Thèse de doctorat en philosophie

présentée par

Christophe ECKES

Groupes, invariants et géométries dans l'œuvre de Weyl

Une étude des écrits de Hermann Weyl en mathématiques, physique mathématique et philosophie, 1910-1931

soutenue publiquement

le 5 décembre 2011 à 14 h 30 à l'Université Lyon III

Sous la direction de :

M. Daniel Parrochia	Professeur à l'Université Lyon III
M. Bertrand Rémy	Professeur à l'Université Lyon I

JURY :

M. Daniel Parrochia	Professeur, Université Lyon III, co-directeur
M. Bertrand Rémy	Professeur, Université Lyon I, co-directeur
M. Jim Ritter	Maître de Conférences, Université Paris VIII
M. Erhard Scholz	Professeur, Université de Wuppertal, rapporteur
Mme Hourya Sinaceur	Directrice de Recherche, IHPST, rapporteur
M. Jean-Jacques Szczeciniarz	Professeur, Université Paris VII
M. Amaury Thuillier	Maître de Conférences, Université Lyon I.

Remerciements

Je remercie d'abord mes deux directeurs de thèse, Daniel Parrochia et Bertrand Rémy. Daniel Parrochia m'a encouragé dès le Master II à orienter mes recherches en histoire et philosophie des mathématiques. Il a accepté de diriger mon travail et il m'a conseillé tout au long de mes recherches. Sans son soutien, je n'aurais jamais eu les moyens de me consacrer pleinement à la recherche durant mes trois premières années de thèse. Bertrand Rémy s'est intéressé très tôt à mon projet de thèse. Je me souviens qu'à notre première entrevue, il m'a évoqué l'œuvre de Weyl et la théorie des représentations de groupes. Cet entretien a été déterminant dans le choix de mon sujet de thèse. Son point de vue de mathématicien a été essentiel pour comprendre les aspects les plus techniques du corpus que j'ai étudié. Il m'a en outre permis d'examiner les aspects les plus variés de l'œuvre de Weyl. Mais mon travail n'aurait sans doute pas pu aboutir sans le soutien patient et attentif d'Amaury Thuillier qui a relu et corrigé avec attention la traduction de l'article de Weyl sur les groupes de Lie. De plus il a su m'apporter certains éléments de connaissance décisifs en mathématiques. Par ses remarques et ses objections, il m'a également permis d'approfondir mes hypothèses historiques et épistémologiques.

Je suis honoré qu'Hourya Bénis Sinaceur et Erhard Scholz aient accepté d'être mes rapporteurs. Je remercie vivement Jean-Jacques Szczeciniarz et Jim Ritter d'avoir bien voulu faire partie de mon jury de thèse.

L'équipe d'histoire des mathématiques de l'Institut Camille Jordan m'a accueilli avec enthousiasme dès le début de ma thèse. Pierre Crépel a mis en valeur mon travail de recherche dans le cadre du séminaire d'histoire et de philosophie des mathématiques et son aide a été extrêmement précieuse pour me confronter à des historiens des mathématiques. Je remercie également Alexandre Guilbaud, Guillaume Jouve et Fabrice Ferlin auxquels je dois de précieux conseils. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance à l'égard de Sébastien Gauthier, qui a intégré l'équipe d'histoire des mathématiques de Lyon 1 au cours de mon doctorat. Nos discussions sur des points de méthode en histoire des mathématiques ont été très utiles.

Je remercie également certains membres de l'université Paris 7 et de l'équipe rehseis du laboratoire Sphère. En effet, j'ai été accueilli en leur sein en tant qu'ATER à partir de septembre 2010. Je souhaite tout d'abord exprimer ma gratitude à Karine Chemla. Elle s'est intéressée à mes recherches dès 2008. Ses suggestions ont été décisives pour commenter à nouveaux frais l'article de Weyl sur les groupes de Lie. Je remercie également Jean-Jacques

Szczeciniarz, Ivahn Smadja, David Rabouin et Alexandre Afriat qui m'ont sollicité pour présenter à l'oral des chapitres de ma thèse. Cela a été fructueux pour corriger certaines surinterprétations et pour approfondir mes recherches. J'ai également été très heureux de pouvoir discuter avec Renaud Chorlay, mais aussi avec certains doctorants de l'université Paris 7 : Davide Crippa, Sylvain Cabanacq et Emmylou Haffner.

Au cours de mon doctorat, j'ai pu évoquer mon projet de thèse auprès de philosophes, d'historiens des mathématiques et de mathématiciens qui m'ont conseillé ou indiqué certaines sources nécessaires pour approfondir ma réflexion. Je remercie tout particulièrement Catherine Goldstein, Norbert Schappacher, Jim Ritter, Frédéric Brechenmacher, Rossana Tazzioli, Erhard Scholz, Martina Schneider et Yvette Kosmann-Schwarzbach. Je suis particulièrement heureux que Marcus Willaschek ait accepté de m'accueillir dans le département de philosophie de la Goethe-Universität à Francfort durant six mois. Grâce à lui, j'ai pu préciser mes connaissances sur le criticisme kantien. Il m'a sollicité pour étudier la réception de la théorie kantienne de l'espace par certains mathématiciens, dont Weyl.

Enfin, j'adresse toute ma reconnaissance à ma famille, en particulier mes parents et ma sœur. Je remercie également mes amis : Alexandre, Marine, Irène, Laurence et Anne. Un grand merci à Olivier et à sa famille pour leur soutien.

Introduction générale

0.1 Une œuvre « hétérogène »

L'œuvre de Hermann Weyl (1885-1955) frappe d'abord par son hétérogénéité et sa diversité à tous égards : domaines des mathématiques investis, méthodes utilisées pour résoudre des problèmes ou démontrer des théorèmes, prises de position contrastées sur les fondements des mathématiques, sources philosophiques très différentes convoquées à l'appui de ses réflexions — en particulier Husserl et Fichte.

Proposons une courte mise en perspective pour confirmer ce point.

Étudiant puis *Privatdozent* à l'université de Göttingen jusqu'en 1913, Weyl s'intéresse d'abord aux équations intégrales qui constituent alors l'objet central des investigations de Hilbert, son directeur de thèse. Entre 1910 et 1912, Weyl dispense également des cours sur les fonctions d'une variable complexe et sur les surfaces de Riemann qui donneront lieu à l'un de ses premiers ouvrages fondamentaux : *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913). Dans cet ouvrage, non seulement Weyl définit rigoureusement une surface topologique et une surface de Riemann, mais de plus il démontre à nouveaux frais le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe (1907). Il adhère alors pleinement à la méthode des définitions implicites ou par axiomes de Hilbert pour construire des concepts mathématiques et il considère l'axiomatique de Zermelo comme un aboutissement pour fonder les mathématiques sur des bases solides. Mais, dans le même temps, il reconnaît sa dette envers Klein et il admet avec ce dernier l'importance des représentations géométriques à des fins pédagogiques et heuristiques en mathématiques.

Recruté à l'ETH de Zürich en 1913, traumatisé par sa participation à la première guerre mondiale entre le printemps 1915 et le printemps 1916, il oriente brutalement ses recherches en direction de la mathématisation de la relativité générale durant l'été 1916. Son collègue Grossmann à l'ETH de Zürich qui, dès 1912-1913, indique à Einstein l'importance des idées géométriques de Riemann et du calcul tensoriel pour formaliser la relativité générale, a sans

doute une incidence non négligeable sur ce choix. Dès 1917, Weyl propose un cours sur la relativité générale à l'ETH de Zürich dans lequel il intègre les dernières innovations que Levi-Civita vient de publier en géométrie riemannienne avec l'introduction de la notion de transport parallèle dans le cas des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. En 1918 paraît la grande monographie de Weyl sur la relativité générale, à savoir *Raum, Zeit, Materie*. Entre 1918 et 1923, pas moins de cinq éditions de cette œuvre majeure sont publiées avec des modifications substantielles en fonction des deux grands projets de recherche menés alors par Weyl : (a) une généralisation de la géométrie riemannienne qui sert après coup de cadre à une théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique ; (b) la formulation et la résolution du problème de l'espace qui consiste à caractériser la *nature* de la métrique de l'univers physique. Parallèlement, à partir de 1917-1918, il adopte des procédures constructives pour engendrer le continu mathématique dans son ouvrage *Das Kontinuum* et, l'année suivante, il adhère plus radicalement au programme intuitionniste de Brouwer. Il en résultera en 1921 un article très polémique de Weyl contre le formalisme de Hilbert.

Pourtant, dès 1923-1924, Weyl mesure les conséquences très coûteuses des contraintes de la logique intuitionniste sur la production des connaissances mathématiques. C'est pourquoi, il adopte une voie moyenne entre le formalisme et l'intuitionnisme qu'il maintiendra d'ailleurs jusqu'à la fin de sa carrière. Pratiquement au même moment, une nouvelle césure se fait jour dans la carrière mathématique de Weyl. Il entend fonder le calcul tensoriel sur des méthodes issues de la théorie des groupes. De plus, il prend connaissance des travaux publiés par Schur en 1924 sur les représentations du groupe orthogonal et du groupe spécial orthogonal. Enfin, il s'approprie l'essentiel des résultats formulés par Cartan dans sa thèse (1894) et dans un article de 1913 sur les groupes et les algèbres de Lie. Il résulte de tout cela l'article monumental en quatre parties que Weyl publie en 1925-1926 sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. En outre, dès 1925, Weyl multiplie ses contacts avec les principaux acteurs qui participent aux fondements et à la mathématisation de la mécanique quantique : Schrödinger, Born, Jordan, Heisenberg, Pauli, Dirac, von Neumann, Heitler, London, etc. En 1927, Weyl propose à l'ETH de Zürich un cours sur les fondements de la mécanique quantique dans lequel il entend promouvoir l'usage des représentations de groupes (finis et continus) pour formaliser cette théorie physique. Il en résultera sa deuxième grande monographie en physique mathématique, à savoir *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, (première édition 1928, seconde édition 1931).

0.2 L'unité d'un projet, d'un mode opératoire et d'une écriture

Ces quelques repères sont bien sûr partiels puisque nous n'avons pas mentionné le fait que Weyl remplace Hilbert à Göttingen en 1930, avant de fuir le régime nazi pour l'université de Princeton durant l'été 1933. Nous n'avons pas non plus répertorié de manière exhaustive tous les domaines des mathématiques investis par Weyl — par exemple, nous n'avons rien dit sur ses contributions en théorie des nombres. Néanmoins, nous voudrions déjà relativiser l'apparente hétérogénéité de son œuvre qui transparaît à la lecture de ce résumé. Tout d'abord, il s'intéresse presque exclusivement à des objets mathématiques suffisamment riches et complexes pour requérir des modes de traitement relevant aussi bien de l'algèbre, de l'analyse que de l'*analysis situs*. Cela est vrai des surfaces de Riemann (1913), des variétés différentielles et métriques (non nécessairement riemanniennes) (1918-1923) et des groupes de Lie (1925-1926). Non seulement Weyl n'étudie jamais des « structures » pour elles-mêmes, qu'elles soient algébriques ou topologiques, mais de plus il ne se définit ni comme algébriste, ni comme analyste, ni comme topologue. Par contre, il affirme à plusieurs reprises qu'E. Noether ou Artin sont des « algébristes ».

Une autre constante nous frappe : Weyl dialectise diverses méthodes pour étudier un même objet mathématique ; non seulement il produit par ce biais des connaissances nouvelles, mais de plus il met à l'épreuve *in concreto* l'unité des mathématiques par delà leur apparente hétérogénéité. Nous voyons ainsi Weyl confronter les méthodes de Riemann et de Weierstrass en analyse complexe, faire le pont entre le calcul tensoriel et les représentations géométriques les plus intuitives en géométrie différentielle, passer des méthodes infinitésimales de Cartan aux méthodes topologiques et globales de Hurwitz et Schur dans l'étude des représentations des groupes et des algèbres de Lie. Dans ce qui suit, nous proposons plus précisément de montrer que son œuvre manifeste l'unité d'un projet, l'unité d'un mode opératoire et l'unité d'une écriture.

L'unité d'un projet

Les recherches de Weyl sont polarisées autour de deux grands axes : (a) les idées géométriques de Riemann, que ce soit en analyse complexe ou en géométrie différentielle, (b) la théorie des groupes et, en particulier, des groupes de Lie. Ces deux axes convergent à plusieurs reprises dans l'œuvre de Weyl. Ainsi, en 1916, il traduit les différents types de revêtements

d'une surface de Riemann dans le langage de la théorie de Galois. En 1921-1923, il pose et résout le problème de l'espace — qui consiste à caractériser la nature de la métrique de l'univers — en s'appuyant sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie linéaires. Enfin, dès 1925, il utilise les connaissances en *analysis situs* qu'il a acquises avec ses travaux sur les surfaces de Riemann pour étudier les groupes de Lie et leurs représentations. Ainsi, derrière leur apparente diversité, les recherches de Weyl se caractérisent par l'*unité d'un projet* qu'il hérite de Klein : faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann. Il est donc rigoureusement impossible d'étudier Weyl sans aborder la *Dissertation* de Riemann sur les fonctions d'une variable complexe (1851) et son *Habilitationsvortrag* sur les « fondements » de la géométrie (1854). Encore faut-il ajouter que Weyl est influencé par Klein lorsqu'il lit, interprète et s'approprie Riemann. En conséquence l'incidence de Klein sur les recherches de Weyl est également déterminante. De manière très schématique, nous pouvons préciser comment Weyl dialectise la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann au cours de sa carrière. Jusqu'en 1923, Weyl utilise la théorie des groupes pour éclairer les idées géométriques de Riemann qui sont alors au cœur de ses investigations, comme en témoignent ses travaux sur les surfaces de Riemann (1913, 1916) et ses recherches en géométrie différentielle (1918-1923). À partir de 1924, Weyl procède de manière rigoureusement inverse : les idées géométriques de Riemann — et plus particulièrement les connaissances en *analysis situs* issues de la théorie des surfaces de Riemann — viennent éclairer l'études des groupes de Lie et de leurs représentations. Ainsi, Weyl réalise dans une diversité de domaines théoriques et sous des modalités très différentes le projet de Klein qui consiste à faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann.

L'unité d'un mode opératoire

Il est frappant de constater que Weyl prend toujours le soin de décrire en détail ce qu'il retient de ses prédécesseurs ou de ses contemporains, il fait donc preuve d'un esprit de synthèse remarquable à chaque fois qu'il investit un nouveau champ de recherche. Nous ne disons pas qu'il est exhaustif, mais qu'il prétend à l'exhaustivité dans ses ouvrages et ses articles majeurs. À l'appui de ce constat, nous pouvons citer *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913), *Raum, Zeit, Materie* (1918-1923), son article sur les représentations linéaires des groupes de Lie complexes semi-simples (1925, 1926) et *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928, 1931). Par exemple, dans son article sur les groupes de Lie, il combine les méthodes de Cartan et de Hurwitz-Schur ; de plus, il veut construire un analogue de la théorie des caractères

de Frobenius dans le cas des groupes continus. De même, sa monographie sur la mécanique quantique rassemble les dernières innovations en physique théorique telles que l'hypothèse du spin de l'électron et la mécanique quantique relativiste de Dirac. En outre, Weyl répertorie dans cet ouvrage toutes les applications connues de la théorie des groupes à la mécanique quantique. Ainsi, Weyl met à l'épreuve l'*unité des mathématiques* par la *synthèse* de ses sources qui constitue donc un *même mode opératoire* dans une grande diversité d'ouvrages et d'articles qu'on lui doit. Ce souci d'exhaustivité a un avantage certain : il permet de mesurer la complexité des références utilisées par Weyl et il empêche immédiatement de situer son œuvre en s'appuyant sur des rapports de filiation aussi simplificateurs qu'illusoires. Mais en retour, par cet esprit de synthèse, Weyl entend produire des mathématiques nouvelles. Il ne se contente donc pas de juxtaposer ou de mentionner ses sources. Il les situe les unes par rapport aux autres, il les commente, il montre leurs mérites respectifs et il les combine afin de démontrer des théorèmes inédits ou de développer des théories nouvelles.

L'unité d'une écriture

Pour contrer l'idée d'une apparente hétérogénéité dans l'œuvre de Weyl, nous avons d'abord évoqué l'*unité d'un projet* — faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann —, l'*unité d'un mode opératoire* fondé sur la synthèse d'une grande diversité de sources et la combinaison de différents champs disciplinaires et théoriques. Nous devons également mentionner l'*unité d'une écriture*. Au cours de nos investigations, nous avons pu faire l'observation suivante : de manière récurrente dans l'œuvre de Weyl, un même passage ou un même argument sont repris à l'identique dans des ensembles textuels de nature différente et parfois éloignés dans le temps : article de recherche, monographie, ouvrage philosophique de vulgarisation, etc. S'ils sont identiques au mot près, ces passages n'ont toutefois pas exactement le même sens en fonction du tout dans lequel ils s'insèrent. Weyl leur adjoint parfois un argument qui vient nuancer leur portée et leur signification. D'un autre côté, ce procédé d'écriture, qui est une constante chez Weyl, renforce l'unité de son œuvre : il ne la divise pas en fonction des domaines qu'il investit et du statut des textes qu'il produit. Ainsi se mesure également la pérennité des thèses qu'il défend, notamment sur la nature des connaissances mathématiques. Par exemple, il existe d'étroites parentés textuelles entre sa conférence de 1931 au cours de laquelle il critique l'hégémonie des méthodes algébriques à Göttingen et un texte rédigé après 1953 et intitulé « comparaison entre les procédures axiomatiques et les procédures constructives en mathématiques » dans lequel il fait un ac-

cueil mitigé du premier tome d'algèbre de Bourbaki. Le procédé d'écriture par reproduction à l'identique de passages qui transitent d'un texte à l'autre montre combien il est inexact d'interpréter l'œuvre de Weyl comme une suite de revirements désordonnés. Au contraire, cette stratégie suggère que Weyl prend systématiquement le soin de reproduire, d'actualiser ou de nuancer un même argument. Une telle écriture ne laisse pas la place à l'arbitraire.

