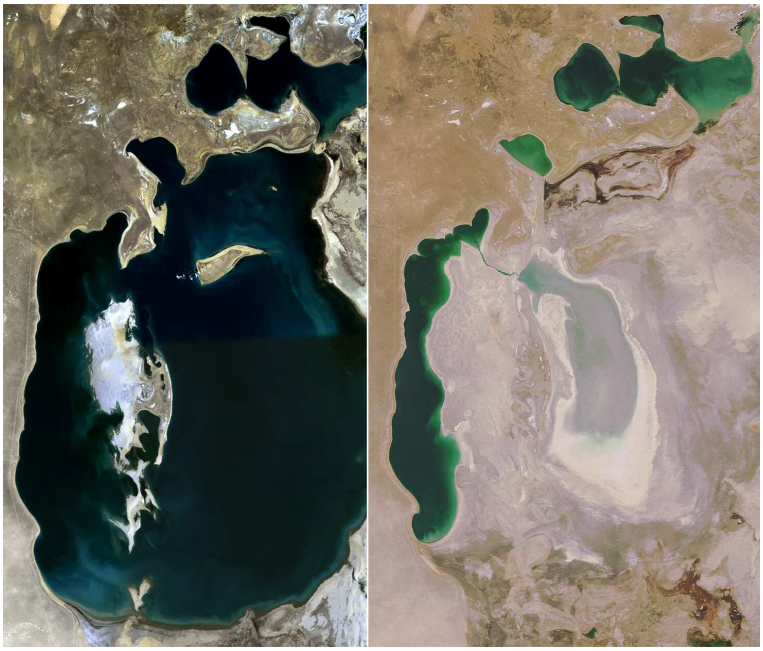

FIGURE 1.1 – Assèchement de la mer d'Aral entre 1989 et 2008 du à la culture du coton au Kazakhstan et en Ouzbékistan

d'énergie, si difficile ou prétentieux qu'il soit : *"La fusion : le soleil sur terre"*. Je reste persuadé que la prochaine vraie étape de réduction de la consommation de l'énergie passe par l'éducation et la sensibilisation à une consommation raisonnée. En effet, les améliorations techniques sont devenues si difficile que les projets sont désormais des enjeux internationaux, pour des raisons de budget, mais aussi pour des raisons politiques de monopole. Idéalement, la fusion nucléaire ne doit pas appartenir à tel pays, ni à telle corporation, mais à l'humanité. Néanmoins, éduquer à la consommation raisonnée n'empêche pas de travailler sur l'amélioration de la production. La fusion nucléaire, si décriée qu'elle soit, mérite d'être explorée tant ses promesses sont faramineuses.

La fusion nucléaire

La fusion de deux atomes produit de l'énergie. Mais la mise en oeuvre de cette fusion pose problème : il faut un milieu chaud. En effet, la fusion demande le rapprochement forcé par l'agitation thermique, de noyaux qui se repoussent naturellement car ils sont chargés positivement. Mais des noyaux suffisamment proches peuvent fusionner et libérer de l'énergie (de la chaleur) comme l'illustre la figure (1.2). La réaction met en jeu un atome de deutérium (présent en quantité au fond des océans) et un atome de tritium (présent sous forme de trace en haute atmosphère, ou synthétisé

dans les centrales à fission nucléaire). Cette réaction produit de l'hélium et de l'énergie et cette énergie libérée, si elle est maintenue à l'emplacement du combustible de fusion, va permettre le déclenchement d'une autre réaction de fusion nucléaire et ainsi maintenir la réaction sur la durée. Ce n'est cependant pas une réaction en chaîne comme la fission. La succession des réactions n'a lieu que si nous maintenons des chauffages additionnels et si nous parvenons à conserver l'énergie de la réaction précédente. En effet, l'énergie, telle la chaleur d'un radiateur, se diffuse et se répartit dans l'espace naturellement. Il faut alors la forcer à rester sur place : ce maintien de l'énergie au même endroit s'appelle le confinement. Le critère de Lawson [62] statue la viabilité de la réaction de fusion. Il s'énonce ainsi : $0^{20}\ m^{3}$ où représente la densité d'atomes et le temps de confinement de l'énergie et est valable à une température de 0^{8}. Ce critère signifie que pour pouvoir enchaîner les réactions de fusion nucléaire il faut confiner l'énergie un certain temps pour avoir une chance que parmi les atomes de combustible par m^3, il y ait une réaction nucléaire. Deux solutions s'offrent à nous : nous pouvons augmenter la densité d'atome et ainsi accepter un temps de confinement plus court, c'est la fusion inertielle, ou nous pouvons allonger le temps de confinement sur de la matière moins dense (un gaz), c'est la fusion par confinement magnétique. Voici quelques chiffres sur la fusion par confinement magnétique :

- la densité avoisine 0^{19}atomes par m^3, soit 10000 fois moins que dans l'air.
- la température de la réaction de fusion doit dépasser 100 millions de degrés.
- le temps de confinement doit atteindre 5 secondes.

Le tokamak

Le tokamak est une machine à fusion nucléaire qui confine l'énergie dans une cage magnétique. Une telle chaleur ne doit pas toucher les parois de la machine : le champ magnétique sert de support immatériel au gaz à 100 millions de degrés Celsius. Le tokamak a été inventé dans les années 60 par les russes Igor Yevgenyevich Tamm et Andreï Sakharov. Le nom vient de la contraction de "toroidalnaja kamera magnetnaja katuska", soit du russe au français, chambre toroïdale à bobines magnétique), figure (1.4). A une température si élevée, le gaz est à l'état de plasma : les électrons de surface sont séparés des atomes. Il y a alors deux espèces chargées dans le champ magnétique : les ions et les électrons. Or une particule chargée suit les lignes de champ magnétique comme un rail, figure (1.3). Si ce rail est bouclé sur lui-même : la

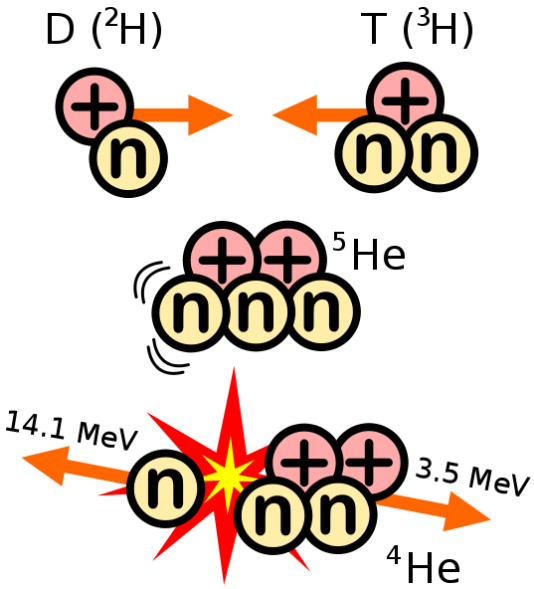

FIGURE 1.2 – La réaction de fusion nucléaire utilisée dans ITER

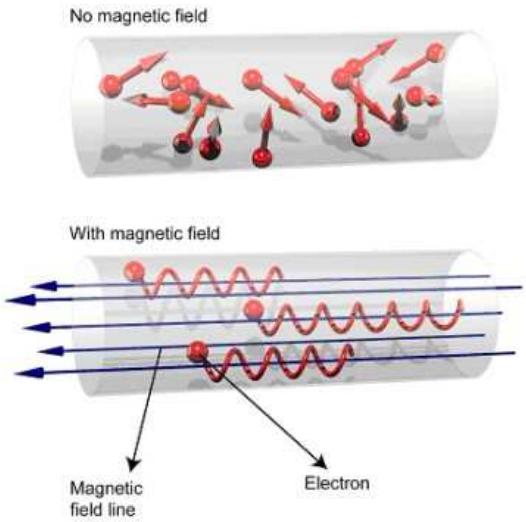

FIGURE 1.3 – Mouvement des particules chargées dans un champ magnétique

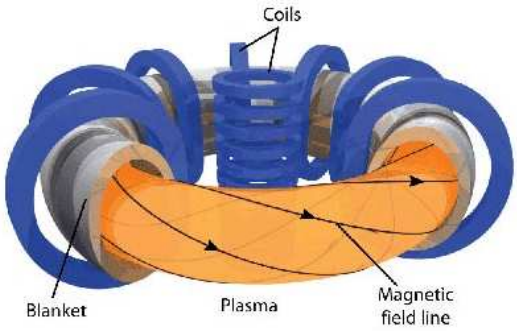

FIGURE 1.4 – Schéma d'un tokamak

particule est bloquée sur ce rail. Le tokamak est une cage à particules chargées, les lignes de champs magnétique sont recourbées le long de tores emboîtés comme des poupées russes et les particules courent sur ces tores sans jamais en sortir. Mais, cet assemblage des lignes de champ le long des tores magnétiques n'est pas suffisant. Il y a en plus un mouvement lent de dérive qui draine les particules vers l'extérieur. Pour les "rattraper", il faut vriller les lignes de champ magnétique de chaque tore, comme il faut tourner une cuillère de miel pour éviter qu'il ne tombe. Le champ magnétique obtenu est schématisé dans la figure (1.4).

La promesse

La fusion nucléaire est une promesse : une production d'énergie propre, sûre, infinie qui répondra à la demande mondiale. Propre, car la fusion nucléaire produit de l'hélium, cendre non polluante et valorisable car jusqu'à présent non synthétisée. La radioactivité est contenue dans les parois du réacteur et ne développe qu'une quantité limitée de déchets radioactifs. Le tritium de la réaction est aussi radioactif, mais il est directement produit et consommé à l'intérieur du tokamak. La centrale à fusion nucléaire est sûre. Aucun risque d'emballement de la réaction nucléaire car celle-ci s'éteint dès que l'on coupe les chauffages additionnels. Les combustibles de la réaction ne sont pas stockés dans le réacteur mais produits et utilisés au fur et à mesure, ce qui prévient les risques d'explosion des réservoirs de combustible. Seul le deutérium est stocké sur site mais il est inerte. La fusion nucléaire propose une énergie infinie. Le deutérium est présent dans l'eau de mer en quantité astronomique : 0 0 de la quantité d'hydrogène. ITER est le premier pas des réacteurs à fusion industriel, le test de faisabilité.

Nous aurons la fusion nucléaire dans 50 ans.

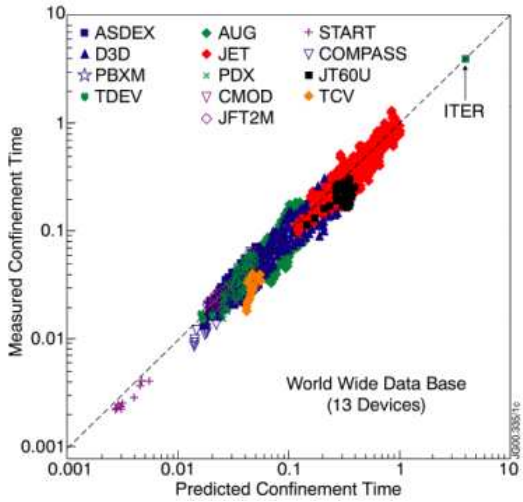

FIGURE 1.5 – Temps de confinement prévisionnels et expérimentaux pour différents tokamaks existants.

Cette promesse s'appuie sur des lois d'échelle prospectives qui prévoient le fonctionnement d'ITER, figure (1.5). Depuis 50 ans, les tokamaks expérimentaux sont de plus en plus gros et permettent un confinement de qualité croissante. Un tokamak encore plus gros, devrait avoir un meilleur temps de confinement.

Les difficultés

Certains physiciens taquins ont proposé d'inclure ces 50 ans parmi les constantes cosmologiques puisque cette promesse persiste depuis l'apparition des premiers tokamaks (1960). Cette bonhomie apparente cache en fait un sceptissisme au sujet de la fusion nucléaire et en particulier de la voie choisie : le tokamak. Tout d'abord, cette méthode de confinement magnétique n'est pas la seule alternative, il existe d'autres machines permettant de confiner l'énergie comme les miroirs magnétiques figure (1.6), les stellarators figure (1.7), les Reversed Field Pinch ... Les tokamaks ont donné très tôt des résultats prometteurs et ont centralisé l'intérêt de la communauté scientifique. Les chercheurs ont mis en lumière les difficultés à réaliser la fusion industrielle avec le tokamak. Les difficultés sont positivées en défis, mais la construction d'ITER a commencé et les défis ne sont que partiellement réussis. Le premier challenge et certainement le plus difficile est la création de matériaux capables de résister de manière pérenne aux neutrons de 14.1 MeV issus de la réaction, figure (1.2). Il faut que ce matériau soit suffisamment fiable face aux neutrons pour que les temps de réparation

deviennent faibles par rapport au temps de fonctionnement. Parallèlement, il faut que ce matériau soit résistant en surface à l'érosion due au plasma et aux vagues d'énergie qui s'y écrasent. L'énergie des particules est telle que l'érosion de la paroi est à prendre en compte. Le matériau de la paroi du tokamak doit aussi être thermiquement conducteur pour permettre l'évacuation de la chaleur via le système de refroidissement. La température de la paroi se situe à 3000 degrés Celsius au sol du tokamak et à 500 degrés Celsius pour les murs. Cette chaleur ne doit pas atteindre les bobines supraconductrices qui produisent le champ magnétique, placées juste derrière à -269 degrés Celsius. Un second défi concerne la production de tritium pendant le fonctionnement. Il faut maintenir du lithium dans la paroi. Ce lithium réagit avec les neutrons de la fusion pour donner du tritium qui sera réinjecté dans le tokamak. Cela n'a jamais été fait et cela sera testé avec ITER. Il y a d'autres difficultés qui mériteraient d'être développées, certaines même d'ordre politique et économique. Ainsi, le coût d'ITER est passé de 5 à 15 milliards d'euros. Le matériau pour les bobines, l'alliage nobium-titane ou le nobium-étain si sa production augmente, n'est pas en quantité suffisante pour une production industrielle planétaire de bobines pour les réactions à fusion.

Nous nous focaliserons, dans ce travail de thèse, sur une difficulté particulière : la stabilité de la cage magnétique. L'équilibre de cette cage magnétique est stable. Mais de petites fluctuations infinitésimales peuvent croître et engendrer des phénomènes macroscopiques. Les rides à la surface de l'eau sont un exemple de perturbations amorties, elles s'estompent avec le temps. L'effet Larsen que l'on obtient en rapprochant un micro et son enceinte est un exemple de fluctuations qui s'amplifient avec le temps. Les fluctuations qui s'amplifient dans le tokamak sont appelées des instabilités électromagnétiques. Elles sont nombreuses dans le champ magnétique d'un tokamak. Leur compréhension et leur contrôle sont nécessaires pour le pilotage de la machine. Parmi elles, nous traiterons spécifiquement des îlots magnétiques dans cette thèse.

Introduction du sujet de thèse

Les îlots magnétiques apparaissent autant en astrophysique que dans les machines à confinement magnétique. Par exemple dans les couronnes solaires, les îlots magnétiques précèdent la destruction des tubes de flux [43]. Dans les tokamaks, les îlots magnétiques sont une cause majeure de dégradation du confinement et de disruption [30, 10]. La figure (1.8) présente les dégâts lors de l'inspection du tokamak Alcator C-mod en 2008. Ces dégats représentent l'usure d'un tokamak, inclusion faite des disruptions. Dans le cas le plus simple, les îlots magnétiques sont générés par un gra-

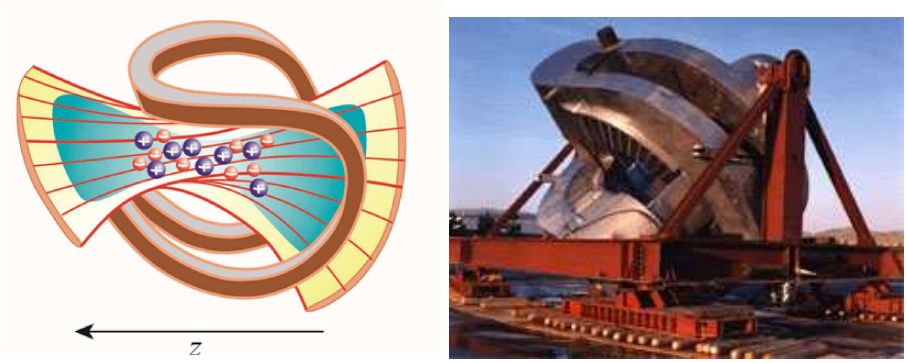

FIGURE 1.6 – Schéma de principe d'un miroir magnétique et une photo de deux bobines tandem.

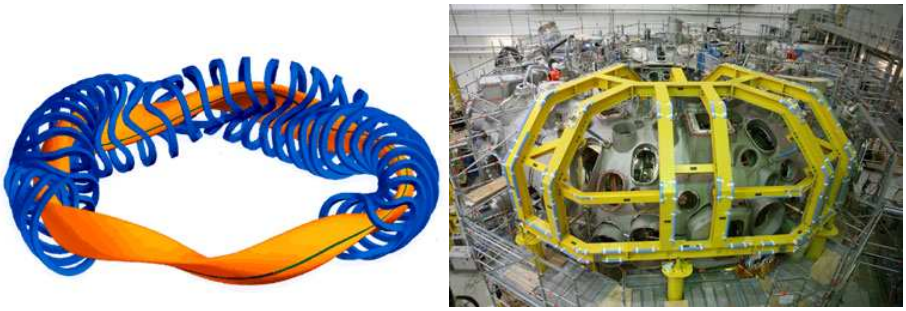

FIGURE 1.7 – Schéma de principe du Stellerator et photo du réacteur en construction.

FIGURE 1.8 – Dégats sur Alcator C-mod en 2008.

dient de densité de courant défavorable à la surface résonante : c'est l'instabilité de déchirement magnétique. La stabilité est caractérisée par le signe du paramètre qui quantifie la discontinuité des fluctuations du champ magnétique à la résonance dans la limite idéale où 0 [5, 18]. La résistivité influence les fluctuations à la résonance et permet une modification de la topologie magnétique qui ammène à la reconnexion [5]. Un problème fondamental en MHDR (Magnéto-Hydro-Dynamique Résistive) est la détermination des mécanismes qui mènent à la croissance et à la saturation des îlots magnétiques. Dans les théories actuelles, la saturation non-linéaire est formulée comme une théorie locale où l'accent est mis sur les mécanismes en jeu à la résonance. Leur taille à saturation sont calculées dans [63, 14, 37, 23, 4]. La dynamique de l'îlot magnétique est analysée dans [49, 52]. Ces théories ne considèrent que des cas relativement éloignés de la réalité des tokamaks. Les dernières avancées en la matière incluent des profils magnétiques réalistes et la géométrie cylindrique. Ces outils analytiques pour prévoir l'évolution et calculer la saturation restent limités : ils ne sont valables que sous certaines conditions que nous appellerons "petit îlot", la géométrie est D et les équations sont très simplifiées. Mais elles sont utilisées expérimentalement malgré leurs limitations avec succès [51, 11, 10, 60], ce qui remet en cause notre compréhension de ces phénomènes.

Une partie de cette thèse est dédiée à ce problème : dans quelle mesure les théories actuelles sur la prédiction de l'évolution de la taille d'un îlot magnétique peuvent être utilisées et quelle est l'importance des phénomènes mis de coté. La première étape de ce travail est la dérivation du modèle théorique : le second chapitre y est consacré. Nous y développons les simplifications utilisées sur la physique que l'on veut mettre en oeuvre : un modèle bi-fluides qui exclut les effets cinétiques et nucléaires et également les simplifications sur la géométrie induite par l'anisotropie du champ magnétique. Nous partons des équations de Braginskii [7] pour arriver à un modèle proche du modèle 4 champs de Hazeltine [25]. Ce modèle contient les éléments pour simuler l'instabilité de déchirement magnétique et une turbulence d'interchange. Le troisième chapitre traite de l'outil numérique MOA (Magnetic Alfvènic Organisation) qui à été développé et amélioré pendant cette thèse. Il y est décrit la parallélisation du code et les tests numériques et physiques que nous avons effectués. Le code est désormais utilisable sur des cluster intermédiaires et a été porté dans les centres de calcul suivant : Westgrid (Canada), Idriss (France) et Juelich (Allemagne). Le quatrième chapitre aborde les théories d'évolution des îlots magnétiques. Nous redétaillons le calcul du taux de croissance linéaire [18, 5] où est défini le paramètre qui est fondamental dans toutes ces théories : il est proportionnel à la croissance de l'îlot magnétique et à la taille à saturation. Nous revisitons également le calcul de la taille à saturation d'un

îlot magnétique [14, 37] dans le cadre “petit îlot”. La comparaison avec les simulations numériques permet de redéfinir un cadre d’utilisation de ces théories moins restrictif, si les fluctuations de l’équilibre magnétique sont prises en compte. L’impact du profil de courant a été étudié dans [38] et il y a été montré qu’une faible modification du courant d’équilibre changeait significativement la stabilité et la croissance de l’îlot magnétique. Il s’agit ici de montrer que l’îlot magnétique crée sa propre modification du courant d’équilibre, et que celle-ci ne peut être négligé si nous sortons du cadre restrictif “petit îlot” pour atteindre le régime dit “îlot intermédiaire”. Ce nouveau régime introduit d’autres effets qui apparaissent à haute valeur de : la coalescence des îlots [5] et l’effondrement du point de reconnexion en nappe de courant [33]. Le cinquième chapitre porte un éclairage différent sur les théories d’évolution des îlots magnétiques. Les théories dépeignent les mécanismes en jeu à la résonance : de la croissance d’un îlot magnétique, en passant par l’effondrement du point de reconnexion en nappe de courant et jusqu’à l’apparition des îlots secondaires sur la nappe de courant secondaire. Ces phénomènes requièrent un critère d’instabilité de plus en plus élevé. Or, dans le cadre des îlots plus larges mais sans pour autant atteindre ces phénomènes cités, nous démontrons la présence d’effets supplémentaires avec l’interaction du profil de courant loin de la résonance et la séparatrice de l’îlot magnétique. Ces effets peuvent radicalement changer la dynamique de l’îlot magnétique et même aller jusqu’à empêcher la saturation de l’îlot magnétique. Ces effets ne sont pas du tout pris en compte dans les théories actuelles car ils sont hors résonance. Cependant, ils sont à relier expérimentalement au contrôle des îlots magnétiques par ECRH (Electron Cyclotron Resonance Heating) [11].

L’autre partie de la thèse, le chapitre six, aborde un autre environnement des îlots magnétiques : la turbulence. La turbulence peut être réduite par moyennage à des coefficients de diffusion dit anormaux [64]. Mais nous savons depuis peu que la turbulence peu générer des effets MHD tels des flux zonaux [28] où des îlots magnétiques [40]. Ce dernier point est justement étudié dans une géométrie $3D$ et cylindrique. Nous étudions d’abors l’impact de ces changements géométriques sur l’instabilité de déchirement magnétique et les îlots magnétiques. L’asymétrie générée par la géométrie modifie les critères d’instabilités. Nous caractérisons également dans cette géométrie notre turbulence. Il s’agit d’une turbulence de type interchange résistive. Nous retrouvons en $3D$ les résultats précédents [40] : la turbulence peut produire un îlot magnétique. Mais cette turbulence peut aussi se propager radialement sur une autre résonance adjacante et produire également un îlot magnétique délocalisé de la source de la turbulence. Ce résultat nouveau est analysé : le niveau de turbulence conditionne la vitesse de croissance de l’îlot mais peu sa taille.

Chapitre 2

Modélisation de l'instabilité de déchirement magnétique et de la turbulence d'interchange

Nous allons ici développer notre modèle pour l'instabilité de déchirement magnétique et la turbulence. Il est illusoire de vouloir simuler les équations complètes d'un plasma en tenant compte de tous les effets. Tous d'abord, rien ne nous dit qu'il n'y a pas d'effets inconnus qui ne sont pas dans les équations. Ensuite, la complexité du système rendrait les analyses des résultats très difficiles et enfin le coût numérique de telles simulations serait probablement trop important. Nous préférons limiter le cadre de notre étude par des approximations et des simplifications afin de mieux comprendre la physique sous-jacente. Ce modèle est en fait une simplification du modèle à quatre champs développé en 1985 par Hazeltine [25]. Il est encore à l'étude actuellement pour y inclure différents effets supplémentaires [54] et est utilisé numériquement [65, 42]. Nos équations seront traitées en MagnétoHydroDynamique Réduite (RMHD). Il s'agit d'une description fluide du plasma, les ions et électrons sont un flux de matière perpendiculaire au champ magnétique couplé à un courant parallèle. les directions privilégiées sont induites par une forte anisotropie du champ magnétique.

2.1 Description générale

Le plasma est composé de deux types de particules : les ions et les électrons. Ceux-ci diffèrent par leur masse $\frac{m_e}{m_i} = \ _m \quad 0 \ ^3$ et nous considérons par simplicité que les ions et les électrons ont une charge unitaire chacun de signe opposé $\quad = \quad = \ .$ A tout instant, nous avons conservation de l'électroneutralité alors qu'ions et électrons subissent des évolutions différentes.

Pour décrire ce type de plasma, nous utilisons une simplification fluide des moments issus de l'équation de Fokker-Planck en supposant des fonctions de distribution de vitesse Maxweliennes. Avec cette description, nous gagnons en simplicité ce que nous perdons en détails : les phénomènes rapides tels que les girations des particules autour des lignes de champs [16, 48] ou l'effet Landau [16] par exemple ne sont pas pris en compte. Ces moments décrivent, pour chaque espèce du plasma, indexée , l'évolution de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie [7].

- La première simplification que nous opérons concerne le rapport de masse. Nous ne gardons que les termes supérieurs à $_m$. Cela revient à négliger l'inertie des électrons comparativement à celle des ions.
- La seconde simplification permet de définir simplement la vitesse de chaque espèce : il s'agit de l'approximation de dérive. Les vitesses d'advection sont approximées par les vitesses de dérive.
- La troisième simplification implique le choix des directions privilégiées d'évolution de chaque espèce dû au champ magnétique fortement anisotrope. La dynamique parallèle au champ magnétique est régie par les électrons tandis que la dynamique perpendiculaire est dominée par les ions.
- La dernière simplification est également liée l'anisotropie du champ magnétique. Le plasma est généré dans un champ magnétique hélicoïdal axi-symétrique, une colonne de plasma vrillée. Le champ magnétique poloïdal est beaucoup plus faible que le champ magnétique toroïdal en géométrie torique ou que le champ magnétique axial en géométrie cylindrique. Le rapport des deux suit une variation radiale : le plasma est généralement plus vrillé au centre qu'au bord de la colonne. Ce rapport de champ magnétique est appelé facteur de sécurité [16, 62] :

$$= \frac{\mathbf{B} \quad \nabla}{\mathbf{B} \quad \nabla} \tag{2.1}$$

Ce facteur est donc le nombre de tours toroïdaux que doit faire une ligne de champ pour faire un tour poloïdal. Il est supérieur à 1 pour avoir un confinement du plasma stable [48]. Dans une géométrie toroïdale, nous avons

$$= \frac{}{} \tag{2.2}$$

où est le champ magnétique toroïdal, est le champ magnétique poloïdal, le petit rayon, le grand rayon. En géométrie cylindrique, ce rapport devient

$$= \frac{}{_0} \tag{2.3}$$

où est le champ magnétique axial et $_0 = \frac{}{2}$ avec la longueur du cylindre. En géométrie slab, nous avons

$$= \frac{}{} \tag{2.4}$$

où est la longueur poloïdale de la boîte de simulation et la longueur axiale. Nous introduisons le rapport $= \frac{}{}$. Cependant comme est de l'ordre de l'unité, ce rapport de champ magnétique impose un rapport géométrique entre le petit rayon du tokamak et le grand rayon $= -$. Ce rapport va nous permettre de retrouver les termes dominants du modèle.

2.2 Equation de conservation de la matière

Nous supposons un plasma confiné et de densité constante. Cela exclut le bord du plasma près de la derniere surface de flux fermée. Nous excluons également les aspects nucléaires et les impuretés présentes dans le plasma pour obtenir, avec la vitesse fluide de l'espèce :

$$\nabla \qquad = 0 \tag{2.5}$$

Cette équation et notre hypothèse de densité constante nous ammènent à considérer le plasma comme incompressible et nous avons la relation suivante :

$$\nabla \qquad = 0 \tag{2.6}$$

Il n'y a évidemment pas d'équation d'évolution. Nous opérons un changement de notation :

$$= \quad = \tag{2.7}$$

2.3 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Le second moment de l'équation de Fokker-Planck correspond à l'équation de mouvement pour chaque espèce [7].

$$m \qquad \nabla \quad = \qquad \mathbf{B} \qquad \nabla \quad \frac{m}{} \qquad , \tag{2.8}$$

avec le temps de collision des électrons et en ayant négligé les effets gravitationnels et la thermo-électricité. Le terme de perte de quantité de mouvement par collisison pour les ions correspond à l'opposé de celui des électrons. En effet, nous sommes dans le cadre de collisions élastiques : la quantité de mouvement perdue par une espèce sera récupéreé par l'autre. Le sytème est bi-fluide avec les index $=$ pour les ions et $=$ pour les électrons. Nous souhaitons passer des variables et aux variables et $\mathbf{J}$ définies par :

$$= \frac{m \quad m}{m \quad m} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{J} = \tag{2.10}$$

où correspond à la vitesse fluide et $\mathbf{J}$ au courant. Par ailleurs, ce changement de variables se réalise avec l'approximation sur la masse : $m \quad m \quad = m \quad {}_m \quad m$. Nous obtenons alors pour définir et :

$$= \frac{m}{m \quad m}\frac{\mathbf{J}}{} = \frac{{}_m}{{}_m}\frac{\mathbf{J}}{} \tag{2.11}$$

$$= \frac{m}{m \quad m}\frac{\mathbf{J}}{} = \frac{\mathbf{J}}{{}_m}\frac{\mathbf{J}}{} \tag{2.12}$$

La transition de l'Eq.(2.8) vers les variables et $\mathbf{J}$ se fait en calculant $+$ pour obtenir l'équation de mouvement fluide.

$$m\left[{}_m \quad \boldsymbol{u} \quad \nabla \quad {}_m\left(\frac{\mathbf{J}}{} \left(\frac{\mathbf{J}}{} \nabla\right)\frac{\mathbf{J}}{}\right)\right] = \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \tag{2.13}$$

avec $=$, avec la force électrique annulée à cause du signe de la charge et en reprenant la définition du courant dans la force de Lorenz. Les termes collisionnels se sont annulés, par définition. Nous simplifions les termes inertiels avec l'approximation du rapport de masse, en ne gardant que les termes d'ordre inférieur à ${}_m$.

$$m \quad \boldsymbol{u} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \tag{2.14}$$

Nous obtenons alors l'équation de mouvement fluide qui nous servira à décrire la dynamique perpendiculaire au champ magnétique.

La dynamique parallèle au champ magnétique sera retranscrite avec la loi d'Ohm. Nous considérons l'équation d'évolution électronique où nous négligeons les termes inertiels :

$$0 = \mathbf{B} \quad \nabla \quad \frac{m}{} \tag{2.15}$$

Nous pouvons alors utiliser les définitions de et , Eq.(2.12) et Eq.(2.11), pour traduire la loi d'Ohm :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{J} \quad \mathbf{B}}{} \quad \frac{\nabla}{} \quad \mathbf{J} \tag{2.16}$$

avec $= \frac{m_e}{{}_e n \ {}^2}$, la résistivité de Spitzer. Cette résistivité est en fait fonction de la pression électronique : $\frac{3}{2}$. Nous considèrerons la résistivité comme constante, liée à ${}_f$, pour simplifier le modèle. En réalité, il existe une classe d'instabilités liées aux variations de [56]. Mais elles ne seront dominantes qu'au prix de gradient de pression extrèmement élevé. Il s'agit de phénomènes que l'on retrouve plutôt en astrophysique [58] que dans un tokamak [34].

Nous explicitons deux cas pour évaluer la pression. Ces deux cas sont deux limites de fonctionnement pour les tokamaks. Si la température n'est pas trop élevée, nous pouvons considérer l'hypothèse des ions froids. Dans ce cas, $=$ et $= 0$. Cependant, même si les ions sont froids, ils ont quand même une évolution de dérive au travers de l'Eq.(2.8). L'équation de mouvement et la loi d'Ohm dans ce cadre deviennent :

$$m \quad \boldsymbol{u} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \tag{2.17}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{J} \quad \mathbf{B}}{} \quad \frac{\nabla}{} \quad \mathbf{J} \tag{2.18}$$

Si maintenant nous considérons les ions et électrons à même température, dans un plasma plus chaud, la définition de la pression change : $=$ $=$ avec toujours $=$. L'équation de mouvement et la loi d'Ohm dans ce cadre deviennent :

$$m \quad \boldsymbol{u} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \tag{2.19}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{J} \quad \mathbf{B}}{} \quad \frac{\nabla}{} \quad \mathbf{J} \tag{2.20}$$

Nous réutiliserons l'équation de mouvement fluide Eq.(2.14) à l'ordre le plus bas dans la suite de la dérivation. Cette équation retranscrit l'équilibre principal du confinement du plasma. Si nous gardons les termes principaux, nous retrouvons l'équilibre de Grad-Shafranof [62, 16] en négligeant les termes inertiels :

$$\mathbf{J} \quad \mathbf{B} = \nabla \tag{2.21}$$

2.4 Equation de la conservation de l'energie

Il s'agit du troisième moment de l'équation de Fokker-Planck que nous pouvons écrire pour les ions ou les électrons [7] :

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad - \nabla \quad = \nabla \quad \nabla \tag{2.22}$$

où correspond au flux de chaleur du au gradient de température en supposant le plasma comme un gaz parfait = , la température en eV englobant la constante de Boltzmann. Nous négligeons ici le flux de chaleur de friction dans la définition Eq.(3) et le tenseur de pression anisotrope dans l'Eq.(2.22). Le flux de chaleur se décompose selon trois directions auxquelles nous associons trois coefficients de diffusivité thermique : la direction parallèle , la direction perpendiculaire et la direction diamagnétique :

$$= \quad \nabla \quad {}_{\parallel}\nabla_{\parallel} \quad \left(\frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \quad \right) \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} {}_{\parallel} &= 3 \quad \frac{{}_{i}\,{}_{i}}{m_i} \quad = \frac{{}_{i}m_i}{{}_{2}\,{}_{2}\,{}_{i}} \quad = \frac{{}_{i}}{{}_{2}} \\ {}_{\parallel} &= 3 \quad \frac{{}_{e}\,{}_{e}}{m_e} \quad = \frac{{}_{e}m_e}{{}_{2}\,{}_{2}\,{}_{e}} \quad = \frac{{}_{e}}{{}_{2}} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Les formules des coefficients de diffusion sont détaillés dans [7] et résumés dans [31]. correspond au temps collisionnel de chaque espèce sur les autres. Par simplification, nous supposons également que les coefficients , , ${}_{\parallel}$, ${}_{\parallel}$, et sont constants, malgré le fait qu'ils dépendent de la pression, et donc malgré le fait qu'ils puissent fluctuer avec la pression et que leur valeur puisse dépendre de comme les profils de pression d'équilibre. Nous prenons pour ces coefficients une valeur de pression de référence ${}_{f}$. La variable correspond à la quantité de chaleur développée par les collisions ioniques ou électroniques :

$$= \quad \frac{m}{} \tag{2.25}$$

$$= 3 \; {}_{m}\frac{}{} \tag{2.26}$$

Nous pouvons d'ores et déjà réécrire en terme de courant pour faire apparaître l'effet Joule et nous considérons l'énergie issue des électrons seulement, celle des ions étant négligeable car proportionnelle à ${}_{m}$:

$$= \quad \frac{m}{{}_{2}} \; {}_{2} \quad {}_{2} \tag{2.27}$$

$$0 \tag{2.28}$$

Nous réécrivons la conservation de l'Eq.(2.22), en détaillant les flux de chaleurs :

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad - \nabla \quad = \quad \triangle \quad {}_{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad \nabla \left(\frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \quad \right) \tag{2.29}$$

2.4.1 Cas des ions froids

Nous allons regarder encore les deux cas distincts sur les températures électroniques et ioniques. Nous pouvons en premier lieu estimer que $= 0$. Il s'agit de l'hypothèse des ions froids. Dans ce cas, $=$ et l'équation d'évolution de l'énergie correspond à l'évolution de la pression électronique seulement.

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad - \nabla \quad = \quad \triangle \quad {}_{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad \nabla \left(\frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \quad \right) \tag{2.30}$$

Nous utilisons l'incompressibilité du plasma Eq.(2.6), le fait que soit un scalaire pour avoir $\nabla \quad = \quad \nabla$ et $\mathbf{J} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \nabla$, la définition deEq.(2.12) et la relation $\nabla \quad \mathbf{J} = 0$:

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad \frac{3}{}\mathbf{J} \quad \nabla \quad = \quad \triangle \quad {}_{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad \nabla \left(\frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \quad \right) \quad {}^{2} \tag{2.31}$$

Nous réintroduisons l'équation de mouvement fluide à l'ordre le plus bas Eq.(2.21). Cela a pour effet d'annuler le dernier terme du membre de gauche : $\mathbf{J} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad = 0$. L'équation de pression devient :

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad = \quad \triangle \quad {}_{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad \nabla \left(\frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \quad \right) \quad {}^{2} \tag{2.32}$$

2.4.2 Cas des ions et électrons à température égale

Cette fois les ions et électrons sont à même température. L'équation de la pression correspond à la somme des deux équations et :

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad - \nabla \quad - \nabla \quad = \nabla \quad \nabla \tag{2.33}$$

Nous utilisons l'incompressibilité du plasma Eq.(2.6), le fait que soit un scalaire pour avoir $\nabla \quad = \quad \nabla$ et $\mathbf{J} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \nabla$. La pression globale du système correspond à la somme des pressions des espèces $\quad = \quad = \frac{}{2}$:

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad \frac{3}{}\mathbf{J} \quad \nabla = \nabla \quad \nabla \quad {}^{2} \tag{2.34}$$

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad \frac{3}{}\mathbf{J} \quad \nabla = - \quad \triangle \quad - \quad {}_{\parallel} \quad {}_{\parallel} \triangle_{\parallel} \quad {}^{2} \tag{2.35}$$

Pour définir les coefficients de diffusion, nous utilisons l'approximation du rapport de masse ${}_{m}$. En effet, $\frac{m}{}$ est proportionnel à $\overline{m}$, car est proportionnel à $\overline{m}$ [7, 31]. Nous introduisons les rapports des coefficients de diffusions pour faire apparaître le rapport de masse ${}_{m}$. Nous avons donc les relations suivantes pour les sommes des coefficients de diffusion :

$$- \quad = \frac{}{}\left(\frac{}{} \quad \right) \quad \frac{}{} \quad {}_{\overline{m}}^{\overline{2}} \quad \frac{}{} \tag{2.36}$$

$$- \quad {}_{\parallel} \quad {}_{\parallel} = \frac{}{}^{\parallel}\left(\frac{}{}^{\parallel} \quad \right) \quad \frac{}{}^{\parallel} \quad {}_{\overline{m}}^{\overline{2}} \quad \frac{}{}^{\parallel} \tag{2.37}$$

Nous obtenons finalement :

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad \frac{3}{}\mathbf{J} \quad \nabla = \frac{}{}\triangle \quad \frac{}{}^{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad {}^{2} \tag{2.38}$$

Nous réintroduisons l'équation de mouvement fluide à l'ordre le plus bas, Eq.(2.21). Cela a pour effet d'annuler le dernier terme du membre de gauche : $\mathbf{J} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \nabla \quad = \mathbf{J} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad = 0$. L'équation de pression devient :

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad = \frac{}{}\triangle \quad \frac{}{}^{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad {}^{2} \tag{2.39}$$

2.5 Résumé des conservations

Le système d'équations pour les ions froids est donc :

$$\begin{aligned} m \quad \boldsymbol{u} \quad \nabla \quad &= \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \\ \mathbf{B} \quad &= \frac{\mathbf{J} \quad \mathbf{B}}{n} \quad \frac{}{n} \quad \mathbf{J} \\ \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \nabla \quad &= \triangle \quad {}_{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad \nabla \quad \frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \quad {}^{2} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Le système d'équations pour les ions et électrons à même température est donc :

$$
\begin{aligned}
m \quad \boldsymbol{u} \quad \nabla \quad &= \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \\
\mathbf{B} \quad &= \frac{\mathbf{J} \quad \mathbf{B}}{n} \quad \frac{}{2 \; n} \quad \mathbf{J} \\
\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \nabla \quad &= \frac{i}{2} \triangle \quad \frac{e}{2} \triangle_{\parallel} \quad {}^{2}
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Ce système d'équations modélise l'évolution du plasma avec l'équation de mouvement, l'évolution du champ magnétique avec la loi d'Ohm et l'évolution de l'énergie avec l'équation de pression.

2.6 Les fluctuations magnétiques dans les opérateurs $\nabla_{\parallel}$ et $\triangle_{\parallel}$

Les lignes de champ magnétique sont enroulées sur des cylindres emboîtés les uns dans les autres. Le taux d'enroulement de ces lignes de champ sur chaque cylindre est variable. Nous modélisons le champs magnétique par une composante axiale et une composante poloïdale. Le champ magnétique peut s'exprimer en fonction de et :

$$
\mathbf{B} \quad = \qquad = \left(\quad \frac{}{0} \quad \right) \tag{2.42}
$$

Au champ magnétique d'équilibre s'ajoute une perturbation magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{B} \quad \mathbf{B}$. Cette fluctuation peut être reliée à son potentiel vecteur .

$$
\mathbf{B} = \mathbf{B} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B} \qquad \nabla \tag{2.43}
$$

Nous séparons le potentiel vecteur parallèle et perpendiculaire au champ magnétique $= \quad_{\parallel}$. Le rotationnel de la perturbation va donner une composante parallèle et une composante perpendiculaire du champ magnétique perturbé : $\nabla \quad = \nabla \quad_{\parallel} \quad = \nabla \quad_{\parallel} \quad \nabla \quad_{\parallel}$. La perturbation parallèle du champ magnétique issue de est négligeable devant $\mathbf{B}$. La perturbation perpendiculaire issue de $_{\parallel}$ génère, elle, un champ magnétique en partie radial, seul dans cette direction et donc non négligeable. Nous avons donc le potentiel vecteur : $_{\parallel}$. En tenant compte de la fluctuation $_{\parallel}$, nous intégrons en fait deux effets : la fuctuation de la norme de mais aussi celle de sa direction. La fluctuation de direction génère des effets liés à la courbure qui ici sont négligés. Nous pouvons donc réécrire le champ magnétique sous la forme partagée entre $\mathbf{B}$ et , avec $=$, tel que :

$$
\mathbf{B} = \mathbf{B} \qquad \nabla \tag{2.44}
$$

La projection du gradient parallèle $\nabla_{\|} = \quad \nabla$ est détaillée dans l'annexe (B). Nous rétablissons également le lien entre le champs poloïdal et le flux magnétique d'équilibre avec $\quad = \quad \nabla \quad$ dans le cadre de la géométrie cylindrique : $\quad =$ $\frac{}{} = \quad$. Le champ magnétique poloïdal peut donc être exprimer en fonction du flux magnétique total $\quad$ ou par une composition du flux magnétique perturbé $\quad$ et du champ poloïdal d'équilibre.

$$\mathbf{B} = \quad \nabla \quad = \quad \nabla \tag{2.45}$$

Ce qui nous donne deux formes pour le gradient parallèle :

$$\nabla_{\|} = \quad \frac{}{_0} \quad - \tag{2.46}$$

$$\nabla_{\|} = \quad - \tag{2.47}$$

La projection de l'opérateur $\triangle_{\|}$ est aussi détaillée dans l'An.(B). Cet opérateur est la double application du gradient parallèle $\nabla_{\|}$. Nous gardons les mêmes approximations pour obtenir les deux formes :

$$\triangle_{\|} = \quad _2 \quad \frac{}{_0} \quad - \quad - \tag{2.48}$$

$$\triangle_{\|} = \quad _2 \quad - \quad - \tag{2.49}$$

Attention cependant en 2D : la direction axiale n'existe plus et les termes dominants sont des termes qui avaient été laissés pour compte, le double crochet de Poisson. Nous verrons à la Sec.(4.3) que l'opérateur $\quad$ est en fait inclu dans le champ magnétique d'équilibre poloïdal qui devient alors un champ magnétique poloïdal dans un référentiel hélicoïdal. Nous obtenons pour les deux formes du champ magnétique poloïdal qui seront utilisées dans le modèle :

$$\triangle_{\|} = \frac{}{_0} \left(\frac{}{_0} \quad - \quad \right) \quad - \quad \frac{}{_0} \quad - \tag{2.50}$$

$$\triangle_{\|} = \frac{}{_2} \tag{2.51}$$

2.7 La vitesse de dérive

La vitesse de dérive est perpendiculaire au champ magnétique. Nous pouvons extraire de l'Eq.(2.16) en rappelant que $= \nabla \quad \parallel \quad \nabla$ où $= \quad \parallel$ est la fluctuation magnétique, et que $\mathbf{B} = \quad \parallel \quad \mathbf{B} = \quad \mathbf{B}$. Nous appliquons l'opérateur $\mathbf{B}$ sur les termes de l'Eq.(2.16) et nous obtenons :

$$\mathbf{B} \qquad \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{B} \qquad = \mathbf{B} \quad \frac{\mathbf{J} \quad \mathbf{B}}{} \quad \mathbf{B} \quad \frac{\nabla}{} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \tag{2.52}$$

En utilisant la relation [31]-(2), avec $\mathbf{B} \quad = 0$, nous pouvons extraire la vitesse de dérive :

$$= \frac{\mathbf{B}}{_2} \left(\nabla \quad \frac{\nabla}{} \right) \frac{\mathbf{B}}{_2} \quad \frac{\mathbf{J} \quad \mathbf{B}}{} \quad \frac{\mathbf{B} \quad \mathbf{J}}{_2} \tag{2.53}$$

Dans le cadre des ions froids, $= \quad$. La relation Eq.(2.21) injectée dans la formule de la vitesse de dérive Eq.(2.53) permet de simplifier cette dernière à l'ordre le plus bas, en négligeant les effets résistifs :

$$= \frac{\mathbf{B} \quad \nabla}{_2} \tag{2.54}$$

Dans le cadre des ions et électrons à même température, $= \quad$. L'Eq.(2.21) est introduite dans la formule de la vitesse de dérive Eq.(2.53), en négligeant les effets resistifs :

$$= \frac{\mathbf{B} \quad \nabla \qquad \overline{_{2\,n}}}{_2} \tag{2.55}$$

C'est cette relation Eq.(2.54) ou Eq.(2.55), selon la condition sur la température ionique, qui sera utilisée dans les termes d'advection des différents moments pour réduire le système d'équations aux variables , et .

2.8 Projection des équations selon le champ magnétique

Le système Eq.(2.40) ou Eq.(2.41) contient deux équations vectorielles et une équation scalaire. Nous considérons seulement le courant parallèle dans le système avec l'Eq.(2.16) projetée sur la direction parallèle et nous considérons la vitesse fluide uniquement perpendiculaire avec l'opération avec la projection de l'Eq.(2.14) sur la direction perpendiculaire.

2.8.1 Le courant parallèle de la loi d'Ohm

Pour les ions froids, nous projetons les termes de l'Eq.(2.16) sur la direction parallèle au champ magnétique :

$$\mathbf{B} \qquad \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \quad = \mathbf{B} \quad \frac{\mathbf{J} \quad \mathbf{B}}{} \quad \mathbf{B} \quad \frac{\nabla}{} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \tag{2.56}$$

Nous opérons des simplifications dans la relation. le terme $\mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B}$ est nul, en effet la force $\mathbf{J} \quad \mathbf{B}$ génère des mouvements perpendiculaires au champ magnétique qui ne rentre pas en compte dans le courant parallèle. Il en va de même pour le terme $\mathbf{B} \qquad \mathbf{B} \; = 0$. Nous rappelons la définition du gradient parallèle $\nabla_{\parallel} = \frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla$, du courant parallèle $_{\parallel} = \quad \mathbf{J}$ et du champ électrique $\quad = \; \nabla \qquad$. Nous obtenons avec ces remplacements :

$$\mathbf{B} \quad = \mathbf{B} \quad \frac{\nabla}{} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \tag{2.57}$$

$$= \nabla_{\parallel} \left(- \qquad \right) \qquad {}_{\parallel} \tag{2.58}$$

Le cas des ions et électrons à même température utilise les mêmes manipulations et le changement de variable $\quad = \qquad \frac{}{2\,n}$ pour obtenir :

$$= \nabla_{\parallel} \left(- \qquad \right) \qquad {}_{\parallel} \tag{2.59}$$

2.8.2 L'équation de vorticité

Cette équation va décrire le mouvement perpendiculaire du plasma, $\quad = \quad$, dans le cadre des ions froids. Elle s'obtient en réalisant le produit vectoriel entre $\mathbf{B}$ et les termes de l'Eq.(2.14). Nous obtenons alors :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \qquad m \quad \boldsymbol{u} \quad = \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \qquad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla \tag{2.60}$$

Les termes $\mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \quad \nabla \qquad m \quad \boldsymbol{u}$ sont décrits dans les An.(C) et An.(D). Le terme $\mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla$ est nul car le rotationnel d'un gradient l'est toujours. Nous obtenons alors pour l'équation de vorticité :

$$m \left(\quad \triangle \qquad - \qquad \triangle \quad \right) = \; {}^{2}\nabla_{\parallel} \; {}_{\parallel} \qquad {}^{2} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \tag{2.61}$$

Le terme diffusif de l'équation de vorticité est absent à cause d'une simplification abusive du tenseur de pression en ses seuls termes diagonaux. Apres un calcul plus

délicat de simplification du tenseur de pression [7], nous pouvons retrouver le terme de viscosité qui sera rajouté ici de façon adhoc dans l'Eq.(2.61)

$$m \left(\triangle \quad - \quad \triangle \right) = {}^{2}\nabla_{\parallel} \; {}_{\parallel} \quad {}^{2} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \triangle \quad \triangle \tag{2.62}$$

Pour les ions et électrons de même température, nous utiliserons le changement de variable $=$ $\frac{}{2\,n}$ pour nous ramener aux mêmes calculs. Nous obtenons :

$$m \left(\triangle \quad - \quad \triangle \right) = {}^{2}\nabla_{\parallel} \; {}_{\parallel} \quad {}^{2} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \triangle \quad \triangle \tag{2.63}$$

2.8.3 L'équation de pression

Nous traitons le cas des ions froids. L'équation de pression se réécrit en ne tenant compte que de la vitesse . La vitesse $_{\parallel}$ sera négligée.

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad \nabla \quad = \quad \triangle \quad {}_{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad \frac{}{{}_{2}}\nabla \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad {}^{2} \tag{2.64}$$

Nous utilisons la relation (2.54) $= \frac{\mathbf{B}}{{}_{2}}$ comme approximation pour la vitesse fluide et l'équation (2.21) pour réécrire le terme diamagnétique.

$$\frac{3}{} \quad \frac{3\,\mathbf{B} \quad \nabla}{{}_{2}} \quad \nabla \quad = \quad \triangle \quad {}_{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad \frac{}{{}_{2}}\nabla \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad {}^{2} \tag{2.65}$$

Nous utilisons encore l'An.(C.1) pour simplifier le terme diamagnétique et l'An.(B) pour le terme d'advection de la pression :

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad = \quad \triangle \quad {}_{\parallel}\triangle_{\parallel} \quad \frac{}{} \quad \nabla_{\parallel} \; {}_{\parallel} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad {}^{2} \tag{2.66}$$

Le cas des ions et électrons à même température utilise le changement de variable $=$ $\frac{}{2\,n}$ et les mêmes calculs pour obtenir :

$$\frac{3}{} \quad \frac{3}{} \quad = \frac{}{} \triangle \quad \frac{{}_{\parallel}}{} \triangle_{\parallel} \quad {}^{2} \tag{2.67}$$

2.9 L'opérateur de courbure

Les opérateurs de courbure sont ici calculés par rapport au champ magnétique d'équilibre. Nous n'incluons pas les effets des fluctuations magnétiques sur les opérateurs de courbure. Le vecteur de courbure

$$= \left(\frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{} \tag{2.68}$$

apparait dans la dérivation du modèle. Ce vecteur de courbure est perpendiculaire au champ magnétique et agit sur les vitesses de dérive du type $\mathbf{B} \quad \nabla$. Le traitement de peut faire intervenir différents effets selon si l'on considère comme constant ou variant en $\frac{1}{}$, selon encore si nous incluons les perturbations magnétiques.

L'An.(D) présente un cas complet et le cas le plus simple que nous utiliserons dans ce modèle : est constant et nous excluons les perturbations magnétiques. Nous obtenons alors pour le terme de courbure :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \frac{}{_0{}^2} \tag{2.69}$$

Cette courbure a l'avantage de garder la symétrie axiale du système, tandis-que les autres termes imposent des effets champ fort/faible selon le signe de . Dans les deux cas, l'opérateur de courbure permettra l'apparition d'une turbulence de type interchange. Cependant pour étudier l'intéraction entre la turbulence et un îlot magnétique, nous n'avons pas besoin du réalisme associé au mode ballon qui est une turbulence de type interchange mais localisée dans la zone champ faible. Nous garderons alors une turbulence de type interchange si besoin en renforçant artificiellement la courbe poloïdale.

2.10 Résumé

Les hypothèses de travail sont résumées ci-dessous :

- Un champ magnétique axial fort et uniforme. La norme de $\mathbf{B}$ est constante.
- La densité est constante $= \quad = \quad .$
- Les ions sont froids : $= \qquad$ car où les ions sont à la même température que les électrons $= \quad = \quad$ car $= \quad .$
- Les termes d'inertie des électrons sont négligés (en $\frac{m_e}{m_i}$)
- Les termes de courbure ne prennent pas en compte les fluctuations magnétiques.
- Les fluctuations magnétiques ne sont prises en compte qu'avec le potentiel vecteur parallèle.

Les actions sur le système d'équation sont reprises point par point :

- A partir des moments 2 et 3 de l'équation de Fokker-Planck pour les ions et les électrons, nous réalisons un changement de variable des vitesses

  $\mathbf{J}$
- Nous passons d'un système bi-fluide à un système MHD par somme des moments électroniques et ioniques. Le moment électronique nous permet de retrouver la loi d'Ohm généralisée
- Seules certaines directions sont gardées pour la loi d'Ohm et l'équation de vorticité. Le courant est essentiellement parallèle et la vitesse est majoritairement due aux dérives.
- L'expression des vitesses est réduite à là seule dérive électrique et, à un ordre supérieur à la dérive résistive et à la dérive inertielle. Cette dernière est retranscrite par la différence entre la dérive diamagnétique et celle de courbure.
- Les opérateurs sont simplifiés par analyse vectorielle puis par projection.
- L"'ordering" final est réalisé sur en ne gardant que les termes en ^{1}

Le système non normalisé est le suivant dans le cadre des ions froids :

$$\begin{aligned} \| &= \nabla_{\|} \frac{}{n} \| \\ m \triangle \frac{1}{} \triangle &= {}^{2}\nabla_{\|} \| \frac{2}{}^{2} \triangle \triangle \\ \frac{3}{2} \frac{3}{2} &= \nabla \| \nabla_{\|} \frac{}{2\,n} \nabla_{\|} \| \frac{2}{}^{2} {}^{2} \end{aligned} \tag{2.70}$$

Le systeme non normalisé est le suivant dans le cadre des ions et des électrons à même température, il contient donc en plus les effets diamagnétiques ioniques :

$$\begin{aligned} \| &= \nabla_{\|} \frac{}{n} \| \\ m \triangle \frac{1}{} \triangle &= {}^{2}\nabla_{\|} \| \frac{2}{}^{2} \triangle \triangle \\ \frac{3}{2} \frac{3}{2} &= \nabla \| \nabla_{\|} \frac{}{2\,n} \nabla_{\|} \| \frac{2}{}^{2} {}^{2} \\ &= \frac{}{2\,n} \end{aligned} \tag{2.71}$$

2.11 Normalisation

Le choix de la normalisation des équations est régi par la dynamique que l'on veut mettre en valeur ici. Nous normalisons les variables de références et nous déduisons la normalisation des autres variables au travers de différentes relations :

$$= \quad \mathbf{B} = \mathbf{B} \quad = \quad = \quad = \quad {}_{f}$$

Nous avons introduit le temps d'Alfvèn tel que $= \frac{}{}$ avec le petit rayon du tokamak et $= \frac{}{\sqrt{nm_i}}$ la vitesse d'Alfvèn. Nous décrivons ensuite la normalisation des opérateurs :

$$= \frac{1}{} \qquad \triangle \; = \frac{1}{2}\triangle \qquad \nabla = \frac{1}{}\nabla \qquad = \frac{1}{2}$$

Et également une normalisation des autres variables au travers de relations simplifiées :

Maxwell-Ampère	$\mathbf{J} \;_0 = \nabla \;\; \mathbf{B}$	$\mathbf{J} = \;\; \mathbf{J}$
Maxwell-Thomson	$\mathbf{B} = \nabla$	$=$
Force de Laplace	$= \;\; \mathbf{B}$	$=$
Maxwell-Faraday	$= \;\; \nabla$	$=$
Définition de la vorticité	$= \triangle$	$= \;\; \frac{}{}$
Loi d'Ohm	$= \;\; \mathbf{J}$	$= \;\; {}_0$
Equation de diffusion	$m \;\; \triangle \;\; = \;\; \triangle \;\; \triangle$	$= m \;\; \frac{}{}^2$
Equation de diffusion	$\frac{3}{2} \;\; = \;\; \triangle$	$= \frac{3}{2}\frac{}{}^2$

Nous avons également besoin des grandeurs suivantes

- $= \frac{}{m_i}$: la fréquence cyclotronique ionique.
- $_f = \frac{}{^2}$: le rapport de l'énergie de pression sur l'énergie magnétique.

2.11.1 Normalisation de la loi d'Ohm

Nous retranscrivons l'Eq.(2.58) en termes normalisés :

$$\frac{}{} \qquad = -\nabla_{\parallel} \left(\frac{_f}{} \qquad \right) \qquad {}_0 \qquad \frac{}{_0} \; {}_{\parallel} \tag{2.72}$$

Après quelques regroupements et simplifications, nous avons :

$$= \qquad \nabla_{\parallel} \qquad \frac{_f}{}\nabla_{\parallel} \qquad {}_{\parallel} \tag{2.73}$$

puis finalement :

$$= \; \nabla_{\parallel} \qquad \frac{_f}{}\nabla_{\parallel} \qquad {}_{\parallel} \tag{2.74}$$

2.11.2 Normalisation de l'équation de vorticité

Nous retranscrivons l'Eq.(2.62) en termes normalisés :

$$m \qquad m \qquad \frac{1}{2}\triangle \qquad \frac{1}{2}\triangle \qquad = \qquad \frac{2\,1}{2\quad e\quad 2}\nabla \qquad \frac{1}{2} \qquad \qquad m \qquad \frac{1}{2}\triangle \qquad \frac{1}{2}\triangle \tag{2.75}$$

Après quelques regroupements, nous avons :

$$m \qquad m \qquad \triangle \qquad \triangle \qquad = \qquad \frac{2\,1}{2\quad e\quad 2}\nabla \qquad \frac{}{2} \qquad m_i n \quad 2 \qquad \triangle \qquad \triangle \tag{2.76}$$

Après simplifications, nous obtenons :

$$\triangle \qquad \triangle \qquad = \qquad \nabla \qquad \frac{2\quad e\quad 2}{2} \qquad \triangle \qquad \triangle \tag{2.77}$$

2.11.3 Normalisation de l'équation de pression

Nous retranscrivons l'Eq.(2.66) en terme normalisé :

$$\frac{3}{2}\,\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2} \qquad f \qquad f \qquad = \qquad \frac{3}{2}^{2} \qquad \frac{1}{2}\triangle \qquad f \qquad \frac{3}{2}^{2} \qquad \frac{1}{2}\triangle \qquad f \qquad \frac{e}{2\ n} \qquad \frac{1}{2}\nabla \qquad \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} \qquad \frac{e}{2\ n} \qquad \frac{2\quad e}{2} \qquad 0 \qquad 2 \qquad 2 \tag{2.78}$$

Après quelques regroupements :

$$\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{e}{2} \qquad = \qquad \frac{3}{2}^{2} \qquad \frac{e}{2} \qquad \triangle \qquad \triangle \qquad \frac{e}{2\ n} \qquad \frac{1}{2}\nabla \qquad \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} \qquad \frac{e}{2\ n} \qquad \frac{2\quad e}{2} \qquad 0 \qquad 2 \qquad 2 \tag{2.79}$$

Après quelques simplifications :

$$= \quad \triangle \quad \parallel \triangle_{\parallel} \quad \frac{2}{3} \quad f \quad {}^{2}$$
$$\frac{1}{i}\frac{}{3} \quad \nabla \quad \parallel \quad \parallel \quad \frac{1}{i}\frac{e}{2}^{2}\frac{10}{3} \tag{2.80}$$

2.12 Finalisation du modèle

Notre idée de la modélisation n'est pas de prendre toute la physique disponible dans ces équations, mais de prendre les termes nécessaires et suffisants pour modéliser dans un premier temps l'instabilité de déchirement magnétique en géométrie slab, puis dans un second temps l'instabilité de déchirement magnétique avec une turbulence d'interchange en géométrie cylindrique. Le choix de cette turbulence est motivé par sa simplicité de mise en oeuvre et d'analyse et également par son caractère général. Il existe toute une famille d'instabilité présente dans le tokamak à cause du gradient de pression opposé à la courbure. L'interchange représente le cas le plus général de cette famille.

