

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
ET
UNIVERSITÉ DE SFAX

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université de Marseille et de Sfax
Spécialité : **Mathématiques**

Préparée au laboratoire **Institut de Mathématiques de Luminy et Faculté des Sciences de Sfax**

Dans le cadre de l'École Doctorale **Ecole doctorale de Marseille et de Sfax**

Présentée et soutenue publiquement
par

Sellami Tarek

le 25 Juin 2012

Titre:
Dynamique Commune des Fractals de Rauzy de même matrice d'incidence

Directeur de thèse: **Pierre Arnoux**
Co-directeur de thèse: **Mohamed Mkaouar**

Jury

Mme. Valerie Berthe,	Examineur
M. Mabrouk Ben Ammar,	Examineur
M. Xavier Bressaud ,	Examineur
M. Pascal Hubert,	Examineur
M. Fabien Durand,	Rapporteur
M. Ali Messaoudi ,	Rapporteur
M. Pierre Arnoux,	Directeur de thèse
M. Mohamed Mkaouar,	Co-directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur, Pierre Arnoux, pour avoir dirigé ma thèse durant ces années. En effet, c'est lui qui m'a encouragé à me lancer dans la recherche après m'avoir encadré le long de mon stage de M2. Merci de m'avoir toujours encouragé et d'avoir toujours été optimiste. Merci de m'avoir fait confiance et d'avoir toujours accepté les directions que j'ai prises. Il m'a offert un cadre propice à la recherche, efficace et agréable. Il m'a encouragé à participer à de nombreuses conférences, à présenter nos résultats, à les rédiger et surtout à rencontrer et me faire connaître auprès des chercheurs du domaine.

Merci beaucoup à Mohamed Mkaouar, mon co-directeur de thèse, pour son aide et ses conseils qui m'ont permis de mettre de l'ordre dans mes idées, et aussi pour m'avoir toujours encouragé à aller jusqu'au bout.

Je suis reconnaissant à Fabien Durand et Ali Messaoudi pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse, et pour leurs lectures attentives du manuscrit.

Mes remerciements s'adressent également à Valerie Berthé, Pascal Hubert, Xavier Bressaud et Mabrouk Ben Ammar pour avoir accepté de juger ce travail.

J'ai réellement apprécié l'ambiance régnant au sein de l'IML et je tiens donc à exprimer ma reconnaissance à tous ses membres. Je voudrais souligner l'importance qu'a eu pour moi l'équipe de travail DAC : j'y ai énormément appris. J'aimerais spécialement remercier Julien Cassaigne pour tous ses aides et conseils informatiques et mathématiques. Il y a bien sûr aussi les thésards de l'IML sans qui mon séjour aurait été quelque peu morose. Merci donc à Emilie, Ramzi, Pierre, Tammam, Christophe, Elise, Mila, Stepan Starosta, Stéphanie, Marie-Claire, Vincent, Jean-François et Yann.

Merci aux membres du la LATP Thierry Coulbois, Nicolas Bedaride, Arnaud Hilion et Martin Lustig de m'avoir accueilli durant cette dernière année de thèse. Merci à Thierry et Nicolas pour la lecture de ma thèse.

Merci à Sébastien Labbé pour son accueil au Canada, don't j'ai appris beaucoup sur l'utilisation de l'ordinateur pour résoudre des problèmes mathématiques et notamment sur le logiciel Sage, sans oublier les aides de Vincent Decroix et Timo Jolivet.

Je tiens à remercier les membres de l'équipe de Sfax dont j'ai eu le grand plaisir d'organiser le séminaire du mercredi lors de mon séjour à Sfax. Plus précisément je remercie Mohamed Hbaib pour son appui, son soutien continu, sa confiance et ses conseils. Sans

REMERCIEMENTS

oublier de remercier tous les thésards de la faculté des Sciences de Sfax : Bilel, Ramzi, Farah, Rim, Sourou, Khalil, Faiza, Salah, Malika, Basma, Amara, Hela, Manel, Rihab.

Merci à Aurélia, Corinne et Sonia pour leur aide administrative et Jean-Bruno pour son attention à nous fournir du matériel informatique de qualité.

Cette thèse à Marseille ne se serait pas aussi bien passé sans mes amis : je tiens à dire que la liste suivante n'obéit à aucun ordre précis : Ramzi, Ali, Slim, Salim, Fidaa, Maamoun, Bilel, Ahmed, Mahdi Karray, Mahdi Guermazi, Mohamed, Ilyes.

Je termine enfin en remerciant tous les membres de ma famille qui m'ont soutenu tout au long de mes études et ma femme, pour la patience et le soutien dont elle a fait preuve pendant toute la durée de cette thèse.

Dédicace

A ma très chère femme Baya

A mes très chers parents et beaux-parents

A ma sœur et mes belles-sœurs

A mon frère et mes beaux-frères

A tous mes amis

A tous ceux qui m'aiment...

DÉDICACE

Table des matières

Remerciements	iii
Dédicace	v
Table des matières	vii
Résumé	1
Introduction	3
1 Généralités	7
1 Systèmes dynamiques	7
1.1 Systèmes dynamiques topologiques	7
1.2 Systèmes dynamiques mesurables et mesurés	8
2 Combinatoire des mots et systèmes dynamiques symboliques	8
2.1 Un peu de vocabulaire	9
2.2 Dynamiques symboliques	10
3 Propriétés dynamiques : périodicité, récurrence, transitivité, minimalité . .	11
3.1 Périodicité – Récurrence	12
3.2 Transitivité – Minimalité	13
4 Rudiments de théorie spectrale	14
2 Substitutions et systèmes dynamiques substitutifs	15
1 Substitutions	15
2 Primitivité et théorème de Perron Frobenius	17
2.1 Théorème de Perron Frobenius	18
2.2 Récurrence et minimalité	19
3 Automates des préfixes	19

3.1	Désubstitution et développement en préfixes–suffixes	19
3.2	Automate des préfixes–suffixes	21
3.3	Automate des préfixes	21
3	Représentation géométrique des systèmes dynamiques substitutifs	23
1	Le fractal de Rauzy original	23
2	Nombres de Pisot et ligne brisée	25
2.1	Nombres de Pisot	25
2.2	Ligne brisée	26
3	Généralisation de l'exemple initial	26
3.1	Construction du fractal de Rauzy dans le cas irréductible	27
3.2	Construction du fractal de Rauzy dans le cas réductible	28
4	Propriétés du fractal de Rauzy	29
4.1	Ensemble borné et mesure positive	29
4.2	Autosimilarité	31
4.3	Dynamique du fractal de Rauzy	32
4.4	Condition de coïncidence	33
4.5	Conjecture Pisot et condition de pavage	35
5	Le fractal de Rauzy est l'adhérence de son intérieur	36
5.1	Le cas irréductible	36
5.2	Le cas réductible	38
6	Exemples de substitutions de type Pisot	41
4	Frontière du fractal de Rauzy	45
1	Frontière du fractal de Rauzy	45
2	IFS de la frontière	47
2.1	Substitutions de Tribonacci et Tribonacci modifiée	48
2.2	Condensation	55
5	Automates produits	57
1	Automates des préfixes	59
2	Automates produits	61
2.1	La réalisation géométrique de l'automate produit :	62

6	Substitution des points communs	67
1	Intersection de mesure positive	68
2	Substitution des points communs	69
3	Algorithme	73
3.1	Algorithme	73
3.2	Exemples	74
7	Annexe : Frontière du fractal intersection de Tribonacci	83
1	Intersection Tribonacci	84
	Conclusion	91
	Notation	93
	Bibliographie	95

TABLE DES MATIÈRES

Résumé

On sait que la matrice d'incidence associée à une substitution ne suffit pas pour déterminer complètement le système dynamique associé, même dans des cas très simples, il existe plusieurs substitutions associées à une même matrice car il existe de nombreux mots ayant le même abélianisé.

Dans cette thèse, on étudie les points communs de deux lignes brisées associées à deux substitutions σ_1 et σ_2 irréductibles unimodulaires de type Pisot qui ont la même matrice d'incidence. On identifie les points communs de ces deux lignes brisées à partir d'un algorithme. On montre ainsi que l'intersection de ces deux lignes brisées est aussi une ligne brisée associée au point fixe d'une nouvelle substitution. On montre plus précisément que si σ_1 vérifie la conjecture Pisot et 0 est un point intérieur à son fractal de Rauzy alors ces points communs peuvent être engendrés par une substitution définie sur un alphabet appelé alphabet des paires équilibrées. Cette substitution est obtenue à partir d'un algorithme, l'algorithme des paires équilibrées. On obtient ainsi l'intersection des intérieurs des deux fractals de Rauzy. En prenant la clôture de cet ensemble on obtient un ensemble substitutif. La condition que 0 est un point intérieur au fractal de Rauzy associé à la substitution σ_1 nous permet de montrer que l'intersection des deux fractals de Rauzy est de mesure positive.

Dans une deuxième partie du travail on s'intéresse à l'étude de la frontière du fractal de Rauzy. Le fractal de Rauzy est dit fractal mais c'est en fait sa frontière qui est fractale. On s'intéresse aux deux substitutions particulières appelées substitution de Tribonacci et sa substitution modifiée appelée substitution de Tribonacci modifiée. La dimension de Hausdorff de la frontière des deux fractals de Rauzy associée à ces deux substitutions n'est pas la même. Il est intéressant de comprendre la frontière de leur fractal intersection. On s'intéresse à sa dimension de Hausdorff. La frontière d'un fractal de Rauzy est une solution d'un graphe de système de fonctions itérées (GIFS). Pour le fractal intersection, on obtient une solution d'un GIFS qui n'est pas fortement connexe. Le graphe est constitué de plusieurs composantes fortement connexes. Chaque composante décrit des morceaux de la frontière de ce fractal intersection. La frontière du fractal intersection est incluse dans la réunion des deux fractals initiaux. Ainsi, parmi les graphes fortement connexes on obtient un graphe fortement connexe qui donne des morceaux de la frontière du fractal de Rauzy associée à la substitution de Tribonacci et un graphe fortement connexe qui caractérise les bouts de la frontière du second fractal de Rauzy.

Introduction

En 1982, Gérard Rauzy a défini un sous-ensemble du plan, appelé fractal de Rauzy, comme représentation géométrique d'un système dynamique symbolique associé à la substitution de Tribonacci ($a \rightarrow ab, b \rightarrow ac, c \rightarrow a$).

Le fractal de Rauzy a diverses propriétés mathématiques. Il est compact, connexe, sa frontière est un ensemble fractal et il induit un pavage du plan.

Plusieurs mathématiciens de divers centres de recherche du monde ont étudié les propriétés du fractal de Rauzy et de ses généralisations. Pour toute substitution unimodulaire irréductible de type Pisot, on peut construire un ensemble de même genre appelé fractal de Rauzy de la substitution. Plusieurs constructions sont apparues. Une première est inspirée par la construction initiale de Rauzy en considérant le système de numération associé aux nombres de Pisot et les séries entières associées. Une deuxième approche, développée par l'école japonaise, s'appuie sur les propriétés d'autosimilarité du fractal de Rauzy des substitutions généralisées pour la construire par approximations successives. Une troisième méthode est donnée par la projection de l'escalier associé au point fixe de la substitution sur un espace contractant de la matrice d'incidence de la substitution de type Pisot. Nous détaillons dans cette thèse cette dernière construction.

La matrice d'incidence d'une substitution σ joue un rôle important pour la construction du fractal de Rauzy, mais pas si important que la substitution même. La matrice d'incidence $M = [m_{i,j}]$ d'une substitution σ compte le nombre d'occurrence de la lettre j dans $\sigma(i)$. Donc à partir d'une matrice, on peut obtenir plusieurs substitutions, donc plusieurs différents fractals de Rauzy. L'étude des substitutions de même matrice d'incidence a été motivée par un travail de Bernd Sing, en collaboration avec Victor Sirvent. Dans leur article les auteurs ont cherché à comprendre la dynamique commune de deux systèmes dynamiques associés à deux substitutions irréductibles unimodulaires de type Pisot de même matrice d'incidence. Il ont utilisé les systèmes de numération associés à ces deux substitutions qui peuvent être engendrée chacun par un automate des préfixes. Ils ont considéré l'automate produit de ces deux automates préfixes. La réalisation géométrique de cette partie donne un sous-ensemble de l'intersection des deux fractals de Rauzy associés aux deux substitutions. Mais ce sous-ensemble est de mesure nulle.

Le but de cette thèse est de déterminer les relations entre les représentations déduites de différentes substitutions de même matrice d'incidence. Nous étudions l'intersection de deux

fractals de Rauzy associés à deux substitutions σ_1 et σ_2 unimodulaires irréductibles de type Pisot, ayant la même matrice d'incidence. Nous montrons, sous la condition que 0 soit un point intérieur à l'un des deux fractals de Rauzy, que l'intersection est de mesure positive. De plus, si σ_1 vérifie la conjecture Pisot (c'est-à-dire que le système dynamique substitutif associé à σ est à spectre discret) alors l'adhérence de l'intersection des intérieurs des deux fractals de Rauzy associés à σ_1 et σ_2 est un ensemble substitutif. On construit un algorithme effectif qui donne la substitution Σ qui engendre cette intersection. Cet algorithme utilise les paires équilibrées associées aux points fixes u et v de σ_1 et σ_2 respectivement.

Dans la première partie de la thèse on rappelle les généralités et propriétés fondamentales. On définit les systèmes dynamiques et leurs propriétés. On s'intéresse particulièrement aux systèmes dynamiques substitutifs. On donne au Chapitre 2, avec plus de détails, les différentes propriétés des systèmes dynamiques substitutifs. Pierre Arnoux, Valérie Berthé, Xavier Bressaud, Shunji Ito, Ali Messaoudi, Anne Siegel et plusieurs autres personnes se sont intéressées à interpréter ces derniers systèmes géométriquement en définissant le fractal de Rauzy. Dans le Chapitre 3, on rappelle les différentes constructions du fractal de Rauzy associé à une substitution unimodulaire de type Pisot. On donne dans ce chapitre les différentes propriétés du fractal de Rauzy. Dans le Chapitre 4, on s'intéresse à l'étude de la frontière du fractal de Rauzy en définissant le graphe de la frontière ce qui nous permet à partir du GIFS de la frontière, de calculer la dimension de Hausdorff de la frontière du fractal. Ensuite, dans le Chapitre 5, on étudie des sous-systèmes communs à deux substitutions de même abélianisé, décrits par Sirvent dans son article [55]. Dans cet article, l'auteur étudie la dynamique associée à deux substitutions de Tribonacci qui ont la même matrice d'incidence. Il utilise les systèmes de numération associés à ces deux substitutions qui peuvent être engendrés par un automate appelé automate des préfixes. Il définit ainsi l'automate produit des préfixes, qui donne une partie commune aux deux systèmes dynamiques. La réalisation géométrique de cette partie nous donne un sous-ensemble de l'intersection des deux fractals de Rauzy associés aux deux substitutions de Tribonacci. Sing et Sirvent étendent ce résultat dans leur article [54]. On y définit une suite d'automates produits associés aux puissances de deux substitutions de même abélianisé, qui décrivent une suite de sous-systèmes $\mathcal{F}_n$ communs aux deux systèmes considérés, avec la propriété que $\mathcal{F}_n$ est contenu dans $\mathcal{F}_p$ si n divise p . La représentation géométrique de ces sous-ensembles caractérise des sous-ensembles de l'intersection des deux fractals de Rauzy.

Les sous-ensembles obtenus par Sing et Sirvent sont tous de mesure de Lebesgue nulle. On montre un premier résultat élémentaire [46] :

Proposition 0.1. *Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions unimodulaires irréductibles de type Pisot de même matrice d'incidence et $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$) le fractal de Rauzy associé à σ_1 (resp. σ_2). On considère $\mathcal{E}$ la clôture de l'intersection des intérieurs de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. On suppose que 0 est un point intérieur à $\mathcal{R}_1$. Alors l'intersection des intérieurs de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est non vide. Il en résulte que $\mathcal{E}$ est d'intérieur non vide et de mesure de Lebesgue strictement positive.*

L'objectif majeur de la thèse est de caractériser complètement l'intersection de deux fractals de Rauzy associés à deux substitutions unimodulaires irréductibles de type Pisot

de même matrice d'incidence du point de vue arithmétique et combinatoire. Comme elle est de mesure positive, on peut étudier le système induit, qui donne une dynamique commune aux deux substitutions.

Définition 1. *Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^d$ est dit substitutif si et seulement si il existe une substitution primitive Σ sur n lettres, de matrice d'incidence M et une décomposition $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ invariante par M où E est de dimension d tel que la restriction de M à E soit une contraction stricte et S l'image par un isomorphisme linéaire de E dans $\mathbb{R}^d$ de la clôture de la projection de l'abélianisé d'un point fixe de Σ sur E selon F .*

En particulier, le fractal de Rauzy est un ensemble substitutif. Il est la clôture de la projection de la ligne brisée associée au point fixe de la substitution sur l'espace contractant de la matrice de la substitution.

On montre dans le chapitre 6 le résultat principal de la thèse, sous des hypothèses faibles, le système associé à l'intersection de deux fractals de Rauzy de même matrice d'incidence associé à deux substitutions irréductibles unimodulaires de type Pisot est un système substitutif et on a le théorème suivant [47] :

Théorème 0.1. *Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions irréductibles unimodulaires de type Pisot de même matrice d'incidence. On considère $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ leurs fractals de Rauzy associés. On note $\mathcal{E}$ la clôture de l'intersection des intérieurs de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$. On suppose que 0 est un point intérieur à $\mathcal{R}_1$ et σ_1 vérifie la conjecture Pisot. Alors $\mathcal{E}$ est un ensemble substitutif.*

On donne dans le chapitre 6 un algorithme qui permet d'obtenir la substitution pour l'intersection. Cet algorithme est appelé algorithme des paires équilibrées. L'idée de cet algorithme est de partir d'une paire équilibrée minimale. Puisque les deux substitutions ont une même matrice d'incidence, en appliquant les deux substitutions à cette paire équilibrée minimale, on obtient une nouvelle paire équilibrée. Cette nouvelle paire équilibrée se décompose en un nombre fini de paires équilibrées minimales de longueurs bornées ce qui implique que les paires équilibrées minimales sont finies. Il en résulte que l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'itérations. On finit ce chapitre en traitant plusieurs exemples de fractals de Rauzy et leurs intersections. En particulier, on donne un exemple où l'intersection est réduite à l'origine ce qui prouve l'importance que 0 soit intérieur à l'un des deux fractals de Rauzy.

Dans la deuxième partie de cette thèse, dans un travail commun avec Bernd Sing, on étudie la dimension de Hausdorff de la frontière du fractal intersection des deux substitutions de Tribonacci définies par :

$$\sigma_1 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ac \\ c \rightarrow a \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_2 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ca \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

L'intersection des deux fractals de Rauzy associés aux deux substitutions σ_1 et σ_2 est un fractal de Rauzy donné par une substitution définie sur un alphabet de paires équilibrées

minimal de 11 lettres. Le fractal de Rauzy admet une frontière fractale qui est solution d'un graphe de système de fonctions itérées (GIFS). Dans le cas général, on obtient un GIFS avec un graphe fortement connexe, comme dans le cas des deux substitutions de Tribonacci σ_1 et σ_2 . Ce qui nous permet d'avoir une dimension de Hausdorff uniforme de la frontière.

La frontière du fractal intersection est incluse dans l'union des deux frontières, donc il est intéressant de comprendre la structure de cette frontière. On décrit la frontière intersection comme solution d'un GIFS. On obtient ainsi un GIFS composé de plusieurs graphes fortement connexes. Parmi ces graphes, on a les deux graphes fortement connexes associés aux deux substitutions de Tribonacci σ_1 et σ_2 . Ces deux graphes caractérisent des morceaux de la frontière qui sont du premier et du second fractal de Rauzy et qui ont une dimension de Hausdorff différente. Le premier graphe nous permet d'obtenir une première dimension de Hausdorff qui est égale à 1.09... , le deuxième graphe fortement connexe nous donne une deuxième dimension de Hausdorff pour la frontière qui est égale à 1.79... . Ainsi la frontière du fractal intersection n'est pas partout la même. On montre dans le chapitre 7 le résultat suivant :

Proposition 0.2. *La dimension de Hausdorff de la frontière du fractal intersection des deux substitutions de Tribonacci n'est pas uniforme.*

On donne ainsi un exemple de GIFS, dont la frontière est solution d'un GIFS qui n'est pas fortement connexe et la dimension de Hausdorff de sa frontière n'est pas uniforme.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et propriétés fondamentales des diverses notions qui seront utilisées tout au long de cette thèse : substitutions, systèmes dynamiques topologiques, systèmes dynamiques symboliques, autosimilarité...

1 Systèmes dynamiques

Définition 2. *On appelle système dynamique un couple (X, T) où $T : X \longrightarrow X$ est une application.*

Puisque l'application T est définie de X dans lui-même, on peut parler des itérés d'un point $x \in X$ avec l'application T c'est-à-dire l'ensemble $\{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ qu'on appelle l'orbite de x .

Définition 3. *L'ensemble*

$$\mathcal{O}^+(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

est appelé l'orbite positive de x . Si T est inversible, alors on peut parler de l'orbite bi-infinie

$$\mathcal{O} = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Une partie A de X est dite invariante par T si $T(A) \subset A$.

1.1 Systèmes dynamiques topologiques

Définition 4. *Un système dynamique topologique est un couple (X, T) avec X un espace topologique métrique compact et $T : X \longrightarrow X$ une application continue. Il est dit inversible si T est un homéomorphisme.*

Deux systèmes dynamiques topologiques (X, f) et (Y, g) sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $\phi : X \longrightarrow Y$ tel que

$$\phi \circ f = g \circ \phi.$$

Deux systèmes dynamiques topologiques (X, f) et (Y, g) sont topologiquement semi-conjugués s'il existe une application continue surjective $\phi : X \longrightarrow Y$ tel que

$$\phi \circ f = g \circ \phi.$$

(on dit aussi que (Y, g) est un quotient de (X, f)).

Définition 5. *Un système dynamique topologique est dit minimal s'il ne possède pas de fermé invariant par T non trivial.*

1.2 Systèmes dynamiques mesurables et mesurés

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés de tribu $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Une application $f : X \longrightarrow Y$ préserve la mesure si

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \mu(f^{-1}(B)) = \nu(B).$$

Lorsque $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu)$, on dit aussi que la mesure μ est invariante par f ou f -invariante.

Définition 6. *Soit (X, T) un système dynamique, μ une mesure de probabilité sur X . On dit que μ est invariante par T si pour tout ensemble A mesurable, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Définition 7. *Un système dynamique mesurable est un triplet $(X, \mathcal{B}, T)$ avec $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $T : X \longrightarrow X$ une application mesurable. Il est dit inversible si T est bijective d'inverse mesurable.*

Exemple 1. *L'intervalle $[0, 1[$ muni de la métrique usuelle, sur lequel on fait agir l'application $T : [0, 1[\rightarrow [0, 1[$, définie par $T(x) = 2x \bmod 1$ est un système dynamique mesurable pour la mesure de Lebesgue.*

Définition 8. *Un système dynamique mesuré est un quadruplet $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ avec $(X, \mathcal{B}, T)$ un espace mesuré et $T : X \longrightarrow X$ une application mesurable et préservant la mesure μ . Il est dit inversible si T est bijective d'inverse mesurable.*

2 Combinatoire des mots et systèmes dynamiques symboliques

La combinatoire des mots est considérée comme une discipline récente en mathématiques. Ses premiers travaux sont attribués à Bernoulli au XVIIIe siècle. Ensuite, on remarque les travaux de Christoffel et Markov au XIXe siècle et Morse au XXe siècle. À cette

époque, on ne considère pas la combinatoire des mots comme discipline en soi. En 1906, Thue fait de la "vraie" combinatoire des mots. Il définit la suite de Morse (sans facteur carré), et après en 1922, Morse retrouve la même suite.

Sans doute, c'est l'avènement de l'ordinateur qui, dans la deuxième moitié du XXe siècle créa un véritable intérêt envers cette discipline. En informatique, toute information est représentée sous la forme de chaîne de caractères. Le traitement de celles-ci soulève des questions qui relèvent de la combinatoire des mots.

La combinatoire des mots a aujourd'hui atteint un niveau de développement important dont on trouve une présentation dans la série de livres de Lothaire [32], [33], [34].

2.1 Un peu de vocabulaire

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini appelé alphabet.

Définition 9. *Un mot fini est une chaîne finie d'éléments de $\mathcal{A}$. Le mot vide est noté ϵ . L'ensemble des mots finis est noté $\mathcal{A}^*$.*

Définition 10. *La concaténation de deux mots $V = v_1 \dots v_r$ et $W = w_1 \dots w_s$ est le mot, noté VW , égale à $v_1 \dots v_r w_1 \dots w_s$.*

Cette opération est associative et admet pour élément neutre le mot vide ϵ .

Définition 11. *L'ensemble des mots finis $\mathcal{A}^*$ muni de la concaténation est le monoïde libre engendré par $\mathcal{A}$.*

Définition 12. *On considère des mots infinis unilatéraux (encore appelés suites) $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, et des mots infinis bilatéraux (encore appelés suites bi-infinies) $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \dots u_{-l} \dots u_{-1} u_0 u_1 \dots u_k \dots$.*

Définition 13. *Soit u un mot fini ou infini. Le mot $V = v_1 \dots v_r$ est un facteur de u s'il existe n tel que*

$$u_n = v_1, \dots, u_{n+r-1} = v_r.$$

On dit alors que V apparaît à l'indice n . Le mot $u_n \dots u_{n+r-1}$ est appelé occurrence de V .

Le mot V est un préfixe de u s'il existe un mot s tel que $u = Vs$.

Le mot V est un suffixe de u (pour u fini) s'il existe un mot p tel que $u = pV$.

Notation 1. *On note $|W|$ la longueur du mot W : si $W = w_1 \dots w_s$, alors $|W| = s$. On note $|W|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a dans W .*

Définition 14. *Soit u un mot fini ou infini. Le langage $\mathcal{L}(u)$ de u est l'ensemble des facteurs de u . On note $\mathcal{L}_n(u)$ l'ensemble des facteurs de longueur n de u .*

L'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit des topologies discrètes sur $\mathcal{A}$. Cet ensemble est alors compact. Cette topologie est définie par la métrique suivante :

Définition 15. Soient $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux mots infinis de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. La distance est définie par :

$$d((w_i)_{i \in \mathbb{N}}, (v_i)_{i \in \mathbb{N}}) = 2^{-\min\{i \in \mathbb{N}, w_i \neq v_i\}}.$$

$$d((w_i)_{i \in \mathbb{N}}, (v_i)_{i \in \mathbb{N}}) := \begin{cases} 2^{-\min\{i \in \mathbb{N}, w_i \neq v_i\}} & \text{si } w_i \neq v_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Deux suites sont donc d'autant plus proches que leurs premiers termes coïncident longtemps. Il est à noter que la distance d définit la même topologie que la topologie produit sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Définition 16. Le cylindre $[W]$, où $W = w_1 \dots w_n$ appartient à $\mathcal{A}^n$, est l'ensemble des suites de la forme :

$$[W] = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}; x_0 = w_1, x_1 = w_2, \dots, x_{n-1} = w_n\}.$$

Les cylindres sont des ensembles ouverts et fermés ; ils engendrent la topologie. En effet, si le cylindre $[W]$ est non vide et si x est un élément de $[W]$, $[W]$ s'identifie à la fois la boule ouverte et à la boule fermée. L'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est complet car compact et métrique.

On a la proposition suivante [20] :

Proposition 1.1. L'espace $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, d)$ est compact.

Définition 17. Le décalage est l'application $S : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, u \mapsto v$ tel que

$$v_n = u_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposition 1.2. L'application S est continue.

Remarque 1.1. Le système $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, S)$ est un système dynamique topologique.

2.2 Dynamiques symboliques

En mathématiques, la dynamique symbolique est une branche de l'étude des systèmes dynamiques. Cela consiste à étudier un système en partitionnant l'espace en un nombre fini de régions et en s'intéressant aux suites possibles de régions traversées lors de l'évolution du système. Pour comprendre la dynamique des systèmes, Hadamard a suggéré l'idée de découper l'espace des états en un nombre fini de morceaux, chaque morceau ayant un nom (généralement un chiffre ou une lettre de l'alphabet) et d'associer à tout point du système la suite des noms des morceaux dans lesquels ses images varient par la dynamique [27].

Par exemple, dire que *accbad...* code le point x signifie que x se trouve dans le morceau de nom a , son image $T(x)$ dans le morceau c , l'image $T(T(x))$ à nouveau dans le morceau c ,

3. PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES : PÉRIODICITÉ, RÉCURRENCE, TRANSITIVITÉ, MINIMALITÉ

par contre $T^3(x)$ se trouve dans b , $T^4(x)$ revient dans a , $T^5(x)$ visite un nouveau morceau de nom d ...

Finalement, étant donnée une partition de l'espace d'état, on associe à tout point x un mot infini de symboles qui décrit sa trajectoire. On parlera de codage de la trajectoire de x , ou plus simplement de codage de x .