Cela étant, à la suite de Scholz, nous pouvons observer que, jusqu'au milieu des années 20, Weyl fait coexister dans un même article de recherche des considérations philosophiques et épistémologiques d'une part, la formulation de concepts mathématiques et la démonstration de théorèmes d'autre part, comme si écritures philosophique et scientifique devaient être envisagées d'un seul tenant, comme si elles pouvaient spontanément se répondre et se compléter. Ceci n'est plus vérifié au moment où Weyl s'intéresse à la mathématisation de la mécanique quantique. Même si des ramifications très étroites perdurent entre ses textes scientifiques et philosophiques, il les sépare plus nettement dans ses publications. Les paragraphes purement épistémologiques que l'on peut trouver dans des articles de recherche de 1918 et de 1922 tels que « Reine Infinitesimalgeometrie » ou encore « die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung » ne sont plus de mise à partir du milieu des années 20. Ces changements dans les stratégies d'écriture doivent être rapportés à une approche plus empirique et donc moins spéculative que Weyl adopte lorsqu'il s'intéresse à la mécanique quantique.

0.3 Les difficultés qui orientent nos recherches sur Weyl

Dans le court descriptif de la trajectoire scientifique et intellectuelle de Weyl que nous avons proposé, trois moments semblent se dégager sur les fondements des mathématiques : alors qu'il est étudiant puis *Privatdozent* à Göttingen, Weyl commence par adhérer à la théorie des ensembles telle qu'elle est formalisée par Zermelo au début du XX^{e} siècle. Ensuite, il opte pour des procédures constructives afin d'engendrer le continu mathématique (1917-1918) avant d'adhérer au programme intuitionniste de Brouwer entre 1919 et 1923. Il finit par adopter une voie moyenne entre le formalisme et l'intuitionnisme dès 1924. Notre but ne sera pas de revenir en détail sur ces « revirements » de Weyl concernant les fondements des mathématiques, car les articles qu'il consacre à cette question ont été commentés de manière très détaillée par J. Largeault et P. Mancosu.

Nous n'envisageons pas d'isoler et d'étudier pour lui-même le corpus de textes que Weyl consacre aux fondements des mathématiques. Il s'agit bien plutôt de savoir si et jusqu'à quel point ses prises de position sur les fondements des mathématiques ont eu une incidence

sur sa pratique des mathématiques. Au cours de notre thèse, nous proposerons une réponse contrastée à cette première difficulté : par exemple, malgré son adhésion à l'intuitionnisme à partir de 1919, Weyl utilise des définitions par axiomes dans une veine hilbertienne pour expliciter dans *Raum, Zeit, Materie* les concepts d'espace vectoriel, d'espace affine ou encore de transport parallèle sur une variété différentielle. De même, malgré sa charge virulente contre le formalisme et bien qu'il admette que le continu échappe aux procédures axiomatiques, Weyl ne rompt pas avec l'héritage de Hilbert lorsqu'il participe à la mathématisation de la relativité générale : il prolonge le programme de Mie-Hilbert qui consiste à expliquer la structure de la matière exclusivement à partir d'une théorie classique des champs ; il utilise très largement les méthodes variationnelles prônées par Hilbert en physique mathématique. Réciproquement, nous montrerons que l'article de Weyl sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples reflète parfaitement la voie moyenne entre procédures constructives et procédures axiomatiques qu'il adopte dès 1924.

Cette première difficulté, qui consiste à étudier systématiquement le lien entre une pratique des mathématiques et une réflexion sur les fondements des mathématiques chez Weyl, a eu une incidence immédiate sur notre démarche. Nous avons étudié ses contributions en mathématiques et en physique mathématique en ayant à l'esprit les thèses qu'il défend sur le statut et les fondements des connaissances mathématiques. Cet angle d'attaque a justement le mérite de montrer qu'il est simplificateur de concevoir ses réflexions sur les fondements des mathématiques comme une suite décousue de revirements. En effet, c'est éclairé par sa pratique des mathématiques que Weyl renonce aux contraintes trop fortes qu'implique le programme intuitionniste. Inversement, l'attachement de Weyl à des méthodes constructives pour engendrer des concepts et des objets mathématiques explique les réticences qu'il exprime en 1931 à l'égard des méthodes de l'≪ algèbre abstraite ≫ incarnées notamment par E. Noether et Artin. Mais ces réticences ont leurs limites puisque le chapitre II de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928, 1931) est un condensé de théorie abstraite des groupes dans un style très proche de la *Moderne Algebra* de van der Waerden.

Une seconde difficulté a orienté nos recherches au cours de notre travail de thèse. En première approximation, les travaux de Weyl en mathématiques et en physique mathématique peuvent être divisés en deux blocs relativement homogènes, tout du moins si nous en restons à une période qui s'étend de 1916 à 1931. Cette périodisation n'est pas adoptée par hasard : 1916 marque le début des travaux de Weyl en relativité générale, 1931 correspond à l'année de publication de la seconde édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. D'un côté, entre 1916 et 1923, Weyl s'intéresse essentiellement au développement de la géométrie

différentielle et de la relativité générale ; d'un autre côté, entre 1924 et 1931, il effectue l'essentiel de ses recherches en théorie des représentations de groupes et il applique ce cadre à la mécanique quantique dont les fondements viennent d'être établis sous des modalités différentes (mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan, mécanique ondulatoire de Schrödinger), avant d'être unifiés par von Neumann en 1927. Ces deux blocs sont représentés par les deux grandes monographies de Weyl : *Raum, Zeit, Materie* d'une part, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* d'autre part. Il y aurait un strict parallélisme entre les *mathématiques* et la *physique mathématique* dans l'œuvre de Weyl.

Ce constat, qui est vrai en première approximation, mérite cependant d'être nuancé. Nous l'avons établi en prenant exclusivement en compte le développement interne de l'œuvre de Weyl. Or, plusieurs données montrent l'insuffisance d'une telle approche. (i) Par exemple, la théorie unifiée des champs de Weyl s'inscrit dans le programme de Mie-Hilbert, elle donne lieu à une réception très contrastée parmi les mathématiciens, les physiciens mathématiciens, les physiciens théoriciens et les philosophes des sciences. Or, ces données sont décisives pour saisir les spécificités des rapports que Weyl établit entre les mathématiques, la physique mathématique et la physique théorique lorsqu'il formule cette théorie unitaire. (ii) Il ne faut pas croire que son intérêt pour la mécanique quantique découle *naturellement* de ses travaux sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. La correspondance de Weyl montre par exemple qu'il multiplie d'abord les contacts avec les plus éminents acteurs en mécanique quantique et qu'il s'approprie de proche en proche les innovations de Heisenberg-Born-Jordan, Schrödinger, von Neumann, Pauli, Dirac, etc. En retour, il doit les convaincre que les méthodes issues de la théorie des groupes sont opératoires en mécanique quantique. Là encore, la réception de ses travaux est complexe et contrastée : enthousiasme de Heisenberg, scepticisme de Schrödinger, rejet catégorique par Born. En outre, en 1918-1921, il croit pouvoir déduire une théorie physique empiriquement conséquente à partir d'un cadre géométrique construit entièrement *a priori*, il dévalorise corrélativement la physique théorique au profit de la physique mathématique. Les objections d'Einstein contre sa théorie unitaire montrent non seulement que celle-ci est en désaccord avec la réalité empirique, mais de plus que la physique mathématique ne peut pas donner lieu à des théories physiques empiriquement conséquentes sans l'appui de la physique théorique et de la physique expérimentale. Bien que l'ouvrage de Weyl sur la mécanique quantique relève également de la physique mathématique, il n'est plus du tout question de dévaloriser la physique expérimentale ou la physique théorique. D'ailleurs, cette monographie manifeste un tournant empirique chez Weyl qui nous aurait complètement échappé si nous nous en étions tenus au constat d'un strict

parallélisme dans l'œuvre de Weyl entre les mathématiques et la physique mathématique.

Malgré les divergences qui séparent les deux monographies de Weyl sur un plan épistémologique, on peut repérer un certain nombre de constantes qui mériteront analyse. Dans les deux cas, Weyl s'adresse conjointement à un public de physiciens et de mathématiciens. L'organisation d'ensemble de ces deux monographies en parties mathématiques et physiques nettement séparées le montre. Toutes deux sont issues de cours donnés à l'ETH de Zürich. Mais, d'un autre côté, loin de se contenter de présenter deux théories bien constituées (la relativité générale d'une part, la mécanique quantique non relativiste d'autre part), Weyl s'intéresse à leurs prolongements : théorie unifiée des champs dans le cas de la relativité générale, théorie de Dirac [1] en mécanique quantique. Ainsi, ces deux monographies ne manifestent pas seulement un enseignement en physique mathématique à l'ETH de Zürich, mais également un programme de recherche collectif auquel Weyl participe. Elles ne présentent pas des théories bien constituées, mais des théories en cours de développement qui, considérées en elles-mêmes, n'embrassent pas l'ensemble des interactions physiques. S'il ne se manifeste pas de la même manière en 1918 et en 1928-1929, l'intérêt de Weyl pour des projets de grande unification est une constante dans son œuvre. Cet intérêt ne peut pas être explicité convenablement tant que l'on feint d'ignorer les réseaux de relations que Weyl tisse, notamment via sa correspondance, et tant que l'on n'étudie pas l'impact que la réception de ses articles et de ses ouvrages peut avoir en retour sur l'évolution de ses réflexions. La dynamique à l'œuvre dans ses recherches ne saurait être bien comprise tant que l'on croit qu'elles expriment les intentions d'une individualité isolée.

Les quelques indications que nous venons de donner suggèrent déjà les choix méthodologiques qui seront les nôtres au cours de cette thèse. Nous nous proposons maintenant de les expliciter. En premier lieu, nous synthétiserons les travaux de scientifiques que Weyl s'approprie pour élaborer ses propres articles et ouvrages afin de faire ressortir le souci d'exhaustivité dont il fait preuve à chaque fois qu'il investit un nouveau domaine de recherche. Corrélativement, nous montrerons qu'il est rigoureusement impossible de situer historiquement son œuvre en fonction de rapports de filiation simples. En second lieu, nous décrirons systématiquement la réception des travaux de Weyl non seulement parce qu'elle nous permet de mesurer leur spécificité, mais aussi parce qu'elle est cruciale pour saisir la dynamique et les réorientations successives de ses recherches en fonction des remarques et objections de ses interlocuteurs. Par exemple, nous étudierons et comparerons la réception de la théorie unitaire de Weyl par Einstein, Reichenbach ou encore Hilbert. Nous verrons aussi que les objections

1. La théorie de Dirac consiste à unifier la mécanique quantique et la relativité restreinte

de Pauli expliquent pourquoi Weyl renonce finalement à envisager la structure élémentaire de la matière en termes de champs à partir de l'été 1920. D'où l'écart qui sépare la troisième et la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie* qui sont publiées respectivement en 1919 et en 1921. L'importance que nous accordons aux sources de Weyl et à la réception de ses travaux confirme l'idée selon laquelle nous ne considérons pas son œuvre comme l'expression d'une individualité isolée que l'on s'aventurerait à décrire indépendamment des processus collectifs ou, plus exactement, des configurations, c'est-à-dire des liens d'interdépendance qui unissent Weyl à d'autres acteurs et par rapport auxquels il se singularise.

Mais, d'un autre côté, nous éviterons de saisir son œuvre comme une manifestation pure et simple de logiques *institutionnelles* ou *disciplinaires* monolithiques qui le transcenderaient. Nous ne pouvons pas périodiser l'œuvre de Weyl uniquement en fonction des cadres institutionnels dans lesquels il évolue (Göttingen jusqu'en 1913, l'ETH de Zürich entre 1913 et 1930, à nouveau Göttingen entre 1930 et 1933, enfin Princeton juqu'en 1951 en alternance avec l'ETH de Zürich). Prenons un contre-exemple. Professeur à l'ETH de 1913 à 1930, il participe à la formalisation de la relativité générale entre 1916 et 1923 en utilisant des techniques et un savoir-faire conformes à l'école de physique mathématique de Göttingen. D'ailleurs, la réception de sa théorie unitaire est particulièrement intense à Göttingen. Parallèlement, au cours de cette période, ses liens d'amitiés avec F. Medicus, professeur de philosophie et de pédagogie à l'ETH de Zürich, le poussent à s'intéresser à la philosophie de Fichte, ce qui aura une incidence très directe sur l'épistémologie sous-jacente à sa théorie unifiée des champs (Hilbert la rejettera d'un revers de la main en jugeant que Weyl n'a produit là que de la physique hégélienne). Nous voyons bien ici que les logiques institutionnelles se superposent et qu'elles sont en tension, elles ne permettent pas dire que Weyl pratiquerait des mathématiques radicalement différentes dès qu'il intègre l'École polytechnique fédérale de Zürich. Inversement, les développements de l'algèbre abstraite conduiront Weyl à se sentir isolé après son recrutement à Göttingen pour remplacer Hilbert en 1930. Cela posé, autant Weyl est conscient de certaines *logiques disciplinaires* — par exemple, pour des raisons différentes, il considère É. Cartan, E. Noether et Artin comme des « algébristes » —, autant il cherche systématiquement à brouiller dans son œuvre les *frontières entre disciplines* mathématiques. Son mode opératoire est alors toujours le même : il prend des objets mathématiques dont les propriétés sont très riches — nous pensons notamment aux surfaces de Riemann ou aux groupes de Lie —, il montre qu'on peut les traiter en « algébriste », en « topologue » ou en « analyste » mais, une fois établis ces différents points de vue, il entend les combiner parce que de leur synthèse résulte un éclairage nouveau sur les objets étudiés. Il résume d'ailleurs ce mode opératoire dans sa

conférence de 1931 intitulée « Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege des mathematischen Verständnisses ». La proximité avec Klein ne peut pas ici être éludée : en effet, dans ses leçons sur l'icosaèdre (1884) que Weyl prend très souvent pour modèle, Klein combine différents champs disciplinaires et divers cadres théoriques pour étudier un même objet.

0.4 Délimitation et constitution du corpus

La constitution de notre corpus s'est faite progressivement. Nous avons commencé par traduire l'article de Weyl sur les représentations linéaires des groupes de Lie complexes semi-simples (1925-1926). Nous avons formulé plusieurs problèmes au cours de ce travail de traduction.

(a) Est-ce un trait spécifique à ce texte que de confronter une diversité de sources et de méthodes pour étudier un même objet mathématique ?

(b) Qu'est-ce qui explique l'intérêt de Weyl pour la théorie des groupes de Lie en tant que telle à partir de 1924 ?

(c) Existe-t-il un lien entre la pratique des mathématiques à l'œuvre dans cet article et la voie moyenne entre le formalisme et l'intuitionnisme qu'il adopte dès 1924 ?

(d) Comment situer ce texte dans l'œuvre de Weyl, mais aussi dans l'histoire de la théorie des groupes et des représentations de groupes à plus long terme ?

(e) Quel usage fait-il ensuite de ce cadre théorique pour mathématiser la mécanique quantique ?

À partir de cette première référence textuelle, nous nous sommes rendu compte qu'il est rigoureusement impossible d'en proposer un commentaire précis en la considérant pour elle-même. Nous avons commencé à mesurer à quel point les productions scientifiques et épistémologiques de Weyl sont solidaires les unes des autres. Pour donner deux exemples, Weyl transpose aux groupes de Lie en 1925 les connaissances en *analysis situs* acquises avec la publication de *Die Idee der Riemannschen Fläche* en 1913 ; à la fin de son ouvrage de synthèse sur le problème de l'espace intitulé *Die mathematische Analyse des Raumproblems* (1923), il propose une définition implicite ou par axiomes du concept de groupe infinitésimal abstrait — i.e. d'algèbre de Lie — en s'inspirant de l'axiomatisation des espaces vectoriels qui figure au début de *Raum, Zeit, Materie*. Cette définition d'un groupe infinitésimal abstrait resurgit littéralement dans les premiers paragraphes de l'article de 1925-1926 sur les groupes continus et elle a une fonction cruciale pour parvenir à une théorie *générale* des groupes de Lie complexes semi-simples et de leurs représentations.