2.12.1 Modèle pour l'instabilité de déchirement magnétique

Dans le cadre de la modélisation de l'instabilité de déchirement magnétique, nous négligerons la pression. Le terme de la pression normalisée dans la loi d'Ohm est petit devant le potentiel scalaire normalisé à cause du coefficient $_{f}$ 0 ^{2}. Négliger la pression nous permettra de rester au plus près de la théorie des îlots magnétiques que nous souhaitons analyser. Dans l'équation de vorticité, nous pouvons négliger le terme de courbure pour les mêmes raisons. Dans ce cadre le modèle devient :

$$= \quad \nabla_{\parallel} \quad \parallel$$
$$\triangle \quad \triangle \quad = \nabla_{\parallel} \parallel \triangle \quad \triangle \tag{2.81}$$

Nous allons faire évoluer une fluctuation autour d'un équilibre supposé résolu. Les variables de l'équilibre sont invariables selon . Ce modèle sera utilisé en D, nous simplifions alors les opérateurs parallèles. L'équilibre de la loi d'Ohm correspond à une variation de flux magnétique balancée par la résistivité. Pour l'équation de vorticité, l'équilibre est celui de Grad-Shafranov Eq.(2.21). Cependant, les opérations réalisées sur cette équation relève de la contrainte de l'équilibre : nous pouvons donc avoir n'importe quel équilibre magnétique, c'est en fait la dimension parallèle qui compensera et résoudra cet équilibre : $_{\parallel} = \quad _{\parallel}$. Nous notons la perturbation de courant parallèle : $_{\parallel} = \quad _{\parallel}$ où est le courant d'équilibre et $_{\parallel}$ est le courant

total. Il n'y a pas de déchirement de flux de plasma dans notre système : $= 0$ et $=$ [27].

$$= \quad \parallel \tag{2.82}$$

$$= \quad \parallel \quad \triangle \tag{2.83}$$

$$= \triangle \tag{2.84}$$

où nous introduisons la vorticité .

2.12.2 Modèle pour l'instabilité de déchirement magnétique avec turbulence.

Nous avons développé le modèle pour deux cas de températures ioniques. Nous nous fixons ici au cas où la température ionique est nulle. Nous souhaitons garder dans ces équations le minimum pour mettre en présence les phénomènes physiques que nous voulons étudier. Nous gardons le modèle précédent Eq.(2.82, 2.83, 2.84) pour simuler l'instabilité de déchirement magnétique. Nous devons tenir compte des fluctuations de pression et de la courbure pour introduire un mécanisme d'interchange.

$$\begin{aligned} &= \nabla_{\parallel} \quad \frac{e}{i} \quad \parallel \\ &= \nabla_{\parallel} \quad \parallel \quad \frac{2 \quad e \quad 2}{2} \quad \triangle \\ &= \quad \triangle \quad \parallel \triangle \parallel \quad \frac{2}{3} \quad f \quad \frac{2}{\parallel} \\ &\quad \frac{1}{i} \frac{}{3} \quad \nabla_{\parallel} \quad \parallel \quad \frac{1}{i} \frac{e}{2}^{2} \frac{10}{3} \\ &= \triangle \end{aligned} \tag{2.85}$$

Mais il reste deux termes dans l'équation de pression qui peuvent apporter d'autres phénomènes indésirables. L'effet Joule, $\frac{2}{3} \quad f \quad \frac{2}{\parallel}$ peut par exemple développer une instabilité thermique si nous considérons le couplage entre les fluctuations magnétiques et les fluctuations de résistivité avec une résistivité fonction de la température $= \quad \frac{3}{2}$ [34]. Ce terme est aussi fonction de $\quad f$ ce qui le rend faible devant le reste de l'équation. Nous nous en passerons donc. Le second terme de l'équation que nous souhaitons éviter est le Laplacien parallèle de la pression. Il n'y a pas de raison directe pour retirer ce terme. Il est responsable de l'aplatissement du gradient de pression à l'intérieur de l'îlot et permet également de réduire le niveau de turbulence. Il est donc partie prenante dans la dynamique que nous souhaitons étudier. De plus, la valeur de $\parallel$ est supérieur de 6 ordres de grandeur à . Mais si nous

considérons le terme diffusion diamagnétique $\frac{}{3}\ \nabla_{\parallel}\ _{\parallel}$, il peut impliquer le même effet. Nous reprenons la loi d'Ohm avec ses temps caractéristiques : . Nous pouvons négliger l'aspect dynamique de l'évolution de la ligne de champ et considérer une évolution quasi-statique du courant $_{\parallel}$ le long du gradient parallèle. Nous remplaçons alors ce courant dans l'équation de la pression pour faire apparaitre le terme diamagnétique de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{}{3}\ \nabla_{\parallel}\ _{\parallel} \quad & \frac{1}{_i}\frac{}{3}\nabla_{\parallel}\ \nabla_{\parallel}\ \frac{e}{_i} \\ & \frac{e}{_i^2}\frac{}{3}\nabla_{\parallel}\ \nabla_{\parallel} \quad \frac{1}{_i}\frac{}{3}\nabla_{\parallel}\ \nabla_{\parallel} \end{aligned} \tag{2.86}$$

Nous remarquons que le terme diamagnétique contient une forme de Laplacien parallèle. Les effets créés par le Laplacien parallèle sont donc pris en compte dans le terme diffusif diamagnétique. Nous pouvons alors simplifier notre système et obtenir :

$$= \nabla_{\parallel}\left(\frac{f}{\quad}\quad\right)\quad _{\parallel} \tag{2.87}$$

$$= \nabla_{\parallel}\ _{\parallel}\quad _1\quad \triangle \tag{2.88}$$

$$= \quad \triangle \quad {}^2\nabla_{\parallel}\ _{\parallel}\quad _2 \tag{2.89}$$

$$= \triangle \tag{2.90}$$

Où nous avons opéré un changement de notation : ${}^2 = \frac{1}{_i}\frac{}{3}\quad f$, $_2 = \frac{e}{_i}\frac{^2}{^2}\frac{10}{3}\quad f$ et $_1 = \frac{^2\ _e\ ^2}{^2}$

Pour comparaison, nous reprenons ici le modèle original Hazeltine et al. [25], avec $= 0$ et la vitesse parallèle $= 0$:

$$\nabla\ _{\parallel} = \ _{\parallel}\quad \nabla_{\parallel}$$

$$\nabla\ _{\parallel}\ _{\parallel} \qquad = 0$$

$$= \qquad \nabla\ _{\parallel}\ _{\parallel} - \triangle$$

avec $= \frac{1}{2\ _i}$, $= \frac{e}{_2}$. Même si nos notations et normalisation sont un peu différentes, nous retrouvons le même modèle. Le terme de est absent dans la courbure de l'équation de pression car nous avons fait le choix de ne pas prendre en compte les variations de en fonction du rayon. Le terme $\frac{1}{2}\ \triangle$ est également absent de

notre modèle car nous avons défini les vitesses de dérive à l'ordre minimal. Ce terme apparaît si l'on tient compte des effets résistifs à la Sec.(2.7) dans l'Eq.(2.16).

Chapitre 3

Description de MOA

3.1 Description générale

Le problème que nous nous sommes posé ici présente une difficulté numérique : la disparité des échelles des phénomènes que nous souhaitons mettre en présence. La turbulence contient des phénomènes rapides sur de petites échelles tandis-que les effets MHD sont lents et larges. Nous sommes donc contraint de réaliser des simulations avec un large spectre de fréquences spatiales et temporelles.

Le code MOA (Magnetic Alfvénic Organisation) résout des équations aux dérivées partielles couplées à valeur initiale. Il va nous permettre de simuler l'interaction entre l'instabilité de déchirement magnétique et la turbulence en $3D$ cylindrique. Ce nouveau code regroupe les expertises acquises à travers différents codes développés par Magali Muraglia et Olivier Agullo. Le développement de cet outil se poursuit encore en gardant à l'esprit une idée forte : le code doit rester de taille humaine. La physique ne peut se faire sans la compréhension des outils de mesure. Dans ce contexte, mon apport numérique principal à MOA concerne la parallélisation. Nous avons également développé le passage du code vers la géométrie 3D cylindrique, implémenté de nouveaux diagnostiques sur la détection de la séparatrice, son activité et la mesure de la taille d'îlots principaux et secondaires. MOA a été amélioré en passant à des sorties standardisées en HDF5. Toutes ces modification ont été testées via des tests numériques et physiques. Nous détaillons ici la description de MOA , sa parallélisation : intermédiaire en terme de nombre de processeurs 00, mais efficace en "speedup" et enfin sa validation physique et numérique. Le langage utilisé est le Fortran 90 [8].

3.2 Schéma numérique

MOA dans sa version la plus utilisée, calcule l'évolution de trois perturbations initiales dans un espace 3D, sur des équilibres prédéfinis et au travers d'équations non linéaires couplées. MOA dispose de deux géométries : la géométrie cartésienne pour réaliser des simulations dans l'approximation slab et la géométrie cylindrique. Cependant, les simulations cylindriques ne peuvent simuler qu'une couronne $_0$ $_0$, le point $= 0$ n'est pas défini pour sauver les opérateurs $\frac{1}{}$. Dans la suite de ce chapitre, nous confondons les variables et pour plus de légèreté dans les notations. Chaque opérateur impliquant possède son homonyme impliquant .

L'espace 3D est semi-spectral pour les parties linéaires du calcul : espace réel pour la direction , espace de Fourier pour les directions , . Les termes non linéaires sont calculés dans l'espace réel pour les trois directions de l'espace. Ce passage entre l'espace semi-spectral et l'espace réel se fait avec un algorithme de (Fast Fourier Transformation) et (Fast Fourier Transformation inverse). Le calcul des opérateurs et $_2$ est réalisé avec une différence finie centrée d'ordre 2 [13]. Les dérivées en , sont calculées dans l'espace de Fourier par les opérations $= = \frac{2\ m}{}$, $= = \frac{2\ n}{}$. Le Laplacien perpendiculaire $\triangle$ est calculé en semispectral par l'algorithme $\triangle = {}^2 \quad {}^2 \quad {}^2$. L'inversion du laplacien est réalisée au moyen d'un tri-solver semi-spectral également [47]. L'algorithme de Runge Kutta d'ordre 4 [47] gère l'avancement temporel de manière explicite. Le choix de l'explicite a été fait pour garder une simplicité de modification des équations du code. Les termes non-linéaires (crochets de Poisson : $=$) sont traités avec la méthode Arakawa [2]. Il s'agit d'une méthode qui conserve les variables quadratiques, c'est à dire l'énergie. Dans la pratique, le crochet de poisson est calculé par la moyenne de trois schémas de différence finie d'ordre 2 mettant en jeu le carré de points autour du point de calcul . Cette méthode ne peut être appliquée que dans l'espace réel.

MOA contient un déaliasing désactivable du tiers supérieur des modes en et en . Ces modes sont mis à zéro manuellement à chaque de l'espace spectral à l'espace réel. L'utilisation de la a tendance à produire des erreurs qui s'accumulent aux petites échelles spatiales et qui se propagent par la suite à tous les modes. La troncature du tiers supérieur de l'espace de Fourier permet d'éliminer ces erreurs et d'éviter leur propagation [13, 47].

Les conditions de bord de la boîte de simulation sont périodiques pour les deux directions spectrales , . La direction radiale propose pour chaque champ une con-

dition de bord point nul $= 0$, ou de dérivée nulle $= 0$. Le choix de la condition de bord peut-être fait pour chaque champ et pour chaque bord.

3.3 Parallélisation

Le principe de parallélisation consiste à réaliser un partage du calcul ou d'éléments du calcul par plusieurs processeurs. le temps de calcul, ou une fraction du temps de calcul est alors divisé par le nombre de processeurs. Cependant, parallèlement au gain en temps réalisé, il faut inclure le coût de communication : les processeurs doivent échanger des données entre eux pour réaliser les opérations partagées. La balance entre le temps de communication et la division du temps de calcul définira l'efficacité de la parallélisation. Nous utilisons la librairie MPI [22].

La parallélisation de MOA impose un choix : certaines opérations ne tolèrent pas toutes les directions de parallélisation. Les transformées de Fourier sont des opérations non locales selon et tandis que l'inversion du laplacien est non locale selon . Faire le choix d'une direction de parallélisation implique donc qu'une partie du code ne sera pas parallélisé. Paralléliser selon nous oblige à traiter l'inversion du Laplacien sur un seul processeur et paralléliser selon et impose de faire les et sur un seul processeur. Un choix alternatif consiste en l'introduction d'un changement de parallélisation entre les opérations pour garder 100% du code parallélisé. Ce changement s'appelle une transposition.

Ce choix alternatif est justement celui qui nous permet d'atteindre notre but : une parallélisation très efficace en acceptant un nombre de processeurs intermédiaire. On peut alors décrire le schéma d'avancement d'un pas de temps du code Fig.(3.1). Chaque numéro représente une étape du pas de temps :

1. Calcul des termes linéaires dans l'espace semispectral parallélisé en YZ : $\|$.
2. Transposition T vers l'espace semispectral parallélisé en X : $\|$.
3. Transformée de Fourier inverse vers l'espace réel parallélisé en X : $\|$.
4. Calcul des termes non-linéaires dans l'espace réel parallélisé en X : $\|$.
5. Transformée de Fourier vers l'espace semispectral parallélisé en X : $\|$.
6. Transposition inverse T^{-1} vers l'espace semispectral parallélisé en YZ : $\|$.

La parallélisation peut se résumer sur le schéma Fig.(3.2). On y retrouve, en 2D, les deux parallélisations, selon ou . La transposition y est representée par

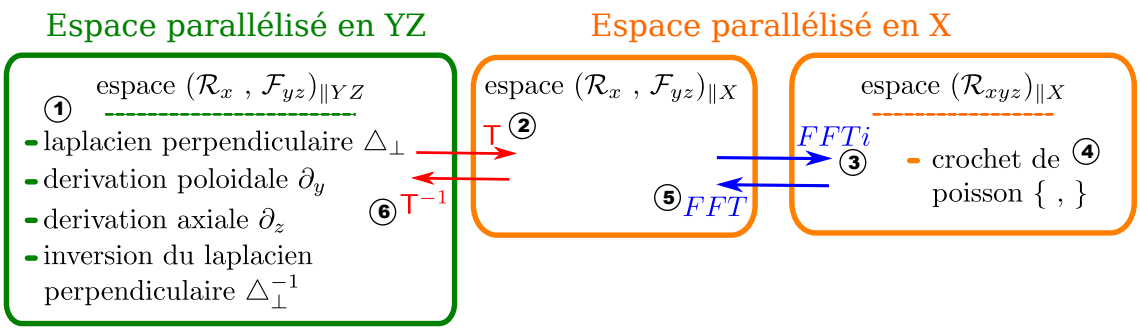

FIGURE 3.1 – Etapes d'un pas de temps.

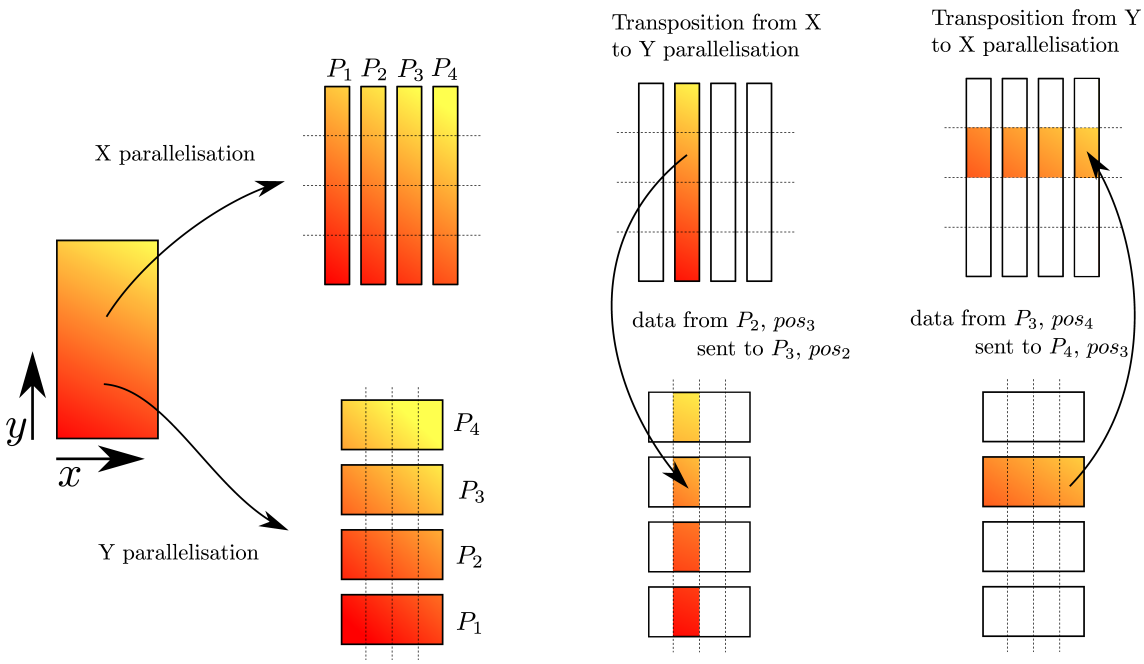

FIGURE 3.2 – Illustration de la parallélisation et de la transposition sur 4 processeurs.

une communication parmi les ^{2} qu'elle requiert (: nombre de processeurs) pour chaque direction (vers , ou vice versa). Chaque processeur a un numéro . La difficulté de la transposition réside dans l'organisation des données avant et après le transfert. Ces données sont réparties périodiquement dans chaque processeur : le processeur envoie les = points de chaque colonne à partir du point des = lignes à partir de la ligne au processeur . Le processeur range les points recus de à partir de la ligne et de la colonne . De plus la répartition de $\frac{}{2}$ mode poloïdaux en ^{n} processeurs induit forcément des charges inégales entre ces derniers : et dépendent du numéro du processeur . Pour réaliser les transpositions, nous avons développé deux méthodes : une méthode classique et une méthode originale.

La méthode classique est plus facile à mettre en place et est la plus utilisée parmi

les numériciens. Elle est composée de trois étapes :

- Chaque processeur prépare matrices de transfert 1D qui contiennent la concaténation des données à envoyer à chaque processeur . Ces matrices de départ sont de taille
- Chaque processeur envoie ses matrices de départ vers les autres processeurs dans une autre matrice 1D d'arrivée de même taille avec l'instruction MPI : MPI_ALLTOALL.
- Chaque processeur réarrange les données des matrices d'arrivée 1D dans les matrices de calcul.

La méthode originale est plus difficile à mettre en place, mais permet d'économiser les étapes de réarrangement. Il faut à l'initialisation que chaque processeur crée vecteurs de départ qui correspondent à la sequence des positions des données qu'il enverra à chaque processeur. De la même manière il faut que chaque processeur crée vecteur d'arrivée qui correspond à la sequence des positions de rangement des données. Ces vecteurs sont une liste de positions dans une matrice. Ainsi transférer ce vecteur de départ vers le vecteur d'arrivée permet de transférer les données sans passer par un réarrangement car celui-ci est déjà prévu dans le transfert. De plus chaque vecteur est adapté pour chaque envoi, il n'y a pas d'envoi de données inutiles comme avec la majoration de la taille des matrices de transfert de la méthode précedente. Nous n'avons plus alors qu'une étape :

- Chaque processeur envoie ses vecteurs de départ vers les autres processeurs dans un autre vecteur d'arrivée avec l'instruction MPI : MPI_ALLTOALLW.

La première méthode est plus largement utilisée dans les codes numériques. La seconde méthode ne nécessite pas d'étape de réarrangement des données : elle accroit d'environ 5% la vitesse d'exécution du code par rapport à la méthode classique. Mais la subroutine principale utilisée, MPI_ALLTOALLW, a présenté des problèmes de fuite de mémoire selon les machines et les distributions MPI, probablement du au fait que cette instruction MPI n'est pas assez utilisée dans la communauté scientifique. Ce désintéressement de cette subroutine provient de la difficulté de mise en oeuvre et de l'intérêt relatif qu'elle apporte. MOA possède cependant les deux méthodes, au choix de l'utilisateur.

Une troisième méthode de parallélisation est également disponible. Mais elle restreint l'utilisation de MOA à des simulations $3D$ linéaires en . Les modes de la direction axiale sont répartis sur les processeurs. Nous évitons alors complètement la transposition mais le nombre de processeur est limité à (le nombre de modes axiaux). Comme est un multiple de : la répartition de la charge sur les

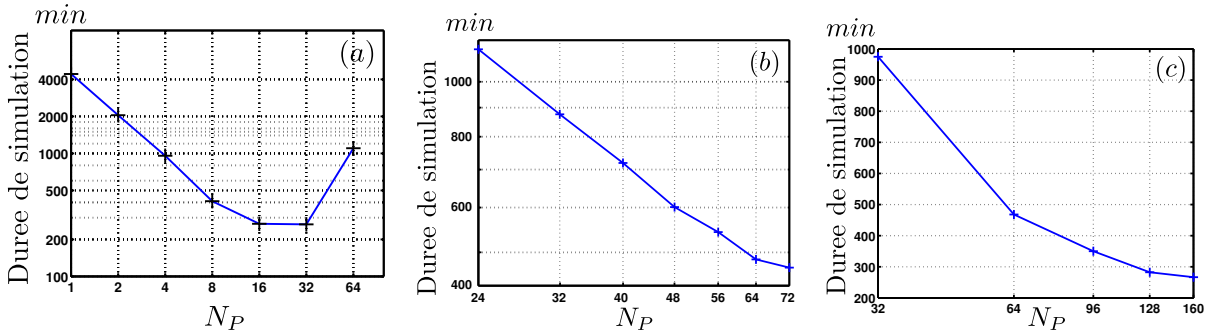

FIGURE 3.3 – Temps de simulation du nombre de processeurs pour des simulations D ou $3D$ sur différentes machines
(a) : 0 , 2 champs 2D, 500000 itérations, sur Nestor, 8 procs/noeud.
(b) : , 3 champs 3D, 50000 itérations, sur Juelich, 8 procs/noeud.
(c) : , 3 champs 3D, 50000 itérations, sur Vargas, 32 procs/noeud.

processeurs n'est pas équilibrée. En pratique il faudra soit prendre comme une fraction de ou prendre un noeud supplémentaire pour équilibrer la charge.

3.4 Efficacité de MOA

MOA a été porté sur plusieurs clusters Nestor@Westgrid (8 procs/noeud, jonction en InfiniBand) au canada, sur le HPCFF@Juelich (8 procs/noeud, jonction en InfiniBand) en Allemagne et sur Vargas@Idris (32 procs/noeud, jonction en InfiniBand) en France. La Fig.(3.3) donne des exemples de temps de calcul par rapport au nombre de processeur. L'efficacité de MOA est calculée par rapport au temps de calcul $_m$ avec le plus petit nombre de processeur $_{m\ n}$: $_{ff} = \frac{}{_i}$. Cette efficacité dépend plus du nombre de noeud que du nombre de processeur : les coûts en temps de communication de la transposition explosent avec un trop grand nombre de noeuds. Cependant ces coûts sont quasiment nuls à l'intérieur d'un noeud, générant une efficacité proche de 100% à l'intérieur d'un noeud, semble alors peu intéressant d'implémenter une partie OpenMP dans la parallélisation. Il est important pour utiliser MOA, de cibler des clusters avec un grand nombre de processeurs par noeud. Le graphique d'efficacité, Fig.(3.4), montre que l'efficacité est très dépendante du calcul à effectuer. La parallélisation révèle toute son efficacité pour les problèmes $3D$: nous pouvons monter à une centaine de processeurs sur des machines standardes (8 procs par noeud) en restant au dessus des 80% d'efficacité, limite générale d'accès aux centres de calcul.

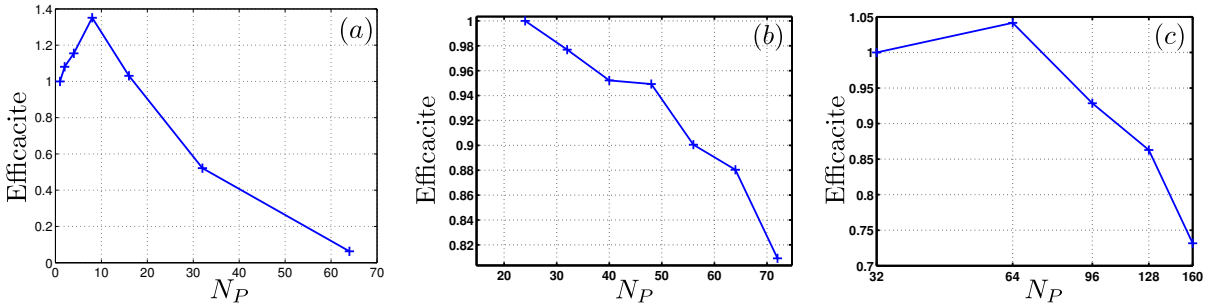

FIGURE 3.4 – Efficacité en fonction du nombre de processeurs pour des simulations D ou $3D$ sur différentes machines
(a) : 0 , 2 champs 2D, 500000 itérations, sur Nestor, 8 procs/noeud.
(b) : , 3 champs 3D, 50000 itérations, sur Juelich, 8 procs/noeud.
(c) : , 3 champs 3D, 50000 itérations, sur Vargas, 32 procs/noeud.

3.5 Tests numériques

Nous présentons ici des tests numériques sur la validité des opérateurs ou sur la stabilité de MOA.

3.5.1 Test de la parallélisation

Nous réalisons un test de parallélisation où MOA tourne sur un seul processeur avec et sans la librairie MPI, puis un autre test où MOA tourne sur un ou plusieurs processeurs avec la librairie MPI. Toutes ces simulations sont identiques.

3.5.2 Tests des opérateurs

Nous effectuons différentes comparaisons numériques concernant les opérateurs, la géométrie et la parallélisation. Certaines opérations dans MOA sont présentes avec leur inversion : $\triangle$, $\triangle^{1}$, FFT, FFT ^{1}, $\mathtt{T}$ et $\mathtt{T}^{1}$. Ces opérations sont testées en calculant d'abord l'opération directe sur une grille test comprenant plusieurs harmoniques déphasées puis l'opération inverse sur le résultat précédent. Nous comparons le résultat final à la grille initiale. Les opérateurs sont également testés à partir d'une grille test analytiquement solvable, comme la méthode Arakawa [2] qui a également été comparée à la méthode classique de calcul avec des différences finies d'ordre 2. Les résultats analytiques et numériques concordent.

3.5.3 Tests de résolution

Le schéma temporel de MOA est explicite. Nous avons donc une condition Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [13] qui conditionne la stabilité numérique selon la résolution

spatiale et la résolution temporelle. De manière générale, plus la résolution est élevée, plus nos résultats sont justes, jusqu'à une résolution suffisante pour laquelle la simulation est dite résolue. Augmenter la résolution ne change plus significativement le résultat. Mais augmenter la résolution a un double coût. Les simulations sont plus longues et en plus le pas de temps nécessaire pour respecter la condition CFL diminue. Il serait intéressant de connaître le pas de temps maximal pour lequel nous avons un résultat juste et une simulation la plus courte possible. Mais le calcul de la condition CFL dépend des équations simulées par MOA. En pratique, nous faisons des essais à différents pas de temps pour une résolution donnée. La Fig.(3.5) montre les taux de croissance d'une instabilité de déchirement magnétique pour différent pas de temps. Le modèle utilisé est celui de la Sec.(3.6.3). Nous y observons que les taux de croissance ne dépendent pas de , jusqu'à ce que la condition CFL ne soit plus satisfaite. Le passage à une condition CFL non satisfaite est très brutal. Ceci est du à l'ordre élevé du schéma temporel. Cela signifie que la limite de est facile à identifier et nous pouvons choisir au plus près de la limite.

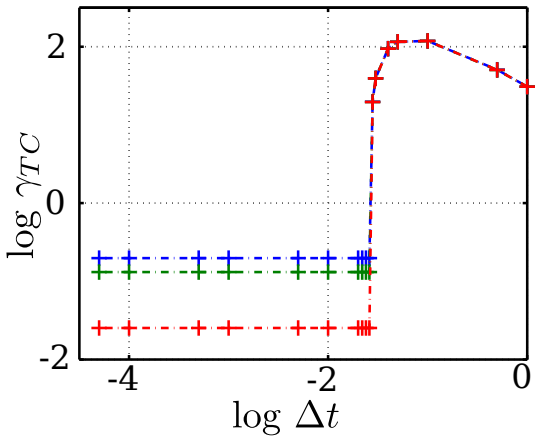

FIGURE 3.5 – Taux de croissance de l'instabilité de déchirement magnétique pour = 0 en bleu, = 0 en vert, = 3 0 en rouge en fonction de différents pas de temps.

La résolution spatiale conditionne la justesse du résultat. Nous présentons dans la Fig.(3.6) la résolution suffisante pour chaque mode avec le modèle de la Sec.(3.6.4). La Fig.(3.11) y est répétée pour plus de lisibilité. Cette résolution critique est calculée à partir de taux de croissance de référence, issus d'une simulation à haute résolution avec = 0 . Puis pour des valeurs croissantes de , nous notons pour chaque mode le premier pour lequel le taux de croissance à une erreur de moins de par rapport au taux de croissance de la référence. Nous concluons sur cette figure que les hautes résolutions sont nécessaires pour définir les simulations à faible taux

de croissance. De manière plus générale, la haute résolution est nécessaire pour discerner des phénomènes différents mais de même amplitude. Dans cet exemple, il y a confrontation entre les aspects diffusifs et l'instabilité d'interchange à $=$ comme nous pouvons le vérifier sur la Fig.(3.11).

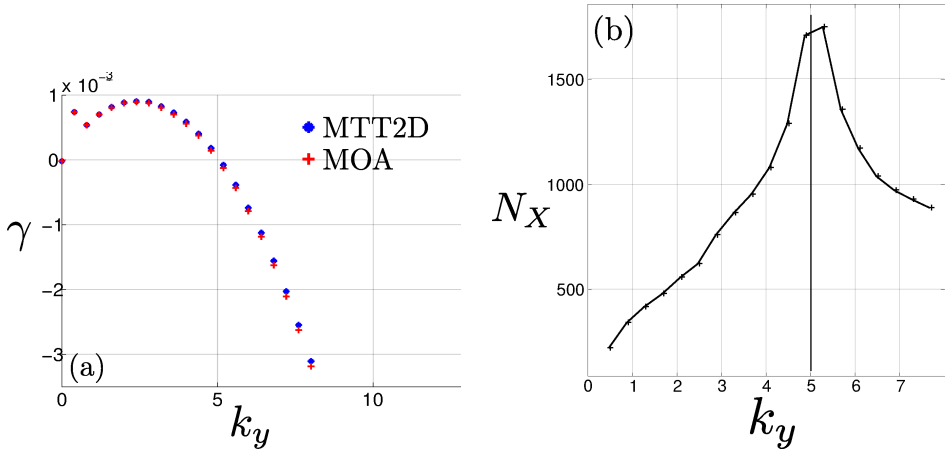

FIGURE 3.6 – (a) : Taux de croissance de l'instabilité de déchirement magnétique ($= 0$) et de la turbulence d'interchange (0).
(b) : Nombre de points nécessaires en X pour avoir une simulation résolue à de la simulation de référence à $= 0$, en fonction du nombre d'onde poloïdal .

3.6 Tests physiques

Nous allons ici présenter les résultats physiques connus retrouvés avec le code MOA. Les comparaisons se font avec les théories analytiques quand elle sont accessibles ou avec d'autres résultats numériques.

3.6.1 Equation de diffusion

La figure Fig.(3.7) présente les taux de croissance linéaires de l'équation de diffusion. Nous avons un accord avec moins de 0 03 d'erreur entre la simulation et la théorie. Le modèle utilisé est le suivant en géométrie slab :

$$= \triangle \quad \text{et} \quad {}_{ff} = \quad {}^{2} \quad {}^{2} \tag{3.1}$$

Nous profitons également de cette simulation pour estimer . En effet ${}_0 = 0$ car si $= 0$, ce n'est pas le cas de . Il s'avère que $= 0$ et devient rapidement négligeable avec l'augmentation de m.

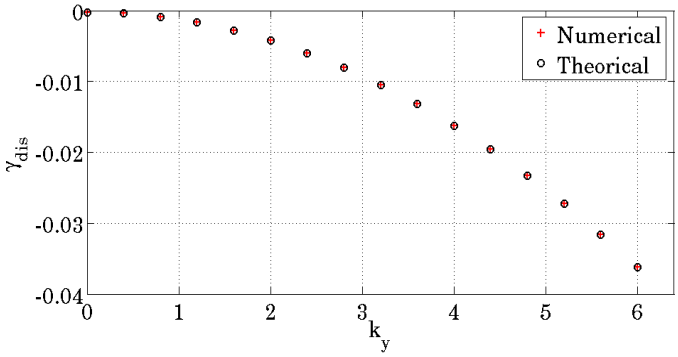

FIGURE 3.7 – Taux de croissance linéaire de l'équation de diffusion

géométrie slab, $3D_{mn}$	Linéaire	Paramètres diffusifs
$= \quad = \quad = \quad =$	$= 0^{2}$	$= 0^{3}$

3.6.2 Interchange électrostatique

La figure Fig.(3.8) présente les taux de croissance linéaires de l'instabilité d'interchange électrostatique. Nous avons un accord avec moins de 0 d'erreur entre la simulation et la théorie. Le modèle utilisé est le suivant en géométrie slab :

$$= \quad = \quad 1 \quad \triangle \quad = \quad 2 \quad 2 \quad \triangle \tag{3.2}$$

$$n = \frac{}{2 \quad 2} \quad 1 \quad 2 \quad \frac{2^{2}}{} \quad 2 \quad 2 \tag{3.3}$$

3.6.3 Instabilité de déchirement magnétique classique

La figure Fig.(3.9) présente les taux de croissance linéaires de l'instabilité de déchirement magnétique classique [5]. Nous avons un accord avec moins de 0 d'écart entre les simulations de MOA et de MTT2D [40]. Le modèle utilisé est le suivant en géométrie slab :

$$= \quad = \quad \triangle \quad \text{et} \quad = \quad \triangle \quad 3 \quad 2 \tag{3.4}$$

Ce modèle à également été exploité pour retrouver la loi d'échelle en du taux de croissance en choisissant $= 0$. Nous vérifions la relation suivante $=$

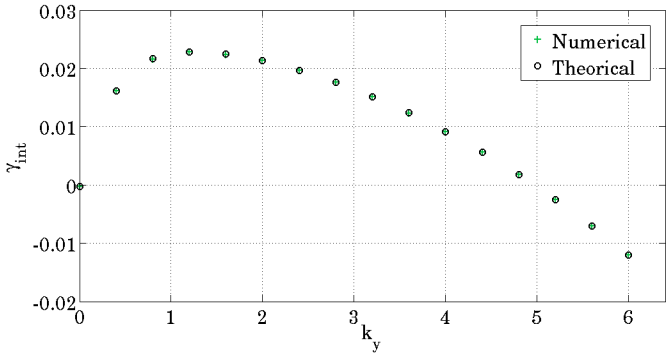

FIGURE 3.8 – Taux de croissance linéaire de l'instabilité d'interchange électrostatique

géométrie slab, $3D_{mn}$				Linéaire
=	=	=	=	= 0 ^{2}

Profil magnétique	Paramètres diffusifs
= = 0 3	= 0 ^{3} = 0 ^{3} = 0 ^{3}

Paramètre de courbure	Profils de pression :
$_1$ = $_2$ = 0 3	$_0$ = = 0 0 ^{2} = 0

^{3} sur la figure Fig.(3.10). La relation du taux de croissance ne suit plus la loi d'échelle pour élevé car certaines approximations ne sont plus valables dans le calcul de . Pour faible, c'est le manque de résolution qui nous empêche de poursuivre la loi d'échelle à des valeurs plus basses de .

3.6.4 Instabilité de déchirement magnétique en présence de turbulence interchange

Ce modèle permet de générer une instabilité de déchirement magnétique pour le mode $m =$ et une turbulence d'interchange pour les modes m . La figure Fig.(3.11) présente les taux de croissance linéaires de l'instabilité de déchirement magnétique classique et de la turbulence d'interchange electromagnétique. Nous avons un accord avec moins de 0 d'écart entre les simulations de MOA et de MTT2D. Le modèle utilisé est le suivant en géométrie slab :

$$= \quad _2 \quad _2 \quad ^2 \quad \triangle \tag{3.5}$$

$$= \quad _1 \quad \triangle \tag{3.6}$$

$$= \tag{3.7}$$

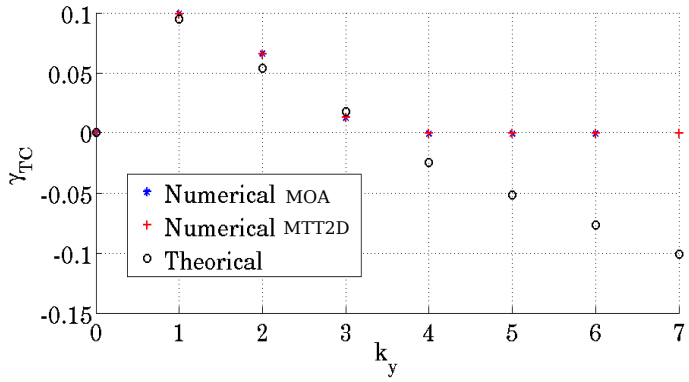

FIGURE 3.9 – Taux de croissance linéaire de l'instabilité de déchirement magnétique classique

géométrie slab, $3D_{mn}$				Linéaire
=	=	=	=	= 0 ^{2}

Profil magnétique		Paramètres diffusifs	
=	= 0 3	= 0 ^{3}	= 0 ^{3}

3.6.5 Stabilisation non-linéaire de l'instabilité de déchirement magnétique par des effets de viscosité.

Les résultats publiés par Coehlo [12] vont nous permettre de valider l'aspect cylindrique de MOA. Le modèle utilisé est celui de la Sec.(3.6.3) mais non linéaire et dans une géométrie cylindrique. Les variables contiennent un équilibre et une perturbation , le tout noté = .

$$= \qquad \triangle \qquad = \tag{3.8}$$

Le résultat principal de l'article concerne une stabilisation de l'instabilité de déchirement magnétique par des effets visqueux. Cette stabilisation est marginale et amène un comportement oscillant de , la pertubation du flux magnétique à la surface résonante. Cette mesure est relative à la taille de l'îlot magnétique comme nous le verrons dans la Sec.(4.6). Sur les graphiques de la figure Fig.(3.12), nous avons et = – le nombre de Prandtl. Le régime marginalement stable apparait en diminuant ou . De plus le phénomène est non linéaire car il n'apparaît qu'avec plusieurs modes.

Nous retrouvons en partie ces résultats figure Fig.(3.13). Le régime de devient oscillant si nous diminuons ou . La simulation non linéaire avec les modes 0 et 1 ne

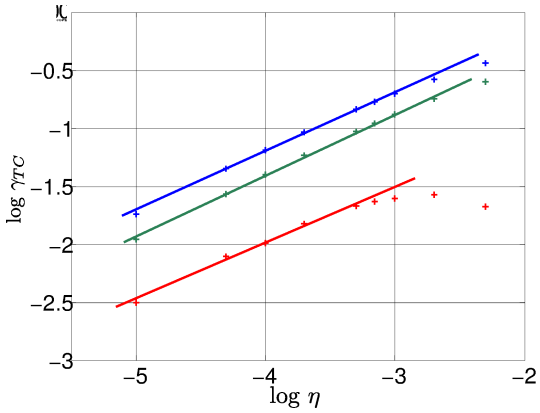

FIGURE 3.10 – Loi d'échelle en de pour = 0 en bleu, = 0 en vert, = 3 0 en rouge. Pour chaque cas, la pente est égale à 0 3

présente pas de régime oscillant. Mais nous ne pouvons avoir un régime marginalement stable car les valeurs de que nous utilisons sont trop élevées.

3.7 Conclusion

Notre code MOA nous permet de réaliser des simulations multi-échelles dans des temps raisonnables grâce à la parallélisation. Cet outil est facilement portable sur des clusters de petite ou moyenne envergure. La seule condition est la présence de jonction Infini Band entre les noeuds. L'efficacité de la parallélisation dépend de la taille des matrices de calcul mais aussi du nombre de processeurs par noeud qui est un critère déterminant pour le choix d'un cluster.

La physique des équations de MOA a été testé morceau par morceau, les aspects diffusifs d'abord puis la partie MHD au travers de l'instabilité de déchirement magnétique et enfin la turbulence avec l'instabilité d'interchange. La géométrie cylindrique a aussi été testée en retrouvant les résultats non-linéaires de Coelho [12].

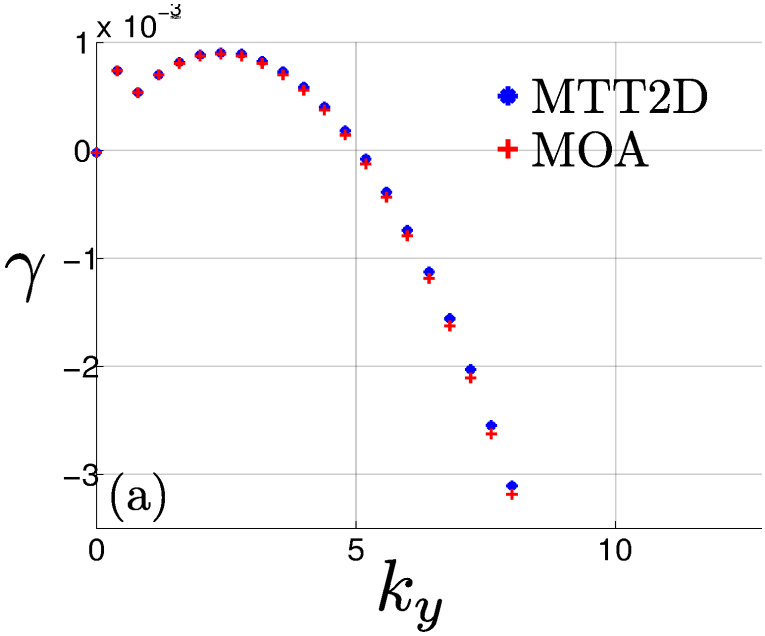

FIGURE 3.11 – Taux de croissance linéaire de l'instabilité de déchirement magnétique classique dans une turbulence d'interchange electromagnétique

géométrie slab, $3D_{mn}$				Linéaire
$= 0$	$=$	$=$	$=$	$= 0$ [2]

Profil magnétique		Paramètres diffusifs		
$=$	$=$	$= 0$	$= 0$	$= 0$

Paramètres de courbure		Profils de pression :		
$_1 =$	$_2 = 0\ 3$	$_0 =$	$= 0\ 0$	$^2 = 3\ 33\ 0$ [3]

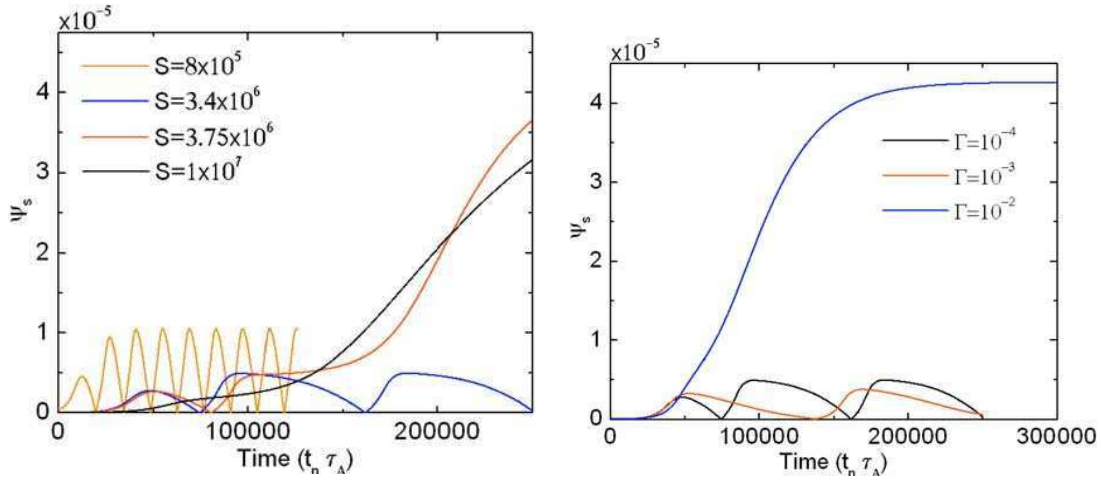

FIGURE 3.12 – Pertubation du flux magnétique à la surface résonante en fonction du temps pour différent paramètres diffusifs. Extrait de [12].

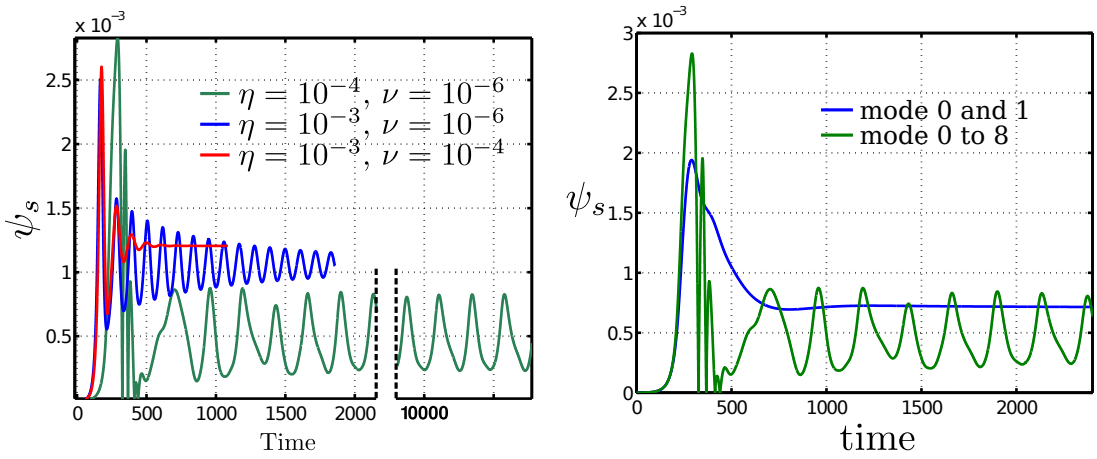

FIGURE 3.13 – Pertubation du flux magnétique à la surface résonante en fonction du temps pour différent paramètres diffusifs

géométrie cylindrique, $3D_{mn}$	Non linéaire
$= 0$ $=$ $=$ ou $_0 = 0$ $= 0$	$=$

Profil magnétique	Paramètres diffusifs
$_0 =$ $_1 = 0$ 3 $= {}_0$ $=$	$= 0$ ^{3}ou 0 $= 0$ ^{3} ou 0

Le nombre de modes poloïdaux effectifs après le déaliasing est $m = 0$ 3 ou $m = 0$

Chapitre 4

Effets des fluctuations de l'équilibre magnétique sur l'instabilité de déchirement classique

4.1 Introduction

Un îlot magnétique est issu d'une modification topologique du champ magnétique : la reconnexion. Elle a lieu spécifiquement sur des surfaces magnétiques résonantes et isole des tubes de plasma du reste du tokamak, ainsi que l'illustre la Fig.(4.1). Les îlots magnétiques ont différentes représentations selon la géométrie utilisée, celle-ci sont détaillées sur la Fig.(4.2).

La caractéristique importante d'un îlot magnétique est sa taille notée qui représente son extension radiale. La ligne de champ qui délimite l'îlot magnétique est appelée la séparatrice, en pointillés sur la Fig.(4.3) car elle délimite le plasma isolé dans l'îlot du plasma à l'extérieur. Le point X correspond au croisement de la séparatrice et le point O au maximum du flux magnétique dans l'îlot.

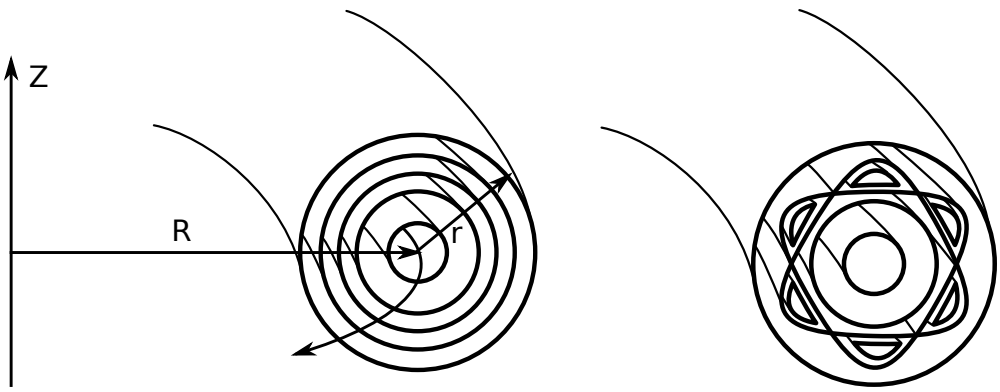

FIGURE 4.1 – La reconnexion de surface magnétique forme des îlots.

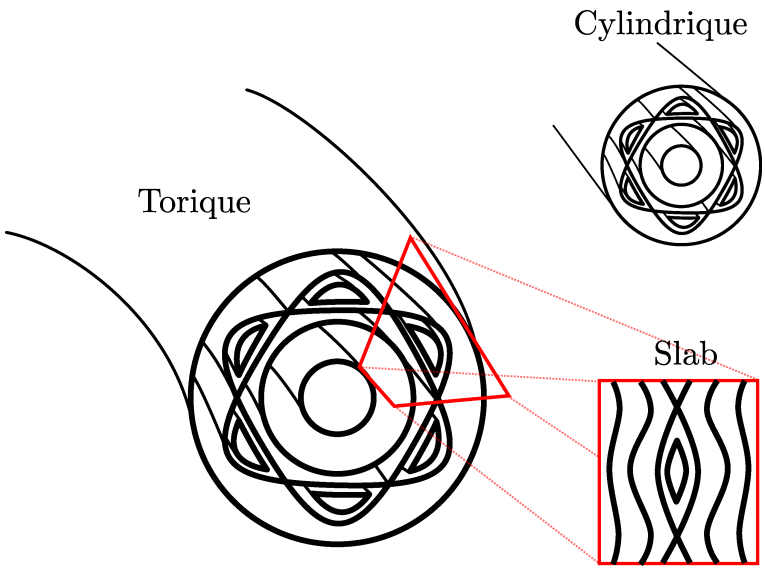

FIGURE 4.2 – Les îlots magnétiques vus sous différentes géométries.

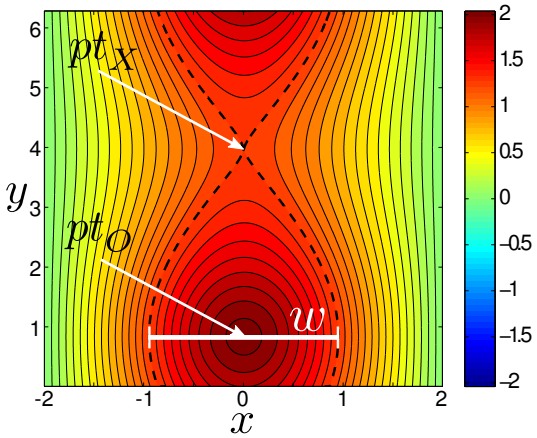

FIGURE 4.3 – Exemple de courbe de niveau du flux magnétique total en géométrie slab
La séparatrice est en pointillés noirs.

De fait, la détection expérimentale des îlots magnétiques part d'un constat simple : nous n'avons pas accès aux mesures magnétiques à l'intérieur du plasma. Mais il y a tout un faisceau d'indices indirects qui permettent de déduire la taille et la position de ceux-ci. Les îlots magnétiques ne se développent que sur des harmoniques poloïdales basses et donc sur des surfaces rationnelles d'ordre bas : typiquement, = ou 3. Nous savons également que la fréquence de rotation des îlots magnétiques est de l'ordre du . Si nous supposons que la forme de l'îlot magnétique se répercute sur le bord du plasma, une mesure conjointe des fluctuations magnétiques poloïdales et toroïdales par des bobines de Mirnov nous permet de vérifier la présence d'îlots magnétiques. Les expérimentateurs extraient des signaux des bobines de Mirnov la fréquence et l'hélicité de la fluctuation, puis ils combinent les informations : si l'hélicité et la fréquence correspondent, c'est un indice de la présence d'un îlot magnétique. A partir de ces données, les expérimentateurs peuvent aussi reconstituer le champ magnétique du tokamak. En supposant la présence d'un îlot magnétique, ils jouent sur les paramètres de la reconstitution (dont) pour avoir une correspondance entre la reconstitution et les fluctuations magnétiques mesurées au bord du plasma [9]. Mais cette méthode convient plus à un traitement post-expérimentation car la modélisation du champ magnétique à partir des données est longue : la rapidité de la mesure de et de la localisation de l'îlot est un point clef pour le contrôle de celui-ci. Une autre méthode, avec les mêmes données, suppose un lien direct entre les fluctuations des bobines de Mirnov et la taille de l'îlot magnétique, mais cette méthode impose une calibration initiale [36]. Nous retrouvons une rapidité de mesure qui est en adéquation avec le contrôle de la taille des îlots, mais la fiabilité de cette méthode n'est pas la meilleure. La technique la plus utilisée aujourd'hui est la mesure de profil de température à l'ECE (Emission Cyclonique Electronique). Il a été démontré que le profil de température s'aplatissait à l'intérieur de l'îlot magnétique pour des îlots suffisamment larges [15]. Cet aplatissement apparait sur le profil de température à une fréquence de l'ordre du , à cause des passages successifs des îlots magnétiques lors de la rotation des îlots : le profil est aplati au point O, mais pas au point X. La largeur et la position de l'aplatissement correspondent à celles de l'îlot [44, 11].

Les îlots magnétiques sont aussi étudiés analytiquement. L'article de Furth et Killeen [18] en 1963 présente un premier calcul de l'instabilité de déchirement magnétique : le taux de croissance linéaire. Ce calcul a été repris depuis [5] et amélioré [45] pour déterminer différentes classes de déchirement magnétique selon la résistivité et la viscosité et amélioré encore en intégrant des profils magnétiques plus réalistes [39]. La résolution linéaire permet de définir le paramètre d'instabilité qui est devenu prépondérant dans toute les études théoriques qui suivirent. Ce calcul linéaire

pose également une méthode de résolution qui sera suivie dans toutes les extensions théoriques : Il s'agit de calculer le flux magnétique perturbé hors résonance avec un modèle idéal ($= 0$), de calculer localement l'évolution du flux magnétique à la résonance en tenant compte de la résistivité puis de raccorder les deux solutions. La solution idéale présente une discontinuité à la résonance qui est quantifiée par . Cette discontinuité disparaît dès lors que nous prenons en compte des effets résistifs prépondérants au niveau de la surface rationnelle d'ordre bas. Cette base de calcul sert alors pour les théories non-linéaires. On y retrouve le paramètre dans les modèles d'évolution de la taille d'îlot : les RE (Rutherford Equation) [49] et dans ses améliorations résumées dans [52], les GRE (Generalised Rutherford Equation). La valeur à saturation de la taille d'îlot est aussi proportionnelle à ce paramètre [63, 14, 37, 23, 4]. Toutes ces théories que nous citons ont un autre point commun : leur limitation aux petits îlots magnétiques. La technique de raccordement ne fonctionne que si nous considérons que le raccordement à lieu proche de la résonance, et donc que l'îlot est petit. En pratique, ce n'est même pas la taille de l'îlot magnétique qui sert de repère, mais le paramètre d'instabilité .

Numériquement aussi, il existe de nombreuses études sur les îlots magnétiques. Une première partie des résultats sert à valider les théories mais il y a aussi toute une partie exploratoire sur les îlots magnétiques à élevé, c'est-à-dire où les théories ne sont plus valables. Dans ce cadre, il est montré une dynamique spécifique du point X qui s'effondre en deux point Y en créant ainsi une couche de courant entre les îlots [61, 33]. Si nous augmentons encore le paramètre , des plasmoïdes apparaissent sur cette couche de courant secondaire et coalescent avec l'îlot principal [33, 50].

Malgré tout ce travail accompli, il reste un espace non élucidé qui correspond aux régimes de fonctionnement des tokamaks. Les GRE sont des théories qui sont regroupées sous une série d'hypothèses que nous appelons "petit îlot". Or les îlots des tokamaks sont larges : au moins quelques centimètres pour pouvoir être détectés entre les canaux de l'ECE jusqu'à un quart de petit rayon. L'utilisation des théories "petit îlot" avec des données d'îlot large a donné des résultats probants [60] et les expérimentateurs parviennent à contrôler et à détruire les îlots magnétiques dont l'évolution est dangereuse pour le confinement, avec l'ECRH (Electron Cyclotron Resonance Heating), c'est-à-dire par injection de courant sur l'îlot [11]. Nous avons là une incohérence entre les théories et l'expérience, malgré leur bon accord : les théories ne sont pas sensées être valides.

De plus, le paramètre n'est apparemment pas suffisament élevé dans les tokamaks pour voir apparaître les nappes de courant secondaires : les rapports cycliques des signaux de l'ECE n'ont pas montré leur présence. Il y a donc toute une plage

de valeur de qui n'est pas explorée : hors de la validité des théories, mais en deça des effets de couche de courant secondaire. Et c'est justement la plage où se situent généralement les îlots de tokamak. C'est aussi le cadre dans lequel nous nous placerons en utilisant néanmoins des modèles analytiques simplifiés par rapport aux réalités expérimentales.

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler les résultats analytiques relatifs au taux de croissance de l'instabilité magnétique [5] et à la taille de l'îlot à saturation [14]. Il est nécessaire de présenter ces calculs, An.(F) et An.(4.7.1) pour appréhender correctement et bien cerner les limitations. Les simulations numériques nous permettront de voir à quel point l'approximation "petit îlot" pose problème et quels sont les éléments du problème que les calculs négligent. Nous utiliserons également les simulations numériques pour remettre en cause le lien entre les fluctuations magnétiques et la taille d'îlot. Ce lien, valable dans le cadre "petit îlot", est utilisé dans les théories et permet leur utilisation dans un cadre expérimental. Nous expliquerons aussi dans quelle mesure nous pouvons utiliser les théories actuelles d'évolution de taille d'îlot au-delà de leur domaine de validité théorique. Enfin nous élargissons notre étude numérique aux effets hors du cadre "petit îlot" : la coalescence des îlots [5] et l'effondrement du point de reconnexion en nappe de courant [33] pour voir leur impact sur .