Principe

Soit $T : X \longrightarrow X$ un système dynamique, et $(X_a)_{a \in \mathcal{A}}$ une partition de X . On note γ l'application définie par :

$$\gamma : X \longrightarrow \mathcal{A} \quad x \mapsto a, \quad \text{si } x \in X_a$$

Définition 18. On appelle *itinéraire* de $x \in X$ la suite

$$I(x) = (\gamma(T^n(x)))_{n \in \mathbb{N}}.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ I \downarrow & & \downarrow I \\ \mathcal{A}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{S} & \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \end{array}$$

Le diagramme commute et on a :

$$I(T(x)) = S(I(x)).$$

Systèmes dynamiques symboliques

Définition 19. On appelle *système dynamique symbolique* un couple (Ω, S) où Ω est un fermé de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ qui est invariant par S (c'est à dire $S(\Omega) \subset \Omega$).

3 Propriétés dynamiques : périodicité, récurrence, transitivité, minimalité

De nombreuses propriétés combinatoires d'une suite $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ se traduisent en termes dynamiques.

3.1 Périodicité – Récurrence

Soit (X, T) un système dynamique, $x \in X$ et $u = (u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Définition 20. 1. On dit que x est périodique de période p par T si $T^p(x) = x$.
 2. On dit que x est ultimement périodique s'il existe n_0, p tel que $T^{n_0+p}(x) = T^{n_0}(x)$.

Définition 21. 1. On dit que u est périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+p}.$$

2. On dit que u est ultimement périodique de période p si et seulement si

$$\forall n \geq n_0; u_n = u_{n+p}.$$

Proposition 1.3. Si T est inversible, alors tout point ultimement périodique est périodique.

Un exemple standard : les rotations du cercle

Soit R_α l'application définie par :

$$\begin{aligned} R_\alpha : [0, 1[&\longrightarrow [0, 1[\\ x &\longmapsto x + \alpha \pmod{1} \end{aligned}$$

avec $\alpha \in [0, 1[$. L'application R_α est la bijection de réciproque $R_{-\alpha}$.

Proposition 1.4. Si α est rationnel alors tous les points sont périodiques. Si α est irrationnel, aucun point n'est périodique.

Démonstration. On a $R_\alpha^n = R_{n\alpha}$ pour tout entier naturel n . Si x est périodique de période p alors $R_{p\alpha}(x) = x$. On note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x et $[x]$ la partie entière de x . On a $R_{p\alpha}(x) = \{x + p\alpha\} = x + p\alpha - q$ avec $q = [x + p\alpha] \in \mathbb{N}$. Ce qui implique que $x + p\alpha - q = x$. d'où $\alpha = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$. Réciproquement $(R_{\frac{q}{p}})^p = R_q = Id$. $\square$

Définition 22. Soit (X, T) un système dynamique mesurable, soit $A \subset X$ un sous-ensemble mesurable. Un point $x \in A$ est dit récurrent par rapport à A si et seulement si pour tout p dans $\mathbb{N}$, il existe un entier $k \geq p$ pour lequel : $T^k(x) \in A$.

Définition 23. On dit que $x \in X$ est récurrent, si on peut trouver une suite d'entiers n_k strictement croissante telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{n_k}(x) = x.$$

Remarque 1.2. Tout point périodique est récurrent.

Définition 24. Soit u un mot infini. Le mot u est récurrent si chaque facteur apparaît infiniment souvent.

Il est équivalent de dire que chaque préfixe de u apparaît au moins deux fois.

Exemple 2. Le mot $u_1 \in \{a, b, c\}$ défini par

$$c(ab)^\infty$$

n'est pas récurrent, alors que le mot $u_2 \in \{a, b\}$ définie par

$$(ab)^\infty$$

l'est. Le mot $u_3 \in \{a, b\}$ défini par $aba^2b^2a^3b^3 \dots a^n b^n \dots$ n'est pas récurrent.

Définition 25. Soit (n_k) la suite croissante des occurrences d'un mot fini U dans u , les lacunes de U sont les nombres $n_{k+1} - n_k$.

Définition 26. Soit u un mot infini. Le mot u est uniformément récurrent si chaque facteur apparaît infiniment souvent et les lacunes entre deux occurrences consécutives de chaque facteur sont bornées.

Proposition 1.5. Soit u un mot infini. Le mot u est uniformément récurrent si et seulement si pour tout n , il existe N tel que tout facteur de longueur N contient tous les facteurs de longueur n de la suite u .

3.2 Transitivité – Minimalité

Définition 27. On dit que (X, T) est transitif si et seulement si pour tous U, V deux ouverts non vides de X , il existe $x \in U$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(x) \in V$.

Proposition 1.6. Soit (Ω, S) un système dynamique symbolique. On dit que (Ω, S) est transitif si et seulement si quelque soient $u, v \in \mathcal{L}(\Omega)$, il existe $w \in \mathcal{L}(\Omega)$ tel que $uwv \in \mathcal{L}(\Omega)$.

Définition 28. On dit que (X, T) est minimal s'il n'admet pas un sous fermé invariant non trivial.

Proposition 1.7. (X, T) est minimal si et seulement si toute orbite est dense dans X .

Démonstration. Supposons que (X, T) est non minimal. Soit X_1 un fermé invariant non trivial. Soit $x \in X_1$.

On a $\{T^n(x)\} \subset X_1$ car X_1 est invariant. Ce qui implique $\overline{\{T^n(x)\}} \subseteq X_1 \subset X$. Donc $\{T^n(x)\}$ n'est pas dense dans X .

Réciproquement : Soit x un point dont l'orbite n'est pas dense. Alors $\overline{\{T^n(x)\}}$ est un fermé invariant non trivial.

□

Proposition 1.8. *Soit (Ω, S) un système dynamique symbolique. On dit que (Ω, S) est minimal si et seulement si tout $U \in \mathcal{L}(\Omega)$ intervient une infinité de fois dans tous mots $u \in \Omega$ avec des lacunes bornées.*

Démonstration. On suppose que (Ω, S) est minimal. Soit $U \in \mathcal{L}(\Omega)$ et $[U]$ l'ouvert associé. On a $\Omega \setminus [U]$ est fermé. S'il existe u dans Ω tel que $\{S^n(u)\} \cap [U] = \emptyset$, alors Ω n'est pas minimal. Par suite, U intervient une infinité de fois dans tous mots $u \in \Omega$.

Réciproquement par contradiction, On suppose que U est un élément de $\mathcal{L}(\Omega)$ qui revient dans u avec des lacunes non bornées. On peut trouver une suite (n_k) d'occurrences telle que l'occurrence suivante arrive avec une lacune supérieure strictement à k .

Posons $v^{(k)} = S^{n_k+1}(u)$, alors la première occurrence de U est à un indice supérieur à k . Comme Ω est un fermé dans un compact alors Ω est compact. Par suite, on peut extraire une sous suite convergente vers v et U n'apparaît pas dans v .

□

4 Rudiments de théorie spectrale

On considère un système dynamique topologique mesuré (X, T) muni d'une mesure μ . On définit l'espace $L^2(X, \mu)$, l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont de carré intégrable. On peut associer à T un opérateur noté U_T de la façon suivante :

$$U_T : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu), \quad f \mapsto f \circ T$$

On cherche les invariants spectraux de T : valeurs propres et vecteurs propres.

Définition 29. *L'application $T : X \rightarrow X$ est dite ergodique pour une mesure donnée si et seulement si tout ensemble mesurable invariant sous T est de mesure nulle, ou son complémentaire est de mesure nulle.*

L'ergodicité capture la notion d'irréductibilité en théorie de la mesure : pour toute partition d'un système dynamique ergodique en deux sous-systèmes invariants, l'un des deux est trivial ou négligeable, au sens où il vit sur un ensemble de mesure nulle.

Proposition 1.9. *Si (X, T, μ) est ergodique, alors l'espace propre associé à chaque valeur propre est de dimension 1.*

Définition 30. *On dit que (X, T, μ) est faiblement mélangeant s'il n'admet aucune valeur propre non triviale.*

Définition 31. *On dit que (X, T, μ) est à spectre discret si $L^2(X, \mu)$ admet une base de vecteurs propres pour U_T .*

Définition 32. *On dit que (X, T) est uniquement ergodique si l'ensemble des mesures de probabilités invariantes par T est réduit à une seule mesure μ .*

Chapitre 2

Substitutions et systèmes dynamiques substitutifs

1 Substitutions

Les substitutions interviennent dans de nombreux domaines tels que la théorie ergodique, la géométrie (fractal, pavage), la théorie des langages formels et automates (complexité des langages, reconnaissabilité des langages), l'arithmétique, (systèmes de numération), la théorie des nombres (transcendance et séries formelles), la physique théorique (opérateurs de Schödinger discret et quasi-cristaux) et la logique.

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini.

Définition 33. Une substitution σ est un morphisme non effaçant de $\mathcal{A}^*$, c'est à dire σ remplace les lettres d'un alphabet $\mathcal{A}$ par des mots finis non vide.

Exemple 3. Parmi les exemples connus de substitutions, on donne la substitution de Fibonacci notée σ et la substitution de Tribonacci notée σ_1 et celle de Tribonacci modifiée notée σ_2 .

$$\sigma : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow a \end{cases}, \quad \sigma_1 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ac \\ c \rightarrow a \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_2 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ca \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

La définition d'une substitution σ s'étend naturellement sur $A^{\mathbb{N}}$ et $A^{\mathbb{Z}}$ par concaténation :

$$\sigma(\dots w_{-2}w_{-1}.w_0w_1\dots) = \dots \sigma(w_{-2})\sigma(w_{-1}).\sigma(w_0)\sigma(w_1)\dots$$

Définition 34. Un mot infini u de $A^{\mathbb{N}}$ est un point périodique de σ si et seulement s'il existe un entier k non nul vérifiant $\sigma^k(u) = u$.

Définition 35. Une substitution σ est dite S -périodique s'il existe un point périodique $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ de σ qui soit également S -périodique.

Définition 36. Une substitution σ est de longueur constante si les images des lettres de l'alphabet contiennent le même nombre de lettres.

Définition 37. On dit que $u \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est un point fixe de σ si $\sigma(u) = u$.

Proposition 2.1. Soit σ une substitution telle qu'il existe une lettre a telle que $\sigma(a)$ commence par a et $|\sigma(a)| \geq 2$, alors la suite de mots $a, \sigma(a), \sigma^2(a), \dots, \sigma^n(a), \dots$ converge vers un mot infini que l'on note $\sigma^\infty(a)$. Ce mot est un point fixe de σ .

Démonstration. Soit σ une substitution telle que $\sigma(a) = aW$ avec $W \neq \epsilon$. On a $\sigma^{j+1}(a) = aW\sigma(W)\sigma^2(W) \dots \sigma^j(W)$, pour $j \geq 0$. Le mot $\sigma^j(a)$ est donc un préfixe non trivial de $\sigma^{j+1}(a)$ car tous les $\sigma^j(W)$ sont non vides. Ce qui donne la convergence. $\square$

Exemple 4. Le mot de Fibonacci est le point fixe commençant par a de la substitution de Fibonacci sur $\{a, b\}^*$ par $a \mapsto ab, b \mapsto a$:

a
 ab
 aba
 $abaab$
 $abaababa$
 $abaababaabaab$
 $abaababaabaababaababa$
 $abaababaabaababaabaababaabaab$
 $\vdots$
 $abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaabbaabbabaababbabaabbbbaabab \dots$

Le mot de Thue-Morse est le point fixe commençant par a de la substitution de Thue-Morse définie sur $\{a, b\}^*$ par $a \mapsto ab$ et $b \mapsto ba$:

$abbabaabbaababbabaababbaabbabaabbaababbaabbabaababbabaabbaabab \dots$

De nombreuses propriétés des suites substitutives sont décrites par leur matrice d'incidence :

Définition 38. On appelle application de Parikh [42] définie par

$$l : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathbb{N}^d$$

$$u \longmapsto (|u|_a)_{a \in \mathcal{A}}$$

Cette application est dite aussi abélianisée.

Définition 39. (*Matrice d'incidence*) :

On associe à la substitution σ définie sur l'alphabet $\mathcal{A}$ la matrice $M = [m_{i,j}]_{(i,j) \in \mathcal{A}^2}$ dont le terme général $m_{i,j}$ compte le nombre d'occurrences de la lettre j dans $\sigma(i)$.

Remarque 2.1. Les vecteurs de la matrice d'incidence d'une substitution σ correspondent aux abélianisés des $\sigma(i)$.

Exemple 5. Soient $\sigma_1 : a \rightarrow ab, b \rightarrow a$ et $\sigma_2 : a \rightarrow ab, b \rightarrow ba$ les deux substitutions de Fibonacci et Thue-Morse respectivement. Leurs matrices d'incidence associées respectivement sont : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère aussi la substitution de Tribonacci définie par : $\sigma : a \rightarrow ab, b \rightarrow bc, c \rightarrow a$. La matrice d'incidence de la substitution de Tribonacci est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.2. On vérifie que $l(\sigma(u)) = M(l(u))$.

Définition 40. Une substitution σ est dite unimodulaire si sa matrice d'incidence est de déterminant ± 1 .

2 Primitivité et théorème de Perron Frobenius

Définition 41. Une matrice carrée dont les entrées sont positives est dite primitive s'il existe une puissance de cette matrice dont toutes les entrées sont strictement positives.

Définition 42. Une substitution est dite primitive si la matrice d'incidence associée l'est.

En d'autres termes, il existe un itéré de la substitution tel que l'image de toute lettre contient toutes les lettres de l'alphabet.

Exemple 6. La substitution de Fibonacci est primitive.

Proposition 2.2. Si σ est une substitution primitive alors tous les points fixes ont le même langage (voir [20]).

Démonstration. Soient u, v deux points fixes d'une substitution primitive. Soit U un facteur de u . On note u_0 la première lettre de u . On a U est un facteur de u , donc il apparaît dans $\sigma^k(u_0)$ pour k assez grand. Soit v_0 la première lettre de v , donc u_0 apparaît dans $\sigma^n(v_0)$ car σ est primitive. Par suite U apparaît dans $\sigma^{n+k}(v_0)$. Donc U apparaît dans v . D'où $\mathcal{L}(u) \subset \mathcal{L}(v)$. De même pour l'autre inclusion, ce qui implique égalité. $\square$

Remarque 2.3. Ce n'est pas vrai dans le cas où σ n'est pas primitive.

Définition 43. *Un système dynamique substitutif est un système dynamique engendré par un mot infini u point fixe d'une substitution σ primitive.*

On note :

$$\Omega = \overline{\{S^n(u), \quad n \in \mathbb{N}\}}.$$

Si σ est une substitution primitive alors le système dynamique (Ω, S) ne dépend pas du point fixe choisi. On le note donc (Ω_σ, S) .

2.1 Théorème de Perron Frobenius

En algèbre linéaire, le théorème de Perron-Frobenius affirme qu'une matrice carrée dont les coefficients sont des réels strictement positifs, possède une valeur propre unique de taille maximale et dont le vecteur propre associé a des coordonnées toutes strictement positives.

Ce théorème a d'importantes applications en théorie des probabilités, en théorie des systèmes dynamiques et en théorie des graphes.

Soit A une matrice carrée d'ordre n , on note son rayon spectral par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$$

où $Sp(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de A .

On a le théorème de Perron-Frobenius suivant [10] :

Théorème 2.1. *Soit A une matrice primitive alors on a*

1) *Le rayon spectral ρ de A est une valeur propre simple de A et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur strictement positif V_ρ .*

2) *Pour tout vecteur V , on a $\|MV\| \leq \rho\|V\|$. Si on a égalité alors V est un multiple de V_ρ .*

Définition 44. *On appelle fréquence du facteur U dans le mot infini u la limite suivante si elle existe :*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{k \in \mathbb{N}, U \text{ apparaît à l'indice } k \text{ dans } u\}.$$

Proposition 2.3. *Soit σ une substitution primitive. Alors toute lettre admet une fréquence bien définie dans le point fixe.*

Démonstration. Voir [20].

□

On peut montrer que tout mot admet une fréquence bien définie dans le point fixe de la substitution. On définit alors une mesure de probabilité ν invariante de la manière suivante : ν est l'unique mesure de probabilité invariante par S , telle que $\nu[W] = f(W)$ où $[W]$ est le cylindre correspondant aux suites de l'orbite de u de préfixe W , et où $f(W)$ est la fréquence d'apparition du bloc W dans la suite u . On en déduit que (Ω_σ, S) admet une seule mesure de probabilité invariante.

Théorème 2.2. *Le système dynamique associé à une substitution primitive est uniquement ergodique.*

2.2 Récurrence et minimalité

Proposition 2.4. *Soit σ une substitution primitive. Alors (Ω_σ, S) est récurrent.*

Démonstration. Montrons d'abord que toute lettre est récurrente. Comme σ est primitive, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n > 0$. Soit u un point fixe de σ , alors $u = \sigma^n(u_n) \dots \sigma(u_1)u_0$ avec u_i sont les préfixes d'image des lettres (voir Section 3). Si i est une lettre de $\mathcal{A}$, alors elle apparaît dans chacun des $\sigma^n(u_j)$. Ce qui implique que i apparaît une infinité de fois.

Soit U un facteur de u . Alors U apparaît dans $\sigma^k(u_0)$. Donc il apparaît dans $\sigma^{n+k}(i)$ pour tout $i \in \mathcal{A}$. Par suite U apparaît une infinité de fois dans u . □

Proposition 2.5. *Soit σ une substitution primitive. Alors (Ω_σ, S) est minimal.*

Démonstration. Soit U un facteur du point fixe u de la substitution primitive σ . Le facteur U apparaît une infinité de fois dans u avec des lacunes bornées par $2 \cdot \max_{i \in \mathcal{A}} |\sigma^{k+n}(i)|$. □

Proposition 2.6. *L'application $S : \Omega_\sigma \longrightarrow \Omega_\sigma$ est surjective.*

3 Automate des préfixes-suffixes associé à une substitution primitive

3.1 Désubstitution et développement en préfixes-suffixes

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet fini et σ une substitution sur $\mathcal{A}$. On obtient un système dynamique symbolique en considérant l'opérateur de décalage S sur l'ensemble Ω_σ des mots dont le langage est inclus dans l'ensemble des facteurs des itérés de σ sur les lettres de l'alphabet. Notre objectif est de décrire de manière plus explicite ce système dynamique lorsqu'il est minimal et de mettre en évidence la dynamique de la numération associée à cette substitution.

En 1982, G. Rauzy a introduit un automate des préfixes [43]. Cette notion lui a permis en particulier de décrire précisément la dynamique du système associée à la substitution de Tribonacci $\sigma(1) = 12$, $\sigma(2) = 13$, $\sigma(3) = 1$ et d'en déduire que ce système est conjugué en mesure à une rotation sur un tore [43].

Soit σ une substitution primitive non S-périodique sur un alphabet $\mathcal{A}$ et soit (Ω, S) le système symbolique engendré par σ . Par compacité, tout mot de Ω se décompose sous la forme $w = S^k(\sigma(v))$, avec $k < |\sigma(v_0)|$, où $v \in \Omega$ et v_0 est la lettre d'indice 0 de v . L'unicité de cette décomposition est assurée par un résultat de [41], où l'auteur prouve que toute substitution primitive non S-périodique vérifie une propriété de reconnaissabilité bilatérale, que nous utiliserons sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall w \in \Omega_\sigma, \exists v \in \Omega_\sigma, \exists k \in \mathbb{N}, v \text{ et } k \text{ unique;} \\ w = S^k(\sigma(v)) \text{ et } 0 \leq k < |\sigma(v_0)|. \end{aligned}$$

Définition 45. On appelle désubstitution l'application $\theta : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma$ définie par

$$\theta(w) = v \text{ où } w = S^k(\sigma(v)) \text{ avec } 0 \leq k < |\sigma(v_0)|.$$

On note $P = \{(p, a, s) \in \mathcal{A}^* \times \mathcal{A} \times \mathcal{A}^*; \exists b \in \mathcal{A}; \sigma(b) = pas\}$ et $\gamma : \Omega_\sigma \rightarrow P$ l'application définie par :

$$\gamma(w) = (p, w_0, s) \text{ si } \sigma(\theta(w_0)) = pw_0s \text{ et } w = S^{|p|}\sigma(\theta(w)).$$

Ces applications existent et sont continues pour les systèmes bilatères c'est-à-dire sur $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$; Mossé montre dans [41] que ce n'est pas toujours le cas pour les systèmes unilatères.

Définition 46. Soient w un mot bi-infini et $\Gamma : \Omega_\sigma \rightarrow P^\mathbb{N}$ l'application continue ([13]) définie par

$$\Gamma(w) = (\gamma(\theta^i(w)))_{i \geq 0} = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}.$$

La suite $\Gamma(w)$ est appelée développement en préfixes-suffixes de w .

Afin de comprendre un peu mieux ce développement, on fait les remarques suivantes. Si $\Gamma(w) = (p_i, a_i, s_i)_{i \geq 0}$ est le développement d'un mot bi-infini w de Ω_σ , alors

$$a_0 = w_0 \text{ et } \forall i \geq 0, \sigma(a_{i+1}) = p_i a_i s_i.$$

Si les p_i et s_i ne sont pas tous vides à partir d'un certain rang, alors w est la limite de la suite des mots finis suivants :

$$\sigma^i(p_i) \dots \sigma(p_1) p_0. w_0 s_0 \sigma(s_1) \dots \sigma^i(s_i).$$

3.2 Automate des préfixes-suffixes

On définit l'automate A_σ associé à la substitution σ par :

- $\mathcal{A}$ est l'ensemble des états, tous les états sont initiaux.
- P est l'ensemble des étiquettes.
- Il existe une flèche entre les états a et b étiquetée par $e = (p, a, s)$ si $\sigma(b) = pas$.

Cet automate est fortement connexe si σ est primitive.

Définition 47. Un élément $(e_i)_{i \geq 0} \in P^\mathbb{N}$ est dit admissible s'il s'agit d'un mot infini reconnu par l'automate des préfixes-suffixes. On note D l'ensemble des éléments admissibles de $P^\mathbb{N}$.

On a la proposition suivante dans [13].

Proposition 2.7. Pour toute suite $(p_i, a_i, s_i)_{0 \leq i \leq k-1}$, d'étiquettes d'un chemin fini de l'automate dont a_k est le dernier sommet,

$$\sigma^k(a_k) = \sigma^{k-1}(p_{k-1}) \dots \sigma(p_1)p_0a_0s_0\sigma(s_1) \dots \sigma^{k-1}(s_{k-1}).$$

Notamment, $s_0\sigma(s_1) \dots \sigma^{k-1}(s_{k-1})$ est un suffixe de $\sigma^k(a_k)$ et $\sigma^{k-1}(p_{k-1}) \dots \sigma(p_1)p_0$ est un préfixe de $\sigma^k(a_k)$.

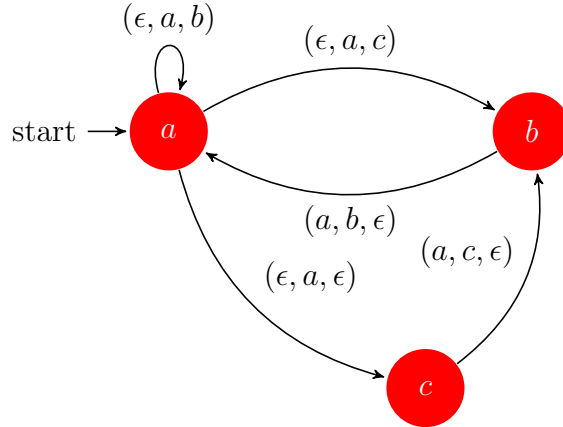


FIGURE 2.1 – Automate des préfixes-suffixes de la substitution de Tribonacci σ_1

3.3 Automate des préfixes

L'automate des préfixes est un cas particulier de l'automate des préfixes-suffixes. Elle est définie par :

Définition 48. On définit l'automate des préfixes à une substitution donnée σ comme suit :

- Ensemble d'états : L'alphabet $\mathcal{A}$.
- Ensemble d'étiquettes : $\text{Pref} = \{\text{les préfixes propres de } \sigma(i), i \in \mathcal{A}\}$, On note ϵ le mot vide.
- Transition : Si p et q sont deux états de l'automate et $\mathcal{W}$ est un mot de Pref alors il existe une transition entre p et q étiquetée par $\mathcal{W}$ si et seulement si le mot $\mathcal{W}q$ est un préfixe de $\sigma(p)$.

L'automate des préfixes de la substitution de Tribonacci est donnée par :

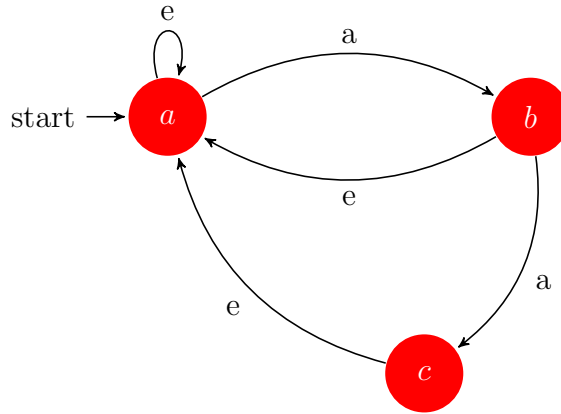


FIGURE 2.2 – Automate des préfixes de la substitution de Tribonacci σ_1

Lemme 2.1. Soit P_n un préfixe du point fixe u d'une substitution unimodulaire alors P_n s'écrit sous la forme :

$$P_n = \sigma^s(R_s) \dots \sigma(R_1)R_0$$

où les R_i sont les préfixes d'images des lettres.

Cette dernière décomposition est obtenue par l'automate des préfixes qui nous permet de connaître exactement les préfixes d'images des lettres qui sont données dans cette décomposition.

Chapitre 3

Représentation géométrique des systèmes dynamiques substitutifs

Il est naturel de chercher à interpréter géométriquement les systèmes abstraits que sont les systèmes symboliques. M. Queffélec [44] appelle représentation géométrique d'un système symbolique (Ω, S) un système géométrique (X, T) défini sur une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, sur lequel il existe une partition indexée par l'alphabet, telle que tout mot est l'itinéraire d'un point de (X, T) selon la partition. Elle demande quels systèmes admettent une telle représentation géométrique.

La représentation géométrique des systèmes substitutifs a fait l'objet de nombreux travaux : en 1982, G. Rauzy a généralisé les propriétés dynamiques de la substitution de Fibonacci à une substitution sur 3 lettres appelée substitution de Tribonacci [43] : $\sigma(a) = ab, \sigma(b) = ac, \sigma(c) = a$. G. Rauzy a donné une représentation géométrique du système dynamique associé à cette substitution. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce sujet par exemple P. Arnoux [5], V. Berthé [12], X. Bressaud [6], S. Ito [18], A. Messaoudi [35], A. Siegel [13], J. Thuswaldner [48], ...

1 Le fractal de Rauzy original

G. Rauzy s'est intéressé à la substitution de Tribonacci définie par

$$\sigma_1(a) = ab, \quad \sigma_1(b) = ac, \quad \sigma_1(c) = a,$$

dans le but d'obtenir une représentation géométrique du système dynamique symbolique associé au point fixe de cette substitution. La matrice de la substitution de Tribonacci a pour polynôme caractéristique $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Ce polynôme a une racine réelle α strictement supérieure à 1 et deux racines complexes conjuguées β et $\bar{\beta}$ de module inférieur strictement à 1.

Le fractal de Rauzy introduit par G. Rauzy est l'ensemble

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \beta^i \mid \forall i \geq 3, \varepsilon_i \in \{0, 1\}, \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0 \right\}.$$

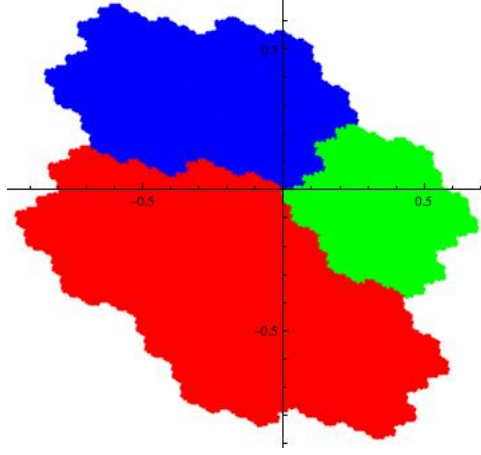


FIGURE 3.1 – Le fractal de Rauzy.

Le fractal de Rauzy a plusieurs propriétés : c'est un compact de $\mathbb{C}$, connexe, à frontière fractale et à intérieur simplement connexe et il induit un pavage de $\mathbb{C}$ modulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\beta$. Il est partagé en trois régions du plan complexe. Ces régions sont : $\beta\mathcal{R}$, $\beta^3 + \beta^2\mathcal{R}$ et $\beta^3 + \beta^4 + \beta^3\mathcal{R}$. Le fractal de Rauzy a fait l'objet de plusieurs études et peut être relié à différents problèmes :

1. Système de numération complexe. [37], [35].
2. Représentation géométrique des systèmes dynamiques symboliques. [37], [43], [22], [23].
3. Fractions continues de dimension 2.
4. Pavage quasi-périodique du plan. [23], [22].

Le fractal de Rauzy fait l'objet de nombreux travaux dans un grand nombre de domaines. Plusieurs personnes ont cherchés à généraliser la construction du fractal de Rauzy. Plusieurs méthodes de constructions sont apparues.