Les diverses ramifications que nous avons pu tracer à partir de la référence à cet article de 1925-1926 ont conditionné pour une bonne part notre corpus ou, tout du moins, elles nous ont permis de le borner. Ainsi, nous ne dirons quasiment rien des contributions de Weyl en théorie des nombres ou en théorie des équations aux dérivées partielles. Réciproquement, nous avons pris conscience que nous ne pouvions pas faire l'impasse sur *Die Idee der Riemannschen Fläche* d'autant que dans cet ouvrage, comme dans l'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie, Weyl confronte et dialectise des méthodes qu'il commence par opposer : méthodes topologiques et intégrales de Riemann / méthodes algébriques et locales de Weierstrass en analyse complexe ; méthodes topologiques et intégrales de Hurwitz-Schur / méthodes algébriques et infinitésimales de Cartan en théorie des groupes de Lie. Nous avons donc là une constante dans son œuvre qui mérite d'être relevée. Cela posé, il s'avère que Weyl étudie très progressivement la théorie des groupes et des algèbres de Lie pour elle-même. Entre 1921 et 1923, il commence par réaliser la puissance de ce cadre théorique pour résoudre le problème de l'espace. De plus, dès 1924, il envisage de fonder le calcul tensoriel sur des méthodes issues de la théorie des groupes. Il s'agit là de deux données significatives pour comprendre comment Weyl passe de la géométrie différentielle à la théorie des groupes de Lie et de leurs représentations. En outre, il nous a semblé nécessaire d'étudier les incidences de cet article de 1925-1926 sur les travaux publiés par Weyl en mécanique quantique entre 1927 et 1931 sans céder à l'hypothèse facile selon laquelle l'intérêt de Weyl pour les représentations de groupes expliquerait *naturellement* son intérêt — semble-t-il ultérieur — pour la mécanique quantique. Or, aux yeux de la plupart de ses collègues physiciens, il n'a pas du tout semblé naturel d'utiliser la théorie des groupes en mécanique quantique. De plus il s'avère que Weyl s'intéresse à la mécanique quantique dès 1925, comme en atteste sa correspondance.

Nous avons donc décidé de constituer notre corpus sur une période qui s'étend de 1910 à 1931 à quelques exceptions près. En effet, certaines réflexions philosophiques rédigées par Weyl entre 1951 et 1955 s'avèrent très précieuses parce qu'il porte alors un regard rétrospectif sur sa pratique scientifique, ses positions concernant l'usage des procédures axiomatiques et des procédures constructives en mathématiques, son rapport aux philosophies de Fichte et de Husserl à la fin des années 10 et au cours des années 20, etc. En outre, nous avons consulté les notes de cours et les fascicules tapuscrits de Weyl en théorie des groupes à l'université de Princeton entre 1934 et 1949. Ils sont conservés dans les archives Weyl à l'ETH de Zürich. Or, il s'avère que les cours de 1934-1935 doivent être situés dans le prolongement immédiat de l'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie et leurs représentations. Pour cette raison, ils méritent d'être mentionnés et commentés. Malheureusement, la plupart des cours qu'il

a donnés à l'ETH de Zürich (1916-1930) et à l'université de Göttingen (1930-1933) sont inexploitables pour l'instant puisqu'ils ont été conservés sous la forme de notes sténographiées. Ceci est d'autant plus regrettable que nous ne connaissons aucun ouvrage scientifique ni aucun article majeur de Weyl qui aurait été rédigé indépendamment de ses enseignements. Par exemple, les cours qu'il donne à l'ETH de Zürich en 1917 et en 1927-1928 lui permettent de préparer ses deux grandes monographies : *Raum, Zeit, Materie* et *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. De même son article sur les représentations des groupes de Lie est précédé d'un cours sur les groupes continus à l'ETH en 1924. À cela s'ajoute que Weyl donne un enseignement sur les représentations linéaires des groupes de Lie à Göttingen en 1926-1927 et à Princeton en 1934-1935.

Nous avons essentiellement étudié les ouvrages, articles et cours exploitables de Weyl qui ont pour objet les surfaces de Riemann (1910-1913, 1916), la géométrie différentielle dans le contexte de la mathématisation de la relativité générale (1917-1923) et enfin la théorie des représentations de groupes ainsi que ses applications à la mécanique quantique (1924-1931). Nous nous sommes également appuyés, autant que possible, sur sa correspondance avec Klein, Einstein et von Neumann, sans négliger certains échanges épistolaires avec d'autres protagonistes : Born, Jordan, Heisenberg, Schrödinger, etc. Ce choix se justifie pour trois raisons : (i) nous avons ainsi tous les éléments de connaissance nécessaires pour commenter l'article de 1925-1926 sur les groupes continus ; (ii) notre périodisation est suffisamment longue pour que nous puissions saisir les différentes positions de Weyl sur les fondements des mathématiques à la lumière de sa pratique scientifique ; (iii) nous sommes à même de comparer les deux grandes monographies de Weyl, à savoir *Raum, Zeit, Materie* et *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, en prenant soin de décrire leur contexte d'élaboration et leur réception. Nous pourrons ainsi étudier et comparer le lien entre physique et mathématiques dans ces deux œuvres et confirmer l'hypothèse d'E. Scholz selon laquelle l'épistémologie de Weyl est marquée par un tournant empirique au milieu des années 20.

Plusieurs problèmes orientent l'étude de ce corpus.

(a) Quelles sont les fonctions que Weyl prête à la méthode axiomatique et quels sont les usages qu'il en fait dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *Raum, Zeit, Materie*, ses articles sur les groupes continus ou encore *Gruppentheorie und Quantenmechanik* ? Qu'est-ce qui le singularise sur ce point par rapport à Hilbert et certains « algébristes » — essentiellement E. Noether, Artin ou encore van der Waerden ? Si Weyl a largement recours aux définitions implicites ou par axiomes dans une veine hilbertienne, il n'assigne pas de fonctions heuristiques à la méthode axiomatique et il estime *in fine* qu'elle doit être complétée

par des procédures constructives ; elle est insuffisante pour fonder les mathématiques. Qu'en est-il en physique ? Weyl souhaite-t-il étendre la méthode axiomatique aux théories physiques conformément au programme d'axiomatisation de la physique de Hilbert ? N'estime-t-il pas plutôt à l'instar d'Einstein qu'elle est grossièrement simplificatrice lorsqu'elle est appliquée à la physique ? Nous verrons que Weyl prend parti pour Einstein, même s'il reconnaît une certaine pertinence à la méthode axiomatique en physique à des fins pédagogiques.

(b) Quelle conception a-t-il de l'unité des mathématiques et de la physique ? Sur quoi fonde-t-il cette « unité » ? Sur des méthodes, des concepts, des théories englobantes, ou encore des champs disciplinaires ? Voici l'élément de réponse que nous aurons à confirmer dans notre thèse : Weyl estime qu'il ne suffit pas de systématiser la méthode axiomatique à toutes les branches de la mathématique pour l'unifier puisqu'on ne fait alors qu'homogénéiser les modes de traitement et les raisonnements issus des divers champs disciplinaires qui la constituent. Il ne s'agit guère alors que d'une unité de surface. De plus, contrairement à E. Noether et Artin, il refuse d'ériger l'algèbre au rang d'une discipline-modèle dont l'exemplarité suffirait à unifier la mathématique. C'est alors nier sa diversité et donc l'uniformiser en accordant hâtivement une trop grande hégémonie aux méthodes algébriques. Au contraire, Weyl entend dialectiser des méthodes différentes dans l'étude d'un même objet ; de la sorte, il met *in concreto* à l'épreuve l'unité des mathématiques. Par ailleurs, en physique, Weyl est à la recherche d'une théorie qui unifie les interactions connues, comme en attestent sa théorie unifiée des champs (1918-1921) qui constitue une extension de la relativité générale et ses articles de 1928-1929 qui prennent pour point de départ la mécanique quantique relativiste de Dirac. Toujours est-il que les questions d'unité motivent ses recherches et conditionnent sa pratique scientifique tant en mathématiques qu'en physique.

(c) Comment conçoit-il le rapport entre une théorie physique, le cadre mathématique qui permet de la formaliser et les expériences par lesquelles elle est vérifiée ou réfutée ? Nous verrons que la réponse à cette question n'est pas unilatérale chez Weyl. Il la module en fonction des théories qu'il investit : relativité générale, théorie unifiée des champs et mécanique quantique. Ainsi, en 1918, il croit pouvoir déduire régulièrement une théorie physique empiriquement conséquente à partir d'un cadre géométrique construit *a priori*. En revanche, en 1927-1928, il prend le soin de revenir régulièrement sur les expériences qualitatives de la spectroscopie en mécanique quantique avant de montrer comment ces données expérimentales peuvent être rassemblées dans le cadre formel de la théorie des représentations de groupes.

(d) Quel rapport peut-on établir entre sa pratique des mathématiques et les philosophies qu'il discute ou qu'il s'approprie ? Précisons tout d'abord que Weyl se réfère essentiellement

à des philosophies de la conscience dans son œuvre, à savoir le criticisme kantien, l'idéalisme fichtéen et la phénoménologie de Husserl. D'une manière un peu grossière, nous pouvons dire que ce privilège accordé aux philosophies de la conscience est conforme aux prises de position de Weyl sur les fondements des mathématiques : son adhésion au programme de Brouwer (1919-1923) ainsi que la voie moyenne entre l'intuitionnisme et le formalisme qu'il adopte à partir de 1924 montrent qu'il accorde un rôle central à l'intuition et donc à la conscience dans la construction des théories mathématiques, même s'il admet *in fine* que toute visée intuitive doit être guidée par la méthode axiomatique. Cela posé, nous pouvons affiner le rapport que Weyl entretient aux trois philosophies de la conscience que nous avons mentionnées. Tout d'abord, la théorie fichtéenne de l'espace nourrit ses réflexions sur le statut de l'espace-temps de la physique entre 1918 et 1920. De plus, il se réfère à l'idéalisme fichtéen alors même qu'il adopte une attitude très spéculative lorsqu'il élabore sa théorie unifiée des champs : sa pratique des mathématiques reflète alors le style de philosophie auquel il adhère. Ensuite, rappelons que Weyl assiste à des cours de Husserl durant ses études à Göttingen. Ajoutons que la femme de Weyl est une élève de Husserl ; elle joue un rôle déterminant afin d'expliquer l'intérêt de Weyl pour cette philosophie. Non seulement la préface à *Raum, Zeit, Materie* renvoie aux concepts majeurs de la phénoménologie (*épochè*, conscience donatrice de sens, etc.), mais de plus Weyl considère plus profondément le problème de l'espace comme un problème mathématique *et* phénoménologique. Celui-ci constitue donc un nouveau point de coïncidence entre sa pratique des mathématiques et les philosophies qu'il s'approprie. Enfin, le criticisme kantien est largement discuté par Weyl dans ses articles de recherche en relativité générale et dans son ouvrage de vulgarisation philosophique intitulé *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927). Weyl critique alors de manière très précise la théorie kantienne de l'espace et de la connaissance sans la rejeter d'un revers de la main. Nous aurons à en rendre compte au cours de notre thèse. En particulier, le deuxième chapitre de la deuxième partie est entièrement consacré à la réception de la théorie kantienne de l'espace par Gauss, Riemann et Weyl.

0.5 « Groupes », « invariants », « géométries » : trois concepts déclinés par Weyl dans son œuvre

Nous avons décidé de mettre en exergue les concepts de groupes, de géométries et d'invariants dans le titre de notre thèse pour une première raison : nous avons voulu souligner

par là que Weyl se situe dans le prolongement de Klein. En effet, dans son *Programme d'Erlangen* (1872), ce dernier définit une *géométrie* comme l'ensemble des propriétés d'un espace donné qui demeurent *invariantes* sous l'action d'un *groupe* de transformations. La référence au *Programme d'Erlangen* est récurrente dans l'œuvre de Weyl : il le mentionne dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), dans l'introduction à son cours en théorie des invariants à Göttingen (1931-1932) et au début de ses cours en théorie des groupes à l'université de Princeton (1946, 1949). Il y revient une dernière fois dans son cycle de conférences sur les symétries (1951) d'où est issu son ouvrage de vulgarisation le plus connu : *Symmetry* (1952). Pourtant, dans ses recherches, Weyl est loin de se restreindre aux géométries au sens de Klein, i.e. à des espaces homogènes : ses développements les plus spectaculaires se situent en géométrie différentielle (définition intrinsèque du transport parallèle) et en géométrie métrique (généralisation non triviale de la géométrie riemannienne). Sur un plan géométrique, il s'agit donc pour Weyl de dialectiser les méthodes de Riemann (1854) et de Klein (1872), programme qu'E. Cartan portera à son comble dans les années 20 avec sa théorie des espaces généralisés. Plus radicalement, Weyl ambitionne de faire converger systématiquement la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann, comme en témoigne un texte de 1925 édité en 1988 et dont le titre est pour le moins explicite : *Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie.*

Les concepts de groupes, de géométries et d'invariants sont également cruciaux dans les trois théories physiques auxquelles Weyl s'intéresse : la relativité restreinte, la relativité générale et la mécanique quantique. Ainsi, en relativité restreinte, on parle de géométrie de Minkowski. Les propriétés de cette géométrie sont invariantes lorsque l'on fait agir transitivement le groupe de Poincaré — i.e. le produit semi-direct de $\mathrm{O}(3,1)$ par $\mathbb{R}^4$ — sur la variété d'espace-temps de la relativité restreinte, qui est donc supposée homogène. Cette invariance a un sens physique, puisque les lois de la nature doivent demeurer formellement inaltérées par le groupe de Poincaré. Cartan affirme très justement en 1927 que l'espace-temps de la relativité restreinte est de type Klein. En revanche, l'espace-temps de la relativité générale est de type Riemann. Il s'agit d'une variété pseudo-riemannienne qui n'est pas supposée *a priori* homogène. Dans ce cadre, les lois de la nature doivent être généralement covariantes par le groupe des difféomorphismes d'espace-temps. Weyl insiste sur ce point non seulement dans le chapitre IV de *Raum, Zeit, Materie*, mais également lorsqu'il construit sa théorie unifiée des champs. Celle-ci est fondée sur une géométrie plus générale que la géométrie riemannienne. Elle met en jeu une invariance par changement d'échelle ou de jauge en plus de l'invariance par changement arbitraire de coordonnées. Weyl associe à ces deux principes d'invariance res-

pectivement la conservation de la charge électrique et la conservation de l'énergie-impulsion. Enfin, en mécanique quantique (non relativiste), la « géométrie unitaire »[2] caractérise les propriétés de l'espace des états d'un système quantique qui, mathématiquement parlant, est un espace de Hilbert complexe de dimension infinie. Un atome comportant n électrons admet essentiellement deux types de symétries : une symétrie sphérique et une symétrie par permutation des n électrons. Ces symétries doivent être « représentées » sous la forme de principes d'invariance dans l'espace des états du système, ce que Weyl traduit mathématiquement en étudiant les « représentations » du groupe spécial orthogonal SO(3) et du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dans cet espace.

Enfin, le terme d'invariants renvoie plus précisément à la théorie des invariants que Weyl étudie de manière récurrente au cours de sa carrière scientifique. Ainsi, le premier paragraphe de l'article de 1924 intitulé « Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik » est consacré à la théorie des invariants. Dans son article majeur de 1925-1926 sur les groupes de Lie, Weyl généralise les méthodes topologiques et intégrales de Hurwitz pour engendrer des invariants ; plus radicalement, il entend traduire systématiquement la théorie des invariants dans le langage des représentations de groupes. Il donne un cours à Göttingen en théorie des invariants en 1931-1932 dans lequel il aborde ce projet initié à la fin de son article de 1925-1926. Un résumé tapuscrit de ce cours est conservé à la bibliothèque de l'ETH de Zürich. Enfin, il revient en détail sur la théorie des invariants dans un cours à Princeton en 1935-1936. Le fascicule tapuscrit de ce cours, qui fait plus d'une centaine de pages, est également conservé à l'ETH de Zürich. Il en résultera, trois années plus tard, l'ouvrage majeur de Weyl intitulé *Classical groups* (1939), dans lequel la théorie des invariants joue un rôle absolument central.

0.6 Plan de la thèse

Nous avons opté pour un plan à la fois *chronologique* et *thématique* pour des raisons de méthode. D'une part, la polarisation de nos recherches autour de trois thèmes, à savoir les surfaces de Riemann, les variétés et les représentations de groupes, autorise une mise en contexte sur la longue durée pour mieux situer les contributions de Weyl dans l'histoire d'une théorie scientifique — par exemple la théorie des surfaces de Riemann ou la théorie des groupes ou des algèbres de Lie. Nous ne nous en tiendrons donc pas à une description aveugle de ses recherches sur le très court terme. D'autre part, nous faisons nôtre la remarque d'E.