Le problème de l'instabilité de déchirement magnétique qui génère un îlot est posé dans sa version la plus simple, à l'instar des théories que nous détaillons. Il s'agit ici d'une géométrie slab D et d'un profil magnétique symétrique présentant un seul déchirement magnétique en où l'îlot magnétique prend naissance. La pression est omise du système qui passe à deux équations. Nous n'introduisons aucune courbure. Nous obtenons alors le système le plus simple pour générer une instabilité de déchirement magnétique [5] :

$$= \nabla_{\|} \tag{4.1}$$

$$= \nabla_{\|} \qquad \triangle \tag{4.2}$$

4.2 L'instabilité de déchirement classique

L'instabilité de déchirement magnétique est une instabilité alfvénique et résistive. Les perturbations électromagnétiques se propagent le long des lignes de champ magnétique. Mais celles-ci sont amorties car elles ne sont pas forcément en phase avec

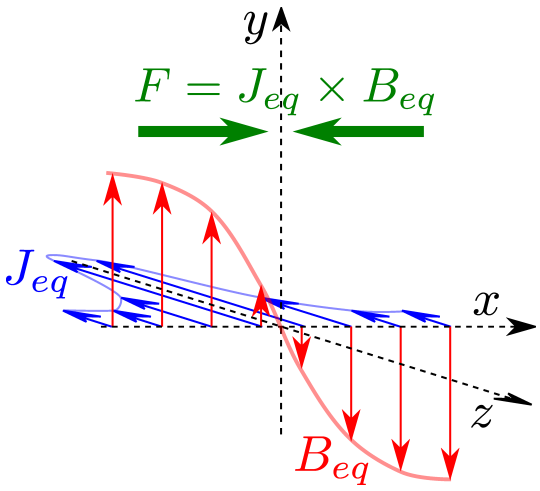

FIGURE 4.4 – Schéma du déchirement magnétique

l'hélicité de la surface sur laquelle elles sont nées. Ne subsiste sur chaque surface magnétique que des perturbations hélicoïdales de même hélicité que le champ magnétique : c'est l'alfvénisation des modes. Dit autrement, la valeur de fixe l'hélicité de la surface magnétique, et seules les pertubations telles que $\frac{m}{n} =$ seront présentes dans le système linéaire, avec m le mode poloïdal et le mode toroïdal. La perturbation résonante peut alors déclencher une reconnexion magnétique au travers des effets résistifs [5, 6, 18]. Si nous posons un déchirement magnétique illustré sur la Fig.(4.4), la fluctuation eletromagnétique engendre des mouvements de plasma selon la force $= \mathbf{J}$ $\mathbf{B}$. Ces mouvements conduisent à un pincement des lignes de champ autour de la résonance. Le mouvement du plasma entraine à son tour les lignes de champ magnétique vers la résonance [48]. Sur cette résonance, la résistivité n'est pas négligeable, et la compression des lignes de champ peut aboutir à une reconnexion : c'est-à-dire une modification topologique des lignes de champ [6]. A partir de cette reconnexion, il y a isolement d'une partie du plasma entre les lignes de champ reconnectées : c'est un îlot magnétique, tel que dessiné sur la Fig.(4.2slab).

4.3 La géométrie $3D$ mono-hélicité

Le modèle utilisé ici est D mais celui dérivé dans le Chap.(2) est $3D$. Nous passons du modèle $3D$ au modèle D par une simplification du seul opérateur $3D$ que nous ayons : le gradient parallèle $\nabla_{\|}$. Pour une perturbation de mode poloïdal m et axial de la forme $=$ avec $= m\frac{2}{}$ et $=$ $\frac{2}{}$, nous pouvons réécrire l'opérateur $\nabla_{\|}$ tel que :

$$\nabla_{\parallel} = \qquad = \frac{m}{} \qquad \frac{m}{} \qquad \frac{}{} \tag{4.3}$$

$$= \frac{m}{}\left(\qquad \frac{}{m} \right) \qquad \frac{m}{} \tag{4.4}$$

$$= \frac{m}{} \qquad \frac{m}{} \tag{4.5}$$

$$= \tag{4.6}$$

L'opérateur n'est plus dépendant de , et peut être traité en 2D. Mais il faut considérer le nouveau champ magnétique d'équilibre $= \quad = \quad \frac{n}{m} = \frac{}{} \quad \frac{n}{m}$ en utilisant la définition de en géométrie slab à la Sec.(2.1) pour un champ magnétique normalisé à . Le calcul est similaire en géométrie cylindrique. Nous obtenons $= \frac{2}{} \quad \frac{n2}{m}$. La perturbation n'est résonante que si $= 0$, c'est-à-dire si l'hélicité m de la perturbation correspond à celle de la surface magnétique : $= \frac{m}{n}$, [24]. Comme nous souhaitons traiter le problème en D, nous choisissons tel que $= 0$ où est la position de la résonance. Par ce choix nous méconnaissons l'hélicité de la perturbation et considérons uniquement des harmoniques m d'une certaine hélicité qui pourrait être décidée par le choix de et . Dans ce cas, est l'écart de champ magnétique poloïdal à la valeur de . Les Eq.(4.1) et (4.2) se réécrivent alors :

$$= \tag{4.7}$$

$$= \qquad \triangle \tag{4.8}$$

Cette dimension 2D pour le problème est donc en fait une dimension $3D$ mais contenant une seule hélicité. Nous la noterons $3D_{mn}$ pour $3D$ mono-hélicité, comparativement à une vraie géométrie $3D_{full}$ qui contiendrait toutes les hélicités possibles, selon et . Les profils utilisés dans ce chapitre correspondent à la feuille de courant de Harris :

$$= \tag{4.9}$$

et également à un profil utilisé dans [21, 33] :

$$= \qquad \text{sech}^2 \tag{4.10}$$

La Fig.(4.5) illustre les deux profils utilisés et le code couleur est gardé par la suite : bleu pour le profils et vert pour le profil . Ce sont des profils de type mais

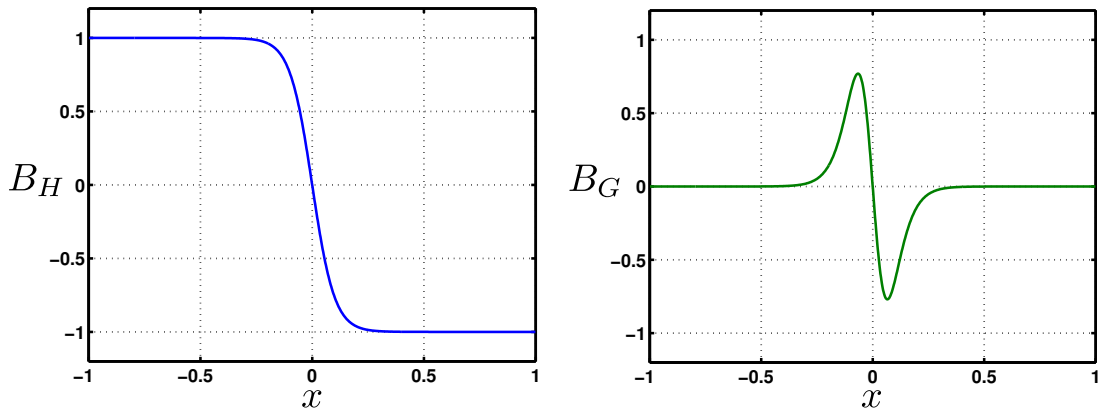

FIGURE 4.5 – équilibre et , pour = = et = = 0

l'astérisque de la notation à été omis pour plus de légèreté. De plus nous introduisons une nouvelle variable = telle que = 0 si = . Cela facilite les calculs et met en avant l'aspect symétrique des profils magnétiques utilisés. Pour ce chapitre, nous allégeons également la notation de en puisque la dimension axiale a été exclue.

Le choix de ces deux profils et est motivé par le contexte analytique et numérique. Quel que soit le profil magnétique utilisé, les théories n'incluent qu'une expansion autour de la résonance et supposent la symétrie autour de la résonance. Les effets d'asymétrie sont explorés à la Sec.(6.2.1). Ces deux profils sont aussi choisis pour leur popularité dans les simulations numériques. Le profil ne retranscrit qu'un déchirement magnétique et une feuille de courant à la résonance. Les valeurs d'équilibre et sont nulles loin de la résonance. Le profil a l'avantage supplémentaire d'être localisé à la résonance pour les champs et et également pour le champ magnétique . Il permet donc des simulations numériques dans un espace spectral poloïdal et radial. Cependant sa feuille de courant d'équilibre à la résonance est plus compliquée : elle est flanquée de deux feuilles de courant supplémentaires de signe opposé à la feuille de courant à la résonance. La Fig.(4.6) illustre les différences de courant entre le profil et le profil . Nous attirons aussi l'attention sur l'absence d'un profil magnétique présentant un déchirement constant : = . Ce profil magnétique ne présente pas d'instabilité de déchirement magnétique.

4.4 La limite "petit îlot"

Le travail analytique sur l'instabilité de déchirement magnétique est réalisé la plus part du temps dans le cadre "petit îlot". Cela suppose que l'îlot magnétique issu de

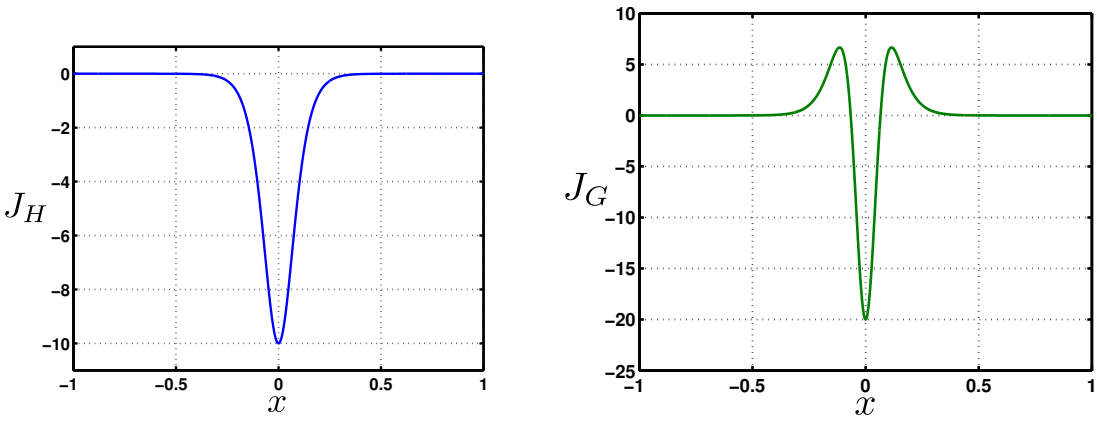

FIGURE 4.6 – équilibre et , pour = = et = = 0

l'instabilité magnétique de déchirement a une faible largeur par rapport à différents paramètres du problème :

- La première longueur à laquelle nous comparons la taille de l'îlot magnétique est le petit rayon du tokamak, plus exactement la position radiale de la résonance où apparait l'instabilité de déchirement magnétique : . Cette position conditionne le vecteur d'onde poloïdale d'harmonique m : $\frac{1}{} = \frac{2}{} =$. Nous avons donc comme première condition pour un petit îlot : . En pratique dans les calculs, cette condition nous permettra de simplifier la résolution : les gradients poloïdaux sont négligeables devant les gradients radiaux.
- La seconde longueur à laquelle nous comparons la taille de l'îlot est la longueur de déchirement magnétique, c'est-à-dire la distance autour de la résonance sur laquelle il y a une variation du champ magnétique poloïdal. Cependant, une variation de champ magnétique entraine un courant. Ici, nous comparons en fait à la largeur de ce courant généré par le déchirement magnétique

$$= \frac{\overline{\quad 0}}{\quad 0} \tag{4.11}$$

  Nous avons comme condition Cette condition va nous permettre d'utiliser une expansion de l'équilibre magnétique autour de la résonance à la place de l'équilibre analytique réel.
- La dernière condition du cadre "petit îlot" concerne le paramètre de stabilité . Comme nous le verrons à la Sec.(F), ce paramètre, homogène à l'inverse d'une longueur, quantifie la discontinuité de la solution idéale hors résonance de la perturbation du flux magnétique . Ce paramètre permet de décrire la perturbation du flux magnétique au niveau de la surface résonante. Il faut que

soit petit devant la largeur d'îlot considérée pour valider cette description.

Nous avons alors comme condition supplémentaire .

Nous rajoutons une dernière condition qui est reprise dans les travaux analytiques :

Nous nous interrogeons sur la restriction qu'impose ce cadre "petit îlot" dans l'espace des paramètres. Si nous prenons un peu d'avance sur la suite, nous verrons que, pour les "petits îlots", la prédiction analytique de la taille de l'îlot magnétique à saturation $_1$ vérifie la relation suivante [14, 37] :

$$_1 = \quad ^2 \tag{4.12}$$

Le système d'Eq.(4.7,4.8) avec l'équilibre ne nous laisse que peu de degrés de liberté : , , , et . est la largeur radiale de la boite de simulation. Les paramètres associés à l'Eq.(4.12) sont , et , en effet = .

Nous ne tiendrons pas compte de qui apparait en tant que paramètre correctif. Pour que les conditions "petit îlot" soient validées, il faut au moins que 0 , 0 et 0 . Comme nous cherchons les paramètres satisfaisant le cadre "petit îlot", nous avons = $_1$. Donc nous pouvons voir rétroactivement, en utilisant l'Eq.(4.12), l'espace des paramètres , qui satisfait aux conditions "petits îlots" en traçant dans l'espace les conditions suivantes :

$$0 \tag{4.13}$$

$$^2 \quad 0 \tag{4.14}$$

$$^2 \quad ^2 \quad 0 \tag{4.15}$$

Nous ajoutons également la condition de stabilité de l'instabilité de déchirement magnétique : 0 comme expliqué dans l'An.(F). En effet, nous n'aurons pas d'îlot sans l'instabilité de déchirement magnétique. La Fig.(4.7) illustre cet ensemble de conditions, la zone rouge indiquant la zone cohérente entre l'Eq.(4.12) et les conditions "petit îlot". Nous soulignons ici la finesse de cette zone valide et donc la force de la restriction qu'impose ces conditions "petit îlot" sur l'espace des paramètres. Cette observation nous pousse à souligner le risque de l'utilisation d'une telle formule dans un contexte expérimental et de manière générale, le risque de l'utilisation des théories du cadre "petit îlot".

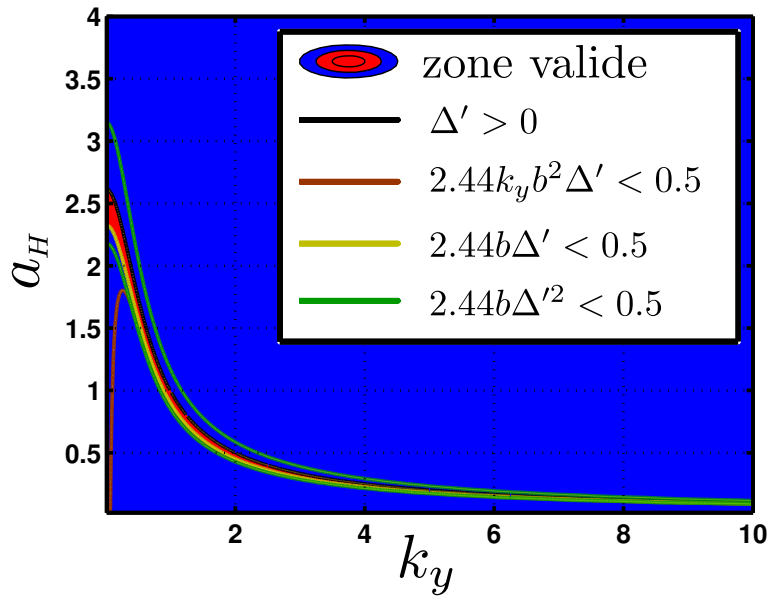

FIGURE 4.7 – Conditions "petit îlot" dans l'espace de paramètre pour le profil . En rouge, la zone valide. Nous avons pris = et = $\frac{}{2}$ avec le profil .

4.5 Destabilisation linéaire par déchirement magnétique

4.5.1 Calcul théorique

Le premier calcul abordé est celui de : le taux de croissance de l'instabilité de déchirement magnétique, noté dans cette section. Les détails sont décrits en An.(F). Ce calcul passe par la résolution linéaire du système d'Eq.(F.1,F.2) et est également présenté dans [18, 5]. La connaissance analytique du taux de croissance nous permet de nous assurer de la présence de l'instabilité de déchirement magnétique par comparaison des taux de croissance numérique et théorique, mais surtout le calcul va nous faire apparaître le paramètre d'instabilité qui prend une importance primordiale dans l'approche "petit îlot".

Le système d'équations linéarisé est le suivant :

$$= \qquad \triangle \tag{4.16}$$

$$\triangle \quad = \tag{4.17}$$

La résolution du système d'Eq.(4.16,4.17) passe par un raccordement entre une zone hors résonance idéale et une zone résistive fine d'épaisseur centrée sur la

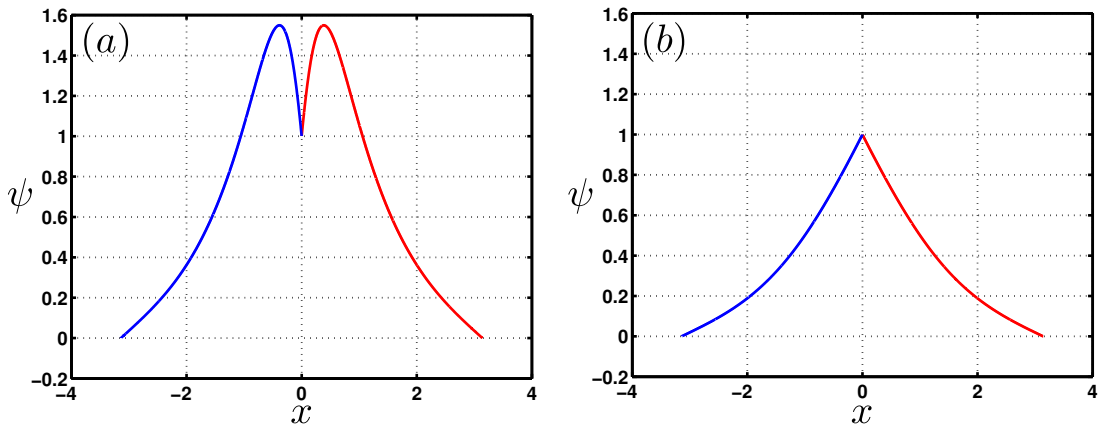

FIGURE 4.8 – dans la zone idéale avec le profil .
: = , = 0 , = , = , 0 =
: = , = , = , = , 0 =

résonance. La solution dans la zone idéale nous permettra de définir le critère d'instabilité . Si 0, l'instabilité de déchirement magnétique est instable. La Fig.(4.8) présente les formes de pour les cas de 0 et 0. Le paramètre quantifie la discontinuité de la fonction propre de :

$$= \frac{}{_0 \quad 0} \tag{4.18}$$

Cette discontinuité est résolue sur une épaisseur par des effets résistifs. Nous trouvons grâce au raccordement la formule du taux de croissance, et de la largeur de la couche résistive. Ces résultats sont en accord avec l'approche semi-quantitative [5].

$$= \quad - \quad \frac{}{} \quad 0 \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad - \tag{4.19}$$

$$= \quad - \quad \frac{}{} \quad 0 \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad - \tag{4.20}$$

4.5.2 Vérification numérique

La loi d'échelle en de l'Eq.(4.19) a été vérifiée afin de valider MOA sur la figure Fig.(3.10) de la Sec.(3.6.3). Nous réalisons cependant une nouvelle simulation pour inclure l'impact des conditions de bords. Nous réalisons la simulation linéaire des Eq.(4.16,4.17). Chaque harmonique m possède sa valeur de $_m$ et les conditions de bord sont nulles en . Des exemples des valeurs de en fonction de $= \frac{m2}{}$ sont référencées dans le Tab.(4.1). Nous superposons sur la figure Fig.(4.9) les valeurs des taux de croissance issues de la simulation et celles issues de la théorie prenant en

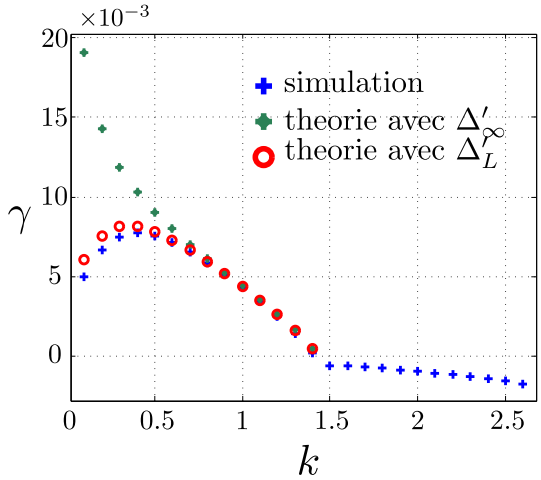

FIGURE 4.9 – Valeur des taux de croissance linéaire de l'instabilité de déchirement magnétique pour la simulation et pour la théorie, prenant en compte ou non les conditions de bord dans le calcul de pour le profil .

géométrie slab, $3D_{mn}$ Linéaire				
=	=	=	= 0	= 0 ^{2}

Profil magnétique		Paramètres diffusifs	
=	= 0	= 0	= 0

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.4	1.5
	40.6	20.0	13.0	9.4	7.2	0.1	-0.3
	9.7	9.0	8.1	7.0	6.0	0.1	-0.3
,	477.3	105.4	42.7	21.9	12.9	0.1	-0.3

TABLE 4.1 – Valeurs de pour la simulation linéaire de la figure (4.9).

compte ou non les conditions de bord dans le calcul de . Les effets des conditions de bord jouent sur d'autant plus si est potentiellement élevé.

Nous observons bien que le signe de conditionne la présence de l'instabilité de déchirement magnétique. Le Tab.(4.1) donne les valeurs de et la Fig.(4.9) donne les taux de croissance associés. A partir de , nous avons 0 et 0 : l'instabilité de déchirement magnétique est stable.

4.6 La mesure de la taille des îlots magnétiques

La topologie d'un îlot magnétique est le résultat de la fluctuation magnétique additionnée au flux magnétique d'équilibre. Le flux magnétique est constant le long de la séparatrice. Nous utilisons cette propriété pour calculer la taille de l'îlot magnétique à partir du flux magnétique. Ce lien est utilisé dans les GRE et aussi avec les mesures

de fluctuations des bobines de Mirnov. Il est aussi utilisé dans le calcul de saturation que nous présenterons dans l'An.(4.7.1) qui décrit l'évolution et la saturation de la taille d'îlot magnétique dans le cadre "petits îlots". Nous notons ici $_1$ 0 $=$ ^{2} qui est la valeur de l'harmonique hélicoïdale la plus basse ($m =$) de la perturbation du flux magnétique. Cette valeur est prise à la résonance. Le lien entre et ^{2} est établi dans cette section, toujours dans le cadre "petit îlot". La mesure de la taille d'îlot au travers de ce lien est notée $_1$ par opposition à d'autres mesures plus générales. Dans cette section, les variables de fluctuation et la taille d'îlot sont des fonctions du temps. Nous travaillons sur les valeurs à saturation, mais les résultats de cette section sont applicables à tout instant. Nous omettons la notation de la dépendance temporelle pour plus de légèreté.

4.6.1 Lien analytique entre le flux magnétique et la taille des îlots

La méthode analytique pour faire le lien entre et commence par la description du flux magnétique en un flux magnétique d'équilibre et une perturbation magnétique du mode $m =$. Elle comprend en plus des approximations propres au cadre "petit îlot" : une expansion du flux magnétique d'équilibre et une perturbation magnétique de faible extension radiale et de faible amplitude. Nous commençons le calcul du lien entre $_1$ et ^{2} en posant le flux magnétique au voisinage de la résonance comme le flux d'équilibre plus la fluctuation principale, le mode 1 ($_1 = m\frac{2}{}$ avec $m =$) :

$$= \quad ^2 \quad _1 \tag{4.21}$$

$$= \tag{4.22}$$

Le lien entre et ^{2} part du fait que le flux magnétique est constant le long de la séparatrice, au point X et au niveau poloïdal du point O, Fig.(4.3). Les points spécifiques X et O, correspondent respectivement à un point selle et à un maximum de . Nous recherchons alors les points qui satisferont les conditions $= 0$ et $= 0$:

$$= \quad = 0 \tag{4.23}$$

$$= \quad ^2 \quad _1 \quad = 0 \tag{4.24}$$

La résolution des deux conditions de stabilité précédentes nous indique que $=$ 0 et que $= 0$ ou $-$. L'étude des dérivées secondes nous permet de placer le point O en $= 0$ et le point X en $= -$. Nous considérons maintenant la valeur de

constante sur la séparatrice. La valeur de est la même que celle au bord de l'îlot au niveau du point O : $\frac{}{2}$. Nous avons alors :

$$0 \frac{}{1} = \frac{1}{} 0 \tag{4.25}$$

Nous prenons en compte une expansion de l'équilibre autour de la résonance, $0 \quad 0 \quad \frac{}{2}^{2}$, pour obtenir le flux magnétique au point X et sur la séparatrice au niveau du point O :

$$0 \frac{}{1} = 0 \quad {}^{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{} 0 = 0 \quad \frac{}{\frac{2}{1}} \quad {}^{2} \quad 0 \tag{4.26}$$

Après simplification de l'expression, nous trouvons le lien entre $_1$ et :

$$_1 = \frac{\frac{}{2}}{} = \frac{\frac{}{2}}{0} \tag{4.27}$$

Le calcul peut être généralisé à tout équilibre puisqu'il n'utilise que la valeur du courant à la résonance.

$$_1 = \frac{\frac{}{2}}{0} \tag{4.28}$$

Cette mesure analytique de la taille de l'îlot magnétique à partir de la perturbation magnétique n'est valable que dans le cadre "petit îlot".

4.6.2 Méthode de mesure numérique

La méthode numérique repose sur la même propriété : le flux magnétique est constant le long de la séparatrice. La taille de l'îlot magnétique correspond au maximum de l'écartement radial entre les deux séparatrices qui composent les bords droit et gauche de l'îlot. La mesure numérique peut être réalisée par pointage sur une carte de niveau du flux magnétique = telle la Fig.(4.3). Cette première méthode nécessite une haute capacité de stockage pour sauvegarder les cartes de . Nous proposons une automatisation de la mesure.

L'évolution de la dynamique de la topologie magnétique peut révéler une certaine complexité. Des conditions d'asymétrie, de formation de couche de courant secondaire et de turbulence vont perturber la topologie. La turbulence crée des points X et O secondaires et temporaires. Certaines asymétries décalent les lobes de l'îlot magnétique du point O et les points X et O de la résonance. La méthode numérique que nous utilisons peut éventuellement être mise en défaut dans le cas de fluctuation turbulence

à très fort gradient localisé à la résonance, empêchant alors la détection des points X : nous aurions alors des points X à l'intérieur de l'îlot. Mais, notre turbulence n'est pas assez forte pour cela et nous pouvons toujours vérifier avec la première méthode décrite en cas de doute.

La méthode de mesure numérique permet une mesure à haute fréquence de et également de la forme de la séparatrice. Nous repérons pour chaque valeur , le maximum de : = . Puis parmi ces maxima en fonction de , nous cherchons le minimum = . Il s'agit de la valeur du flux magnétique au point . Le flux magnétique au point O est : = . Pour détecter la séparatrice, nous recherchons pour chaque valeur de , la position radiale où le flux magnétique est égal à , et ceci de part et d'autre de . Nous obtenons deux courbes paramétriques de la séparatrice : une pour la face droite de l'îlot magnétique : = et une autre pour la face gauche : = . Les deux sont représentées en pointillés noirs sur la Fig.(4.3). Nous mesurons alors la taille de l'îlot à la position poloïdale où l'écart entre les deux courbes paramétriques est maximal. Elle est notée = où à saturation.

Le cadre d'étude dans ce chapitre nous permettrait de simplifier cette méthode : la taille d'îlot se mesure forcément à la position poloïdale du point O. Mais nous utilisons cette méthode pour sa robustesse vis à vis de la turbulence et de l'asymétrie. Cette méthode de mesure ne comporte aucune hypothèse sur la description du flux magnétique.

4.6.3 Comparaison des méthodes de mesure

La mesure de la taille de l'îlot Eq.(4.28) est très utilisée dans la physique analytique, numérique et même expérimentale. Elle ne dépend d'ailleurs que de considérations géométriques et peut faire le lien entre ^{2} et $_1$. Cependant, il est important de rappeler qu'elle n'est valable que dans l'approximation "petit îlot". Le point de départ du calcul (le flux magnétique est constant sur la séparatrice) est valable quelle que soit la taille de l'îlot mais c'est la description de qui souffre de l'hypothèse "petit îlot" en plusieurs points :

- $_1$ ^{2} : il s'agit de l'approximation de la constance de $_1$ sur la largeur de l'îlot.
- Les modes m ont été négligés.
- Le mode $m = 0$ à été négligé.
- l'équilibre n'est décrit que par son expansion autour de la résonance.

est décrit avec :		$_2$	$_1$ $_0$	$_1$
m 2				
$_0$				
expansion de $_0$				
expansion de				
$_1$				
$_1$ 0				

TABLE 4.2 – Tableau récapitulatif des éléments de présent dans les différentes mesures de taille d'îlot. ✗ : élément absent. ✓ : élément présent.

Les simulations numériques vont nous permettre de voir l'impact des conséquences de l'hypothèse "petit îlot". À partir des données de , nous pouvons mesurer la taille de l'îlot avec notre méthode numérique, en négligeant de manière effective telle ou telle composante de et par conséquent voir dans quelle proportion, la mesure analytique $_1$ de la taille d'îlot est erronée.

Nous introduisons différentes mesures de la taille d'îlot dont les spécifités sont résumés dans le Tab.(4.2) :

- correspond à la taille de l'îlot à saturation mesurée sur les courbes de niveau de comme sur la figure Fig.(4.3).
- $_2$ correspond à la taille de l'îlot à saturation mesurée sur les courbes de niveau de auquel nous avons retiré les modes m par FFT.
- $_1$ a été défini précédemment par l'Eq.(4.28).
- $_0$ $_1$correspond au même calcul que $_1$ avec en plus la fluctuation de l'équilibre developpé autour de la résonance dans la description de : $_0$ 0 $_0$ 0 $_0$ ^{2} . Nous avons alors :

$$_0\ _1 = \frac{\quad}{\quad 0 \quad _0\ 0} \qquad (4.29)$$

.

Dans la Fig.(4.10), nous traçons pour différentes valeurs de les tailles d'îlots normalisées à : $_2$, $_0$ $_1$ et $_1$ pour le profil et . Nous considèrons comme la référence à saturation : cette mesure inclut la définition complète de . La courbe du ratio $_1$ confirme bien la nécessité de limiter l'utilisation de la mesure $_1$ dans le cadre des petits îlots magnétiques. Cette mesure produit 20% d'erreur relative dès que 3. La courbe du ratio $_2$ nous prouve que les

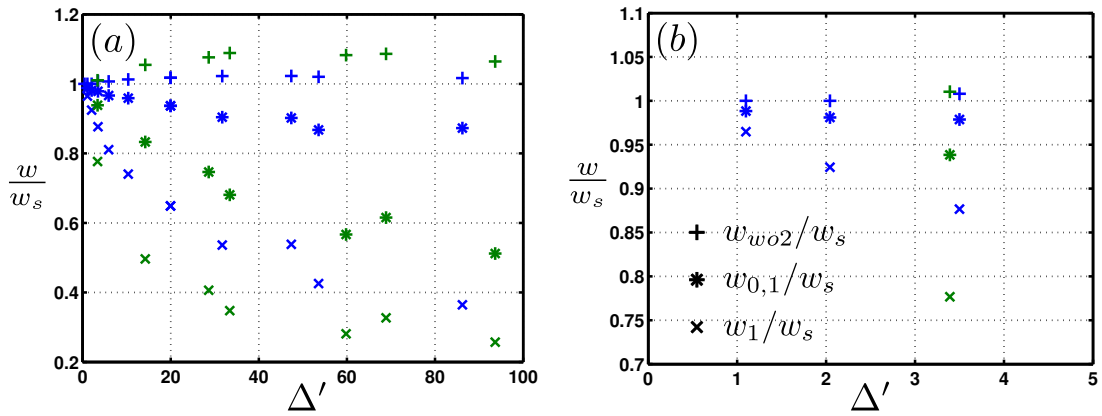

FIGURE 4.10 – (a) : Tailles d'îlot normalisées à pour le profil en bleu et pour le profil en vert. (b) : agrandissement de (a) pour faible .

	géométrie slab, $3D_{mn}$	Non-linéaire
$= 0$	$=$	$= 0^2 \quad 0$
$=$	$=$	

Profil magnétique	Profil magnétique	Paramètres diffusifs
$=$	$=$	$= 0$
$= 0 \;\; 0 \quad 0$	$= 0$	$= \hat{0}$

modes m peuvent effectivement être négligés dans la mesure de la taille de l'îlot magnétique et ceci même pour des valeurs de élevées (00). Devant la difficulté à mesurer ou à calculer les valeurs de flux magnétique, il est important de pouvoir retranscrire le lien entre et avec le plus de justesse possible et le moins d'informations superflues. La mesure $_0$ $_1$représente une alternative : elle ne nécessite de connaître que des valeurs à la résonance et permet une estimation de la taille d'îlot à 20% d'erreur relative pour une plage de allant jusqu'à 20.

L'Eq.(4.28) est utilisée dans les GRE qui décrivent la dynamique de la taille de l'îlot avec peu de paramètres. Il est clair que cette description ne peut se référer à la taille de l'îlot magnétique à cause de l'erreur relative entre $_1$ et . Et rien n'indique de relation linéaire entre ces deux mesures. Expérimentalement, les îlots sont trop larges pour le cadre petit îlot. Les GRE ne devraient pas être utilisées. Mais en plus, les GRE sont utilisées avec des mesures de type ECE basées sur l'aplatissement de la température : des mesures expérimentales de type qui ne sont pas du tout en accord avec $_1$ utilisé dans les GRE.

Les GRE donnent malgré tout de bons résultats expérimentaux. Il nous faut alors vérifier si les théories de type GRE fonctionnent effectivement au dela de la limite "petit îlot" si nous considérons au lieu de $_1$ et étudier pourquoi.

4.7 L'évolution et saturation des îlots magnétiques

4.7.1 Calcul théorique de l'évolution et la saturation de la taille d'un îlot magnétique

Nous reprenons un calcul qui retrouve le régime de Rutherford et qui décrit la saturation des îlots magnétiques [14]. Ce calcul se situe dans la limite "petits îlot" avec une viscosité négligeable. La résolution passe par une solution comprenant un équilibre développé autour de la résonance, le mode $m =$ dans l'approximation considérant constant et une fluctuation non linéaire d'amplitude à priori plus faible :

$$= \quad {}^{2} \quad - \tag{4.30}$$

$$= \quad \frac{{}^{2}}{} \quad \frac{}{} \tag{4.31}$$

avec le courant associé :

$$= \quad \nabla \quad = \quad {}^{2} \; {}^{2} \quad {}^{2} \tag{4.32}$$

$$= \quad - \; {}^{2} \tag{4.33}$$

Le détail des calculs est présenté dans l'An.(G). La forme de la solution est injectée dans l'Eq.(4.2) simplifiée à ses termes d'ordre le plus bas :

$$= \quad = 0 \tag{4.34}$$

Le calcul comprend également un changement de variable qui permet de passer des variables aux variables tel que :

$$= \frac{{}^{2}}{{}_{2}} \qquad \text{et} \quad =$$

Ces variables permettent de parcourir l'espace en suivant les lignes de champ magnétique et permettent donc des intégrations en différenciant l'espace dans l'îlot et hors de l'îlot. La Fig.(4.11) illustre les orbites pour différentes valeurs de . Nous reconnaissons la topologie d'un îlot magnétique. Après un raccordement avec la solution idéale extérieure à l'îlot magnétique, qui fait encore intervenir , et en incluant le lien entre l'amplitude de la perturbation du mode instable ^{2} et la taille de l'îlot, Eq.(4.28) : nous obtenons alors :

$$= \left(- \; {}_{1} \quad - \; {}_{1} \right) \frac{\bar{}}{} \; {}_{0} \tag{4.35}$$

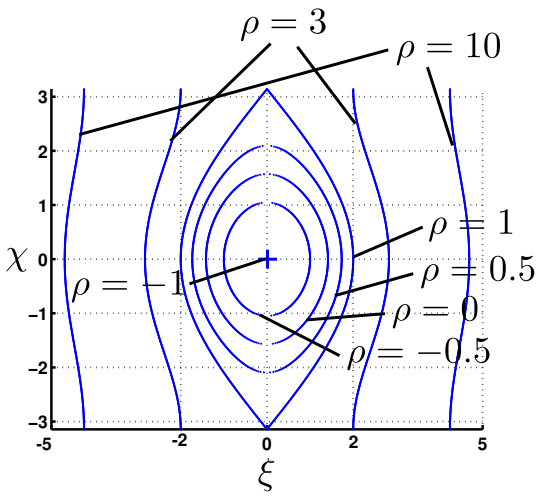

FIGURE 4.11 – Représentation des isocontours de en fonction de et . La fonction est bien équivalente à au premier ordre : on retrouve la topologie d'un îlot magnétique.

avec $_0 = 3 \quad 3$ calculé numériquement.

Nous pouvons alors avoir deux relations. Dans le cas où la taille de l'îlot magnétique est négligeable, nous retrouvons le régime de Rutherford qui décrit l'évolution de la taille de l'îlot magnétique :

$$_1 = \frac{}{\ _{0}} = \tag{4.36}$$

A la saturation, par contre c'est la variation temporelle de la taille de l'îlot qui est négligeable :

$$_1 = -\frac{}{\ _{0}} = \quad - \tag{4.37}$$

C'est dernière expression sur laquelle nous portons notre attention et que nous testons numériquement avec des simulations non-linéaires des Eq.(4.7,4.8).

4.7.2 Exploration numérique de la saturation des îlots magnétiques.

Nous avons désormais, une expression théorique de la taille de l'îlot magnétique à saturation Eq.(4.12) qui ne dépend que du critère d'instabilité et de la largeur de la feuille de courant qui est définie par :

$$= \quad - = \quad \frac{\ \ _{0}}{\ _{0}} \tag{4.38}$$

$$= \frac{}{} = \tag{4.39}$$

$$= \frac{}{} = \tag{4.40}$$

Cette formule n'est donc théoriquement valable que dans le cadre "petit îlot", cadre restreint. Nous savons qu'elle est cependant utilisée au travers des GRE pour le pîlotage des tokamaks, où le cadre "petit îlot" n'est pas applicable. Il est alors pressant de découvrir quel est le domaine de validité numérique de cette formule et de spécifier la valeur critique de qui limite le cadre "petit îlot". La première exploration consiste à vérifier la validité de cette formule pour différentes valeurs de avec les profils et . Pour la comparaison des résultats, nous utilisons dans cette section, une renormalisation de la taille d'îlot et de :

$$= \quad \text{et} \quad = \tag{4.41}$$

ce qui permet d'avoir l'Eq.(4.12) simplifiée, indépendante du paramètre de profils et seulement fonction de :

$$_1 = \tag{4.42}$$

Pour vérifier numériquement l'Eq.(4.42), nous avons réalisé deux séries de simulations non-linéaires des Eq.(4.7,4.8) pour chaque profil et . Il y a deux séries pour avoir des valeurs de en fonction de ou (noté de manière générale) et des valeurs de en fonction de . Dans un premier temps, nous traçons la taille de l'îlot à saturation en fonction de et, sur le même graphique, en fonction de , et ceci pour le profil et : Fig.(4.12). Avec cette normalisation, les deux séries de simulations se confondent sur la même courbe, et ceci pour les deux profils. Nous pouvons atteindre les mêmes simulations de deux manières différentes : en changeant ou en changeant . Par la suite, nous garderons l'aspect radial constant et varirons la longueur poloïdale pour changer . Nous pouvons cependant déjà répondre quant au domaine de validité numérique de l'Eq.(4.12) : elle semble numériquement valide bien au delà du cadre petit îlot, mais nous avons mesuré ici et non $_1$, la formule est valide moyennant une mauvaise utilisation, à l'instar des expérimentateurs qui utilisent les GRE avec des mesures à l'ECE.

Sur la Fig.(4.13), nous traçons les quantités , $_1$ et $_1$ à saturation. Le but de ce graphique est de vérifier la valeur critique de pour laquelle l'Eq.(4.42) n'est plus valide, nous notons cette valeur pour "small island". A la Sec.(4.4), nous avons défini les approximations "petit îlot". Nous pouvons en extraire une valeur de qui sera fonction de mais aussi fonction de la notre définition de " " dans les

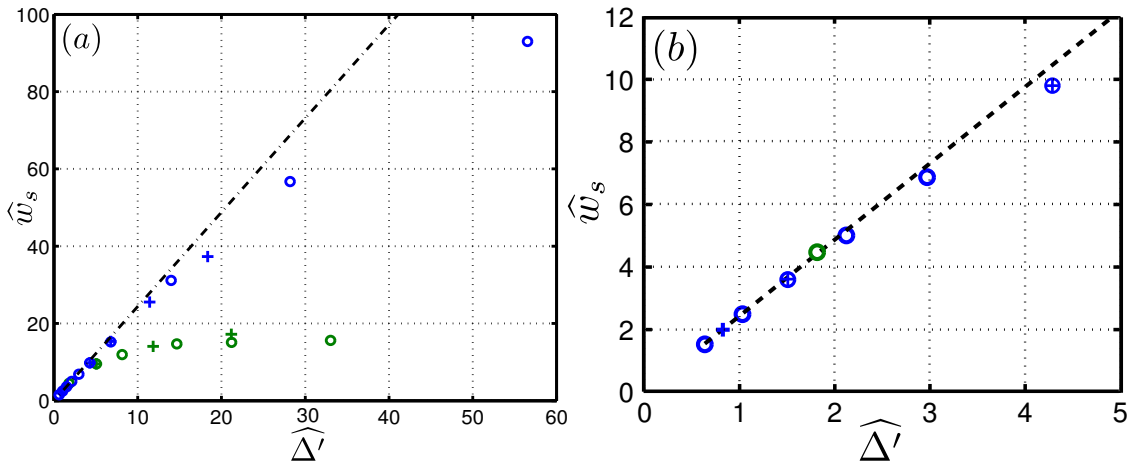

FIGURE 4.12 – a) Taille d'îlot à saturation pour différents et pour les profils et . Les cercles pour = . Les croix pour = .
b) Agrandissement du graphique a).
La ligne pointillé noire représente la formule ( ). Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.10).

Eq.(4.13,4.14,4.15). Nous avions choisi de considérer " 0 ". Avec des paramètres usuels tels que = et = 0 3, nous trouvons soit en normalisant 0 . L'agrandissement du panneau (a) nous permet de comparer $_1$ et $_1$: il y a un bon accord jusqu'à pour les deux profils et . Nous retrouvons donc l'ordre de grandeur du domaine de validité de la théorie 0 .

Nous comparons maintenant $_1$ et pour vérifier à quel point les expérimentateurs peuvent utiliser des mesures de type ECE (sans approximations "petit îlot") avec des théories de type GRE. La Fig.(4.13) montre qu'il existe aussi un accord entre $_1$ et pour des valeurs de suppérieures à . C'est un résultat très positif qui valide l'utilisation des théories GRE pour contrôler la dynamique et la taille des îlots magnétiques. Cet accord entre $_1$ et est également limité en , avec un seuil variable selon le profil. Nous appelons ce seuil : pour "intermédiate island". Cette nouvelle valeur critique est dépendante du profil magnétique utilisé : pour le profil et pour le profil , d'après la Fig.(4.13).

4.7.3 Les îlots intermédiaires et les fluctuations $m = 0$

De prime abord, il s'agit d'une excellente nouvelle : si nous remplaçons $_1$ par , nous pouvons utiliser malgré la restriction du cadre "petit îlot" les théories GRE. Mais les mécanismes mis en jeu restent sont encore dans l'ombre. Nous comparons plus en détail les simulations et la théorie pour mieux comprendre ce qui se passe. Nous nous basons sur trois simulations à haute résolution avec le profil . Nous avons

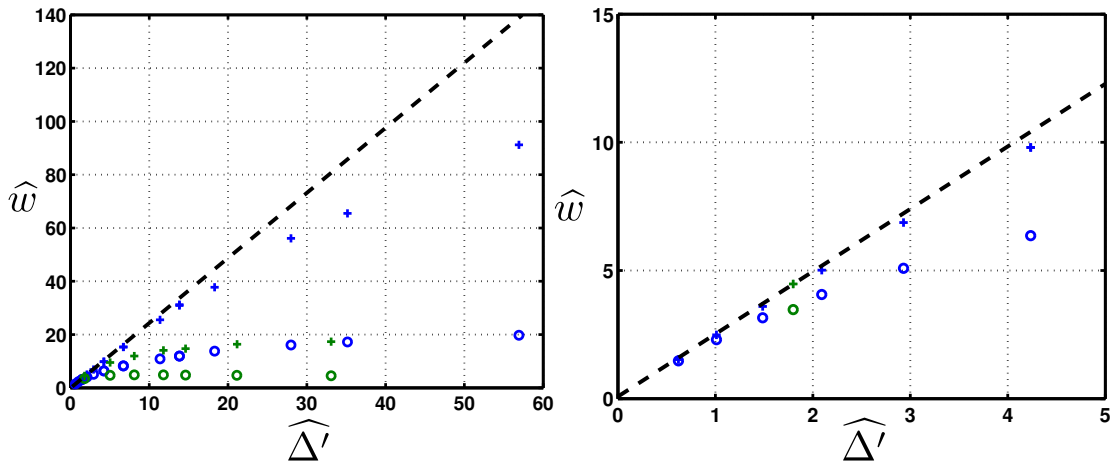

FIGURE 4.13 – a) Taille d'îlot à saturation pour différents et pour les profils et . Les croix pour et les cercles pour $_1$
b) Agrandissement du graphique a).
La ligne pointillée noire représente la formule ( ).
Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.10).

choisi trois valeurs de : , et , afin de nous rapprocher de la zone "petit îlot" et de parcourir la zone "îlot intermédiaire".

Pour commencer la description de la dynamique des îlots magnétiques, nous présentons l'évolution de la taille des îlots magnétiques en fonction du temps, Fig.(4.14). Ce graphique sert de référence temporelle pour situer la saturation et d'autres phénomènes dont nous parlerons.

Le développement du calcul de la saturation de l'îlot magnétique repose sur une intéraction entre la perturbation du mode $m =$ et une perturbation non-linéaire qui inclut tous les modes. Le mode $m =$ et le mode non-linaire sont supposés faibles devant l'équilibre . Nous vérifions en premier lieu cette hypothèse pour nos trois cas en mesurant l'amplitude du mode $m =$ à saturation :

$$= \quad {}^2 = 0 \quad 0 \tag{4.43}$$

$$= \quad {}^2 = 0 \quad 3 \tag{4.44}$$

$$= \quad {}^2 = \quad 0 \tag{4.45}$$

Nous avons bien rupture de l'hypothèse de calcul sur avec l'augmentation de . Pour examiner en détail l'impact de la rupture de cette hypothèse, nous affichons les courbes de niveau du courant total issues des simulations à saturation et nous les

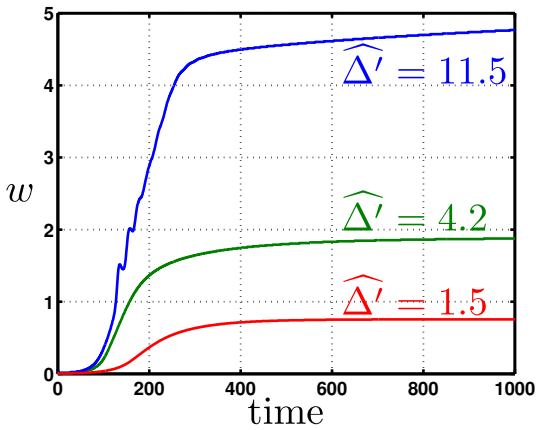

FIGURE 4.14 – Evolution de la taille d'îlot mesuré sur la courbe de niveau de , pour le profil et pour les trois valeur de : , et .

géométrie slab, $3D_{mn}$				Non-linéaire		
= 0	=	=	=	=	0^3	=
= 0	=	=	=	=	0^3	=
= 0	= 0	=	=	=	0^3	=

Profil magnétique	Paramètres diffusifs
= = 0 3	= 0^3 = 0

comparons au courant calculé dans l'An.(G), sur la Fig.(4.15). Ce courant théorique est défini au moyen des Eq.(G.4,G.15,G.31,G.32) et donne :

$$= \quad - \quad \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{\frac{\quad}{\quad}}{\frac{\quad}{\quad}}$$

avec = , = ^{3}, = et étant l'amplitude du mode m = mesurée à saturation sur les simulations. Les intégrales et sont définies dans l'An.(G) à l'Eq.(G.32). Nous constatons que le courant de la théorie reproduit très bien la simulation pour des faibles valeurs de . Pour = , les valeurs du courant au point O, X et le long de la séparatrice sont comparables, la taille de l'îlot également. Pour = et , nous pouvons encore reconnaître les points X, O et la séparatrice. Mais seul le point O montre une valeur de courant comparable à la simulation. Le point X montre une valeur de courant beaucoup trop élevée par rapport à la simulation. La taille effective de l'îlot est également erronée.

Nous avons vu que la mesure des tailles d'îlots devaient inclure les fluctuations magnétiques du mode $m = 0$, Fig.(4.13). Nous pouvons nous attendre à ce qu'elles jouent un rôle important dès que nous sortons du régime "petit îlot". Une autre question en suspens est la validité du mécanisme de saturation présenté dans la discussion

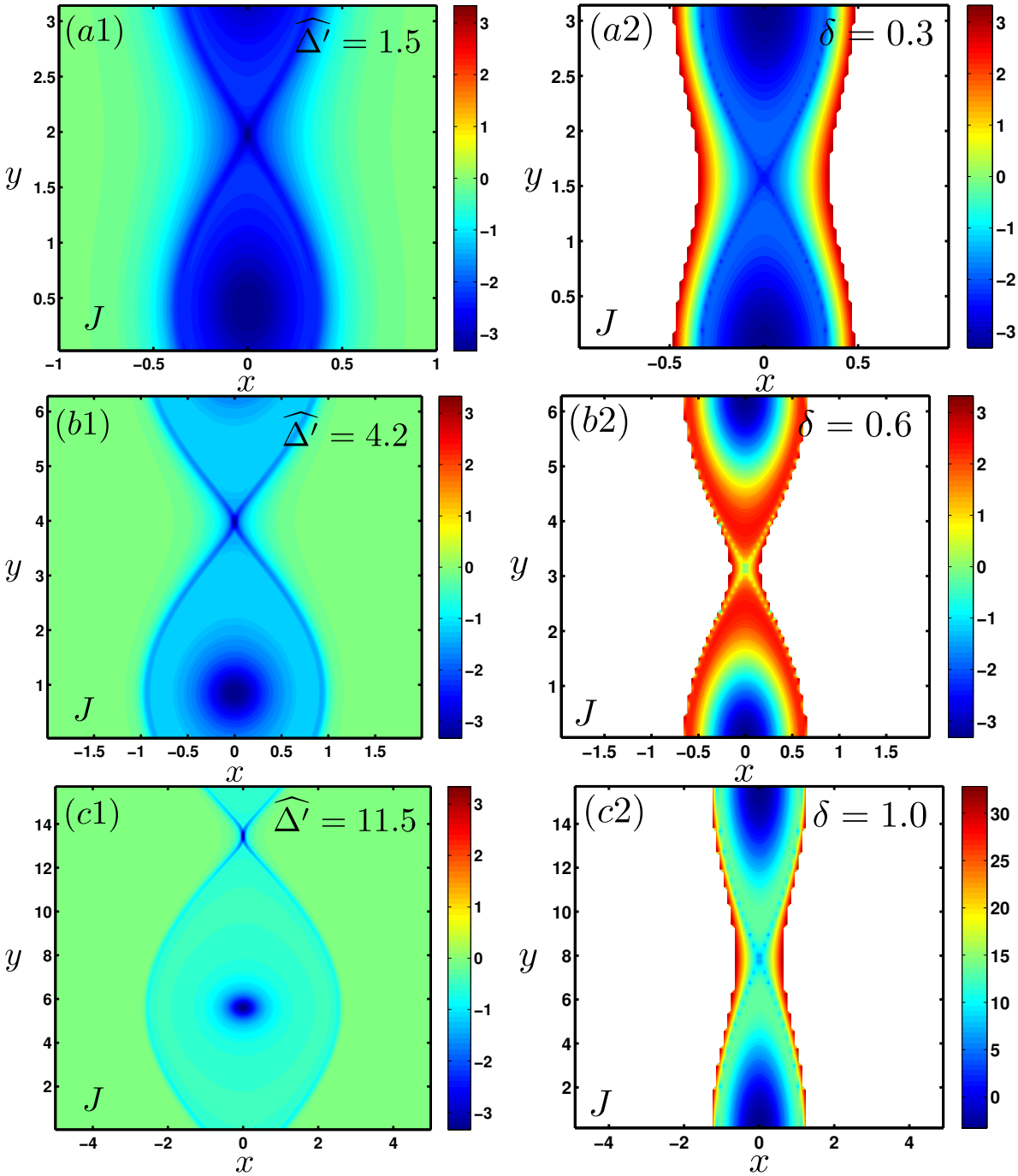

FIGURE 4.15 – Comparaison du courant théorique et du courant de la simulation pour les trois simulations de la Fig.(4.14).
(#1) : courant issu de la simulation à saturation.
(#2) : Courant reconstruit à partir de et du paramètre d'équilibre .
(a#) : = . (b#) : = . (c#) : = .
Les espaces blancs des courbes (#2) sont des données retirées de la reconstruction pour ajuster l'axe des couleurs en gardant une bonne visualisation en vue de la comparaison avec le courant de simulation. (c2) : l'axe des couleurs n'a pas pu être ajusté complètement.

de l'article[14] hors du cadre "petit îlot". Cette discution est rendue explicite par l'Eq.(32) de [14] que nous réécrivons ici :

$$\bar{2} \quad {}^{1}_{0} \quad \frac{\frac{2}{2\ 2}}{\frac{2}{2\ 2}} = {}^{2}- \quad \bar{2} \quad {}^{1}_{0} \frac{\frac{2}{2\ 2}}{\frac{2}{2\ 2}} \tag{4.46}$$

Cette équation représente la loi d'Ohm dans laquelle nous avons réintroduit les éléments calculés dans l'An.(G). Les auteurs de [14] ont montré que dans la limite "petit îlot", la saturation n'est pas liée à une modification non linéaire du courant près de la séparatrice car dès l'entrée de la phase de Rutherford, le profil de courant garde la même structure algébrique. Cela signifie que les non-linéarités se compensent et ceci tout du long de la saturation. Ils en ont alors déduit que la saturation est due au fait que le terme dynamo $_1$ est compensé par le terme de dissipation du courant du mode $m =$. Cela revient à simplifier l'Eq.(4.46) tel que :

$$\bar{2} \quad {}^{1}_{0} = {}^{2}- \tag{4.47}$$

Nous vérifions si ce mécanisme est également valide pour les valeurs de élevées. Nous introduisons les décompositions modales des activités : $_m = {}^{2}_{m}$ et $_m = {}^{2}\ {}^{2}_{m}$. Ces variables représentent la contribution des modes du terme et de ceux du terme à la variation temporelle de . La Fig.(4.16) représente l'évolution temprelle de $_0$, $_1$, $_2$, $_{\mathrm{NL}} = {}_2$ et de $_0$, $_1$, $_2$, $_{\mathrm{NL}} = {}_2$ pour les trois valeurs de . L'égalité entre les termes $_m$ et $_m$ signifie la saturation du mode m. L'écart entre $_m$ et $_m$ montre au contraire la croissance du mode m. La Fig.(4.16) montre que l'activité du mode $m = 0$ s'accentue avec l'augmentation de . Pour = , la croissance du mode $m = 0$ reste négligeable. Pour = , nous trouvons un mécanisme de saturation plus lent et une activité du mode $m = 0$ supérieure à celle de $m =$ à partir de $= 300$. Pour = , les observations du cas précédent sont présentes avec en plus le mode $m =$ qui vient jouer un rôle dans la saturation. Dans le cas des îlots intermédiaires = et , nous observons bien se mécanisme de compensation : et pendant toute la dynamique. Cependant, : $_0$ et $_0$ ne se compense pas pendant la saturation : il a une croissance lente du mode $m = 0$. Pour = , la

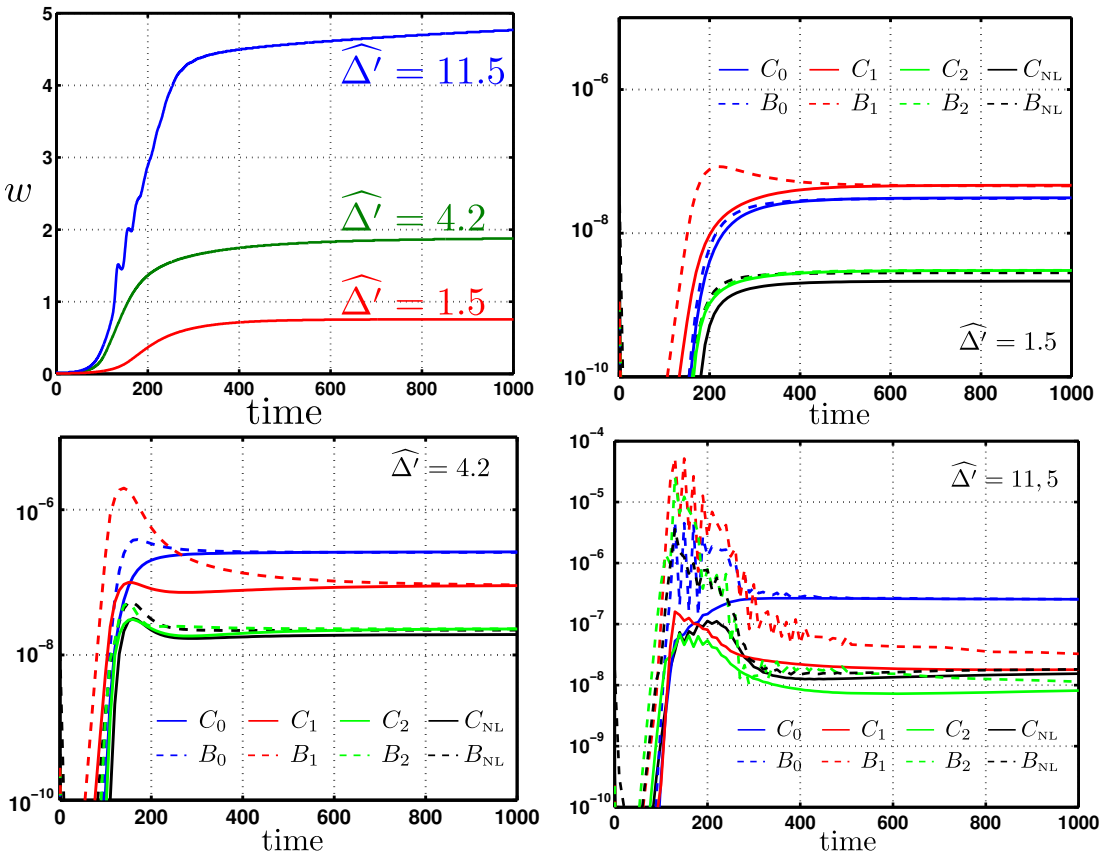

FIGURE 4.16 – Evolution temporelle des activités magnétiques $_0$, $_0$, $_1$, $_1$, $_2$, $_2$, $_{\rm NL}$ et $_{\rm NL}$ pour trois valeurs de $=$, , . Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.14) qui est reproduite pour plus de lisibilité.

dynamique semble différente : le mode $m =$ est présent également. Nous verrons plus tard qu'en fait il est linéairement dominant et entraine une coalescence d'îlots. La différence de temps caractéristique entre les modes $m =$ et $m = 0$, (amplitude de $_1$ et $_0$ sur la Fig.(4.16)) suggère une évolution lente du mode $m = 0$ par rapport au mode $m =$. On peut alors réconcilier partiellement la théorie avec les observations : la saturation du mode $m =$ est réalisée successivement pendant la lente évolution de $m = 0$.