La première est inspirée par la construction initiale de Rauzy [43] en considérant le système de numération associé aux nombres de Pisot et les séries entières associées voir [35] et [36]. Cette approche se base sur la β -numération dans [52], elle consiste à représenter de manière compacte l'ensemble des entiers pour un nombre de Pisot β , auquel on peut associer une substitution. Une autre approche s'appuie sur les propriétés d'autosimilarité du fractal de Rauzy des substitutions généralisées pour la construire par approximations

successives. Cette dernière méthode a été développée par l'école japonaise menée par S. Ito [5]. Une troisième méthode est donnée par la projection de l'escalier associé au point fixe de la substitution sur un espace contractant de la matrice d'incidence de la substitution de type Pisot. Nous expliquerons dans la section suivante cette construction.

2 Nombres de Pisot et ligne brisée

2.1 Nombres de Pisot

Définition 49. *Un réel $\beta > 1$ est de Pisot s'il est entier algébrique et si tous ses conjugués sont de module strictement inférieur à 1.*

Définition 50. *Une substitution σ est de type Pisot si la valeur propre dominante de sa matrice d'incidence est un nombre de Pisot.*

Définition 51. *Une substitution σ est unimodulaire si le déterminant de sa matrice d'incidence est égale à ± 1 .*

Définition 52. *Une substitution σ est irréductible si le polynôme caractéristique de sa matrice d'incidence l'est.*

Proposition 3.1. *Toute substitution Pisot irréductible est primitive.*

Démonstration. Soit σ une substitution de type Pisot irréductible et M sa matrice d'incidence. On doit montrer que M est primitive. Le polynôme caractéristique P_σ de M est irréductible sur $\mathbb{Q}$, ce qui implique que M est une matrice irréductible. Si M est réductible, alors il existe une matrice de permutation P tel que

$$PM^tP = \begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$$

matrice triangulaire à coefficients entiers, de polynôme caractéristique P_σ réductible sur $\mathbb{Z}$.

Par un théorème donné dans [10], pour les matrices positives A , les deux assertions sont équivalentes : (1) A est primitive, (2) A est irréductible et $\rho(A)$ est plus grande en module que toutes les autres valeurs propres.

Comme σ est de type Pisot, alors $\rho(M)$ est le nombre de Pisot qui est plus grand en module que toutes les autres valeurs propres. D'où M est primitive.

□

Dans ce qui suit on suppose que la substitution est unimodulaire de type Pisot. Puisque la substitution est supposée de type Pisot alors elle est primitive.

2.2 Ligne brisée

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet à d lettres. Soit u un point infini, $u = u_0 u_1 u_2 \dots$. On plonge ce mot infini en une ligne brisée de $\mathbb{R}^d$ en remplaçant chaque lettre de u par le vecteur canonique correspondant de $\mathbb{R}^d$.

Définition 53. Soit $W = w_1 \dots w_n$ un mot fini de longueur n . La ligne brisée associée au mot W est la ligne qui joint les points $P_0, P_1 \dots, P_n$ avec $P_k = l(w_1 \dots w_k)$ où l est l'application d'abélianisation de $\mathcal{A}^*$ dans $\mathbb{N}^d$.

Définition 54. Soit u un point fixe d'une substitution σ , on appelle chemin correspondant à u dans $\mathbb{R}^d$, la ligne brisée qui joint les sommets des abélianisés des préfixes de u .

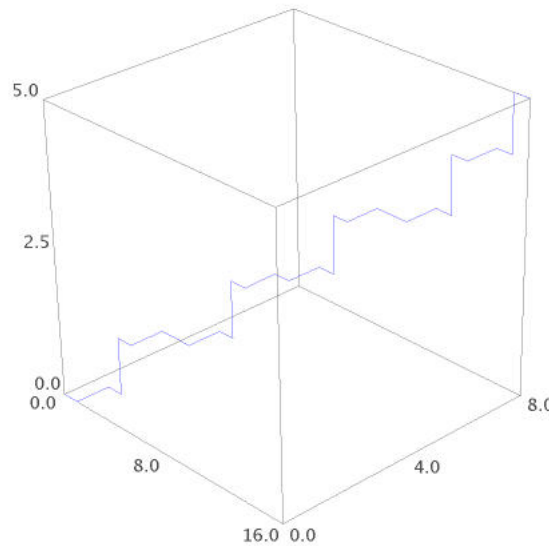


FIGURE 3.2 – Ligne brisée du point fixe de la substitution de Tribonacci.

3 Généralisation de l'exemple initial

Dans cette section, on donne une construction du fractal de Rauzy associé à une substitution unimodulaire de type Pisot en utilisant la méthode de projection. On distingue deux cas : le cas d'une substitution irréductible et le cas d'une substitution réductible.

3.1 Construction du fractal de Rauzy dans le cas irréductible

Soit σ une substitution unimodulaire irréductible de type Pisot. On a besoin maintenant d'avoir une bonne décomposition de $\mathbb{R}^d$ suivant les vecteurs propres de la matrice d'incidence de la substitution σ . Soit α la valeur propre dominante de type Pisot de la substitution σ .

On introduit une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^d$ de la façon suivante :

- L'espace β -contractant de M_σ est le sous-espace $\mathbb{H}_c$ engendré par les vecteurs propres pour les valeurs propres conjuguées à α . Il est de dimension $d-1$. On note $h : \mathbb{H}_c \rightarrow \mathbb{H}_c$ la restriction de M à $\mathbb{H}_c$; c'est donc une contraction.
- On note $\mathbb{H}_e$ l'espace dilatant engendré par le vecteur associé à la valeur propre dominante de la matrice d'incidence M de σ .

On obtient donc :

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{H}_c \oplus \mathbb{H}_e.$$

On considère les deux projections suivantes : $\pi_s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{H}_c$ la projection canonique sur $\mathbb{H}_c$ parallèlement à $\mathbb{H}_e$, et la projection π_u la projection sur $\mathbb{H}_e$ parallèlement à $\mathbb{H}_c$.

Par construction, π_s vérifie une relation de commutation avec la restriction h et on a la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Pour tout $w \in \mathcal{A}^*$, on a $\pi_s(l(\sigma(w))) = h\pi_s(l(w))$, où l désigne l'application d'abélianisation de $\mathcal{A}^*$ dans $\mathbb{Z}^d$.*

L'image par π_u des sommets de la ligne brisée donne un pavage de $\mathbb{H}_e$. Si ϕ est le vecteur propre de Perron Frobenius, ces points sont les $\phi.l(u_1 \dots u_n)$.

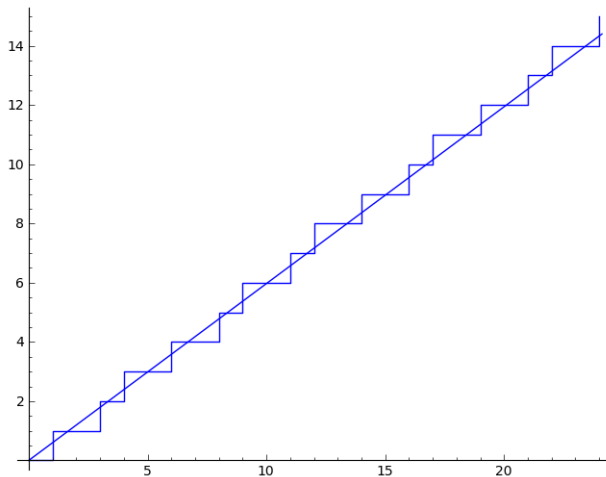


FIGURE 3.3 – Ligne brisée du point fixe de la substitution de Fibonacci.

Définition 55. *Le fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ d'une substitution irréductible unimodulaire de type Pisot est la clôture de la projection π_s sur l'espace contractant $\mathbb{H}_c$ des sommets de la ligne brisée associée à un point périodique de la substitution σ suivant la direction $\mathbb{H}_e$ c'est à dire :*

$$\mathcal{R} := \overline{\{\pi_s(l(u_0 \dots u_{k-1})) \mid k \in \mathbb{N}\}}$$

Les sous-tuiles du fractal de Rauzy sont naturellement définies par la direction de l'escalier qui est projetée pour chaque point :

$$\mathcal{R}(i) := \overline{\{\pi_s(l(u_0 \dots u_{k-1})) \mid k \in \mathbb{N}, \quad u_k = i\}}$$

On a donc $\mathcal{R} = \cup_{i \in \mathcal{A}} \mathcal{R}(i)$.

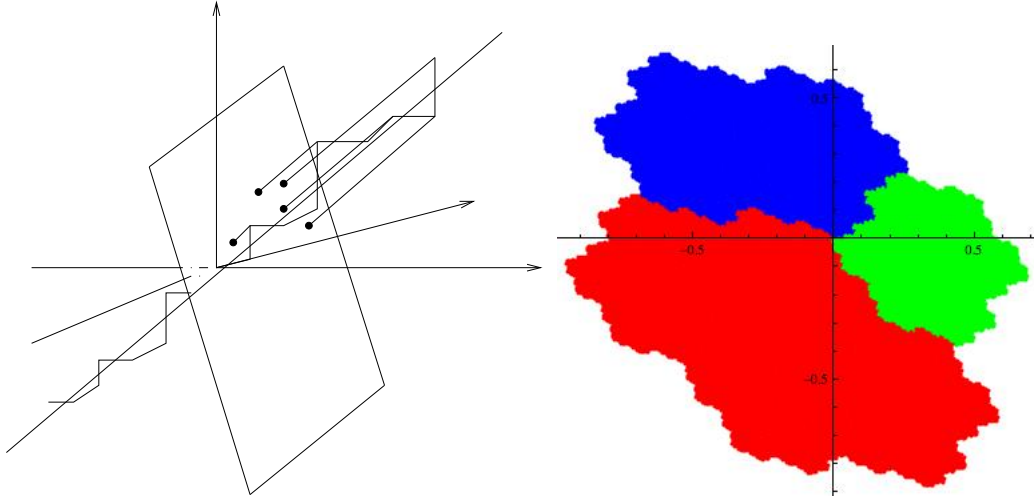


FIGURE 3.4 – La méthode de projection pour obtenir le fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci.

Dans l' exemple de Tribonacci ($a \rightarrow ab, b \rightarrow bc, c \rightarrow a$) voir Fig 3.1, les 3 couleurs désignent les 3 lettres de l'alphabet. La couleur rouge est associée à la lettre a , le bleu désigne la lettre b et le vert désigne la lettre c .

3.2 Construction du fractal de Rauzy dans le cas réductible

Soit σ une substitution unimodulaire réductible de type Pisot. Soit α la valeur propre dominante de type Pisot. On note n le degré algébrique de α , on a donc $n < d$. L'espace $\mathbb{R}^d$ se décompose en trois sous-espaces de la façon suivante :

- L'espace β -contractant de M_σ est le sous-espace $\mathbb{H}_c$ engendré par les vecteurs propres pour les valeurs propres conjuguées à α . Il est de dimension $n - 1$.
- On note $\mathbb{H}_e$ l'espace dilatant engendré par le vecteur associé à la valeur propre dominante de la matrice d'incidence M de σ .
- L'espace β -supplémentaire est l'espace invariant $\mathbb{H}_s$ à coordonnées entières tel que $\mathbb{R}^d = \mathbb{H}_c \oplus \mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_s$. Il est engendré par les espaces propres pour les valeurs propres de M qui ne sont pas conjuguées à α .

On obtient donc :

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{H}_c \oplus \mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_s.$$

On considère la projection : $\pi_s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{H}_c$ la projection canonique sur $\mathbb{H}_c$ parallèlement à $\mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_s$. La projection sur l'espace contractant reste toujours un ensemble borné.

Définition 56. *Le fractal de Rauzy associé à une substitution σ unimodulaire réductible de type Pisot est la clôture de la projection des sommets de la ligne brisée associée à un point périodique de σ sur $\mathbb{H}_c$ suivant la direction $\mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_s$.*

4 Propriétés du fractal de Rauzy

Dans cette section, nous rappelons des résultats du fractal de Rauzy.

4.1 Ensemble borné et mesure positive

On montre que le fractal de Rauzy est un ensemble borné [5]. Il en résulte que c'est un compact (fermé borné). On a la proposition suivante [51] :

Proposition 3.3. *Soit σ une substitution unimodulaire de type Pisot, et $\mathcal{R}$ son fractal de Rauzy associé alors $\mathcal{R}$ est un ensemble borné.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il existe une constante K telle que pour tout n , $|\pi_s(P_n)| \leq K$. D'après le Lemme 2.1, on a $P_n = \sigma^l(R_l) \dots \sigma(R_1)R_0$, où P_n est un préfixe du point fixe de σ .

Soit

$$l : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\mathcal{W} \mapsto (|\mathcal{W}|_1, \dots, |\mathcal{W}|_d).$$

$$\begin{aligned} \pi_s(P_n) &= \pi_s(l(\mathcal{U}_1 \dots \mathcal{U}_n)). \\ &= \pi_s l \prod_{i=1}^n \sigma^i((R_i)). \\ &= \pi_s \sum_{i=0}^n l(\sigma^i(R_i)). \\ &= \sum_{i=0}^n \pi_s M_\sigma^{(i)} l(R_i). \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES SUBSTITUTIFS

Montrons maintenant que M_σ est une contraction stricte pour une norme appropriée. On peut prendre sur $\mathbb{H}_c$ une base de vecteurs propres $V_2, \dots, V_d$. Si $X \in \mathbb{H}_c$, on peut écrire :

$$X = \sum_{i=2}^d x_i V_i.$$

Donc

$$M_\sigma(X) = \sum_{i=2}^d \alpha_i x_i V_i.$$

Prenons sur $\mathbb{H}_c$: la norme $|X|_\infty = \sup |X_i|$ et $\mu = \sup |\alpha_i| < 1$ car σ est de type Pisot, où α_i sont les conjuguées de la valeur propre dominante de la matrice de σ . Ce qui implique que $|M_\sigma X|_\infty < \mu |X|_\infty$, puisque $|\alpha_i x_i| < \sup |\alpha_i| \sup |x_i|$. Alors M_σ est une contraction stricte. Par suite :

$$\begin{aligned} |\pi_s(P_n)|_\infty &\leq \sum_{i=0}^l |\pi_s M_\sigma^{(i)}(l(R_i))| \\ &= \sum_{i=0}^l |M_\sigma^{(i)} \pi_s(l(R_i))| \\ &\leq \sum_{i=0}^l \mu^i |\pi_s(l(R_i))| \\ &\leq \sum_{i=0}^l \mu^i B \\ &\leq B \sum_{i=0}^\infty \mu^i \\ &= \frac{B}{1-\mu}. \end{aligned}$$

avec $B = \max |\pi_s(l(R_i))|$. □

Corollaire 3.1. *Soit u un point fixe d'une substitution de type Pisot irréductible. Le chemin correspondant à u reste à distance bornée de la droite engendrée par le vecteur propre de Perron-Frobenius passant par 0.*

Proposition 3.4. *Soit σ une substitution de matrice d'incidence M . Si M admet une seule valeur propre α de module strictement supérieur à 1 et toutes les autres valeurs propres sont de modules strictement inférieurs à 1, alors α est un nombre de Pisot et le polynôme caractéristique de M est irréductible et la substitution σ est primitive.*

Démonstration. Voit [51]. □

Corollaire 3.2. *Une matrice irréductible de type Pisot n'admet pas de sous-espace invariant à coefficient entier.*

Corollaire 3.3. *Soit σ une substitution unimodulaire irréductible de type Pisot, alors $\pi_s(\mathbb{Z}^d)$ est dense dans $\mathbb{H}_c$.*

Démonstration. Voir [51]. □

Afin de montrer que le fractal de Rauzy est de mesure de Lebesgue positive on pose :

$$\Gamma = \langle e_i - e_j \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^d n_i e_i \mid \sum_{i=1}^d n_i = 0 \right\} \subset \mathbb{Z}^d$$

et

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{P_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^d, \quad \tilde{\mathcal{R}}(i) = \{P_n, n \in \mathbb{Z}, u_{n+1} = i\}$$

On a l'égalité suivante :

$$\tilde{\mathcal{R}}(i) = \bigcup_{p_i \text{ préfixe } \sigma(j)} M\tilde{\mathcal{R}}(j) + l(p_i).$$

Lemme 3.1.

$$\mathbb{Z}^d = \Pi_{\gamma \in \Gamma} \tilde{\mathcal{R}} + \gamma.$$

Démonstration. Soit $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ de somme $n = \sum_{i=1}^d a_i$ et $P_n \in \tilde{\mathcal{R}}$, on a donc

$$(a_1, \dots, a_d) - P_n \in \Gamma.$$

□

Lemme 3.2. Soit $\Delta = \pi_s(\Gamma)$ alors dans le cas irréductible $\cup_{\delta \in \Delta} \delta + \mathcal{R}$ recouvre $\mathbb{H}_c$.

Démonstration. On a :

$$\mathbb{H}_c = \overline{\pi_s(\Gamma + \tilde{\mathcal{R}})} = \overline{\pi_s(\cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + \tilde{\mathcal{R}})} = \overline{\cup_{\gamma \in \Gamma} \pi_s(\gamma + \tilde{\mathcal{R}})} = \cup_{\delta \in \Delta} (\delta + \mathcal{R}).$$

□

On note la proposition suivante donnée dans [55].

Proposition 3.5. Le fractal de Rauzy associé à une substitution de type Pisot irréductible unimodulaire est de mesure de Lebesgue non nulle.

Démonstration. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{H}_s$. Soit $\delta \in \Delta$, par invariance par translation de la mesure de Lebesgue, on obtient :

$$\mu(\mathcal{R}) = \mu(\delta + \mathcal{R})$$

Si $\mu(\mathcal{R}) = 0$ alors $\mu(\cup_{\delta \in \Delta} \delta + \mathcal{R}) = 0$ ce qui est absurde car $\mu(\cup_{\delta \in \Delta} \delta + \mathcal{R}) = \mu(\mathbb{H}_c) = \infty$.

□

4.2 Autosimilarité

Une des principales propriétés des fractals de Rauzy l'autosimilarité.

Définition 57. Soit G un graphe dont les sommets sont notés i et les arêtes sont indexées par des contractions strictes τ_e . On dit qu'un compact K est autosimilaire dirigé par un graphe orienté (GIFS) lorsqu'il existe une décomposition du compact $K = \cup K_i$ telle que chaque sous-ensemble vérifie

$$K_i = \bigcup_{i \rightarrow j} \tau_e(K_j).$$

Autrement dit, chaque ensemble K_i se décompose en copies de différents autres ensembles K_j , préalablement contractés par des applications τ_e . Cette opération de décomposition est décrite par un graphe orienté dont les sommets désignent les ensembles K_i eux-mêmes et pour lesquels chaque copie de K_j au sein de K_i correspond à une arête du graphe.

On montre que le fractal de Rauzy d'une substitution unimodulaire de type Pisot est solution d'un GIFS dirigé par un graphe orienté appelé graphe des préfixes suffixes, et on a la relation suivante prouvée dans [51] :

Théorème 3.1. Soit σ une substitution unimodulaire irréductible de type Pisot de matrice d'incidence M . On pose $\mathcal{R}(i)$ les sous-tuiles du fractal de Rauzy associé à σ . Alors on a :

$$\mathcal{R}(i) = \bigcup_{\sigma(j)=pis} M\mathcal{R}(j) + \pi_s l(p).$$

Démonstration. On applique π_s à l'égalité suivante :

$$\tilde{\mathcal{R}}(i) = \bigcup_{p_i \text{ préfixe } \sigma(j)} M\tilde{\mathcal{R}}(j) + l(p_i).$$

On obtient :

$$\pi_s(\tilde{\mathcal{R}}(i)) = \pi_s\left(\bigcup_{p_i \text{ préfixe } \sigma(j)} M\tilde{\mathcal{R}}(j) + l(p_i)\right).$$

Ce qui donne :

$$\pi_s(\tilde{\mathcal{R}}(i)) = \bigcup_{p_i \text{ préfixe } \sigma(j)} \pi_s(M(\tilde{\mathcal{R}}(j)) + \pi_s(l(p_i)).$$

En passant à l'adhérence on obtient le résultat.

□

4.3 Dynamique du fractal de Rauzy

Sur la ligne brisée, on se déplace de sommet en sommet en utilisant les d vecteurs canoniques. En particulier, on peut translater chaque cylindre par le projeté du vecteur canonique correspondant. Ceci définit un échange de morceaux. Il est naturel de coder, dans

la partition définie par les cylindres, l'action de cet échange de morceaux sur $\mathfrak{R}$. Rauzy montre que l'application de codage est injective en mesure, surjective dans le système substitutif associé à la substitution de Tribonacci. Ainsi, il existe un isomorphisme mesurable entre l'échange de morceaux de $\mathcal{R}$ et le décalage sur le système substitutif.

Pavage périodique

Le quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau donné projette l'échange de morceaux sur $\mathcal{R}$ sur une translation torique. Ce passage au quotient est neutre (injectivité en mesure) [44] : les décalés de $\mathcal{R}$ selon un réseau donné ne s'intersectent pas dans le cas irréductible. Puisqu'ils recouvrent $\mathbb{C}$ par le théorème de Kronecker, on construit ainsi un pavage régulier.

L'utilisation couplée de la dynamique, des propriétés d'autosimilarité et de la théorie des nombres impliquent ainsi l'équivalence des énoncés suivants :

- Géométriquement : le fractal de Rauzy engendre un pavage périodique et autosimilaire.
- Dynamiquement : le système dynamique engendré par la substitution de Tribonacci est mesurablement isomorphe à une rotation sur un tore.
- Spectralement : Ce système dynamique est à spectre purement discret.

Plus généralement, quelles sont les substitutions qui engendrent un pavage périodique autosimilaire ? D'un point de vue spectral, de telles substitutions engendrent un système dynamique qui est à spectre discret.

4.4 Condition de coïncidence

Rauzy [43], montre que l'aire des intersections entre les sous-tuiles est nulle : ces tuiles ne s'intersectent que sur leur frontière. Cependant, il est vite apparu que cette propriété de sous-tuiles disjointes n'était pas prouvée en général. Après différents essais, une condition combinatoire a été introduite dans [16] pour assurer cette propriété. Cette condition purement combinatoire, est dite de forte coïncidence.

Définition 58. *On dit qu'une substitution σ satisfait la condition de forte coïncidence si pour tous $i, j \in \mathcal{A}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathcal{A}$, tel que on peut écrire $\sigma^n(i) = PaS$ et $\sigma^n(j) = P'aS'$ avec $l(P) = l(P')$.*

Cette condition signifie que les points périodiques de la substitution ont suffisamment de parties communes. Sous cette condition, les cylindres du fractal de Rauzy s'intersectent sur un ensemble de mesure nulle [5]. On peut alors définir un échange de morceaux sur le fractal de Rauzy de la substitution. Cet échange de morceaux est isomorphe en mesure au système substitutif de départ.

Notons qu'on ne connaît aucun exemple de substitution de type Pisot sans coïncidence. Marcy Barge et Beverly Diamond ont prouvé que les substitutions de type Pisot sur deux

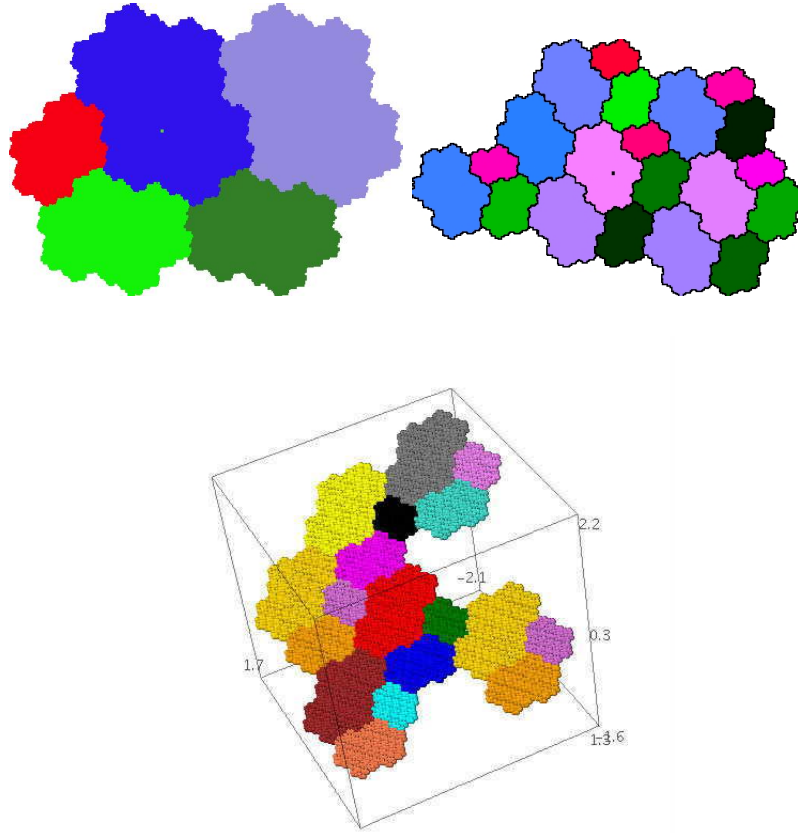


FIGURE 3.5 – Pavage périodique du fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci.

lettres sont toutes à coïncidence. On conjecture que toutes les substitutions de type Pisot vérifient la condition de coïncidence (voir le survol [20], Chap.7).

Cette condition est cependant fondamentale, dans la mesure où elle assure que les fractals de Rauzy pour les substitutions qui la vérifient sont bien solution unique du GIFS donné par le graphe des préfixes-suffixes, et on a le théorème suivant [5] :

Théorème 3.2. *Soit σ une substitution unitaire de type Pisot. Si σ satisfait la condition de forte coïncidence, alors les sous-tuiles de son fractal de Rauzy ont leurs intérieurs disjoints. Ces sous-tuiles sont l'unique solution du GIFS donné par le graphe des préfixes-suffixes.*

Ce théorème a été démontré par Rauzy pour la substitution de Tribonacci [43]. Ensuite, ce résultat a été prouvé par Arnoux et Ito [5] pour le cas des substitutions irréductibles, avec une construction du fractal basée sur les approximations successives. Sirvent et Wang ont insisté sur l'aspect GIFS, toujours pour le cas des substitutions irréductibles [55].

4.5 Conjecture Pisot et condition de pavage

La conjecture Pisot est que le système dynamique (Ω_σ, S) associé à une substitution unitaire Pisot irréductible σ est à spectre discret. On a l'équivalence suivante : soit σ une substitution irréductible unimodulaire de type Pisot et $\mathcal{R}$ le fractal de Rauzy associé, alors σ vérifie la conjecture Pisot si et seulement si $\mathcal{R}$ pave le plan [51]. La conjecture Pisot exprime le fait que le recouvrement autosimilaire est un pavage. Elle a d'abord été annoncée par les physiciens avant d'être formalisée en termes de substitutions [20]. Dans le cas irréductible puis dans le cas réductible [8]. La conjecture Pisot dépend du type de la substitution considérée.

Dans le cas d'une substitution Pisot unitaire irréductible, les recouvrements périodiques et autosimilaires par le fractal de Rauzy sont tous les deux des pavages. Pour toute substitution Pisot unitaire réductible, le recouvrement autosimilaire par le fractal de Rauzy est un pavage.

Les différentes conditions de pavage existantes sont liées aux modes de construction du fractal de Rauzy. Valérie Berthé, Anne Siegel et Joerg Thuswaldner ont écrit une synthèse sur ce sujet [12].

La conjecture Pisot a été prouvée pour les substitutions unitaires Pisot irréductibles sur un alphabet à deux lettres (Hollander and Solomyak 2003). La preuve est reliée à la condition de coïncidence qui est satisfaite par toutes substitutions sur deux lettres.

Plus précisément, on peut quotienter le fractal de Rauzy d'une substitution de type Pisot avec coïncidences, par un réseau L tel que les vecteurs de l'échange de morceaux sont égaux après passage au quotient.

On définit le sous-groupe Γ de $\mathbb{Z}^d$:

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^d n_i e_i / \sum_{i=1}^d n_i = 0, n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

où les e_i les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Soit Δ la projection de Γ sur l'espace contractant, c'est-à-dire $\Delta = \pi_s(\Gamma)$. Dans le cas irréductible, la translation par Γ du fractal de Rauzy forme un recouvrement de l'espace contractant et on a le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Soit σ une substitution unimodulaire irréductible de type Pisot, et $\mathcal{R}$ son fractal de Rauzy associé. Si σ vérifie la conjecture Pisot alors le fractal de Rauzy $\mathcal{R}$ associé à la substitution σ est un domaine fondamental de l'espace contractant $\mathbb{H}_c$ pour la translation par le réseau Δ .*

Autrement dit, les décalés du fractal de Rauzy d'une substitution par un réseau donné recouvrent l'espace. Mais il reste à prouver que ces décalés s'intersectent sur un ensemble de mesure nulle. Ceci est démontré pour les substitutions à deux lettres. Aucun contre

exemple n'est connu. Un critère algorithmique existe, qui permet de vérifier au cas par cas qu'il y a bien pavage (voir [20], Chap.7). On conjecture que la condition de coïncidence est suffisante pour qu'il y ait pavage/spectre discret.

5 Le fractal de Rauzy est l'adhérence de son intérieur

5.1 Le cas irréductible

Dans le cas irréductible, Sirvent et Wang montrent dans [55] que le fractal de Rauzy associé à une substitution unimodulaire irréductible de type Pisot est l'adhérence de son intérieur. Ils utilisent dans leur preuve un théorème établi dans un cas général où les ensembles X_i sont solutions d'un GIFS.