2. Il s'agit du titre du premier chapitre de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

Scholz selon laquelle la dynamique à l'œuvre dans les recherches de Weyl et les inflexions qu'il leur fait subir doivent souvent être situées à l'année près, chose qu'il nous serait difficile d'effectuer si nous ne suivions pas rigoureusement un ordre chronologique dans la production de ses écrits. Par exemple, deux années seulement séparent la troisième et la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie*, pourtant Weyl tire des conclusions radicalement différentes sur la structure élémentaire de la matière à la fin de ces deux éditions. Il faut donc le suivre pas à pas pour identifier, décrire et expliquer ces changements. Chaque partie commence donc par des mises en perspective sur le long terme qui sont nécessaires pour avoir une meilleure intelligibilité de la situation des productions de Weyl dans l'histoire d'une théorie scientifique. En revanche, lorsque nous étudions les textes mêmes de Weyl, nous insistons sur les écarts qui peuvent se jouer à très court terme entre des publications portant sur le même objet. Ces variations d'échelle sur un plan historique sont assumées et elles offrent différents éclairages sur son œuvre qu'il s'agit de combiner. Cela posé, nous avons proposé un système de renvois afin que ces trois parties ne soient pas envisagées comme des totalités fermées, hermétiques les unes aux autres. Ainsi, la première partie s'ouvre sur un commentaire de la *Dissertation* de Riemann (1851) et une synthèse des lectures qu'en proposent Klein en 1882, Weyl en 1910-1913 et Lautman en 1937. Parallèlement, la deuxième partie est d'abord consacrée au *Habilitationsvortrag* de Riemann (1854) que Weyl commente de manière récurrente entre 1917 et 1927. Aux chapitres 3 et 4 de la seconde partie, qui ont pour objet la formalisation de la relativité générale et la théorie unifiée des champs de Weyl, correspond le chapitre 3 de la troisième partie consacré au projet de mathématisation de la mécanique quantique par Weyl que nous avons comparé à d'autres projets concurrents ou complémentaires.

Détaillons plus précisément notre plan. La première partie s'intitule « Les surfaces de Riemann et l'*analysis situs* ». Il s'agit donc tout d'abord de revenir dans un premier chapitre sur la thèse que Riemann consacre aux fonctions d'une variable complexe (1851) et, dans une moindre mesure, sur sa *Théorie des fonctions abéliennes* (1857). Notre but est alors de comparer les commentaires qu'en ont proposés Klein, Weyl et Lautman. Précisons d'emblée que Weyl reprend très largement à son compte la lecture kleinéenne de la *Dissertation* de Riemann. En particulier, Klein insiste sur l'importance vraie ou supposée d'intuitions physico-géométriques qui auraient guidé Riemann dans ses recherches, notamment en analyse complexe. Dans le deuxième chapitre, nous résumons les divers travaux de Klein sur les surfaces de Riemann et nous indiquons comment Weyl se les approprie. Nous insistons également sur la célèbre conférence de Klein sur « l'arithmétisation des mathématiques » (1895) qui a une incidence directe sur l'épistémologie que développe Weyl au moment où il écrit *Die Idee*

der Riemannschen Fläche. Le dernier chapitre est entièrement consacré au commentaire de cet ouvrage. Nous rappelons que Weyl le publie en 1913, soit six ans après la démonstration du *théorème d'uniformisation* par Koebe et Poincaré — et plus d'une dizaine d'années après la démonstration du *principe de Dirichlet* par Hilbert. Koebe est alors *Privatdozent* à l'université de Göttingen et ses travaux sur le théorème d'uniformisation sont largement plébiscités par Hilbert et Klein. Notre étude de *Die Idee der Riemannschen Fläche* permet d'insister sur les points suivants : (a) à la suite de Koebe, Weyl juge les méthodes de Riemann et de Weierstrass complémentaires en analyse complexe ; (b) Weyl adopte la méthode des définitions par axiomes dans une veine hilbertienne pour définir rigoureusement les concepts de surface topologique et de surface de Riemann ; (c) En conséquence, il souscrit non sans réserve à une conception « formaliste » des mathématiques, tout en reconnaissant avec Klein l'importance des représentations intuitives à des fins pédagogiques et heuristiques, d'où une double synthèse entre Weierstrass et Riemann d'une part, Hilbert et Klein d'autre part ; (d) il parvient à une classification des revêtements d'une surface de Riemann qu'il transposera à l'étude des groupes de Lie et de leurs représentations en 1925-1926.

La deuxième partie s'intitule « Variétés, univers et relativité générale ». Elle a essentiellement pour objet les diverses éditions de *Raum, Zeit, Materie* (1918 pour la première édition, 1923 pour la cinquième édition) ainsi que les articles et autres publications connexes à cette monographie. Nous avons organisé cette partie en fonction des différentes lectures que Weyl propose de le *Habilitationsvortrag* de Riemann entre 1917 et 1927, à savoir une lecture historienne (chapitre 1), une lecture philosophique (chapitre 2) et une lecture mathématicienne (chapitres 3 et 4). Nous adoptons cet angle d'attaque pour une raison très précise : Weyl publie une édition commentée de la *Leçon d'habilitation* de Riemann chez Springer en 1919, 1921 et 1923. Ainsi, dans le premier chapitre, nous proposons une analyse critique de la filiation Gauss / Riemann que Weyl reconstruit dans les §§ 11 et 12 de *Raum, Zeit, Materie* et le parallèle qu'il reprend à Klein entre la physique des actions de contact de Faraday et la géométrie infinitésimale de Riemann. Cette analogie apparaît notamment dans le commentaire que Weyl adjoint à la réédition, par ses propres soins, du *Habilitationsvotrag* de Riemann. Dans le deuxième chapitre, nous décrivons de manière systématique les éléments de réfutation que Gauss, Riemann et Weyl formulent à l'encontre de la théorie kantienne de l'espace. D'ailleurs, Weyl s'appuie sur les arguments de ces deux prédécesseurs et sur les développements de la relativité générale pour discuter la conception kantienne de l'espace. Le troisième chapitre est entièrement consacré à la géométrie purement infinitésimale de Weyl. Celui-ci part du constat suivant : la géométrie de Riemann conserve un résidu de géométrie

à distance — il est toujours possible de comparer directement les longueurs de deux vecteurs attachés à des points *distincts* dans une variété riemannienne. Il propose de le mettre de côté pour construire une classe de variétés métriques qui généralise les variétés riemanniennes. À partir de ce cadre géométrique, il propose une théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique dont les inconséquences empiriques sont soulignées par Einstein dès 1918. Dans le quatrième chapitre, nous revenons sur la construction et la résolution du problème de l'espace — i.e. le problème qui consiste à caractériser la nature de la métrique de l'univers — que Weyl commence à construire dans son commentaire du *Habilitationsvortrag* de Riemann avant de le résoudre entre 1921 et 1923.

La dernière partie s'intitule « Représentations de groupes, symétries et mécanique quantique ». Elle a essentiellement pour objet l'article de 1925-1926 sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples et la monographie de Weyl en mécanique quantique, à savoir *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928 pour la première édition, 1931 pour la seconde édition). Dans le premier chapitre, nous faisons des rappels sur les travaux de Cartan en théorie des groupes de Lie — essentiellement sa thèse (1894) et un article de 1913 —, l'article de Hurwitz de 1897 en théorie des invariants et la série d'articles que Frobenius publie entre 1896 et 1903 sur la théorie des caractères et des représentations des groupes finis. Dans le deuxième chapitre, nous commentons en détail l'article de Weyl et en particulier les méthodes qu'il confronte et qu'il dialectise — à savoir la méthode algébrique et locale de Cartan et la méthode topologique et intégrale de Hurwitz-Schur. Nous montrons que ce texte est exemplaire pour comprendre la conception de l'unité des mathématiques défendue par Weyl. De plus, cet écrit illustre parfaitement la voie moyenne entre procédures axiomatiques et procédures constructives qu'il adopte dès 1924. Nous insistons également sur la singularité des raisonnements de Weyl dans cet article par rapport aux deux « algébristes » dont il critique les méthodes, à savoir E. Noether et Artin. Dans le troisième chapitre, nous abordons le vaste projet de mathématisation de la mécanique quantique que Weyl commence à esquisser en 1925 avant de le réaliser pleinement entre 1927 et 1931. Nous le comparons à d'autres projets concurrents de formalisation de la mécanique quantique. Nous repérons les fonctions que Weyl prête à la théorie des groupes et des représentations de groupes en mécanique quantique. Nous montrons également qu'il ne conçoit plus le rapport entre la physique mathématique, la physique théorique et la physique expérimentale de la même manière lorsqu'il passe de la relativité générale à la mécanique quantique. Cela tient d'abord à l'importance de la physique expérimentale et en particulier des données issues de la spectroscopie en mécanique quantique, mais cette explication n'est pas suffisante. Nous avons affaire à un tournant empirique

chez Weyl au milieu des années 20 dont nous entendons préciser les caractéristiques pour savoir s'il a quelques parentés avec les positions défendues par les principaux représentants du positivisme logique — Reichenbach, Schlick ou encore Carnap. Enfin, dans un quatrième chapitre, nous revenons de manière transversale sur le statut et les fonctions que Weyl et Wigner assignent aux principes d'invariance et aux symétries dans une diversité de théories physiques, ce qui montre en filigrane à quel point la théorie des groupes leur paraît centrale pour les formaliser.

Première partie

Les surfaces de Riemann et l'*analysis situs*

Introduction : une théorie abstraite des surfaces de Riemann

Situation et statut de *Die Idee der Riemannschen Fläche* de Weyl

H. Weyl publie *Die Idee der riemannschen Fläche*[3] en 1913 alors qu'il est *Privatdozent* à l'université de Göttingen. Il est frappant de constater qu'il se réfère indistinctement à Riemann, Weierstrass, Schwarz, Klein, Hilbert, Koebe ou encore Brouwer, c'est-à-dire à des protagonistes que l'on rattache avec plus ou moins de bonheur à des écoles de pensée antagonistes. Par exemple, dans son *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, Lautman oppose le point de vue topologique et intégral de Riemann et le point de vue algébrique et local de Weierstrass en analyse complexe. [4] Parallèlement, on serait tenté de supposer que les travaux de Hilbert doivent être rattachés au *formalisme* et qu'ils se situeraient aux antipodes de l'intuitionnisme de Brouwer. Guidés par de tels antagonismes, nous serions amenés à penser que Weyl ne peut que se contredire sur un plan mathématique et philosophique dans son ouvrage de 1913.

Plusieurs données factuelles permettent de corriger cette première lecture. S'il y a bien une opposition entre Hilbert et Brouwer, elle éclate à la fin des années 10 et elle se prolonge durant les années 20. De plus, entre 1911 et 1913, Brouwer est essentiellement connu à Göttingen pour ses travaux en topologie combinatoire et ensembliste. Weyl ne s'intéresse alors pas directement aux points de vue philosophiques prêtés à Hilbert et Brouwer au sujet des mathématiques en général, mais aux résultats auxquels ils sont parvenus : démonstration du théorème de la dimension et du point fixe chez Brouwer, démonstration du principe de Dirichlet et définition des variétés bidimensionnelles chez Hilbert.

S'il est vrai qu'au cours du dernier tiers du XIX^{e} siècle, on trouve des textes très polémiques de Weierstrass et de Klein — qui est un partisan des méthodes géométriques de Riemann — en analyse complexe, la donne change à l'université de Göttingen au début du XX^{e} siècle. Koebe et surtout Weyl utilisent indifféremment les méthodes de Weierstrass et de Riemann en analyse complexe. Qui plus est, au cours des trois premiers paragraphes de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl construit des surfaces de Riemann — c'est-à-dire des variétés analytiques complexes de dimension 1 — en s'appropriant le processus du prolongement analytique de Weierstrass. L'ouvrage de Weyl, qui innove par son degré d'abstraction, constitue

3. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (erste Auflage), Leipzig et Berlin, éd. Teubner, 1913.

4. A. Lautmann, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, in *Les mathématiques et le réel physique*, Paris, éd. Vrin, 2006, p. 134-135.

également une réinterprétation des publications qui s'échelonnent sur plus d'un demi-siècle en analyse complexe et il constitue une synthèse entre des méthodes qui ne semblaient pas *a priori* conciliables.

La littérature secondaire consacrée à *Die Idee der Riemannschen Fläche* est considérable. Deux ouvrages en particulier méritent toute notre attention. Dans leur important travail consacré aux œuvres de Weyl, Coleman et Korté sont revenus en détail sur les emprunts de Weyl à Weierstrass pour construire rigoureusement des surfaces de Riemann. [5] Dans son imposante étude historique sur les groupes de Lie, Hawkins résume de manière claire, rigoureuse et synthétique les articles de Poincaré et de Koebe consacrés au théorème d'uniformisation avant de montrer comment Weyl opère une classification des revêtements au-dessus d'une surface de base.

Aussi pertinents soient-ils, ces commentaires n'épuisent en rien les problèmes d'ordre historique et épistémologique qui motivent notre étude de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. En effet, Weyl entend prolonger l'article que Klein a consacré aux surfaces de Riemann en 1882. Il est donc nécessaire de situer rigoureusement l'ouvrage de Weyl par rapport à Klein. En outre, il convient d'expliciter la synthèse opérée par Weyl dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* : il ne se contente pas de compiler des connaissances déjà établies sur les surfaces de Riemann. Il leur imprime un style et un mode de présentation inédit, fondé sur la méthode axiomatique. Pourtant, il serait anachronique et inexact de situer l'ouvrage de Weyl à l'intérieur d'une histoire des mathématiques structurales : Weyl hérite de méthodes et de résultats qui sont pour la plupart mis en place au cours de la seconde moitié du XIX^{e} siècle.

Quel statut doit-on accorder à cet ouvrage ? On sait qu'il est issu de cours dispensés par Weyl en 1910-1911 et 1911-1912 en qualité de *Privatdozent* à l'université de Göttingen [6]. Le cours de 1910-1911 est une introduction à la théorie des fonctions d'une variable complexe. Weyl y aborde les principaux résultats en analyse complexe : conditions de Cauchy-Riemann, théorème intégral de Cauchy, formule de Cauchy, théorème des résidus, etc. Dans ce cours, il utilise avec parcimonie la méthode axiomatique préconisée par Hilbert. À l'instar de Klein, il s'appuie sur des intuitions physico-géométriques pour construire et / ou expliciter des

5. R. A. Coleman et Herbert Korté, *Hermann Weyl : Mathematician, Physicist, Philosopher*, in *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to His Scientific Work*, Berlin, Boston, Berlin, éd. Birkhäuser, 2000.

6. Voir en particulier H. Weyl, *The Concept of a Riemann Surface* troisième édition (1955), Addison-Wesley Pub. Co., 1964, p. VII : ≪ This book was first published in 1913. It contained the essentials of some lectures which I gave at the University of Göttingen in the winter semester of 1911-1912 ≫.

résultats et il entend déjà fondre les points de vue de Riemann et de Weierstrass en une même théorie. [7] Il évoque tout juste les surfaces de Riemann à la fin de ce premier cours.

Il aborde la théorie des surfaces de Riemann pour elles-mêmes lors du semestre d'hiver 1911-1912. *Die Idee der Riemannschen Fläche* vient donc prolonger ce second cours. Il s'agit à la fois de définir certains concepts — tels que les variétés, les surfaces de Riemann ou encore les revêtements — et de démontrer à nouveaux frais les principaux théorèmes relevant de l'analyse complexe, parmi lesquels le théorème d'uniformisation que Poincaré et Koebe prouvent indépendamment en 1907. Pour autant, il serait erroné de penser que *Die Idee der Riemannschen Fläche* serait une compilation d'éléments de connaissance déjà bien établis ou que son usage devrait être purement didactique. On se rend rapidement compte que Weyl reprend les dernières avancées concernant par exemple l'uniformisation des fonctions analytiques d'une variable complexe. De plus, il innove par l'usage récurrent de la méthode axiomatique au cours de la première partie de son ouvrage.

Bref, *Die Idee der Riemannschen Fläche* incarne une conception *unifiée* et purement *abstraite* des surfaces de Riemann. *Unifiée*, en ce que le point de vue local et algébrique adopté par Weierstrass en analyse complexe et celui, topologique et intégral, qui caractérise la *Thèse* (1851) et la *Théorie des fonctions abéliennes* (1857) de Riemann font l'objet d'une première synthèse. *Abstraite*, dans la mesure où Weyl définit en général et sous une forme axiomatisée les variétés topologiques et différentielles de dimension 2, avant de montrer qu'une surface de Riemann peut être considérée comme une variété analytique complexe de dimension 1. Coleman et Korté déclarent à ce propos :

> Weyl succeeded in providing a rigorous foundation for Riemann's ideas. The result was a paradigm for future mathematical thought. [8]

Écartons immédiatement deux malentendus qui pourraient survenir à la lecture de cette citation. Weyl n'est ni le premier, ni le seul à tenter de donner une forme adéquate aux travaux de Riemann. Comme nous le verrons dans ce qui suit, Hilbert démontre le principe de Dirichlet dans une série d'articles publiés au début du XX^{e} siècle [9]. Ce même principe joue un rôle central dans la thèse de Riemann (1851) et dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*. Weierstrass conteste la validité de ce principe dans les années 1870, avant donc que Hilbert ne le réhabilite au début du XX^{e} siècle. Qui plus est, en 1902, Hilbert propose une axiomati-

7. H. Weyl, *Einführung in der Funktionentheorie* (1910-1911), Basel, Berlin, Boston, éd. Birkhäuser, 2008.
8. R. A. Coleman, H. Korté, ≪ Hermann Weyl : Mathematician, Physicist, Philosopher ≫, *op. cit.*, p. 182.
9. D. Hilbert, ≪ Über das Dirichlet'sche Prinzip ≫, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8**, 1900, p. 184-188 et ≪ Über das Dirichlet'sche Prinzip ≫, *Mathematische Annalen* **59**, 1904, p. 161-186.

sation du concept de plan et, par extension, de variété bidimensionnelle [10] sur laquelle Weyl s'appuiera en 1913.