Le cadre "petit îlot" supposait un faible niveau de fluctuations. Nous avons mesuré qui croit avec brisant l'hypothèse de fluctuation faible. Mais si nous regardons la valeur du courant du point X au fil du temps, Fig.(4.17a), nous remarquons qu'à la transition du régime de croissance linéaire de l'îlot vers le régime de saturation, nous avons un rééquilibrage du courant au point X vers sa valeur initiale. La variation d'évolution de est piquée au même instant où commence le rééquilibrage du courant, Fig.(4.17b), à $= 30$ pour $=$; à $= 0$ pour $=$; à $= 0$ pour $=$. Cette compensation du courant produit pendant la croissance de

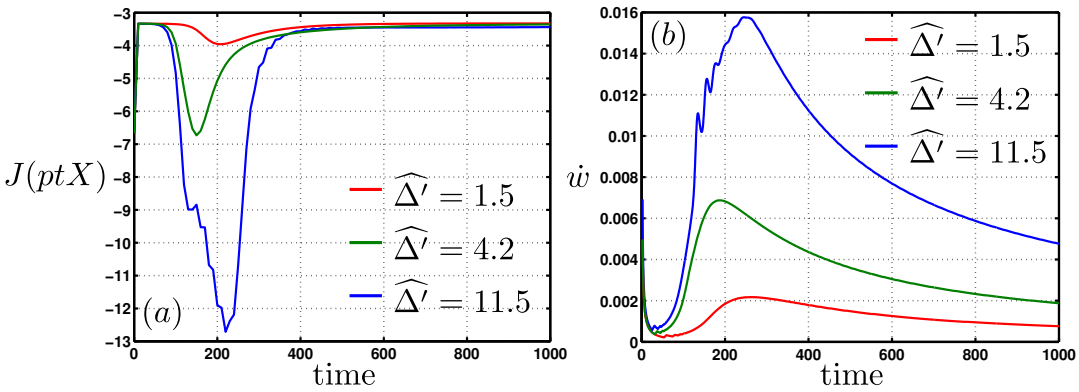

FIGURE 4.17 – (a) Courant au point X en fonction du temps pour trois valeur de .
(b) Variation temporelle de la taille d'îlot.
Les données sont celles de la Fig.(4.14).

l'îlot implique que la fluctuation globale du courant est faible au point X pendant la saturation, même si est élevé.

Enfin, le cadre "petit îlot" utilise une expansion des champs d'équilibre et de fluctuation autour de la résonance, ce qui restreint la taille de l'îlot. Si l'îlot est large, le point X reste un endroit où les expansions autour de la résonance sont valables : la séparatrice est proche de la résonance. Dans le calcul de la saturation, l'Eq.(4.34) impose que soit une fonction de . Sur la Fig.(4.18), nous traçons à partir des champs et à la saturation = . Nous remarquons qu'il y a deux fonctions, celle dans l'îlot et celle en dehors de l'îlot. Le calcul passe également par une distinction dans l'îlot $_n$ et hors de l'îlot $_u$ puis nous opérons un raccordement asymptotique. La Fig.(4.18) indique que les deux fonctions dans et hors de l'îlot sont confondues au point X : il y a un raccordement possible.

Le calcul semble rester valide au point X, malgré des îlots trop larges. Pour valider notre hypothèse, nous traçons l'activité de à trois instants pendant la saturation. L'activité représente les variations temporelles de :

$$= \tag{4.48}$$

Cette quantité nous permet de localiser l'endroit où la dynamique est à l'oeuvre. La Fig.(4.19) présente trois instants de cette activité pour les trois valeurs de . Elle confirme notre hypothèse : pendant la saturation, l'activité se restreint au point X.

La description de la dynamique de l'îlot magnétique, proposée par la théorie que nous avons détaillée et les GRE associées, est donc valable hors limite mais seulement au point X. Dans le cas de élevé, il y a une étape de plus dans le mécanisme de saturation : le flux magnétique éloigné de la résonance par advection s'accumule le

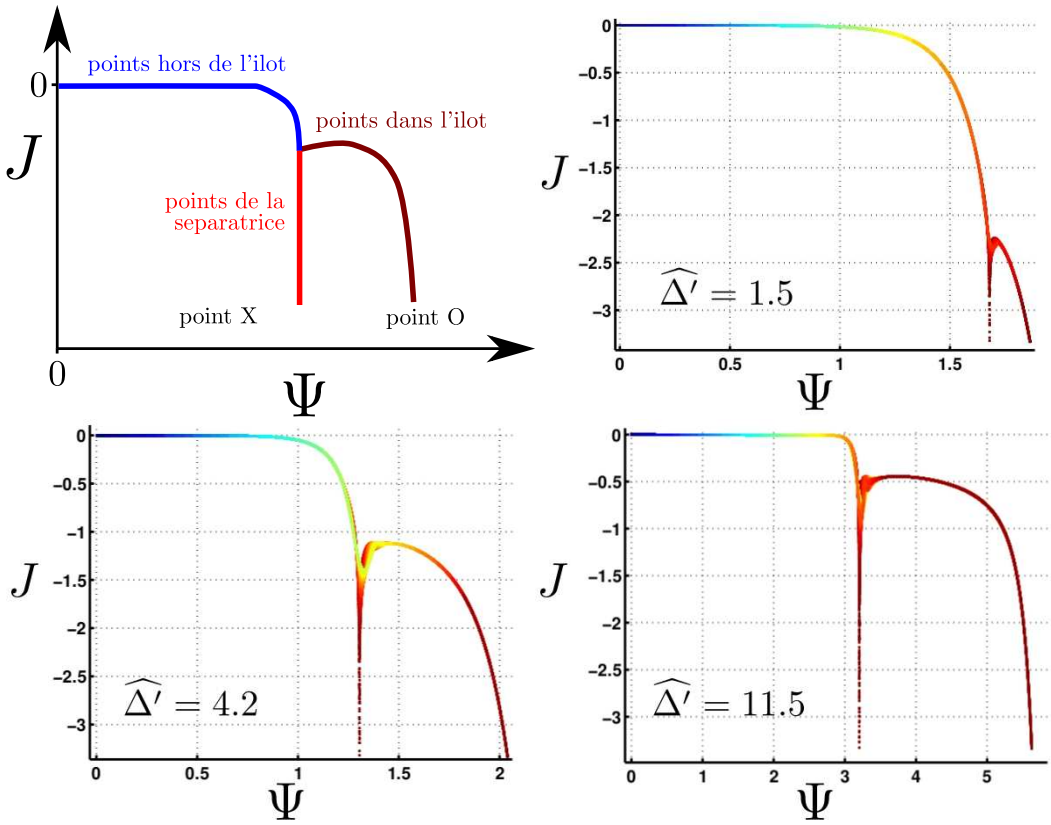

FIGURE 4.18 – en abscisse. en ordonnée. Du bleu au rouge : vaut à 0. De gauche à droite : = , , .
Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.14).

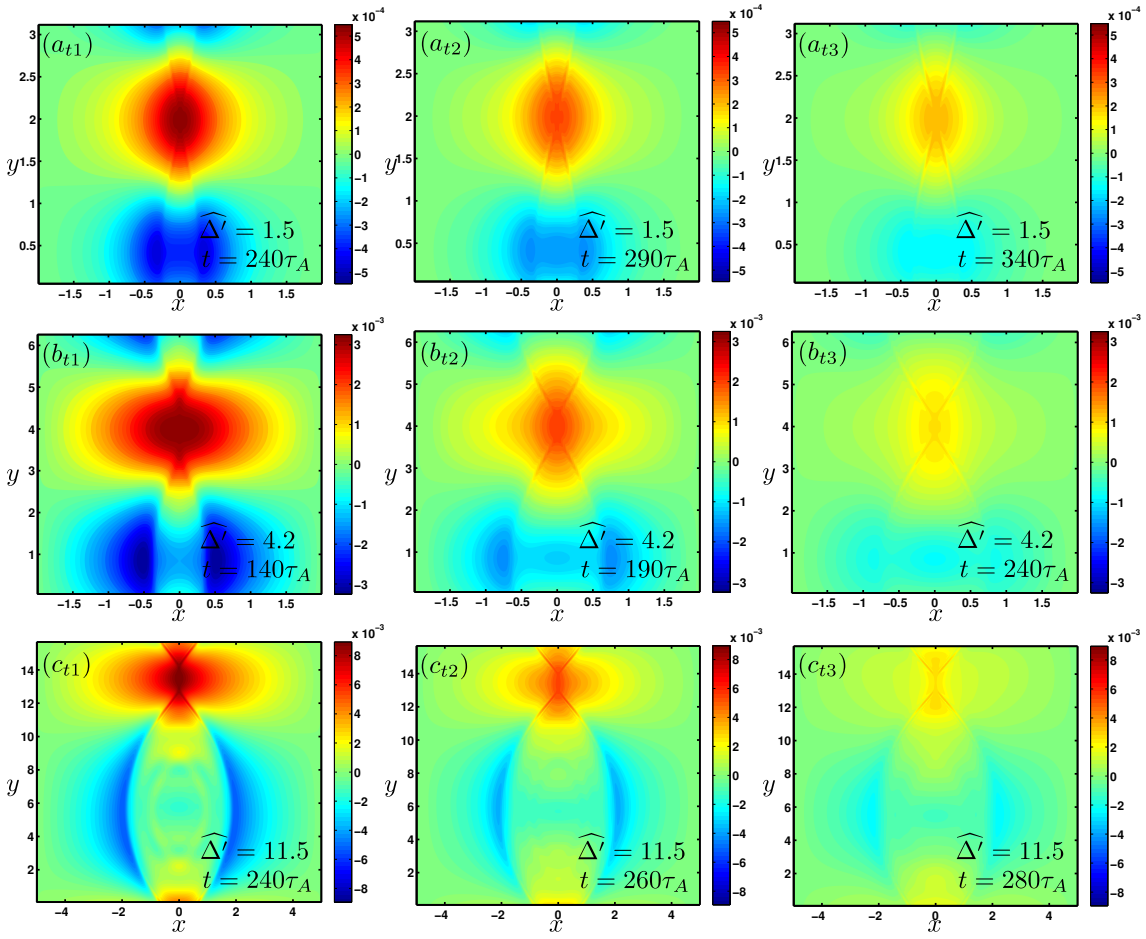

FIGURE 4.19 – Courbes de niveau de l'activité pour trois instants successifs $_1$, $_2$, $_3$ pendant la saturation.

: = . : = . : = .

Les données sont celles de la Fig.(4.14).

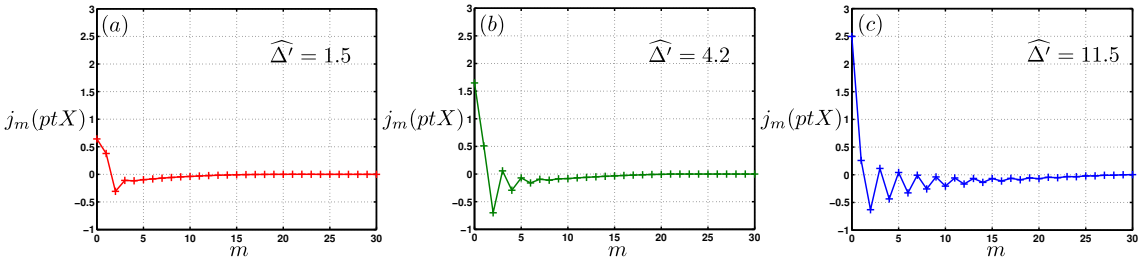

FIGURE 4.20 – Amplitude signée des modes de la fluctuation de courant le long de la résonance pour 3 valeur de à saturation.
Les données sont celles de la Fig.(4.14).

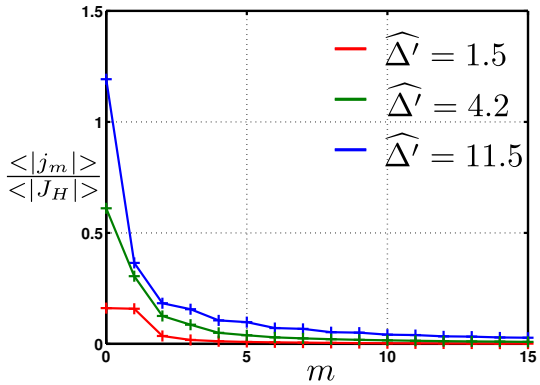

FIGURE 4.21 – Amplitude de $_m$ moyennée selon et rapporté au courant d'équilibre moyenné selon .
Les données sont celles de la Fig.(4.14).

long de la séparatrice et notamment au niveau du point O, comme nous pouvons le voir sur les courbes de niveau de l'Activité, Fig.(4.19) en bleu. Cette variation de flux magnétique va créer un courant hors résonance qui n'est pas négligeable comme dans le cas à faible. L'analyse spectrale nous permet de détailler les modes présents dans les fluctuations de courant. Nous regardons la valeur de $_m$ au point X, Fig.(4.20). Chaque mode est signé selon son déphasage et apporte une contribution positive au courant au point X ou négative. Tous les modes entrent en jeu pour réaliser la compensation des fluctuations du courant au point X. Nous regardons maintenant le spectre de rapporté à l'équilibre et moyenné selon , Fig.(4.21). C'est une observation globale par rapport à l'observation locale le long de la résonance. Plus augmente, plus l'importance du mode $m = 0$ relativement au mode $m =$ augmente. Les modes suppérieurs à 1 sont négligeables. Le courant créé hors résonance par l'advection est cumulé dans le mode $m = 0$. Cela rejoint nos conclusions de la Sec.(4.6) : le mode $m = 0$ est nécessaire à la mesure de l'îlot car il est présent surtout en dehors de la résonance. La Fig.(4.22) montre deux exemples de modification temporelle du profil

d'équilibre de courant pour les profils et .

Le mécanisme de saturation n'est finalement pas assujetti à la limite "petit îlot" car il est valable au point X où les fluctuations se compensent et donc restent faibles. Par contre, nous posons une séparation entre le régime "petit îlot" et le régime "îlot intermédiaire" à partir du moment où le mode $m = 0$ n'est plus négligeable hors de la résonance. Le calcul proposé précédemment à la Sec.(4.7.1) reste vrai tant que l'on prend en compte le mode $m = 0$ dans la mesure de la taille d'îlot, comme pour les mesures expérimentales avec l'ECE. Ce travail a été réalisé dans l'article à publier [55] où la formule Eq.(4.12) devient :

$$_{0\ 1} = \left[\quad 0 \quad {}^{2}_{0\ 1} \right] \tag{4.49}$$

où la partie rouge en ${}^{2}_{0\ 1}$ est due à la contribution du mode $m = 0$ au calcul. Nous reprennons sur la Fig.(4.23) les mesures d'îlots Eq.(4.28) et Eq.(4.29) ainsi que la forume Eq.(4.49) en fonction de . Nous observons un excellent accord entre la théorie et la mesure associée pour le profil mais pas pour le profil . Nous nous attacherons à expliquer cette différence récurrente dans la section suivante.

4.7.4 Les îlots larges

Les mécanismes de saturation restent valables pour des valeurs de . Si nous augmentons encore la valeur de , d'autres phénomènes apparaissent à la résonance. Ils peuvent modifier le mécanisme de saturation et donc la prédiction de la saturation. Les travaux en ce domaine décrivent l'effondrement du point X en deux points Y qui encadrent une nouvelle feuille de courant. Celle-ci peut également donner naissance à de nouvelles instabilités de déchirement magnétique : des plasmoïdes. La formation d'une nouvelle feuille de courant au point X a été étudiée analytiquement dans [61] et numériquement dans [33]. La référence [61] calcule une taille d'îlots critique (pour "ribbon") au delà de laquelle apparait la feuille de courant sedondaire. Nous recherchons alors une valeur de à partir de laquelle l'instabilité secondaire apparait, puis nous la comparons à pour voir s'il y a correspondance. Nous utilisons la méthode introduite dans [33]. Il s'agit de mesurer l'évolution du taux de croissance de pt X : le flux magnétique au point X. Pendant la phase linéaire de l'instabilité de déchirement magnétique, correspond au taux de croissance linéaire, Eq.(4.19). Pendant la croissance de l'îlot puis sa saturation, ce taux de croissance diminue pour arriver à zéro. Dans le cas où , cette diminution de est contrée par l'effondrement du point X qui génère une activité supplémentaire à

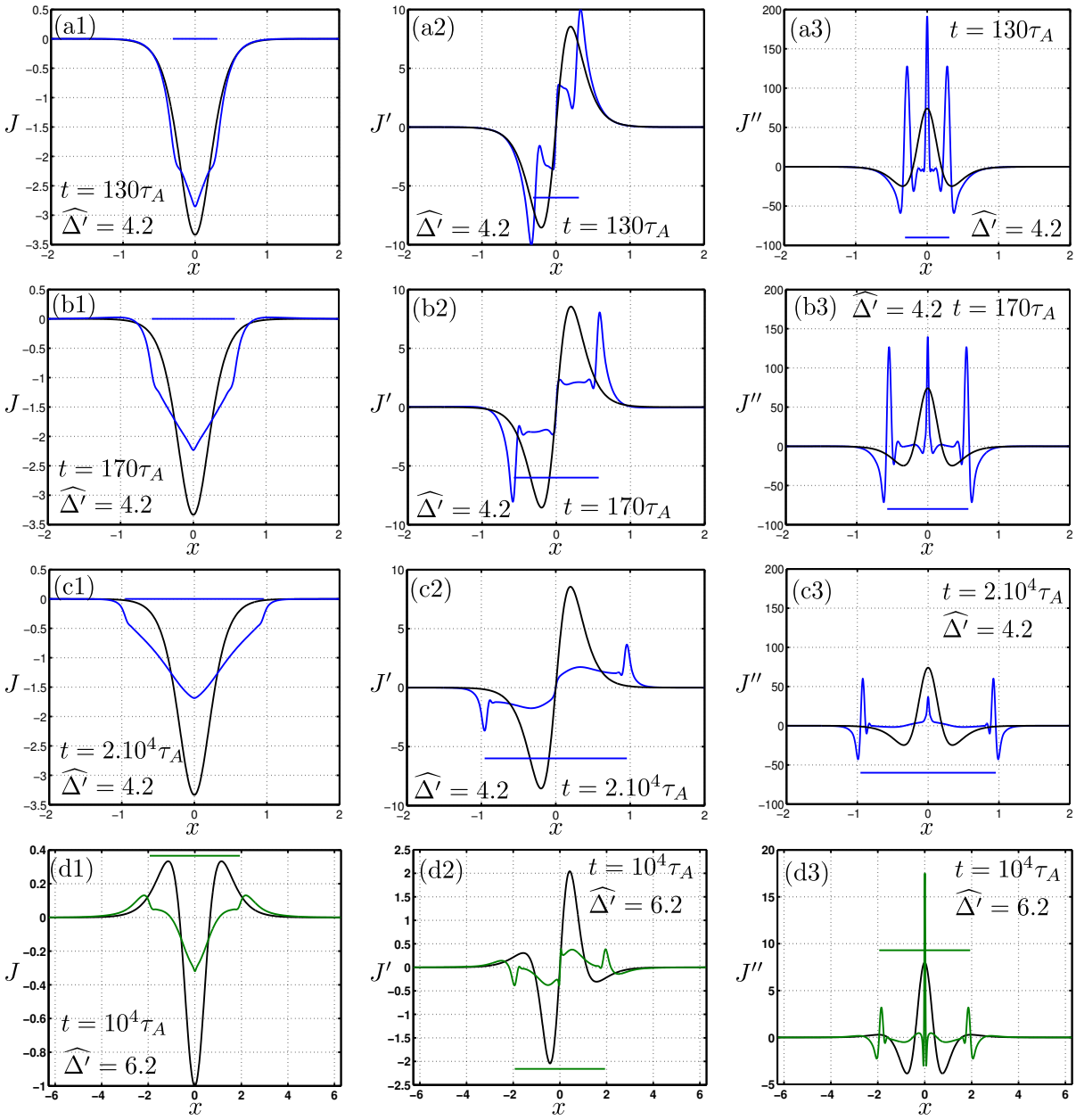

FIGURE 4.22 – Courant d'équilibre et ses dérivées modifié par la fluctuation moyenne à trois instant
(a#) 30 ; (b#) 0 ; (c#) saturation pour le profil (bleu) ; (d#) saturation pour le profil (vert)
(#1) et $_0$; (#2) et $_0$; (#3) et $_0$
En noir, pour rappel, le profil d'équilibre initial. Le segment représente la taille de l'îlot magnétique.

Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.14), = pour le profil .

géométrie slab, $3D_{mn}$ Non-linéaire	
= 0 = = = = ^{3} 0	

Profil magnétique	Paramètres diffusifs
= =	= 0 = 0^3

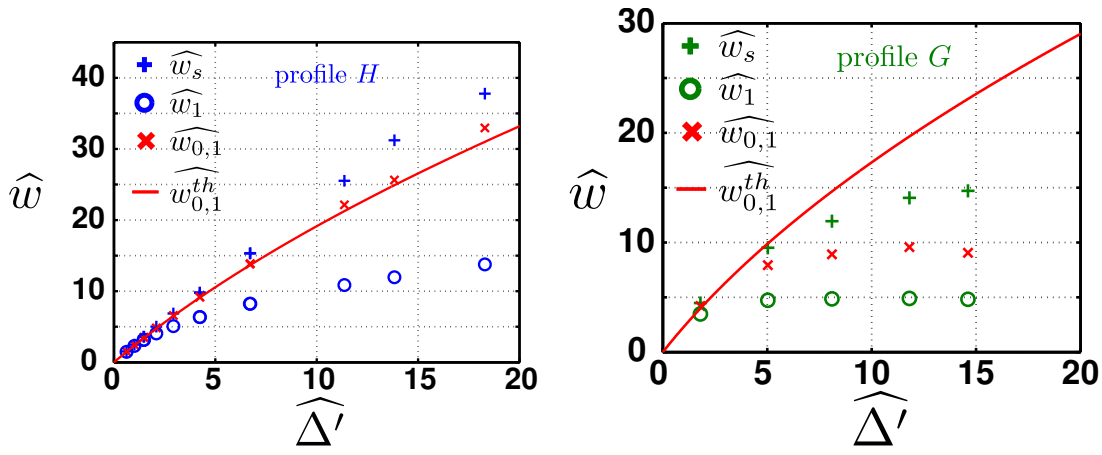

FIGURE 4.23 – Différentes tailles d'îlot , $_1$, $_{0\ 1}$ and $_{0\ 1}$ pour différentes valeurs de , et ceci pour le profil et .
Les données sont celles de la Fig.(4.10).

cet endroit. Nous considérons alors le moment où = 0 comme le début de l'effondrement du point X. Le point X peut être repéré par le minimum du flux magnétique sur la résonance, comme le propose la méthode de mesure des tailles d'îlot Sec.(4.6.2), Fig(4.24c). Nous pouvons aussi estimer que le point X est diamétralement opposé au point O, à une distance de , Fig(4.24b). Dans le cas où , il n'y a pas de feuille de courant secondaire, les deux méthodes donnent la même position du point X, Fig.(4.24a). Dans le cas où , il y a une différence de position et donc les variations des taux de croissance ne correspondent plus. La Fig.(4.25) présente deux exemples d'évolution de . Le panneau (a) correspond au cas sans feuille de courant secondaire et le panneau (b) avec. Les panneau (c) et (d) correspondent au profil . Nous remarquons que la mesure est beaucoup plus délicate pour le profil que pour le profil . Nous notons la taille à partir de laquelle apparait la feuille de courant secondaire, repérée à partir de l'instant où = 0 sur des figures du type de (4.25). Nous obtenons alors la Fig.(4.26). La valeur de est mesurée à . Elle n'est pas dépendante du profil utilisé. L'effondrement du point X apparait donc pour des valeurs de où la formule heuristique Eq.(4.12) est valable. C'est un phénomène transitoire qui ne change pas la saturation du point X, même en cas de plasmoïdes. La Fig.(4.27) montre les courbes de niveau de pendant l'effondrement du point X ainsi que la présence de plasmoïdes. La Fig.(4.28) montre encore les courbes de niveau de mais à saturation pour différentes simulations. Il n'y a plus de trace de la feuille de courant secondaire.

Un autre phénomène peut modifier le mécanisme de saturation : la coalescence des îlots magnétiques. Nous avons vu sur la Fig.(4.9) que la première harmonique de

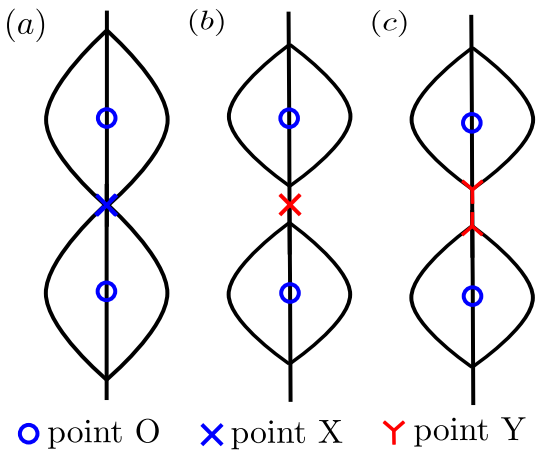

FIGURE 4.24 – Schéma de la zone de mesure du taux de croissance du point X.
(a) : pas de feuille de courant secondaire.
(b) : mesure au milieu de la feuille de courant secondaire.
(c) : mesure du minimum quelquepart sur la feuille de courant secondaire.
Quand les mesures (b) et (c) correspondent, nous sommes dans le cas (a).

l'instabilité de déchirement magnétique n'était pas forcément la plus instable pour des conditions de bords données. Il est donc possible, si est élevé que l'instabilité de déchirement magnétique ait pour mode le plus instable, un mode supérieur à 1 et il y a une valeur critique où la dynamique non-linéaire présente une coalescence car le mode $m =$ n'est plus dominant linéairement. les conditions de bord vont jouer un rôle déterminant ici. Si nous considérons , nous auront toujours $_{m\ 1}$ $_{m}$ pour tout m , Tab.(F.1), et donc aucune coalescence possible. Mais avec des conditions de bords nulles en , l'augmentation de comme variable d'ajustement pour conduit à une valeur limite pour indépendante de m : $_{m} = \frac{}{_{2}} \frac{_{2}}{_{2}}$, formule obtenue avec le Tab.(F.1). Nous réalisons pour trouver , des simulations linéaires pour différentes valeur de . Nous récupérons alors les taux de croissance $_{1}$, $_{2}$ et $_{3}$ des modes $m =$, et 3. La Fig.(4.29) présente ces taux de croissance en fonction de $_{1}$: la valeur de pour $m =$. Ceci a été réalisé pour deux valeurs de : 5 et 10, avec le profil et . Nous considérons que $=$ si $_{2}$ dépasse $_{1}$ (soit en pratique $_{1} =$ $_{2}$ sur la Fig.(4.29)). Nous obtenons de la Fig.(4.29) que $=$ pour $=$ et $=$ pour $= 0$. La valeur de coalescence n'est finalement que peu dépendante de la taille radiale de la simulation : doubler la taille radiale de la boîte de simulation ne change que de 15% la valeur de à partir de laquelle le mode $m =$ est dominant. Pour le profil , nous obtenons un résultat similaire, mais la valeur de est encore plus élevée : entre et selon .

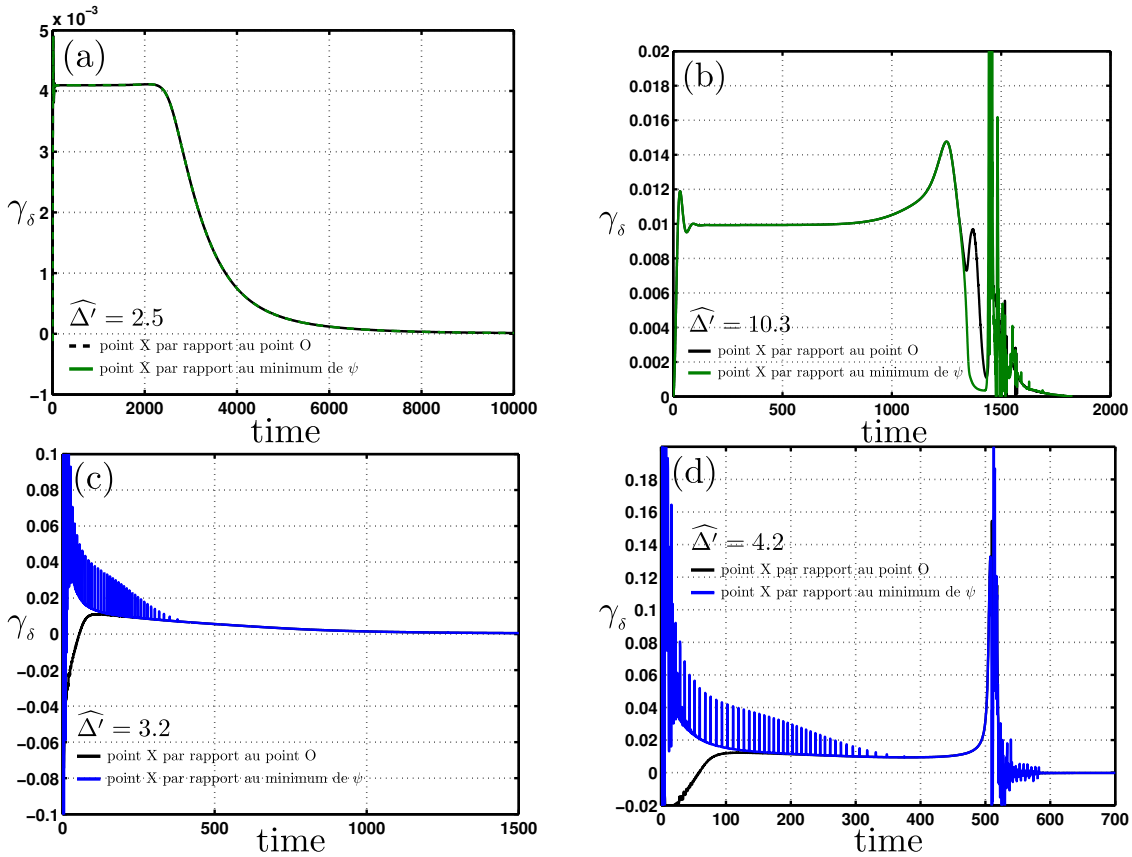

FIGURE 4.25 – Evolution de selon les deux méthodes de détection du point X.
Pour le profil : (a) Cas sans feuille de courant secondaire. (b) Cas avec feuille de courant secondaire.
Pour le profil : (c) Cas sans feuille de courant secondaire. (d) Cas avec feuille de courant secondaire.

géométrie slab, $3D_{mn}$				Non-linéaire	
= 0	=	=	=	= ^{3} 0	=
= 0	=	=	=	= ^{3}0	= 0 3

Profil magnétique		Paramètres diffusifs	
=	=	= 0	= 0^3

géométrie slab, $3D_{mn}$				Non-linéaire	
= 0	=	=	= 0	= ^{3} 0	= 3
= 0	=	=	=	= ^{3}0	=

Profil magnétique		Paramètres diffusifs	
=	= 0	= 0	= 0

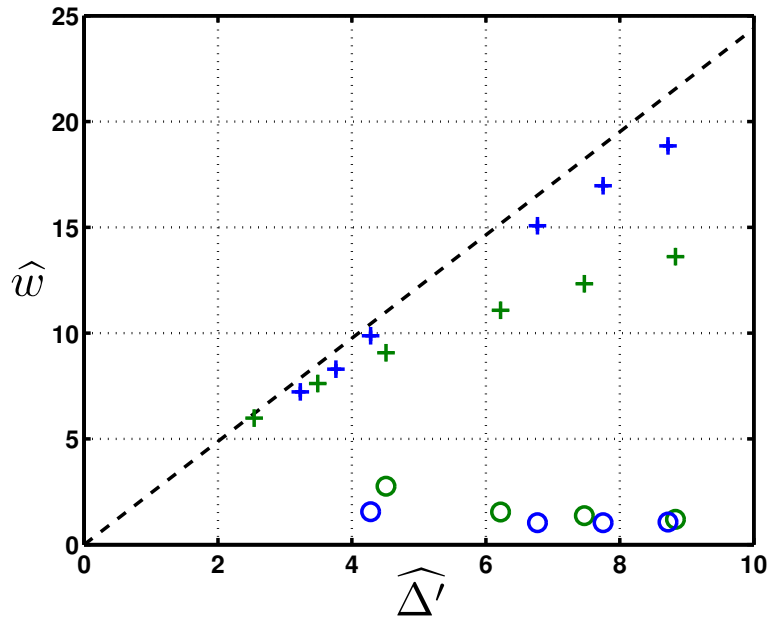

FIGURE 4.26 – Taille d'îlot en fonction de . Droite pointillée : $_1$. Croix : . Cercle : la taille critique pour laquelle la feuille de courant secondaire apparait. En bleu les données du profil . En vert, celles du profil .

géométrie slab, $3D_{mn}$				Non-linéaire	
$= 0$	$=$	$=$	$=$	$= {}^3$	0

Profil magnétique		Paramètres diffusifs	
$=$	$=$	$= 0$	$= 0^3$

géométrie slab, $3D_{mn}$				Non-linéaire	
$= 0$	$=$	$=$	$= 0$ 3	$= {}^3$	0

Profil magnétique		Paramètres diffusifs	
$=$	$= 0$	$= 0$	$= 0$

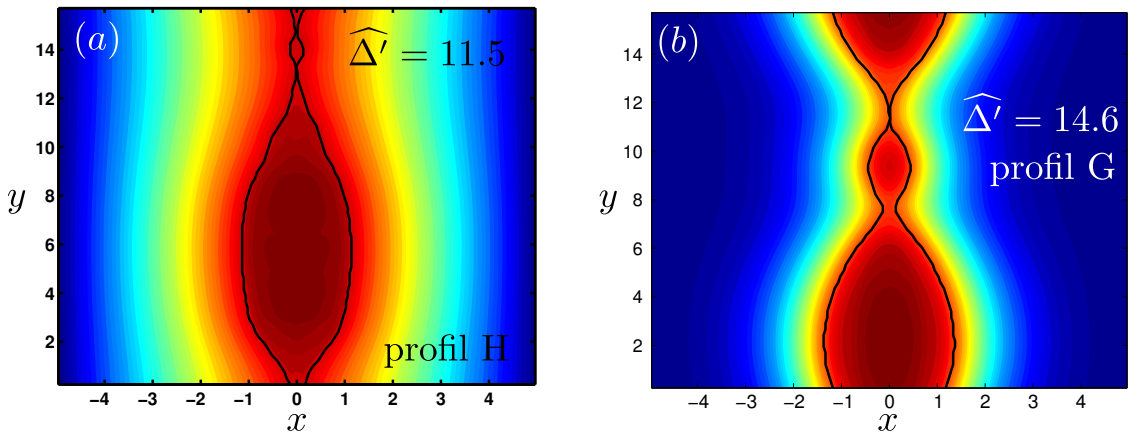

FIGURE 4.27 – Courbe de niveau de avec un plasmoïde.
(a) : Pour le profil , = . Les données sont celles de la Fig.(4.26) pour les valeurs maximales de mais avec les paramètres diffusifs = 0 et = 0 .
(b) : Pour le profil , = .

géométrie slab, $3D_{mn}$				Non-linéaire
= 0	= 0	=	=	= 0

Profil magnétique		Paramètres diffusifs	
=	=	= 0	= 0

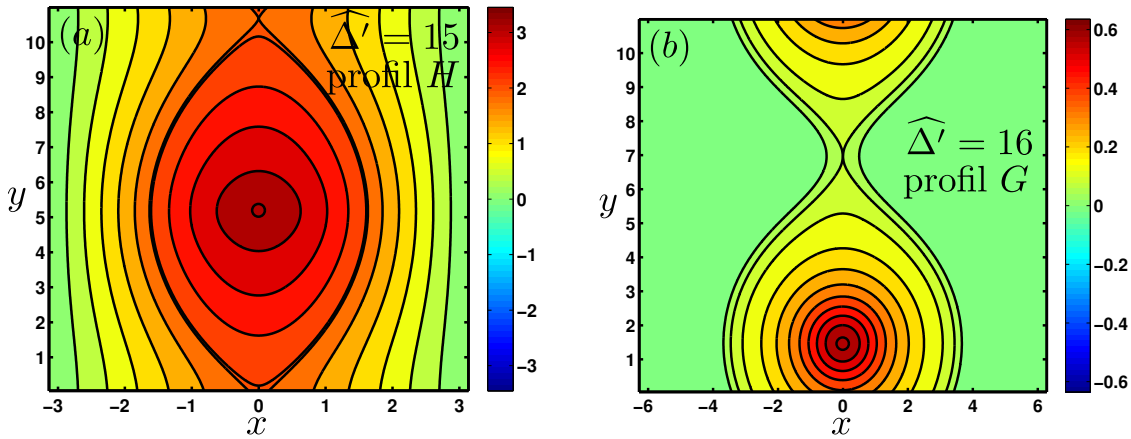

FIGURE 4.28 – Courbe de niveau de .
(a) : Pour le profil , = .
(b) : Pour le profil , = .
Les données sont celles de la Fig.(4.26) pour les valeurs maximales de .

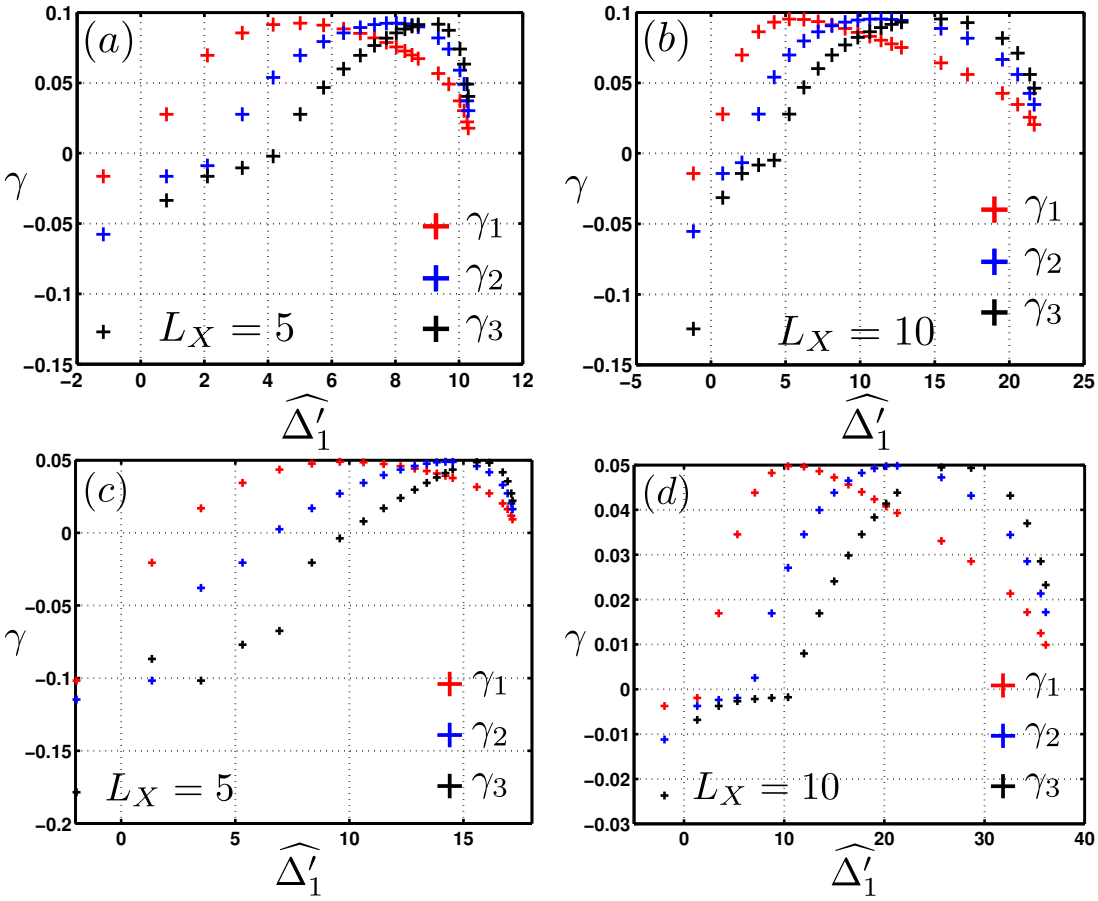

FIGURE 4.29 – Taux de croissance des modes $m =$ et 3 en fonction de $_1$ du mode $m =$ pour deux largeurs de boîte $=$ ou 0. Conditions de bord nulles.
(a) : profil $=$. (b) : profil $=$ 0.
(c) : profil $=$. (d) : profil $=$ 0.

géométrie slab, $3D_{mn}$	Linéaire
$=$ 0 $=$ ou 0 $=$ $= 0$ 0	$=^3$ 0

Profil magnétique	Paramètres diffusifs
$=$ $= 0$ 3	$=$ 0^3 $=$ 0

géométrie slab, $3D_{mn}$	Linéaire
$=$ $=$ ou 0 $=$ $= 0$ 0	$=^3$ 0

Profil magnétique	Paramètres diffusifs
$=$ $=$	$=$ 0^3 $=$ 0

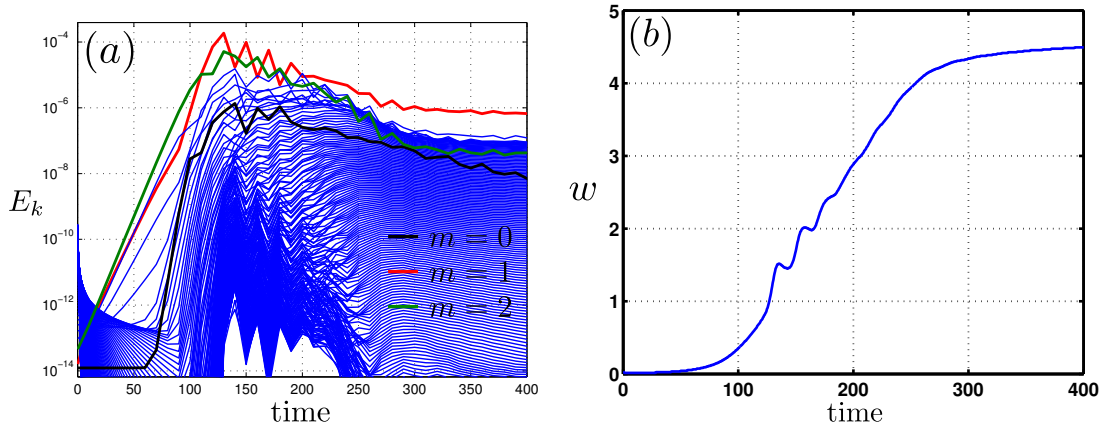

FIGURE 4.30 – (a) Spectre de l'énergie cinétique. (b) Evolution de . Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.14), =

Dans ce cas d'harmoniques supérieures plus instables, on observe un réagencement non linéaire de la chaîne d'îlots magnétiques pour arriver à un seul îlot. Nous illustrons cette coalescence en reprenant la simulation haute résolution avec = avec le profil . Pour se faire, nous montrons dans un premier temps l'évolution de l'énergie cinétique des différents modes de la simulation et sur la même échelle de temps, le détail de l'évolution de . Nous observons sur le panneau gauche de la Fig.(4.30) que le mode le plus instable est le mode $m =$. Pendant la phase linéaire, il y a une chaîne d'îlot correspondant au mode $m =$. A partir de = 0, un mouvement s'amorce entre les îlots de la chaîne : ils se rapprochent. Le mouvement des îlots magnétiques est détectable par la croissance du mode 0 de l'énergie cinétique en noir ici. A = 00, le taux de croissance du mode $m =$ change, c'est la fusion des îlots commence. Le battement entre les modes $m =$ et $m =$ témoignent des échanges d'énergie entre ces modes, pour ne laisser dominant que le mode $m =$ observable sur la dernière capture d'écran de la Fig.(4.31). La fusion de la chaîne d'îlot en un seul est visible sur l'évolution de la taille de l'îlot sur le panneau droit de la Fig.(4.30) : elle correspond aux petites oscillations entre = 00 et = 00. Une fois la fusion de la chaîne d'îlot terminée, le mode $_0$ décroit pour redevenir négligeable : il n'y a pas d'autre déplacement de l'îlot. La coalescence est encore une fois un phénomène transitoire avant la saturation qui ramène la dynamique du mode $m =$ au premier plan : c'est l'énergie du mode $m =$ qui domine après la coalescence, Fig.(4.30a).

Ni l'effondrement du point X, ni la coalescence ne peuvent expliquer le changement de validité de la formule semi empirique = $_1$ = ^{2} à la valeur . Aucun des deux phénomènes n'apparaît en même temps à la valeur de pour les deux profils et . La différence entre et doit être cherchée ailleurs : hors de

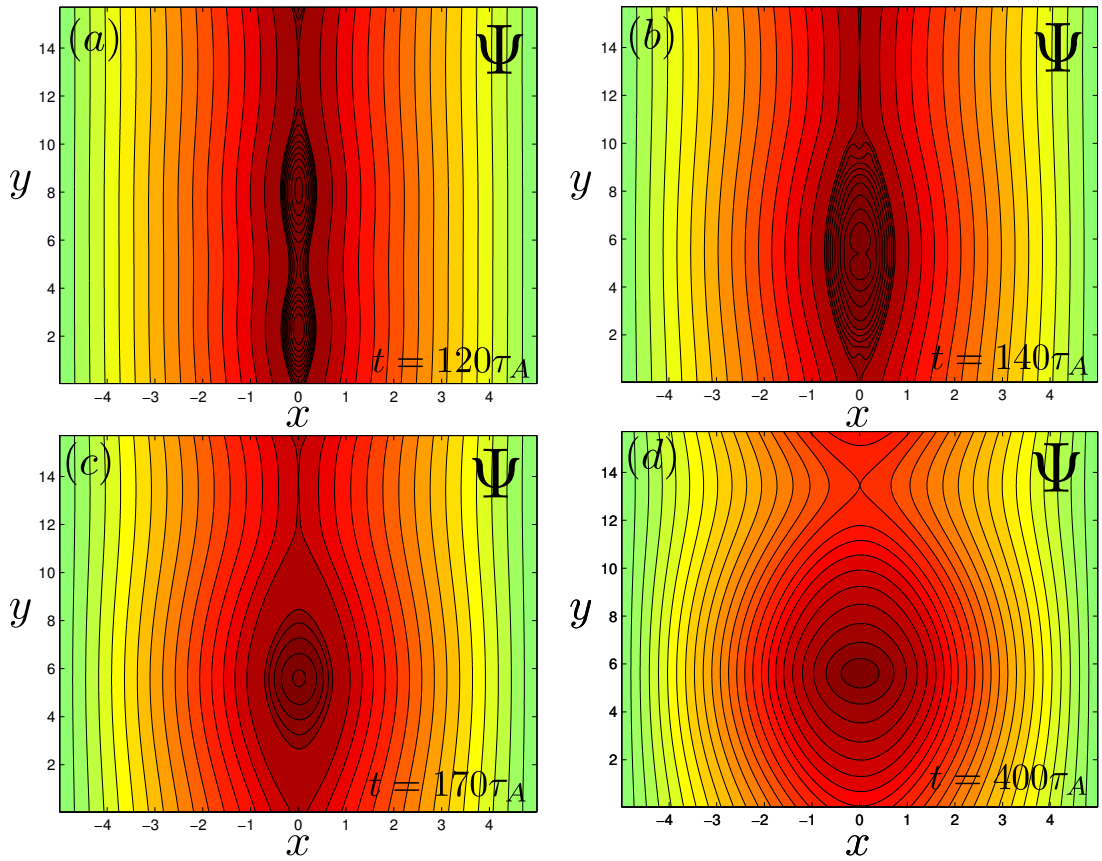

FIGURE 4.31 – Courbes de niveau de pour = 0, 0, 0, 00. Les temps correspondent aux oscillations de sur la Fig.(4.30b). Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.14), =

Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.14), =

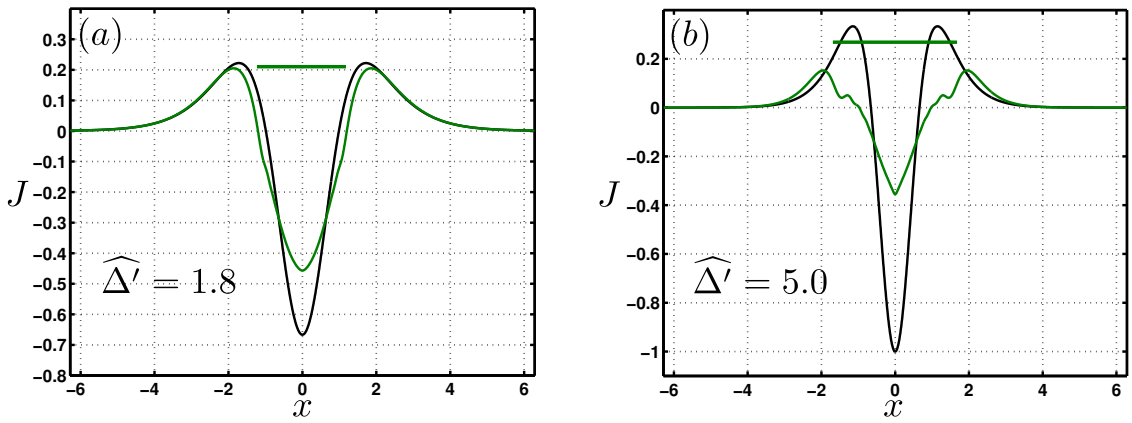

FIGURE 4.32 – Courant d'équilibre du profil en noir. Courant d'équilibre modifié par l'îlot magnétique à saturation en vert. le segment représente la taille de l'îlot. (a) : = et (b) : = . Les données de simulation sont celles de la Fig.(4.26)

la résonance. Nous savons désormais que le courant est drastiquement modifié lors de la croissance de l'îlot magnétique. La Fig.(4.22) illustre les changements. Une des différences entre le profil et que nous avions remarquée au début etait la présence pour le profil de feuille de courant supplémentaire de part et d'autre de la résonance. Nous pouvons imaginer que lors de sa croissance, l'îlot magnétique passant outre ces feuilles de courant hors résonance en ressente des effets. Il est raisonable de penser que l'Eq.(4.12) ne prenne pas en compte ces effets puisqu'ils sont hors résonance. Dans ce cadre il serait logique qu'en fait, il ne faille pas rechercher pour le profil , mais en fait une taille d'îlot relative à la position des feuilles de courant hors résonance. Pour illustrer ce propos, nous montrons, à l'instar de la Fig.(4.22), le courant d'équilibre modifié à saturation pour le profil en ajoutant par un segment la taille de l'îlot magnétique pour (a) et pour = (b). Nous observons que l'îlot magnétique se trouve avant la feuille de courant hors résonance pour , Fig.(4.22a) et après la feuille de courant hors résonance pour , Fig.(4.22b). Il faut donc étudier le rôle de ces feuilles de courant.

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé le problème de la taille de l'îlot magnétique. Le pilotage des tokamaks et la prédiction des tailles d'îlot sont réalisés à l'aide de formules valables dans un cadre d'hypothèses qui suppose que l'îlot magnétique soit de petite taille. Malgré ces limitations théoriques, l'accord entre les simulations et la théorie est bon. Nous avons alors exploré numériquement la mesure de l'îlot magnétique et sa dynamique pour comprendre cet accord. Il s'avère que la dynamique de saturation

est localisée au point X de l'îlot, seul endroit où la théorie est encore valable pour les îlots larges. nous avons trouvé également que des mesures d'îlot complètes, avec l'ECE et non la fluctuation magnétique à la résonance, donne de bons résultats hors cadre "petit îlot".

Nous avons également étudié les phénomènes complémentaires qui apparaissent au point X. Les deux phénomènes étudiés, l'effondrement du point X et la coalescence sont des phénomènes transitoires lors de la croissance de l'îlot. Le mécanisme de saturation reste inchangé et ils n'affectent pas l'accord hors cadre "petit îlot".

Pour terminer nous introduisons l'idée que la dynamique et la saturation de l'îlot magnétique ne sont peut-être pas liées seulement au point X. La présence du courant sur le passage de la séparatrice affecterait la taille de l'îlot à saturation. Le chapitre 5 est dédié à l'étude de l'intéraction entre le courant externe et l'îlot magnétique.

Chapitre 5

Effets d'une feuille de courant externe sur l'îlot magnétique

5.1 Description de la feuille de courant externe

Les théories que nous avons revisitées aux Sec.(4.5) et Sec.(4.7.1) ont en commun le cadre "petit îlot" et par conséquent ne considèrent que la dynamique des îlots magnétiques uniquement à la résonance. Il y a à cela des motivations : l'îlot naît effectivement sur la résonance, l'instabilité est localisée et les théories utilisent une procédure de raccordement valide au point X comme on l'a vu au chapitre (4). Tous les effets hors résonance sont concaténés dans le paramèters . Nous avons montré avec l'étude des îlots larges à la Sec.(4.7.4) que la résonance était riche en phénomènes supplémentaires, comme la coalescence où l'effondrement du point X. Mais nous avons également effectué une conjecture : les effets modifiant la dynamique peuvent avoir leur source hors de la résonance magnétique. C'est une idée importante car les champs magnétiques présents dans les tokamaks ont des variations continues sur tout le long du petit rayon. Nous avons donc de part et d'autre de la résonance, un champ magnétique poloïdal dépendant de , ainsi qu'un courant parallèle associé ; à contrario des profils et qui ne supposent des variations d'équilibre qu'au voisinage de la séparatrice. Les modifications du courant d'équilibre de la Fig.(4.22) appuient cette conjecture. Le profil magnétique ne comporte pas de courant hors résonance : l'îlot en a créé le long de son extension radiale en aplatissant la feuille de courant de la résonance. Le profil contenait des feuilles de courant positives accolées à la feuille de courant de la résonance : l'îlot a aplati les trois feuilles de courant lors de sa croissance. Nous en avons conclu que la présence ou à l'absence de feuilles de courant accolées à la résonance était probablement à l'origine de comportements dynamiques différents pour une même valeur de . Nous souhaitons aller plus loin dans l'étude de ce phénomène. Il faut quantifier dans quelle mesure ces aspects dynamiques hors

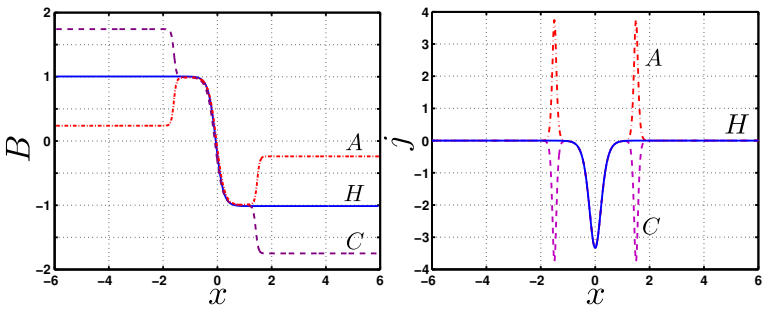

FIGURE 5.1 – Profils magnétiques d'équilibre , et et courant d'équilibre. = 0 , = 0 , = , = 0 3, = 0 .

résonance sont négligeables ou non. Nous avons déjà un élément de réponse avec la Fig.(4.12). Les deux profils et ne produisent pas d'îlots magnétiques de la même taille à partir du moment où l'îlot magnétique du profil atteint les feuilles de courant accolées. Mais cet élément de réponse n'est pas probant car les feuilles de courant supplémentaires sont accolées à la feuille de courant principale. Nous ne pouvons discriminer les effets dûs à l'une ou aux autres. Nous proposons alors de nouveaux profils magnétiques qui possèdent les caractéristiques du profil à la résonance, et des feuilles de courant additionnelles, hors résonance et paramétrables :

$$= \quad _u \tag{5.1}$$

$$_u = - \left(\quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \right) \tag{5.2}$$

Les paramètres de ces feuilles de courant externes correspondent à leur position relative à la résonance , leur largeur , leur intensité , et leur signe = . Pour une bonne discrimination des effets de la résonance des effets externes nous choisissons des paramètres tel que $_u$ = $_u$ ne recouvre pas : . L'amplitude a aussi ses limites : si = , il faut 0 . Le cas contraire permettrait l'apparition de trois résonances en , 0 et , les solutions de = 0. La Fig.(5.1) montre les profils magnétiques et et les courants associés comparativement au profil . Nous observons bien deux feuilles de courant externes positives pour le profil et négatives pour le profil . Bien entendu, ces profils magnétiques ne sont pas réalistes, mais ils sont intéressants pour comprendre l'interaction entre le courant externe et l'îlot magnétique.

Note importante : dans ce chapitre, les détails et explications seront donnés pour 0, *la partie* 0 *étant complètement symétrique. Nous parlerons de la feuille de courant au singulier, sachant qu'il y en a deux, par symétrie, en .*

5.2 Saturation de l'îlot magnétique en présence d'une feuille de courant externe

Afin de discriminer les effets de courant loin de la résonance des effets liés à l'instabilité de déchirement magnétique nous commençons par tracer pour les profils , et , la taille d'îlot à saturation en fonction de , Fig.(5.2). On notera que, comme le facteur est identique pour les trois profils, nous pouvons travailler avec les quantités anormalisées et : en effet, l'Eq.(4.38) est identique pour ces profils dans la mesure où . Les différentes valeurs de ont été obtenues par un balayage en = , les autres paramètres étant fixés. Les valeurs de sont calculées avec la méthode de tir de l'An.(A). La Fig.(5.2) contient en fait deux graphiques. Le premier correspond aux tailles d'îlot à saturation selon différentes valeurs de pour les profils , , . Nous avons également ajouté en repère la taille d'îlot théorique $_1$. Le second graphique est placé le long de l'abscisse. Nous y avons tracé le profil de en fonction de . Cette valeur situe la position radiale maximale de la séparatrice de l'îlot magnétique. Nous traçons ainsi deux graphiques superposés pour mettre en lumière la corrélation entre les effets dûs à la feuille de courant externe et la position de celle-ci. Lorsque , les trois profils , et développent des îlots de tailles similaires, en accord avec la formule partiellement heuristique Eq.(4.12). Pour , une différence apparait entre les tailles à saturation avec les profils , et . Pour = , nous avons des îlots magnétiques dont la séparatrice jouxte le voisinage de la feuille de courant externe. C'est donc la feuille de courant hors résonance qui influe sur la taille à saturation, provoquant des effets différents selon le profil où pour une même valeur de .