On établit des résultats concernant les ensembles autosimilaires. Soit A une matrice $d \times d$ expansive c'est-à-dire toutes ces valeurs propres sont de module strictement supérieur à 1. Soient $X_1, \dots, X_J$ des ensembles compacts de $\mathbb{R}^d$ non vides tel que $(X_1, \dots, X_J)$ est solution du graphe dirigé GIFS

$$X_i = \bigcup_{j=1}^J A^{-1}(X_j + \mathcal{D}_{ij}), i = 1, \dots, J$$

où les $\mathcal{D}_{ij}$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$. On peut écrire la dernière équation sous la forme

$$A(X_i) = \bigcup_{j=1}^J (X_j + \mathcal{D}_{ij}), i = 1, \dots, J.$$

En itérant on obtient

$$A^m(X_i) = \bigcup_{j=1}^J (X_j + \mathcal{D}_{ij}^m), i = 1, \dots, J,$$

avec

$$\mathcal{D}_{ij}^m = \bigcup_{k_1, \dots, k_m=1}^J (A^{m-1}\mathcal{D}_{ik_m} + A^{m-2}\mathcal{D}_{k_mk_{m-1}} + \dots + \mathcal{D}_{k_1j}).$$

On dit que le graphe dirigé GIFS est fortement connexe si sa matrice $S = [s_{ij}]$ est primitive, avec $s_{ij} = |\mathcal{D}_{ij}|$.

Définition 59. Soit $\epsilon_0 > 0$. On dit qu'un ensemble K est ϵ_0 -séparé si la distance entre deux éléments de K est au moins ϵ_0 .

On rappelle le théorème suivant montré dans [55] :

Théorème 3.3. *Soit $(X_1, \dots, X_J)$ la solution d'un graphe dirigé fortement connexe (GIFS),*

$$A(X_i) = \bigcup_{j=1}^J (X_j + \mathcal{D}_{ij}), \quad i = 1, \dots, J.$$

On suppose qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que les ensembles $\mathcal{D}_{ij}^m$ ont la propriété de ϵ_0 -séparation et X_1 a une mesure de Lebesgue positive. Alors tous les X_i sont d'intérieurs non vides et sont la clôture de leurs intérieurs.

Pour montrer ce théorème on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.4. *Sous les hypothèses du théorème 3.3, soit δ_m une suite de nombres positifs qui tend vers 0. Alors il existe deux constantes positives r_0 et c_0 tel que pour tout $m \geq 1$ il existe un nombre fini de sous-ensembles $\mathcal{E}_1^m, \dots, \mathcal{E}_J^m$ de $\mathbb{R}^d$ contenus dans la boule ouverte de centre 0 et de rayon r_0 , de cardinal au plus c_0 tel que $\|e - e'\| \geq \epsilon_0$ pour tout j, m et e, e' deux éléments distincts de $\mathcal{E}_j^m$ tel que :*

$$\nu(B_1(0) \cap Y_m) \geq (1 - 5^{d+1} \delta_m) \nu(B_1(0))$$

avec $Y_m := \bigcup_{j=1}^J (X_j + \mathcal{E}_j^m)$ et $B_1(0)$ est la boule unité centrée en 0.

Démonstration. Pour la preuve voir [55]. □

Preuve du théorème 3.3. On applique le lemme précédent 3.4, on choisit une suite (m_k) telle que $(\mathcal{E}_j^{m_k})_k$ converge pour tout j , on note $\mathcal{E}_j^\infty$ cette limite. On a donc que $\mathcal{E}_j^\infty$ est de cardinal au plus c_0 . Alors

$$\begin{aligned} \nu(B_1(0) \cap (\bigcup_{j=1}^J (X_j + \mathcal{E}_j^\infty))) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf (B_1(0) \cap (\bigcup_{j=1}^J (X_j + \mathcal{E}_j^{m_k}))) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf (1 - 5^{d+1} \delta_{m_k}) \nu(B_1(0)) \\ &= \nu(B_1(0)) \end{aligned}$$

Vu que chaque $X_j + \mathcal{E}_j^\infty$ est un fermé, on obtient

$$B_1(0) \cap (\bigcup_{j=1}^J (X_j + \mathcal{E}_j^\infty)) = B_1(0).$$

Cela veut dire que un des X_j admet un intérieur. Donc la forte connexité implique que tous les X_j sont d'intérieur non vide. Soit $X'_j = \overline{X_j^\circ}$. Alors $(X'_1, \dots, X'_J)$ satisfont le même GIFS. Par unicité (voir Mauldin et Williams [31]) on aura $X_j = X'_j$ pour tout j . □

Victor Sirvent et Yang Wang utilisent ce dernier théorème pour montrer que le fractal de Rauzy associé à une substitution unimodulaire irréductible de type Pisot est l'adhérence de son intérieur. Et ils montrent le théorème suivant [55] :

Théorème 3.4. *Soit $\mathcal{R}$ un fractal de Rauzy associé à un point fixe d'une substitution primitive unimodulaire irréductible de type Pisot. Alors $\mathcal{R}_i = \overline{\mathcal{R}_i^\circ}$ pour tout $i = 1, \dots, d$.*

Démonstration. Je donne une esquisse la preuve, pour plus de détails voir [55]. On sait que $(\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_d)$ est solution d'un graphe fortement connexe (GIFS) qui est écrit sous la forme

$$B^{-1}(\mathcal{R}_i) = \bigcup_{(j,k) \in F_i} (\mathcal{R}_j + B^{-1}(\pi_s(j))), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ainsi pour tout $j \in \mathcal{A}$ il existe $g_j(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et des constantes fixes $c_1, \dots, c_r$ telles que

$$B^{-1}\pi_s(j) = [\beta_1^{-1}g_j(\beta_1)c_1, \dots, w_r^{-1}g_j(\beta_r)c_r]^T.$$

Comme dans la preuve du Lemme 1.4 on peut choisir N suffisamment grand tel que

$$B^{-1}\pi_s(j) = [\beta_1^N f_j(\beta_1)c_1, \dots, \beta_r^N f_j(\beta_r)c_r]^T = D_0 \beta_{f_j},$$

avec $f_j \in \mathbb{Z}[x]$ et $D_0 = \text{diag}(\beta_1^N c_1, \dots, \beta_r^N c_r)$. Ce qui donne

$$B^{-1}(\mathcal{R}_i) = \bigcup_{j=1}^d (\mathcal{R}_j + \mathcal{D}_{ij}), \quad i = 1, \dots, d.$$

Alors tous les $\mathcal{D}_{ij}$ sont de la forme $D_0 w_f$ pour une infinité de $f \in \mathbb{Z}[x]$. Ce qui donne par la section 1 qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $\mathcal{D}_{ij}^m$ sont ϵ_0 -séparés. Vu que le graphe est fortement connexe et $\mu(\mathcal{R}_i) > 0$, alors par le théorème 3.3, $\overline{\mathcal{R}_i^\circ} \neq \emptyset$ et $\overline{\mathcal{R}_i^\circ} = \mathcal{R}_i$. $\square$

Corollaire 3.4. *Soit $\mathcal{R}$ un fractal de Rauzy associé à une substitution Pisot irréductible. Alors $\mathcal{R}$ est d'intérieur non vide et $\overline{\mathcal{R}_i^\circ} = \mathcal{R}_i$.*

5.2 Le cas réductible

Dans le cas réductible, le fractal de Rauzy est défini comme la clôture de la projection de la ligne brisée sur l'espace contractant $\mathbb{H}_c$ suivant $\mathbb{H}_c \oplus \mathbb{H}_s$. On note π_s cette projection :

$$\pi_s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{H}_c.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.5. *Soit σ une substitution unimodulaire Pisot. On note la décomposition de $\sigma(i) = P_k^{(i)} W_k^{(i)} S_k^{(i)}$, où P_k et S_k sont des préfixes suffixes de $\sigma(i)$ et $W_k \in \mathcal{A}$. On a les tuiles $\mathcal{R}(i)$ du fractal de Rauzy associé à σ satisfait l'équation suivante :*

$$M^{-1}\mathcal{R}(i) = \bigcup_{j=1}^d \bigcup_{W_k^{(i)}} (\mathcal{R}(j) + M^{-1}\pi_s(l(P_k^{(j)}))).$$

Démonstration. Voir [18], théorème 1.3. □

Dans le cas réductible, le fractal de Rauzy est encore l'adhérence de son intérieur. Ei, Ito et Rao montrent dans [18] cette propriété en utilisant un théorème énoncé par Lagarias et Wang dans [28]. Pour montrer le résultat on a besoin de définir la notion de plan discret et substitution généralisée pour plus de détails voir [5], [18].

Plan discret et substitution généralisée Les plans discrets interviennent dans de nombreux domaines, allant de la géométrie discrète à la dynamique des pavages et des quasi-cristaux. Ils sont en effet une des bases de la géométrie discrète, et constituent une des familles les plus simples de pavages aperiodiques.

Une approche très fructueuse (initiée par Ito et Ohtsuki) est de faire intervenir les plans discrets avec les substitutions généralisées, introduites par Arnoux et Ito [5]. Elles sont une généralisation multidimensionnelle de la notation classique, où l'action ne se fait non pas sur les lettres d'un mot, mais sur des faces de cube unité dans l'espace. Une propriété remarquable est alors que l'image d'un plan discret par une substitution généralisée reste un plan discret. On peut alors s'intéresser plus particulièrement à ce qu'il se passe lorsque l'on applique des substitutions généralisées à partir d'un sous-ensemble fini d'un plan discret. Il se trouve que l'on obtient ainsi des motifs de taille croissante qui sont des sous-ensembles de plans discrets, phénomène que l'on peut interpréter comme une manière d'engendrer des plans discrets.

On note $[x, i^*]$ un élément du plan discret S avec $x \in \pi_s(\mathbb{Z}^d)$ et i^* désigne la couleur de x . Dans le cas réductible, le nombre de couleur est plus grand que le rang de $\pi_s(\mathbb{Z}^d)$, ce qui cause la différence entre le cas réductible et le cas irréductible. On obtient uniquement un objet abstrait qui est quasi-périodique.

Ensemble de Delone

Définition 60. Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, F est uniformément discret s'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tous $x, y \in F$, $|x - y| > r_0$.

Définition 61. Soit E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, F est relativement dense dans E s'il existe $R_0 > 0$ tel que toute boule de centre $x \in E$ et de rayon $r > R_0$ contient au moins un point de l'intérieur de F .

Définition 62. Un ensemble F est un ensemble Delone de E s'il est uniformément discret et relativement dense dans E .

On définit l'équation fonctionnelle multi-pavage et équation fonctionnelle d'inflation [28].

Soit A une matrice $n \times n$ expansive c'est-à-dire toutes ses valeurs propres sont plus grandes strictement que 1. On note $\{\mathcal{D}_{ij}; 1 \leq i, j \leq d\}$ des sous-ensembles finis de $\mathbb{R}^n$.

Equation fonctionnelle multi-pavage La famille de compacts $(X_1, \dots, X_d)$, $X_i \subset \mathbb{R}^n$, satisfait le système d'équations :

$$AX_i = \bigcup_{j=1}^d (X_j + \mathcal{D}_{ji})$$

pour $1 \leq i \leq d$.

La matrice de subdivision associée est

$$B = [\text{card} \mathcal{D}_{ji}]_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Equation fonctionnelle d'inflation La famille $(Z_1, \dots, Z_d)$, $Z_i \subset \mathbb{R}^n$, satisfait l'équation fonctionnelle d'inflation si elle satisfait le système d'équations :

$$Z_i = \bigcup_{j=1}^d (A(Z_j) + \mathcal{D}_{ij}), \quad 1 \leq i \leq d.$$

On énonce le théorème suivant [28] :

Théorème 3.6. *Soit $(Z_1, \dots, Z_d)$ des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient l'équation fonctionnelle d'inflation qui admet une matrice de subdivision B primitive tel que*

$$\rho(B^T) = |\det A|.$$

S'il existe une famille d'ensemble delone $(Z_1, \dots, Z_d)$ qui est solution de l'équation fonctionnelle d'inflation alors :

- (i) *l'unique compact solution $(X_1, \dots, X_d)$ de l'équation fonctionnelle multi-pavage sont des ensembles X_i qui admettent une mesure de Lebesgue positive.*
- (ii) *$X_i = \overline{X_i^\circ}$.*

On applique le théorème 3.6 aux tuiles du fractal de Rauzy associé à une substitution unimodulaire réductible de type Pisot de matrice d'incidence M . L'action de M^{-1} au sous-espace $\mathbb{H}_c$ est une fonction linéaire, c'est équivalent alors à une $(m-1) \times (m-1)$ matrice réelle ($m = \deg(g)$ avec g est le polynôme minimal de la valeur propre de Perron Frobenius). On note cette matrice par A . Vu que M est une matrice unimodulaire Pisot on obtient que A est une matrice expansive et $|\det A| = \alpha$ la valeur propre de Perron-Frobenius de M . On définit

$$\mathcal{D}_{ji} := \{M^{-1}\pi_s(l(P_k^{(j)})); W_k^{(j)} = i\} \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Les ensembles $\mathcal{D}_{ji}$ sont complètement déterminés par la substitution σ . Alors $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_d$ sont l'unique solution d'une équation fonctionnelle multi-pavage. On remarque que la matrice de subdivision $B = M^T$. Une solution de l'équation fonctionnelle d'inflation est

construit par projection des faces de cube sur l'espace contractant $\mathbb{H}_c$. Soit $(Z_1, \dots, Z_d)$ la famille définie par

$$Z_i := \{\pi(x); [x, i^*] \in S\}.$$

On obtient $(Z_1, \dots, Z_d)$ est solution de l'équation fonctionnelle d'inflation. Ainsi par le théorème 3.6, on aura le théorème suivant [18] :

Théorème 3.7. *Soit σ une substitution unimodulaire Pisot, alors*

- (i) *L'intérieur de $\mathcal{R}(i)$ est non vide.*
- (ii) *$\mathcal{R}(i) = \overline{\mathcal{R}(i)^\circ}$.*

6 Exemples de substitutions de type Pisot

Dans cette section, on va voir quelques exemples de substitutions de type Pisot et leurs fractals de Rauzy associés. Soit σ_1 et σ_2 les deux substitutions de Tribonacci :

$$\sigma_1 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ac \\ c \rightarrow a \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_2 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ca \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

leurs deux fractals de Rauzy associé sont dessiné dans la Figure 6

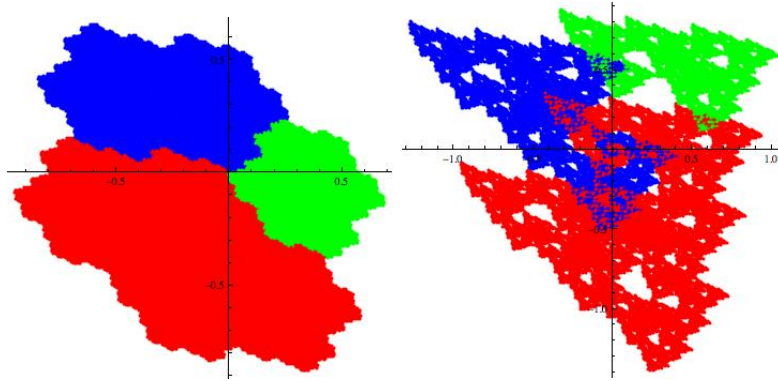


FIGURE 3.6 – Le fractal de Rauzy de σ_1 et σ_2

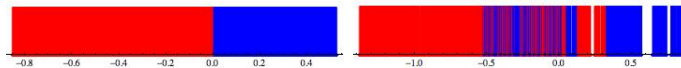


FIGURE 3.7 – Le fractal de Rauzy de τ_1 et τ_2 .

CHAPITRE 3. REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES SYSTÈMES DYNAMIQUES SUBSTITUTIFS

Et on considère aussi les deux substitutions τ_1 et τ_2 sur l'alphabet à deux lettres $\{a, b\}$ défini par :

$$\tau_1 : \begin{cases} a \rightarrow aba \\ b \rightarrow ab \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_2 : \begin{cases} a \rightarrow aab \\ b \rightarrow ba \end{cases}$$

Le fractal de Rauzy de τ_1 et τ_2 sera la projection de la ligne brisée sur une droite contractante.

Les fractals de Rauzy ont plusieurs propriétés : ils sont tous compacts, et autosimilaires. Mais ils ne sont pas tous connexes et non plus simplement connexes. Anne Siegel et Joerg Thuswaldner donnent un critère pour savoir si un fractal de Rauzy est connexe ou pas. Ils donnent d'autres critères pour savoir si un fractal de Rauzy engendre un pavage périodique. Toutes les substitutions testées à ce jour le vérifie. Pour les fractals qui engendrent un pavage périodique, on peut les remonter en cylindre comme le fractal de Rauzy (en remontant chacune des couleurs d'une hauteur donnée). On obtient alors un volume qui, décalé régulièrement, remplit tout l'espace, et fournit donc un pavage périodique de l'espace.

On trouve de nombreuses questions de ouvertes associées aux fractals de Rauzy.

- Théorie ergodique : tous les systèmes substitutifs Pisot unitaires ont-ils un spectre purement discret ?
- Géométrie : Construire des partitions de Markov pour des endomorphismes du tore qui ne sont pas de type Pisot.
- Topologie : Propriétés géométriques des fractals de Rauzy
- Systèmes de numération : exploitation des fractals pour obtenir des informations sur les numérations en base non entière.
- Géométrie discrète et substitutions multi-dimensionnelles : Approximer / reconnaître des plans discrets
- Morphismes de groupes libres [4].

Dans le chapitre suivant, on étudie les propriétés de la frontière du fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci décrit dans les travaux de Ali Messaoudi, et on donne le GIFS associé à la frontière du fractal ce qui nous permet de calculer la dimension de Hausdorff de cette frontière.

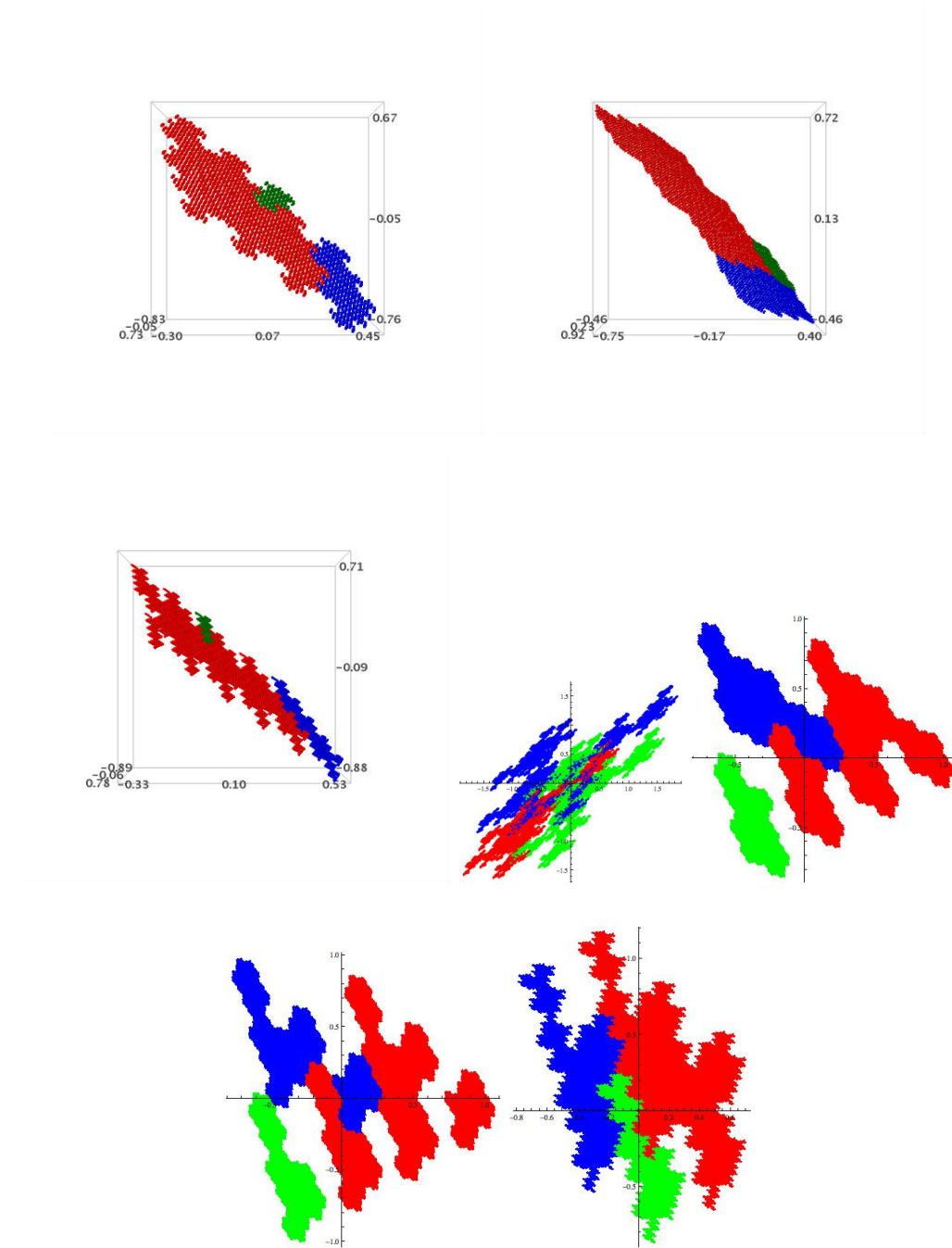


FIGURE 3.8 – Fractals de Rauzy associé à des substitutions de type Pisot.

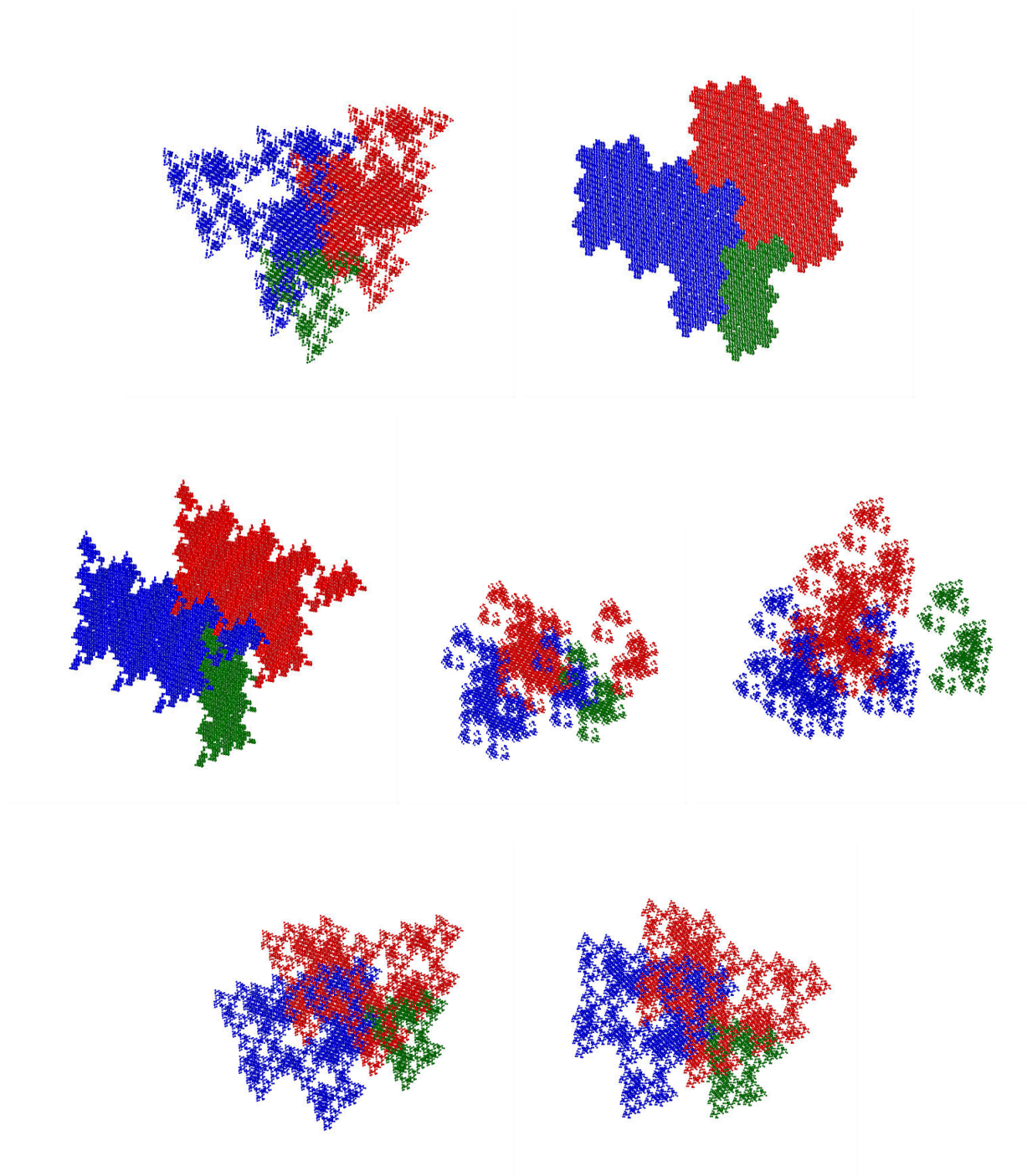


FIGURE 3.9 – Fractals de Rauzy associé à des substitutions de type Pisot de même matrice d'incidence.

Chapitre 4

Frontière du fractal de Rauzy

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés de la frontière du fractal de Rauzy. Le fractal de la substitution de Tribonacci est un compact de $\mathbb{C}$, connexe et il induit un pavage périodique de $\mathbb{C}$. La frontière du fractal de Rauzy a été, au début étudiée par S. Ito et M. Kimura [22]. Ils ont montré que c'est une courbe de Jordan engendrée par la méthode de Dekking pour la construction d'objets fractals. Ensuite, en liant la frontière de $\mathcal{R}$ aux nombres complexes qui ont plusieurs développements en base α avec des chiffres dans $\{0, 1\}$ sans trois 1 consécutifs, il a été construit dans [35] un automate fini qui engendre cette frontière. Dans une première partie de ce chapitre, nous donnons une paramétrisation de la frontière du fractal de Rauzy. Cette paramétrisation est donnée par Ali Messaoudi dans [36]. Cela permet de calculer sa dimension de Hausdorff. Ensuite, on donne une méthode pour caractériser la frontière d'un fractal de Rauzy associé à une substitution Pisot. On donne comme exemple la substitution de Tribonacci modifiée. On définit le GIFS de la frontière associée à une substitution. Ceci nous permet d'obtenir la dimension de Hausdorff de sa frontière.

1 Frontière du fractal de Rauzy

Ali Messaoudi, montre dans sa thèse, que la frontière du fractal de Rauzy, associée à la substitution de Tribonacci, définie par $\sigma(a) = ab, \sigma(b) = ac, \sigma(c) = a$, est l'union de six arcs de la forme $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$ où u appartient à $\{1, \beta, 1 + \beta, -1, -\beta, -1 - \beta\}$ avec β une des deux valeurs propres de la matrice d'incidence de σ qui est plus petite que 1 en module. De plus, si $u \in (\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$ alors $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u) \neq \emptyset$ si et seulement si $u \in \{1, \beta, 1 + \beta, -1, -\beta, -1 - \beta\}$.

Un point de la frontière de $\mathcal{R}$ a au moins deux β -développements, un β -développement provient de $\mathcal{R}$ et l'autre de $\mathcal{R} + u$ où $u \in \{1, \beta, 1 + \beta, -1, -\beta, -1 - \beta\}$. D'autre part, un nombre complexe z ayant au moins deux β -développements distincts peut s'écrire comme $z = \sum_{i=1}^L a_i \beta^i + \beta^N x$ où :

1) $(a_i) \in \mathcal{N}_f = \{(a_i), a_i \in \{0, 1\} \text{ et } a_i a_{i+1} a_{i+2} = 0\}$ est le début commun des deux β -développements de z .

2) N entier relatif choisi de telle manière que $x \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + v)$ où $v \in \{1, \beta, \beta^2, 1 + \beta, 1 + \beta^2, \beta + \beta^2\}$.

Ainsi $x \in Fr(\mathcal{R})$ où $Fr(\mathcal{R})$ désigne la frontière de $\mathcal{R}$.

Par conséquent, le problème de la frontière de $\mathcal{R}$ est équivalent au problème des nombres complexes ayant plusieurs β -développement. Ces nombres complexes sont caractérisés par un automate noté $\mathcal{B}$. L'idée de la construction de l'automate $\mathcal{B}$ est la suivante :

Soient $x = \sum_{i=-L}^{\infty} a_i \beta^i$ et $y = \sum_{i=-L}^{\infty} b_i \beta^i$. Nous avons le théorème donné dans [35] $x = y$ si et seulement si pour tout $k \geq -L$,

$$x(k) - y(k) \in S = \{0, \pm 1, \pm \beta, \pm(1 + \beta), \pm(1 + \beta^2), \pm(\beta + \beta^2), \pm\beta^2\},$$

où $x(k) = \beta^{-k+2} \sum_{i=-L}^k a_i \beta^i$ et $y(k) = \beta^{-k+2} \sum_{i=-L}^k b_i \beta^i$.