Le terme « foundation » utilisé par Coleman et Korté montre que l'ouvrage de Weyl ne se réduit pas à une *formalisation* rigoureuse des résultats dus à ses prédécesseurs. En effet, Weyl montre que l'étude générale des *surfaces de Riemann* doit être *première* selon l'ordre des raisons en analyse complexe. Là encore, Weyl n'innove pas. Il reprend à son compte un argument que Klein défendait avec force dans ses leçons sur les surfaces de Riemann (1882). D'un côté, *Die Idee der Riemannschen Fläche* se caractérise par un usage récurrent de la méthode axiomatique et par un très haut niveau d'abstraction dans la manipulation des concepts ; de l'autre, diverses traditions mathématiques héritées du XIX^{e} traversent cet ouvrage qui, manifestement, ne relève pas encore des mathématiques structurales.

Les surfaces de Riemann : un concept problématique

En définissant les surfaces de Riemann en général comme des variétés analytiques complexes de dimension 1, Weyl met fin à l'une des difficultés fondamentales qui traverse la littérature scientifique consacrée aux surfaces de Riemann pendant le dernier tiers du XIX^{e} siècle : comment saisir en extension et en compréhension le concept de surface de Riemann ? D'autres problèmes méritent d'être soulevés : quel statut doit-on accorder aux surfaces de Riemann en analyse complexe : sont-elles un simple moyen d'appréhender et de visualiser des fonctions initialement multivaluées sur le plan complexe, ou bien peuvent-elles être situées au fondement même de la théorie des fonctions d'une variable complexe ?

Un concept, qu'il soit mathématique ou non, doit être analysé à un double niveau : son *intension* qui correspond aux caractères ou propriétés portées par ce concept et son *extension* qui désigne la classe d'objets ou de phénomènes auxquels il se rapporte. Au cours du § 5 de sa thèse et dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*, Riemann conçoit des surfaces revêtant $\mathbb{C}$ ou la sphère « de Riemann » $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sur lesquelles peuvent être définies des fonctions initialement multivaluées sur $\mathbb{C}$ ou $\widehat{\mathbb{C}}$. De plus, étant donné qu'il privilégie l'étude des surfaces associées à des fonctions algébriques, il définit ces surfaces par des équations de la forme $P[X, Y] = 0$ où $P[X, Y]$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X, Y]$. Dans son mémoire sur les fonctions abéliennes, Riemann se restreint pour l'essentiel à des surfaces qu'il suppose compactes et connexes. Il ne conçoit pas les surfaces de Riemann en toute généralité et il ne les relie pas explicitement au concept de variété qu'il introduit pourtant

10. D. Hilbert, « Über die Grundlagen der Geometrie », *Mathematische Annalen* **56**, 1902, p. 382-383.

dans son *Habilitationsvortrag* en 1854.

D'une manière générale, Riemann s'appuie sur des représentations intuitives et géométriques pour *appréhender* le concept de « surface de Riemann » qui permet en retour de mieux comprendre le comportement des fonctions d'une variable complexe. Il ne faut donc pas s'attendre à trouver dans ses textes une quelconque tentative d'axiomatisation des surfaces de Riemann. Outre qu'il est anachronique de voir l'œuvre de Riemann comme une préfiguration de la méthode axiomatique — y compris son *Habilitationsvortrag* (1854) [11] —, il est nécessaire de préciser que Riemann entend géométriser tout un pan de l'analyse et de la physique. Klein prolonge ce projet au cours du dernier tiers du XIX^{e} siècle. Son ouvrage de 1882 sur les surfaces de Riemann en est un bon exemple : Klein combine intuition géométrique et intuition physique en s'appuyant sur la donnée de surfaces constituées d'un matériau conducteur et traversées par un courant électrique.

A contrario, la méthode axiomatique chère à Weyl dans son ouvrage de 1913 permet de saisir les propriétés des surfaces de Riemann en mettant *provisoirement* de côté tout substrat intuitif. L'axiomatisation d'un concept consiste à le définir implicitement, c'est-à-dire indépendamment de la nature des objets mathématiques qui lui correspondent, à l'aide d'une liste d'axiomes. Par « surface de Riemann », Riemann, Klein et Weyl n'entendent pas exactement le même concept, que ce soit en intension ou en extension. En axiomatisant le concept de surface de Riemann et en le déduisant du concept de variété bidimensionnelle réelle, Weyl lui confère rigueur et grande généralité, ce qui ne signifie pas qu'il met définitivement de côté l'approche plus géométrique adoptée par Klein et Riemann.

Faut-il considérer exclusivement les surfaces de Riemann comme des « revêtements » de $\mathbb{C}$ (resp. de $\widehat{\mathbb{C}}$) ou bien n'est-il pas possible de les envisager en elles-mêmes ? En 1851 comme en 1857, Riemann opte en faveur de la première solution. En revanche, dans son ouvrage de 1882, Klein conçoit les surfaces de Riemann de manière purement intrinsèque, dans la mesure où il veut les classer de manière systématique. Cette démarche sera clairement reprise par Weyl dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Enfin, quel statut doit-on accorder aux surfaces de Riemann en analyse complexe ? Sont-elles un simple *moyen* en vue de visualiser le comportement de certaines « fonctions » initialement multivaluées sur $\mathbb{C}$? Au contraire, ne doivent-elles pas être envisagées au *fondement* de la théorie des fonctions d'une variable complexe ? Comme le laissent entendre nos remarques liminaires, Weyl optera clairement

11. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de la section I.2 (deuxième partie) de notre thèse pour une critique des surinterprétations qui associent le nom de Riemann à la méthode axiomatique.

pour la seconde solution à la suite de Klein. [12]

Vers une théorie ≪ abstraite ≫ des surfaces de Riemann

Dans la préface à la troisième édition de *Die Idee der riemannschen Fläche*, Weyl met en exergue les travaux de Brouwer en topologie (1909-1912), les articles de Hilbert consacrés au principe de Dirichlet (1900, 1904) et le théorème d'uniformisation tel qu'il est prouvé par Koebe en 1907 :

> Three events had a decisive influence on the form of my book : the fundamental papers of Brouwer on topology, commencing in 1909 ; the recent proofs by my Göttingen colleague P. Koebe of the fundamental uniformization theorems ; and Hilbert's establishment of the foundation on which Riemann had built his structure and which was now available for uniformization theory, the Dirichlet principle. [13]

Ces trois événements permettent de situer l'ouvrage de Weyl à court terme. Cependant, *Die Idee der Riemannschen Fläche* doit également être envisagé à une plus large échelle et en fonction d'un processus d'abstraction à plus long terme. En particulier, on ne saurait minimiser les incidences sur Weyl de l'ouvrage que Klein consacre aux surfaces de Riemann en 1882, bien que ce dernier demeure attaché à des représentations intuitives et qu'il soit totalement étranger à la méthode axiomatique. Nous voudrions écarter une ambiguïté conceptuelle à ce propos. Il convient d'insister sur le fait que les couples *intuitif/formel* et *concret/abstrait* ne se recouvrent pas. Nous n'aborderons pas ici la polysémie du terme d'intuition. Notons seulement que Riemann et Klein associent généralement *l'intuition* à des représentations géométriques qui permettent d'appréhender et d'expliciter des propriétés d'*analysis situs*, telles que la connexité ou la simple connexité. Il n'est pas ici question d'intuition intellectuelle. Notre but est de montrer que leur démarche est déjà abstraite, même si elle mérite encore d'être formalisée avec rigueur.

Comme nous le verrons, dans le § 12 de sa *Théorie des fonctions abéliennes*, Riemann se donne *arbitrairement* une surface revêtant la sphère Σ ; il se pose alors un problème d'*existence* : il montre qu'elle est la surface de Riemann d'une fonction algébrique. Bref, il existe toujours une fonction algébrique qui s'uniformise sur une surface arbitrairement donnée revêtant la sphère de Riemann. De même, bien qu'il ait recours à des intuitions ≪ physiques ≫ et géométriques dans son ouvrage de 1882 intitulé *Über Riemanns Theorie*

12. H. Weyl, *op. cit.*, p. VII, ≪ I shared [Klein's] conviction that Riemann surfaces are not merely a device for visualizing the many-valuedness of analytic functions, but rather an indispensable essential component of the theory ≫.

13. *ibid.*, p. VII.

der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Klein *opère une classification* des surfaces de Riemann compactes connexes. Or, on ne peut classer des objets mathématiques que si l'on fait abstraction de certaines de leurs particularités pour montrer s'ils diffèrent ou s'ils sont équivalents en fonction du critère de classification retenu. Deux surfaces de Riemann ne diffèrent pas *essentiellement* l'une de l'autre si et seulement si elles sont conformément équivalentes. Non seulement elles ont les mêmes propriétés *topologiques*, mais de plus elles doivent être conformes en leurs plus petites parties. [14] Klein distingue justement ces deux niveaux de classification des surfaces de Riemann — en fonction de leur structure topologique et en fonction de leur structure analytique [15] — et il parvient à classer de manière exhaustive les surfaces de Riemann compactes connexes.

Il n'est donc pas contradictoire de parler d'une *intuition de l'abstrait* comme le remarque d'ailleurs J. Largeault :

> Dès la géométrie euclidienne les objets des mathématiques sont d'espèce idéale ou abstraite. L'intuition est censée se rapporter à du concret, mais force est d'admettre la possibilité naturelle de développer une intuition de l'abstrait. [16]

Ce n'est pas parce que des mathématiciens tels que Riemann et Klein utilisent régulièrement un support intuitif dans leur raisonnement qu'on doit en inférer que leur démarche serait concrète. En réalité, le problème d'existence que résout Riemann au cours du § 12 de sa *Théorie des fonctions abéliennes* et la classification des surfaces de Riemann compactes connexes opérée par Klein en 1882 participent de plain-pied à une montée en abstraction, quand bien même ils accordent tous deux une place essentielle à des représentations

14. Comme le rappelle H. Weyl, une surface de Riemann admet une structure analytique. C'est cette structure analytique qui permet de définir des fonctions différentiable sur elle : H. Weyl, *Die Idee der riemannschen Fläche*, *op. cit.* p. 35 : ≪ Sur une surface dont on ne prend en considération que des propriétés d'analysis situs, on peut bien parler de fonctions continues, mais non de fonctions ≪ continument différentiables ≫, analytiques (...) . ≫ [≪ Auf einer Fläche, von der allein Analysis-situs-Eigenschaften in Betracht gezogen werden, kann man wohl von stetigen Funktionen sprechen, nicht aber von ≪ stetig differentiierbaren ≫, analytischen (...) Funktionen. ≫]

15. Deux surfaces de Riemann conformément équivalentes sont nécessairement *homéomorphes*. Par contraposition, deux surfaces de Riemann qui ne sont pas homéomorphes ne sont pas conformément équivalentes ou isomorphes. On en déduit immédiatement que $\mathbb{C}$ et $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — c'est-à-dire le compactifié de $\mathbb{C}$ par adjonction d'un point à l'infini — ne sauraient être conformément équivalentes. En revanche, le fait que deux surfaces de Riemann soient topologiquement équivalentes est un critère seulement nécessaire et non pas suffisant afin de déterminer si elles sont isomorphes. Pour le dire autrement, il existe des surfaces de Riemann homéomorphes qui ne sont pas conformément équivalentes. C'est notamment le cas du disque unité — que nous noterons par la suite $\mathbb{D}$ — et du plan complexe de Gauss.

16. J. Largeault,*Intuition et intuitionnisme*, Paris, éd. Vrin, 1993, p. 38.

géométriques dans leurs travaux.

Au cours de son développement, une « même » théorie franchit différents seuils et elle accède ainsi à des niveaux d'abstraction qu'il convient de repérer et de situer. Bref, il nous semble inexact de dire que les approches de Riemann et de Klein seraient concrètes parce qu'elles seraient intuitives, alors que celle de Weyl serait abstraite étant donné qu'elle serait fondée sur la méthode axiomatique. En réalité, Weyl parvient à franchir un nouveau seuil dans un processus d'abstraction qui s'étend sur plus d'un demi-siècle et qui est sans doute amorcé par Riemann lui-même.

Loin de nous cependant l'idée selon laquelle il faudrait considérer le développement de la théorie des surfaces de Riemann sous l'angle d'une histoire linéaire dont l'ouvrage de Weyl constituerait un aboutissement. En outre, bien qu'il introduise d'importantes innovations sur un plan méthodologique, Weyl n'est pas en rupture radicale avec ses prédécesseurs : ses nombreux emprunts témoignent en faveur d'un souci de cumulativité et de synthèse. Il serait erroné et anachronique de considérer *Die Idee der Riemannschen Fläche* comme l'origine d'une approche structurale en topologie et en analyse. De manière très schématique, on peut dire que l'on a affaire à un ouvrage de transition : par son architecture et sa méthode, *Die Idee der riemannschen Fläche* s'écarte des mathématiques pratiquées par Riemann, Klein ou encore Weierstrass ; inversement, il ne s'agit pas d'un pur exposé de mathématique structurale.

D'une manière schématique, le développement d'une théorie abstraite des surfaces de Riemann dépend du lien qu'elle entretient avec l'*analysis situs* et la théorie des groupes. En conséquence, nous entendons aborder quatre points :

(a) le lien entre l'*analysis situs* et l'étude des fonctions d'une variable complexe et des surfaces de Riemann dès la *Dissertation* de Riemann ;

(b) le problème de la classification des surfaces de Riemann compactes connexes qui est complètement résolu par Klein en 1882 ;

(c) les constructions de certaines surfaces de Riemann comme quotients du demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ par un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, constructions dont les premiers exemples apparaissent avec les travaux de Klein sur l'icosaèdre et la quartique « de Klein » entre 1875 et 1884 ;

(d) Le problème de l'uniformisation des fonctions analytiques d'une variable complexe (Poincaré 1883) et le *théorème d'uniformisation* (Poincaré, Koebe, 1907) qui affirme que toute surface de Riemann simplement connexe est conformément équivalente soit au plan complexe $\mathbb{C}$, soit à la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, soit au disque ouvert $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Ce théorème conduit à introduire le concept de revêtement d'une surface de Riemann et à classer les différents revêtements qu'elle est susceptible d'admettre.

Les points (a), (b) et (d) sont repris par Weyl dans son ouvrage sur les surfaces de Riemann. En particulier, le § 9 de son ouvrage est consacré à la classification des revêtements d'une surface de Riemann et le § 19 contient une démonstration du théorème d'uniformisation. Nous montrerons que le point (c) a une incidence plus indirecte sur Weyl.

Toujours est-il que ces points sont abordés par une diversité de mathématiciens avant la publication de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, donc sans que le concept de surface de Riemann soit défini rigoureusement par une liste d'axiomes. Ces mathématiciens, qu'il s'agisse de Riemann, Poincaré, Klein, Koebe, etc., concourent au développement d'une théorie abstraite des surfaces de Riemann. Nous en déduisons que les processus d'*abstraction* et d'*axiomatisation* ne se recoupent pas. En effet, certains mathématiciens adoptent explicitement un point de vue abstrait sans pour autant suspendre leur raisonnement à des concepts définis indépendamment de la nature des objets auxquels ils se rapportent. L'axiomatisation vient généralement après coup, afin de donner au cadre conceptuel adopté ses contours définitifs, elle permet également d'expliciter les relations sous-jacentes entre une série de concepts. Ainsi, en 1913, Weyl commence par axiomatiser les variétés différentielles de dimension 2 avant de montrer que les surfaces de Riemann sont des variétés analytiques complexes de dimension 1.

Plan de la première partie

Dans une premier chapitre, nous déterminerons la place et les fonctions de l'*analysis situs* dans la *thèse* (1851) et le *Théorie des fonctions abéliennes* (1857) de Riemann. Nous montrerons que ce dernier entend mener un projet de géométrisation de l'analyse. Nous reviendrons sur le principe de Dirichlet qui joue un rôle central dans la thèse de Riemann, mais dont la validité est contestée par Weierstrass au début des années 1870. Nous insisterons sur le degré remarquable d'abstraction auquel Riemann parvient notamment au cours du § 12 de son mémoire sur les fonctions abéliennes. Au cours de notre commentaire, nous confronterons et comparerons les lectures que Klein, Weyl et Lautman font des travaux de Riemann en analyse complexe.