Le paramètre tient compte de la feuille de courant hors équilibre mais à ce stade, nous ne savons pas encore dans quelle mesure les mécanismes liés à la feuille de courant sont inclus ou non dans le calcul de la taille d'îlot à saturation. Dans la Sec.(F.1), nous avons vu que dépendait du profil magnétique. De plus c'est la valeur de qui va nous permettre de savoir si l'îlot magnétique atteint ou non la feuille de courant externe. Nous devons alors faire la part entre la variation de la taille d'îlot dûe à la valeur de et celle due à la feuille de courant externe. Nous comparons alors deux types de simulations : des simulations avec le profil ou puis des simulations avec le profil mais avec une valeur de ajustée pour avoir des identiques à ceux du profil ou . En pratique nous utilisons la Fig.(4.13) comme courbe d'étalonage pour avoir en fonction de pour le profil . Avec la comparaison des deux types de simulations, la taille d'îlot due à la valeur de sera identique, et, si différences il y a, elles seront dûes à la feuille de courant uniquement. Nous

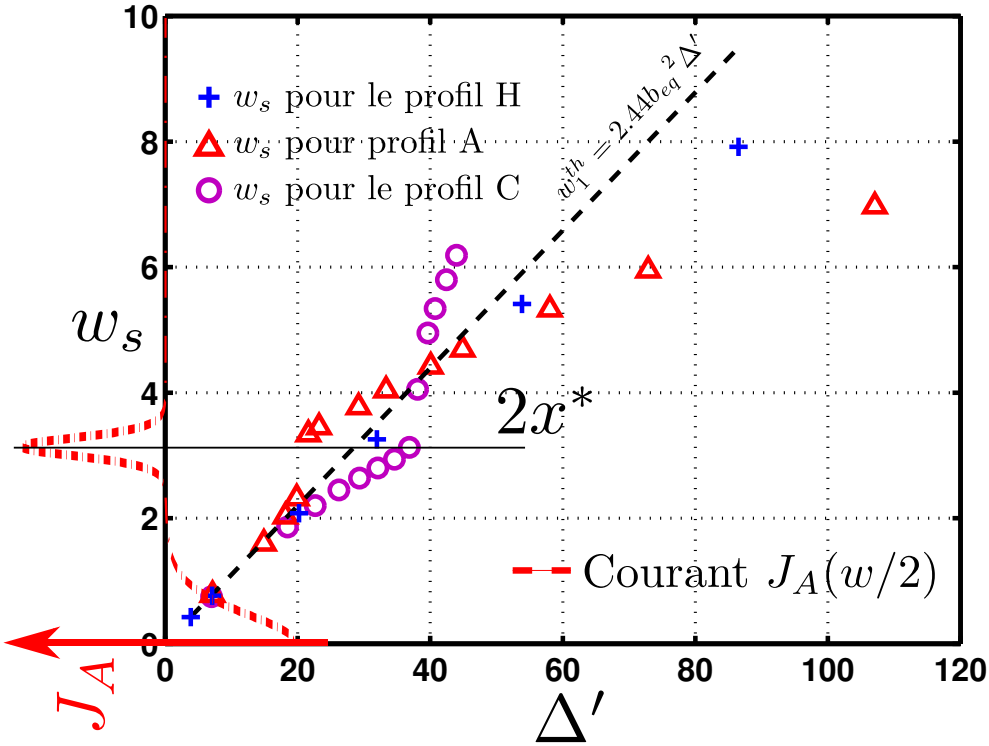

FIGURE 5.2 – Taille d'îlot à saturation selon différentes valeur de pour différents profils , et . Le long de l'abscisse, l'amplitude du courant en fonction de . En pointillé, la droite = $_1$.

géométrie slab, $3D_{mn}$			Non-linéaire
= 0	=	=	= 0 à = 0 ^{3}
Profil magnétique	Profil magnétique et		Paramètres diffusifs
= = 0 3	= = 0 =		= 0 = 0 ^{3}

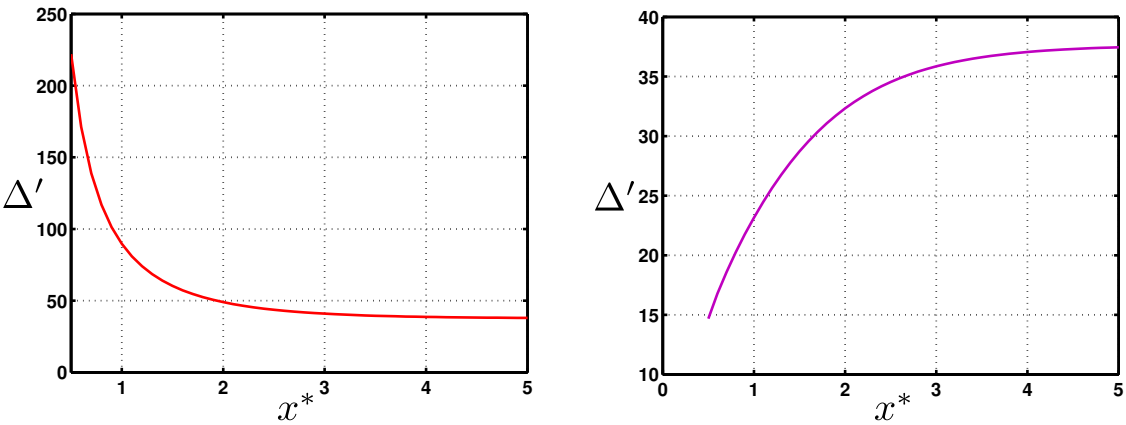

FIGURE 5.3 – Valeur de selon pour les profils et , avec = , = 0 , = 0 3, = 0 , = , = 3

avons donc un problème de caractérisation : il faut trouver d'autre paramètres que pour caractériser les effets externes puisque mélange les effets de la résonance et potentiellement d'autres mécanismes. Comme la position de la feuille de courant externe joue un rôle dans les effets supplémentaires, nous utilisons ce paramètre. La Fig.(5.3) montre les variations de en fonction de (valeurs obtenues avec la méthode de tir, An.(A)). Plus la feuille de courant est proche de la résonance, plus elle influence la valeur de . Pour , la feuille de courants hors résonance ne modifie pas notablement . Si , les feuilles de courant externes chevauchent celles de la résonance, nous sommes trop proches de la limite d'ulilisation des profils et : . Pour , la présence de la feuille de courant change beaucoup la valeur de . La Fig.(5.4) présente la taille d'îlot à saturation pour differentes valeur de pour les profils et puis pour le profil avec la valeur de ajustée pour égaler celles des profils ou . La comparaison des tailles d'îlots entre les profils et puis entre les profils et pour différentes positions nous indique que les effets de la feuille de courant sont négligeables si : la feuille de courant est trop éloignée pour changer ou avoir une interaction supplémentaire. Dans le cas où , on observe un écart d'environ 20% dû aux effets additionnels de la feuille de courant hors résonance. Le dernier cas, où , montre un large impact de la feuille de courant hors résonance sur la taille d'îlot : à équivalent, la taille varie du simple au double. Nous rattachons ces phénomènes au contrôle d'îlot par chauffage. Cela consiste à ajouter localement du courant par chauffage avec l'ECRH (Electron Cyclotron Resonance Heating) au point X ou au point O par à-coups en phase avec la rotation de l'îlot magnétique [11, 59]. Le but est de changer la valeur de pour forcer la stabilisation de l'îlot

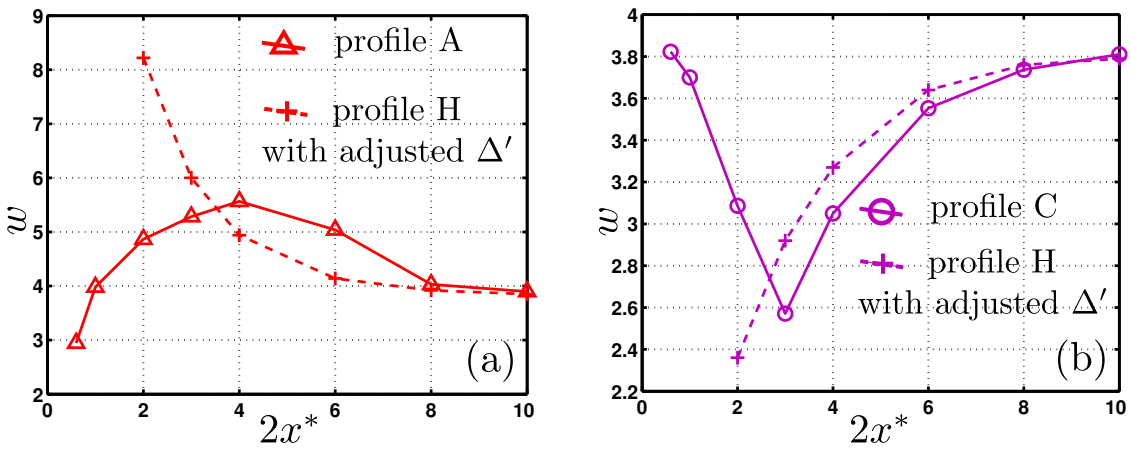

FIGURE 5.4 – en fonction de pour les profils et puis pour le avec un ajusté.

géométrie slab, $3D_{mn}$			Non-linéaire	
= 0	=	=	= 3	= 0^3
Profil magnétique		Profil magnétique et		Paramètres diffusifs
=	= 0 3	=	= 0 = 0 à	= 0 = 0 ^{3}

magnétique [66]. Nos résultats ici ne remettent pas en cause cette méthode qui a fait ses preuves expérimentalement, mais posent une alternative : il est possible de jouer sur la taille des îlot magnétiques en ajoutant du courant sur les côtés de l'îlot. Le but n'est plus alors d'influer sur la valeur de , mais d'utiliser l'absorption de courant comme effet limitant à la croissance de l'îlot magnétique. Cette méthode alternative aurait l'avantage de se passer de la phase de détection de l'îlot et du cadençage de tir de l'ECRH au point O de l'îlot magnétique. Si l'on suit la Fig.(5.4), un mur de courant du même signe que le courant à la résonance (profil) à l'extérieur de l'îlot magnétique ( ), ou un mur de courant de signe opposé à celui du courant à la résonance (profil) à l'intérieur de l'îlot magnétique ( ) ont des effets réducteurs sur la taille de l'îlot magnétique. Cette alternative au contrôle de la taille d'îlot doit cependant être quantifiée en quantité de courant à injecter : un diagnostic de contrôle doit utiliser le moins d'énergie possible.

Pour donner des éléments de réponse à la question de la quantité de courant nécessaire pour changer la taille de l'îlot magnétique, nous allons étudier l'effet de la feuille de courant externe en fonction de son amplitude . Pour ce paragraphe, nous ne distinguerons plus les profils et car nous passons de l'un à l'autre en balayant de 0 à 0 . Nous parlons du profil . La Fig.(5.5) présente les tailles d'îlots à saturation en fonction de pour différentes valeurs de . Dans le cas où = 0, nous retrouvons les mêmes valeurs à saturation que celles de la Fig.(4.13) :

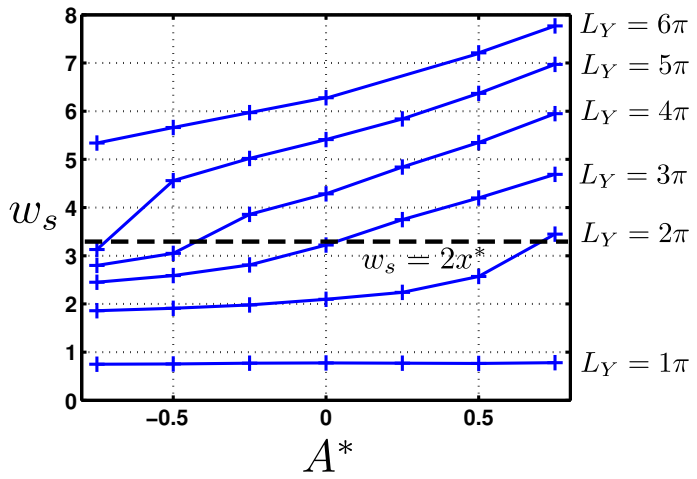

FIGURE 5.5 – Taille d'îlot à saturation pour differents amplitudes et differents . Les données sont celles de la Fig.(5.2), avec une variation supplémentaire sur = 0 0 0 0

le profil est équivalent au profil . Si = , l'îlot n'atteint pas la feuille de courant, il n'y a pas d'effet sur la taille à saturation. Si nous remarquons une dépendance linéaire de la taille de l'îlot à saturation vis-à-vis de l'amplitude du courant. Nous la formalisons de la manière suivante :

$$= \quad _0 \tag{5.3}$$

où est la pente constatée sur les courbes où de la Fig.(5.5). $_0$ correspond à la taille d'îlot à saturation avec = 0 ou dit autrement à la taille d'îlot du profil . Cette pente vaut . Dans le cas où la feuille de courant externe est à l'intérieur de l'îlot magnétique, la taille à saturation correspond à la saturation de l'instabilité de déchirement magnétique vue au chapitre (4) à laquelle s'ajoute une fonction de la quantité de courant rencontrée lors de la croissance de l'îlot magnétique.

Il y a une explication qualitative à l'Eq.(5.3). Nous avons vu à la Sec.(4.7.3) que les îlots à élevé engendraient une modification du courant d'équilibre sur toute leur largeur, Fig.(4.22). L'îlot crée du courant négatif sur son passage pendant la saturation. Si le long de cette progression se trouvait déjà du courant négatif (la feuille externe du profil), il sera inclus par l'îlot lors de sa croissance et l'îlot aura pu s'étendre plus loin. Inversement, si la feuille de courant est positive, il aura fallu à l'îlot qu'il contre complètement le courant positif de la feuille et se sera étendu moins loin. La Fig.(5.6) montre les modifications de courant lors de la progression de l'îlot par le profil . La Fig.(5.7) illustre le courant d'équilibre final après pour un îlot

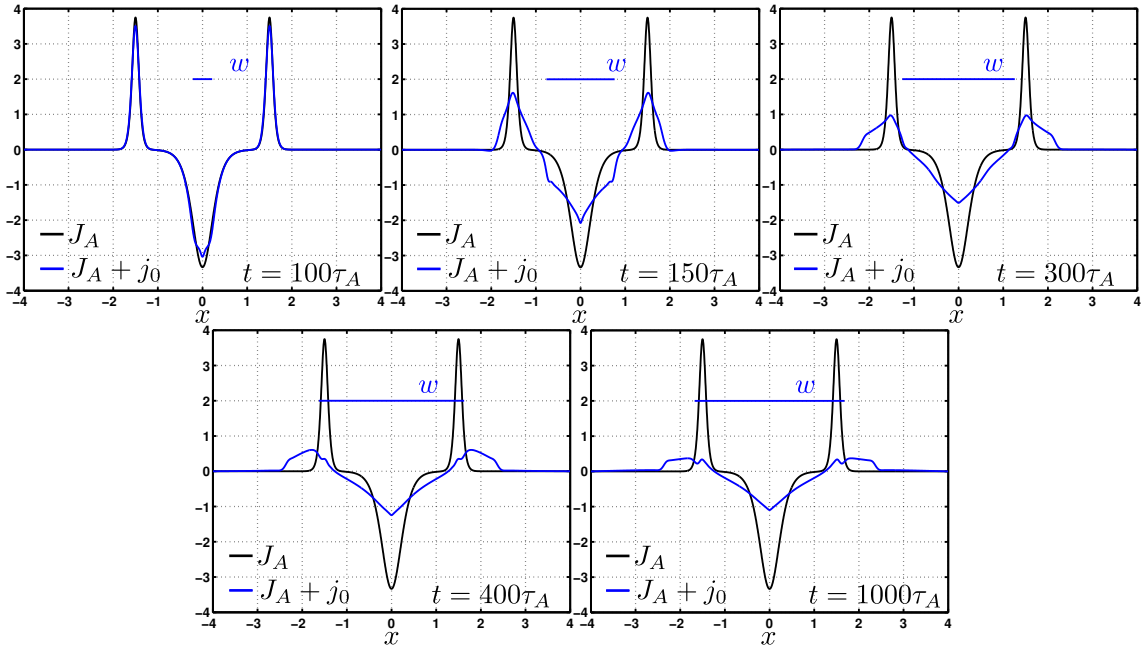

FIGURE 5.6 – Courant d'équilibre et la perturbation de courant $m = 0$ à différents instants : 00 , 0 , 300 , 00 et , 000 . Le segment represente la taille de l'îlot . Les données sont les mêmes que celles de la Fig.(5.11), Profil , = .

magnétique qui englobe la feuille de courant du profil et du profil . Le courant du profil a bien été contré et celui du profil a été inclus.

Nous pouvons désormais revenir sur le profil qui génère les mêmes effets que le profil sur la taille de l'îlot magnétique. Les feuilles de courant externes du profil sont très proches de la résonance, et donc située dans l'îlot magnétique pour des valeurs de assez faible.

5.3 Dynamique de l'îlot magnétique en présence d'une feuille de courant externe

On observe clairement sur la Fig.(5.2) des discontinuités pour la courbe = lorsqu'il y a une feuille de courant externe, profil ou . Les discontinuités sont localisées au voisinage de la feuille de courant externe, . Plus précisément, la discontinuité a lieu pour pour le profil et pour pour le profil : ces zones correspondent à celles où $_u$ 0 Le Tab.(5.1) montre que est la seule quantité d'équilibre à avoir un changement de signe autour de . Il existe donc un mécanisme qui empêche la saturation si $_u$ 0. Pour essayer de l'identifier, il faut examiner la dynamique de l'îlot, de sa taille et en particulier quand il chevauche temporellement la feuille de courant externe.

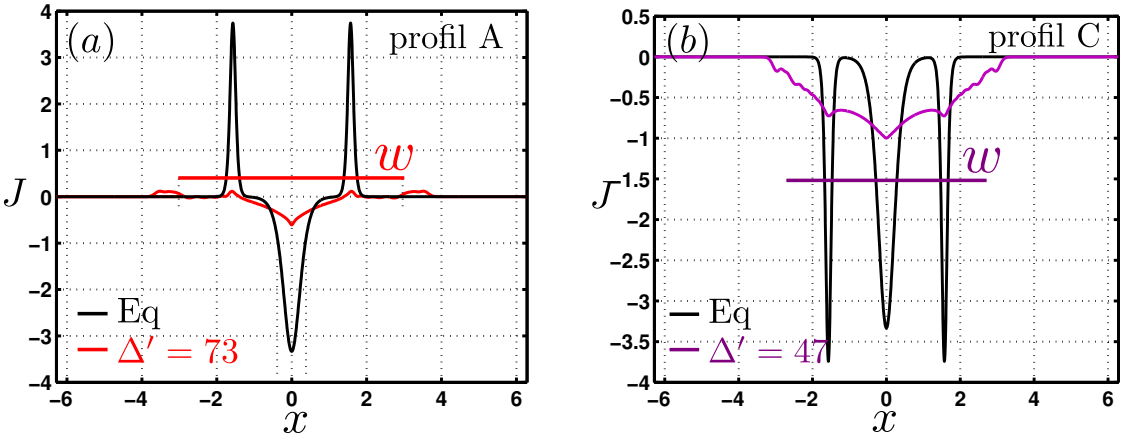

FIGURE 5.7 – Profil de courant d'équilibre et profil de courant modifié par l'îlot à saturation pour un îlot qui englobe la feuille de courant externe.
(a) : profil et (b) : profil .
Les données sont celles de la Fig.(5.2), = 3 pour le profil et = pour le profil .

	N	N	P	N	N	P
	N	N	P	N	P	N

TABLE 5.1 – Signe des équilibres autour de la position de la feuille de courant externe.
N : négatif. P : positif.

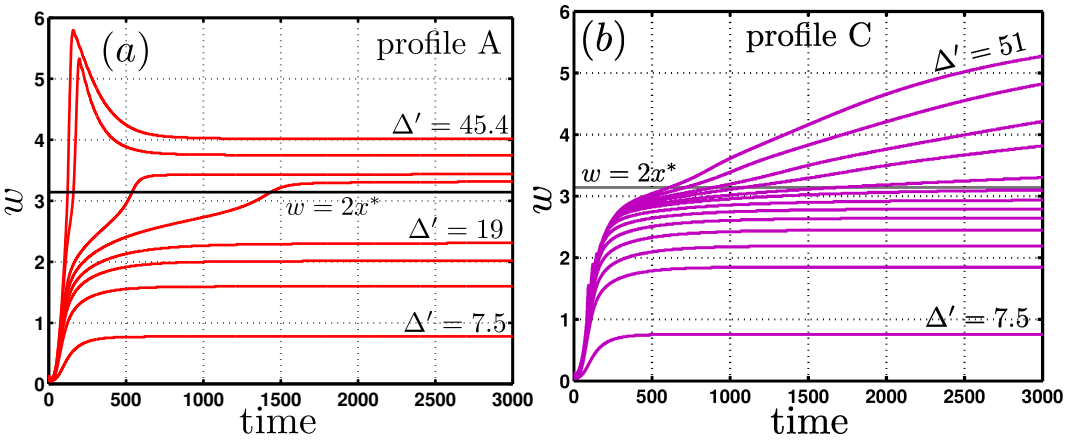

FIGURE 5.8 – en fonction du temps pour différents pour les profils et . Les données sont celles de la Fig.(5.2)

La première donnée à regarder pour décrire la dynamique de l'îlot magnétique est l'évolution temporelle de la taille de l'îlot. Nous reprennons les simulations pour les profils et de la Fig.(5.2), et pour chacune d'entre elles, nous traçons l'évolution temporelle de , la taille de l'îlot magnétique sur la Fig.(5.8). Nous ajoutons également la position de la feuille de courant externe. La saturation pour le profil n'est pas montrée sur ce graphique.

Nous portons d'abord notre attention sur le profil . Les simulations avec une faible valeur de montrent une évolution comprenant une phase de Rutherford puis une saturation. Si la valeur de est assez élevée pour emmener la séparatrice de l'îlot au voisinage de la feuille de courant hors résonance ( ), la croissance de l'îlot s'accélère puis, passant , décélère, Fig.(5.8a). Les deux simulations à le plus élevé présentent une particularité suplémentaire : nous observons bien une accélération pour , mais celle-ci est tellement forte qu'elle entraine l'îlot loin avant que les effets de la décélération puissent prendre le pas sur l'accélération initiale. Il s'agit d'un effet d'inertie sur la croissance de l'îlot. Le profil présente des effets qualitativement similaire mais dans une chronologie inversée. Pour les valeurs de assez élevée pour emmener la séparatrice de l'îlot au voisinage de la feuille de courant hors résonance ( ), on observe alors une phase de Rutherford suivie d'une décélération qui accompagne la saturation. Si malgré la saturation et la décélération, la séparatrice parvient à dépasser la position de la feuille de courant externe où le courant , on observe une accélération de la croissance de l'îlot qui retarde la saturation et amplifie grandement la taille de l'îlot magnétique.

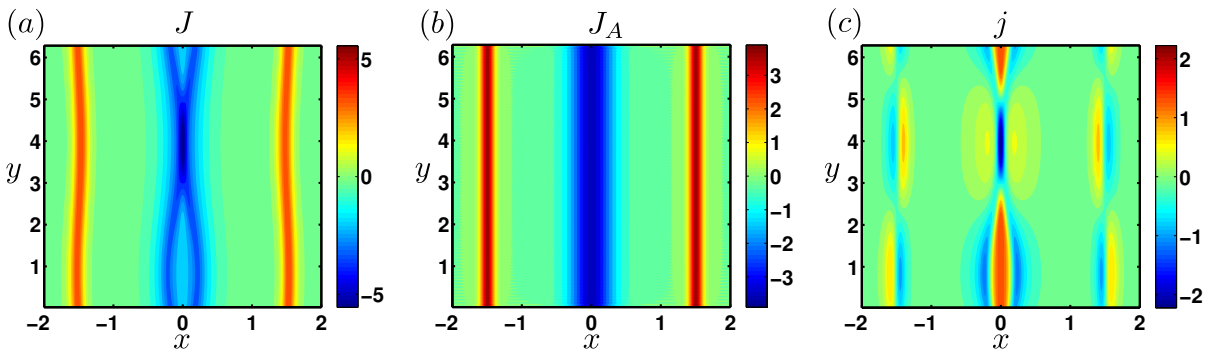

FIGURE 5.9 – Courbe de niveau de (a) courant total , de (b) courant d'équilibre et de (c) de la perturbation du courant . = 00 et = .

géométrie slab, $3D_{mn}$				Non-linéaire
= 0	=	=	=	= 0^3

Profil magnétique	Profil magnétique et	P. diffusifs
= = 0 3	= = 0 =	= 0 = 0 ^{3}

5.4 Mécanisme d'interaction entre la séparatrice et la feuille de courant hors résonance

5.4.1 Impact de la poussée de l'îlot magnétique sur la feuille de courant externe

La croissance d'un îlot magnétique va tordre les lignes de champ à l'extérieur de l'îlot. Cette déformation se propage jusqu'à la feuille de courant externe. Nous avons alors des variations poloïdales de flux magnétique le long de la feuille de courant externe : = 0. La loi de Lentz nous indique qu'une variation de flux magnétique dans un courant génère une tension : une variation de potentiel electrostatique. Dans notre système d'Eq.(4.7, 4.8), c'est le tenseur de Maxwell = qui génère de la vorticité : = △ . Au niveau de la feuille de courant externe, en particulier dans la phase linéaire et celle de Rutherford où , la perturbation de courant est négligeable par rapport à l'équilibre : . La Fig.(5.9) détaille la courbe de niveau du courant : le courant d'équilibre et la perturbation du courant à = 00 . Le crochet de Poisson se restreint à = $_u$ et géère de la vorticité au niveau de la feuille de courant externe. La Fig.(5.10) illustre ce phénomène et les signes des éléments de vorticité créés. Cette vorticité s'accompagne d'une perturbation du courant qui déforme la feuille de courant hors résonance ainsi que le montre la Fig.(5.9). La modification de la feuille de courant hors résonance ne peut avoir lieu que si un îlot croît initialement.

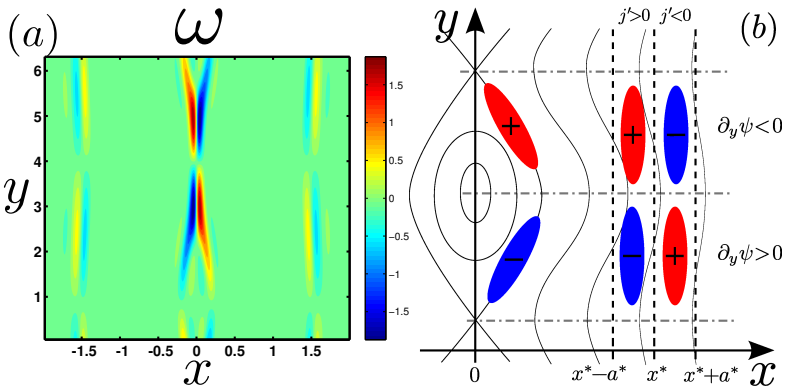

FIGURE 5.10 – (a) : Courbe de niveau de la vorticité à = 00 et (b) : sa représentation schématique. Profil , = .

géométrie slab, $3D_{mn}$			Non-linéaire
= 0	=	=	= = 0

Profil magnétique	Profil magnétique	Paramètres diffusifs
= = 0 3	= = 0 =	= 0 = 0^3

5.4.2 Interaction à distance entre la séparatrice et la feuille de courant hors résonance

La fluctuation de courant générée au voisinage de la feuille de courant externe ne devrait pas avoir d'impact sur la dynamique de l'îlot. Cependant, la Fig.(5.11) contredit cette affirmation. Nous y comparons comme à la Sec.(5.2), les simulations des profils et avec des simulations du profil mais dont les valeurs de sont ajustées avec pour correspondre à celles des profils et . Cette figure présente les évolutions de , Fig.(5.11a) pour les profils et avec la même valeur de et Fig.(5.11b et c) pour les profils et avec la même valeur de . Comme les simulations ont la même valeur de , nous pourrions nous attendre à ce que la croissance des îlots soit identiques pour les profils et ou et , au moins au début, tant que l'îlot n'a pas atteint le voisinage de la feuille de courant. Pour le profil , l'îlot atteint le voisinage de la feuille de courant à = 3 0 . Il croise la position de la feuille de courant à = 3 0 . Or, entre sa naissance à = 0 et le voisinage de la feuille de courant à = 3 0 , nous observons que la croissance de l'îlot pour le profil est plus rapide que celle du profil , malgré une valeur de identique. Pour le profil , c'est l'inverse, entre la naissance de l'îlot à = 00 , et le moment où l'îlot atteint le voisinage de la feuille de courant externe à = 0 , la croissance de l'îlot est plus faible pour le profil que pour le profil .

Il s'agit en fait d'une interaction longue distance qui se produit entre les vortex de l'îlot magnétique et ceux de la feuille de courant externe. On voit sur la Fig.(5.12)

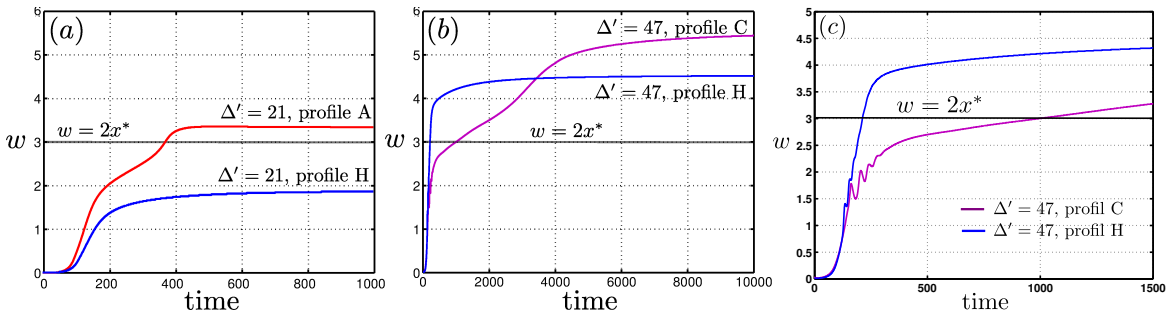

FIGURE 5.11 – Evolution comparée de la taille d'îlot pour une même valeur de (a) entre les profils et , (b) entre les profils et . (c) est un agrandissement de (b)

géométrie slab, $3D_{mn}$			Non-linéaire	Paramètres diffusifs		
$= 0$	$=$	$=$	$= \theta^3$	$= 0$	$= 0^3$	
Profil H, $\Delta' = 21$	$A_H = 1$	$a_H = 0.3$	$L_Y = 2\pi$			
Profil A, $\Delta' = 21$	$A_H = 1$	$a_H = 0.3$	$L_Y = 1.8\pi$	$A^* = 0.75$	$a^* = 0.1$	$x^* = 1.5$
Profil H, $\Delta' = 47$	$A_H = 1$	$a_H = 0.3$	$L_Y = 4.65\pi$			
Profil C, $\Delta' = 47$	$A_H = 1$	$a_H = 0.3$	$L_Y = 12\pi$	$A^* = 0.75$	$a^* = 0.1$	$x^* = 1.5$

l'évolution de potentiel scalaire . Nous choisissons car la visualisation est plus simple que sur . Les cellules de convection de même signe s'attirent et tendent à provoquer le déplacement de la séparatrice. Pour le profil , les cellules de convection de l'îlot magnétique et celles de la feuille de courant externe sont en phase. Pour le profil , les cellules de convection sont en opposition de phase : la torsion des lignes de champ de la phase initiale produit des cellules de convection positive sur la feuille de courant externe en face de celles négatives de l'îlot magnétique. Nous avons alors l'effet inverse pour le profil , la feuille de courant externe fait office de barrière à la progression de l'îlot magnétique. Ce mécanisme, de part la contrainte topologique imposée champ magnétique, est relativement lent.

5.4.3 Interaction directe entre la séparatrice et la feuille de courant hors résonance

Au voisinage de la feuille de courant externe, nous observons sur la Fig.(5.11) des accélérations et décélérations de la taille de l'îlot liées au signe de $_u$ et aussi à la position de la séparatrice par rapport à la feuille de courant externe. Il s'agit alors d'un autre mécanisme que celui décrit précédemment. Comme la séparatrice chevauche la feuille de courant externe, la vorticité générée par celle-ci est cette fois

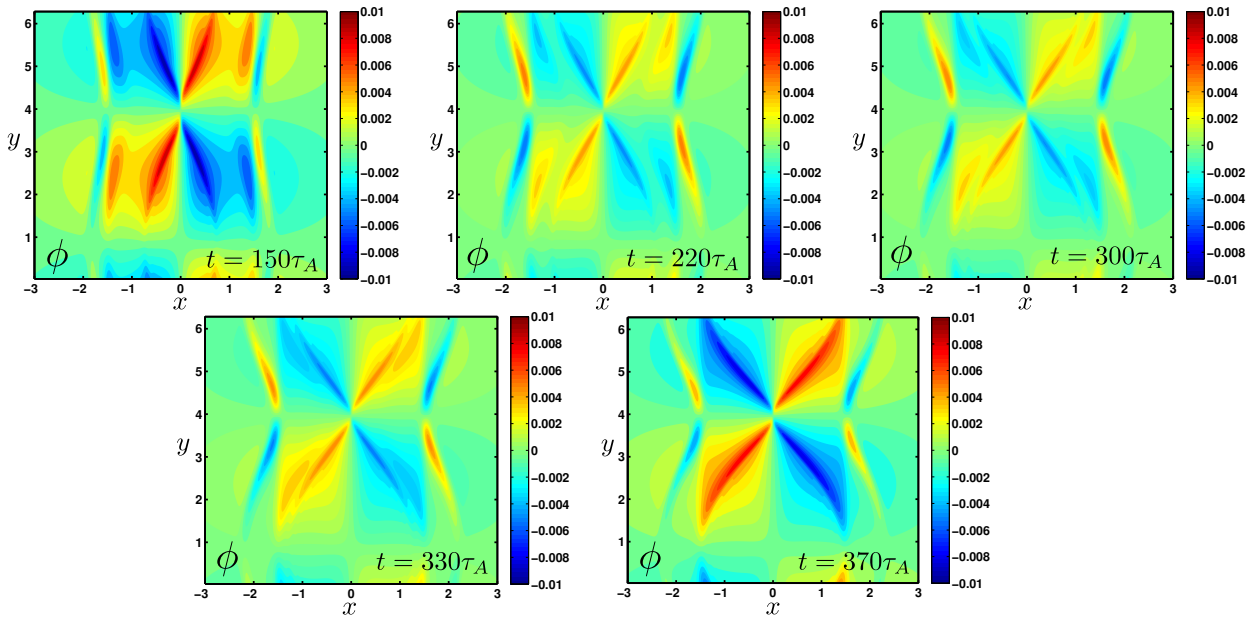

FIGURE 5.12 – Capture d'écran de la perturbation du potentiel scalaire à différents instants : 0 , 0 , 300 , 330 et , 3 0 .

Les données sont les mêmes que celles de la Fig.(5.11), Profil , = .

directement produite sur la séparatrice et, selon son signe, va favoriser ou restreindre la croissance de l'îlot magnétique. Pour retrouver cette génération de vorticité le long de la séparatrice, nous traçons, Fig.(5.13), la moyenne de différentes quantités le long d'un quart de séparatrice (de la position poloïdale du point X à celle du point O). La Fig.(5.13a), montre l'évolution de la vorticité dans cette moyenne. le premier pic correspond à la croissance lors de la phase de Rutherford. Le second pic de vorticité, centré à = 3 0, est justement centré sur le moment où = : il y a une augmentation de la vorticité avant le passage du maximum de la feuille de courant où $_u$ 0 et nous constatons après le passage du pic une diminution de la vorticité où donc nous avons $_u$ 0, en fait un ajout de vorticité de signe opposé. Nous décomposons dans la Fig.(5.13b) la variation temporelle de la vorticité en ses termes constitutifs : le tenseur de Maxwell = , le tenseur de Reynolds = et le terme diffusif $\triangle$. Le second pic se retrouve dans le tenseur de Maxwell. La Fig.(5.13c) represente la décomposition du tenseur de Maxwell = $_u$. Le surplus de génération de vorticité est apporté par le terme $_u$ = $_u$. La vorticité le long de la séparatrice permet l'advection du flux magnétique hors de la résonance. Le passage de la séparatrice sur des variations de courant va renforcer ou affaiblir cette advection de flux selon le signe de la variation radiale de courant. Nous pouvons alors imaginer qu'un continuum de courant avec $_u$ 0 hors résonance pourrait empêcher la saturation. Nous allons

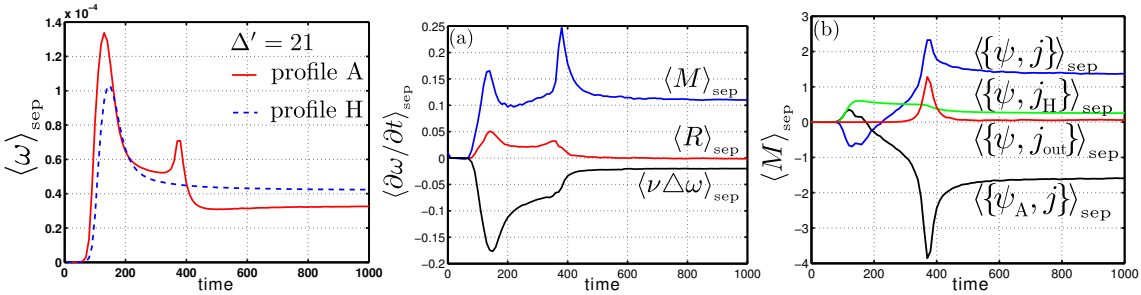

FIGURE 5.13 – Evolution des termes de l'équation Eq. REF le long d'un quart de séparatrice.

Les données sont les mêmes que celles de la Fig.(5.11), Profil , = .

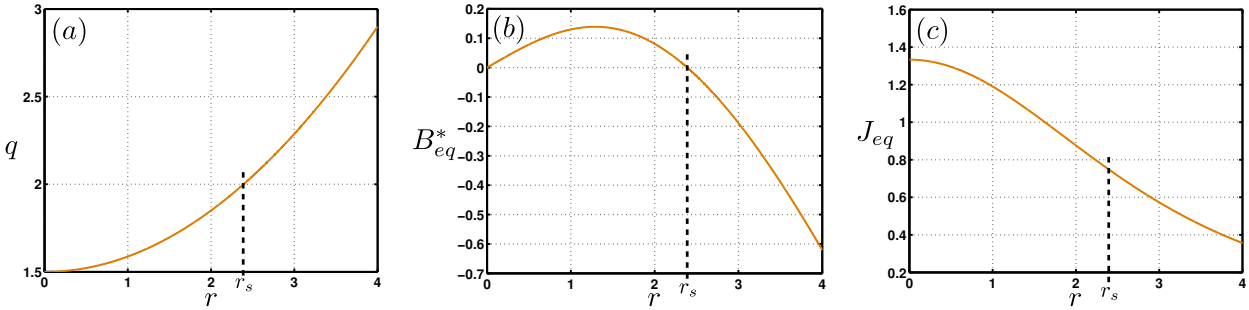

FIGURE 5.14 – Exemple de profil magnétique de mono-hélicité = .
(a) : profil de
(b) : profil magnétique
(c) : profil de courant

donc étudier le cas d'un profil magnétique plus réaliste pour voir comment ces deux nouveaux mécanismes influent sur la taille de l'îlot magnétique.

5.5 Effet d'un continuum de courant hors résonance sur la taille de l'îlot à saturation

Les profils et utilisés jusque là, possèdent des facilités de paramétrisation qui nous ont permis de mettre en lumière deux mécanismes nouveaux qui influencent significativement la dynamique des îlots et leur taille à saturation. Cependant, ces profils sont loin des réalités d'un tokamak où le courant est présent partout et pas seulement au voisinage de la résonance. Par exemple, au profil de = 0 1 0 2, correspond un champ magnétique = 2 1 1 , l'hélicité $\frac{m}{n}$ de la perturbation étant fixée (cadre $3D_{mn}$). La Fig.(5.14) nous montre le champ magnétique et le courant associé à ce profil de en géometrie cylindrique avec = , 0 = , = et = . Il est par conséquent intéressant de regarder l'impact des deux

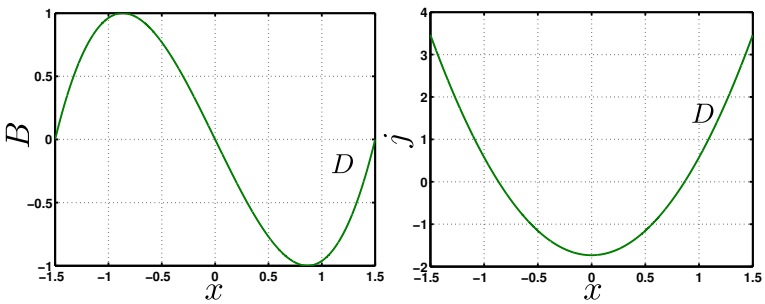

FIGURE 5.15 – Profil magnetique d'équilibre D avec = et = 3.

mécanismes précédemment étudiés sur un cas où il y a du courant en tout point, assimilable à une succession de feuilles de courant. Afin de ne pas inclure d'effets liés à une asymétrie dans le profil du champ magnétique nous avons choisi le profil polynomial qui propose un courant externe non localisé.

$$= \frac{\overline{3}}{3} \quad {}_2 \quad \frac{{}_2}{} \tag{5.4}$$

Ce profil nous rapproche d'une réalité de tokamak au moins pour la région 0 où la concavité du profil se rapproche de celle de la Fig.(5.14) en . Remarquons que ce profil est moins paramétrable. Nous pouvons varier , son amplitude maximale. La taille radiale de la boîte est partie prenante de la formule du profil car une taille radiale trop grande de la boîte de simulation pourrait permettre l'apparition de trois résonance. Nous fixons ici = 0 et = . La Fig.(5.15) montre ce profil D et son courant associé.

Nous nous attachons donc à l'évolution d'un îlot magnétique avec le profil d'équilibre D. Il présente une variation de courant positive monotonique, $= \frac{2\ \overline{3}}{3}$, croissante avec l'éloignement de la résonance. A partir des résultats précédents, on est amené à penser que l'îlot sera continuellement nourri au fur et à mesure de sa croissance par des feuilles de courant successives dont le signe implique qu'elles amplifieront la croissance de l'îlot. Il faut néanmoins que l'amplitude du courant externe soit suffisamment importante pour contrer le mécanisme de saturation naturel lié à l'instabilité de déchirement magnétique. Autrement dit, il devrait exister des valeurs critiques soit en , soit en au-dessus desquelles l'îlot magnétique ne sature pas, puisque est une fonction croissante de la distance à la résonance. La Fig.(5.16) présente les évolutions de pour différentes valeurs de avec = 0 dans le volet gauche ; le volet droit présente, lui, la taille à saturation en fonction de pour trois valeurs de . La Fig.(5.16a) montre bien un seuil , entre 3 et 3 . Les simulations avec en deça du seuil saturent, contrairement à celles au-delà du seuil où l'îlot atteint alors le bord de la boîte de simulation, = . Le

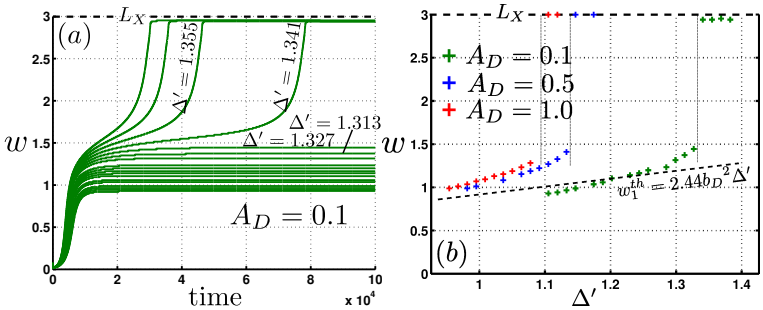

FIGURE 5.16 – (a) Evolution de la taille d'îlot pour différentes valeur de . (b) Taille d'îlot à saturation pour trois amplitude du champ magnétique .

géométrie slab, $3D_{mn}$				Non-linéaire
=	= 3	=	= à	= θ

Paramètres diffusifs	Profil magnétique D
= 0 = 0 ^{3}	= 0 , 0 ,

paramètre permet de choisir l'amplitude des variations de courant externe sans changer (en effet, le calcul de implique le rapport $\frac{'}{'}$ qui est indépendant de). La Fig.(5.16b) montre que l'amplification des effets dus au courant externe, avec , diminue la valeur de . Nous avons vu précédement qu'une variation de courant externe positive générait une attraction longue distance sur la séparatrice et qu'elle pouvait aussi générer de la vorticité supplémentaire sur la séparatrice. Ces deux phénomènes renforcent la croissance de l'îlot magnétique. Si est faible ( ), alors l'îlot est trop petit pour ressentir les effets du courant externe. Il sature à une valeur proche de $_1$. Mais si , alors la croissance de l'îlot magnétique va subir une accélération croissante car il y a, à l'extérieur de l'îlot, du courant positif sur tout le long de la boîte de simulation. La valeur de dépend de : si nous augmentons , nous renforçons les mécanismes liés au courant externe, mais pas ceux de la résonance car n'est pas fonction de . Une valeur de plus faible suffit alors pour développer l'accélération croissante de la taille d'îlot. Nos résultats sont alors conformes à nos prédictions, mais il y a une observation supplémentaire. Cette accélération de la taille de l'îlot magnétique se développe si dépasse = . Cette taille d'îlot est indépendante de l'amplitude du courant extérieur. Cette taille critique dépendrait donc de la forme du courant extérieur plutôt que de son amplitude.

Il résulte de cette étude que la dynamique des îlots magnétiques très dépendante du profil magnétique et devrait être pris en compte pour estimer l'évolution de la taille des îlots. Dans notre cas, nous avons simulé qualitativement le profil magnétique que verrait la séparatrice interne de l'îlot magnétique. Compte tenu de nos simulations,

nous devrions en déduire que, au delà d'une taille donnée, cette séparatrice interne devrait rejoindre de le coeur du tokamak. Cependant, notre modèle néglige bien des effets qui vont restreindre l'avancée de la séparatrice comme par exemple la géométrie cylindrique qui engendre une compression des lignes de champs croissante au fur et à mesure de l'avancée de la séparatrice vers le coeur du tokamak. Pour ITER, le petit rayon sera de m : trois fois plus grand que Tore Supra 0 m. Les effets de géométrie cylindrique ne sont plus aussi forts, et les îlots pourraient alors être bien plus gros que prévu si nous ne prenons pas garde aux effets de courant externe.

5.6 Conclusion

Les théories actuelles sur l'instabilité de déchirement et sur la croissance des îlots magnétiques sont basés sur les effets à la résonance. Elles prennent en compte le profil magnétique extérieur uniquement au travers du paramètre . Nous avons mis lumière ici des mécanismes nouveaux qui se situent hors de la résonance. Ils ne sont pas inclus dans le seul paramètre , ni dans aucune théorie actuelle. Pour mettre en lumière ces mécanismes, nous avons utilisé des profils magnétiques peu réalistes, mais qui ont permis de séparer les mécanismes de la résonance, déjà connus des nouveaux. Il s'agit pour le premier mécanisme d'une interaction longue distance entre les cellules de convection des séparatrices de l'îlot avec des cellules de convection de feuilles de courant que nous avons placées hors résonance. Mais nous pourrions très bien imaginer le même effet entre des instabilités à différentes positions, Ce mécanisme pourrait être un précurseur de la reconnexion globale qui suit le mode locking [26] dans les Reversed Field Pinch. Le second mécanisme décrit comment l'îlot est nourri en vorticité quand sa séparatrice passe au travers de variation de courant positive. La vorticité est produite directement sur la séparatrice accentuant son déplacement vers l'extérieur (et vice versa pour une variation de courant négative qui freine l'extension radial de la séparatrice). Ces effets peuvent beaucoup changer la dynamique de l'îlot magnétique et rendre caduques les GRE, notamment sur les gros tokamaks où les effets cylindriques ne pourront pas contrecarrer l'avancée de la séparatrice interne vers le coeur du tokamak. En effet, en géométrie slab, nous pouvons même empêcher la saturation de l'îlot magnétique. Les résultats sont rassemblés dans l'article [46] soumis en 2012.

Chapitre 6

L'instabilité de déchirement magnétique en 3D avec turbulence

6.1 Introduction

Comme nous avons vu dans le chapitre (5), l'environnement magnétique de l'îlot joue un rôle dans son évolution. Les micro-instabilités sont aussi à prendre en compte dans ce contexte. En effet, les plasmas de tokamak sont turbulents. Ils sont le siège d'instabilités microscopiques qui donnent naissance à des fluctuations importantes. Il existe de nombreuses instabilités associées à l'existence de gradient de température, de densité ou de pression qui génèrent de la turbulence petite échelle [53]. Cette turbulence, est généralement prise en compte dans les coefficients de transport par moyennage [64]. Les coefficients sont dits anormaux. Mais il existe un autre effet de la turbulence : elle peut générer des effets macroscopiques comme les flux zonaux [17, 28], ou des îlots magnétiques [40, 41, 29]. Il s'agit alors de modélisation multi-échelle. La mise en jeu de phénomènes turbulents et MHD dans un même système peut se produire dans un plasma confiné en mode H. Avec un fort gradient de pression au bord, le plasma sera turbulent [67], tandis que le centre et le milieu du tokamak laissent se développer une activité MHD. Cette situation justifie le profil de pression choisi pour ce chapitre :

$$= 0 \; 0 \qquad - \Big(\qquad \Big(\quad \Big(\text{——} \Big) \Big) \Big) \tag{6.1}$$

Ce profil permet de situer un gradient de pression à l'extérieur uniquement, Fig.(6.16) et une zone interne MHD sans gradient de pression. Nous recréons ainsi la situation où l'îlot magnétique interagit avec la turbulence de bord.

Nous avons décrit jusqu'à présent la dynamique de l'îlot magnétique en partant du modèle slab $3D_{mn}$. Nous étendons notre étude pour prendre en compte en plus, des

effets de profils hors résonance et maintenant nous accentuons encore le réalisme en passant en $3D_{full}$ dans une géométrie cylindrique. Nous allons dans un premier temps décrire l'impact de ces changements sur l'instabilité de déchirement magnétique et sur les îlots. D'autre part, les micros instabilités peuvent venir des gradients de pression couplés aux courbures du champ magnétique : il s'agit de la famille des instabilités d'interchanges. Nous allons ensuite caractériser notre turbulence d'interchange et voir que même en $3D_{full}$ cylindrique nous retrouvons les résultats [40, 41]. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous verrons comment l'instabilité d'interchange peut pénétrer la zone sans gradient [20] et déclencher la poussée d'un îlot magnétique.

6.2 L'instabilité de déchirement magnétique en 3D

Nous allons désormais nous éloigner du cadre $3D_{mn}$ slab avec profil symétrique pour aller vers un modèle $3D_{full}$ cylindrique avec profil magnétique asymétrique lié à . Cela représente deux changements principaux par rapport aux études des Chap.(4) et Chap.(5). Le premier changement concerne la perte de la symétrie du profil magnétique. Le second porte sur la présence de différentes hélicités juxtaposées. Le problème de l'asymétrie est abordé dans la géométrie $3D_{mn}$ pour isoler les effets d'asymétrie de ceux des hélicités multiples. Nous explorons les différentes sources d'asymétrie relatives à notre système d'Eq.(4.7,4.8) dans la topologie des îlots déclenchés par déchirement magnétique. Elles influent sur la stabilité de l'instabilité de déchirement magnétique et la croissance de l'îlot. Nous allons caractériser l'instabilité de déchirement magnétique en géométrie cylindrique avant de s'intéresser aux mécanismes de couplage entre îlots et turbulence.

6.2.1 Effet d'asymétrie sur l'instabilité de déchirement magnétique

Nous calculons le profil magnétique à partir du profil de en fixant une hélicité . Nous sommes encore en géométrie $3D_{mn}$ mais cylindrique. Le Tab.(6.1) rapporte les différences entre les opérateurs en géométrie slab et cylindrique. On note ce profil magnétique , le profil magnétique mono-hélicité issu du profil de :

$$= \frac{}{} \left(\frac{}{} \quad - \right) \tag{6.2}$$

Le paramétrage du profil magnétique tient en plusieurs variables du profil de . $_0$: valeur de q au début de la boîte. $_1$: valeur de q à la fin de la boîte. réprésente

	slab	cylindrical
l		
$l \quad l$	$\frac{m2}{}$	$\frac{m}{}$
l	$\frac{n2}{}$	$\frac{n2}{}$
$\triangle$	$_2 \quad \frac{m2}{} \quad ^2$	$_2 \quad \frac{1}{} \quad \frac{m}{} \quad ^2$
	$\frac{}{}$	$\frac{2}{}$
		$\frac{e}{}$
		$\frac{'}{e} \quad \frac{e}{2}$
	$\frac{n}{m}$	$\frac{2 \; n}{m}$

TABLE 6.1 – Table des opérateurs en géométrie slab et cylindrique

la position où $= 0$.

$$= {}_0 \quad {}_1 \quad {}_0 \frac{{}^2}{{}_0 \quad {}^2} \tag{6.3}$$

Le paramètre ${}_0$ définit la valeur de à l'entrée de la boîte de simulation. Il n'influe pas sur la forme du profil de mais sur la force des aspects cylindriques : plus ${}_0$ sera petit, plus les termes cylindriques en $\frac{1}{}$ seront prépondérants. Il existe une multitude de possibilités pour le paramétrage du profil de . Nous choisissons des paramètres faciles d'utilisation. Les valeurs ${}_0$ et ${}_1$ permettent de délimiter le continuum d'hélicité qui sera mis en présence dans la simulation. La Fig.(6.1) représente un schéma du profil de avec : $=$ et $= {}_0$.

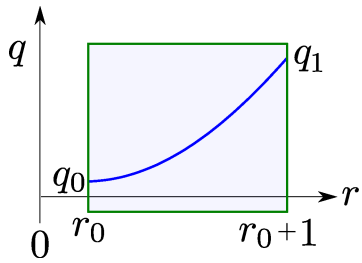

FIGURE 6.1 – Schéma du profil de q et de ses paramètres.

La Fig.(6.2) représente à titre d'exemple un profil de et les profils magnétiques associés : le champ magnétique poloïdal et le champ magnétique poloïdal pour deux mono-hélicités $=$ et $=$.

Les îlots magnétiques ont pour critère de stabilité le paramètre qui doit être positif pour la poussée d'un îlot. Le passage en $3D$ va apporter de nouvelles contraintes pour induire une déstabilisation de déchirement magnétique, contraintes liées

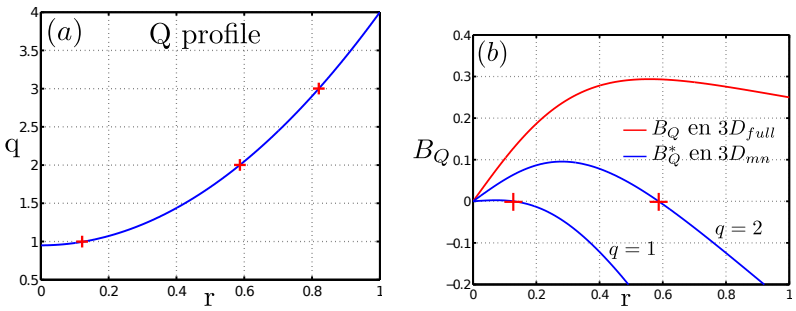

FIGURE 6.2 – (a) : Exemple de profil de facteur de sécurité.
(b) Le profil magnétique associé à en rouge. En bleu, les profils magnétiques mono-hélicité pour deux mono-hélicités = et = .

à l'asymétrie dans le système. La méthode de tir, An.(A), nous permet toujours de calculer la valeur de , avec les algorithmes adaptés à la géométrie cylindrique. Ce paramètre représente la discontinuité idéale de la fonction $_1$ autour de la résonance. Mais l'approximation de la fonction ne peut pas se résumer à une fonction symétrique comme l'Eq.(G.43) car l'équilibre n'est lui-même plus symétrique [4, 39]. Nous pouvons quantifier le niveau d'asymétrie de la perturbation magnétique à la résonance par un paramètre similaire à que nous notons :

$$= \quad _0 \frac{\quad}{\quad 0} \tag{6.4}$$

Le calcul de ce paramètre est présenté en An.(H). Il y est aussi montré que l'équation

$$= \left(\quad ^2 \quad \frac{\quad}{\quad} \right) \quad - \tag{6.5}$$

possède une singularité à la résonance, puisque = 0 et = 0. Nous ne pouvons pas utiliser le paramètre directement : il diverge quand tend vers zéro. Nous prendrons alors comme paramètre de quantification de l'asymétrie [4, 3] :

$$= \quad _1 \tag{6.6}$$

avec $_1 = \frac{_e \quad 0}{_e \quad 0}$ où nous avons défini les séries de Taylor selon : = 0 ^{2} 0 et = 0 0 ^{2} 0 est obtenu par la méthode de tir, An.(A), et est la distance entre la résonance et le premier point de la grille de la méthode de tir hors résonance, c'est à dire la résolution de la méthode de tir. Ce paramètre est nul dans le cadre symétrique. Il y a plusieurs sources d'asymétrie qui peuvent produire une valeur de non nulle. Nous pouvons classifier les sources d'asymétrie en deux groupes en fonction de la nature de cet impact sur la fonction

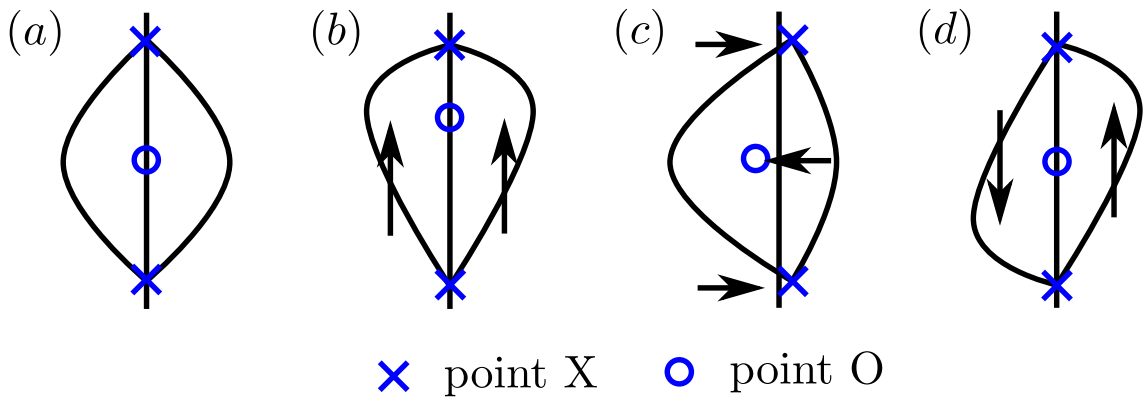

FIGURE 6.3 – Schéma de l'îlot en fonction du type d'asymétrie.
(a) Pas d'asymétrie.
(b) Asymétrie de phase due à un gradient de pression.
(c) Asymétrie d'amplitude due au profil magnétique ou à la géométrie.
(d) Asymétrie de phase due à un gradient de résistivité.

propre : les asymétries d'amplitude et les asymétries de phase. Les asymétries se traduisent dans la fonction de la manière suivante :

$$= \tag{6.7}$$

Les asymétries d'amplitude sont liées à la fonction . Les asymétries de phase à la fonction . Le travail de D. De Lazzari et E. Westerhof [32] détaille numériquement les sources et leur effet sur un îlot magnétique. La Fig.(6.3) reprend schématiquement les asymétries et leur effet sur la forme de l'îlot.

Nous présentons sur la Fig.(6.4) les trois sources d'asymétrie du système d'Eq.(4.1,4.2). Le premier facteur d'asymétrie est la géométrie cylindrique qui implique une dépendance en $\frac{1}{}$ des opérateurs poloïdaux et donc une asymétrie par rapport à . Le second est le profil magnétique lié aux profils de qui impose que $= 0$. Le troisième facteur ici correspond aux conditions de bord. Avec une géométrie cylindrique, des conditions de bords réaliste serait $0 = 0$ par symétrie axiale et $0 = 0$ en supposant des murs parfaitement conducteurs. En réalité, avec des murs partiellement conducteurs nous devrions prendre $0 \quad 0 = 0$. Pour illustrer ces trois phénomènes, nous traçons sur la Fig.(6.4) les fonctions propres de différents cas d'asymétrie résolus par la méthode de tir, An.(A). Pour chaque cas, nous n'allumons qu'une source d'asymétrie afin de pouvoir comparer leur différent effet. Toutes les asymétries que nous avons dans notre système sont des asymétries d'amplitudes, Fig.(6.3c).