Posons pour $k \geq -L$, $A_k = x(k) - y(k)$. Donc

$$A_{k+1} = \frac{A_k}{\beta} + (a_{k+1} - b_{k+1})\beta^2.$$

Soit s le plus petit entier tel que $a_s \neq b_s$. D'où $A_i = 0$ pour tout i dans $\{-L, \dots, s-1\}$. Supposons que $(a_s, b_s) = (1, 0)$. Alors $A_s = \beta^2$. Nous avons

$$A_{s+1} = \beta + (a_{s+1} - b_{s+1})\beta^2 = \begin{cases} \beta + \beta^2 & \text{si } (a_{s+1}, b_{s+1}) = (1, 0) \\ \beta & \text{si } (a_{s+1}, b_{s+1}) = (0, 0) \text{ ou } (1, 1). \end{cases}$$

Nous construisons l'automate $\mathcal{B}$ dont les états sont les éléments de S . Soient V et W deux éléments de S . Nous mettons une flèche étiquetée par $(x, y) \in \{0, 1\}^2$ et allant de V à W si et seulement si $W = \frac{V}{\beta} + (x - y)\beta^2$. Nous prenons 0 pour état initial de l'automate $\mathcal{B}$. C'est l'état où les deux β -développements ne sont pas encore distincts.

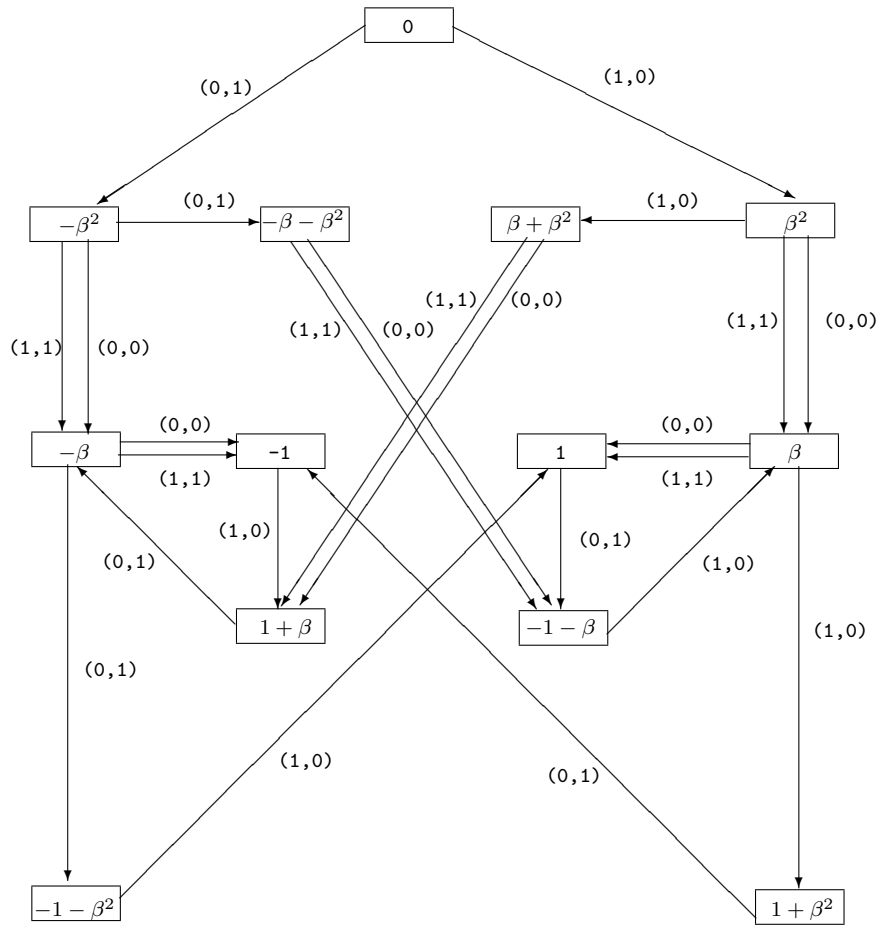
Nous avons le théorème de Ali Messaoudi suivant [36] :

Théorème 4.1. *Soient $(a_i)_{i \geq -L}$ et $(b_i)_{i \geq -L}$ deux éléments distincts de $\mathcal{N}_f$. Alors*

$$\sum_{i=-L}^{\infty} a_i \beta^i = \sum_{i=-L}^{\infty} b_i \beta^i$$

si et seulement si la suite $((a_i, b_i))_{i \geq -L}$ est reconnaissable par l'automate $\mathcal{B}$.

Remarque 4.1. *Il est facile de déterminer les points de la frontière de $\mathcal{R}$ à partir de l'automate des nombres complexes doubles, car un point de la frontière a au moins deux β -développements.*


 FIGURE 4.1 – Automate $\mathcal{B}$.

2 IFS de la frontière

Dans la section précédente, Ali Messaoudi donne une paramétrisation de la frontière du fractal de Rauzy associée à la substitution de Tribonacci. On construit un automate qui engendre cette frontière. Ce qui nous permet de calculer sa dimension de Hausdorff et de montrer que c'est un quasi-cercle.

Comme on l'a déjà vu précédemment, le fractal de Rauzy est solution d'un système de fonctions itérées. Chaque tuile du fractal de Rauzy vérifie l'équation suivante :

$$\mathcal{R}(i) = \bigcup_j \beta \mathcal{R}(j) + t_j = \dots = \bigcup_j \beta^k \mathcal{R}(j) + t_j^k.$$

Les tuiles $\mathcal{R}(a), \mathcal{R}(b), \mathcal{R}(c)$ du fractal de Rauzy associé à la substitution de Tribonacci σ_1 sont solutions d'un système de fonctions itérées donné par :

$$\mathcal{R}(a) = \beta\mathcal{R}(a) + \beta\mathcal{R}(b) + \beta\mathcal{R}(c)$$

$$\mathcal{R}(b) = \beta\mathcal{R}(a) + 1$$

$$\mathcal{R}(c) = \beta\mathcal{R}(b) + 1$$

Pour étudier la frontière, on va commencer par étudier l'intersection des tuiles, puisqu'elles sont disjointes en mesure. On commence par voir l'intersection de la tuile $\mathcal{R}(a)$ avec $\mathcal{R}(b)$ et $\mathcal{R}(c)$.

Par itération des équations précédentes on obtient :

$$\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{R}(c) = \beta(\mathcal{R}(a) \cap \mathcal{R}(b) + \frac{1}{\beta}) + \beta(\mathcal{R}(b) \cap \mathcal{R}(b) + \frac{1}{\beta}).$$

On note : $\Xi(i, j, x) = \mathcal{R}(i) \cap \mathcal{R}(j) + x$, on peut réécrire les intersections précédentes comme suit :

$$\Xi(a, c, 0) = \beta\Xi(a, b, \frac{1}{\beta}) + \beta\Xi(b, b, \frac{1}{\beta}).$$

On note que $\partial\mathcal{R}(a) \supset \Xi(a, b, 0), \Xi(a, c, 0)$.

On a les propriétés suivantes :

- $(\mathcal{R}(i) + x) \cap (\mathcal{R}(j) + y) = (\mathcal{R}(i) \cap \mathcal{R}(j) + y - x) + x = \Xi(i, j, y - x) + x$
- $\Xi(i, j, x) = \mathcal{R}(i) \cap (\mathcal{R}(j) + x) = (\mathcal{R}(i) - x \cap \mathcal{R}(j)) + x = (\mathcal{R}(j) \cap \mathcal{R}(i) - x) + x = \Xi(j, i, -x) + x$

Avec ces ensembles $\Xi(i, j, x)$, on peut construire un graphe dirigé défini par :

- Il existe un chemin $\Xi(i, j, x) \xrightarrow{t} \Xi(k, m, y)$ si on a $\beta(\Xi(k, m, y) + t) \subset \Xi(i, j, x)$.
- Vu que les ensembles $\mathcal{R}(i)$ sont compacts (ce qui implique bornés) alors, il existe $R > 0$ tel que $\Xi(i, j, x) = \emptyset$ pour $|x| > R$.
- Il y a un nombre fini d'ensembles $\Xi(i, j, x)$ qui sont non vides.

2.1 Substitutions de Tribonacci et Tribonacci modifiée

Substitution de Tribonacci

En général, on va obtenir un grand graphe, même après avoir retiré tous les ensembles vides $\Xi(i, j, x)$. Pour le cas de la substitution de Tribonacci, on a 31 ensembles $\Xi(i, j, x)$. On donne ci-dessous le graphe en deux parties contenant les ensembles $\Xi(i, i, 0) = \mathcal{R}(i)$.

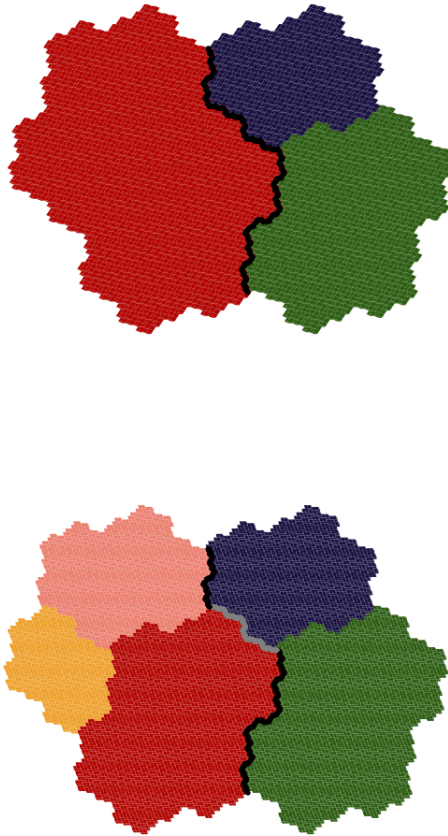
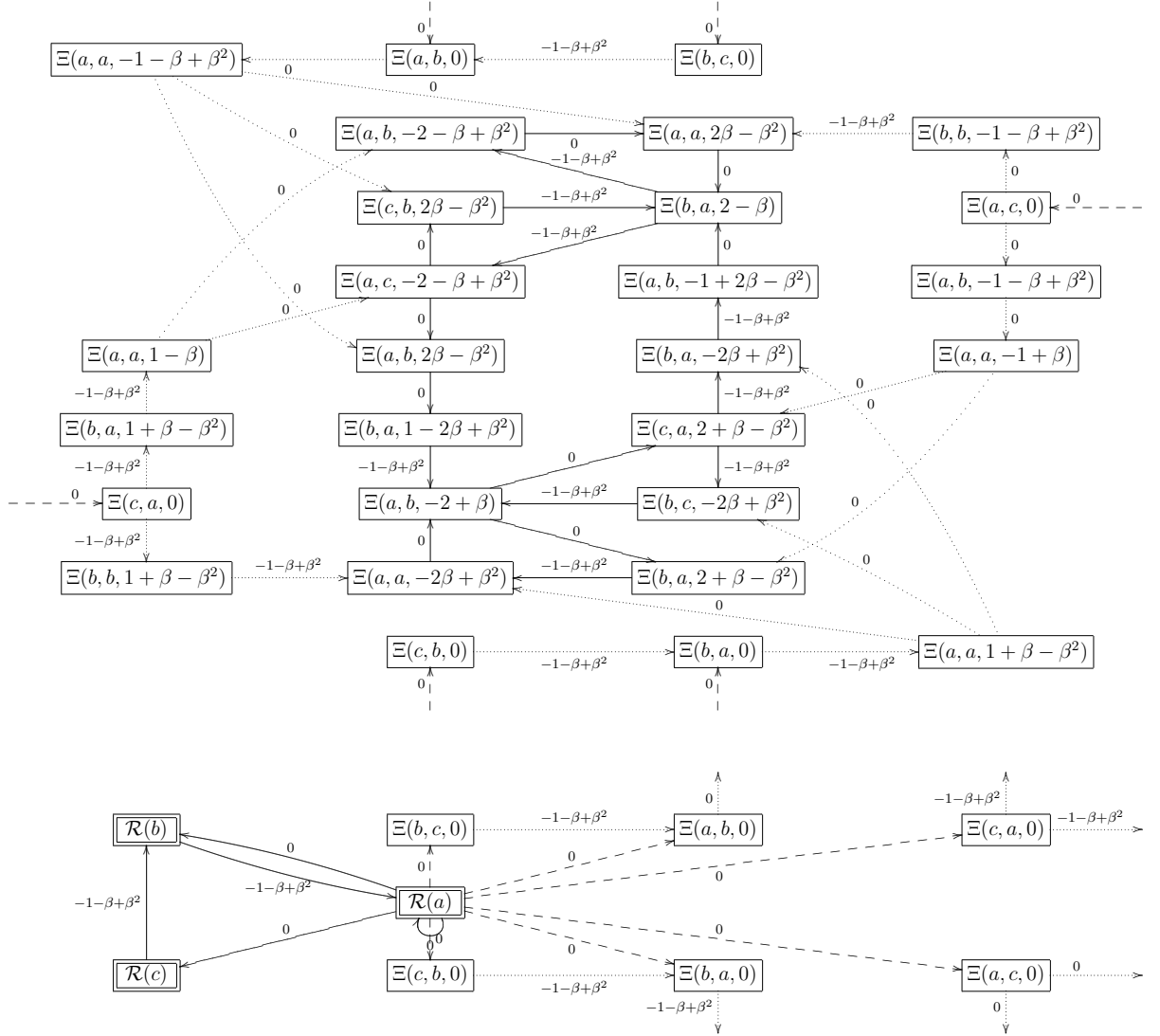
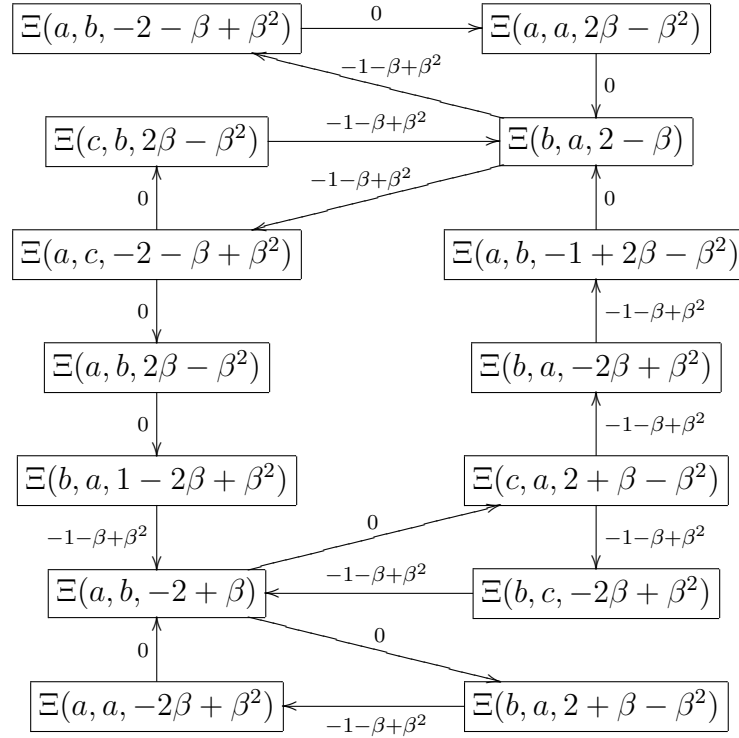


FIGURE 4.2 – Intersection de $\mathcal{R}(a)$ avec $\mathcal{R}(b)$ et $\mathcal{R}(c)$.

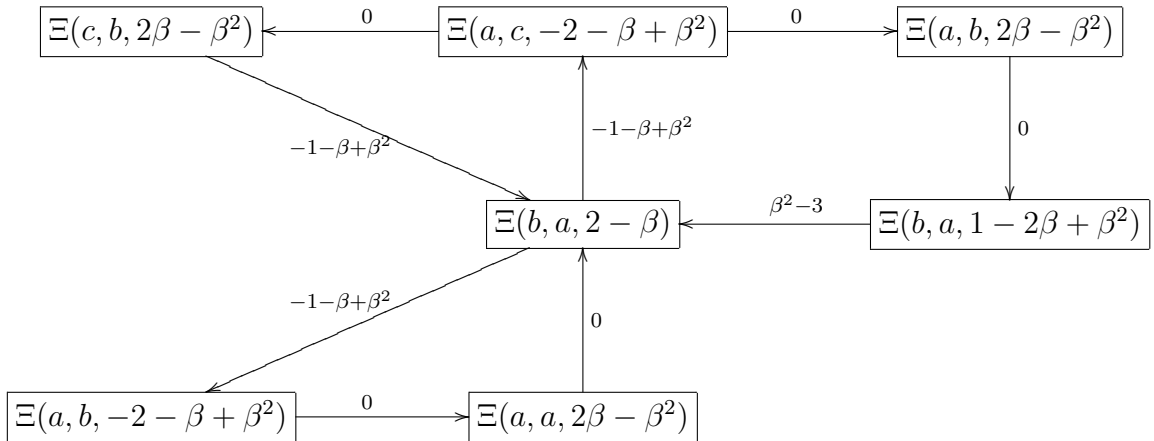


On rappelle qu'on a une arête $\Xi(i, j, x) \xrightarrow{t} \Xi(k, m, y)$ si on a $\beta(\Xi(k, m, y) + t) \subset \Xi(i, j, x)$. Ce graphe nous donne toutes les intersections non vides des ensembles $\mathcal{R}(i)$ et $\mathcal{R}(j)$ obtenus en itérant l'IFS.

Puisque nous sommes intéressés par la frontière, nous éliminons les ensembles $\mathcal{R}(i) = \Xi(i, i, 0)$ (bien sûr la frontière sera un sous-ensemble de ces ensembles). Par ailleurs, nous enlevons tous les sommets qui ont des chemins entrants qui proviennent des tuiles $\mathcal{R}(i)$. Avec cette opération, on obtient un graphe avec 14 sommets et 18 arêtes.



En prenant en considération la symétrie, c'est à dire $\Xi(i, j, x) = \Xi(j, i, -x) + x$, après toutes possibilités de réductions, on obtient pour la substitution de Tribonacci un graphe orienté fortement connexe avec 7 sommets et 9 arêtes.



Ce graphique de sept sommets représente un IFS facile à étudier. Une fois que l'on a sa solution, nous pouvons obtenir tous les ensembles frontières en utilisant des transformations affines. La valeur propre dominante ρ de sa matrice d'adjacence satisfait $X^4 - 2X^2 + 1 = 0$.

Définition 63. Soient $f_1 \dots, f_m$ des contractions de $\mathbb{R}^d$ de rapport de contraction $r_1, \dots, r_m$

et K l'unique compact qui vérifie

$$K = f_1(K) \cup \dots \cup f_m(K).$$

On dit que les contractions f_i vérifient la condition des ensembles ouverts (en anglais open set condition OSC) s'il existe un ouvert non vide $V \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\bigcup_{i=1}^d f_i(V) \subset V \quad \text{et} \quad f_i(V) \cap f_j(V) = \emptyset \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

Dans le cas des fractals de Rauzy, l'IFS est très particulier et il vérifie la propriété des ensembles ouverts. On a le théorème suivant [19].

Théorème 4.2. *Soit σ une substitution unimodulaire irréductible de type Pisot. Alors l'IFS associé au fractal de Rauzy de σ vérifie la condition des ensembles ouverts.*

On pourra calculer la dimension de Hausdorff, en utilisant le théorème suivant énoncé dans [26] section 8.3, théorème 8.6 et [31] exemple 4.

Théorème 4.3. *Soient $f_1, \dots, f_m$ des similitudes de $\mathbb{R}^d$ de rapport de contraction $r_1, \dots, r_m$ et A l'unique ensemble compact solution de cet IFS. On suppose que les fonctions f_i vérifient la condition des ensembles ouverts. La dimension de Hausdorff noté s de A vérifie la relation suivante :*

$$\sum_{j=1}^m r_j^s = 1.$$

Démonstration. Pour la preuve, voir [26] section 8.3.

□

Dans le cas des fractals de Rauzy, Jun Luo et Ya-Min Yang [30] montrent le théorème suivant :

Théorème 4.4. *Soit A une matrice $k \times k$ expansive de déterminant α associé à un IFS de solution E_i qui vérifient la condition des ensembles ouverts on a*

$$s = \dim_H(E_i) = k \frac{\ln(\rho)}{\ln(\alpha)}$$

où ρ désigne la valeur propre dominante de la matrice du graphe associé à l'IFS. (dans le cas d'une substitution unimodulaire de type Pisot, α correspond à la valeur propre dominante de la matrice de la substitution et $k = m - 1$ avec m le degré du polynôme minimale de la valeur propre dominante de la matrice de la substitution).

Démonstration. Voir [30] théorème 1.2.

□

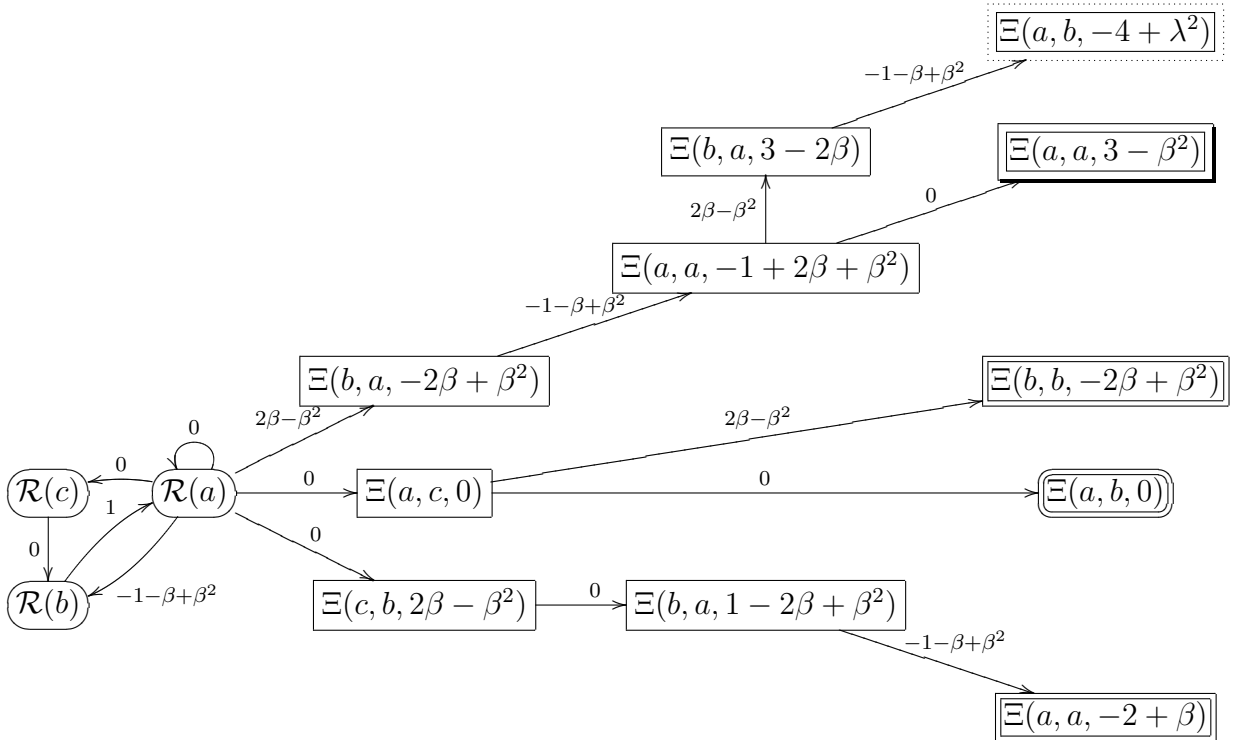
Ainsi la dimension de Hausdorff de la frontière du fractal de Tribonacci est $2 \log(\rho) / \log(\alpha) \approx 1.09$.

Tribonacci modifiée

Pour la substitution σ_2 de Tribonacci modifiée, le graphe de la frontière d'origine est constitué de 117 arêtes et 69 sommets dont 3 sommets représentent $\Xi(i, i, 0)$. En prenant la symétrie en considération, on obtient un graphe avec $33 + 3$ sommets. On donne ce graphe en 3 parties. Une première partie avec les ensembles $\mathcal{R}(i)$. Si l'on enlève ceux-ci, nous aurons un graphe orienté avec 27 sommets et 45 arêtes, composé de 10 composantes fortement connexes réparties comme suit.

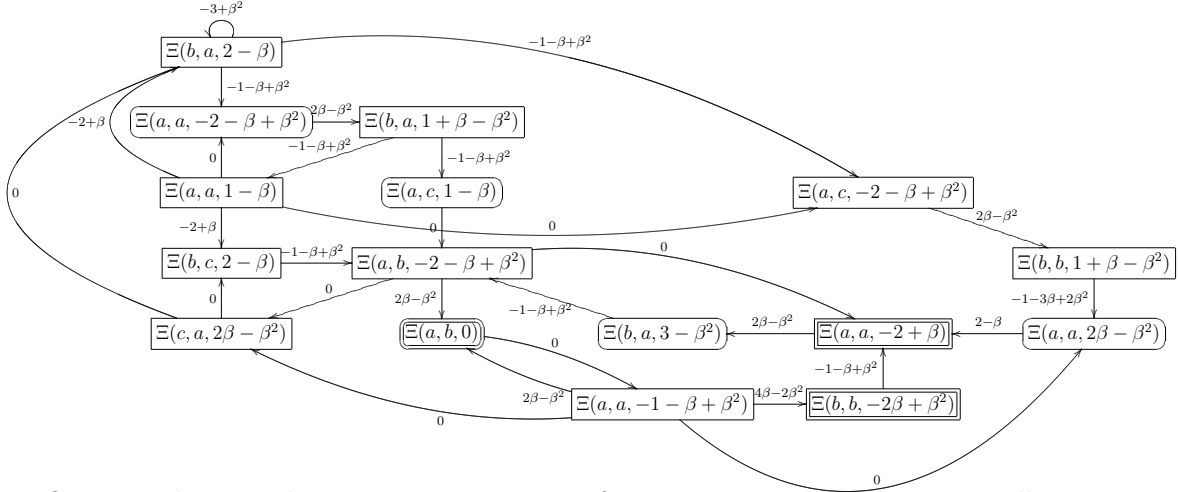
- Une est un triangle (un graphe possédant 3 sommets et 3 arêtes) avec aucun chemin qui le quitte. L'ensemble dans ce triangle est réduit à un seul point.
- 8 composantes consistent uniquement en un seul sommet et conduisent au triangle. Ces ensembles sont donc également réduits à des singletons.
- Les 16 autres sommets forment un sous-graphe fortement connexe avec 28 arêtes. La valeur propre dominante ρ de la matrice d'adjacence satisfait $X^6 - X^5 - X^4 - X^2 + X - 1 = 0$. Ce qui nous donne une dimension de Hausdorff pour la frontière $2 \log(\rho) / \log(\alpha) \approx 1.79$.

Dans cette première figure, les sommets qui appartiennent à l'une de ces 10 composantes fortement connexes ont un cadre double (les 5 sommets vers la droite).

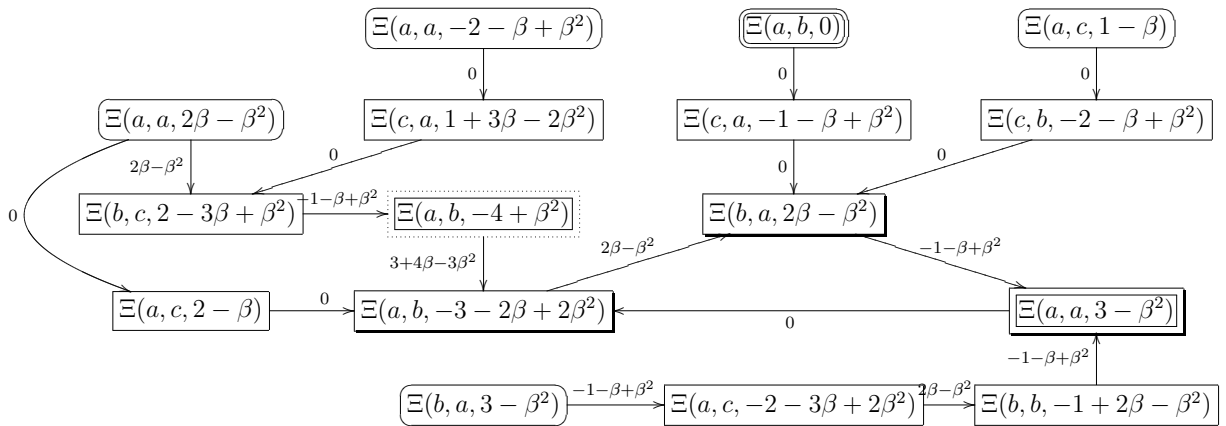


La principale composante fortement connexe est un graphe avec 16 sommets et 28 arêtes. Encore une fois, les sommets avec un cadre double admettent des arêtes qui viennent des ensembles $\mathcal{R}(i)$ (peut-être par l'intermédiaire d'autres sommets de transition) - voir l'image précédente. Les sommets dans un cadre arrondi ont des arêtes sortantes de l'une des 9 autres composantes fortement connexes. Notez que cette composante principale for-

tement connexe n'a pas d'arête entrante provenant de ces autres composantes fortement connexes. Pour déterminer la frontière et sa dimension, il serait suffisant d'étudier cette composante. Cependant, pour obtenir tous les points qui appartiennent à un ensemble d'intersection $\Xi(i, j, x)$, on doit prendre le terme de condensation dans l'IFS en compte (sinon, on obtient seulement un sous-ensemble de $\Xi(i, j, x)$). Les ensembles avec le terme de condensation sont mis dans un cadre arrondi.