Dans un deuxième chapitre, nous commencerons par décrire le lien que Klein entend établir entre les *surfaces de Riemann* et la *théorie des groupes* dans ses travaux sur l'icosaèdre et la quartique « de Klein » qui déboucheront sur une théorie générale des fonctions modu-

laires. Nous insisterons sur la conception kleinéenne de l'unité des mathématiques qui ressort de ses articles sur l'icosaèdre ; une telle conception aura une incidence durable sur la pratique des mathématiques de Weyl. De même, ce dernier sera très sensible au projet de Klein visant à faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann. Toujours dans ce chapitre, nous reviendrons sur l'ouvrage que Klein consacre spécifiquement aux surfaces de Riemann en 1882. Nous avons déjà souligné que cet ouvrage constitue l'une des principales sources d'inspiration de Weyl dans l'élaboration de *Die Idee der Riemannschen Fläche*.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous commenterons l'ouvrage de Weyl. Nous insisterons sur le fait qu'il s'agit d'une vaste synthèse au niveau conceptuel, méthodologique et théorique. Weyl assujettit le concept de surface de Riemann au concept de variété. Il dialectise les méthodes de Riemann et de Weierstrass en analyse complexe. Il utilise la méthode axiomatique de Hilbert qu'il combine à des représentations géométriques héritées de Klein. Enfin, il rassemble dans cet ouvrage les résultats cardinaux en théorie des surfaces de Riemann : principe de Dirichlet, théorème de Riemann-Roch ou encore théorème d'uniformisation.

Ainsi, en nous référant aux cours de Weyl en analyse complexe et à son ouvrage sur les surfaces de Riemann, nous nous donnons un triple objectif : (i) comprendre le regard que Weyl porte sur Riemann et Klein, (ii) situer ses apports dans l'histoire de la théorie surfaces de Riemann, (iii) saisir la place de *Die Idee der Riemannschen Fläche* dans l'œuvre de Weyl. Faisons trois remarques à ce propos. (a) Déjà en 1913, Weyl se montre très critique à l'encontre d'une mathématique trop formalisée, il ne considère pas la méthode axiomatique comme une fin en soi ou comme une procédure qui se suffirait à elle-même dans la construction des connaissances mathématiques. (b) La « dialectique » entre des méthodes distinctes, voire antagonistes est très présente dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*, comme en atteste la double référence à Riemann et à Weierstrass. Ceci se retrouve dans les travaux de Weyl en théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples en 1925-1926 : il confronte alors la méthode algébrique et infinitésimale de Cartan à la méthode topologique et intégrale de Hurwitz. (c) La théorie des revêtements que Weyl développe en 1913 dans le contexte des surfaces de Riemann constitue l'une des clés en 1925-1926 pour démontrer le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ et, par extension, pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. Ainsi, la référence à *Die Idee der Riemannschen Fläche* est essentielle afin de comprendre d'autres aspects de l'œuvre de Weyl que nous étudierons par la suite et elle nous éclaire déjà sur la place et les limites que Weyl assigne au formalisme et à la méthode axiomatique en mathématiques. L'intérêt de Weyl pour les surfaces de Riemann ne s'arrête d'ailleurs pas en 1913. Ainsi, en 1916, il publie un article intitulé

≪ Strenge Begründung der Charakteristischen theorie auf zweiseitigen Flächen ≫ dans lequel il dresse un parallèle entre la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe et la théorie des nombres algébriques. Il consacre plusieurs cours à l'ETH de Zürich aux surfaces de Riemann entre 1914 et 1926. Enfin, en 1925 Weyl rédige un article sur Riemann à l'occasion de l'édition des œuvres de Lobatchevski par le gouvernement russe. Ce texte sera publié en 1988 sous le titre *Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie*. Dans ce texte, Weyl revient en particulier sur ses propres apports en théorie des revêtements qu'il est justement en train d'appliquer aux groupes de Lie complexes semi-simples.

Chapitre 1

La *Dissertation* et la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann

Au début du cours qu'il consacre aux fonctions d'une variable complexe lors du semestre d'hiver 1910-1911, Weyl effectue la reconstruction historique suivante :

> Les variables complexes ont une signification essentiellement réelle [eine durchaus reale Bedeutung]. Leurs fonctions admettent une interprétation géométrique par application [durch Abbildung] et une [interprétation] physique en tant qu'image d'un courant électrique. Leur développement s'est accompli à partir de ces deux significations. On peut même considérer la théorie des fonctions comme une partie de la physique mathématique. La construction de ce domaine est attachée aux noms de Cauchy, Riemann et Weierstrass.
>
> Riemann prit pour point de départ la physique mathématique ; il lui emprunta la problématique qui caractérise ses développements en théorie des fonctions. Weierstrass suivit une tout autre direction en partant des séries de puissances. Ils parvinrent pour l'essentiel au même point et l'on doit prendre en compte la méthode de Cauchy-Riemann et celle de Weierstrass. [1]

Cette citation est riche d'enseignements pour comprendre de quel point de vue Weyl envisage les travaux de Riemann et comment il les situe historiquement. En effet, la référence à l'≪ image d'un courant électrique ≫ renvoie à l'ouvrage de Klein sur les surfaces de Riemann de 1882. En outre, Weyl reprend à son compte l'hypothèse de Klein selon laquelle Riemann aurait été guidé par une intuition physique pour développer sa théorie des fonctions d'une variable complexe. [2] Pourtant, ni dans sa *Dissertation* (1851), ni dans sa *Théorie*

1. Hermann Weyl, *Einführung in der Funktionentheorie*, *op. cit.*, p. 1-2.

2. Voir en particulier, F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Leipzig, éd. Teubner, 1882, in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. III, Berlin, éd. Springer, 1923, p. 502-503. On peut également se référer au cours donné par Klein sous le titre *Riemannsche Fläche* lors du semestre d'été 1891-1892 à Göttingen, Deuxième impression, Göttingen, 1894, p. 8 à 16. Nous renvoyons également le lecteur au discours de Klein prononcé à Vienne le 27 septembre 1894 sous le titre ≪ Riemann et

des fonctions abéliennes (1857) Riemann ne mentionne d'applications liées à la physique mathématique, même s'il s'appuie très directement sur des méthodes issues de la théorie du potentiel. Cette lecture historique est due à Klein pour justifier ses propres travaux sur les surfaces de Riemann. Weyl reprend donc de manière non critique cette interprétation kleinéenne d'un Riemann guidé explicitement dans sa *Dissertation* par des problèmes relevant de la physique mathématique. Weyl est donc attaché à une histoire officielle communément partagée à Göttingen concernant les contributions de Riemann en analyse et, plus largement, les développements de l'analyse complexe au cours du XIX^{e} siècle. Cette histoire officielle admet trois biais : (1) elle est linéaire et elle se caractérise par la constitution de liens de filiation, même indirects, entre Gauss et Riemann [3] ; (2) elle est centrée autour des représentants les plus illustres de l'université de Göttingen pour renforcer la légitimité institutionnelle de cette même université ; (3) elle admet un caractère fondamentalement national. Ainsi, les contributions de Cauchy en analyse complexe se trouvent très nettement sous-évaluées au profit de Riemann et de ses successeurs immédiats. Par exemple, dans sa conférence de 1894 sur Riemann, Klein prétend que la théorie des fonctions d'une variable complexe a reçu son ≪ empreinte moderne ≫ en Allemagne. [4] Cette histoire officielle se répercutera également dans l'interprétation que Weyl proposera plus tardivement du *Habilitationsvortrag* de Riemann (1854). Weyl reprendra en effet à son compte de manière non critique l'analogie également due à Klein entre la géométrie infinitésimale de Riemann et la physique

---

son influence sur les mathématiques modernes ≫, in Riemann, *Œuvres*, trad. Laugel (1898), Paris, éd. Jacques Gabay, 1990, p. XVIII, XIX. Weyl reprend d'ailleurs quasiment mot pour mot l'argument suivant de Klein : ≪ Weierstrass définit les fonctions d'une variable complexe analytiquement, à l'aide d'une formule qui leur est commune, celle des séries infinies de puissances. (...) Riemann commence (...) en considérant certaines équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions $x + iy$. Ceci répond évidemment à la présentation physique suivante. Posons

$$f(x + iy) = u + iv.$$

Alors en vertu des équations différentielles susdites, chaque partie de fonction, u aussi bien que v, se présente comme un *potentiel* dans l'espace relatif aux deux variables x et y et l'on peut indiquer, d'une manière abrégée, les développements de Riemann en disant qu'il fait l'application, à ces parties de fonctions, des théorèmes fondamentaux de la théorie du potentiel. Son point de départ prend ainsi racine dans la physique mathématique ≫. Klein soutient exactement le même argument dans les *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Teil 1 (1926-1927), Berlin, éd. Springer, 1979, p. 259-260.

3. F. Klein, ≪ Riemann et son influence sur les mathématiques modernes ≫, *op. cit.*, p. XVII : ≪ il est très remarquable de trouver chez Gauss des principes de la théorie des fonctions qui sont complètement orientés dans la direction des méthodes inventées plus tard par Riemann, ainsi qu'une transmission d'idées par l'entremise d'une chaîne invisible, s'étendant de l'ancien au moderne inventeur ≫.

4. *ibid.*, p. XVII.

des actions de contact de Faraday pour en déduire que les développements de la physique et de la géométrie seraient parfaitement homologues. Néanmoins, dans le passage que nous avons reproduit, Weyl se démarque de Klein sur un point en particulier : alors que Klein a tendance à *opposer* Riemann à Weierstrass, Weyl souligne davantage leur complémentarité à l'image de Koebe et de Hilbert au début du XX^{e} siècle. Ainsi, Weyl emprunte cette histoire officielle « göttingienne » de l'analyse complexe en partie à Klein, en partie à Koebe et Hilbert.

Il n'est pas du tout évident de soutenir et de montrer que Riemann aurait été guidé par une intuition physique au moment où il publie ses travaux en analyse complexe bien qu'il s'appuie sur les cours de Dirichlet sur la théorie du potentiel auxquels il a assisté. Les problèmes qui orientent les recherches de Riemann dans sa *Dissertation* relèvent essentiellement des mathématiques pures, comme le souligne à juste titre H. Durège dans ses *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse.*[5] Cela étant, Riemann entend explicitement faire jouer un rôle central à l'intuition géométrique et à la géométrie en théorie des fonctions d'une variable complexe mais aussi, plus généralement, en analyse ainsi qu'en physique mathématique. C'est sur ce point qu'il se démarque le plus clairement de Weierstrass. Nous entendons montrer dans quelle mesure la *Dissertation* et le *Théorie des fonctions abéliennes* participent à un projet plus général de géométrisation des mathématiques dont Klein et Weyl sont d'ailleurs redevables. Cette géométrisation suppose non seulement l'introduction des surfaces de Riemann comme support de fonctions initialement multivaluées sur le plan complexe, mais également un ensemble de concepts qui relèvent de l'*analysis situs*. Ces méthodes « géométriques » dont Weierstrass critiquera le manque de rigueur permettent à Riemann de questionner les conditions — analytiques ou topologiques — nécessaires pour que certaines propriétés soient satisfaites et certains théorèmes vérifiés.

Quatre motifs nous amènent à revenir partiellement sur la *Dissertation* de Riemann et sa *Théorie des fonctions abéliennes*. Il convient tout d'abord de savoir exactement ce qu'il entend par *analysis situs* avant de déterminer l'usage qu'il en fait dans l'étude des fonctions d'une variable complexe. Ensuite, il nous paraît essentiel de savoir quelle place et quelle fonction il accorde à une pensée géométrique dans sa *Dissertation*. Nous en profiterons pour montrer jusqu'à quel point ce texte peut être rapproché de la *Leçon d'habilitation* (1854). Il nous

5. H. Durège, *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse*, Leipzig, éd. Teubner, 1864, préface, p. III. Durège soutient que les travaux de Riemann en analyse complexe relèvent des mathématiques pures et qu'elles reçoivent seulement après coup une application dans le domaine des mathématiques appliquées [angewandte Mathematik].

semble essentiel de revenir également sur l'antagonisme qui oppose Riemann à Weierstrass en analyse complexe, puisque Hilbert, Koebe et Weyl entendent dépasser une telle opposition au début du XX^{e} siècle. Enfin, nous reviendrons de manière détaillée sur le § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes*. Dans ce paragraphe, Riemann franchit une étape décisive pour concevoir *abstraitement* les surfaces de Riemann.

1.1 Caractérisations géométrique et analytique des fonctions dérivables d'une variable complexe

La *Dissertation* de Riemann s'ouvre sur une définition très générale d'une fonction d'une variable réelle comme correspondance entre deux grandeurs variables z et w. Il emprunte à Dirichlet cette manière de concevoir en général et abstraitement des fonctions qu'il suppose « continues » [stetig] — c'est-à-dire continues et n fois dérivables si l'on se réfère à la terminologie que l'on utilise maintenant. Il se place ensuite dans le cadre d'une variable complexe et il se demande comment le concept de fonction (dérivable) peut être bien défini dans ce contexte, comme en témoigne le passage suivant :

> Une grandeur variable complexe w est dite une fonction d'une autre grandeur variable complexe z lorsqu'elle varie avec elle de telle sorte que la valeur de la dérivée $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z$ est indépendante de la valeur de la différentielle $\mathrm{d}z$. [6]

Ce premier paragraphe frappe par son caractère hautement conceptuel : il est question de fonctions d'une variable complexe en général ; Riemann entend déterminer *a priori* à quelles conditions elles doivent satisfaire pour être dérivables. Nous disons maintenant que les fonctions en question sont holomorphes. [7] Cette approche conceptuelle se retrouvera dans la *leçon d'habilitation* (1854) dans laquelle Riemann utilisera d'ailleurs à nouveaux frais la définition d'une fonction qu'il emprunte à Dirichlet. On peut donc dire que dès sa *Dissertation*, Riemann envisage l'analyse dans le sillage de Jacobi et Dirichlet ; il est donc redevable d'une

6. B. Riemann, *Principes fondamentaux pour une Théorie générale des Fonctions d'une grandeur variable complexe* 1851, in *Œuvres mathématiques*, trad. Laugel (1898), Paris, éd. Jacques Gabay, 1990, p. 3.

7. Une fonction sera dite $\mathbb{C}$-dérivable ou holomorphe sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ si, en tout point $a \in \Omega$, la limite

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$. Dans cette définition, on sous-entend que $h = x + iy$ tend vers zéro en module, au sens où (x, y) tend vers $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Il s'avère qu'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est telle que sa dérivée soit continue sur Ω. À partir de la formule intégrale de Cauchy, on peut même montrer que toute fonction holomorphe sur Ω est indéfiniment dérivable sur Ω.

tradition qui, selon le mot même de Dirichlet, consiste à « substituer la pensée au calcul ». Mais un autre trait fondamental de la *Dissertation* se dessine lorsque l'on prête attention au contenu des §§ 2 et 3 : Riemann utilise des représentations géométriques pour appréhender les fonctions d'une variable complexe. On peut même dire que la *Dissertation* est le lieu d'une tension entre une approche conceptuelle qui est redevable de Dirichlet et une pensée géométrique dont les sources remontent aux travaux de Gauss sur les surfaces. Riemann ne commence pas par formuler les conditions dite de Cauchy-Riemann qui sont nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit holomorphe. Il s'appuie d'abord sur un substrat intuitif et géométrique : celui des applications conformes en leurs plus petites parties.

Deux questions méritent ici d'être soulevées : (i) quelle fonction Riemann assigne-t-il à l'intuition géométrique ? (ii) Quel est le cadre théorique dans lequel s'inscrit une telle démarche ? Un élément de réponse à la première question apparaît au cours du § 2. Riemann affirme en substance que « la *conception* d'une telle variabilité, qui est relative à un domaine connexe à deux dimensions, est essentiellement facilitée si l'on s'appuie sur l'*intuition* géométrique »[nous soulignons]. [8] Un « domaine connexe » correspond à ce que nous appelons un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. [9] Nous verrons dans ce qui suit comment Riemann construit certains concepts relevant de l'*analysis situs* — tels que la connexité, la simple connexité, etc. Pour l'instant, deux termes bien distincts doivent retenir notre attention : la *conception* et l'*intuition*. On sait que, dans une perspective kantienne, il y a un rapport de complémentarité entre concepts et intuition : une intuition sans concepts donnerait seulement accès à des objets *indéterminés* ; inversement, des concepts sans intuition n'auraient pas de signification objective, ils seraient vides. Il ne faut pas non plus oublier que, pour Kant, les mathématiques en général consistent exclusivement en jugements synthétiques *a priori*. Cela veut dire très exactement que le passage d'un concept A à un concept B qui n'est pas un prédicat de A s'effectue par le biais d'une intuition pure. Autant dire que, dans une perspective kantienne, les représentations intuitives sont des conditions sans lesquelles on ne pourrait pas produire de connaissances nouvelles en mathématiques.