Une théorie linéaire a été bâtie récemment dans [39]. Elle tient compte des effets d'asymétrie, de viscosité et la géométrie cylindrique. Cette théorie utilise la méthode

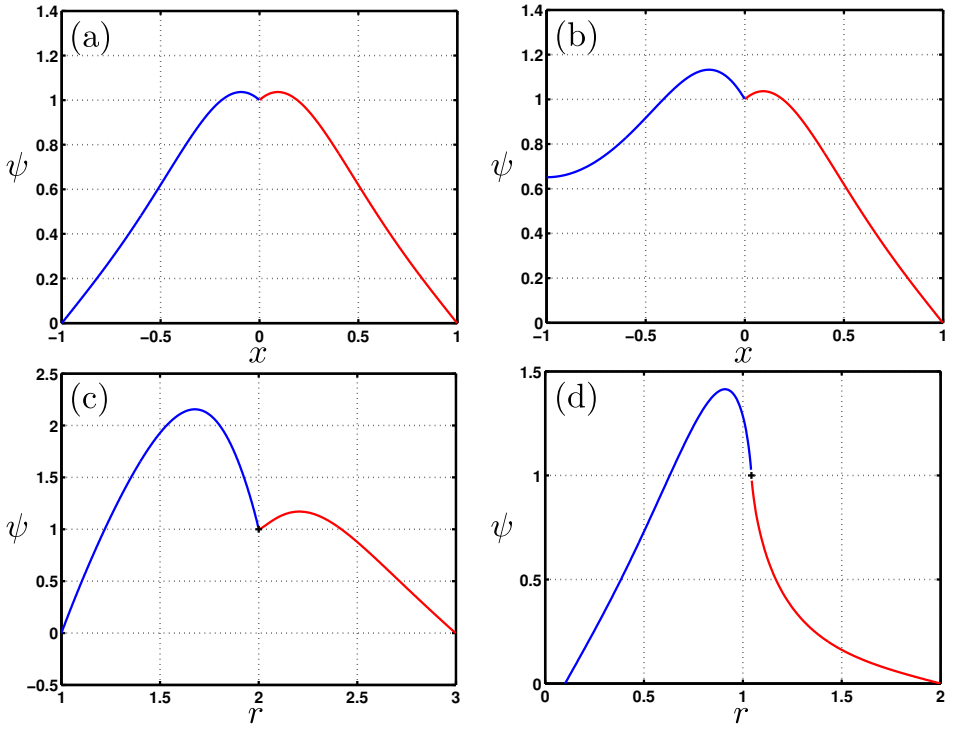

FIGURE 6.4 – Fonction propre idéale d'un mode de déchirement.
(a) symétrique : profil de Harris, condition aux deux bords nulle, géométrie slab.
(b) Asymétrie due aux conditions de bord = 0 et = 0.
(c) Asymétrie due à la géométrie cylindrique.
(d) Asymétrie due au profil magnétique.

de raccordement décrite dans l'An.(F). Il y est effectué un raccordement de la solution idéale divergente en avec la solution résistive à la résonance au bord de la couche résistive , mais cette fois, la solution idéale diverge en car le rapport $\frac{\prime_e}{e}$ de l'Eq.(6.5) diverge lui-même : $= 0$. Il existe un seuil en supérieur à 0 qu'il faut dépasser pour déstabiliser l'instabilité de déchirement magnétique. Ce seuil dépend de la viscosité. C'est un résultat qu'il nous faut retrouver pour mieux caractériser notre instabilité de déchirement magnétique et contrôler sa stabilité linéaire. Pour cela nous réalisons une série de simulation linéaire $3D_{mn}$ avec l'hélicité fixée à $=$ et fixé à . Les conditions de bord sont nulles en $_0$ et en $_0$. Pour chaque simulation avec un couple $_0$ $_1$, nous associons un couple calculé au moyen du coeficient $_1$:

$$_1 = \frac{3}{} \quad \frac{^2}{} \tag{6.8}$$

où les quantités indexées par un sont leurs valeurs à la position résonante. Grâce à la paramétrisation du profil de , nous balayons l'espace des paramètres pour trois valeurs de $_0$. Nous présentons avec la Fig.(6.5) les taux de croissances de l'instabilité de déchirement magnétique pour différents profils magnétiques $_0$ $_1$. Les points correspondent aux taux de croissance négatifs, les carrés à ceux positifs. Sur la Fig.(6.5), $= 0$ ne correspond pas à des simulations symétriques où il y aurait eu compensation des différentes sources d'asymétrie. En effet, l'instabilité peut être stable malgré le fait que 0. Ajoutons à cela le fait que, pour différentes valeurs de $_0$, le même couple ne donne pas les mêmes taux de croissance ni même une stabilité identique. Nous en concluons que le paramètre n'est pas suffisant pour quantifier l'asymétrie en général. Nous remarquons cependant que la condition 0 est toujours nécessaire pour avoir une instabilité de déchirement magnétique. Mais elle n'est plus suffisante.

La valeur du taux de croissance est également très éloignée du cas symétrique. Comme nous l'avons vu au Chap.(4), le taux de croissance suit la loi : $_m = \frac{3}{} - \frac{2}{} -$. Mais à cause des effets d'asymétrie, le taux de croissance mesuré est bien plus faible. Nous pouvons réaliser l'application numérique en considérant les valeurs locales à la résonance de $= \frac{1}{} = 0$, de $= 0\ 3$, pour la simulation avec $_0 = 0$, $_0 =$ et $_1 =$ 3. Les autres valeurs sont connues : $=$, $=$ et $= 0\ ^3$. Nous obtenons un taux de croissance de $_m = 0\ 0\ 3$ comparé à une valeur mesurée de $= 3$ 0 . Bien sur, nous comparons la valeur mesurée à une valeur théorique qui n'est plus applicable, mais nous soulignons l'impact de

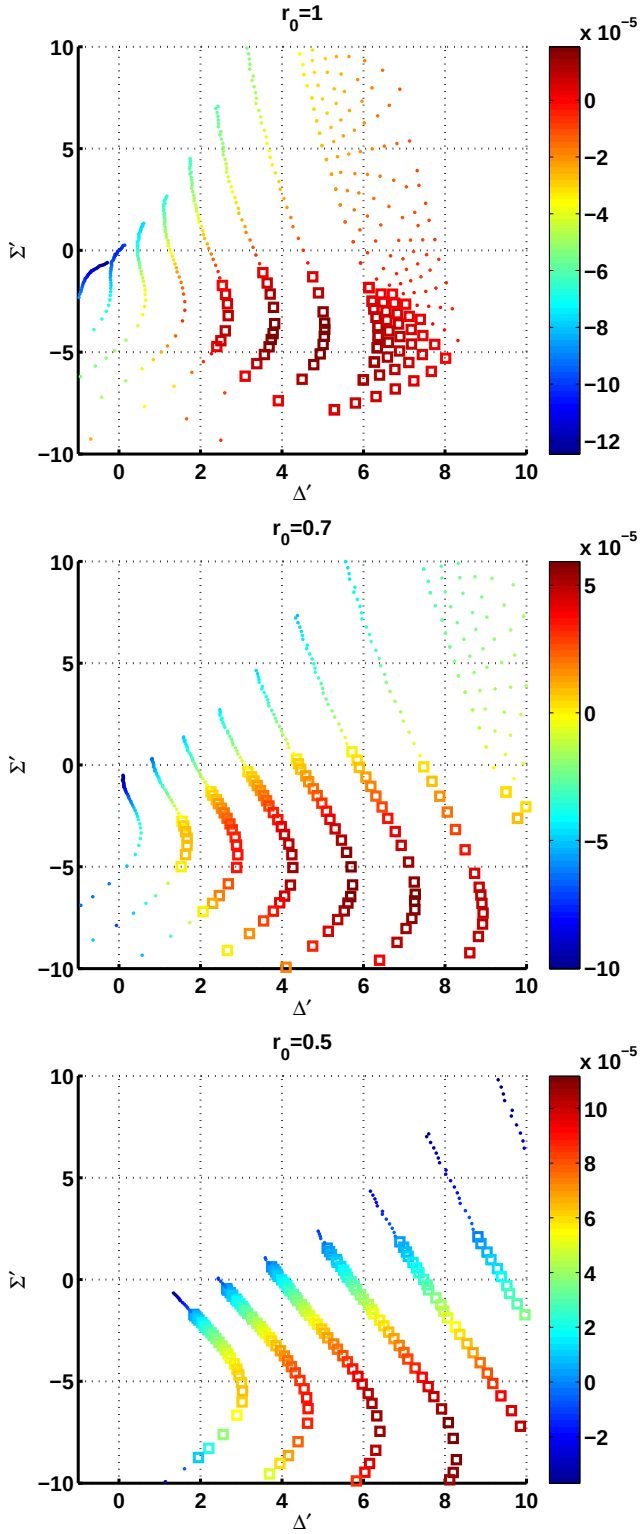

FIGURE 6.5 – Carte des taux de croissance de l'instabilité de déchirement magnétique en géométrie cylindrique dans l'espace des paramètres . De haut en bas, trois valeurs de $_0$ (, 0 , 0) : trois contraintes cylindriques croissantes. = 0 points : taux de croissance négatif. carré : taux de croissance positif.

l'asymétrie sur le taux de croissance de l'instabilité : il y a trois ordres de grandeur de différence au cause de l'asymétrie.

Donc l'asymétrie du système réduit les taux de croissance de l'instabilité de déchirement magnétique. Mais nous remarquons que si nous diminuons le paramètre $_0$, i.e. nous reforcons l'asymétrie due à la géométrie, nous amplifions le taux de croissance, Fig.(6.5). Donc, non seulement le paramètre n'est pas suffisant pour quantifier l'asymétrie, mais différentes sources d'asymétrie n'ont pas le même effet sur la stabilité. Dans notre situation, l'asymétrie due au profil magnétique affaiblit l'instabilité de déchirement magnétique tandis que l'asymétrie due à la géométrie cylindrique la renforce.

Le travail dans [39] démontre un critique de stabilité dépendant de la viscosité en géométrie cylindrique. Pour retrouver cette dépendance, nous réitérons la série de simulations dans l'espace pour différentes valeurs de viscosité. La Fig.(6.6) montre la carte des taux de croissance linéaires en fonction du couple pour $_0 = 0$ et pour trois valeurs de viscosité $= 0$, 0 et 0 . La viscosité restreint le domaine d'instabilité du déchirement magnétique et affaiblit le taux de croissance maximal du domaine. La valeur de vicosité joue bien un rôle dans la stabilité linéaire de l'instabilité de déchirement magnétique.

Un autre effet d'asymétrie est également présent : la stabilité non-linéaire. Comme le montre Coelho [12], en géométrie cylindrique et avec une viscosité et résistivité faible, nous pouvons observer un régime oscillant de la taille de l'îlot magnétique : l'instabilité de déchirement est non-linéairement stable. Ce genre de régime n'est jamais apparu en géométrie slab, mais a pu être reproduit en géométrie cylindrique. Nous nous sommes servi de ces résultats pour tester la partie cylindrique de MOA, Fig.(3.12) et Fig.(3.13).

6.2.2 Comparaison entre la géométrie mono-hélicité $3D$ et la géométrie multi-hélicité $3D$

Les domaines de simulation entre la géométrie mono-hélicité $3D_{mn}$ et la géométrie multi-hélicité $3D_{full}$ sont différents. La Fig. (6.7) montre ces domaines : les intersections de la grille en pointillés correspondent aux couples m simulé en $3D_{full}$. Les intersections entre les lignes verticales pointillées et les traits pleins représentent les modes simulés de deux $3D_{mn}$: $=$ et $=$. En $3D_{mn}$, chaque mode m poloïdal correspond un mode axial (ou toroïdal) tel que $= \frac{m}{}$. Nous pouvons alors générer des modes avec une valeur de non entière qui n'existent pas en $3D_{full}$. L'ajustement de la variable à l'hélicité choisie permet d'avoir des vecteurs d'onde comparables

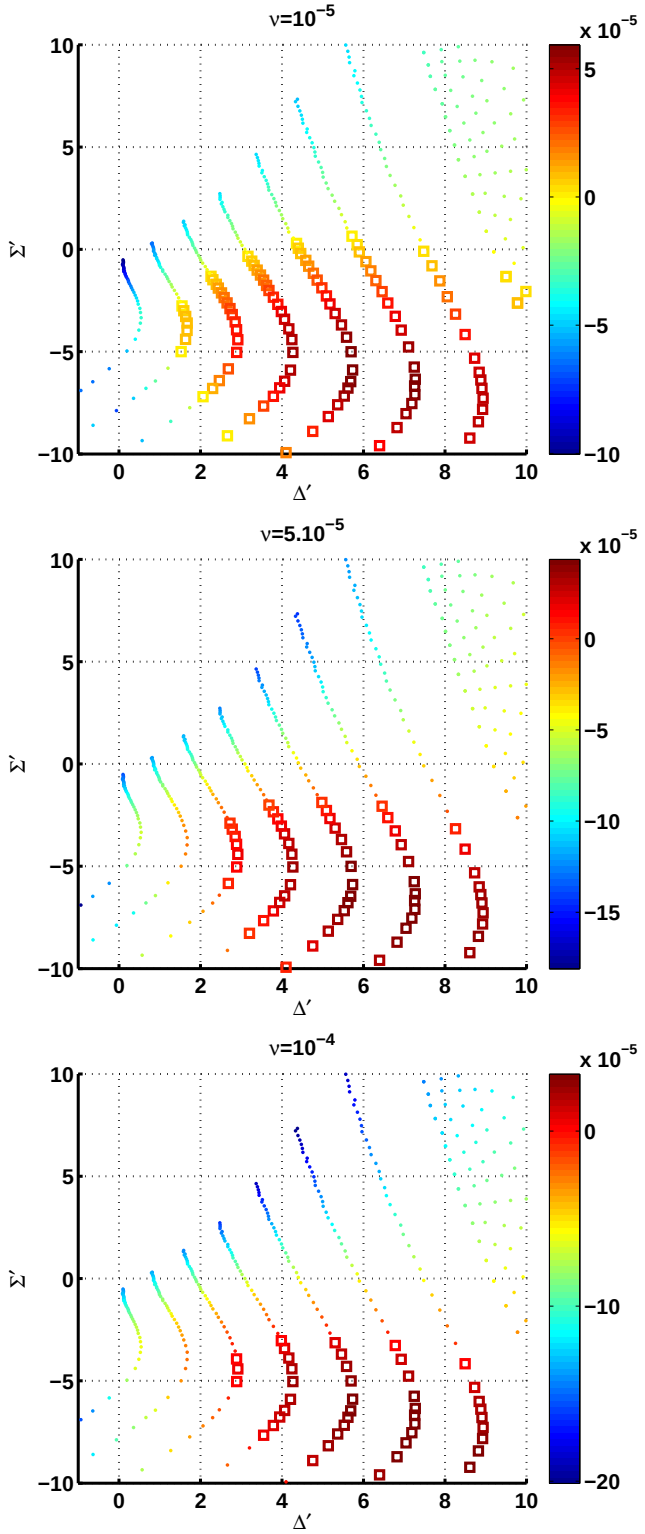

FIGURE 6.6 – Carte des taux de croissance de l'instabilité de déchirement magnétique en géométrie cylindrique dans l'espace des paramètres . De haut en bas, trois valeurs de viscosité (0 , 0 , 0). $_0 = 0$
points : taux de croissance négatif. carré : taux de croissance positif.

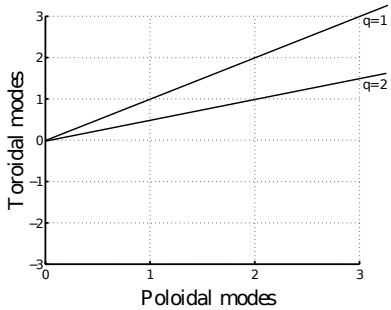

FIGURE 6.7 – Comparaison des modes simulés en 3D mono-hélicité et en 3D complète.

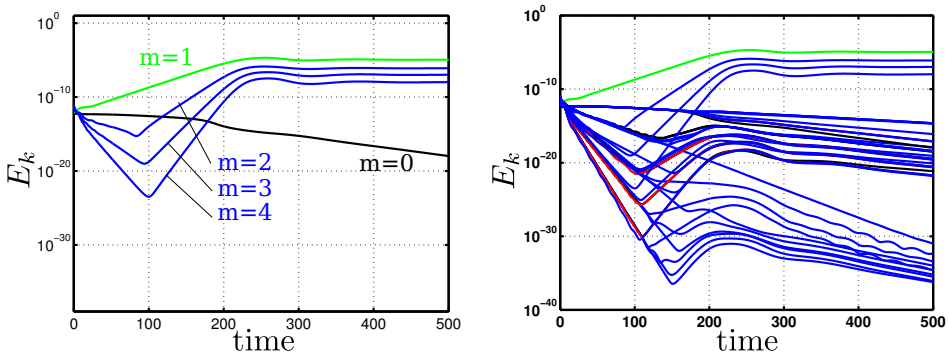

FIGURE 6.8 – Energie Cinétique par modes pour deux simulations en $3D_{mn}$ et $3D_{full}$

en $3D_{mn}$ et en $3D_{full}$ pour tous les couples m . Pour l'hélicité , alors $= \frac{m}{}$, $= \frac{m}{}\frac{2}{}$ en $3D_{mn}$ et $= \frac{2}{}$ en $3D_{full}$. Les simulations $3D_{mn}$ et $3D_{full}$ sont directement comparables si $3D_{mn} = \frac{1}{} 3D_{full}$.

Nous allons ici comparer deux simulations non-linéaires réalisées en $3D_{mn}$ puis en $3D_{full}$ avec le paramètre ajusté. Nous présentons sur la Fig.(6.8) l'évolution de l'énergie cinétique de chaque mode du système pour une instabilité de déchirement magnétique instable dans une géométrie cylindrique. Nous constatons que les modes développés en $3D_{mn}$ se retrouvent développés de manière identique en $3D_{full}$. L'ajout des modes d'hélicité voisine n'a eu aucun effet sur la dynamique non-linéaire. L'instabilité de déchirement magnétique ne se développe que sur son hélicité de résonance, et n'entraine efficacement que des harmoniques de même hélicité. Cette comparaison justifie le travail mené en $3D_{mn}$. Nous aurons besoin des différentes hélicités pour créer la turbulence dans des zones différentes de celle de l'instabilité de déchirement magnétique.

6.2.3 Description d'un îlot magnétique en 3D avec un profil asymétrique

Nous avons vu en $3D_{mn}$ que les effets d'asymétrie etaient importants sur l'instabilité de déchirement magnétique, notamment l'asymétrie de profil magnétique, naturelle avec un profil de , qui change la structure des fonctions propres. Ici, nous prenons le temps de décrire les structures de l'ilôt magnétique à saturation. La Fig.(6.9) présente les champs à saturation de , , et dans un cas asymétrique. La remarque la plus flagrante concerne le passage de la structure quadripôlaire classique de à une structure dipôlaire. De plus si les structures sont globalement situées avant la résonance , en cylindrique, ce n'est pas le cas de l'îlot magnétique qui est centré dessus. Enfin, la taille des îlots magnétiques générés est plutôt fine comparativement à ce que l'on a pu observer dans les cas symétriques. Nous les observons en traçant

$$= \frac{2}{} \tag{6.9}$$

avec = , ce qui nous replace dans le cadre de la mono-hélicité. Cette transformation du flux magnétique nous permet de retomber sur le cas où est constant le long d'une ligne de champ magnétique. Nous prévoyons d'utiliser dans le futur les sections de poincaré pour visualiser les îlots magnétiques.

6.3 La turbulence d'interchange en 3D

6.3.1 L'interchange idéal

L'instabilité d'interchange idéale est analogue à l'instabilité de Rayleigh-Taylor. L'instabilité de Rayleigh-Taylor consiste en une perturbation à l'interface d'un fluide lourd au-dessus d'un fluide léger dans un champ gravitationnel. Cette configuration est un équilibre instable qu'une perturbation à l'interface des deux fluides peut détruire. L'interchange dans les tokamaks oppose un gradient de pression dirigé vers l'intérieur du tokamak à une force centrifuge. Cette force centrifuge est dirigée vers l'exterieur du tokamak. L'opposition à donc lieu sur la partie externe du tokamak. Sur la partie interne, le gradient et la force centrifuge sont dans le même sens. Dans le cas d'une géométrie cylindrique, la force centrifuge est opposée au gradient de pression dans toutes les directions radiales. L'instabilité d'interchange sera donc présente sur toute la section du cylindre. Mathématiquement, on retrouve ce résultat au travers du vecteur de courbure . En géométrie torique, l'interchange est en réalité stable, car la

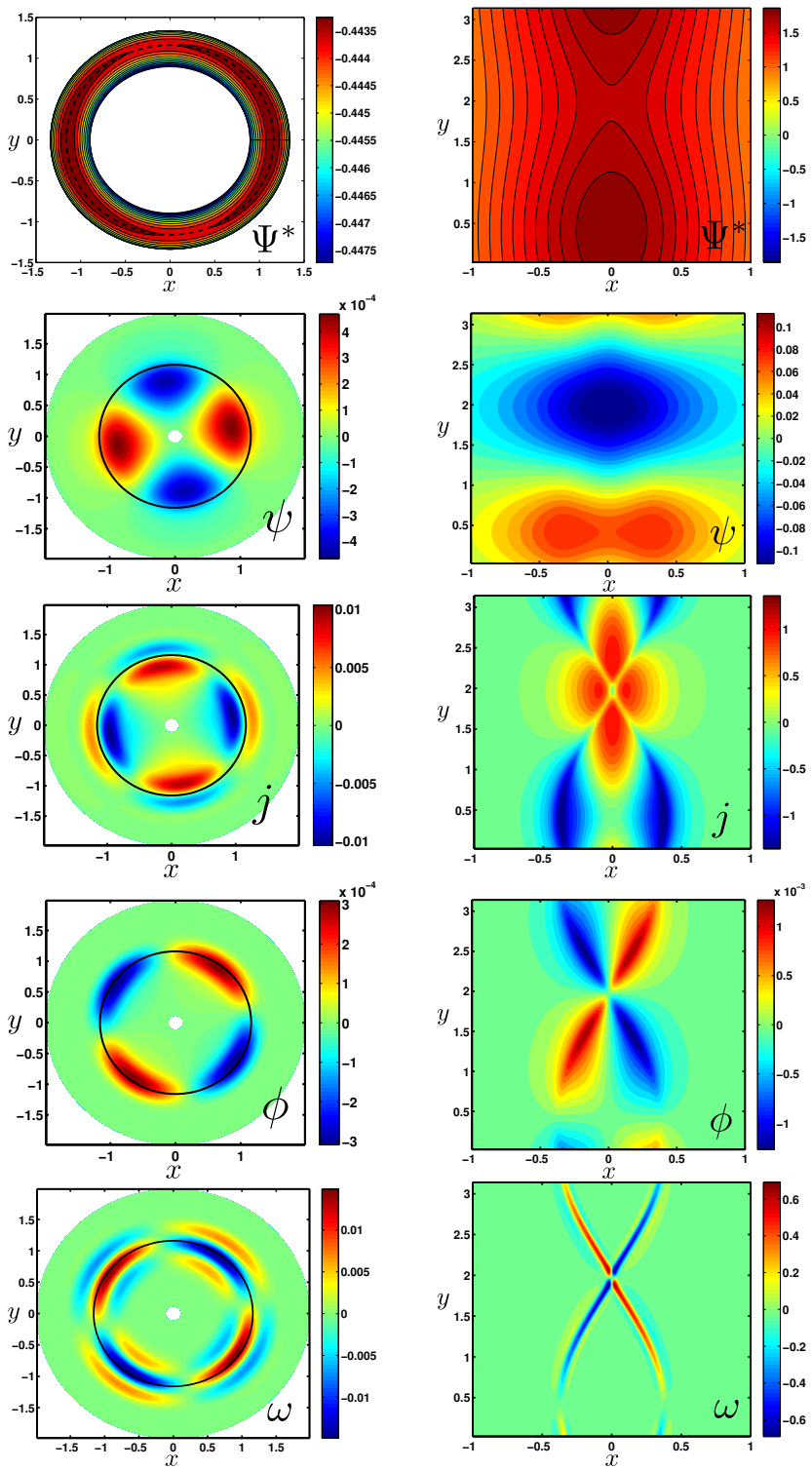

FIGURE 6.9 – Champs à saturation dans un cas asymétrique avec un profil de parabolique et dans un cas symétrique avec le profil .
La ligne noire du cas asymétrique correspond à la position de la résonance. La courbe de niveau de est calculée pour = et a été restreinte autour de l'îlot pour le mettre en valeur : il est très fin. Le rayon de simulation est le même que sur les autres champs. Le cas cylindrique est un mode . Le cas slab est un mode $m =$.

courbure moyenne , c'est à dire la norme du vecteur de courbure Eq.(D.9), intégrée sur est favorable à la stabilité si :

$$= \frac{}{{}_2 \; {}_2} \tag{6.10}$$

Mais comme dépend de et donc de la zone champ faible, champ fort du tokamak, Eq.(D.9), il se développe l'instabilité de balonnement du coté champ faible : c'est une instabilité d'interchange localisée. En géométrie cylindrique ne dépend pas de , Eq.(D.11) et est défavorable à la stabilité de l'interchange : elle se développe sur toute la section du cylindre de simulation.

Nous souhaitons caractériser l'instabilité interchange. L'interchange idéal électrostatique en géométrie slab $3D_{mn}$ correspond au couplage entre l'équation de vorticité et celle de la pression. La condition de stabilité correspond à :

$$_1 \quad 0$$

qui signifie que la courbure et le gradient de pression sont dans le même sens. En prennant en compte les aspects magnétiques et notamment le fait que le cisaillement magnétique stabilise et que l'instabilité se développe sur les surfaces résonantes de faible niveau rationnel, nous obtenons le critère de Mercier [35] en géométrie torique, qui se ramène au critère de Suydam [57, 24] en géométrie cylindrique. L'interchange est instable si :

$$_1 \quad \left(\frac{}{{}_0 \quad {}_2} \right)^2$$

Nous considérons ce critère dans un premier temps pour pouvoir nous placer hors du régime idéal qui n'est pas celui des tokamaks. Nous utilisons pour l'instant, un modèle légèrement simplifié par rapport à celui dérivé au chapitre (2) :

$$= \nabla_{\parallel} \tag{6.11}$$

$$= \quad {}_1 \quad \triangle \tag{6.12}$$

$$= \quad \triangle \tag{6.13}$$

A ce modèle est associé un profil d'équilibre et , Fig.(6.10), tel que :

$$= {}_0 \quad {}_1 \quad {}_0 \frac{{}_n}{{}_0 \quad {}_n}$$

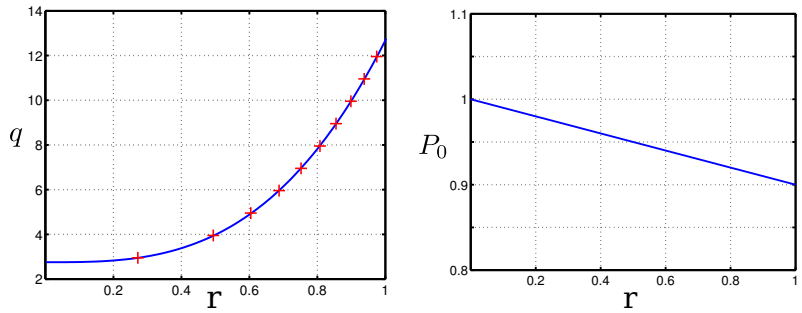

Figure 6.10: (a) : Profil de . (b) profil de pression
$_0 =$, $_1 =$, $= 3$, $_0 =$ $= 0$, $_0 =$, $_0 = 0$

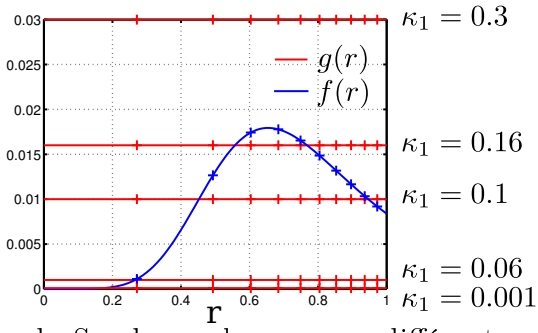

FIGURE 6.11 – Critère de Suydam selon pour différentes forces de courbure $_1$. L'interchange est instable si la courbe rouge est au-dessus de la courbe bleue. Les profils sont ceux de la Fig.(6.10).

$$= \quad _0 \quad _0$$

Nous représentons le critère de Suydam sur la Fig.(6.11) : en rouge la partie électrostatique $=$ $_1$ et en bleu la partie Alvénique $= \frac{\quad ' \quad}{_2 \quad _2}$ ^{2} et ceci pour différente valeur de $_1$. L'interchange est instable si la courbe rouge est au-dessus de la courbe bleue.

Nous réalisons pour chaque valeur de $_1$, une simulation linéaire $3D_{full}$ du modèle composé des Eq.(6.11,6.12,6.13). Nous mesurons les taux de croissance de chaque mode m . La Fig.(6.12) présente deux cas où il ne peut y avoir d'interchange car la courbure est nulle pour (a) ou insuffisante au regard du critère de Suydam pour (b). Il reste un artefact de mesure pour le mode et des modes mal résolus autour du mode . Sur la Fig.(6.13), nous testons le critère de Suydam. Le test est probant, au fil de l'augmentation de $_1$, nous activons différentes hélicités. D'abord celle autour de $= 3$ puis celle autour de $= 0$ L'instabilité d'interchange autour de $= 0$ nécessite une valeur de $_1$ plus élevée que prévue à cause des conditions de bord nulles. Nous remarquons en effet que les résonances $=$ sont très proches du bord de la boîte, Fig.(6.10).

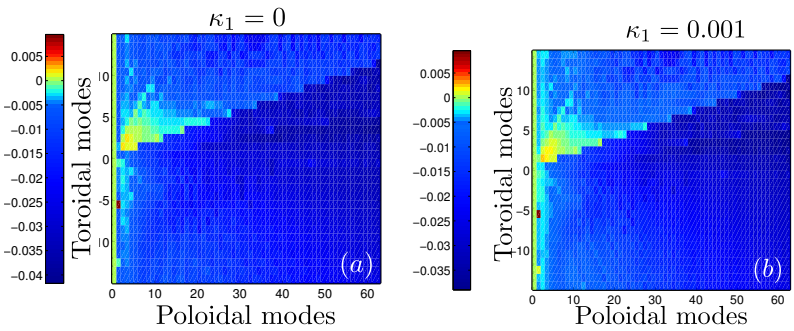

FIGURE 6.12 – Taux de croissance de chaque mode m de la simulation linéaire associée pour différentes valeur de $_1$. Nous négligerons les modes autour de : Il s'agit de modes mal résolus. Le mode est un artefact de mesure.
(a) : il ne peut pas y avoir d'interchange : il n'y a pas de courbure.
(b) : Il n'y a pas d'interchange : le critère de Suydam est stable pour toutes les valeurs de .

géométrie cylindrique, $3D_{full}$					
=	=	= 3	=	=	$_0$ = 0

Profil de				Paramètres diffusifs
$_0$ =	$_1$ =	= 3	= 0	= 0
Profil préssion		Courbure	Linéaire	= 0
$_0$ =	$_0$ = 0	$_1$ = 0 à 0 3	= 0 ^{2}	= 0

L'étude des fonctions propres de l'instabilité sont une autre façon de caractériser l'interchange. Dans le cadre symétrique, la fonction propre de est impaire. Mais nous avons des fonctions propres dans un cadre asymétrique différentes de celles du cadre symétrique. Avec l'instabilité de déchirement magnétique, la parité était complètement perdue à cause de l'asymétrie de profil, Fig(6.4). Avec l'instabilité d'interchange, la parité de la fonction propre de ne peut plus être aussi strictement impaire que dans une géométrie symétrique, mais nous pouvons malgré tout retrouver une signature caractéristique de la fonction propre d'interchange car les effets d'asymétrie sont moins influents, Fig(6.14).

6.3.2 Interchange résistif

Sur la Fig.(6.13), les valeurs des taux de croissance sont très élevées. C'est typique d'une instabilité idéale, mais ce n'est pas souhaitable, ni réaliste par rapport aux instabilités tokamaks. Il faut passer dans un régime d'interchange résistif. Ce régime suppose le critère de Suydam satisfait pour avoir un interchange idéal stable, mais la présence d'une résistivité non nulle amène aussi le développement d'un interchange dit résistif. Nous balayons alors en $_1$ pour différentes valeurs de résistivité. Nous centrons

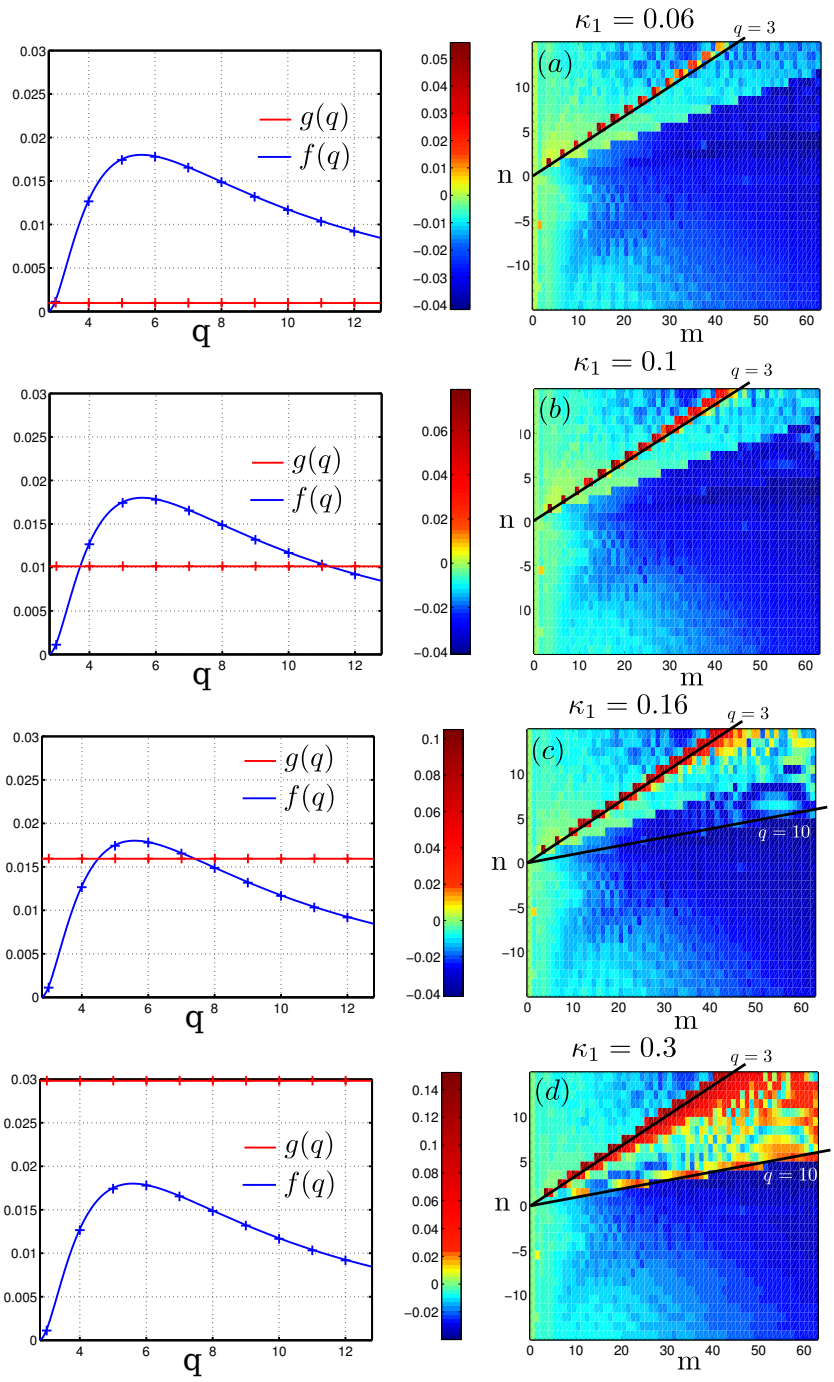

FIGURE 6.13 – Le critère de Suydam et les taux de croissance de chaque mode m de la simulation linéaire associée pour différentes valeur de $_1$.
Les données de simulation sont celles de la Fig.(6.12).

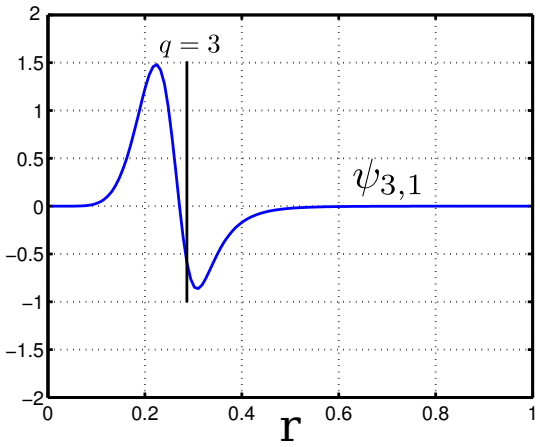

FIGURE 6.14 – Fonction propre du mode 3 de .

le profil de autour de = 3 pour éviter les effets de bord et nous nous concentrons sur les premières harmoniques. Nous réduisons aussi le gradient de pression. La valeur critique de $_1$ du passage du régime idéal à résistif est de 3, Fig.(6.15a). La Fig.(6.15b) montre que si la résistivité est faible (quasi-nulle), = 0 , l'interchange se stabilise pour $_1$ 3 et est instable pour $_1$ 3, ainsi que le critère de Suydam le prévoit. Pour une résistivité plus forte, = 0 , l'interchange est instable selon deux branches. Pour $_1$ 3, c'est l'interchange résistif et pour $_1$ 3, nous retrouvons l'interchange idéal. Enfin pour une résistivité à = 0 , l'instabilité d'interchange est toujours instable avec des taux de croissance supérieurs à ceux de l'interchange idéal. Nous sommes en régime résistif quelle que soit la valeur de $_1$. Ceci est rendu possible par la faiblesse du gradient de pression.

6.3.3 Profil de pression localisé et effet de sur l'instabilité d'interchange

Nous utilisons désormais le profil de pression , Eq.(6.1) et le modèle suivant, développé au chapitre (2) :

$$\begin{aligned} &= \nabla_{\parallel} \\ &= \nabla \quad {}_{\parallel} \; {}_{\parallel} \quad {}_1 \quad \triangle \\ &= \quad \triangle \quad {}^2\nabla_{\parallel} \\ &= \triangle \end{aligned} \tag{6.14}$$

Nous avons vu au chapitre (2) que l'impact de correspondait entre autres à un terme diffusif parallèle dans l'équation de pression. Mais il entraîne également un couplage suplémentaire entre l'équation de pression et l'équation du flux magnétique. Si nous introduisons le terme diffusif diamagnétique dans le modèle, nous activons

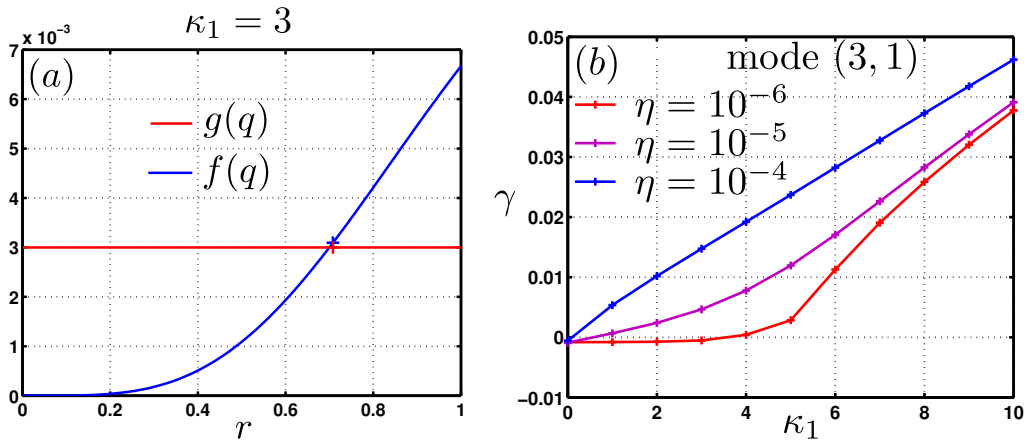

FIGURE 6.15 – (a) Critère de Suydam.
(b) : taux de croissance pour différentes valeurs de résistivité, pour le mode 3 .

géométrie cylindrique, $3D_{full}$					
=	=	= 3	=	=	$_0 =$ 0 ^{3}

Profil de				Paramètres diffusifs
$_0 =$	$_1 = 3$	=	= 0 ^{3}	= 0
Profil préssion	Courbure	Linéaire		= 0 à 0
$_0 =$	$_0 =$ 0 ^{3}	$_1 = 0$ à 0	= 0 ^{2}	= 0

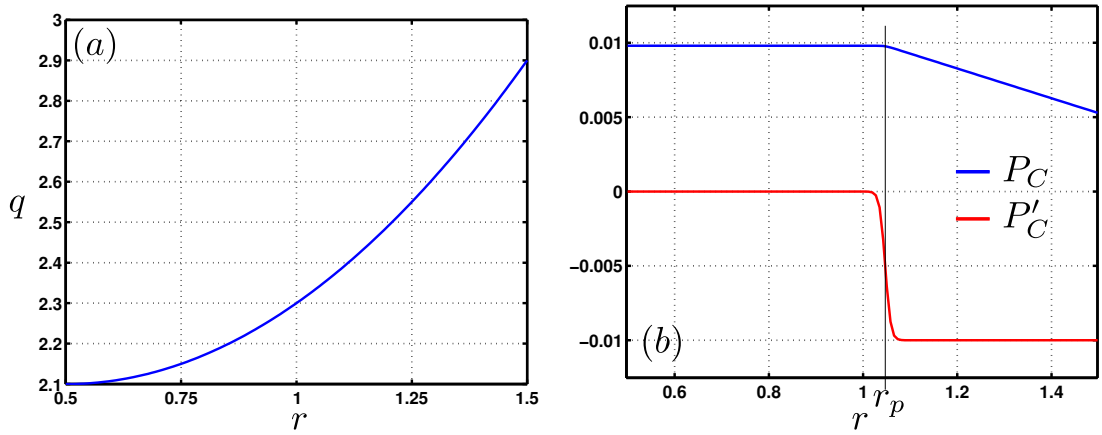

FIGURE 6.16 – (a) : profil de sans résonance de bas ordre 2 ou 3.
(b) : profil de pression plat avant = , avec gradient = 0 ^{2}.

Géométrie cylindrique, $3D_{full}$					
=	=	=	=	=	$_0 = 0$

Profil de				Paramètres diffusifs
$_0 =$	$_1 =$	=	= 0 ^{3}	= 0 $^2 = 0$
Profil pression	Courbure			= 0
= 0	= = 0 ^{2}	$_1 = 0$	= 0 ^{2}	= 3 0

un interchange électromagnétique. La Fig.(6.17a) représente les taux de croissance des modes m . Le mode le plus instable pour $^2 = 3 \quad 0$ est le mode . La Fig.(6.17b) présente la courbe de niveau de où ressort justement ce mode le plus instable et nous remarquons, comme attendu, que cet interchange électromagnétique se développe sur la zone de gradient de pression non nul. Les structures autour de la résonance en pointillés nous indiquent l'aspect asymetrique et impair de la fonction propre, a l'instar de la Fig.(6.14).

Cet interchange electromagnétique possède un caractère résistif. Nous balayons en ^{2} pour différentes valeurs de résistivité. Les résultats sont présentés sur la Fig.(6.18). Le terme en ^{2} joue effectivement son double rôle. Si $^2 = 0$ l'interchange électromagnétique est stable. Si ^{2} augmente trop, le caractère diffusif le long des lignes de champ de l'opérateur associé $\nabla_{\|} \quad \triangle_{\|}$ stabilise l'interchange électromagnétique. Les valeur de ^{2} seront comprises entre 0 et $0^{\,3}$.

6.3.4 Formation d'îlot magnétique par turbulence directe

On considère l'équilibre indiqué sur la Fig.(6.16). En particulier les résonances $=$ et $= 3$ sont évitées et l'instabilité de déchirement magnétique est stable. L'interchange est instable sur la partie extérieure de la boîte de simulation. Cet interchange électromagnétique a pour source le gradient de pression. Cette instabilité progresse et sature en annulant le gradient de pression. L'interchange va donc transporter le plasma sous pression vers l'extérieur, créant ainsi un applatissement non linéaire de la pression moyenne. L'energie de la pression, Fig.(6.19) montre le déroulement spectral de ce phénomène. Pendant la phase linéaire, nous avons une croissance indépendante des modes, avec le mode le plus instable $m \quad = \quad$, en rouge sur la Fig.(6.19). Cette croissance entraine une phase quasi linéaire pendant laquelle le mode $m \quad = \quad 0 \;\; 0$ se développe : c'est la modification de l'équilibre. La troisième partie de l'évolution est une cascade inverse, au sens restreint où l'energie est transmise du mode le plus instable à l'harmonique la plus basse en passant par des harmoniques intermédiaires. Cette cascade est consistuée de battement de modes : comme les modes interchanges ont une largeur radiale non nulle autour de leur résonance, ils peuvent interagir radialement avec d'autres modes de résonance voisine. Cette largeur de mode est d'autant plus grande que l'ordre de la résonance est bas. La situation finale est une oscillation du mode qui, par à-coups, va relaxer de l'énergie sur le mode $0 \;\; 0$. Sur la Fig.(6.19), chaque pic de la courbe bleu du mode est en phase avec une croissance du mode $0 \;\; 0$. La dynamique asymptotique correspond à un équilibre moyenné dans le temps entre les termes diffusifs et

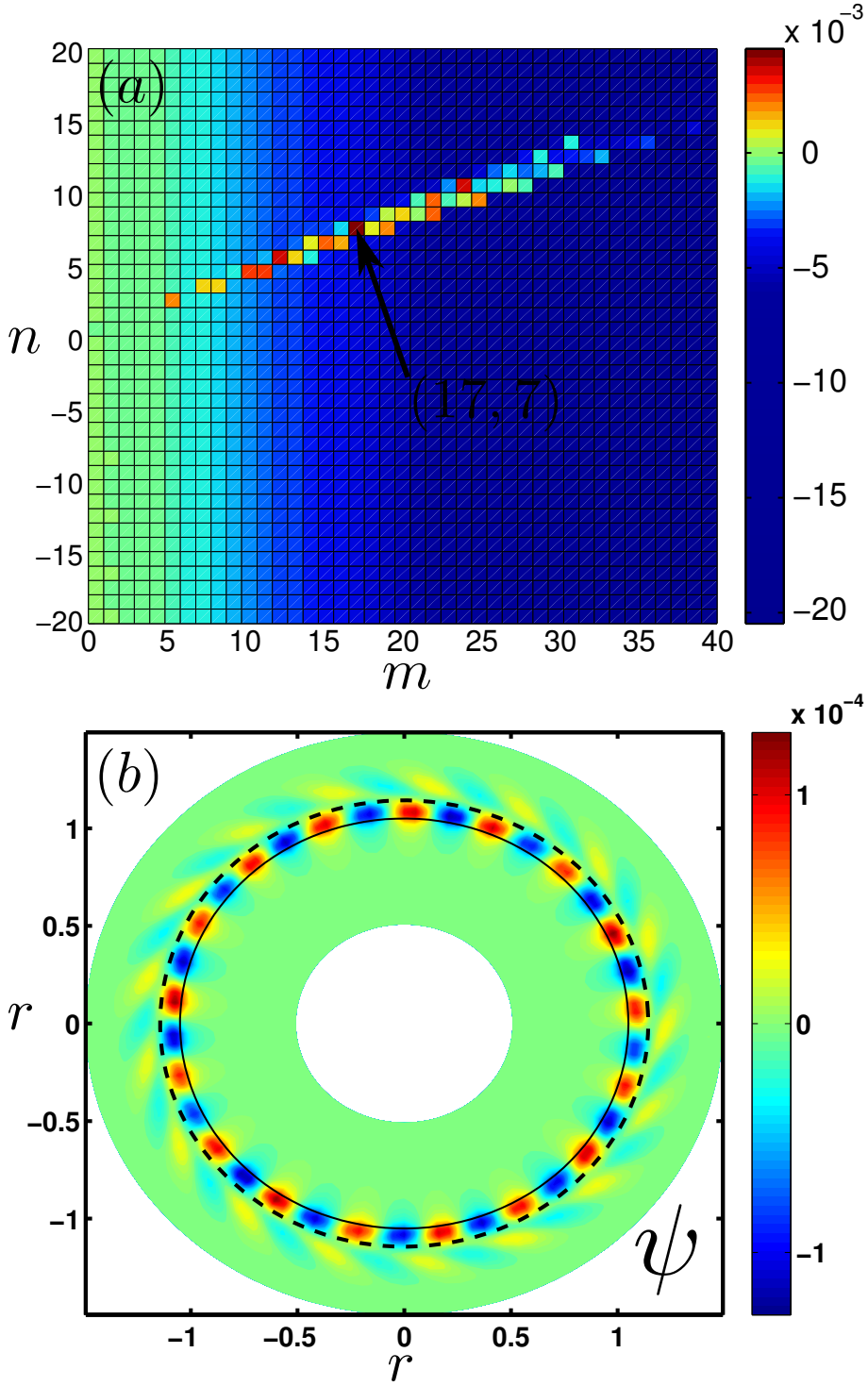

FIGURE 6.17 – (a) taux de croissance des modes m .
(b) : Courbe de niveau de . Le rayon de la ligne pleine est . Celui de la ligne en pointillés est tel que $= \frac{1}{}$: c'est l'emplacement de la résonance du mode le plus instable. Les données sont celles de la Fig.(6.16) avec $^2 = 3 \quad 0$.

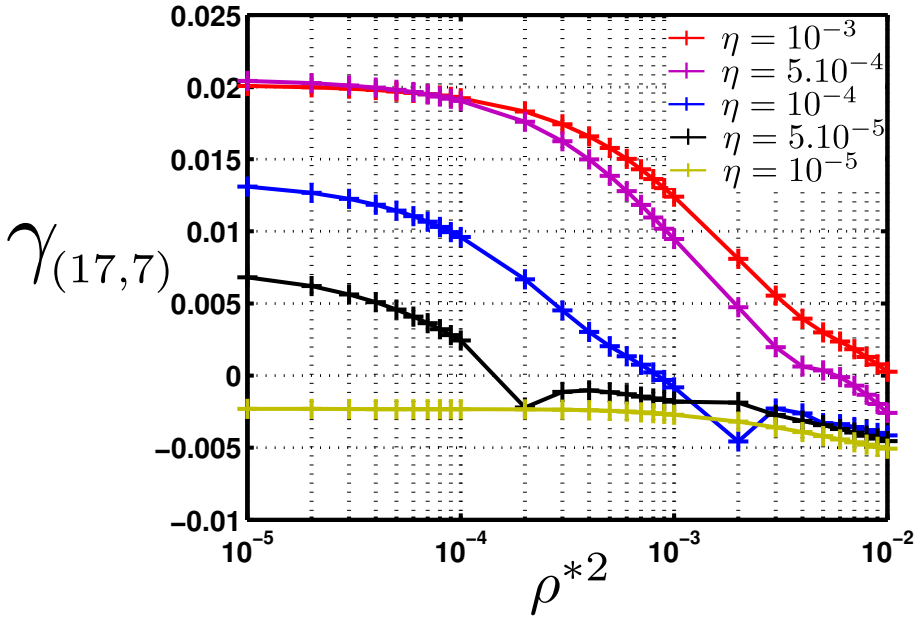

FIGURE 6.18 – Taux de croissance du mode en fonction de ^{2} pour différentes valeur de . Les données sont celles de la Fig.(6.16) avec différentes valeur de ^{2} et de .

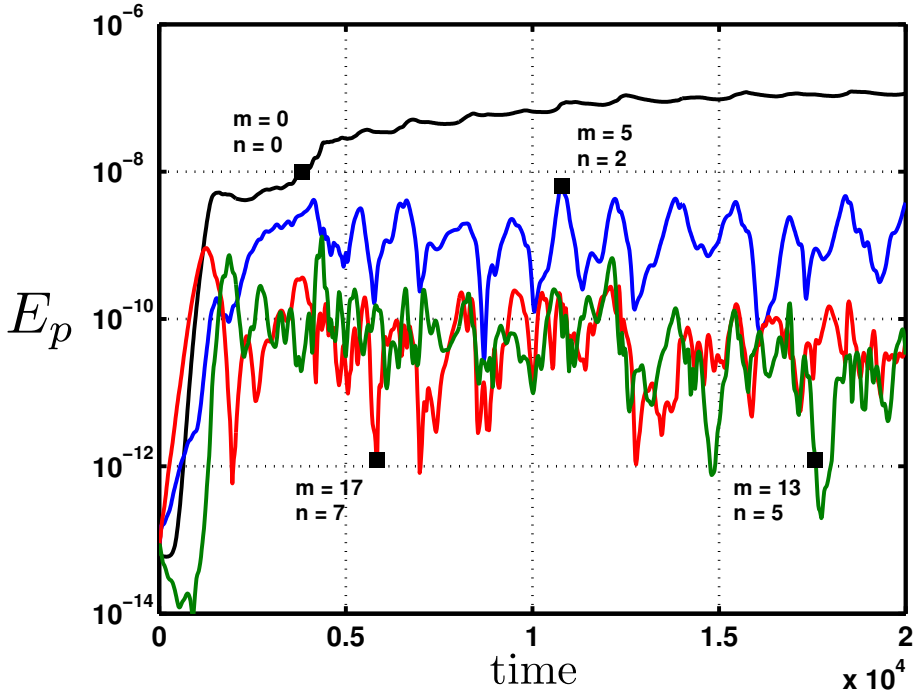

FIGURE 6.19 – Energie de pression pour certains modes choisis.
Les données sont celles de la Fig.(6.16) avec $^2 = 3 \quad 0$.

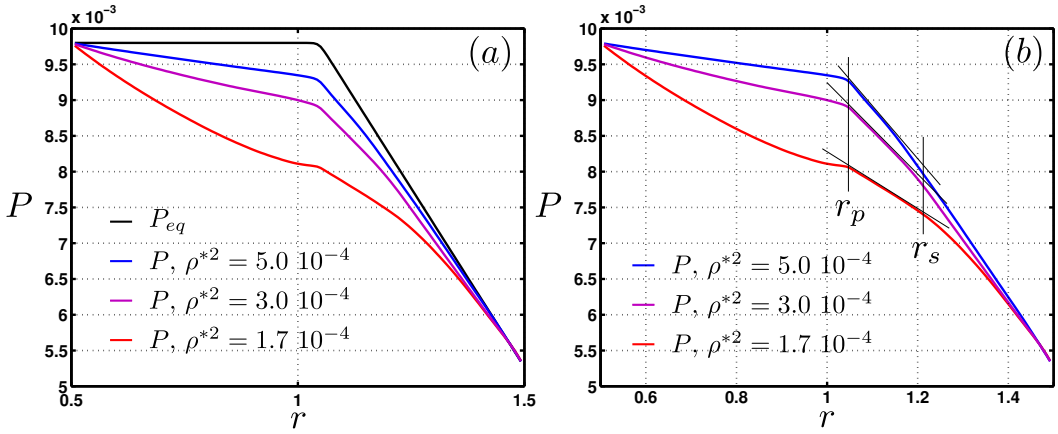

FIGURE 6.20 – (a) : profil de pression initial et final pour différents niveaux de turbulence. (b) : ajout de détails. Les données sont celles de la Fig.(6.16) avec $^2 = 3\ \ 0$.
: position du début du gradient de pression.
: position de la résonance $=$.

la source de l'instabilité, le gradient de pression, amoindrie par son aplatissement. Les profils moyens saturent. Nous traçons sur la Fig.(6.20a), les profils de pression à l'état initial et à saturation pour trois niveaux de turbulence. Les taux de croissance de l'instabilité d'interchange varient avec ^{2}comme le montre la Fig.(6.18). Le degré d'aplatissement du profil dépend du niveau de turbulence et on remarque que cet aplatissement comporte une zone de gradient constant près de la localisation de la résonance $=$, celle du mode , Fig.(6.20b).

Dans un travail récent [1], il est montré qu'un îlot magnétique formé par turbulence diminue le gradient de pression mais ne l'annule pas complètement. Il est aussi montré que ce radient de pression est constant à l'intérieur de l'îlot magnétique. Le travail [1] a été réalisé avec le profil magnétique en géométrie slab. Nous retrouvons ici ce résultat mais en géométrie cylindrique avec un profil magnétique asymétrique et avec quelques différences. Le mode forme en fait une chaîne d'îlots magnétiques, Fig.(6.21) qui aplatit la pression àl'emplacement des fluctuation. Et la zone de gradient de pression constant est disjointe en taille et en localisation de celle de l'îlot magnétique Fig.(6.21) et Fig.(6.20b). Cette correspondance existe dans le cas symétrique slab [15] mais ne semble pas valable dans le cas asymétrique. Dans le cas asymétrique, l'aplatissement du gradient de pression correspond à la localisation du maximum de la fonction et l'extension à celle de la fonction , Fig.(6.21), qui est sur le côté interne de la résonance. Pour confirmer encore ce résultat, nous prévoyons de repérer les îlots par une section de poincaré du déplacement de particules le long

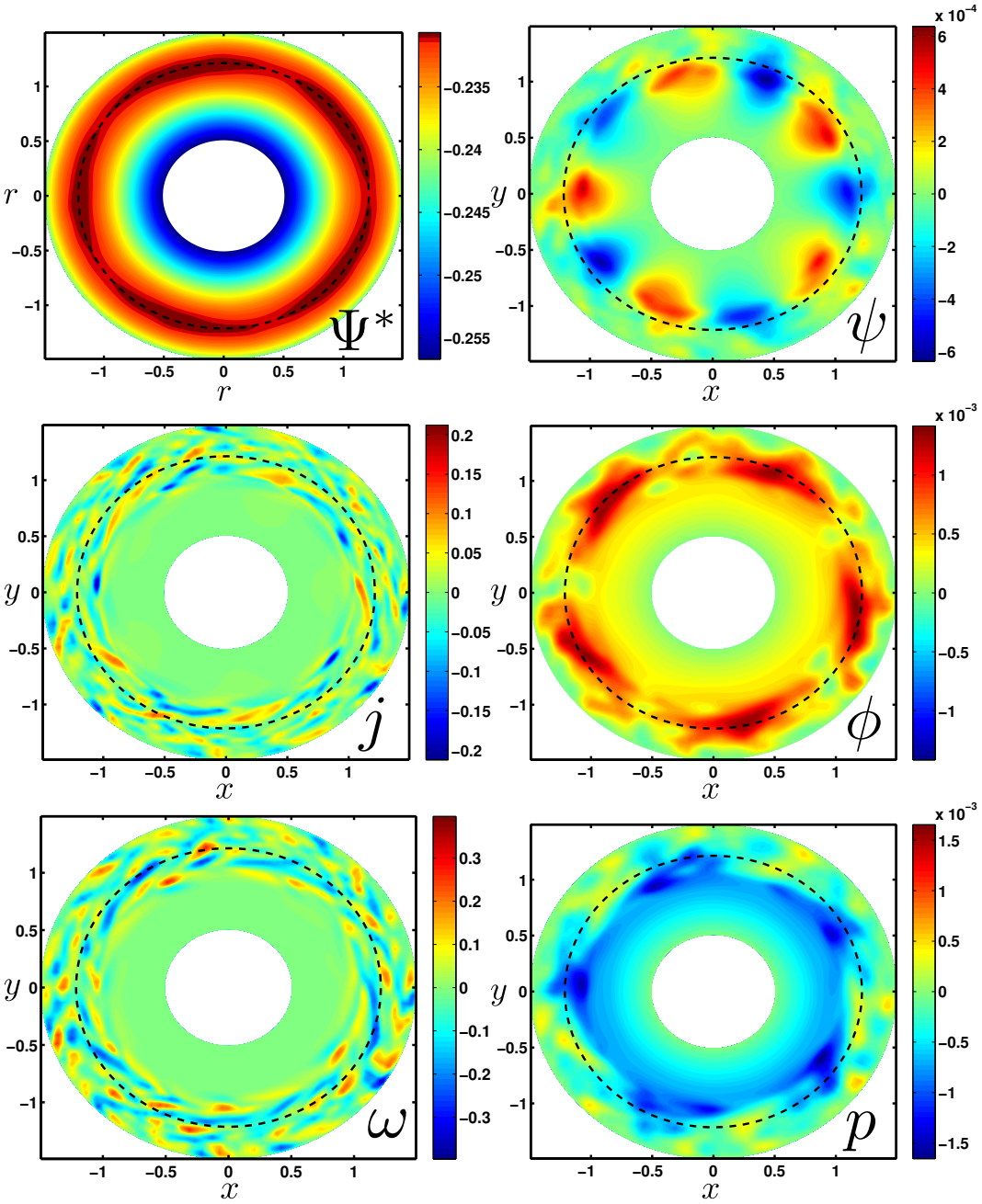

FIGURE 6.21 – Courbe de niveau de , , , , et , à saturation : = 0000 pour l'hélicité = . La position de la résonance = est en pointillé. Les données sont celles de la Fig.(6.16) avec $^2 = 3$ 0 .

du champs magnétique. Nous pourrons également retrouver la position exacte de l'îlot et la comparer à celle du gradient de pression amorti.