Enfin, nous donnons les autres composantes fortement connexes, comment elles sont connectées à la composante principale fortement connexe (les cinq ensembles dans des boîtes arrondies, ou double arrondie). Une de ces dernières est un triangle avec aucun chemin sortant (boîtes avec l'ombre). On peut le considérer comme un singleton. Les 8 composantes restantes se composent uniquement d'un seul sommet et ne conduisent qu'au triangle. Ces ensembles sont donc également des singletons. Ainsi, ces ensembles singletons induisent de la condensation dans l'IFS pour la frontière. On obtient d'autres points isolés, c'est-à-dire, la solution de l'IFS pour la frontière n'est plus une famille d'ensembles parfaits.



2.2 Condensation

Problème : En général, le graphe ne sera pas fortement connexe. En effet, pour la substitution de Tribonacci modifiée, nous sommes dans cette situation. Il y a des chemins de la composante principale fortement connexe (avec 16 sommets) vers le triangle.

Définition 64. On dit que l'IFS est à condensation si l'IFS vérifie l'équation suivante :

$$\Xi(i, j, x) = \left(\bigcup_{p,q,t,s} \beta(\Xi(p, q, t) + s) \right) \cup K_i,$$

où K_i est une constante.

Pour la substitution de Tribonacci modifiée nous avons un IFS avec un terme de condensation K_i :

$$\Xi(i, j, x) = \left(\bigcup_{p,q,t,s} \beta(\Xi(p, q, t) + s) \right) \cup K_i,$$

on a ajouté une nouvelle constante K_i à l'équation. Dans le cas habituel on obtient une solution parfaite de l'IFS (ici sans le terme de condensation). Maintenant ce n'est plus le cas, nous ajoutons les conditions de condensation. L'ensemble $\Xi(i, j, x)$ peut maintenant contenir des points isolés. Par exemple, pour la substitution de Tribonacci modifiée, on remarque que pour les deux tuiles a et c translatées par le vecteur $1 - \beta$, on obtient une frontière qui contient des points isolés, ces points isolés appartiennent à d'autres tuiles. Ce qui implique un changement de la dimension de la frontière si on considère cette intersection. Ceci est illustré par $\Xi(a, c, 1 - \beta)$ dans le cas de Tribonacci flippé.

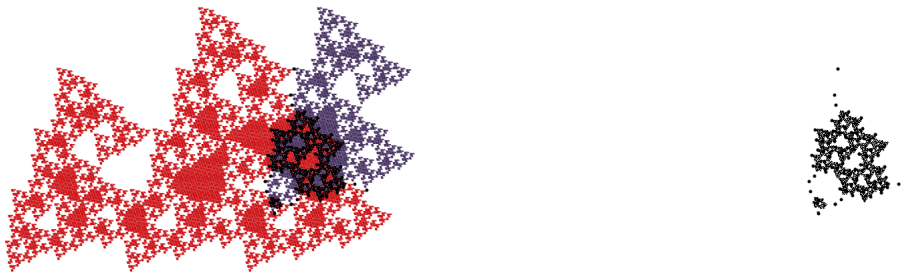


FIGURE 4.3 – Influence du terme condensation.

Chapitre 5

Automates produits

Dans ce chapitre, nous étudions des sous-systèmes à deux substitutions de même abélianisé, décrits dans un premier travail dû à Victor Sirvent "The common dynamics of the Tribonacci substitutions" [53], et un second travail écrit par Bernd Sing et Victor Sirvent, "Geometry of the common dynamics of flipped Pisot substitutions", [54]. On y définit une suite d'automates produits associée aux puissances de deux substitutions de même abélianisé, qui décrivent une suite de sous-systèmes $\mathcal{F}_n$ communs aux deux systèmes considérés, avec la propriété que $\mathcal{F}_n$ est contenu dans $\mathcal{F}_p$ si n divise p .

Il s'agit de comprendre ces sous-systèmes communs, d'un point de vue arithmétique (caractérisation arithmétique des points obtenus, en terme de développement dans une base adaptée), et combinatoire; il doit être possible de caractériser ces points comme certains éléments communs aux deux lignes brisées correspondants à deux points fixes des substitutions respectives.

Une telle caractérisation permettrait de mieux comprendre la nature de la suite de sous-ensembles obtenus.

Dans ce chapitre, on étudie les points communs aux deux lignes brisées associées aux deux substitutions σ_1 et σ_2 irréductibles de type Pisot ayant la même matrice d'incidence.

Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions de même matrice d'incidence. Tous les points fixes communs à σ_1 et σ_2 admettent la même fréquence des lettres, mais ils ont des propriétés géométriques différentes. Un exemple classique de substitutions avec la même matrice d'incidence est donné par les deux substitutions de Tribonacci et de Tribonacci modifié :

$$\sigma_1 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ac \\ c \rightarrow a \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_2 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ca \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

La matrice d'incidence de σ_1 et σ_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La valeur propre dominante vérifie l'équation suivante : $X^3 - X^2 - X - 1 = 0$.

Le fractal de Rauzy de la première substitution est simplement connexe [5], tandis que le second fractal de Rauzy est non simplement connexe.

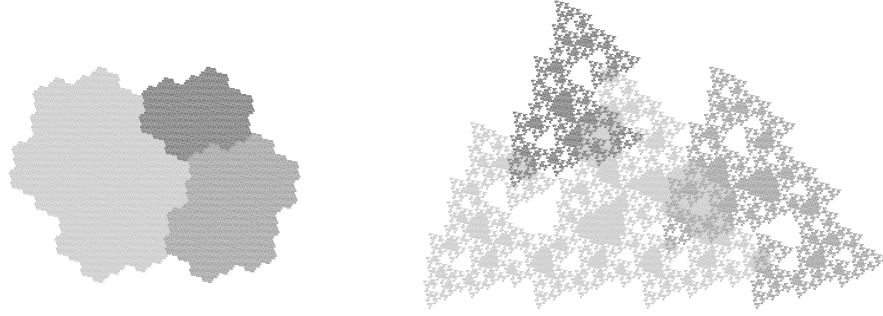


FIGURE 5.1 – Le fractal de Rauzy de σ_1 et σ_2

On considère un autre exemple de substitutions τ_1 et τ_2 de même matrice d'incidence défini par :

$$\tau_1 : \begin{cases} a \rightarrow aba \\ b \rightarrow ab \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_2 : \begin{cases} a \rightarrow aab \\ b \rightarrow ba \end{cases}$$

Le fractal de Rauzy de τ_1 est un intervalle, par contre celui de la substitution τ_2 est la clôture d'une union dénombrable d'intervalles disjoints [29].

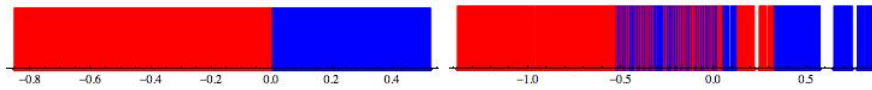


FIGURE 5.2 – Fractals de Rauzy de τ_1 et τ_2 .

À partir d'une matrice, on peut obtenir plusieurs substitutions donc plusieurs fractals de Rauzy différents. On s'est intéressé à l'étude de la dynamique commune des fractals de Rauzy qui admettent la même matrice d'incidence.

L'idée est de définir un automate appelé automate produit des préfixes. Cet automate est défini à partir de l'automate des préfixes de deux substitutions σ_1 et σ_2 unitaires irréductibles Pisot ayant la même matrice d'incidence. Cet automate produit nous permet d'obtenir des points communs des deux points fixes associés aux deux substitutions σ_1 et

σ_2 . Une caractérisation géométrique de ces points nous permet d'obtenir un sous-ensemble commun aux deux fractals de Rauzy de σ_1 et σ_2 . En considérant les puissances des deux substitutions, σ_1^k et σ_2^k , on obtient des sous-ensembles de points communs des deux fractals de Rauzy. Cette dynamique commune a été, au début, étudiée par Victor Sirvent pour le cas des deux substitutions de Tribonacci et en considérant l'automate produit pour $k = 1$ [55]. Dans [54], Bernd Sing et Victor Sirvent étendent le résultat dans le cas de deux substitutions de même matrice d'incidence. Les ensembles obtenus par Sing et Sirvent sont des sous-ensembles des points communs des deux fractals de Rauzy. Plus on prend des puissances de la matrice, plus on obtient de points en communs, mais ces sous-ensembles sont tous de densité nulle (condition donnée par le système de numération).

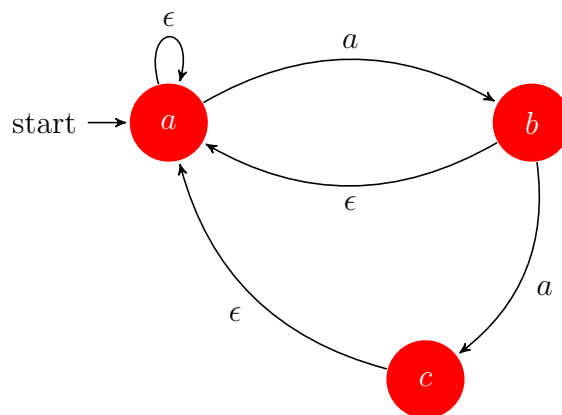
1 Automates des préfixes

On rappelle la définition de l'automate des préfixes donnée dans le Chapitre 2

Définition 65. On définit l'automate des préfixes d'une substitution donnée σ comme suit :

- Ensemble d'états : L'alphabet $\mathcal{A}$.
- Ensemble d'étiquettes : $Pref = \{\text{les préfixes propre de } \sigma(i), i \in \mathcal{A}\}$, On note ϵ le mot vide.
- Transition : Si p et q sont deux états de l'automate et $\mathcal{W}$ est un mot de $Pref$ alors il existe une transition entre p et q étiquetée par $\mathcal{W}$ si et seulement si le mot $\mathcal{W}q$ est un préfixe de $\sigma(p)$.

On peut voir les deux automates des préfixes $\mathcal{U}_1^{trib}$ et $\mathcal{U}_2^{trib}$ associés aux deux substitutions de Tribonacci σ_1 et σ_2 .



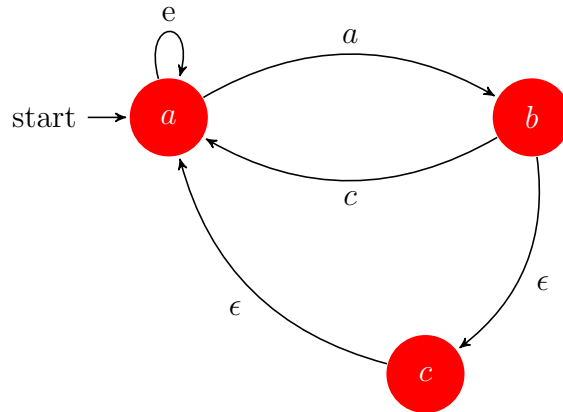
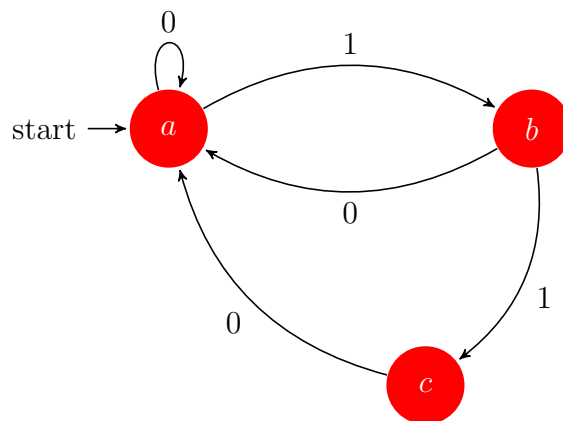


FIGURE 5.3 – Automates des préfixes de la substitution de Tribonacci et de Tribonacci modifiée σ_2 .

On modifie un peu ces automates en utilisant la fonction f définie par $f : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(w_1, \dots, w_k) = v_{w_1} + \dots + v_{w_k}$ avec $v = (v_i)_{i \in \mathcal{A}}$ le vecteur propre de Perron Frobenius associé à la valeur propre dominante α , qui sera normalisé.

On pose $f(Pref) = \{f(w) \mid w \in Pref\}$ comme ensemble d'étiquettes. On remarque que $f(w) = l(w).v$ où $l(w)$ désigne la fonction abélianisation de w . Ceci implique que pour les substitutions Pisot on a $f(w) = f(w')$ si et seulement si $l(w) = l(w')$.



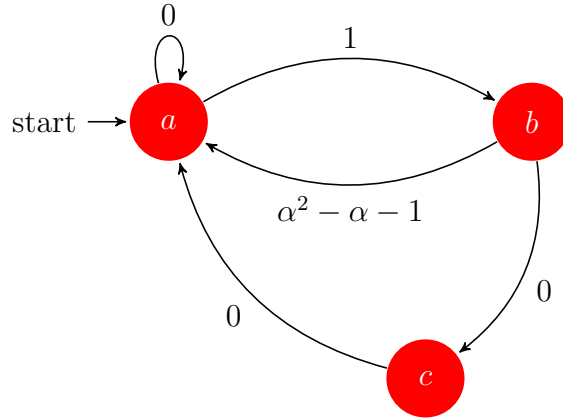


FIGURE 5.4 – Automates des préfixes modifiés des deux substitutions de Tribonacci σ_1 et σ_2 .

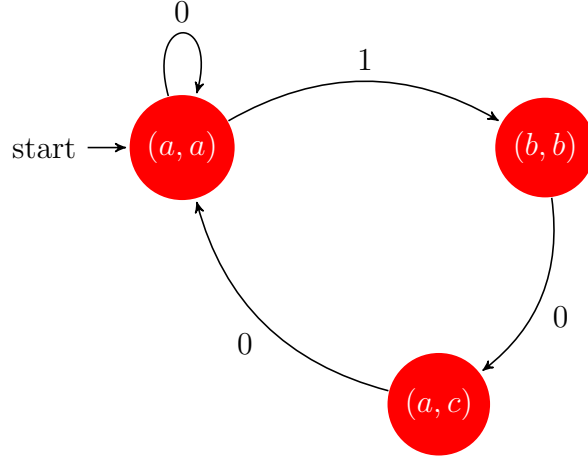
2 Automates produits

On définit l'automate produit comme suit :

Définition 66. Soient $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux automates préfixes. L'automate produit $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ est défini par :

- Ensemble d'états : $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.
- Ensemble d'étiquettes : $\mathcal{W}$ est une étiquette de $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ si et seulement si $\mathcal{W}$ est une étiquette de $\mathcal{U}_1$ et il existe une étiquette $\mathcal{W}'$ de $\mathcal{U}_2$ tel que $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ ont même abélianisé.
- Transition : $\mathcal{W}$ est une transition entre (p_1, q_1) et (p_2, q_2) si et seulement si $\mathcal{W}$ est une transition entre p_1 et p_2 et entre q_1 et q_2 .

On peut voir l'automate produit des deux substitutions de Tribonacci dans la figure suivante :



$$\mathcal{U}_1^{trib} \times \mathcal{U}_2^{trib}$$

FIGURE 5.5 – La partie accessible de l’automate produit de la substitution de Tribonacci

2.1 La réalisation géométrique de l’automate produit :

Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions différentes unimodulaires de type Pisot irréductibles et ayant la même matrice d’incidence. On définit $\mathcal{U}_i(k)$ l’automate des préfixes de $(\sigma_i)^k$ pour $k \geq 1$, et $(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)(k)$ l’automate produit de $\mathcal{U}_1(k)$ et $\mathcal{U}_2(k)$. Soit

$$\mathcal{F}(k) = \{\pi_s(Pref(u)) \mid u = u_0 u_1 \dots u_n \in (\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)(k), \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

L’ensemble $\mathcal{F}(k)$ est la projection d’un mot infini correspondant à un chemin infini dans l’automate produit des préfixes. Cet ensemble donne certains des points communs des deux fractals de Rauzy associés à σ_1 et σ_2 respectivement. L’ensemble $\mathcal{F}(k)$ est appelé la réalisation géométrique de la dynamique commune d’ordre k des deux substitutions σ_1 et σ_2 .

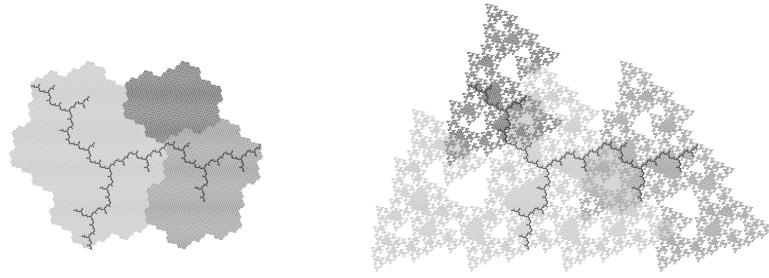
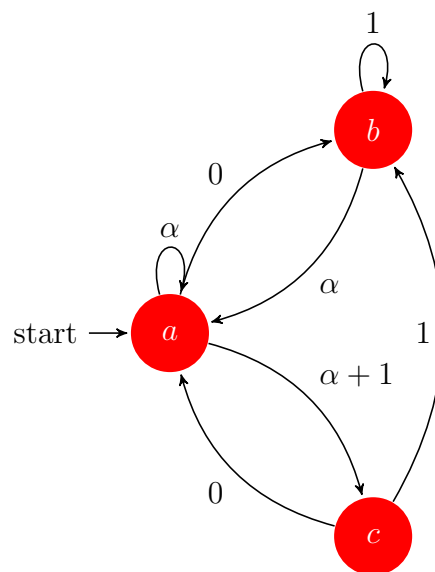
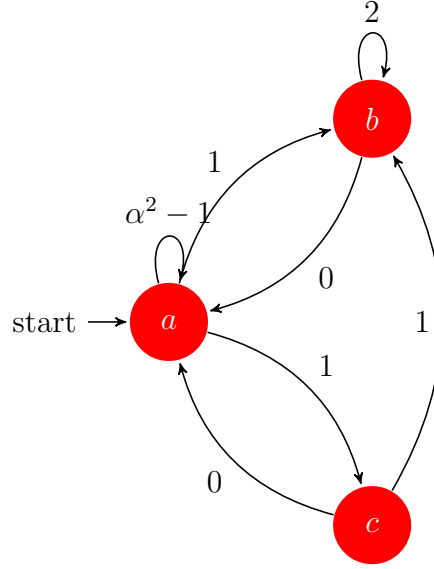
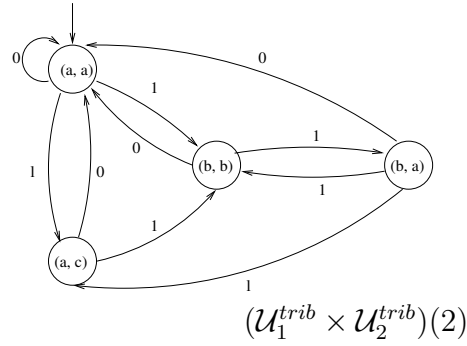


FIGURE 5.6 – La réalisation géométrique $\mathcal{F}(1)$



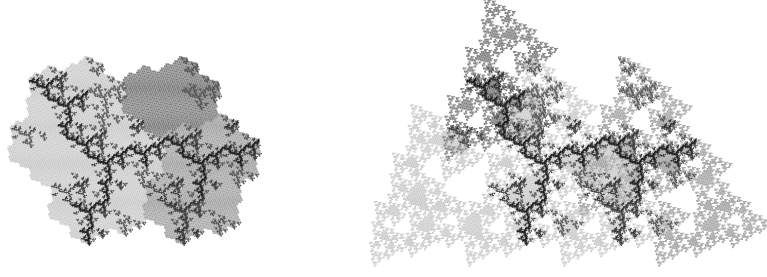

 FIGURE 5.7 – Automate des préfixes des deux substitutions σ_1^2 et σ_2^2 .

 FIGURE 5.8 – L'automate produit des deux substitutions σ_1^2 et σ_2^2 .

On a le théorème suivant donné dans [54]

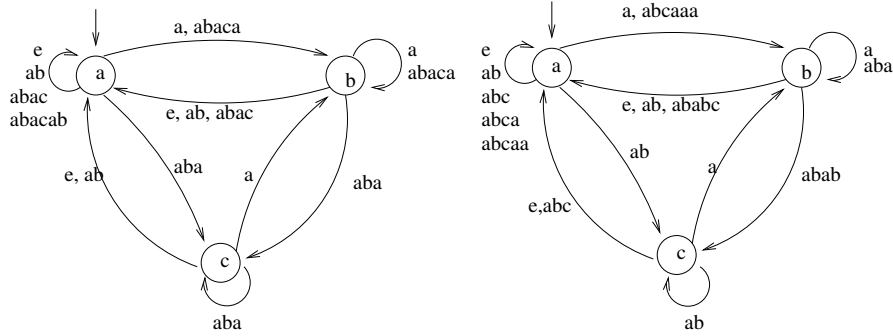
Théorème 5.1. *Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions unimodulaires de type Pisot différentes et admettant la même matrice d'incidence alors : $\mathcal{F}(k) \subset \mathcal{F}(m)$ si k divise m .*

Démonstration. Il suffit de montrer que chaque chemin dans l'automate produit $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2(k)$ se retrouve dans l'automate produit $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2(m)$. Soit $q = \frac{m}{k}$ et on définit la fonction $f_q^k(a_q, \dots, a_1) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_q^k(a_q, \dots, a_1) = \lambda^{(q-1)k} a_q + \dots + \lambda^{2k} a_3 + \lambda^k a_2 + a_1.$$

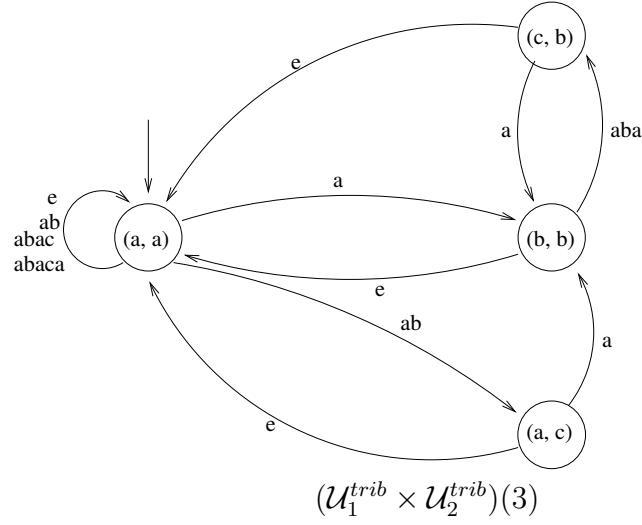

 FIGURE 5.9 – La réalisation géométrique de $\mathcal{F}(1)$, $\mathcal{F}(2)$ et $\mathcal{F}(3)$.

Si $w = \dots a_q a_{q-1} \dots a_1 a_0$ est un chemin dans $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2(k)$ alors on a un chemin $w' = \dots f_q^k(a_{2q-1} \dots a_q) f_q^k(a_{q-1} \dots a_0)$ dans $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2(m)$. Mais ceci résulte de la construction : on rappelle qu'un chemin dans l'automate produit correspond à un chemin avec les mêmes étiquettes dans les deux automates des préfixes, si on compare l'automate $\mathcal{U}(1)$ de la substitution σ avec l'automate $\mathcal{U}(q)$ de σ^q l'ensemble des états reste le même, le nombre de transitions de i à j dans $\mathcal{U}(q)$ est le nombre de chemins de i à j de longueur q , et les étiquettes dans $\mathcal{U}(q)$ peuvent être dérivées de celles de $\mathcal{U}(1)$ en appliquant f_q^1 au chemin correspondant de longueur q ; mais alors à tout chemin w commun à $\mathcal{U}_1(k)$ et $\mathcal{U}_2(k)$ correspond un chemin w' comme ci-dessus dans $\mathcal{U}_1(m)$ et $\mathcal{U}_2(m)$ et donc appartenant à l'automate produit $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2(m)$. $\square$


 FIGURE 5.10 – Automates des préfixes des deux substitutions σ_1^3 et σ_2^3 .

Théorème 5.2. Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions unimodulaires Pisot irréductibles de même matrice d'incidence. Soit ρ le rayon spectral de la matrice adjacence de $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2(k)$. Si $\rho < \alpha^k$ alors l'ensemble $\mathcal{F}(k)$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration. Voir [54]. $\square$


 FIGURE 5.11 – l'automate produit des deux substitutions σ_1^3 et σ_2^3 .

Sing et Sirvent trouvent des sous-ensembles de l'intersection de deux fractals de Rauzy qui sont de mesure nulle. Or, on peut montrer que sous la condition que 0 est un point intérieur à l'un des deux fractals de Rauzy [46], l'intersection de ces deux derniers est de mesure de Lebesgue positive. Dans le chapitre suivant, on donne une caractérisation de cet ensemble qui est de mesure positive et on montre que cet ensemble est substitutif.

Chapitre 6

Substitution des points communs

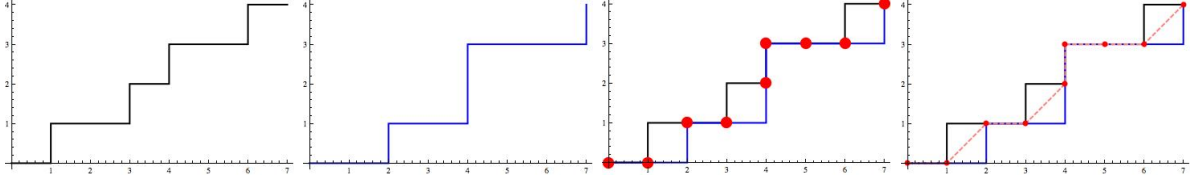
Dans le chapitre précédent, à l'aide des automates produits des préfixes, on a obtenu des sous-ensembles de l'intersection de deux fractals de Rauzy, ces sous-ensembles sont tous de mesure nulle. Mais dans le cas où 0 est un point intérieur à l'un des deux fractals de Rauzy, on peut montrer que l'intersection des deux fractals de Rauzy est de mesure positive. Dans ce chapitre, nous caractérisons les points communs de deux lignes brisées associées à deux substitutions σ_1 et σ_2 irréductibles unimodulaires de type Pisot ayant la même matrice d'incidence. On montre que si σ_1 vérifie la conjecture Pisot et 0 est un point intérieur à son fractal de Rauzy alors ces points communs peuvent être engendrés par une substitution. Cette substitution est appelée substitution des points communs. Elle est déduite à partir d'un algorithme appelé algorithme des paires équilibrées. On obtient ainsi l'intersection des intérieurs de deux fractals de Rauzy associés à deux substitutions unimodulaires irréductibles de type Pisot.

L'objectif majeur de ce chapitre est de caractériser complètement cette intersection d'un point de vue combinatoire. Comme elle est de mesure positive, on peut étudier le système induit, qui donne une dynamique commune aux deux substitutions.

L'idée pour caractériser l'intersection de deux fractals de Rauzy de même matrice d'incidence est de caractériser l'intersection des deux lignes brisées associées aux deux points fixes u et v de σ_1 et σ_2 respectivement. On obtient ainsi une nouvelle ligne brisée, qui joint les points communs des deux points fixes u et v . On montre que cette nouvelle ligne brisée obtenue à partir de l'intersection est associée à un point fixe d'une nouvelle substitution, qui est la substitution des points communs.

On rappelle la Définition 1 d'ensemble substitutif :

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^d$ est dit substitutif si et seulement si il existe une substitution primitive Σ sur n lettres, de matrice d'incidence M et une décomposition $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ invariante par M où E est de dimension d tel que la restriction de M à E soit une contraction stricte et S est l'image par un isomorphisme linéaire de E dans $\mathbb{R}^d$ de la clôture de la projection de l'abélianisé d'un point fixe de Σ sur E selon F .


 FIGURE 6.1 – Lignes brisées de τ_1 et τ_2 et la ligne intersection.

On montre dans ce chapitre que l'adhérence de l'intersection des intérieurs de deux fractals de Rauzy associés à deux substitutions Pisot irréductibles unimodulaires de même matrice d'incidence est un ensemble substitutif.

1 Intersection de mesure positive

Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions Pisot irréductibles unimodulaires ayant la même matrice d'incidence. On note $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ leurs fractals de Rauzy associés respectivement. L'intersection de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ est un compact non vide puisqu'elle contient 0.

Proposition 6.1. *On considère $\mathcal{E}$ la clôture de l'intersection des intérieurs de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$. Alors la frontière de $\mathcal{E}$ est incluse dans l'union des deux frontières de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ et a une mesure nulle.*

Démonstration. Soit x un point de la frontière de $\mathcal{E}$. On suppose que x n'est pas sur la frontière de $\mathcal{R}_1$. Alors il existe un rayon $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset \mathcal{R}_1$. Si x n'est pas un point de la frontière de $\mathcal{R}_2$ alors il existe de même un rayon $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_2) \subset \mathcal{R}_2$. Alors pour $r = \min(r_1, r_2)$ on obtient $B(x, r) \subset \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Or x est un point de la frontière de $\mathcal{E}$ donc c'est absurde. Ainsi $\partial\mathcal{E} \subset \partial\mathcal{R}_1 \cup \partial\mathcal{R}_2$.