L'argument de Riemann se distingue de celui de Kant à deux niveaux. (a) Il est question d'intuition géométrique et non pas d'intuition *a priori* en général — qui dans une perspective kantienne, dépendrait soit de l'espace, soit du temps —, autrement dit, la géométrie est le domaine privilégié des représentations intuitives, étant entendu que celles-ci sont essentielle-

8. *ibid.* p. 4

9. Dans son cours sur les fonctions d'une variable complexe, Weyl précise qu'un domaine [Gebiet] est un ouvert connexe.

ment spatialisées. (ii) Riemann défend une thèse plus faible que celle de Kant : il ne nous dit pas que l'intuition est une condition sans laquelle nos concepts seraient vides, ou sans laquelle nous ne pourrions pas produire de connaissances mathématiques inédites, il affirme seulement que « l'intuition géométrique » nous donne une prise sur certains concepts mathématiques, en l'occurrence ici celui de fonction d'une variable complexe dérivable. Est-ce à dire que le rapport entre l'analyse et certaines représentations géométrisées tel qu'il apparaît dans la *Dissertation* de 1851 est du même ordre que le lien établi par Gauss entre certains concepts issus de l'arithmétique et leur visualisation dans le plan complexe ? On sait par exemple que la représentation des entiers de Gauss sur $\mathbb{C}$ permet d'appréhender un concept qui peut nous sembler inhabituel à premier abord. De même, l'intuition géométrique nous aide à mieux saisir le comportement des fonctions d'une variable complexe.

Un examen plus poussé de la *Dissertation* nous montre que le lien entre « l'analyse complexe » et « l'intuition géométrique » est plus fort que ne le suggère Riemann lui-même au cours du § 2, ceci pour deux raisons essentielles :

(a) Riemann assigne un rôle heuristique aux « représentations géométriques » au sens où elles participent à la construction de certains concepts — c'est notamment le cas des notions d'*analysis situs* qu'il introduit au cours des §§ 5 et 6 — ;

(b) il ne faut pas oublier qu'il manipule des concepts intrinsèquement géométriques, comme en atteste l'introduction des surfaces revêtant le plan complexe dans le § 5 de la *Dissertation*. Venons-en à la résolution de la seconde difficulté. Force est d'admettre que, dans sa *Dissertation*, Riemann s'appuie sur divers cadres théoriques qui recouvrent les champs de l'analyse et de la géométrie. Nous n'avons pas manqué de souligner précédemment que ses raisonnements sont en partie guidés par des résultats issus de la théorie du potentiel. Toutefois, il ne faudrait pas non plus oublier qu'il s'appuie sur deux textes fondamentaux de Gauss qui relèvent de la géométrie, à savoir le mémoire intitulé *Résolution générale du Problème : Représenter les parties d'une surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original en les plus petites parties* (1822) et le *Traité sur les Surfaces courbes* (1828). Le premier article de Gauss est une « réponse à la question proposée comme sujet de prix de la Société Royale des Sciences de Copenhague (1822) ». [10]

Gauss commence par préciser comment on peut repérer chaque point d'une surface courbe arbitrairement donnée. Il donne une signification rigoureuse à l'opération qui consiste à représenter une surface courbe dans une autre. Ensuite, il appréhende *géométriquement* la notion de « représentation semblable à l'original dans ses plus petites parties » avant de

10. Préface à la traduction en français du Mémoire de Gauss par Laugel, Paris, éd. Hermann, 1915, p. 2.

la *traduire analytiquement.* [11] Le reste de son mémoire est consacré à l'étude de ce type de représentations dans le cas de surfaces courbes remarquables — plan, surface conique, surface sphérique et ellipsoïde. Précisons le lien entre ce mémoire et la thèse de Riemann : au cours du § 2, Riemann se donne deux plans A et B, chaque point de A représente une valeur que prend la variable z ; chaque point de B représente pour sa part une valeur de la grandeur ω. Le § 3 est consacré à la démonstration du résultat suivant : si ω est une « fonction de z » — i. e. si ω est holomorphe sur un certain domaine Ω du plan complexe — dont la dérivée ne s'annule en aucun point de Ω, alors il s'agit d'une application conforme. Qu'il nous suffise de nous appuyer sur le passage suivant :

> Entre deux triangles infinitésimaux qui se correspondent, il y a similitude et il en est par suite de même en général entre les plus petites parties du plan A et leur représentation sur le plan B. [12]

Une telle assertion montre que l'intuition géométrique n'intervient pas seulement pour saisir des propriétés d'*analysis situs* que l'on pourrait rétrospectivement qualifier de globales, elle entre également en jeu pour caractériser certaines propriétés *infinitésimales*, comme en atteste l'usage même de l'expression « triangles infinitésimaux » par Riemann lui-même. On ne saurait donc ignorer ou sous-évaluer l'incidence des mémoires de Gauss de 1822 et de 1828 sur la *Dissertation* de 1851. Cette incidence se retrouve d'ailleurs dans *l'ordre des arguments* adopté par Riemann. En effet, au cours des §§ 2 et 3, Riemann commence par interpréter les fonctions dérivables d'une variable complexe comme des applications conformes et il montre ensuite dans le § 4 à quelles conditions *analytiques* une fonction d'une variable complexe doit satisfaire pour être $\mathbb{C}$-dérivable. Par analogie, dans son *Traité des surfaces courbes*, Gauss commence par appréhender géométriquement le concept de mesure de courbure pour ensuite en proposer une expression analytique. [13]

Précisons maintenant en langage moderne l'interprétation géométrique que Riemann propose d'une fonction dérivable sur un domaine de $\mathbb{C}$ dont la dérivée ne s'annule pas, ce qui nous permettra de saisir la pertinence des constructions et des concepts sur lesquels il se fonde pour appréhender et concevoir géométriquement les fonctions d'une variable complexe.

11. C.F. Gauss, *op. cit.*, p. 3 : « La condition prescrite exige premièrement que toutes les lignes infiniment petites issues d'un point de la première surface et situées sur cette surface soient proportionnelles aux lignes correspondantes sur la deuxième surface, et deuxièmement que les premières lignes en question comprennent entre elles les mêmes angles que les secondes », pour le texte original en allemand, Voir C. F. Gauss, *Werke*, Bd. IV, Göttingen (1863), p. 193-194.

12. B. Riemann, *op. cit.*, p. 4.

13. Nous renvoyons le lecteur à la section 1.1 (deuxième partie) de notre thèse pour une analyse du mémoire de Gauss de 1828.

Puisque nous pouvons identifier le plan complexe à $\mathbb{R}^2$, nous raisonnerons d'abord sur un domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Une application différentiable f est conforme au point z de D si sa dérivée conserve les angles orientés. Explicitons cette assertion. On considère en fait deux chemins quelconques γ_1 et γ_2 qui se coupent en z. Leurs tangentes respectives au point z forment un certain angle α. Soit $f(z)$ l'image de z par f. Les chemins images de γ_1 et γ_2 sont notés respectivement $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$. La dérivée de f conserve les angles si l'angle β formé par les tangentes de $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ au point $f(z)$ est égal à α. Cela signifie géométriquement que la dérivée en z doit être une similitude directe. Si maintenant on raisonne dans le plan complexe, une similitude directe est une application h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour $a = \alpha + i\beta$, a étant non nul, $h(z) = az$. Le module et l'argument de a correspondent respectivement au rapport et à l'angle de similitude. Relativement à la base canonique $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel orienté de dimension 2, la matrice associée à la similitude h s'écrit

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Une fonction d'une variable complexe $f(x+iy) = u(x)+iv(y)$, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-différentielle en tout point $z \in \Omega$ et telle que sa différentielle ne s'annule en aucun point de z est conforme si et seulement si sa matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

de déterminant non nul — donc inversible — est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

par définition même d'une similitude. On en déduit immédiatement les deux conditions de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ce qui revient à dire que f est holomorphe sur Ω. En résumé, une fonction d'une variable complexe est conforme sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ si elle est holomorphe et si sa dérivée ne s'annule en aucun point de Ω. On retraduit ainsi analytiquement un invariant géométrique par similitude, à savoir la conservation des angles. Riemann suit très exactement ce parcours : il commence par interpréter géométriquement une fonction $\mathbb{C}$-dérivable, pour ensuite formuler les conditions analytiques qui président à la propriété de $\mathbb{C}$-dérivabilité. Tel est justement l'objectif du § 4 de la *Dissertation*.

Quelques précisions d'ordre mathématique s'imposent pour comprendre à quelles difficultés Riemann se confronte. Une fonction est $\mathbb{R}$-différentiable si, pour la variable $z = x + iy$, nous avons la différentielle :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Les notions de $\mathbb{C}$-dérivabilité et de $\mathbb{R}$-différentiabilité ne coïncident pas. Il faut déterminer les conditions auxquelles une fonction $\mathbb{R}$-différentiable doit satisfaire pour être $\mathbb{C}$-dérivable. Tel est justement le rôle joué par les conditions de Cauchy-Riemann. On raisonne sur les variables complexes $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, plutôt que sur les variables réelles x et y ; on établit qu'une fonction $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω est holomorphe sur Ω si elle satisfait à la condition de Cauchy-Riemann en tout point z de Ω :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Ce résultat correspond à la restriction qu'énonce Riemann au début du § 3 de sa *Dissertation.* En effet, il désigne par ω « une fonction de la grandeur complexe z », c'est-à-dire telle que « $\frac{d\omega}{\mathrm{d}z}$ est indépendant de $\mathrm{d}z$ ».[14] Pour $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, où $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$, la condition de Cauchy-Riemann se reformule à l'aide des deux conditions suivantes, dites également de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Voici le raisonnement utilisé par Riemann pour parvenir à ce résultat :

> Si l'on met $\frac{\mathrm{d}u+\mathrm{d}vi}{\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi}$ sous la forme
>
> $$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}i\right)\mathrm{d}yi}{\mathrm{d}x + \mathrm{d}yi},$$
>
> il est évident que l'expression pour deux couples de valeurs quelconques de $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ aura la même valeur au seul cas où
>
> $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
>
> Ces conditions sont, par conséquent, nécessaires et suffisantes pour que $w = u + vi$ soit une fonction de $z = x + yi$.[15]

Par suite, une fonction d'une variable complexe $\mathbb{R}$-différentiable qui ne satisfait pas aux conditions de Cauchy-Riemann n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable. En revanche, toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable est nécessairement $\mathbb{R}$-différentiable. À partir de ces conditions, Riemann déduit l'harmonicité des parties réelle et imaginaire d'une fonction f qui est holomorphe sur Ω :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

14. B. Riemann, *op. cit.* p. 4.
15. *ibid.*, p. 5-6.

sachant qu'une fonction f est harmonique sur Ω si elle est de classe C^2 et si

$$\Delta f = 0$$

où Δ représente l'opérateur de Laplace :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

En particulier, toute fonction holomorphe sur Ω est harmonique sur Ω. En effet, une fonction d'une variable complexe est harmonique si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont. Ces remarques concernant les fonctions harmoniques sont fondamentales pour comprendre la démarche suivie par Riemann dans son mémoire de 1851. En effet, il établit l'essentiel de ses résultats en analyse complexe à partir de certains éléments de connaissance issus de la *théorie du potentiel*. Précisément, l'étude des fonctions harmoniques joue un rôle cardinal dans ce domaine.

Nous avons remarqué qu'au début de son cours sur les fonctions d'une variable complexe (1910 / 1911), Weyl affirme que les points de vue de Riemann et Weierstrass se rejoignent. À présent, nous pouvons partiellement expliciter son propos : il pense très certainement à l'équivalence entre « fonction holomorphe » et « fonction analytique ».[16] Rappelons brièvement qu'une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point a de Ω, i.e. s'il existe une série entière de centre a et dont la valeur de la somme est égale à $f(z)$ dans un disque de centre a et de rayon r, ce qui se formule comme suit :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad |z-a| < r.$$

Qu'il y ait une équivalence entre fonctions $\mathbb{C}$-dérivables et fonctions $\mathbb{C}$-analytiques ne signifie pas que les points de vue de Cauchy-Riemann et de Weierstrass soient réductibles l'un à l'autre. Il s'agit en fait d'éclairer de deux manières différentes un même objet et un même domaine des mathématiques. La synthèse effectuée par Weyl entre 1910 et 1913 consiste à montrer la *complémentarité* entre ces deux points de vue sans les assimiler. Par exemple, si l'on veut s'assurer de l'existence d'une primitive pour toute fonction analytique définie sur un ouvert connexe, alors l'approche intégrale et topologique de Riemann semble plus commode. Comme nous le verrons, il faut supposer en outre que l'ouvert en question est simplement connexe. En revanche, lorsque l'on veut déterminer la nature des singularités qu'admet une

16. Une telle équivalence était connue de Riemann. Il ne la mentionne qu'une seule fois dans ses écrits consacrés à l'analyse complexe, en l'occurrence dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*, *op. cit.*, p. 90.

fonction, que l'on sait partout ailleurs analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}$, alors l'approche locale et algébrique de Weierstrass, fondée sur la notion de développement en série de Laurent autour de ces mêmes singularités, s'avère particulièrement opératoire.

L'analyse des §§ 2 à 4 de la *Dissertation* permet donc de corriger une erreur d'appréciation due à Klein et que Weyl reprendra de manière non critique. Riemann n'est alors pas guidé par une intuition physique et il ne se réfère pas explicitement à la physique mathématique pour appréhender les fonctions d'une variable complexe. En réalité, il se calque sur les méthodes de Gauss qui consistent d'abord à s'appuyer sur des représentations géométriques — illustrées ici par la notion d'application conforme — pour ensuite dégager les conditions analytiques qui président à la dérivabilité d'une fonction d'une variable complexe — il s'agit en l'occurrence des conditions de Cauchy-Riemann. Klein surdétermine donc le rôle de la physique mathématique dans la *Dissertation* de Riemann dont le contenu relève pour l'essentiel des mathématiques pures. Cela étant, l'ordre des arguments adopté par Riemann au cours des §§ 2 à 4 de sa *Dissertation* aura un impact très certain dans l'enseignement de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Pour ce faire, nous pouvons d'abord nous référer au chapitre 2 du cours donné par Weyl à Göttingen lors du semestre d'hiver 1910-1911. Weyl commence par déterminer à quelles conditions une application du plan des xy sur le plan des uv doit satisfaire pour être conforme. À l'instar de Riemann, il entend interpréter géométriquement la notion de fonction dérivable d'une variable complexe pour ensuite dégager les conditions analytiques de Cauchy-Riemann. Weyl accorde donc une priorité chronologique aux représentations géométriques utilisées par Riemann en analyse complexe avant de proposer des formulations analytiques rigoureuses.[17] Sur ce point, il se conforme parfaitement à l'esprit même de la *Dissertation* de 1851. Seulement, entre la *Dissertation* de Riemann et les cours donnés par Weyl à Göttingen en 1910-1911, il existe nombre de publications qui visent à promouvoir les méthodes géométriques de Riemann en analyse complexe. La référence à l'ouvrage de Klein de 1882 n'est pas suffisante ici. Ainsi, dès 1864, H. Durège publie ses *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen* qui connaîtra de nombreuses rééditions. Cet ouvrage est très directement inspiré de la *Dissertation* de Riemann et de sa Théorie des fonctions abéliennes. Nous pourrions également mentionner les *Funktionentheoretische Vorlesungen* de Heinrich Burckhardt (1899 pour la première édition). Ces données doivent nous prémunir contre une représentation de l'histoire des méthodes géométriques en analyse complexe sous la forme de rapports de filiations : il ne faudrait pas croire que Klein est le seul intermédiaire entre Riemann et Weyl.

17. H. Weyl, *op. cit.*, p. 53 à 65.

1.2 Sens et usage de « l'analysis situs » chez Riemann

L'expression « analysis situs » revêt des sens relativement différents au cours de la première moitié du XIX^{e} siècle, comme en attestent les diverses interprétations de ce que Leibniz entendait par « géométrie des situations » notamment dans sa correspondance avec Huygens. En fait, le terme *analysis situs* est défini de manière strictement négative par des mathématiciens tels que von Staudt, Riemann ou encore Klein : il s'agit d'étudier les propriétés géométriques abstraction faite de toute considération d'ordre métrique. On nous dit alors ce que l'*analysis situs* n'est pas, mais cela est bien loin de suffire pour s'entendre sur ce qu'elle est et pour déterminer le champ théorique et disciplinaire qu'elle recouvre. Ainsi, von Staudt (1847) et Klein (1871) identifient de manière plus ou moins explicite l'*analysis situs* et la géométrie projective. [18] En revanche, Riemann lui associe des concepts qui relèvent maintenant de ce que nous appelons la topologie et la topologie algébrique.

C'est donc avec les travaux de Riemann que l'*analysis situs* devient de manière *systématique* le champ d'investigation de propriétés « topologiques » et non pas « projectives ». L'interprétation riemannienne de l'expression « analysis situs », qui diffère donc de celle donnée par von Staudt en 1847 et par Klein en 1871, s'impose progressivement et elle est consacrée avec la publication des travaux de Poincaré à la fin du XIX^{e} siècle. [19] On en déduit que la géométrie de situation n'est pas encore considérée comme un domaine théorique autonome, elle n'est pas non plus un champ disciplinaire clairement identifié. Ce ne sera sans doute pas le cas avant la fin du XIX^{e} siècle, c'est-à-dire avant la publication des travaux de Poincaré en *analysis situs* — reconnaissons néanmoins que, dans certains fragments non publiés de Riemann, les propriétés liées à la géométrie des situations sont traitées pour elles-mêmes. [20]

18. Voir à ce propos G. K. C. von Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847, préface, p. III, IV ; F. Klein, « Sur la géométrie dit non euclidienne », (1871) *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 1ère série, Tome 11, n° 4, 1897, p. G. 60 : « *La géométrie projective peut être développée complètement en s'affranchissant absolument de la question de la détermination métrique.* En effet, pour développer la géométrie projective et démontrer son application dans un espace limité quelconque donné, il suffit de faire dans cet espace des constructions qui ne conduisent pas hors de cet espace et qui ne concernent que ce que l'on appelle les *relations de situation* ». Dans ce passage, Klein se réfère explicitement aux travaux de von Staudt en géométrie de situation.