Nous avons donc ici généré un îlot magnétique avec la turbulence qui est en fait localisé sur la surface résonante la plus fabliment rationnelle qui existe dans notre système. Cet îlot magnétique réduit le gradient de pression en son sein. L'extension radiale de la modification du gradient de pression semble limitée par l'absence du gradient de pression pour , Fig.(6.20b). La taille de l'îlot magnétique est liée à l'extention de l'aplatissement du gradient, mais n'y est pas directement égale à cause de l'asymétrie du système. La question de la taille de l'îlot magnétique en fonction du gradient de pression et du niveau de turbulence pourra être traitée ultérieurement. Nous avons également vu que la pression était globalement modifiée pour . Il ne s'agit pas du gradient constant à l'intérieur de l'îlot, mais d'une modification de raccordement entre les conditions de bord et l'îlot, Fig.(6.20 et 6.22a). La perturbation pénètre aussi à l'intérieur de la zone sans gradient , Fig.(6.22b).

6.4 Pénétration de la turbulence sur une résonance de bas ordre.

L'étude à la Sec.(6.3.4) nous a montré que la turbulence d'interchange se développe dans la zone du gradient de pression, mais déborde de celle-ci pour atteindre la résonance où l'instabilité de déchirement magnétique peut eventuellement se développer. La turbulence atteint cette résonance de deux façons. Elle crée un gradient de pression à l'endroit où il n'y en avait pas, c'est l'action des fluctuations de pression poul le mode $m = 0\ 0$ sur l'équilibre. Le mode $m =$, qui est responsable de la modification du profil, déborde également. Pour voir l'effet de cette pénétration de la turbulence, il faut rendre une résonance de bas ordre accessible dans la zone stable du point de vue de l'interchange. La valeur de $_0$ est diminuée à . La résonance $=$ est alors incluse dans la boîte de simulation. La Fig.(6.23) résume les profils utilisés et les valeurs de simulation.

Pour que cette situation ait un sens, il faut s'assurer qu'il n'y ait pas d'instabilité de déchirement magnétique sur la résonance $=$ que nous avons introduite dans la boîte de simulation. Nous réalisons des simulations linéaires pour les valeurs de ^{2}extrêmes. La Fig.(6.24) montre les taux de croissance de chaque mode m . La résonance $=$ n'a pas été activée. Nous définissons le niveau de turbulence comme un coefficient de diffusion anormal lié à la turbulence petite échelle :

$$D = \frac{}{^2} \tag{6.15}$$

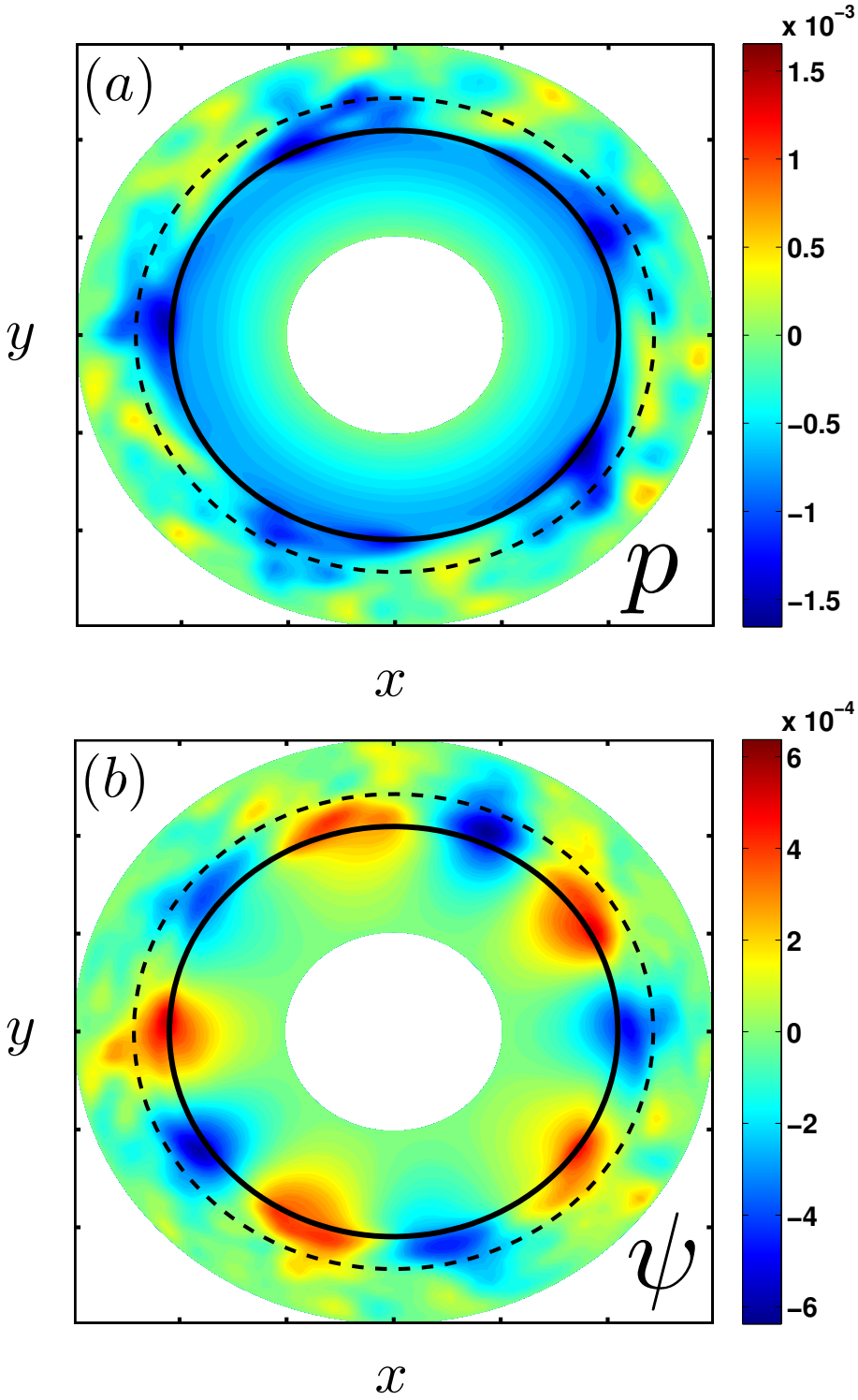

FIGURE 6.22 – Courbe de niveau des fluctuations et à saturation : = 0000 pour l'hélicité = . La position de la résonance = est en pointillés. Le rayon est en ligne pleine.
Les données sont celles de la Fig.(6.16) avec $^2 = 3 \quad 0$.

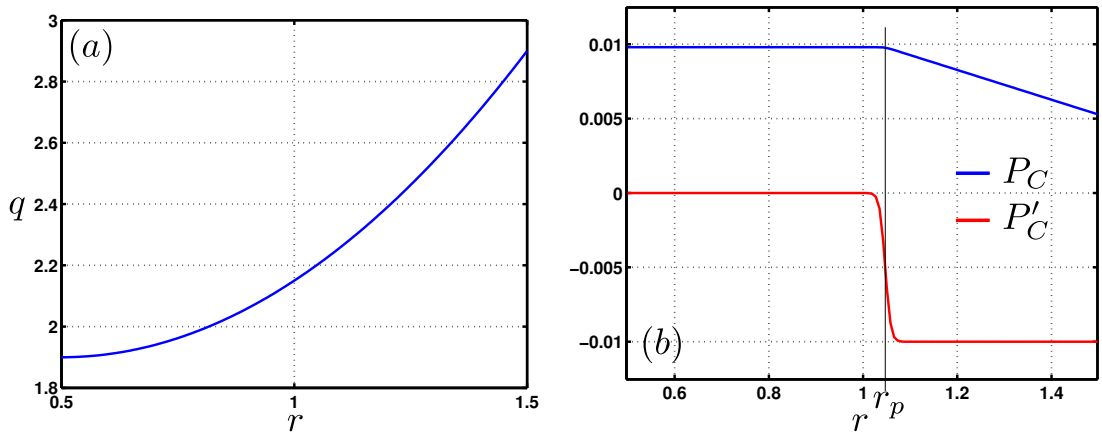

FIGURE 6.23 – (a) : profil de sans résonance de bas ordre 2 ou 3.
(b) : profil de pression plat avant = , avec gradient = 0 ^{2}.

Géométrie cylindrique, $3D_{full}$				
=	=	=	=	= $_0 = 0$

Profil de				Paramètres diffusifs
$_0 =$	$_1 =$	=	= 0 ^{3}	$^2 =$ 0 à 0
Profil pression	Courbure			= 0 = 0
= 0 = = 0 ^{2}	$_1 = 0$	= $^2 0$		= 3 0

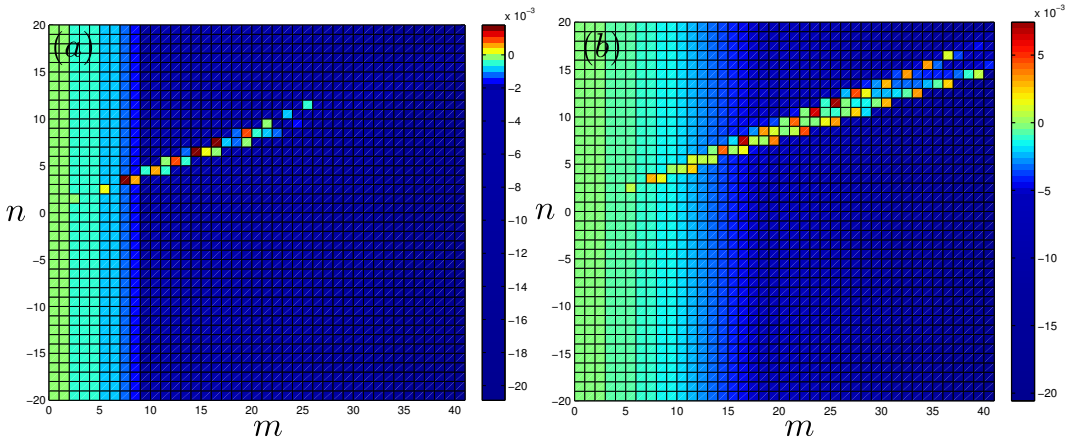

FIGURE 6.24 – Taux de croissance linéaire du système Eq.(6.14)
(a) : $^2 =$ 0 . (b) : $^2 =$ 0 .
Les données de simulation sont celles de la Fig.(6.23).

avec le taux de croissance et le vecteur d'onde perpendiculaire associés à un mode instable d'interchange. Mais dans notre système, il y a plusieurs hélicités et donc plusieurs sources de turbulence. Le niveau de turbulence sera alors la somme de toutes les contributions [19] :

$$D = \frac{}{^2} \tag{6.16}$$

Les valeurs résultantes sont rassemblées dans le Tab.(6.2).

^{2}	0	0	0 0	3 0 0	0 0
D	3 0 0	0	0	0	0

TABLE 6.2 – Niveau de turbulence Eq.(6.16) en fonction de ^{2}.

Les simulations non-linéaires montrent une évolution différente du cas de la Sec.(6.3.4). Nous observons une croissance de l'îlot sur la résonance = . Mais nous n'observons plus d'îlot pour la résonance = . Les courbes de niveau de sont présentées sur la Fig.(6.25). Mais les îlots sont fins et nous les observons difficilement avec la variable , Eq.(6.9). Nous voyons cependant la structure de juste autour de la résonance = qui est plus large et nous utiliserons la méthode de mesure de taille d'îlot de la Sec.(4.6.2). Il pourra être judicieux par la suite d'utiliser l'aire de l'îlot magnétique plutôt que la largeur. Il sera par contre impossible d'avoir une mesure haute fréquence de la taille d'îlot depuis la section de poincaré, celle-ci etant un post traitement lourd.

L'évolution temporelle de la taille d'îlot dépend du niveau de turbulence. La Fig.(6.26) présente ces évolutions temporelles pour les cinq valeurs de ^{2}. Nous pouvons extraire de ces données, une taille moyenne à saturation , un écart type représentant les fluctuations de la taille d'îlot et un taux de croissance de la taille de l'îlot . La Fig.(6.27) montre ces données en fonction du niveau de turbulence de chaque simulation. Les paramètres décrits sont linéairement dépendants du niveau de turbulence à deux détails près. La taille de l'îlot magnétique ne tend pas vers 0 si D tend vers 0. Il semble qu'il y ait une taille minimale d'îlot atteinte dès qu'une instabilité d'interchange, aussi faible soit-elle, sur la résonance de bas ordre. Dans ce cas, le taux de croissance de l'îlot tend vers 0. Les fluctuations de la taille de l'îlot magnétique semblent limitées par un maximum. Nous ne savons si ce maximum est du à la géométrie de notre système où aux conditions de bord. Nous étudierons dans des prochains travaux les dépendances de cette taille d'îlot, notamment la résistivité et la nature du profil magnétique.

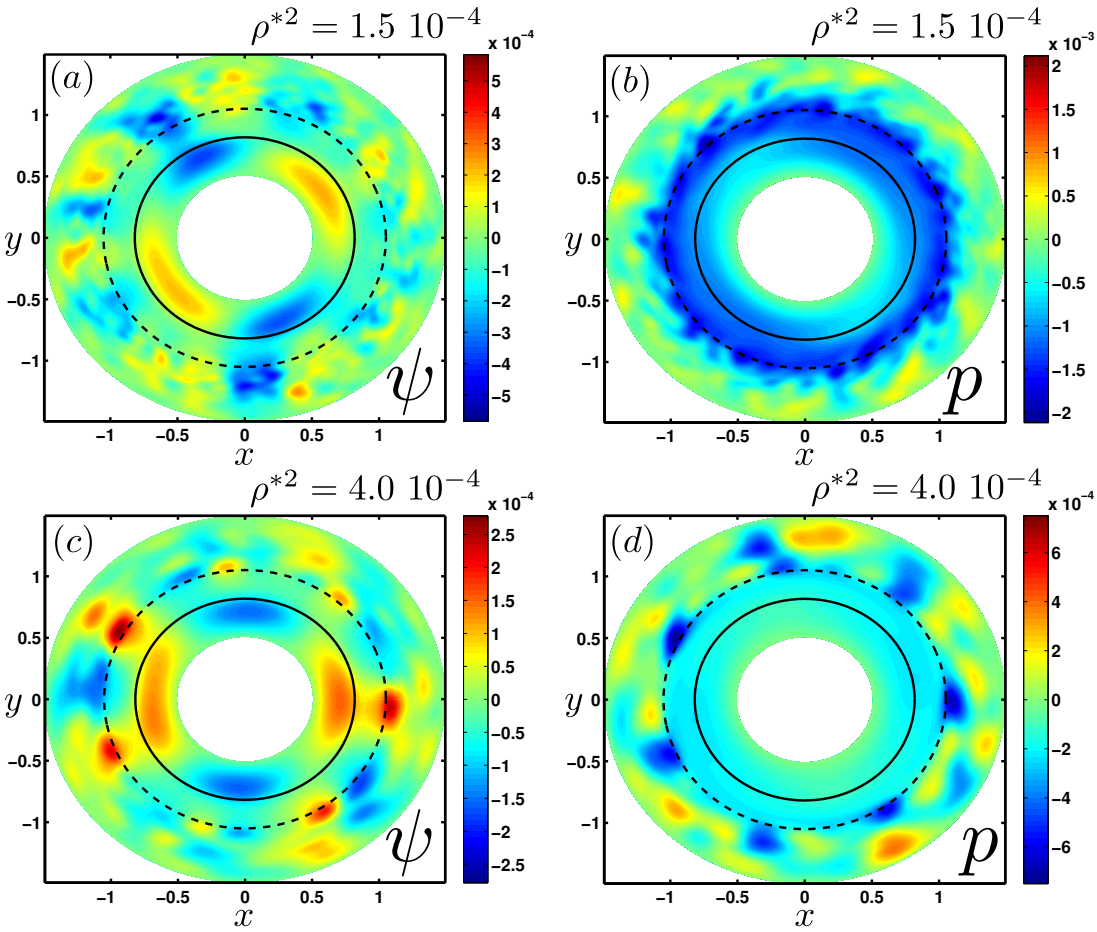

FIGURE 6.25 – Courbe de niveau à saturation, = 0000 pour deux valeurs de ^{2}. (a) et (b) : et pour ^{2}= 0 . (c) et (d) : et pour ^{2}= 0 0 . La ligne pointillée est le long du rayon = . La ligne pleine est le long de la résonance = .
Les données sont celles de la Fig.(6.23).

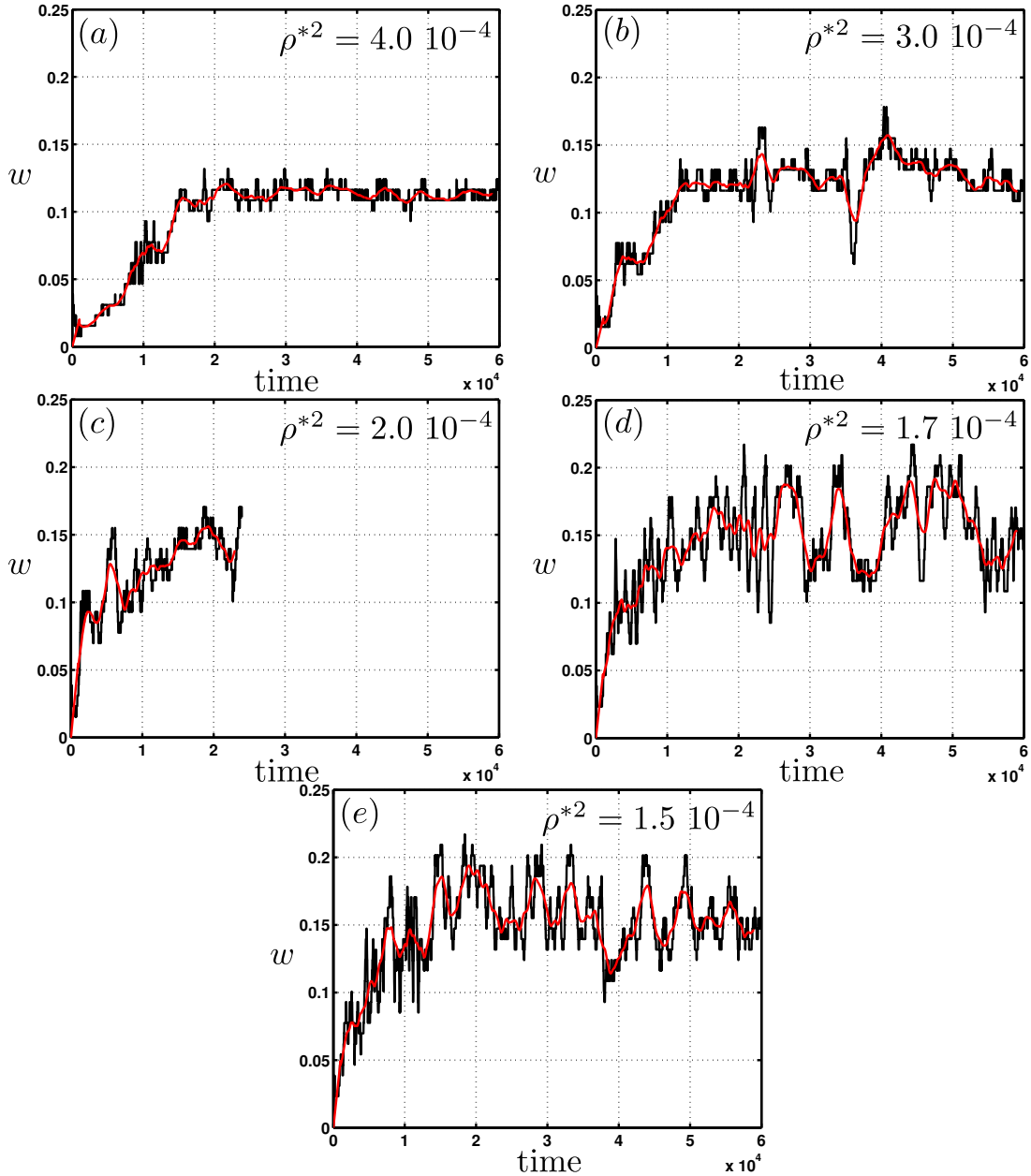

FIGURE 6.26 – Evolution temporelle de la taille de l'îlot magnétique pour différentes valeurs de D. La courbe noire correspond à la mesure brute. La courbe rouge est un moyennage temporel de la noire sur 00 . (c) : un problème de cluster a interrompu la simulation. Les données sont celles de la Fig.(6.16).

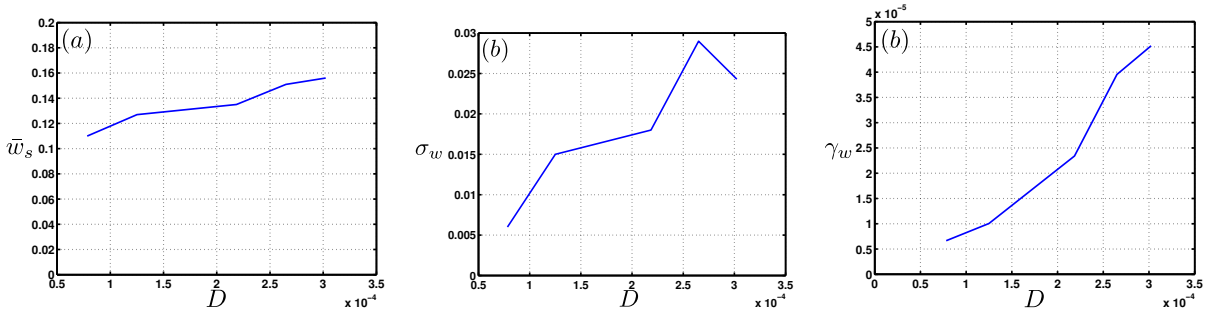

FIGURE 6.27 – (a) : taille moyenne de l'îlot après saturation. (b) : écart type de la taille d'îlot après saturation. (c) : taux de croissance moyen de l'îlot avant saturation. Les données de simulation sont celles de la Fig.(6.23).

Nous pouvons imaginer plusieurs mécanismes pour la croissance d'un îlot magnétique par pénétration de turbulence. Soit le gradient de pression généré par la turbulence à la résonance de l'instabilité de déchirement magnétique est suffisant pour modifier la stabilité du déchirement magnétique. Soit la modification du gradient de pression à elle-même générée une turbulence qui a produit un îlot magnétique, comme à la Sec.(6.3.4). Une autre possibilité concerne la production de modes harmoniques $m \quad = \quad$ soit dans la zone turbulente, ces modes se propageraient ensuite vers la résonance $\quad = \quad$ et déclencheraient l'apparition d'un îlot magnétique par battement ; soit la production des modes harmoniques $m \quad = \quad$ a lieu directement sur la résonance à partir des modes générés par l'interchange et dont la structure de la fonction propre n'est pas nulle en $\quad = \quad$ même linéairement. Nous avons rassemblé sur la Fig.(6.28) les différents mécanismes qui peuvent permettre la création d'un îlot magnétique à $\quad = \quad$ avec une turbulence localisée à $\quad = \quad$.

Nous n'avons pas encore déterminé le ou les mécanismes à l'origine de la formation de l'îlot en $\quad = \quad$, parmi les différents chemin de la Fig.(6.28). Mais la Fig.(6.29) montre la forme de la séparatrice en rouge pour deux instants donnés. Sur la Fig.(6.29a), nous reconnaissons un mode $m = \quad$ et sur la Fig.(6.29b) un mode $m = \quad$. Il apparait en fait une alternance entre ces deux formes jusqu'à ce que le mode $\quad$ persiste seul sur la résonance. On en conclut qu'au moins ces deux modes auront un rôle à jouer.

Une fois l'îlot magnétique créé par la pénétration de la turbulence, nous regardons son effet sur l'applatissement de pression. La Fig.(6.30) nous montre le profil de pression à saturation pour différentes valeurs de $\quad ^2$. Il est à noter que le mode $\quad 0 \quad 0$ ne fluctue que très peu temporellement, malgré la turbulence. Nous ne pouvons nous attendre à un aplatissement du gradient d'équilibre car ce dernier est pratiquement nul à l'endroit où pousse l'îlot : pour $\quad = \quad$, on a $\quad$. Cependant, la perturbation de l'équilibre dûe à la turbulence d'interchange est modifiée par la présence de l'îlot

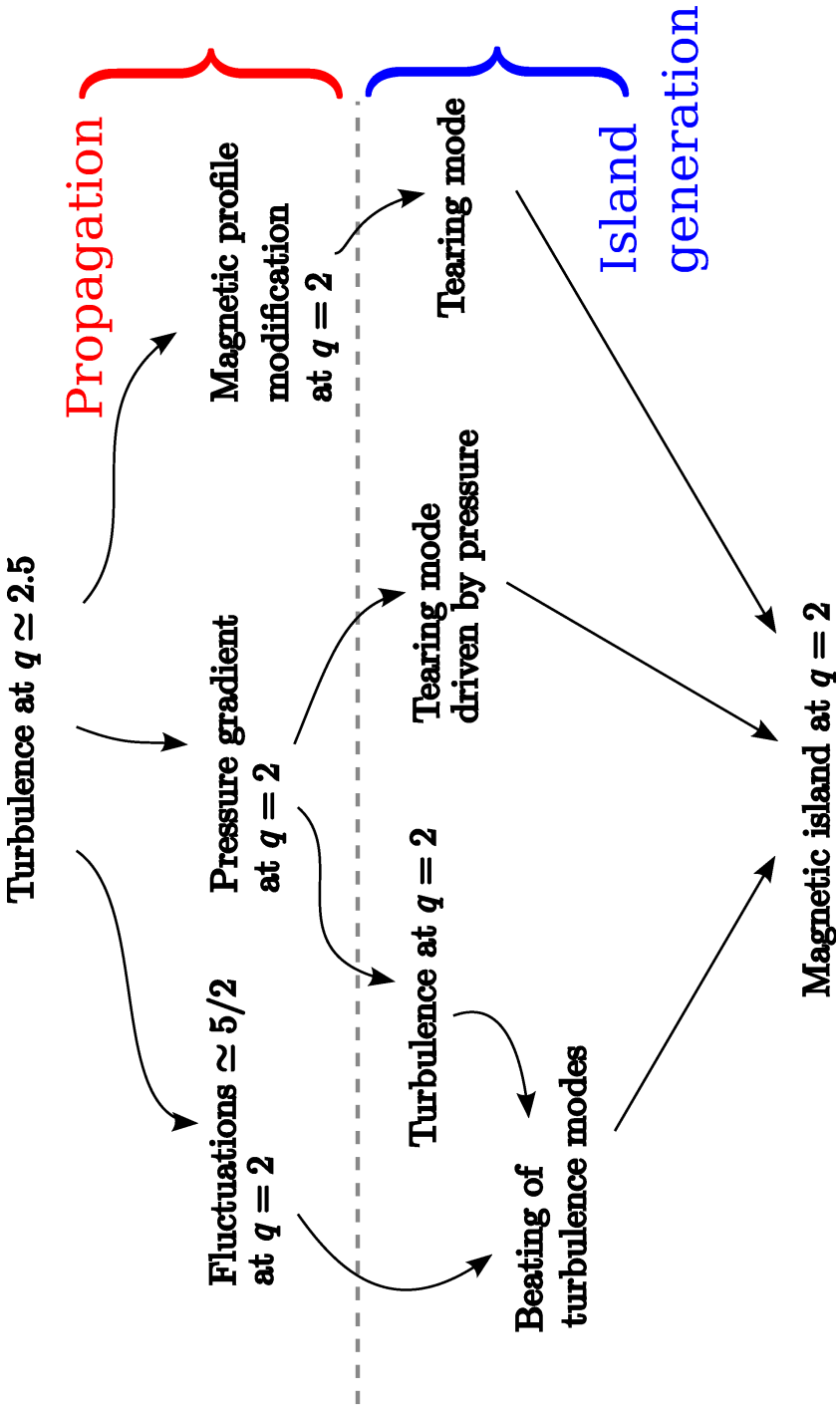

FIGURE 6.28 – Représentation schématique des différents méchanismes qui peuvent générer un îlot magnétique à distance.

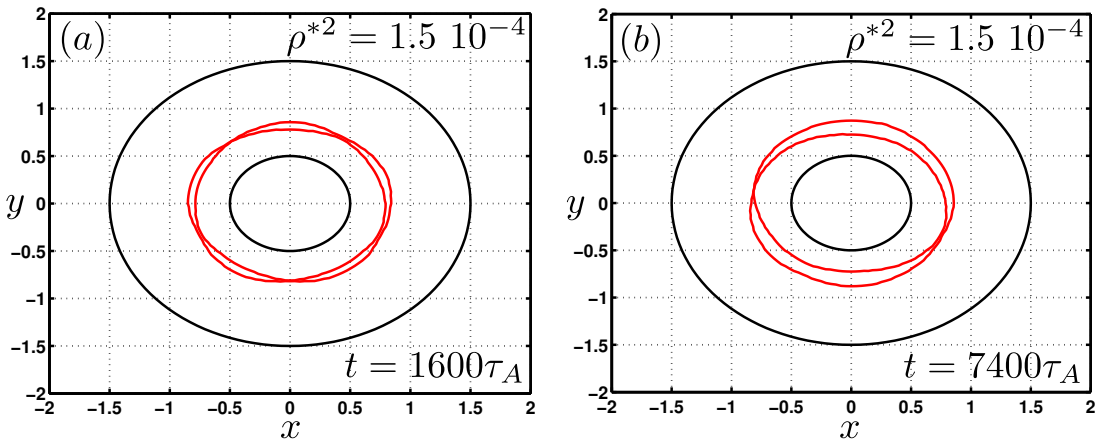

FIGURE 6.29 – En rouge, la séparatrice de l'îlot magnétique à deux instant pour $^2 = \quad 0$ issue de de la résonance $= \quad$. En noir, les limites de la boîte de simulation.
(a) : $= \quad 00$. (b) : $= \quad 00$.
Les données sont celles de la Fig.(6.16).

magnétique, comme le montre la Fig.(6.30). Tant que cette turbulence n'est pas trop forte, l'îlot arrive à maintenir un gradient de pression nul en son sein, (les cas où $^2 \geqslant \quad 0 \quad 0$). Si la turbulence modifie trop fortement le gradient de pression en , l'îlot ne pourra que minimiser cette variation sans plus pouvoir la contenir. Ce sont les cas où $^2 \quad 0 \quad 0$. La présence de ce gradient de pression à la résonance $= \quad$ peut également déstabiliser un nouvel interchange délocalisé de l'interchange initial à $= \quad$. Cet interchange peut alors être responsable de la création d'un îlot magnétique à la résonance $= \quad$ par battement de modes.

Nous présentons aussi l'évolution du profil de courant entre l'état initial et l'état à saturation sur la Fig.(6.31). Nous constatons que le profil de courant n'est quasiment pas modifié, ni à l'emplacement de la turbulence ni à celle de l'îlot magnétique. L'idée que l'interchange puisse changer la configuration magnétique à la résonance $= \quad$ et entraine alors une destabilisation de l'instabilité de déchirement magnétique est éliminée. Elle pourra être confirmée ultérieurement par un redémarage des simulations avec comme profil initiaux, les profils finaux présentés ici.

Ces trois observations nous permettent de valider et d'invalider des parties des mécanismes, que nous reprennons sur la Fig.(6.32). Il reste cependant des expériences à mettre en place pour poursuivre l'investigation concernant la génération d'îlot magnétique à distance et discrimine parmi les différents mécanismes présentés sur la Fig.(6.32) lequel domine dans la génération de l'îlot magnétique.

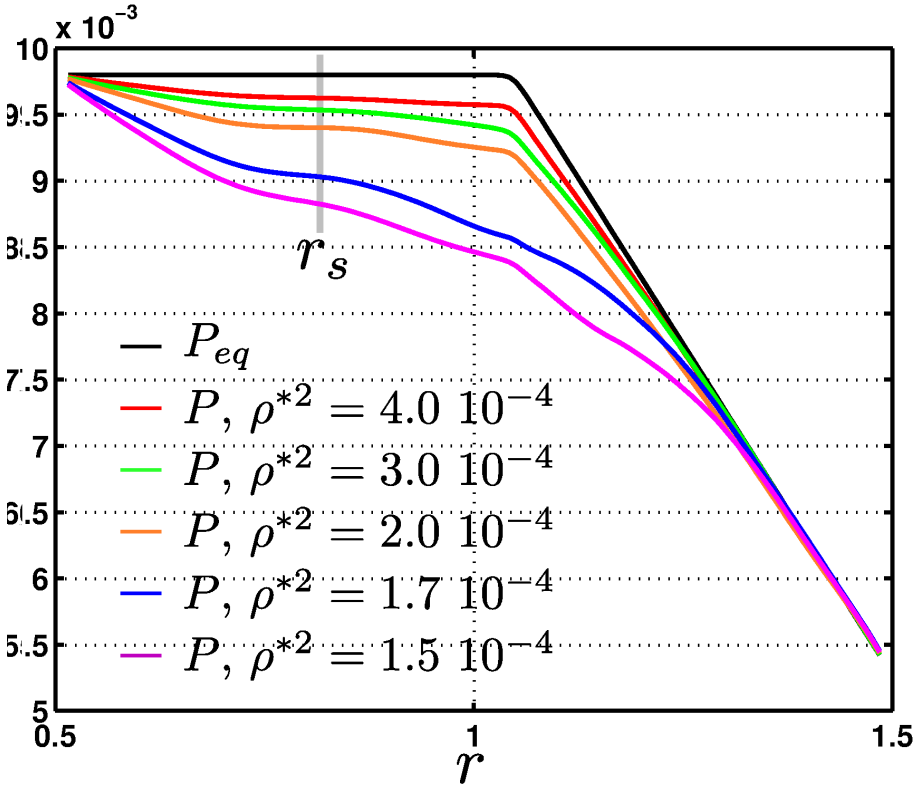

FIGURE 6.30 – Profil de pression initial et à saturation pour différents niveaux de turbulence.

: position de la résonance = .

Les données sont celles de la Fig.(6.23).

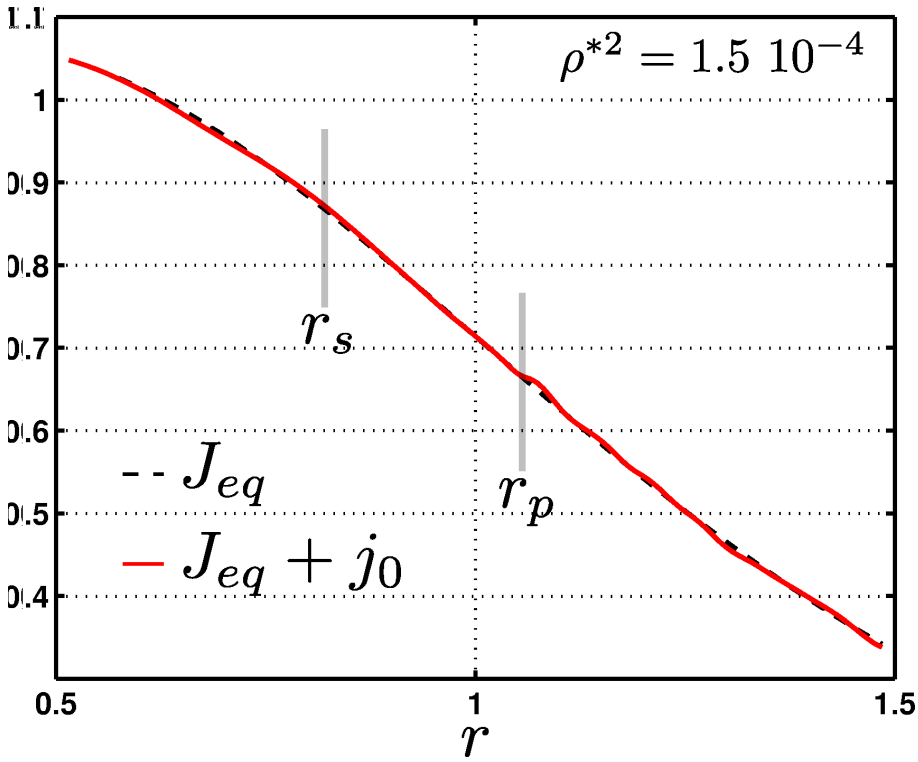

FIGURE 6.31 – Profil de courant initial et à saturation pour le niveau maximal de turbulence.

: position de la résonance = .

: position du début du gradient de pression

Les données sont celles de la Fig.(6.23) avec $^2 =$ 0 .

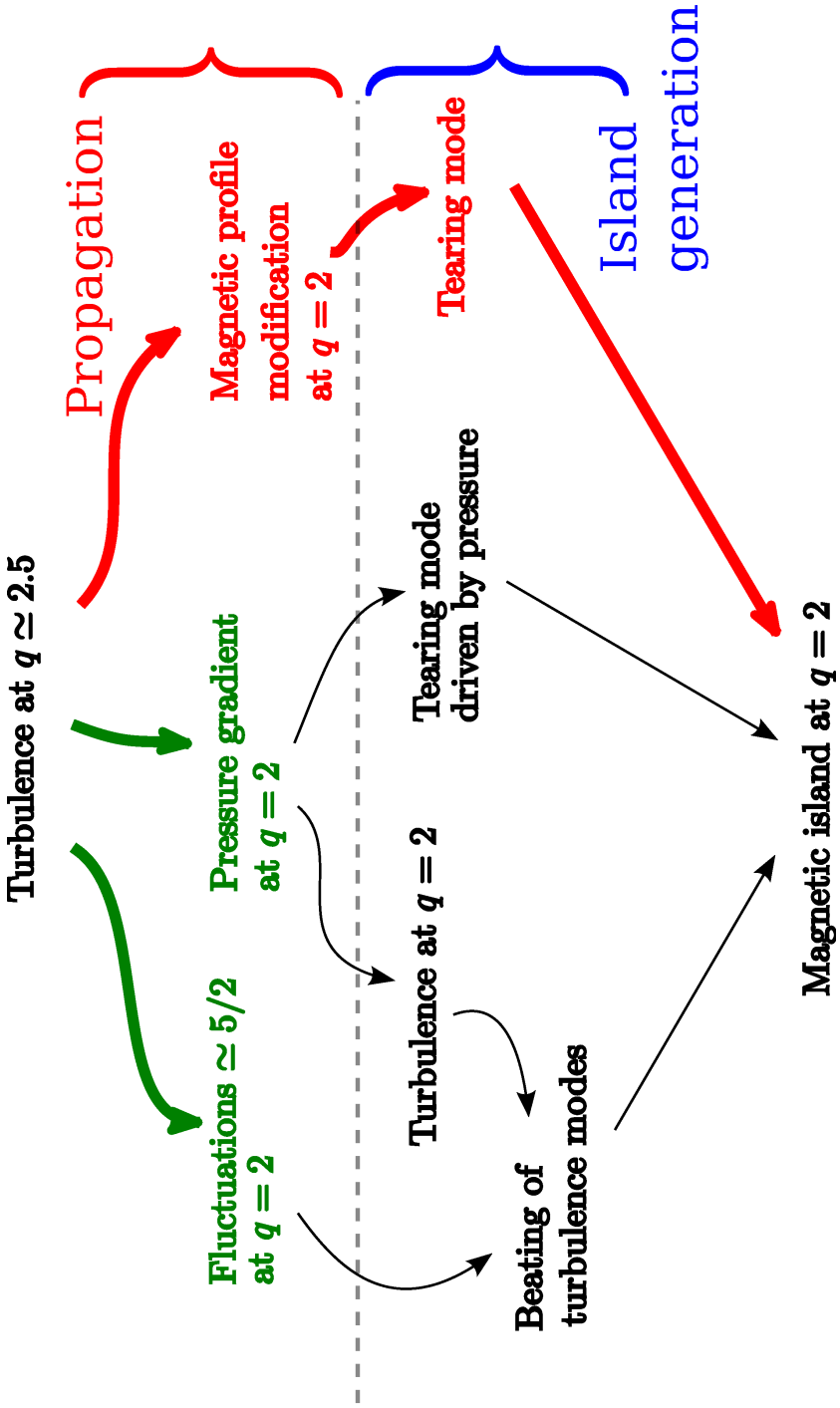

FIGURE 6.32 – Représentation schématique des différents méchanismes qui peuvent générer un îlot magnétique à distance.
En vert : les mécanismes observés.
En rouge : les mécanismes invalidés.

6.5 Localisation de l'îlot magnétique

Une des questions que nous avons adressé dans ce chapitre part d'un constat simple. La turbulence peut générer des îlots magnétiques sur des surfaces non nécessairement de bas ordre, mais là où la turbulence se développe. Il y a de la turbulence partout. Nous devrions avoir des îlots magnétiques partout également, c'est à dire sur de nombreuses résonance. Or, ces îlots magnétiques ne sont observés expérimentalement que sur les surfaces rationnelles de bas ordre , 3 , 3 ... Il doit donc y avoir un phénomène supplémentaire qui limite l'apparition des îlots magnétiques à ces résonances là seulement.

Nous avons vu deux cas très similaires. Le cas issu de la sous-section (6.3.4) où la turbulence produit un îlot à la résonance = , et le cas où la turbulence produit un îlot à distance sur la résonance = . La différence entre ces deux cas réside dans la présence de la résonance = dans la simulation. Si cette résonance n'est pas disponible, l'îlot magnétique se forme sur la surface résonance = . Si celle-ci est présente, nous n'observons plus d'îlot magnétique à = , mais à = . La Fig.(6.33) montre les courbes de niveau de ^{2} et ^{2} où nous pouvons constater où non la présence des îlots magnétiques.

Fig.(6.34), nous regardons l'évolution de l'énergie magnétique dans le cas où l'îlot apparait à = alors que cette résonance était stable. Nous observons un transfert de l'énergie magnétique du mode m = au mode m = . Ce travail permet donc de comprendre pourquoi les îlots magnétiques sont uniquement sur des surface résonantes faiblement rationelle.

6.6 Conclusion

A cause des NTMs, l'apparition d'îlots magnétique, même petits comme dans le cas où ils sont induits par la turbulence comparativement à ceux générés par déchirement magnétique, devient un problème pour la stabilité du plasma. Nous avons ici étudié la formation des ilots magnétiques en géométrie cylindrique $3D_{full}$ en raison de la présence d'une turbulence. Nous avons vu trois voies de formation des îlots magnétiques.

Il peuvent se former par croissance de l'instabilité de déchirement magnétique. Le critère de stabilité 0 de l'instabilité de déchirment magnétique n'est plus suffisant car l'asymétrie du système entre en jeu. Les îlots sont plus facilement stables et nous soulignons l'insuffisance de la quantification des effets d'asymétrie en un seul paramètre .

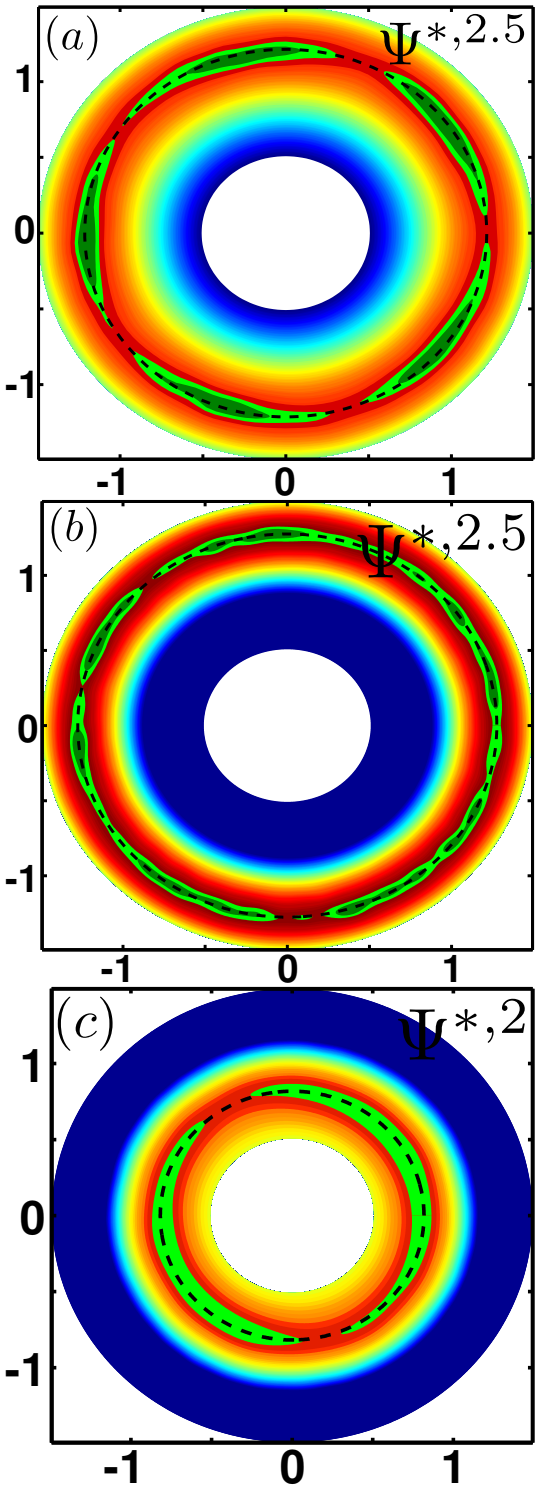

FIGURE 6.33 – Courbe de niveau à saturation de
(a) : ^{2} à = 0000 pour un profil de .
(b) : ^{2} à = 0000 pour un profil de .
(c) : ^{2} à = 0000 pour un profil de .
La ligne pointillée est à = pour (a) et (b) et est à = pour (c).
Les données sont celles de la Fig.(6.23).

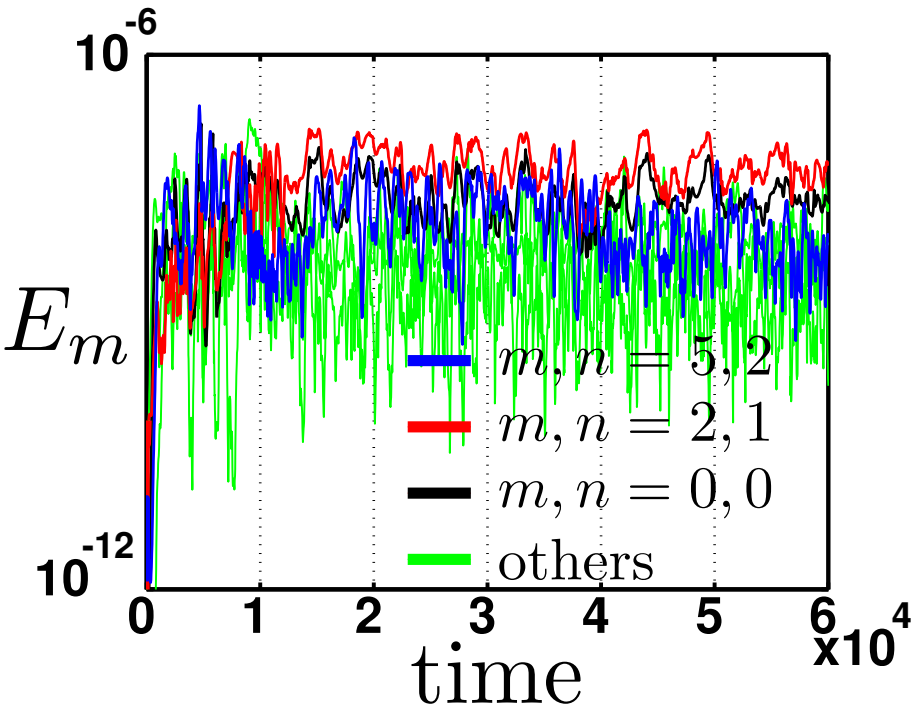

FIGURE 6.34 – Energie magnetique pour quelques modes
Les données sont celles de la Fig.(6.23) avec $^2 = 0$.

Les îlots magnétiques peuvent se former à cause d'une turbulence sur la résonance de l'îlot et aussi par pénétration de la turbulence sur la résonance de l'îlot. Ces deux voies permettent la croissance d'îlot avec des modes poloïdaux plus grand qu'avec l'instabilité de déchirement magnétique. Le spectre poloïdal de l'instabilité de déchirement magnétique ne possède généralement que des harmoniques poloïdales m égales à ou 3 et des harmoniques toroïdale égales à ou . La turbulence a permis de faire pousser un îlots d'harmonique : une valeur poloïdale $m =$ pour laquelle le critère de stabilité 0 est satisfait la plus-part du temps. De la même manière nous avons pu créer des îlots magnétiques d'harmonique $m =$ sur une résonance stable par pénétration de la turbulence. La même expérience à été répétée avec succès sur la résonance $= 3$. Dans le cas où la turbulence crée un îlot magnétique à distance, le mécanisme mis en jeu est soit la propagation de perturbation vers la résonance $=$ où bien la modification du gradient de pression d'équilibre qui destabilise le déchirement magnétique ou créer une turbulence qui mènera à un îlot. Le niveau de turbulence conditionne les caractéritiques de l'îlot magnétique ainsi formé. Nous obtenons la taille d'îlot à saturation , le taux de croissance de l'îlot et les fluctuations de la taille d'îlot , tous proportionnels au niveau de turbulence D. Mais le point important est qu'il semble y avoir une taille d'îlot minimale dès lors

que celui-ci pousse.

Les questions qui se posent sont nombreuses : est-ce que l'écrantage de la turbulence où le contrôle de son niveau permet de contrôler la taille des îlots magnétiques ? Qu'en est-il avec un profil de pression plus réaliste, i.e. non constant dans la zone interne ? Quel est l'effet de la turbulence sur la taille de l'ilots dans le cas où l'instabilité de déchirement magnétique est instable ? Et aussi quels sont précisément les mécanismes amenant à la formation de l'îlot magnétique par la turbulence ? Toutes ces questions pourront être abordées ultérieurement.

Chapitre 7

Conclusion

Nous avons étudié dans cette thèse la formation et l'évolution des îlots magnétiques dans un tokamak avec un modèle fluide. Nous avons regardé les îlots magnétiques avec différents environnement. Le premier, dans le chapitre (4), correspond à un cadre théorique qui ne décrit que les îlots de petite taille. Ces théories sont utilisés expérimentalement, malgré leur limitation. Nous avons montré qu'en fait, les mécanismes que décrivent ces théories restent valables pour les îlots de grande taille car ces mécanismes sont localisés au point X. Ceci explique alors le bon accord théorie-expérience. Le chapitre 5 détaille comment du courant hors résonance peut influer sur la dynamique de l'îlot magnétique. Ces effets ne sont pas pris en compte dans les théories actuelles car ils ne sont pas localisés à la résonance. Ils peuvent même empêcher la saturation de l'îlot magnétique. Le chapitre 6 change d'environement : nous passons à une description plus réaliste de la géométrie, $3D$ cylindrique, avec un profil magnétique réaliste. Les aspects asymétriques du système changent alors le critère de stabilité de l'îlot magnétique. Nous prenons également en compte une turbulence d'interchange. Dans ce système nous montrons que la turbulence peut former un îlot magnétique en son sein mais aussi sur une résonance délocalisée de l'emplacement de la turbulence.

Dans les travaux futurs, nous nous attacherons à mieux définir le lien entre la turbulence et les îlots magnétiques formés, notament au travers des mécanismes mis en jeu. Nous établirons également un lien plus solide entre l'aplatissement de pression et la taille de l'îlot avec un diagnostique de section de poincaré. L'ECE est à ce jour la meilleure méthode expérimentale de mesure de taille d'îlot. Comme pour le chapitre 4, il faut vérifier si la mesure de l'ECE correspond réellement à la taille de l'îlot magnétique.

Bibliographie

[1] O. Agullo, M. Muraglia, A. Poyé, X. Garbet, S. Benkadda, M. Yagi, and A. Sen. Influence of interchange turbulence on the island transport properties. *submitted to Plasma physics and controled fusion*, 2012.

[2] A. Arakawa. Computational design for long-term numerical integration of the equation of fluid motion : two-dimensional incompressible flow. Part 1. *Journal of Computational Physics*, 135(CP975697) :103–114, 1997.

[3] N. Arcis, D. F. Escande, and M. Ottaviani. Perturbative approach to the nonlinear saturation of the tearing mode for any current gradient. January 2005.

[4] N. Arcis, D. F. Escande, and M. Ottaviani. Rigorous approach to the nonlinear saturation of the tearing mode in cylindrical and slab geometry. *Physics of plasmas*, 13(052305), March 2006.

[5] D. Biskamp. *Nonlinear Magnetohydrodynamics.* Cambridge University Press, 2nd ed edition, 1997. ISBN 0521599180.

[6] D. Biskamp. *Magnetic reconnection in plasmas.* Cambridge University Press, 2nd ed edition, 2005. ISBN 0521020360.

[7] S.I. Braginskii. *Transport processes in a plasma*, volume 1. M.A. Leontovich, 1965.

[8] W.S. Brainerd, C.H. Goldberg, and J.C. Adams. *Programmer's guide to Frotran 90.* Springer-Verlag, third edition, 1990. ISBN 0387945709.

[9] P. J. Mc Carthy. Analytical solutions to the grad–shafranov equation for tokamak equilibrium with dissimilar source functions. *Physics of plasmas*, 6(3554), June 1999.

[10] Z. Chang, J.D. Callen, E.D. Fredrickson, R.V. Budny, C.C. Hegna, et al. Observation of nonlinear neoclassical pressure-gradient-driven tearing modes in tftr. *Physical Review Letters*, 74(23) :4663–4666, June 1995.

[11] I.G.J. Classen, E. Westerhof, C.W. Domier, A.J.H. Donné, R.J.E Jaspers, N.C. Luhmann Jr, H.K. Park, M.J. van de Pol, G.W. Spakman, M.W. Jakubowski, and TEXTOR team. Effect of heating on the suppression of tearing modes in tokamaks. *Physical Review Letters*, 98(035001), January 2007.

[12] R. Coelho. Nonlinear growth of marginally unstable tearing modes. *Physics of Plasmas*, 14(052302), March 2007.

[13] D.R. Durran. *Numerical Methods for Fluid Dynamics : With Applications to Geophysics*. Springler, 2nd ed edition, September 2010. ISBN 1441964118.

[14] D. F. Escande and M. Ottaviani. Simple and rigorous solution for the nonlinear tearing mode. *Physics Letters A*, (323) :278–284, February 2004.

[15] R. Fitzpatrick. Helical temperature perturbations associated with tearing modes in tokamak plasmas. *Physics of Plasmas*, 2(3), March 1995.

[16] J. Freidberg. *Plasma Physics and fusion energy*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780521851077.

[17] A. Fujisawa. A review of zonal flow experiments. *Nuclear fusion*, 49(013001), January 2009.

[18] H.P. Furth and J. Killeen. Finite-resistivity instabilities of a sheet pinch. *Physics of fluids*, 6(4), April 1963.

[19] X. Garbet. *2nd ITER International Summer School AIP Conf. Proceedings*, 2009.

[20] X. Garbet, L. Laurent, A. Samain, and J. Chinardet. Radial propagation of turbulence in tokamaks. *Nuclear fusion*, 34(7), 1994.

[21] D. Grasso, L. Margheriti, F. Porcelli, and C. Tebaldi. Magnetic islands and spontaneous generation of zonal flows. *Plasma Physics and controlled fusion*, 48 :L87–L95, August 2006.

[22] W. Gropp, E. Lusk, and A. Skjellum. *using MPI*. The MIT Press, 2nd ed. edition, 1999. ISBN 026257134X.

[23] R.J. Hastie, F. Militello, and F. Porcelli. Nonlinear saturation of tearing mode islands. *Physical Review Letters*, 95(065001), August 2005.

[24] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss. *Plasma Confinement*. Dover Edition, 2003. ISBN 0486432424.

[25] R.D. Hazeltine, M. Kotschenreuther, and P.J. Morrison. A four field model for tokamak plasma dynamics. *Physics of fluids*, 28(8), August 85.

[26] C.C. Hegna. Nonlinear tearing mode interactions and mode locking in reversed-field pinches. *Physics of plasmas*, 3(12) :4646, August 1996.

[27] I Hofman. Resistive tearing modes in a sheet pinch with shear flow. *Plasma Physics*, 17(2), February 1975.

[28] A. Ishizawa and N. Nakajima. Multi-scale-nonlinear interactions among micro-turbulence, double tearing instability and zonal flows. *Nuclear Fusion*, 47 :1540–1551, 2007.

[29] A. Ishizawa and N. Nakajima. Turbulence driven magnetic reconnection causing long-wavelength magnetic islands. *Physics of Plasmas*, 17(072308), July 2010.

[30] B.B. Kadomtsev. *Fiz. plasmy*, 1(710), 1975.

[31] Naval Research Laboratory, editor. *NRL Plasma Formulary*. Naval Research Laboratory, 2011. URL `http://wwwppd.nrl.navy.mil/nrlformulary/index.html`.

[32] D. De Lazzari and E. Westerhof. The role of asymmetries in the growth and suppression of neoclassical tearing modes. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53(035020), February 2011.

[33] N. F. Loureiro, S. C. Cowley, W. D. Dorland, M. G. Haines, and A. A. Schekochihin. X-point collapse and saturation in the nonlinear tearing mode reconnection. *Physical Review Letters*, 95(235003), July 2005.

[34] J.T. Mendonça. Thermal effets in drift-tearing modes. *Plasma physics and controlled fusion*, 33(7) :847–857, January 1991.

[35] C. Mercier. Un critère nécessaire de stabilité hydromagnétique pour un plasma en symétrie de révolution. *Nuclear Fusion*, 1 :47–53, 1960.

[36] J.P. Meskat, H. Zohm, G. Gantenbein, S. Günter, M. Maraschek, et al. Analysis of the structure of neoclassical tearing modes in asdex upgrade. *Plasma physics and controlled fusion*, 43(10) :1325, September 2001.

[37] F. Militello and F. Porcelli. Simple analysis of the nonlinear saturation of the tearing mode. *Physics of plasmas*, 11 :L13, April 2004.

[38] F. Militello, M. Romanelli, R. J. Hastie, and N. F. Loureiro. Effect of current corrugations on the stability of the tearing mode. *Physics of plamas*, 16(032101), January 2009.

[39] F. Militello, D. Borgogno, D. Grasso, C. Marchetto, and M. Ottaviani. Asymmetric tearing mode in the presence of viscosity. *Physics of Plasmas*, 18(11) : 108–112, November 2011.

[40] Magali Muraglia, Oliver Agullo, Sadruddin Benkadda, Xavier Garbet, P. Beyer, and Abhijit Sen. Nonlinear Dynamics of Magnetic Islands Imbedded in Small-Scale Turbulence. *Physical Review Letters*, 103(145001), March 2011.

[41] Magali Muraglia, Olivier Agullo, Sadruddin Benkadda, Masatoshi Yagi, Xavier Garbet, and Abhijit Sen. Generation and amplification of a magnetic island by drift interchange turbulence. *Physical Review Letters*, 107(095003), August 2011.

[42] V. Naulin, T. Windisch, and O. Grulke. Three-dimensional global fluid simulation of cylindrical magnetized plasmas. *Physics of plasmas*, 15(012307), January 2008.

[43] L. Ofman, P.J. Morrison, and R.S. Steinolfson. Magnetic reconnection at stressed x-type neutral points. *Astrophysical Journal*, 417 :748–756, November 1993.

[44] Y.S. Park and A.S. Welander. Real-time determination of magnetic island location for neoclassical tearing mode control in diii-d. *Plasma physic and controlled fusion*, 48 :1447–1454, August 2006.

[45] F. Porcelli. Viscous resistive magnetic reconnection. *Physics of Fluids*, 30(6), June 1987.