Vu que $\partial\mathcal{R}_1$ et $\partial\mathcal{R}_2$ sont de mesure nulle alors $\partial\mathcal{E}$ est de mesure nulle. $\square$

Lemme 6.1. *On suppose que 0 est un point intérieur de $\mathcal{R}_1$. Alors l'ensemble $\mathcal{E}$ est d'intérieur non vide et admet une mesure de Lebesgue strictement positive.*

Démonstration. 0 est un point intérieur à $\mathcal{R}_1$, il existe alors un ouvert U tel que $0 \in U \subset \mathcal{R}_1$. Le fractal de Rauzy est la clôture de son intérieur et 0 est un point de $\mathcal{R}_2$, donc il existe une suite de points (x_n) de l'intérieur de $\mathcal{R}_2$ qui converge vers 0. Alors il existe une suite d'ouverts V_n tel que $x_n \in V_n \subset \mathcal{R}_2$. Comme (x_n) converge vers 0, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, x_n \in U$. On pose $W = U \cap V_n$, W est non vide et $W \subset \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Ainsi $\mathcal{E}$ contient un ouvert non vide, donc sa mesure de Lebesgue est non nulle. $\square$

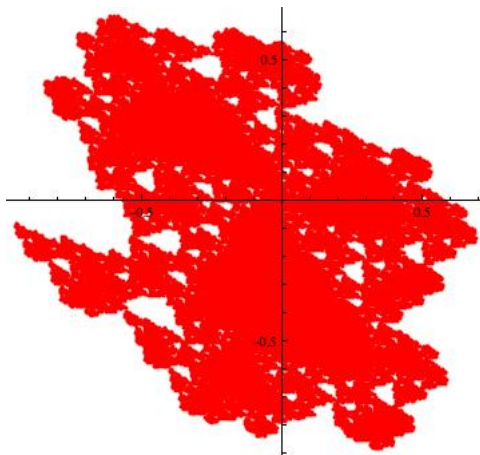


FIGURE 6.2 – L'ensemble des points communs des deux fractals de Tribonacci et Tribonacci modifié.

2 Substitution des points communs

Dans cette section on considère deux substitutions σ_1 et σ_2 unimodulaires irréductibles de type Pisot. On note $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ leurs deux fractals de Rauzy respectifs. On suppose que la substitution σ_1 vérifie la conjecture Pisot et que 0 est un point intérieur à $\mathcal{R}_1$.

On note $\mathcal{E}$ l'adhérence de l'intersection de l'intérieur de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$. On considère (Ω_{σ_1}, S) et (Ω_{σ_2}, S) les deux systèmes dynamiques symboliques associés aux deux points fixes de σ_1 et σ_2 . La projection de la ligne brisée associée à un point fixe u d'une substitution unimodulaire irréductible de type Pisot, peut être vue comme une application de l'orbite $\{S^n(u)\}$ dans le fractal de Rauzy. Cette fonction peut s'étendre par continuité à une fonction $\pi : \Omega_u \rightarrow \mathcal{R}_1$ de la façon suivante : si $v \in \Omega_u$ alors $v = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{n_k}u$. On pose $\pi(v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_s(S^{n_k}u)$.

On note π_1 (resp. π_2) la projection du système dynamique symbolique (Ω_{σ_1}, S) (resp. (Ω_{σ_2}, S)) dans le fractal de Rauzy $\mathcal{R}_1$ (resp. $\mathcal{R}_2$).

On va prouver que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un ensemble substitutif, et qu'il peut être engendré par une nouvelle substitution appelée morphisme des points communs ou bien substitution des paires équilibrées.

On a besoin d'introduire une nouvelle définition :

Définition 67. Soit (X, T) un système dynamique, si A est sous-ensemble de X , et $x \in A$, on définit le premier temps de retour $n_x = \inf\{n \in \mathbb{N}^* / T^n(x) \in A\}$ (il est infini si l'orbite de x ne revient pas dans A).

Définition 68. En géométrie, un domaine fondamental pour l'action d'un groupe sur un ensemble E est une région de E dont les images par l'action du groupe forment une partition de E .

Lemme 6.2. *On suppose que la substitution σ_1 vérifie la conjecture Pisot et 0 est un point intérieur à son fractal de Rauzy $\mathcal{R}_1$. Soit W un ouvert non vide de $\mathcal{E}$. On considère $V_1 = \pi_1^{-1}(W) \subset \Omega_{\sigma_1}$ et $V_2 = \pi_2^{-1}(W) \subset \Omega_{\sigma_2}$ respectivement. Alors pour tout $y \in W$, tel que $y = \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)$, chaque temps de retour de v_2 dans V_2 est un temps de retour de v_1 dans V_1 .*

Démonstration. On considère $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$ tels que $\pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)$. Soit n un temps de retour de v_2 dans V_2 .

Par définition :

$$\pi_1(S^n v_1) = \pi_1(v_1) - \pi_s(l(P_n))$$

où P_n est un préfixe de longueur n de v_1 . De même, on a $\pi_2(S^n v_2) = \pi_2(v_2) - \pi_s(l(P'_n))$, avec P'_n est un préfixe de longueur n de v_2 . On obtient donc $\pi_1(S^n v_1) = \pi_2(S^n v_2) + \pi_s[l(P_n) - l(P'_n)]$. Cela veut dire qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$\pi_1(S^n v_1) = \pi_2(S^n v_2) + \pi_s(\gamma).$$

Par hypothèse, on a $S^n(v_2) \in V_2$ et $\pi_2(S^n v_2)$ est un point intérieur à $\mathcal{R}$. Cela implique que $\pi_2(S^n v_2)$ est un point intérieur à $\mathcal{R}_1$. De plus $\pi_1(S^n v_1) \in \mathcal{R}_1$, et $\mathcal{R}_1$ est un domaine fondamental, c'est-à-dire que $\mathcal{R}_1$ n'intersecte pas $\mathcal{R}_1 + \pi_s(w)$, ce qui implique $\pi_s(w) = 0$. On obtient donc $\pi_1(S^n v_1) = \pi_2(S^n v_2)$. Ainsi si n est un premier temps de retour à V_2 alors n est un temps de retour à V_1 .

Remarque 6.1. *Sous les hypothèse du lemme précédent, si $\pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)$ alors il existe U et V préfixes respectifs de u et v tel que $l(U) = l(V)$.*

□

Définition 69. *Soit U et V deux mots finis, on dit que $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ est un bloc équilibré (ou bien une paire équilibrée) si $l(U) = l(V)$, où l est la fonction abélianisée de $\mathcal{A}^*$ dans $\mathbb{Z}^d$.*

Définition 70. *Un bloc équilibré est dit minimal si pour tout préfixe U_k et V_k de U et V respectivement, $l(U_k) \neq l(V_k)$.*

Définition 71. *La concaténation de deux paires équilibrées $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est la paire équilibrée $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ définit par :*

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U.X \\ V.Y \end{pmatrix}$$

Lemme 6.3. *Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions unimodulaires irréductibles Pisot ayant la même matrice d'incidence. Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ leurs deux fractals de Rauzy associés respectivement. On suppose que σ_1 vérifie la conjecture Pisot et que 0 est un point intérieur à*

$\mathcal{R}_1$. On considère u et v les deux points fixes associés à σ_1 et σ_2 respectivement. Il existe un ensemble fini E de paires équilibrées $E = \left\{ \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} U_p \\ V_p \end{pmatrix} \right\}$, tel que la double paire $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ peut être représentée comme concaténation avec des éléments de E .

Démonstration. Par définition $\pi_1(u) = \pi_2(v) = 0$. On considère l'ouvert $\pi_2^{-1}(\mathcal{E}) \subset \Omega_{\sigma_2}$. Vu que (Ω_{σ_2}, S) est un système minimal, alors tout point admet un temps de retour à $\pi_2^{-1}(\mathcal{E})$. Il existe une constante qui borne tous les temps de retour à $\pi_2^{-1}(\mathcal{E})$.

Soit n_1 le premier temps de retour, du lemme précédent, n_1 est un temps de retour de u à $\pi_1^{-1}(\mathcal{E})$, ce qui implique que $S^{n_1}(u) \in \pi_1^{-1}(\mathcal{E})$. On obtient donc deux préfixes U et V de u et v respectivement tel que $l(U) = l(V)$. Donc il y a une première paire équilibrée $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

Le même argument montre qu'il existe une suite infinie de temps de retour commun à l'intersection telle que la différence entre deux temps de retour consécutifs est bornée. Donc la paire $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ peut être décomposée avec des paires équilibrées minimales de longueur bornée.

On peut décomposer la première paire équilibrée obtenue $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ avec des paires équilibrées minimales. Vu que les deux mots U et V ont des longueurs bornées, alors les paires minimales obtenues après décomposition sont finies et de longueur bornée.

□

Théorème 6.1. Soient σ_1 et σ_2 deux substitutions unimodulaires irréductibles de type Pisot avec la même matrice d'incidence. Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ leurs deux fractals de Rauzy associées respectivement. On suppose que σ_1 vérifie la conjecture Pisot et que 0 est un point intérieur à $\mathcal{R}_1$. On considère $\mathcal{E}$ l'adhérence de l'intersection des intérieurs de $\mathcal{R}_1$ et de $\mathcal{R}_2$. Alors $\mathcal{E}$ est d'intérieur non vide et $\mathcal{E}$ est un ensemble substitutif associé à une substitution Σ sur l'alphabet des paires équilibrées minimales.

Démonstration. On doit montrer que ces points communs sont la projection d'un point fixe d'une nouvelle substitution définie sur l'ensemble des paires équilibrées minimales. On donne un algorithme pour obtenir cette nouvelle substitution. Par le lemme précédent, on peut avoir deux préfixes W_1 et W_2 de u et v tel que $l(W_1) = l(W_2)$. On peut décomposer la paire équilibrée $\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$ avec des paires équilibrées minimales. Soit $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ la première paire équilibrée minimale. Alors $\begin{pmatrix} \sigma_1(v_1) \\ \sigma_2(v_2) \end{pmatrix}$ est encore une paire équilibrée vu que σ_1 et σ_2 ont la même matrice d'incidence. On décompose cette nouvelle paire équilibrée avec des paires équilibrées minimales. C'est-à-dire on peut écrire $\begin{pmatrix} \sigma_1(v_1) \\ \sigma_2(v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \cdots u_k \\ w_1 \cdots w_k \end{pmatrix}$ avec

$\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_k \\ w_k \end{pmatrix}$ des paires équilibrées minimales.

Vu que les temps de retours communs sont bornés, par itération avec σ_1 et σ_2 on obtient après un temps fini l'ensemble de toutes les paires équilibrées minimales. On définit la substitution Σ sur l'ensemble des paires équilibrées minimales définies par :

$$\Sigma : \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_1(U) \\ \sigma_2(V) \end{pmatrix}.$$

Le point fixe de la substitution Σ caractérise tous les points communs des deux points fixes des deux substitutions initiales. En prenant la clôture de la projection de la ligne brisée associée au point fixe de Σ sur l'espace contractant de la matrice d'incidence de σ_1 , on obtient les points communs de l'intérieur des deux fractals de Rauzy associé à σ_1 et σ_2 respectivement. $\square$

Définition 72. *La substitution Σ est appelée substitution intersection ou bien substitution des paires équilibrées.*

Lemme 6.4. *La substitution Σ est une substitution de type Pisot.*

Démonstration. Soit α la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice d'incidence de σ_1 . Soient u et v les deux points fixes de σ_1 et σ_2 respectivement. On considère la double paire $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, le point fixe de Σ qui commence par la lettre A , et la première paire équilibrée minimale.

On peut définir deux longueurs pour un préfixe de la double paire $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Une longueur suivant l'alphabet E des paires équilibrées minimales, on la note $|\cdot|_E$. La deuxième longueur est suivant l'alphabet initial $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ des deux substitutions, on le note $|\cdot|_{\mathcal{A}}$.

Soit N la longueur maximale des paires équilibrées, et $c = \frac{1}{N}$, on obtient donc

$$c|\Sigma^n(A)|_{\mathcal{A}} \leq |\Sigma^n(A)|_E \leq |\Sigma^n(A)|_{\mathcal{A}}$$

La longueur $|\Sigma^n(A)|_{\mathcal{A}}$ augmente exponentiellement, en prenant le logarithme on obtient :

$$\frac{\ln c}{n} + \frac{\ln |\Sigma^n(A)|_{\mathcal{A}}}{n} \leq \frac{\ln |\Sigma^n(A)|_E}{n} \leq \frac{\ln |\Sigma^n(A)|_{\mathcal{A}}}{n}$$

On sait que $|\Sigma^n(A)|_{\mathcal{A}} = |\sigma_1^n(a_1)| = |\sigma_2^n(a_2)|$ et $\frac{|\sigma_1^{n+1}(a_1)|}{|\sigma_1^n(a_1)|}$ converge vers α voir [44].

On prend la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\Sigma^n(a)|_E}{n} = \alpha$$

où α est la valeur propre de Perron Frobenius de la matrice d'incidence de σ_1 . On conclut que Σ est une substitution de type Pisot. $\square$

Remarque 6.2. *On remarque que Σ est réductible dans la plupart des cas étudié.*

3 Algorithme pour obtenir la substitution Σ et exemples

3.1 Algorithme

Pour obtenir la substitution intersection Σ qui engendre les points communs des deux lignes brisées associées à deux substitutions unimodulaires irréductibles Pisot de même matrice d'incidence on peut définir un algorithme qui permet d'obtenir tous les points en commun des deux points fixes de σ_1 et σ_2 . Au début, on prend les deux points fixes u et v des deux substitutions σ_1 et σ_2 respectivement.

Soit $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ la première paire équilibrée minimale. Cette paire équilibrée minimale existe d'après la Remarque 6.1.

Dans le cas où les deux points fixes commencent par la même lettre a , on obtient la première paire équilibrée $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$. Sinon il existe une paire équilibrée minimale d'après Remarque 6.1. On considère cette première paire équilibrée et on la note $A = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ avec $l(U_1) = l(U_2)$. On itère avec les deux substitutions σ_1 et σ_2 .

Donc à l'étape 1 de l'algorithme, l'ensemble E contient la première paire équilibrée minimale.

On itère la première paire équilibrée avec les deux substitutions σ_1 et σ_2 , c'est à dire

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1(U) \\ \sigma_2(V) \end{pmatrix}.$$

Les deux substitutions σ_1 et σ_2 ont la même matrice d'incidence alors la paire $\begin{pmatrix} \sigma_1(U) \\ \sigma_2(V) \end{pmatrix}$ est encore une paire équilibrée. On décompose cette nouvelle paire équilibrée avec des paires équilibrées minimales, et on obtient des nouvelles paires équilibrées minimales qu'on ajoute dans l'ensemble des paires équilibrées minimales E . Dans cette deuxième étape, E contient la première paire équilibrée et d'autres paires équilibrées minimales différentes de la première. On prend chacune des nouvelles paires équilibrées et on applique les deux substitutions σ_1 et σ_2 , de manière à faire apparaître des nouvelles paires équilibrées minimales.

On itère avec le même algorithme à chaque apparition de nouvelles paires équilibrées minimales. Après un nombre fini d'itérations il n'y a plus de nouvelles paires équilibrées

minimales, on obtient toutes les paires équilibrées minimales dans E . On associe pour chaque paire équilibrée minimale une lettre majuscule de l'alphabet. On prend l'image de chaque paire équilibrée minimale. La substitution Σ est définie par :

$$\Sigma : \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sigma_1(U) \\ \sigma_2(V) \end{pmatrix}.$$

3.2 Examples

Example 1

On définit les deux substitutions τ_1 and τ_2 sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$:

$$\tau_1 : \begin{cases} a \rightarrow aba \\ b \rightarrow ab \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_2 : \begin{cases} a \rightarrow aab \\ b \rightarrow ba \end{cases}$$

Les deux points fixes de τ_1 et τ_2 sont u et v définis par :

$$u = abaababaabaababaababaababaabaab \dots$$

$$v = aabaabbbaaabaabbbaaabaabaabbbaaabaab \dots$$

La première paire équilibrée est $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$. L'ensemble E ne contient que cette paire. On note A cette première paire équilibrée. On prend l'image de A avec les deux substitutions τ_1 et τ_2 , on obtient :

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tau_1(a) \\ \tau_2(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aba \\ aab \end{pmatrix}.$$

On obtient de nouveau une paire équilibrée $\begin{pmatrix} aba \\ aab \end{pmatrix}$ qu'on peut décomposer en deux paires équilibrées minimales $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} ba \\ ab \end{pmatrix}$. L'ensemble E contient alors une nouvelle paire équilibrée minimale E contient $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ba \\ ab \end{pmatrix} \right\}$. On note B la deuxième paire minimale obtenue, on obtient donc

$$A \rightarrow AB.$$

On itère de nouveau avec la nouvelle paire équilibrée minimale B , on obtient :

$$\begin{pmatrix} ba \\ ab \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tau_1(ba) \\ \tau_2(ab) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ababa \\ aabba \end{pmatrix}.$$

On obtient de nouveau une paire équilibrée $\begin{pmatrix} abaab \\ baaab \end{pmatrix}$ qu'on peut décomposer en 4 paires équilibrées minimales : $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ba \\ ab \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$. On aura une nouvelle paire équilibrée minimale $\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ qu'on note C , on obtient donc

$$B \rightarrow ABCA.$$

Pour l'ensemble E contient $\{\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ba \\ ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}\}$ on recommence de même avec la lettre C :

$$\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tau_1(b) \\ \tau_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ ba \end{pmatrix}.$$

On note D la nouvelle paire équilibrée minimale obtenue, on a donc :

$$C \rightarrow D$$

On itère de nouveau avec la lettre D et on obtient :

$$\begin{pmatrix} ab \\ ba \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tau_1(ab) \\ \tau_2(ba) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abaab \\ baaab \end{pmatrix}.$$

À cette étape, toutes les paires équilibrées minimales apparaissent, on obtient enfin l'image de la lettre D :

$$D \rightarrow DAAC.$$

L'ensemble $E = \{\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ba \\ ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab \\ ba \end{pmatrix}\}$.

On obtient ainsi la substitution Σ définie sur l'ensemble des paires équilibrées minimales :

$$\Sigma : \begin{cases} A \rightarrow AB \\ B \rightarrow ABCA \\ C \rightarrow D \\ D \rightarrow DAAC \end{cases}$$

On considère la projection θ des lettres A, B, C, D sur l'ensemble des paires équilibrées minimales $E = \{\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ba \\ ab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ab \\ ba \end{pmatrix}\}$.

On obtient : $\begin{pmatrix} \tau_1^n(a) \\ \tau_2^n(a) \end{pmatrix} = \theta(\Sigma^n(A))$.

Le morphisme Σ engendre tous les points communs des deux fractals de Rauzy.

Le polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de τ_1 est $x^2 - 3x + 1$. Le polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de Σ est $(x - 1)(x + 1)(x^2 - 3x + 1)$.

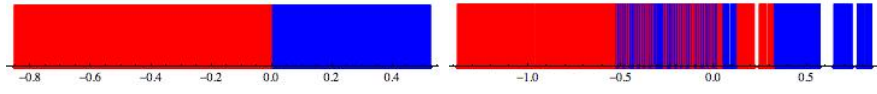


FIGURE 6.3 – Fractals de Rauzy de τ_1 et τ_2 .

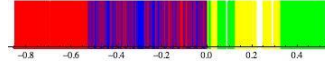


FIGURE 6.4 – Ensemble des points communs de τ_1 and τ_2 suivant la substitution Σ

Exemple Tribonacci :

Pour les deux substitutions de Tribonacci et Tribonacci modifiée c'est encore plus compliqué, on obtient une substitution sur 11 lettres qui est définie de la façon suivante :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow AB \\ B \rightarrow C \\ C \rightarrow AD \\ D \rightarrow AE \\ E \rightarrow F \\ F \rightarrow ADDGA \\ G \rightarrow AH \\ H \rightarrow ID \\ I \rightarrow ADJ \\ J \rightarrow AHK \\ K \rightarrow IDGA \end{array} \right.$$

On considère la projection π des lettres $A, B, C, D, E, F, G, H, K$ sur l'ensemble des paires équilibrées minimales suivantes :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \\ B \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \\ C \rightarrow \begin{pmatrix} ac \\ ca \end{pmatrix} \\ D \rightarrow \begin{pmatrix} ba \\ ab \end{pmatrix} \\ E \rightarrow \begin{pmatrix} cab \\ bca \end{pmatrix} \\ F \rightarrow \begin{pmatrix} aabac \\ caaab \end{pmatrix} \\ G \rightarrow \begin{pmatrix} cab \\ abc \end{pmatrix} \\ H \rightarrow \begin{pmatrix} abac \\ bcaa \end{pmatrix} \\ I \rightarrow \begin{pmatrix} abaca \\ caaab \end{pmatrix} \\ J \rightarrow \begin{pmatrix} cabaab \\ ababca \end{pmatrix} \\ K \rightarrow \begin{pmatrix} ababac \\ bcaaab \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

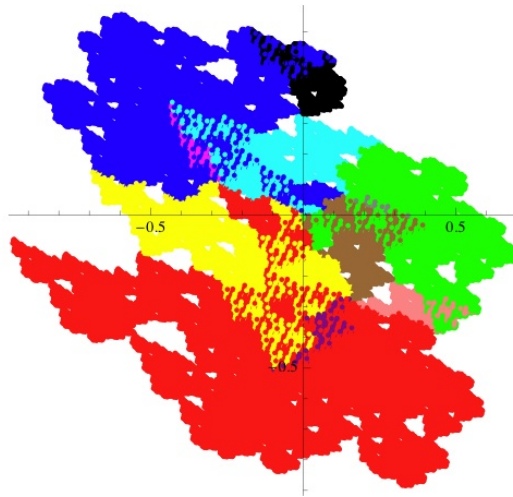


FIGURE 6.5 – Fractal associé à l'intersection des deux substitutions de Tribonacci.

Corollaire 6.1. *Soient σ_1 et σ_2 les deux substitutions de Tribonacci et Tribonacci modifiée.*

On considère u et v les deux points fixes associés à σ_1 et σ_2 respectivement. Alors la lettre c n'apparaît pas dans la même position dans u et v .

Démonstration. L'ensemble des paires équilibrées forment une décomposition des deux points fixes u et v associés aux deux substitutions de Tribonacci σ_1 et σ_2 . Vu que dans toutes les paires équilibrées minimales, la lettre c n'apparaît pas dans la même position, alors la lettre c ne va jamais apparaître le long des deux points fixes u et v .

□

Famille d'exemple

Maintenant on va considérer une famille d'exemples plus généraux qui garde la même structure de substitution commune.

$$\delta_i^1 : \begin{cases} a \rightarrow a^i b \\ b \rightarrow a^{i-1} c \\ c \rightarrow a \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta_i^2 : \begin{cases} a \rightarrow a b a^{i-1} \\ b \rightarrow a c a^{i-2} \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

Les deux substitutions δ_i^1 et δ_i^2 ont la même matrice d'incidence. Pour tout $i \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$, ces substitutions sont de type Pisot, leur polynôme caractéristique est de la forme : $x^3 - ix^2 - (i-1)x - 1$. On peut toujours définir une substitution pour les points communs sur un alphabet de 6 lettres.

La substitution Φ_i est définie par :

$$\Phi_i : \begin{cases} A \rightarrow AB \\ B \rightarrow AC \\ C \rightarrow (AAD)^{i-1} [AAE(AAD)^i]^{i-2} AAE(AAD)^{i-1} A \\ D \rightarrow AF \\ E \rightarrow (AAD)^{i-3} A \\ F \rightarrow (AAD)^{i-1} [AAE(AAD)^i]^{i-3} AAE(AAD)^{i-1} A. \end{cases}$$

Les lettres A, B, C, D, E, F se projettent sur l'ensemble des paires équilibrées minimales avec la projection π_i définie par :

$$\pi_i : \begin{cases} A \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \\ B \rightarrow \begin{pmatrix} a^{i-1}b \\ ba^{i-1} \end{pmatrix} \\ C \rightarrow \begin{pmatrix} a^{i-1}b(a^ib)^{i-2}a^{i-1}c \\ ca^{i-1}(ba^i)^{i-2}ba^{i-1} \end{pmatrix} \\ D \rightarrow \begin{pmatrix} a^{i-2}b \\ ba^{i-2} \end{pmatrix} \\ E \rightarrow \begin{pmatrix} a^{i-3}c \\ ca^{i-3} \end{pmatrix} \\ F \rightarrow \begin{pmatrix} a^{i-1}b(a^ib)^{i-3}a^{i-1}c \\ ca^{i-1}(ba^i)^{i-3}ba^{i-1} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de la substitution des points communs vérifie l'équation suivante : $(x^3 - ix^2 - (i-1)x - 1)(x^3 + (i-1)x^2 + ix - 1)$.

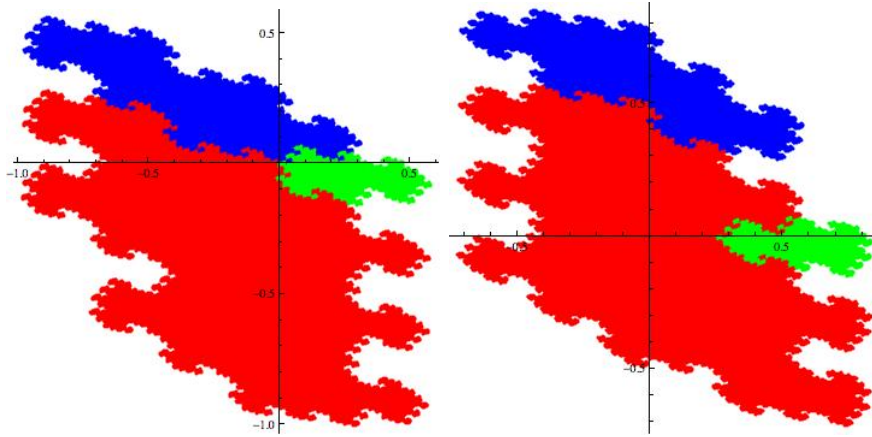


FIGURE 6.6 – Les deux fractals de Rauzy de δ_3^1 et δ_3^2 .

Intersection réduite à un point

La condition 0 est un point intérieur à l'un des deux fractals de Rauzy est une condition nécessaire. On peut trouver des exemples où l'intersection est réduite à l'origine.

On considère les deux substitutions χ_1 et χ_2 définies par (voir Figure 6.10) :

$$\chi_1 : \begin{cases} a \rightarrow aab \\ b \rightarrow ab \end{cases} \quad \chi_2 : \begin{cases} a \rightarrow baa \\ b \rightarrow ba \end{cases}$$

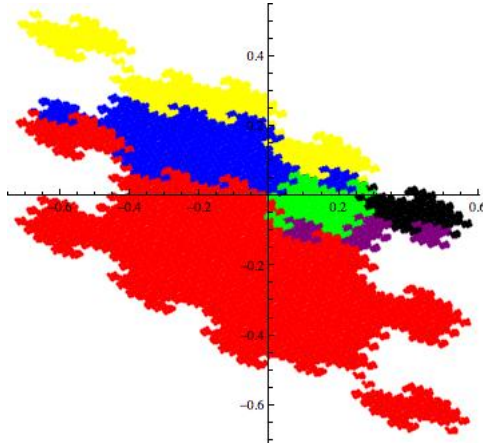


FIGURE 6.7 – Ensemble des points communs de δ_3^1 et δ_3^2 .

Remarque 6.3. *On a caractérisé dans ce chapitre la clôture de l'intersection des intérieurs de deux fractals de Rauzy associés à deux substitutions unimodulaires irréductibles de même matrice d'incidence. On montre que la clôture de l'intersection de leurs intérieurs est un ensemble substitutif. Mais on ne sait pas si l'intersection de deux fractals de Rauzy reste toujours substitutive. Le problème qui se pose est le suivant : est ce que l'intersection de deux fractals de Rauzy est égale à la clôture de l'intersection de leurs intérieurs. Il est clair que la différence entre ces deux ensembles est de mesure de Lebesgue égale à 0.*

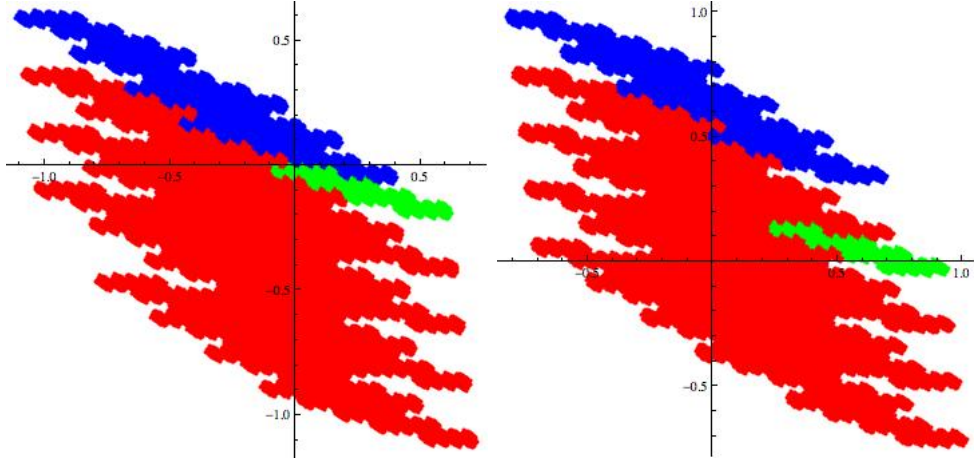


FIGURE 6.8 – Les deux fractals de Rauzy de δ_4^1 et δ_4^2 .