[46] A. Poyé, O. Agullo, A.I. Smolyakov, S. Benkadda, and X. Garbet. Global current profile effects on the evolution and saturation of magnetic islands. *Physics of plasmas*, sumitted, 2012.

[47] Cambridge University Press, editor. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, third edition, 2007. ISBN 0521880688.

[48] J.M. Rax and C. Guthmann. *Physique des plasmas*. Dunod, 2005. ISBN 2100072501.

[49] P.H. Rutherford. Nonlinear growth of the tearing mode. *Physics of fluids*, 16 (11), November 1973.

[50] R. Samtaney, N.F. Loureiro, D.A. Uzdensky, and S.C. Cowley. Formation of plasmoid chains in magnetic reconnection. *Physical review letters*, 103(10) : 105004, September 2009.

[51] O. Sauter, R. J. La Haye, Z. Chang, D. A. Gates, Y. Kamada, et al. Beta limits in long-pulse tokamak discharges. *Physics of plasmas*, 4(1654), January 1997.

[52] O. Sauter, M.A. Henderson, G. Ramponi, H. Zohm, and C. Zucca. On the requirements to control neoclassical tearing modes in burning plasmas. *Plasma physics and controlled fusion*, 52(025002), February 2010.

[53] B.D. Scott. Tokamak edge turbulence : background theory and computation. *Plasma physics and controlled fusion*, 49 :S25–S41, June 2007.

[54] A. I. Smolyakov, I. O. Pogutse, and A. Hirose. Fluid model of collisionless plasma with finite larmor radius effects. *Physics of plasmas*, 2(12), August 1995.

[55] A.I. Smolyakov, A. Poyé, O. Agullo, S. Benkadda, and X. Garbet. Higher order and asymmetry effects on saturation of magnetic islands. *To be published*, 2012.

[56] R.S. Steinolfson. Energetics and the resistive tearing mode : effects of joule heatins and radiation. *Physics of fluids*, 26(9), September 1983.

[57] B.R. Suydam. *Procedings of the Second U.N. Internat. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, 31(157), 1958.

[58] T. Tachi, R.S. Steinolfson, and G. van Hoven. The effects of ohmic heating and stable radiation on magnetic tearing. *Physics of fluids*, 26(10), October 1983.

[59] S. Taniguchi, K. Yamazaki, T. Oishi, H. Arimoto, and T. Shoji. Control of neoclassical tearing mode by electron cyclotron current drive and non-resonant helical field application in iter. *Plasma and fusion research*, 5(S2035), May 2010.

[60] L. Urso, M.Maraschek, H. Zohm, and ASDEX upgrade team. Fitting of the rutherford equation for neoclassical tearing mode stabilisation in asdex. *Journal of Physics : Conference series*, 25(IAEA) :266–273, 2005.

[61] F.L. Waelbroeck. Onset of the sawtooth crash. *Physical Revue Letters*, 70(3259), May 1993.

[62] John Wesson. *Tokamaks.* Oxford University Press, May 1997. ISBN 0198562934.

[63] R.B. White, D.A. Monticello, M.N. Rosenbluth, and B.V. Waddell. Saturation of tearing mode. *Physics of fluids*, 20(5), May 1977.

[64] A.J. Wootton, B.A. Carreras, H. Matsumoto, K. Mc Guire, W.A. Peebles, et al. Fluctuations and anomalous transport in tokamaks. *Physics of fluids B*, 2(12) : 2879, August 1990.

[65] M. Yagi, S. Yoshida, S.-I. Itoh, H. Naitou, H. Nagahara, et al. Nonlinear simulation of tearingmode based on 4-field rmhd model. *Nuclear fusion*, 45 :900–906, June 2005.

[66] Y. Yoshioka, S. Kinoshita, and T. Kobayashi. Numérical study of magnetic island suppression by RF waves in large tokamaks. *Nuclear Fusion*, 24(5), 1984.

[67] S.J. Zweben, J.A. Boedo, O. Grulke, C. Hidalgo, B. LaBombard, et al. Edge turbulence measurements in toroidal fusion devices. *Plasma physics and controlled fusion*, 49 :S1–S23, June 2007.

Annexe A

Méthode de tir

La méthode de tir est une méthode de résolution de l'équation linéaire $= 0$ pour le calcul des parametres et . Les champs sont de la forme $=$ en géométrie slab et de la forme $=$ en géométrie cylindrique. L'équation se simplifie alors :

- En géométrie slab : $= \frac{'_e}{_e}$
- En géométrie cylindrique : $= {}^2 \frac{'_e}{_e} \quad \frac{1}{}$

avec, $=$, $= m$ et $= m$. Nous rappelons aussi $= \frac{n}{m}$ en géométrie slab, $= \frac{2\ n}{m}$ en géométrie cylindrique ainsi que le résume le tableau Tab.6.1. La résolution de cette équation présente une singularité à la résonance où $= 0$. Cependant, nous ne recherchons ici que les valeurs asymptotiques de à de la résonance. De plus, nous posons par normalisation que $=$. Ainsi, l'algorithme de calcul ne passe jamais par la singularité.

Nous utilisons la différence finie d'ordre 2 pour le calcul de et de :

$$\frac{}{_2} \tag{A.1}$$

$$\frac{}{} \tag{A.2}$$

Connaissant la valeur de $=$, supposant la valeur de $=$, nous pouvons effectuer un tir, depuis jusqu'au bord de la boite de simulation en calculant par pas successif, la valeur de $=$. Le tir est considéré comme réussi si la condition de bord est satisfaite selon une certaine tolérance . Si le tir est raté : alors on change la valeur de pour un nouveau tir. La figure Fig. A.1 montre les tirs successifs pour des valeurs de croissantes. La fonction $=$ est monotone : il n'y a qu'une seule solution pour un tir réussi.

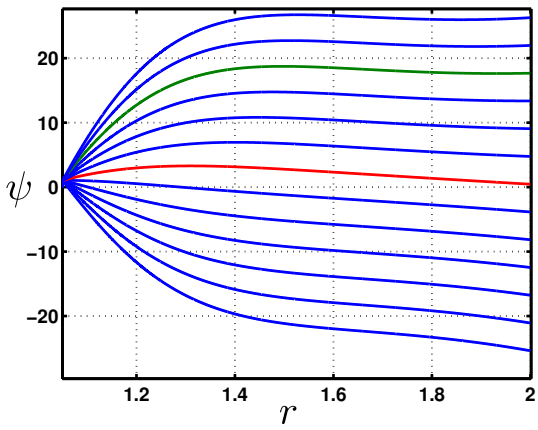

FIGURE A.1 – Exemple de tirs pour des valeurs de $= 00$, En rouge un tir réussi pour une condition de bord nulle. En vert, un tir réussi pour un condition de bord dérivée nulle.

Les détails de la méthode

Le positionnement de la résonance Cette méthode de tir exige le positionnement exact de la résonance sur la grille de calcul. La grille contient points entre $_0$ et $_0$. Mais elle est décalée d'une fraction de pour avoir la résonance exactement sur un point de grille. Cela engendre une erreur sur la position réelle des bords, mais elle est négligeable par rapport à un décentrage de la résonance. Attention aussi à eviter $= 0$ en géométrie cylindrique.

les algorithmes de calculs Les algorithmes de calculs de sont au nombre de quatre, selon la géométrie slab ou cylindrique et selon le sens du tir, de vers $_0$ où de vers $_0$. Nous posons l'indexation telle que $=$, $_0$ et $_0$. Nous définissons la fonction $= \frac{'_e}{_e}$ et la variable $=$. Les algorithmes sont résumés dans le tableau Tab. A.1.

Les conditions de validité du tir Pour une condition de bord nulle, tir vers $_0$, le tir est réussi si , avec $= 0$.

Pour une condition de bord à dérivée nulle, tir vers $_0$, le tir est réussi si , avec $= 0$.

Pour une condition de bord nulle, tir vers $_0$, le tir est réussi si , avec $= 0$.

Pour une condition de bord à dérivée nulle, tir vers $_0$, le tir est réussi si , avec $= 0$.

Tir de vers $_0$

conditions initiales	$=$
	$=$
	for $=$
slab	do $= \quad {}^2 \quad {}^2$
cylindrique	do $= \dfrac{{}^1 \quad {}^1 \quad {}^2 \quad {}^2 \quad {}^2 \quad {}^2}{{}^1 \quad {}^2}$

Tir de vers $_0$

conditions initiales	$=$
	$=$
	for $=$
slab	do $= \quad {}^2 \quad {}^2$
cylindrique	do $= \dfrac{{}^1 \quad {}^1 \quad {}^2 \quad {}^2 \quad {}^2 \quad {}^2}{{}^1 \quad {}^2}$

TABLE A.1 – algorithmes de tir pour le calcul de

L'évolution de au fil des tirs La valeur initiale de est arbitraire. Mais, le signe du taux de variation de avant la succession de tirs doit être vérifié. Nous réalisons donc deux tir à et . Si le deuxième tir est plus réussi que le second alors nous conservons le signe arbitraire de dp. Dans le cas contraire, nous l'inversons. Par exemple pour une condition de bord nulle, pour un tir vers $_0$, si , alors évolue vers un tir réussi.

Une succession de tir correspond à des tirs avec une évolution de , entre chaque. Si alors le dernier tir dépasse la condition de tir réussie, alors nous changeons l'évolution de 0. Ce processus est répété jusqu'à ce que la condition de tir réussie soit atteinte.

algorithme lentement convergent. Il arrive, notamment avec les boites très grande, que la résolution de ne soit pas suffisante pour atteindre la condition de bord choisie. Nous devons alors arrêter l'évolution de avec le critère suivant : $=$. Cependant, cela concerne en fait la convergence de la partie éloignée de la résonance de , la partie qui détermine et est définie.

Annexe B

Calcul des opérateurs ∇ , $\triangle$, et définition du crochet de Poisson

Nous avons le champ magnétique de la forme :

$$\mathbf{B} = \qquad \nabla$$

avec le vecteur unitaire $=$, $=$ $\frac{2}{2\ 2}$, $=$ — , $=$ — et la norme du champ magnétique $=$ $\left(\frac{1}{2} \ - \ ^{2} \right)$ —. Nous retrouvons comme dans l'An.(D) : $=$. Le gradient parallèle est défini par $\nabla_{\|} = \frac{\mathbf{B}}{}$ ∇ que nous pouvons décomposer et transformer avec la relation [31](1).

$$\nabla_{\|} = \frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \ = \qquad \frac{}{} \quad - \quad \nabla \quad \nabla$$

$$\frac{}{} \quad - \ \nabla \quad \nabla$$

La projection de l'opérateur perturbé par le champ magnétique être simplifié aux termes inférieurs à :

$$- \ \nabla \quad \nabla \ = \ - \qquad 0 \qquad \frac{1}{} \qquad \frac{1}{}$$

$$= \ - \qquad 0 \qquad \frac{1}{} \qquad \frac{1}{}$$

$$= \ \frac{}{} \qquad \frac{1}{} \quad \frac{1}{}$$

$$= \ \frac{}{} \qquad - \left(\ - \quad - \ \right)$$

$$\frac{}{}$$

Nous profitons du présent calcul pour généraliser la définition du crochet de Poisson :

$$\nabla \quad \nabla \quad -$$

Nous ne gardons que les termes d'ordre inférieur à ^{2} dans l'opérateur $\nabla_{\|}$, cela revient à considérer . nous obtenons alors :

$$\nabla_{\|} = \frac{}{_{0}} \quad -$$

Finalement, dans cet opérateur, nous avons deux échelles en . Les termes relatif à l'équilibre magnétique sont en et les termes issus des fluctuations magnétiques sont en .

L'opérateur $\triangle_{\|}$ est défini par :

$$\triangle = \nabla \quad \nabla = \nabla \quad \nabla_{\|} \quad \nabla \quad \nabla_{\|} = \nabla \quad \nabla \quad \nabla_{\|} \quad \nabla_{\|} = \triangle \quad \triangle_{\|}$$

Or l'opérateur $\nabla_{\|}$ est composé de termes d'équilibre en et $\frac{1}{}$ en avec un terme de fluctuation $\frac{1}{}$ en . Appliquer deux fois cet opérateur en gardant la même échelle revient à ne garder que les termes suivants :

$$\triangle_{\|} = {}_{2} \frac{}{_{0}} \quad - \quad -$$

les autres termes étant hors de l'échelle imposée. En D, la direction n'étant pas définie, le seul terme restant correspond au double crochet de Poisson d'ordre supérieur :

$$\triangle_{\|} = \frac{}{_{0}} \left(\frac{}{_{0}} \quad - \quad \right) - \quad \frac{}{_{0}} \quad -$$

Annexe C

Détails d'analyse vectoriel du Chap.(2)

C.1 Calcul du terme $\mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B}$

Nous présentons ici, le détail du calcul du terme $\mathbf{J} \quad \mathbf{B}$ de l'équation de vorticité Eq.(2.60). Nous utilisons la relation [31](9) :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad &= \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{B} \\ &= \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \end{aligned}$$

Nous avons donc $\mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad = 0$, et la relation [31](2) qui nous donne :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad = \nabla \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad {}^2\mathbf{J}$$

Nous utilisons la relation [31](7) sur les deux termes :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad = \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad {}^2\nabla \quad \mathbf{J} \quad \nabla \quad {}^2 \quad \mathbf{J}$$

Cette relation se simplifie grace à $\nabla \quad \mathbf{J} = 0$ et $\nabla \quad \mathbf{B} = 0$. nous adoptons aussi les notations suivantes : $\mathbf{B} \quad \mathbf{J} = \quad {}_{\parallel}$ et $\mathbf{B} \quad \nabla = \quad \nabla_{\parallel}$. La relation devient :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad = \quad {}^2\nabla_{\parallel} \quad {}_{\parallel} \quad \nabla \quad {}^2 \quad \mathbf{J}$$

Le second terme du membre de droite va donner le terme de courbure. Nous développons $\quad {}^2$ avec la formule [31](12) :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad = \quad {}^{2}\nabla_{\parallel} \quad {}_{\parallel} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{J}$$

Nous retrouvons encore la simplification du second terme $\mathbf{B} \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{J} \quad = 0$. Le troisième terme correspond à la courbure, en effet $\quad = \quad \nabla \quad$. Ce vecteur de courbure est perpendiculaire à $\mathbf{B}$, le courant effectif sur cette courbure est donc le courant perpendiculaire. Nous utilisons la relation Eq.(2.21) pour definir le courant perpendiculaire et nous obtenons finalement la dérivation du terme $\mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{J} \quad \mathbf{B} \quad = \quad {}^{2}\nabla_{\parallel} \quad {}_{\parallel} \quad {}^{2} \quad \mathbf{B} \quad \nabla$$

C.2 Calcul du terme $\mathbf{B} \quad \nabla \quad \boldsymbol{u}$

Nous rappelons le terme de vitesse : $\quad = \frac{\mathbf{B}}{\quad {}_{2}}$.

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \boldsymbol{u} \quad = \frac{}{\quad {}_{2}} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \nabla \tag{C.1}$$

Nous utilisons la relation [31](10) sur le vecteur de droite du produit scalaire :

$$\nabla \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad = \nabla \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla \tag{C.2}$$

Naturellement $\nabla \quad \mathbf{B} \quad = 0$, nous introduisons la définition du laplacien : $\nabla \quad \nabla = \triangle$, et nous rappelons la définition du gradient parallèle $\mathbf{B} \quad \nabla = \quad \nabla_{\parallel}$. Ces définitions sont replacées dans Eq.(C.2), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} \quad \nabla \quad \boldsymbol{u} \quad &= \frac{}{\quad {}_{2}} \quad \mathbf{B} \quad \triangle \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad \nabla_{\parallel} \quad \nabla \\
&= \frac{}{\quad {}_{2}} \quad {}^{2}\triangle \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla \quad \mathbf{B} \quad {}^{2}\triangle_{\parallel} \\
&= \left(\triangle \quad \frac{}{\quad {}_{2}}\mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla \quad \mathbf{B}\right)
\end{aligned}$$

Le second terme $\frac{1}{2}\mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla \quad \mathbf{B}$ est négligeable (proportionnel à$\frac{1}{2}$) tant que le champ axial $\quad$ est uniforme, ce qui est une de nos hypothèses de travail. Nous avons donc :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \boldsymbol{u} \quad \triangle \tag{C.3}$$

C.3 Calcul du terme $\mathbf{B} \quad \nabla \quad \underline{\boldsymbol{u}} \quad \nabla \ \boldsymbol{u}$

Nous commençons le calcul avec le rappel de $\quad = \frac{\mathbf{B}}{\quad 2}$. L'opérateur $\boldsymbol{u}_\perp \quad \nabla$ devient donc $\frac{1}{2} \ \mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla$. Par permutation, [31](1), cet opérateur devient :

$$\boldsymbol{u} \quad \nabla = \frac{}{2}\mathbf{B} \quad \nabla \quad \nabla \quad -$$

ou nous avons consideré la partie axiale du champs magnétique pour le produit scalaire. La partie poloïdale est négligée grâce a l'approximation de RMHD. Nous faisons le choix d'appliquer cette approximation un peu tôt pour alléger les calculs.

Le crochet de Poisson ainsi formé permet de simplifier le calcul de l'advection qui donne :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \underline{\boldsymbol{u}}_\perp \quad \nabla \ \underline{\boldsymbol{u}}_\perp \quad -\mathbf{B} \quad \nabla \quad \boldsymbol{u}_\perp \quad - \quad \mathbf{B} \quad \nabla \quad \boldsymbol{u}_\perp$$

Le résultat précedent Eq.(C.3) nous permet de simplifier encore la relation :

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \underline{\boldsymbol{u}}_\perp \quad \nabla \ \underline{\boldsymbol{u}}_\perp \quad - \quad \triangle$$

Annexe D

Calcul du terme de courbure $\mathbf{B} \quad \nabla$

Nous détaillons ici le calcul du vecteur de courbure ainsi que son passage en opérateur. La courbure est liée aux inhomogénéités du champ magnétique et à la géométrie du système. Nous allons faire un calcul général comprenant un champ magnétique réaliste pour un tokamak dans une géométrie torique.

$$= \left(\frac{\mathbf{B}}{} \quad \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{} \tag{D.1}$$

Nous redéfinissons le champs magnétique :

$$\mathbf{B} = \tag{D.2}$$

avec $= \frac{}{}$ comprenant $= {}_0$, une fonction de et $= \frac{}{}$. Nous rappelons l'approximation du rapport d'aspect $= -$ et nous spécifions que les variables indicées 0 sont des constantes. La norme de $= \mathbf{B}$ s'approxime en gardant les dépendances radiales et poloïdales :

$$= \sqrt{{}^2 \quad {}^2} = \sqrt{\left(\frac{}{}\right)^2 \quad - \left(-\right)^2} \tag{D.3}$$

Nous obtenons pour le vecteur unitaire $= \frac{\mathbf{B}}{}$ avec comme notation $= -$ et $= \frac{1}{1 \ \frac{}{2}^2}$:

$$= \tag{D.4}$$

Les fonctions et dépendent de et . Nous sommes également dans un référentiel mobile, les vecteurs unitaires dépendent des angles et .

Nous donnons les relations vectorielles et différentielles utilisées dans le calcul :

$$\begin{aligned}
&= \quad {}^{2}\\
&=\\
&=\\
&= 0\\
&= \quad {}^{-\frac{3}{2}}\\
&= \frac{2}{}\\
- \quad &= \frac{2}{} \quad {}^{2}\\
- \quad &= \frac{2}{}\\
\frac{}{} \quad &= \frac{2}{} \quad \frac{2}{} \quad \frac{2\ 2}{}\\
\frac{}{} \quad &= \frac{}{}
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors calculer le lecteur de courbure :

$$= \left(- \quad \frac{}{} \right) \tag{D.5}$$

$$= - \quad \frac{}{} \quad - \quad \frac{}{} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
= \quad &\frac{2}{} \quad \frac{}{3}\\
&\frac{2}{} \quad {}^{2}\\
&\frac{}{} \quad \frac{2\ 3}{2} \quad \frac{2\ 2}{2}
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Nous avons gardé la fonction pour ne pas negliger ses variations. Maintenant que nous avons le vecteur , nous pouvons simplifier par rapport au paramètre avec $= \frac{2}{2\ 2}$ et ${}^{2} = \frac{2}{2}$.

$$= \quad \frac{2}{} \quad {}^{2} \quad \frac{2}{2} \quad {}^{3} \tag{D.8}$$

$$= - \quad {}_{\frac{2}{}} \quad \frac{2}{} {}^{\frac{2}{2}} \quad {}^{2} \tag{D.9}$$

Nous pouvons dès à présent identifier les courbures les plus importantes et leurs origines. Les deux contributions les plus fortes sont en et sont issues de la courbure toroïdale. Les contributions suivantes en ^{2} sont issues de l'inhomogénéité du champ magnétique toroïdal, poloïdal et de la courbure poloïdale.

Le système dans lequel nous dérivons les équations correspond à un champ magnétique axial constant dans une géométrie cylindrique, dans ce cadre le vecteur unitaire devient :

$$= \tag{D.10}$$

avec identique au cas précedent, mais avec = — et = —. et ne sont alors plus des fonction de , mais de seulement. Le champs magnétique toroïdal devient le champ magnétique axial . Le tableau des opérateurs est également beaucoup plus simple :

$$\begin{array}{lll} = 0 & - & = 0 \\ = 0 & - & = 0 \\ = & — & = \frac{\quad}{\quad} \\ = 0 & — & = 0 \\ = 0 & & \\ = 0 & & \\ \hline \end{array}$$

Nous obtenons un vecteur de courbure simplifié :

$$= \frac{\quad}{\quad} \tag{D.11}$$

L'idée de la modélisation ici n'est pas d'avoir une courbure réaliste mais tout du moins cohérente avec les hypothèse du modèle. La courbure est requise pour réaliser une turbulence d'interchange comme nous le verrons dans le Chap.(6). Le coeficient de courbure peut être arrangé pour avoir une force équivalente à la courbure due aux effets toroïdaux.

$$\mathbf{B} \quad \nabla \qquad \begin{array}{l} \frac{\quad}{\quad} \\ 0 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0 \\ - \end{array} \qquad \frac{1}{} \qquad = \frac{\quad}{\quad}\left(- \qquad - \qquad \right) \tag{D.12}$$

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad = \frac{\quad}{\quad} \qquad \frac{\quad}{\quad} \tag{D.13}$$

$$\mathbf{B} \quad \nabla \quad \frac{\quad}{\quad} \quad = \frac{\quad}{\quad} \tag{D.14}$$

Annexe E

Détails des simulations numériques

Sauf indication contraires, les conditions de bords sont toujours des points nuls en .

E.1 Profils magnétiques et de pressions utilisés dans la thèse

– Profil magnétique issu du facteur de sécurité :

$$= \quad {}_0 \quad {}_1 \quad {}_0 \frac{{}^2}{{}_0 \quad {}^2} \tag{E.1}$$

En géométrie slab :

$$= \frac{}{} \text{ et } \quad = \frac{}{} \left(\frac{}{} \quad \frac{}{} \right) \tag{E.2}$$

En géométrie cylindrique :

$$= \frac{}{} \text{ et } \quad = \frac{}{} \left(\frac{}{} \quad \frac{}{} \right) \tag{E.3}$$

– Profil magnétique en feuille de courant de Harris :

$$= \quad \left(\frac{}{} \right) \tag{E.4}$$

– Profil magnétique et avec plusieurs feuille de courant de Harris :

$$= \quad \frac{}{} \left(\quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \right) \tag{E.5}$$

– Profil magnétique D avec un continuum de courant :

$$= \quad \frac{\overline{3}}{{}_3} \quad {}_2 \quad \frac{{}^2}{} \tag{E.6}$$

– Profil magnétique périodique en :

$$= \quad \text{sech}^2 \tag{E.7}$$

– Profil magnétique périodique en avec un continuum de courant :

$$= \tag{E.8}$$

– Profil de pression en rampe :

$$= {}_0 \quad {}_0 \tag{E.9}$$

– profil de pression plat puis en rampe à partir de :

$$= {}_0 \quad - \left(\quad \left(\quad \left(\frac{}{} \right) \right) \right) \tag{E.10}$$

Annexe F

Le taux de croissance linéaire de l'instabilité de déchirement

Le premier calcul abordé est celui de : le taux de croissance de l'instabilité de déchirement magnétique, noté dans cette section. Ce calcul passe par la résolution linéaire du système d'Eq.(F.1,F.2) et est également présenté dans [5, 18]. Le résultat final nous permet de nous assurer de la présence de l'instabilité de déchirement magnétique par conparaison des taux de croissance numérique et théorique, mais surtout il va nous faire apparaître le critère d'instabilité prend une importance primordiale dans les différentes théories "petit îlot".

Le système d'équation linéairisé est le suivant :

$$= \qquad \triangle \tag{F.1}$$

$$\triangle \quad = \tag{F.2}$$

La solution est posée de la forme suivante :

$$= \tag{F.3}$$

$$= \tag{F.4}$$

Nous avons choisi un déphasage constant entre les champs. Ce déphasage apparait naturellement dans le calcul et le retranscrire dès le départ dans la forme des solutions permet de simplifier le calcul.

F.1 Résolution dans la zone idéale.

La géométrie du système impose une seule résonance en $= 0$. Au dela de cette position, les perturbations sont alfrvènisées : armoties. Nous pouvons alors poser que $= 0$. Compte tenu également de la faible résistivité du système, nous avons également un temp résistif caractéristique plus petit que le temps d'Alfvèn. Nous pouvons donc considérer le terme résistif $\triangle$ négligeable face au terme Alfvènique dans l'Eq.(F.1) linéaire. Dans ce cadre idéal, l'Eq.(F.2) donne :

$$= \left(\quad \frac{}{} \right) \tag{F.5}$$

Comme nous avons posé le champ d'équilibre tel que $=$ $\frac{}{}$, on en déduit l'équation différentielle en , sa solution générale et sa solution comprenant des conditions de bord où $= 0$ et $= 0$:

$$= \left[{}^{2} \quad \left(\quad {}^{2} \left(\frac{}{} \right) \right) \right] \tag{F.6}$$

$$= {}_{1} \quad \frac{}{} \quad {}_{2} \quad \frac{}{} \tag{F.7}$$

$$= \quad \frac{}{} \tag{F.8}$$

où correspond à la valeur de 0 et est choisi par normalisation. La figure Fig.(F.1) montre la forme de la fonction dans la zone idéale : hors résonance. La solution présente à la résonance une discontinuité qui est caractérisable par un paramètre important : .

$$= {}_{0} \quad \frac{}{} \tag{F.9}$$

Le paramètre calcule la différence de variation radiale de de part et d'autre de la résonance. La figure Fig.(F.1a), montre un exemple où 0. La figure Fig.(F.1b), montre un exemple où 0. Ce paramètre est associé à un mode donné . Il dépend du profil magnétique mais aussi des conditions de bord de la zone idéale. Dans le cas de conditions de bord nulles à l'infini pour le profil magnétique en feuille de courant de Harris , nous avons :

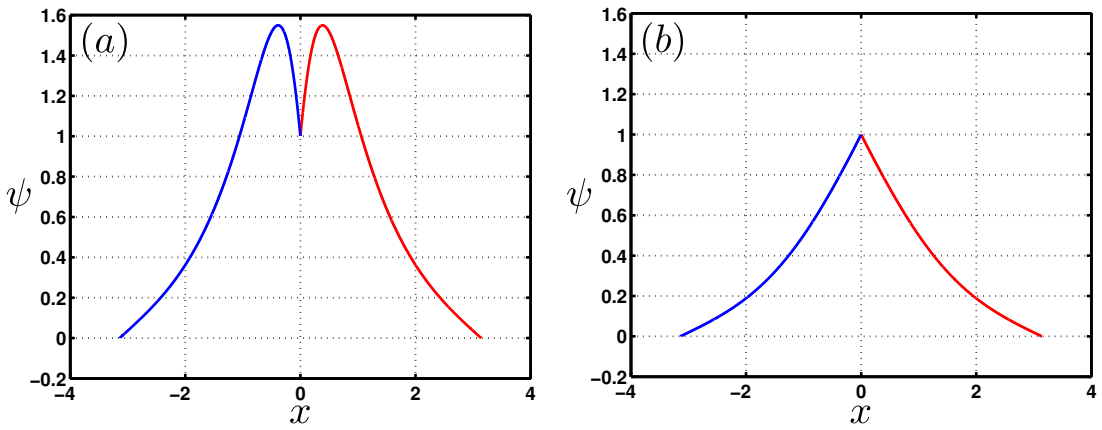

FIGURE F.1 – dans la zone idéale.
: = , = 0 , = , = , =
: = , = , = , = , =

$$= \qquad \frac{\quad}{\quad} \qquad \frac{\quad}{\quad}$$

$$_0 \qquad _0 \tag{F.10}$$

$$= \left(\quad \right) \tag{F.11}$$

Le calcul de $_1$et $_2$ de la solution générale Eq.(F.7) est réalisé pour chaque condition de bord en positif et négatif. Les formules de obtenues sont résumées dans le Tab.(F.1) non exaustif . Nous nous en sommes servi pour valider la méthode de tir décrite en An.(A) qui calcule . Il est bien sur possible de mixer les conditions de bords pour rendre compte d'une différence entre le bord 0 qui est connecté au coeur du tokamak et le bord 0 connecté à l'exérieur du plasma.

F.2 Résolution dans la zone résistive

A la résonance, nous n'avons plus d'Alfvènisation des perturbations : elles sont en résonance avec l'hélicité du champ magnétique. Des phénomènes de temps caractéristique supérieur au temps d'Alfvèn peuvent se produire, et notamment les phénomènes résistifs. Ces effets ne se limitent pas exactement à la position résonante. Il y a une certaine largeur où l'alfvènisation reste faible par rapport au terme résistif. Néanmoins, cette zone résistive reste fine à cause de la faiblesse de la résistivité. Nous reprenons à nouveau le système d'Eq.(F.1,F.2) avec le terme résistif :

Table F.1 – Formules de selon les conditions de bord pour différents profils magnétiques

Profil magnétique	condition de bords		Formule pour
	0	0	
$=$	$= 0$	$= 0$	$= \frac{2}{} \quad \frac{1}{}$
	$= 0$	$= 0$	$= \frac{1}{2} \quad \frac{(-)}{(-)}$
	$= 0$	$= 0$	$, = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{}$ $= \left(\frac{1}{2 \quad (-)} \right) \quad \frac{(-)}{}$
$=$	$= 0$	$= 0$	$= \frac{}{2 \quad 2}$
	$= 0$	$= 0$	$= \frac{}{2 \quad 2} \quad \frac{}{2 \quad 2}$
$= \quad \text{sech}^2$	$= 0$	$= 0$	$= \frac{2 \quad 3}{2 \quad 2}$ $=$

$$= \qquad \triangle \tag{F.12}$$

$$-\triangle \qquad = \tag{F.13}$$

L'équilibre est défini par un développement limité autour de la résonance de $=$ au premier ordre :

$$= \qquad \text{—} \text{ et } \qquad = 0 \tag{F.14}$$

Dans ce cadre, considérer la couche résistive revient à regarder la balance entre les termes — et . Il existe une valeur de notée $\frac{}{2}$ au delà de laquelle l'alfvènisation reprend le dessus sur le terme résistif. Cette largeur est faible puisque l'est aussi. Si la zone résistive dans laquelle nous résolvons le système est fine, nous simplifions l'opérateur $\triangle$ $_2$. En effet, le rapport entre la largeur de la couche résistive et l'extention poloïdale du problème impose des gradients radiaux bien plus fort que les gradients poloïdaux. Nous utilisons une dernière approximation issue de la finesse de la couche résistive : nous supposons que $=$ sur tout le long de la couche résistive mais que ses dérivées, elles, ne sont pas constantes. Nous rassemblons nos hypothèses dans le système d'équation et nous obtenons :

$$= \qquad \text{—} - \qquad - \tag{F.15}$$

$$= \qquad \text{—} - \tag{F.16}$$

Nous cherchons d'abord à résoudre l'équation en . Nous éliminons donc :

$$\text{——} \qquad {}^{2}\frac{\text{——}^{2}}{} \qquad = - \tag{F.17}$$

Nous posons le changement de variable suivant :

$$= \quad , \quad = \quad \text{qui donne} \quad = - \quad \text{et} \quad = \frac{}{2} \tag{F.18}$$

Avec $D =$ ——, L'équation avec les nouvelles variables est donc :

$$\underset{a}{D} \qquad \underset{b}{D^{2}\,{}^{2}\frac{\text{——}}{}\,{}^{2}} = \underset{c}{- \quad \frac{}{2}} \tag{F.19}$$

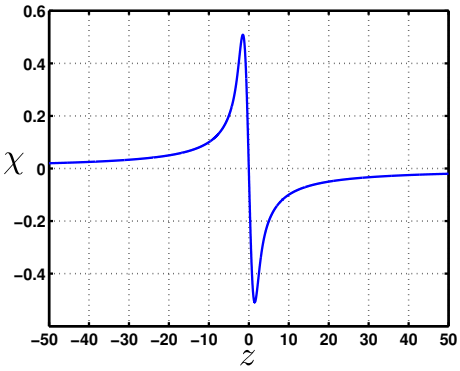

FIGURE F.2 – Fonction selon qui repésente la fonction dans les nouvelles variables.

Il faut et tel que l'équation devienne indépendante des paramètres physiques. C'est à dire qu'il faut que = = .

$$\text{si} \quad = \quad , \text{ alors} \quad = \frac{}{D}$$

$$\text{si} \quad = \quad , \text{ alors} \quad = \frac{}{D^2}$$

En utilisant et , nous pouvons vérifier que = . L'équation devient donc :

$$^2 \quad = \quad \text{avec} \quad \frac{=}{D} \tag{F.20}$$

Dans l'espace de , la fonction est indépendante des paramètres physiques. La solution est calculée par l'utilisation d'un algorithme tri-solve [47] est tracée sur la Fig.(F.2). Nous avons désormais la fonction définie dans la couche résistive au travers de .

F.3 Raccordement des zones idéale et résistive

Le raccordement de la fonction hors résonance dans le cadre idéal avec de la couche résistive se fait au travers de . Ce paramètre représente alors les effets extérieurs du profil magnétique hors résonance sur à la résonance. Il caractérise la force avec laquelle le plasma va pincer les lignes de champ à la résonance.

$$= \quad \frac{}{_0} = - \frac{^2}{^2} \tag{F.21}$$

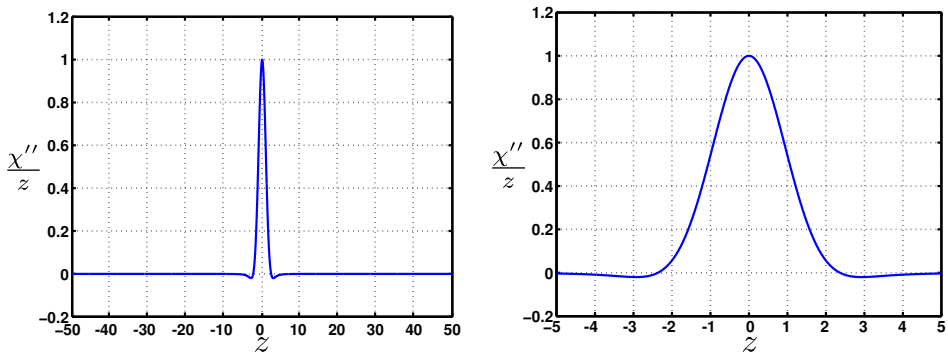

FIGURE F.3 – Fonction $\frac{''}{}$ selon qu'il faudra intégrer, et un agrandissement de celle-ci près de la résonance. La fonction est localisée autour de la résonance.

Le raccordement se situe entre la couche résistive et la zone idéale, à $= \frac{}{2}$. La valeur de est considérée comme acquise avec les formules du Tab.(F.1) : nous imposons donc pour la zone idéale que 0. Ce n'est pas problèmatique puisque la couche résitive est fine. Pour la zone résistive, nous devons réaliser un changement de variable pour passer des variables aux variables :

$$= \frac{}{} \frac{}{} = \left(\frac{}{}\right)^2 \frac{}{2} \frac{}{} \tag{F.22}$$

La fonction est intégrée entre les bornes qu'il faut redéfinir. Le changement de variable $= -$ correspond en fait à $= -$. Nous le vérifierons à postériori. La figure Fig.(F.3) montre que la fonction $\frac{''}{}$ tombe rapidement à zero après quelques unités de , c'est à dire peu après la couche résistive. Donc nous pouvons simplifier les bornes de l'intégrale par $_m =$: La fonction $\frac{''}{}$ est contenue toute entière dans la couche résistive. L'intégrale est notée et a pour valeur 3 . Nous obtenons après simplification du changement de variable :

$$= \frac{}{2} \frac{}{2} \frac{}{2} - \frac{}{3} \tag{F.23}$$

D'où le taux de croissance de l'instabilité :

$$= - \frac{}{2} \frac{}{2} \frac{}{2} \frac{}{3} - \tag{F.24}$$

Nous pouvons vérifier désormais l'assertion $=$. Dans [5], il nous est proposé une méthode semi-quantitative pour retrouver qui retrouve la formule de au coefficient $^-$ près. Il nous est également proposé un ordre de grandeur de

$$= - \frac{}{2} \frac{}{2} \frac{}{2} \frac{}{2} \tag{F.25}$$

Si nous réintroduisons le résultat de dans la définition de $= \frac{}{2}$ nous obtenons :

$$= \quad - \quad \frac{2}{} \quad \frac{2}{} \; \frac{2}{} \; \frac{2}{} \quad - \tag{F.26}$$

Il s'agit du même ordre de grandeur, au coefficient $= 0$ près, ce qui justifie donc l'hypothèse $=$. Le changement de variable que nous avons effectué correspond bien à une description de la couche résistive à la résonance et de la zone idéale hors de la résonance.

Annexe G

Calcul théorique de l'évolution et la saturation de la taille d'un îlot magnétique

Ici, nous reprenons un calcul qui retrouve le régime de Rutherford et qui décrit la saturation des ilôts magnétiques [14]. Ce calcul se situe dans la limite "petits ilôt" avec une viscosité négligeable. La résolution passe par une solution comprenant un equilibre développé autour de la résonance, le mode $m =$ dans l'approximation de la constance de et une fluctuation non linéaire d'amplitude à priori plus faible. Nous noterons que dans ce calcul la valeur de n'est pas connue, mais sera définie au fil du calcul par restrictions successives. Cela commence dès maintenant : comme on suppose une perturbation faiblement non-linéaire, il faut pour avoir des non-linéarités inférieures à la fluctuation principale : le mode $m =$. La forme de la solution est donc :

$$= \quad ^{2} \quad - \tag{G.1}$$

$$= \quad \frac{^{2}}{} \quad \frac{}{} \tag{G.2}$$

avec le courant associé :

$$= \nabla \quad = \quad ^{2\ 2} \quad ^{2} \tag{G.3}$$

$$= \quad - \ ^{2} \tag{G.4}$$

La présente solution est utilisée dans l'Eq.(4.2) simplifiée à ses termes d'ordre le plus bas :

$$= \qquad = 0 \tag{G.5}$$

$$\frac{\quad^{3}}{} \qquad {}^{3} \; {}^{2} \qquad {}^{2} \qquad {}^{3} \qquad {}^{2} \qquad = \; 0 \tag{G.6}$$

Nous réalisons le changement de variable suivant :

$$= \quad \text{et} \quad = - \tag{G.7}$$

$$= - \text{ et } \quad = \tag{G.8}$$

et nous obtenons :

$$\begin{array}{l} {}^{3} \qquad {}^{3} \qquad {}^{1} \\ - \; {}^{3} \qquad {}^{2} \\ {}^{2} \qquad {}^{3} \qquad {}^{1} \qquad {}^{3} \\ {}^{3} \qquad - \; {}^{3} \; {}^{2} \qquad {}^{1} \\ {}^{2} \qquad {}^{3} \qquad {}^{2} \; {}^{3} \qquad = \; 0 \end{array} \tag{G.9}$$

	valeur de l'exposant de		
	$=$	$= 3$	$=$
^{1}	3	3	3
^{2}	5	5	5
^{3}	1	2	3
	3	4	5
	1	3	5

TABLE G.1 – Tableau des exposants de de l'Eq.(G.9)

Nous gardons l'ordre le plus bas en dans l'Eq.(G.9) qui nous permette de calculer . Nous avons $\geqslant$ par le fait que les termes doublement non-linéaires (dans l'Eq.(G.9) et dans le Tab.(G.1)) doivent être d'ordre supérieur aux termes impliquant le mode $m =$ et l'équilibre (${}_{1}$ dans l'Eq.(G.9) et dans le Tab.(G.1)).

Nous obtenons, en gardant les termes en ^{3} et ^{1}, avec ${}^{2} = -$ ^{2} et avec $=$:

$$_2 \quad - \quad _3 \quad ^2 \tag{G.10}$$

Cette dernière équation fixe . On ne peux avoir , sous peine d'avoir la contribution non-linéaire d'ordre inférieur au mode $m =$, ce qui n'est pas le postulat de départ. Nous avons donc $=$. Nous réalisons un autre changement de variable pour redéfinir l'équation différentielle en :

$$= \frac{^2}{} \text{ et } = \quad _u \tag{G.11}$$

$$= \quad \text{et} \quad = \tag{G.12}$$

En utilisant également la définition de $= \quad _2$, l'équation différentielle se simplifie alors :

$$_u = ^2 \tag{G.13}$$

qui a pour solution générale :

$$= ^2 \tag{G.14}$$

$$= ^2 \quad \frac{^2}{} \tag{G.15}$$

où est une fonction arbitraire qui sera déterminée à l'aide de la loi d'Ohm, Eq.(4.1). L'équation suplémentaire rajoute une nouvelle contrainte dans le système pour fixer la fonction . Nous reprenons la loi d'Ohm pour calculer cette fonction en introduisant les fluctuations de courant non linéaire telles que

$$- \quad = ^2 \quad _2 \quad - \tag{G.16}$$

et les autres définitions Eq.(G.1), Eq.(G.2), Eq.(G.3) et Eq.(G.4). Les différents termes s'écrivent alors :

$$= \quad ^2 \quad ^2 \tag{G.17}$$

$$= \quad ^3 \tag{G.18}$$

$$= \quad ^2 \tag{G.19}$$

$$= \left(\quad \frac{^3}{} \quad \right) \tag{G.20}$$

Nous passons des variables indépendantes aux variables indépendantes :

$$= \frac{^{2}}{^{2}} \quad \text{et} \quad = - \frac{\quad}{\quad} \tag{G.21}$$

$$= \quad \text{et} \quad = \tag{G.22}$$

$$= \tag{G.23}$$

On obtient alors :

$$= \quad ^{2} \quad ^{2} \quad ^{2} \tag{G.24}$$

$$= \quad ^{3} \tag{G.25}$$

$$= \quad ^{2} \quad - \frac{\quad}{\quad} \tag{G.26}$$

$$= \frac{\quad}{\quad} \quad ^{2} \quad \frac{^{3}}{} \left(- \quad \right)^{\frac{3}{2}} \tag{G.27}$$

Nous gardons uniquement les termes en et ^{2} pour calculer , le reste étant négligeable. Il est à noter deux simplifications : la première dans le terme où $^{2} \quad ^{2} = -$ et la seconde dans le crochet où les termes en s'annulent exactement. La loi d'Ohm s'écrit alors :

$$\left(- \frac{\quad}{\quad} \right) = \quad - \quad ^{3} \tag{G.28}$$

$$= \frac{- \quad \frac{^{2}}{}}{} \tag{G.29}$$

Pour finalement atteindre , nous devons éliminer . Or le potentiel scalaire est périodique selon et donc selon . Une intégration selon pour une valeur arbitraire de nous permettra de simplifier l'expression. Cependant, Il y a deux domaines d'intégration pour en fonction de la valeur de . Soit , alors il s'agit d'une orbite fermée. Les valeurs maximales de , notée $_{0}$, correspondent aux valeurs de l'orbite en $= 0$: $_{0} =$. Si , alors il s'agit d'une orbite passante : $_{0} =$. La Fig.(G.1) illustre les orbites pour différentes valeur de . Dans les deux domaines d'intégration, l'intégration sur tout le domaine est nulle, par périodicité selon pour les orbites passantes, par circularité pour les orbites fermées. Nous remarquons également que la fonction décrit les isocontours d'un îlot

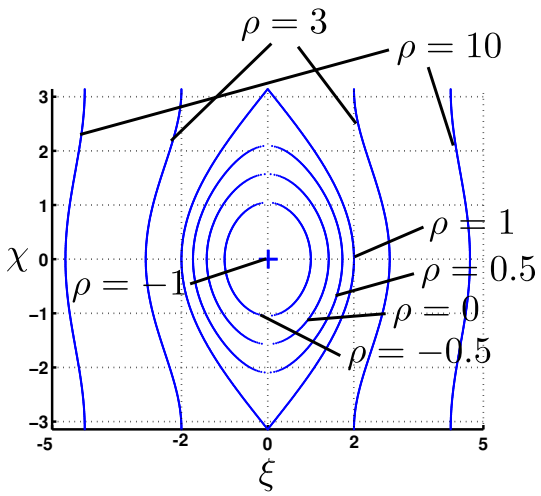

FIGURE G.1 – Représentation des isocontours de en fonction de et . La fonction est bien équivalente à au premier ordre : on retrouve la topologie d'un ilot magnétique.

magnétique. Cette fonction est assimilable à à l'ordre ^{2} et renormalisé à ^{2}. Donc passer de la variable à revient à passer à la variable de flux magnétique.

Nous avons donc $= 0$ puisque les variables et sont independantes. Nous obtenons pour :

$$= \left(- \quad - \right) \tag{G.30}$$

$$= \left(- \quad - \right) \frac{}{\frac{}{1}} = \left(- \quad - \right) \tag{G.31}$$

où l'on a défini :

$$\begin{aligned} &= \\ &= \frac{}{1} \end{aligned} \tag{G.32}$$

La connaissance de , y compris de la fonction arbitraire , nous permet de définir la fonction non linéaire . La contribution du mode $m =$ de pour sera raccordée asymptotiquement à la fonction $_u$ qui correspond à la solution extérieure ideale proche de la résonance du mode $m =$.

$$_1 = - \frac{^2}{_0} - \frac{^2}{_0} \frac{^2 \; ^2}{} - \frac{^2}{_0} \tag{G.33}$$

avec $= \frac{^2 \; ^2}{} \frac{^2}{^2}$.

Après simplification, on obtient :

$$_1 = \quad {}^2 \qquad {}^2 \; {}^2 \quad \frac{\quad}{\quad} \quad {}^2 \qquad \frac{\quad}{\quad} \quad {}^2 \qquad \text{(G.34)}$$

$_0$

Il reste une étape avant le calcul de la solution extérieur et le raccordement asymptotique des deux fonctions. Il s'agit de simplifier l'expression de $_1$ avec $= \; = \; = \frac{}{2}$. Nous rappelons que les variables et sont indépendantes. Nous commençons par dire que $= \frac{^2}{2}$ est paire selon . La fonction $\frac{^2}{2}$ est alors paire également tandis que $= \frac{^2}{2}$ est impaire.

$$= \qquad = \qquad 0 \qquad \text{(G.35)}$$

$_0$

où $0 \quad = 0$ car est une fonction impaire. Nous regardons numériquement les fonctions . Nous supposons la saturation, $= 0$, pour tracer la fonction $= \frac{}{}$ telle que

$$= \left(- \quad \frac{}{} \right) \frac{}{} \quad - \qquad \text{(G.36)}$$

La Fig.(G.2) représente les fonctions et . Elles possèdent le même comportement que et au facteur - près. Si la fonction tend bien vers 0 pour , la fonction , elle, ne converge pas vers une constante en . Le problème vient en fait de la définition de . A l'ordre le plus bas en ^{2}, $\frac{1}{^2} \quad ^2$. Mais par définition, $= \frac{^2}{2}$ qui n'est pas une fonction de strictement et en particulier quand . Nous avons défini et alors que Eq.(G.5) indique que $=$ et par conséquent, on a et dès que l'on n'utilise pas d'ordering en ^{2}. C'est ce qui engendre la divergence apparente de . Cependant, le raisonnement reste valable, mais pas observable avec la fonction . En effet, et représente les fluctuations non-linéaires du courant et du champ magnétique. Si , ces fluctuations tendent vers zéro.

La Fig.(G.2) nous permet aussi de remarquer que, outre la divergence de pour , la contribution dominante de à se situe à , c'est à dire hors de l'îlot magnétique. Nous pouvons alors étudier dans la limite où avant l'intégration vers la fonction . Cette limite est d'autant justifiée que comme , nous n'avons pas besoin d'avoir pour atteindre cette limite de .

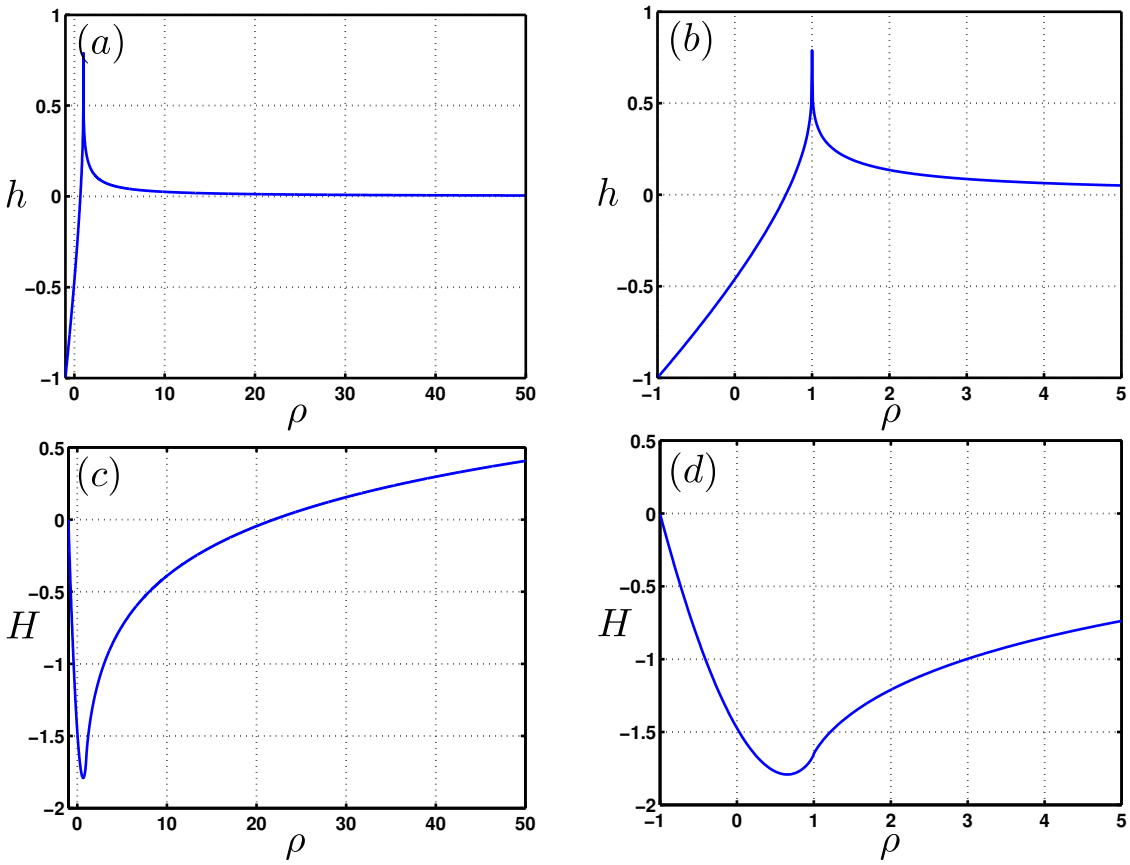

FIGURE G.2 – Les fonctions et sa primitive (a,c) et leur agrandissements respectifs (b,d). La fonction ne converge pas, son intégrale n'est alors pas définie.

Pour 0 , nous avons alors :

$$= \quad {}_1 \quad {}_1 = - \quad {}_1 \quad {}_1$$

en utilisant que est paire. Et finalement, avec le fait que la fonction est paire également nous obtenons :

$$\frac{{}^2}{{}_0} \quad \frac{{}^2}{} = \frac{{}^2}{{}_0}$$

Nous obtenons donc :

$$_1 = {}^2 \quad {}^2 \; {}^2 \; \frac{}{} \quad \frac{{}^2}{{}_0} \quad \frac{{}^2}{} \tag{G.37}$$

La solution extérieure $_u$ s'obtient par la solution linéaire de l'Eq.(G.5) avec . Ici, nous développons la solution pour 0.

$$= \quad = \quad {}_u \quad {}_u = 0 \tag{G.38}$$

$$\left(\quad \frac{{}^3}{} \right) \quad {}_u \quad {}_u = 0 \tag{G.39}$$

avec $_u =$ et $_u =$ ^{2} . Le crochet de poisson se simplifie alors à l'ordre le plus bas en :

$$^2 \quad - \quad \frac{}{\frac{{}^2}{}} = 0 \tag{G.40}$$

$$^2 \quad - \quad \left(\frac{{}^2}{} \quad {}^3 \right) = 0 \tag{G.41}$$

Nous introduisons $^2 = -$ ^{2} pour obetnir une forme facilement intégrable :

$$^2 \quad \frac{{}^2 \; {}^2}{{}^2} \quad = 0 \tag{G.42}$$

Une solution de la forme $= \quad {}_n \quad {}^n$ produit une solution paire et permet de retrouver l'expansion à l'origine du mode $m =$ de la solution extérieure par récurrence. En prenant la valeur à la résonance de , nous imposons $_0 =$. Ainsi $_1$, la pente à l'origine de devient $\frac{1}{2}$ $_0$. La récurence nous donne la valeur de $_2 = \frac{{}^2}{{}^2} \; {}_0$.

$$\left(\quad - \quad \frac{\quad^{2}}{} \quad {}_{2} \quad {}_{3} \right) \tag{G.43}$$

$$\left(\quad - \quad {}_{2} \frac{\quad^{2}}{} \quad {}_{2} \quad {}_{3} \quad {}_{3} \right) \tag{G.44}$$

Considérant le raccordement asymptotique de et de $_1$, nous retrouvons le premier résultat : $=$ ^{2} qui correspond à notre postulat de départ, l'amplitude du mode $m =$ est ^{2}. Le raccordement du terme en ^{2} est de fait immédiat et n'apporte pas d'information. Le raccordement du terme en va nous permettre de retrouver la taille et l'évolution de l'îlot magnétique :

$$- \quad = - \quad {}^{2} \quad \left(- \quad - \right) \frac{\quad}{\quad} \tag{G.45}$$

$$_{0}$$

Nous repassons cette équation en variable , La relation $= \frac{1}{\frac{\quad}{2}}$, nous permet d'identifier l'intégrale . De plus, étant une fonction paire de , l'intégrale selon correspond à deux fois celle en entre 0 et . Cependant, selon les valeurs , le domaine d'intégration en est entre et . Nous obtenons :

$$= \left(- \quad - \right) \frac{-}{- -} \quad \frac{\quad^{2}}{\quad} \tag{G.46}$$

$$_{1}$$

Numériquement $_0 = \quad _1 \frac{\quad^2}{\quad} = 3 \quad 3$. Nous incluons enfin le lien entre l'amplitude de la perturbation du mode instable ^{2} et la taille de l'ilôt : l'Eq.(4.28). La relation devient alors :

$$= \left(- \quad _1 \quad - \quad _1 \right) \frac{-}{-} \quad _0 \tag{G.47}$$

Nous pouvons alors avoir deux relations. Dans le cas où la taille de l'ilôt magnétique est négligeable, nous retrouvons le régime de Rutherford qui décrit l'évolution de la taille de l'îlot magnétique :

$$_1 = \frac{\quad}{- \quad} \quad = \tag{G.48}$$

$$_0$$

A la saturation, par contre c'est la variation temporelle de la taille de l'ilôt qui est négligeable :

$$_1 = - \frac{\quad}{- \quad} \quad = \quad - \tag{G.49}$$

$$_0$$

Annexe H

Calcul du paramètre

Le paramètre quantifie l'asymétrie de la fonction propre autour de la résonance. Il est défini de la manière suivante :

$$= \quad _{0} \quad \frac{\qquad}{0} \tag{H.1}$$

Pour une asymétrie causée par les conditions de bord seules, le calcul de ne requiert pas d'autre méthode que celle déjà développée à la Sec.(F.1). Il faut seulement calculer chaque fonction propre en 0 et en 0 avec sa condition de bord associée.

Pour une asymmétrie due au profil magnétique et/ou à la géométrie cylindrique, il faut considerer une étape supplémentaire. Nous commencons avec le calcul de la solution idéale de part et d'autre de la résonance de l'équation linéarisée $= 0$ en géométrie cylindrique :

$$\left(\quad ^{2} \quad \frac{\qquad}{\qquad} \right) \qquad - \tag{H.2}$$

La difficulté de résolution de cette équation est contenue dans la singularité du terme $\frac{'_e}{_e}$ à la résonance : en effet le champs magnétique est nulle sur la résonance. Le cadre symétrique permettait d'avoir dans le même temps également nul à la résonance : un choix de profils magnétiques trigonométriques ou polinomiaux d'ordre impair permettait la définition du rapport à la résonance. Le passage à la géométrie cylindrique et aux profils asymmétrique imposent à priori un gradient de courant non nul à la résonance : la singularité n'est plus définie. Cependant, nous n'avons pas besoin de la valeur à la résonance, mais proche de celle-ci. Nous résoudrons donc cette équation de part et d'autre de la résonance, à et nous choisissons les conditions de bord nulle symétriques.

Nous posons la solution de la forme :

$$= \qquad \text{avec} \qquad = \qquad {}_n \quad {}^n \qquad {}_n \quad {}^n \tag{H.3}$$

$$_n \quad _0$$

Le signe de faisant référence à la partie avec 0 à droite de la résonance et le signe à la partie 0 à gauche de la résonance. La décomposition de la solution en deux fonctions répond à la description de deux zones. permet de décrire la partie éloignée de la résonance et tend vers 0 pour les valeurs de élevées. La fonction permet de décrire la solution proche de la résonance, avec une partie logarythmique pour décrire la singularité. L'introduction de la solution Eq.(H.3) dans l'équation Eq.(H.2) avec un développement de Taylor sur les équilibres magnétiques permet de calculer une récurrence pour les suites $_n$ et $_n$ en égalant tous les termes de chaque ordre polinomial. En fait, seules quelques information sur la série suffisent pour calculer si nous utilisons en plus la méthode de tir pour résoudre numériquement le système. Ces informations sont les suivantes :

- $_0 = 0$
- $_0 = \ _0 = \ 0 = \ $, valeur choisie par normalisation de la fonction propre .
- $_1 = \ _1 = \frac{_e \ _0}{_e \ _0}$ avec les expansions de Taylor selon : $= \ 0$ $_2 \ 0$ et $= \ 0 \ 0 \ ^2 \ 0$

Cette solution Eq.H.3 à l'ordre le plus bas en couplée avec les informations obtenues de la récurrence permet de définir en fonction des coefficients des suites $_n$ et $_n$:

$$= \ _0 \frac{}{0} = \frac{_1 \ _1}{_0} \ _0 \frac{_1}{_0} \tag{H.4}$$

La méthode de tir permet elle de connaître . La quantification de l'asymétrie par n'est pas possible à cause de la dépendance en : si tend vers 0, le paramètre diverge. On peut cependant définir un autre paramètre qui quantifiera la partie non-singulière de l'asymmétrie du système et qui est indépendante de :

$$= \frac{_1}{_0} \tag{H.5}$$

Ce paramètre reflète les caractéristiques hors résonance appliqués au niveau de la résonance. Il tient compte des conditions de bord utilisées lors de la méthode de tir, du profils magnétique et de la géométrie. La question de la légitimité de par rapport à trouve sa réponse dans la notion de couche résistive. Notre paramétrisation calculée en = correspond en fait à celle autour de la zone résistive de largeur non nulle où la singularité n'est plus l'effet dominant dans le calcul de . Nous allons voir par la suite comment cette paramétrisation retranscrit les effets qu'elle recouvre.