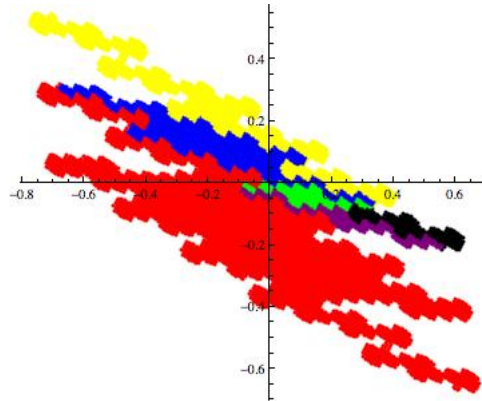


FIGURE 6.9 – Ensemble des points communs de δ_4^1 et δ_4^2 .

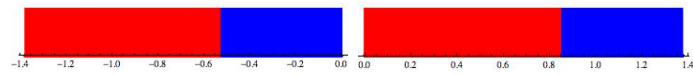


FIGURE 6.10 – Fractals de Rauzy χ_1 et χ_2 .

Chapitre 7

Annexe : Frontière du fractal intersection de Tribonacci

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la frontière du fractal intersection des deux fractals de Rauzy associés aux deux substitutions de Tribonacci et Tribonacci modifiée.

$$\sigma_1 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ac \\ c \rightarrow a \end{cases} \quad \text{and} \quad \sigma_2 : \begin{cases} a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ca \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

La substitution associée au fractal intersection est définie sur un alphabet de 11 lettres.

$$\phi : \begin{cases} A \rightarrow AB \\ B \rightarrow C \\ C \rightarrow AD \\ D \rightarrow AE \\ E \rightarrow F \\ F \rightarrow ADDGA \\ G \rightarrow AH \\ H \rightarrow ID \\ I \rightarrow ADJ \\ J \rightarrow AHK \\ K \rightarrow IDGA \end{cases}$$

On s'intéresse dans ce chapitre à la frontière de l'intersection de ces deux fractals de Tribonacci. Il est clair que la frontière est incluse dans l'union des deux frontières des deux fractals initiaux. On s'intéresse alors à comprendre la structure de la frontière intersection. Une des questions qui se pose est : est-ce que cette frontière obtenue admet une dimension de Hausdorff uniforme, c'est-à-dire est-ce que elle est partout la même, ou bien varie-t-elle d'un morceau à un autre ?

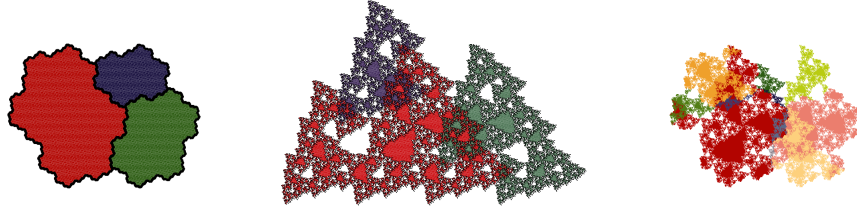


FIGURE 7.1 – Fractals de Rauzy de σ_1 et σ_2 et leur fractal intersection.

La frontière du fractal de Tribonacci a une dimension de Hausdorff égale à $1,09\dots$, par contre, celle du fractal de Tribonacci modifiée, elle, est plus compliquée et a pour dimension de Hausdorff $1,79\dots$ (voir Chapitre 4). L'intersection des deux fractals de Rauzy associés aux deux substitutions de Tribonnaci admet une structure plus compliquée. La frontière de cette dernière intersection est incluse dans la réunion des deux fractals de Tribonacci. On montre dans ce chapitre en utilisant l'IFS de la frontière qu'il y a des sous-ensembles de la frontière de l'intersection qui viennent du fractal de Tribonacci et d'autres bouts de la frontière qui viennent du deuxième fractal.

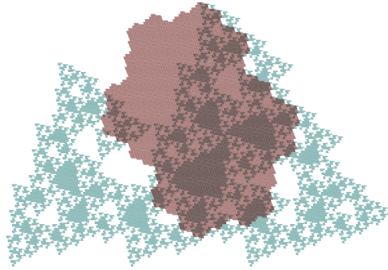


FIGURE 7.2 – Intersection de deux tuiles des deux fractals de Tribonacci.

1 Intersection Tribonacci

Comme on a vu au Chapitre 4, la frontière d'un fractal de Rauzy est solution d'un IFS. On rappelle la construction du graphe de la frontière. On note $\Xi(i, j, x) = \mathcal{R}(i) \cap \mathcal{R}(j) + x$

Avec ces ensembles $\Xi(i, j, x)$ on peut construire un graphe dirigé défini par : il existe un chemin $\Xi(i, j, x) \xrightarrow{t} \Xi(k, m, y)$ si on a $\beta(\Xi(k, m, y) + t) \subset \Xi(i, j, x)$.

Plus la frontière est compliquée, plus le graphe de sa frontière devient grand. Pour la substitution intersection des deux fractals de Tribonacci, après toutes les réductions

possibles, on obtient un graphe orienté avec 204 sommets et 365 arêtes, composé de 94 composantes fortement connexes qui se décompose de la façon suivante :

- 77 composantes fortement connexes consistent en un sommet uniquement.
- Il y a 10 triangles, dont 9 n'ont pas de chemin orienté sortant (donc, ils sont réduits à des ensembles singletons). De ceux qui restent, il y a des chemins pour les triangles et 6 cycles.
- Il y a 3 cycles d'ordre 6 (hexagones). A partir de deux d'entre eux, il n'y a pas de chemin sortant, alors ils donnent aussi des ensembles singleton. Le cycle qui reste à des chemins à trois triangles.
- Il y a un sous-graphe fortement connexe avec 8 sommets et 10 arêtes. De même, il y a une composante avec 10 sommets et 13 arêtes. Des deux, il y a des chemins vers triangles et de cycles d'ordre 6. Dans les deux cas, la valeur propre dominante ρ de la matrice d'adjacence satisfait $X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 + X - 1 = 0$ indiquant que cette intersection ont une dimension de Hausdorff inférieure à 1 (ensemble Cantor).
- Un graphe fortement connexe avec 20 sommets et 28 arêtes. La valeur propre dominante ρ de la matrice d'adjacence satisfait $X^4 - 2X^2 + 1 = 0$. On rappelle que ce c'est le même polynôme associé à la matrice d'adjacence du graphe de la frontière pour la substitution de Tribonacci. Ce qui indique d'après le Chapitre 4 qu'on est dans une partie de la frontière qui viens de la frontière du fractal de Tribonacci.
- Enfin, un sous-graphe fortement connexe avec 41 sommets et 70 arêtes. La valeur propre dominante ρ de la matrice d'adjacence satisfait $X^6 - X^5 - X^4 - X^2 + X - 1 = 0$, ce qui indique que ce sont les parties de la frontière qui arrivent du fractal de Tribonacci flippé (voir Chapitre 4).

Remarque 7.1. *Il n'y a pas de chemin dirigé par l'un des deux derniers sous-graphe à l'autre, mais il y a des chemins pour les autres composantes.*

On donne ici la composante fortement connexe avec les 8 sommets et 10 arêtes ($\lambda = \beta$).

Le graphe suivant représente toutes les composantes fortement connexes qui peuvent atteindre la composante de Tribonacci. La couleur orange sur les sommets indique les triangles, le jaune représente les 6 cycles, le vert et le turquoise représentent les deux composantes avec 8 et 10 sommets respectivement voir Figure 7.4.

Quelques figures d'intersection de tuiles

On donne ici 3 figures qui montrent l'intersection de quelques tuiles :

Remarque 7.2. *Ici, nous posons un regard sur un des ensembles des cycles d'ordre 6. Plus précisément, le cycle qui a des chemins vers trois autres triangles. Nous observons $\Xi(F, A, -\alpha^2)$, sans le terme condensation, nous aurons tout simplement le seul point gris comme point fixe. Mais avec la condensation, on obtient une suite de points qui s'approchent du point fixe.*

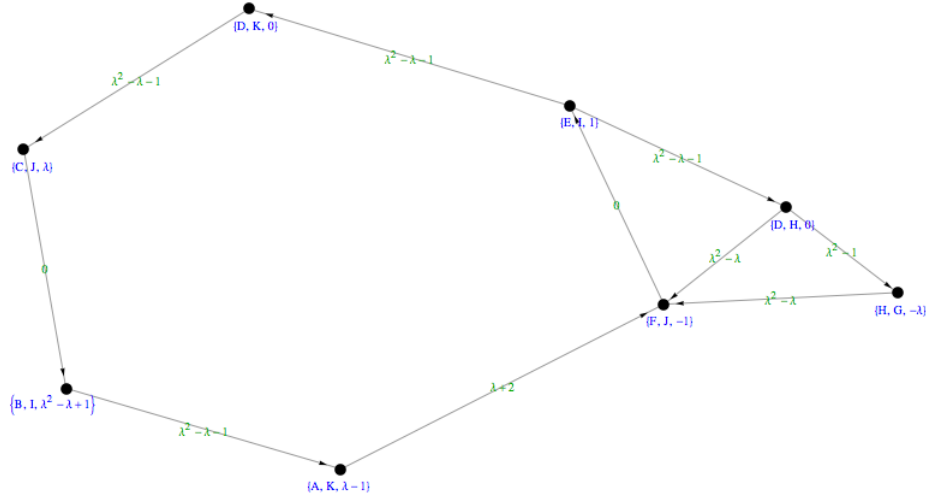


FIGURE 7.3 – Composante fortement connexe à 8 sommets.

Remarque 7.3. Ici, nous avons un regard sur deux ensembles dans le sous-graphe avec 8 sommets. Plus précisément, nous regardons $\Xi(D, H, 0)$ et $\Xi(D, K, 0)$. Les termes de condensation n'ont pas été pris en compte. On remarque qu'on obtient un ensemble de Cantor dont on essaie de comprendre la structure (travail en cours).

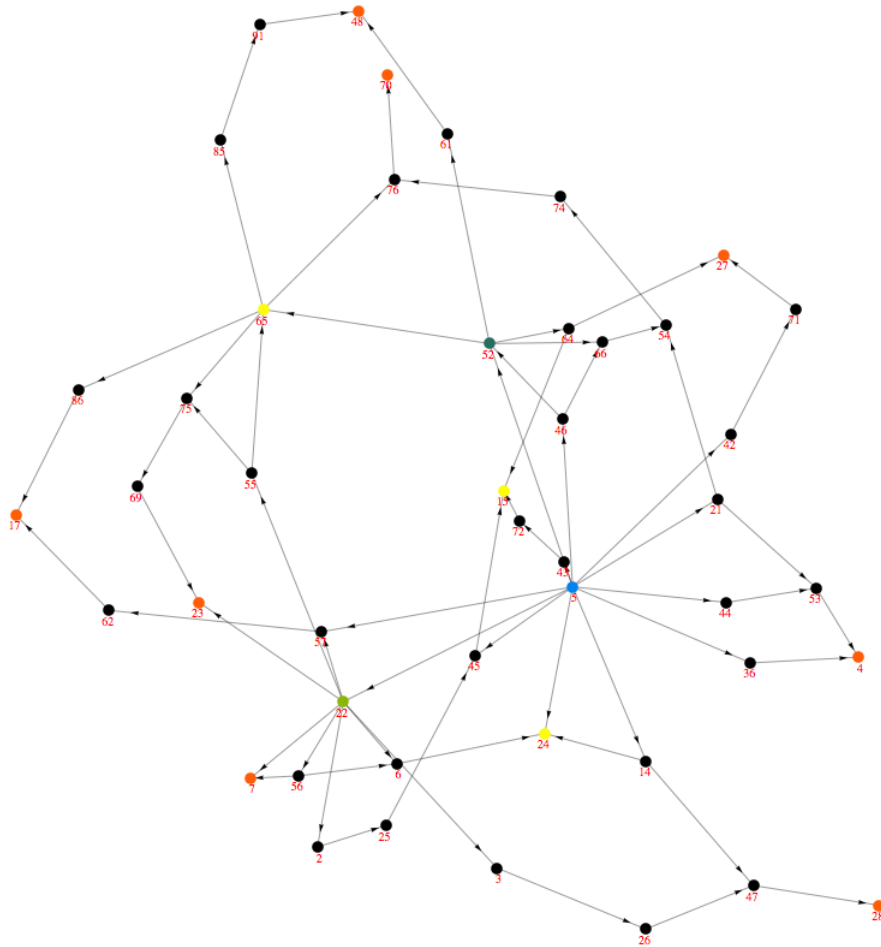


FIGURE 7.4 – Toutes les composantes fortement connexes qui peuvent atteindre la composante de Tribonacci.

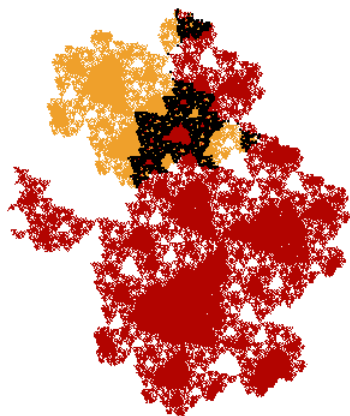


FIGURE 7.5 – Intersection de la tuile A et la tuile C .

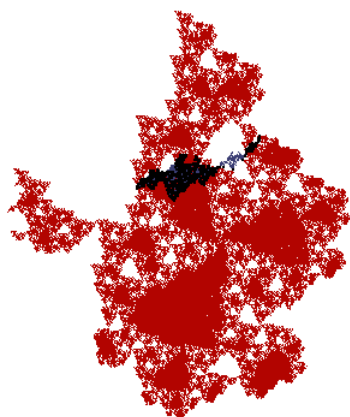


FIGURE 7.6 – Intersection de la tuile A et la tuile I .

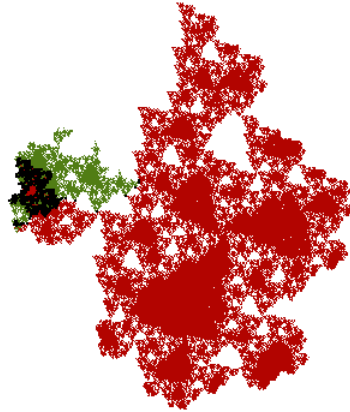


FIGURE 7.7 – Intersection de la tuile A et la tuile F .

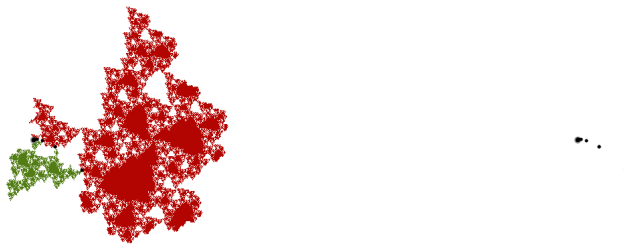


FIGURE 7.8 – Influence du terme condensation.



FIGURE 7.9 – $\Xi(D, H, 0)$ et $\Xi(D, K, 0)$.

Conclusion

Tout au long de ma thèse, nous nous sommes intéressés aux dynamiques communes données par deux systèmes dynamiques substitutifs associés à deux substitutions de même matrice d'incidence. On a montré dans cette thèse que la clôture de l'intersection des intérieurs de deux fractals de Rauzy associés à deux substitutions de même matrice d'incidence est un ensemble substitutif. C'est-à-dire que l'intersection de l'intérieur de deux fractals de Rauzy de même matrice d'incidence admet une dynamique substitutive. On montre qu'il existe une substitution qui engendre cette dynamique commune. Pour caractériser cette dynamique substitutive on donne un algorithme qui donne les points communs des deux lignes brisées associées aux deux points fixes des deux substitutions σ_1 et σ_2 . Ce qui permet d'obtenir la substitution Σ appelée substitution des points communs ou bien substitution des paires équilibrées minimales. Le point fixe de cette substitution engendre tous les points communs des deux lignes brisées associées aux deux points fixes u et v des deux substitutions σ_1 et σ_2 , ce qui permet de caractériser les points communs de l'intérieur des deux fractals de Rauzy associés à σ_1 et σ_2 unimodulaires irréductibles de type Pisot. La clôture de la projection de cet ensemble caractérise la dynamique commune des deux fractals de Rauzy. Nous préférons décrire directement l'intersection des deux fractals de Rauzy, mais on ne sait pas si on obtient le même ensemble ou non. C'est-à-dire est ce que l'intersection de deux fractals de Rauzy est égale à la clôture de l'intersection des intérieurs des deux fractals de Rauzy. L'intersection de deux fractals de Rauzy reste-t-il un ensemble substitutif? Il est clair que la clôture de l'intersection des intérieurs des deux fractals de Rauzy est inclus dans l'intersection des fractals de Rauzy. Mais on ne peut rien dire de l'autre inclusion. On sait que l'intersection est toujours de mesure positive, sauf que, on ne sait pas si cette intersection contient des sous-ensembles de mesure nulle.

Dans une deuxième partie de ma thèse on a étudié la frontière du fractal de Rauzy des deux substitutions de Tribonacci et de Tribonacci modifié, on montre avec Bernd Sing que la frontière du fractal intersection n'est pas uniforme. Elle n'est pas partout la même. Ce qui nous donne un premier exemple d'IFS avec cette propriété. Pour obtenir ce résultat, on a identifié les composantes fortement connexes du graphe de la frontière associée à la substitution intersection. On obtient un graphe très compliqué. Ce graphe est composé de plusieurs composantes fortement connexes. Une des composantes fortement connexes est celle associée à la substitution de Tribonacci, et une autre composante est associée à la substitution de Tribonacci modifiée. Mais on obtient en plus d'autres graphes fortement

CONCLUSION

connexes associées à d'autres morceaux de la frontière. Une des composantes fortement connexe obtenu admet 8 sommets et 10 arêtes, elle admet comme polynôme caractéristique de la matrice d'adjacence $(x^5 - x^4 + x^3 - 2 * x^2 + x - 1) * Q(x)$. Ce dernier pôlynome de degré 5 apparaît déjà dans le polynôme caractéristique de la matrice d'incidence de la substitution intersection des deux Tribonacci qui a la forme $(x^3 - x^2 - x - 1) * (x^3 + x^2 + x - 1) * (x^5 - x^4 + x^3 - 2 * x^2 + x - 1)$. On essaie toujours de comprendre la relation entre les deux.

Pendant cette thèse, je me suis intéressé aussi à l'étude de système dynamique engendré par un produit aléatoire de substitution. On montre que le système est substitutif dans le cas de substitutions de même matrice d'incidence. On ne sait pas grande chose dans le cas de substitutions de différentes matrices d'incidences. L'ensemble reste-t-il substitutif ?

Notation

- $\mathcal{A}$ Alphabet
- $\mathcal{A}^*$ Ensemble des mots finis
- $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ Ensemble des mots infinis
- $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ Ensemble des mots bi-infinis
- d Taille de l'alphabet $\mathcal{A}$
- E Ensemble des paires balancées minimales
- $\mathcal{E}$ L'intersection des intérieurs des deux fractals de Rauzy
- $\mathcal{F}_k$ Réalisation géométrique de l'automate produit d'ordre k
- $\mathbb{H}_c$ L'espace beta-contractant
- $\mathbb{H}_e$ L'espace dilatant
- $\mathbb{H}_s$ L'espace supplémentaire
- l Fonction abélianisation
- K_i Ensemble compact
- $\mathcal{L}$ Langage
- M Matrice d'incidence de la substitution
- n degré de la valeur propre α
- $\mathcal{O}(x)$ Orbite du point x
- u, v mots infinis
- U, V, W mots finis
- $\mathcal{R}$ Fractal de Rauzy
- $\mathcal{R}(i)$ Tuile de type i
- S La fonction de décalage
- T Application continue
- $\mathbb{T}$ Tore
- $\mathcal{U}_i(k)$ Automate préfixe
- $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2(k)$ Automate produit d'ordre k
- X Espace métrique compact
- X_σ Système dynamique symbolique
- Ω_u Système dynamique symbolique substitutif
- $\sigma, \Sigma, \tau, \phi, \chi$ Substitutions
- $[W]$ Cylindre
- α Valeur propre dominante de Perron Frobenius
- β_i Les conjugués de α

NOTATION

- π_s La projection canonique sur $\mathbb{H}_c$ parallèlement à $\mathbb{H}_e \oplus \mathbb{H}_s$
- π_u La projection canonique sur $\mathbb{H}_e$ parallèlement à $\mathbb{H}_c \oplus \mathbb{H}_s$
- π prolongement par continuité de π_s
- Σ Substitution des points communs
- $\Xi(i, j, x)$ Intersection $\mathcal{R}(i) \cap \mathcal{R}(j) + x$
- ρ Valeur propre dominante de la matrice d'adjacence du graphe de la frontière

Bibliographie

- [1] S. Akiyama, *Pisot numbers and greedy algorithm*. Number theory (Eger, 1996), de Gruyter, Berlin, (1998), 9–21.
- [2] P. Arnoux et G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$* . Bull. Soc. Math. France 119 (1991), no. 2, 199–215.
- [3] P. Arnoux, V. Berthé, Z. Masakova, E. Pelantova, *Sturm numbers and substitution invariance of 3IET words*, Integers 8 (2008), A14, 17 pp.
- [4] P. Arnoux, V. Berthé, A. Hilion, A. Siegel, *Fractal representation of the attractive lamination of an automorphism of the free group*. Numération, pavages, substitutions. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 7, 2161–2212.
- [5] P. Arnoux et S. Ito, *Pisot substitutions and Rauzy fractal*. Journées Montoises d’Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000). Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 8 (2001), no. 2, 181–207.
- [6] P. Arnoux, J. Bernat et X. Bressaud, *Geometric model for substitutions*. Exp. Math. 20 (2011), no. 1, 97–127.
- [7] M. Barge and B. Diamond, *Coincidence for substitutions of Pisot Type*. Bull. Soc. Math. France 130 (2002), no. 4, 619–626.
- [8] V. Baker, M. Barge, and J. Kwapisz, *Geometric realization and coincidence for reducible non-unimodular pisot tiling spaces with an application to beta-shifts*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 7, 2213–2248.
- [9] M. Barge and J. Kwapisz, *Geometric theory of unimodular Pisot substitutions*. Amer. J. Math. 128 (2006), no. 5, 1219–1282.
- [10] A. Berman et R. J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*. Revised reprint of the 1979 original. Classics in Applied Mathematics, 9. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994. xx+340 pp. ISBN : 0-89871-321-8
- [11] Michael F. Barnsley, *Fractals everywhere*. Second edition. Revised with the assistance of and with a foreword by Hawley Rising, III. Academic Press Professional, Boston, MA, 1993. xiv+534 pp. ISBN : 0-12-079061-0.
- [12] V. Berthé, A. Siegel, J. Thuswaldner, *Substitutions, Rauzy fractals and Tiling*. Combinatorics, automata and number theory, 248–323, Encyclopedia Math. Appl., 135, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

- [13] V. Canterini et A. Siegel, *Automate des préfixes-suffixes associé une substitution primitive*. J. Théor. Nombres Bordeaux 13 (2001), no. 2, 353–369.
- [14] V. Canterini et A. Siegel, *Geometric representation of substitutions of Pisot type*. Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 12, 5121–5144.
- [15] J. Cassaigne, S. Ferenczi, and L.Q. Zamboni, *Imbalances in Arnoux-Rauzy sequences*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 50 (2000), no. 4, 1265–1276.
- [16] F.M. Dekking, *Recurrent sets*. Adv. in Math. 44 (1982), no. 1, 78–104.
- [17] F. Durand, A. Messaoudi *Boundary of the Rauzy fractal sets on $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ generated by $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$* . Osaka J. Math. 48 (2011), no. 2, 471–496
- [18] H. Ei, S. Ito et H. Rao, *Atomic Surfaces, Tiling and Coincidences II. Reducible case*. Numération, pavages, substitutions. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 56 (2006), no. 7, 2285–2313.
- [19] M. Furukado, S. Ito et H. Rao, *Geometric Realizations of hyperbolic Unimodular substitutions*. Fractal geometry and stochastics IV, 251–268, Progr. Probab., 61, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [20] P. Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*. Lecture Notes in Mathematics, Vol.1794.
- [21] C. Frougny et B. Solomyak, *Finite beta-expansions*. Ergodic Theory Dynam. Systems 12 (1992), no. 4, 713–723.
- [22] S. Ito et M. Kimura, *On the Rauzy fractal*. Japan J. Indust. Appl. Math. 8 (1991), no. 3, 461–486.
- [23] S. Ito et M. Mizutani, *Potato exchange transformation with fractal domains*. Preprint.
- [24] C. Holton et L. Zamboni, *Geometric realization of substitutions*. Bull. Soc. Math. France 126 (1998), no. 2, 149–179.
- [25] M. Keane, *Interval exchange transformations*. Math. Z. 141 (1975), 25–31.
- [26] K. Falconer, *The geometry of fractal sets*. Cambridge Tracts in Mathematics, 85. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. xiv+162 pp. ISBN : 0-521-25694-1 ; 0-521-33705-4.
- [27] J. Hadamard, *Sur la forme des lignes géodésiques à l’infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre*. Bull. Soc. Math. France 26 (1898), 195–216.
- [28] J.C. Lagarias et Y. Wang, *Substitution Delone sets*. Discrete Comput. Geom. 29 (2003), no. 2, 175–209.
- [29] J.M. Luck, C. Godrèche, A. Janner and T.Janssen, *The nature of the atomic surfaces of quasiperiodic self similar structures*. J. Phys. A 26 (1993), no. 8, 1951–1999.
- [30] J. Luo et Y. Ya-Min, *On single-matrix graph-directed iterated function system*, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010) 8–18.
- [31] R. Daniel Mauldin et S. C. Williams, *Hausdorff dimension in graph directed construction*. Trans. Amer. Math. Soc. 309 (1988), no. 2, 811–829.

- [32] M. Lothaire, *Combinatorics on words*. Cambridge University Press, Cambridge, (2002), [http ://www-igm.univ-mlv.fr/berstel/Lothaire](http://www-igm.univ-mlv.fr/berstel/Lothaire).
- [33] M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on words*. Cambridge University Press, Cambridge, (2002), [http ://www-igm.univ-mlv.fr/berstel/Lothaire](http://www-igm.univ-mlv.fr/berstel/Lothaire).
- [34] M. Lothaire, *Applied Combinatorics on words*. Cambridge University Press, Cambridge, (2002), [http ://www-igm.univ-mlv.fr/berstel/Lothaire](http://www-igm.univ-mlv.fr/berstel/Lothaire).
- [35] A. Messaoudi, *Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy*. J. Théor. Nombres Bordeaux 10 (1998), no. 1, 135–162.
- [36] A. Messaoudi, *Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe*. Acta Arith. 95 (2000), no. 3, 195–224.
- [37] A. Messaoudi, *Autour du fractal de Rauzy*. thèse de l’université de la Méditerranée, Aix Marseille II, 1996.
- [38] A. Messaoudi *Tribonacci multiplication*. Appl. Math. Lett. 15 (2002), no. 8, 981–985.
- [39] A. Messaoudi *Fractals de Rauzy*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 341 (2005), no. 3, 175–178.
- [40] A. Messaoudi *Propriétés arithmétiques et topologiques d’une classe d’ensembles fractales*. Acta Arith. 121 (2006), no. 4, 341–366.
- [41] B. Mossé, *Reconnaissabilité des substitutions et complexité des suites automatiques*. Bull. Soc. Math. France 124 (1996), no. 2, 329–346.
- [42] R. J. Parikh, *On context-free languages*. J. Assoc. Comput. Mach. 13 1966 570–581.
- [43] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*. Bull. Soc. Math. France 110 (1982), no. 2, 147–178.
- [44] M. Queffélec, *Substitution dynamical system–spectral analysis*. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag, Berlin, 1987. xiv+240 pp. ISBN : 3-540-18692-1.
- [45] M. Morse and G.A. Hedlund, *Symbolic Dynamics*. Amer. J. Math. 60 (1938), no. 4, 815–866.
- [46] T. Sellami, *Geometry of the common dynamics of Pisot substitutions with the same incidence matrix*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (2010), no. 17-18, 1005–1008.
- [47] T. Sellami, *Common dynamics of two Pisot substitutions with the same incidence matrix*. Publ. Math. Debrecen, to appear (2012).
- [48] A. Siegel, *Autour des fractals de Rauzy*. Journées Femmes et Mathématiques, Paris (03/2002).
- [49] A. Siegel, *Analyse de système dynamiques par discrétisation, Exemple d’applications en théorie des nombres et en biologie moléculaire*. Habilitation à diriger des recherches.
- [50] A. Siegel, *Représentation des systèmes dynamiques substitutifs non unimodulaires*. Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), no. 4, 1247–1273.
- [51] A. Siegel and J. Thuswaldner, *Topological properties of Rauzy fractal*. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 118 (2009), 140 pp. ISBN : 978-2-85629-290-7.

BIBLIOGRAPHIE

- [52] W. P. Thurston, *Groups, tilings and finite state automata*. Lectures notes distributed in conjunction with the Colloquium Series, in AMS Colloquium lectures, 1989.
- [53] V. Sirvent, *The common dynamics of the tribonacci substitutions*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 7 (2000), no. 4, 571–582.
- [54] B. Sing and V. Sirvent, *Geometry of the common dynamics of flipped Pisot substitution*. Monatsh. Math. 155 (2008), no. 3-4, 431–448.
- [55] V. Sirvent and Y. Wang, *Self affine tiling via substitution dynamical systems and Rauzy fractal*. Pacific J. Math. 206 (2002), no. 2, 465–485.