19. Déjà dans l'ouvrage qu'il consacre en 1882 aux surfaces de Riemann, Klein emploie l'expression « Lagenverhältnisse » [i.e. rapports de situation], lorsqu'il classe des surfaces fermées connexes selon leur genre : il suit ici la signification que Riemann prête à l'*analysis situs*, voir à ce propos F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen*, *op. cit.*, p. 527. Voir également H. Poincaré, *Analysis Situs*, in *Œuvres*, tome VI, Paris, éd. Gauthier-Villars, 1953, p. 194 : « [L'Analysis Situs] décrit la situation relative des points, des lignes et des surfaces sans aucune considération de leur grandeur ».

20. Voir en particulier B. Riemann, « Fragment aus der Analysis Situs », in *Gesammelte mathematische*

A fortiori, Riemann ne dispose pas d'une axiomatisation des espaces topologiques — due à Hausdorff en 1914. Enfin, l'*analysis situs* ne désigne pas dans l'œuvre de Riemann une discipline dont les contours seraient déterminés et le champ d'application fixé — au moins à titre provisoire. Il n'y a pas chez Riemann redistribution des connaissances qui relèvent de la géométrie des situations, selon qu'elles appartiennent aux domaines de la topologie générale ou de la topologie algébrique. D'ailleurs, même Weyl ignore tout d'une telle distinction et il utilise généralement le vocable *analysis situs* pour désigner indistinctement des concepts et des théorèmes qui relèvent tantôt de la topologie générale, tantôt de la topologie algébrique.

Dans sa *Dissertation*, comme dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*, Riemann n'introduit pas gratuitement les concepts de connexité ou de simple connexité. Ces notions d'*analysis situs* revêtent plusieurs fonctions bien distinctes. Elles permettent tout d'abord de décrire et d'appréhender plus rigoureusement les surfaces recouvrant le plan complexe (i.e. les surfaces de Riemann) que Riemann introduit au cours du § 5 de sa thèse (1851). Corrélativement, elles nous aident à saisir le comportement et les propriétés de certaines fonctions d'une variable complexe. Enfin, elles interviennent de manière essentielle pour saisir les conditions qui doivent être satisfaites pour que certains théorèmes soient vérifiés.

À s'en tenir aux §§ 1 à 4, on pourrait croire que les réflexions de Riemann sont centrées autour de l'objet fonction. Or, à partir du § 5 s'opère un double décrochage : (1) l'objet fonction est pour ainsi dire relégué provisoirement au second plan au profit des surfaces à plusieurs feuillets « recouvrant » le plan complexe ; ces surfaces sont envisagées en toute *généralité*, Riemann ne s'appuie pas sur un exemple particulier de surface qu'il associerait à une fonction complexe multivaluée donnée. Ce double décrochage nous incite à formuler la difficulté suivante : quelles sont les motivations qui conduisent Riemann à introduire les surfaces à plusieurs feuillets qui revêtent le plan complexe ? Sur ce point, l'argument suivi par Riemann au cours du § 5 est déroutant. En effet, il commence par décrire les surfaces de Riemann de manière *ad hoc* et pour elles-mêmes, comme en témoigne le passage suivant :

> Nous choisissons ce mode de représentation où il n'y a rien de choquant à parler de surfaces supersposées, afin de pouvoir admettre que le lieu du point O puisse recouvrir plusieurs fois la même partie du plan ; mais, en un tel cas, nous supposerons que les portions de surface supersposées ne se confondent pas tout le long d'une ligne, en sorte qu'il n'arrive pas que la

Werke, herausgegeben von H. Weber, unter Mitwirkung von R. Dedekind, Leipzig, éd. Teubner 1876, p. 448-451, p. 414-419 pour la traduction française. Dans ce fragment, Riemann étudie certaines propriétés d'*analysis situs* pour des variétés continues à n dimensions, preuve qu'il fait au moins partiellement le lien entre ses recherches en *analysis situs* dans le cas des surfaces de Riemann, et ses considérations générales sur les multiplicités à un nombre quelconque de dimensions qu'il introduit dans sa *Leçon d'Habilitation*.

surface soit pliée, ni qu'elle soit morcelée en des parties superposées. [21]

Riemann indique seulement à la fin de ce paragraphe que des fonctions initialement multivaluées sur le plan complexe s'uniformisent sur les surfaces ainsi introduites :

> Une grandeur variable qui, d'une manière générale, (...), prend en tout point O de la surface T une valeur déterminée variant de manière continue avec la position de ce point, peut être évidemment regardée comme une fonction de x, y, et, partout où dorénavant il sera question de fonctions de x, y, nous adopterons cette définition. [22]

L'expression « une valeur déterminée » montre bien que nous avons maintenant affaire à une fonction uniforme, c'est-à-dire à une fonction bien définie, une fois que nous passons du plan complexe à une surface à plusieurs feuillets convenablement choisie. La question est de savoir pourquoi Riemann n'énonce pas d'entrée de jeu le problème lié aux « fonctions » multivaluées sur le plan complexe pour motiver l'introduction des surfaces de Riemann. À notre sens, la raison se trouve dans le fait qu'il accorde une priorité à la fois chronologique et logique aux représentations et aux objets géométriques par rapport à l'objet fonction. Autrement dit, le § 5 permet de comprendre toute l'ambition du projet de *géométrisation de l'analyse* auquel Riemann aspire. Il ne s'agit pas seulement pour lui d'utiliser des représentations géométriques à titre de moyens pour appréhender certaines fonctions d'une variable complexe ; en réalité, il entend fonder l'analyse sur la géométrie et, plus précisément, sur cette partie de la géométrie qu'il appelle l'*analysis situs*. Voilà pourquoi, il conçoit de manière quelque peu abrupte les surfaces de Riemann pour elles-mêmes sans se référer directement à des fonctions particulières. Dès lors, l'*analysis situs* constitue un point de départ pour saisir ce nouvel objet mathématique que sont les surfaces de Riemann — ces dernières n'ayant pas seulement une structure topologique, mais également une structure analytique.

Une comparaison avec l'ouvrage postérieur de H. Durège de 1864 permet de mesurer la spécificité de la démarche suivie par Riemann dans sa *Dissertation*. En effet, contrairement à Riemann, Durège n'introduit pas abruptement les surfaces de Riemann. Il commence par étudier au cas par cas certaines fonctions multivaluées [Mehrdeutige Functionen] pour montrer après-coup en quoi il est plus commode de saisir leur comportement une fois que l'on raisonne dans le cadre des surfaces de Riemann :

> Riemann suppose que si une fonction est n-fois valuée, donc qu'à chaque valeur de la variable correspondent n valeurs de la fonction, le plan des z doit être constitué de n couches ou feuillets situés les uns sur les autres (ou que n tels feuillets recouvrent le plan des z) qui forment tous ensemble le domaine de la variable. À chaque point de l'un de ces feuillets correspond seulement

21. B. Riemann, *op. cit.*, p. 6.
22. *ibid.*, p. 8.

> une unique valeur de la fonction et à n points appartenant chacun à l'un des n feuillets et situés exactement l'un au-dessus de l'autre correspondent les n valeurs différentes de la fonction qui correspondent à la même valeur de z. Maintenant, en un point de ramification, où plusieurs valeurs de la fonction sont égales entre elles, plusieurs de ces feuillets sont attachés les uns aux autres, de telle sorte que le point de ramification en question doit être situé sur chacun de ces feuillets en même temps. [23]

Pour comprendre cet argument, donnons l'exemple canonique suivant : prenons $f(z) = \sqrt{z}$, sur $\mathbb{C}$, on peut associer deux valeurs opposées à tout z différent de 0. En outre, $z = 0$ est un *point de ramification* de $f(z) = \sqrt{z}$. Cette fonction s'uniformise si on la définit sur une surface à deux feuillets revêtant le plan complexe. L'ouvrage de Durège, qui a connu de très nombreuses rééditions au cours du dernier tiers du XIX^{e} siècle, détermine les contours quasiment définitifs d'un « canon » dans l'enseignement sur les surfaces de Riemann : l'existence de fonctions d'une variable complexe multivaluées *exige* le recours à de telles surfaces. L'objet « fonction » (multivaluée) et l'objet « surface de Riemann » sont corrélés et ils s'éclairent mutuellement. Or, Durège relègue les considérations de Riemann en *analysis situs* plus d'une centaine de pages après avoir introduit les surfaces de Riemann. Ce choix n'est pas innocent : il montre que le rapport entre géométrie et analyse n'est pas exactement du même ordre dans la *Dissertation* de Riemann et dans l'ouvrage de Durège. En effet, pour Durège les représentations géométriques constituent un moyen au service de l'analyse. En revanche pour Riemann, la géométrie est au fondement de l'analyse. C'est pourquoi, Durège ne suit pas l'ordre d'exposition des idées de Riemann qui consiste à introduire les surfaces à plusieurs feuillets revêtant le plan complexe en tant que telles pour ensuite étudier directement les propriétés d'*analysis situs* qu'elles comportent avant de revenir sur le terrain de l'analyse. On peut d'ailleurs dire que les méthodes de Riemann en analyse complexe débouchent sur deux traditions : la première, représentée notamment par Durège, consiste à introduire les surfaces de Riemann uniquement pour définir rigoureusement des fonctions initialement multivaluées dans le plan complexe ; la seconde, incarnée par Klein et prolongée par Weyl, vise à considérer la théorie des surfaces de Riemann pour elle-même, cette théorie se situant alors *au fondement* de l'analyse complexe.

Revenons à la *Dissertation*. Au cours du § 6, Riemann fait encore abstraction des fonctions que l'on pourrait définir sur une surface de Riemann et il précise ce qu'il entend par surfaces *connexe* et *simplement connexe*. Il étudie également l'*ordre de connexion* que l'on peut assigner à une surface comportant un bord. Il affirme tout d'abord que deux portions

23. H. Durège, *op. cit.*, p. 54.

de surfaces sont ≪ connexes ou formées d'une seule pièce, lorsque l'on peut y mener une ligne ayant son cours à l'intérieur de la surface et joignant un point de l'une des portions à un point de l'autre. ≫ [24] Il caractérise de manière purement intuitive la connexité : les deux portions en question doivent être considérées *d'un seul tenant*. Il explicite ensuite cette propriété comme suit : pour deux points quelconques appartenant respectivement à chacune des deux portions de surface, il doit exister un chemin continu permettant de les joindre. Rétrospectivement, Riemann définit non pas à strictement parler le concept de *connexité*, mais celui de *connexité par arcs*. En général, c'est-à-dire pour un espace topologique quelconque, la connexité par arcs est plus forte que la connexité. Pour le dire autrement, si un espace topologique est connexe par arcs, alors il est connexe, mais la réciproque est fausse. Pour autant, lorsque l'on raisonne sur des surfaces de Riemann, ces deux propriétés s'équivalent. [25] La définition de la connexité [par arcs] proposée par Riemann sera reprise à l'identique par Osgood et Weyl dans leurs cours respectifs en théorie des fonctions. [26]

Comment Riemann parvient-il ensuite à définir la propriété de simple connexité ? Il affirme en substance : ≪ Lorsque, par l'effet de toute section transverse [Querschnitt], une surface connexe est morcelée, elle est dite simplement connexe ≫ [27]. Une section transverse est une courbe simple reliant deux points situés au bord d'une surface à bord. [28] Un contre-exemple permet d'expliciter ce point : si l'on se donne une couronne et que l'on pratique une section transverse sur elle comme indiqué ci-dessous, elle n'est pas morcelée, il ne s'agit donc pas d'une surface simplement connexe. Précisons que la définition de la simple connexité d'une variété par le biais de l'homotopie des lacets et du groupe fondamental est bien plus tardive. Elle est due à Poincaré dans ses travaux d'*analysis situs* (1895-1905). [29] Riemann établit

24. B. Riemann, *op. cit.*, p. 9.

25. J. Gray, *Linear differential Equations and Group Theory, from Riemann to Poincaré*, Basel, Boston, Berlin, éd. Birkhäuser, 2000, p. 22 : ≪ Two parts of a surface were said to be connected if any point of one can be joined to any point of the other by a curve lying entirely in the surface. Strictly, this defines the modern concept of path connected, but the notions of connectedness and path connectedness agree here, since Riemann's surfaces are manifolds ≫.

26. W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Leipzig, éd. Teubner, 1907, p. 151 et H. Weyl, *op. cit.*, p. 64.

27. B. Riemann, *op. cit.* p. 9

28. *ibid.*, p. 9 : ≪ L'étude de la connextion d'une surface repose sur sa décomposition par l'effet de sections transverses, c'est-à-dire de coupures qui, partant d'un point du contour, sectionnent la surface d'une manière simple (aucun point n'étant traversé plusieurs fois) en rejoignant un point dudit contour ≫.

29. Henri Poincaré, *Analysis situs*, *Journal de l'École Polytechnique*, t. 1, (1895), in Œuvres, tome VI, *op. cit.*, voir les pages 239 à 242 pour l'introduction du groupe fondamental et page 257 pour une définition de la simple connexité : ≪ il paraît naturel de restreindre le sens du mot *simplement connexe* et de le réserver aux variétés, dont le groupe G se réduit à la substitution identique ≫.

essentiellement les deux résultats suivants : (1) une surface simplement connexe est divisée par chaque section transverse en deux parties simplement connexes ; (2) Une surface connexe est caractérisée par ce que Riemann appelle son *ordre de connexion* $n - m$, où n désigne le nombre de sections transverses nécessaires pour que la surface en question se décompose en m morceaux *simplement connexes*. Ainsi Riemann étudie les propriétés qualitatives de certaines surfaces à l'aide de procédés purement géométriques — comme en témoigne l'usage qu'il fait des sections transverses — ; il caractérise ensuite ces propriétés *numériquement*, comme en témoigne la notion d'ordre de connexion. Riemann privilégie ici une mathématique ou une *géométrie des qualités*, si l'on admet par là qu'il s'intéresse exclusivement à la situation respective de points, de lignes et de morceaux de surface ; mais cela ne signifie pas qu'il refuse d'exprimer ses résultats sous une forme numérique.

Au cours des §§ 5 et 6 de sa *Dissertation*, Riemann étudie certaines propriétés d'*analysis situs* sur des exemples élémentaires tels qu'un disque ou une couronne dans le plan complexe. Dans son mémoire sur les fonctions abéliennes (paragraphe 2), il étend très explicitement son raisonnement aux surfaces connexes fermées (i.e. compactes sans bord) orientables c'est-à-dire aux tores à g trous, comme en témoigne le passage suivant :

> Pour rendre ces considérations applicables à une surface sans contour d'encadrement, c'est-à-dire une surface fermée, on devra transformer cette surface fermée en une surface qui possède un encadrement, en y pratiquant un trou en un point quelconque, de sorte que la première décomposition sera effectuée au moyen d'une section transverse partant de ce point pour y revenir et formant, par conséquent, une courbe fermée.
>
> Par exemple, la surface extérieure d'un tore annulaire, surface triplement connexe, sera transformée en une surface simplement connexe au moyen d'une courbe fermée et d'une section transverse. [30]

Riemann étudie donc bien les propriétés topologiques de la sphère et des tores à g trous, notamment dans le cas où $g = 1$, $g = 2$, $g = 3$. Il convient ici de préciser que Riemann n'a pas encore en sa possession le théorème selon lequel toute surface connexe, compacte, sans bord et orientable est homéomorphe à un tore à g trous : ce théorème sera établi par Jordan dans un article de 1866 intitulé « Sur la déformation des surfaces ». Bref, Riemann ne sait pas encore que les tores à g trous permettent de décrire *complètement* la topologie des surfaces de Riemann compactes connexes. Une fois écartée cette illusion rétrospective, on peut dire que les tores à g trous ont une double fonction pour Riemann. Ils permettent de clarifier et de rendre plus intuitives des propriétés relevant de l'*analysis situs*. Ils servent de point d'appui

30. B. Riemann, *Théorie des fonctions abéliennes*, *op. cit.*, p. 98.

pour classer les surfaces de Riemann compactes connexes topologiquement [31] : les tores à g trous sont donc porteurs de généralité sur un plan conceptuel et dans l'appréhension de certains objets mathématiques puisqu'ils permettent de les classer. Dans la *Dissertation* et la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann, ils ont toutes les caractéristiques de ce que nous appelons des *exemples paradigmatiques*.

Par ce terme, nous entendrons la donnée d'un objet mathématique jouissant de deux fonctions :

(a) rendre explicites et opératoires certaines propriétés abstraites qui peuvent en droit être définies indépendamment de ce même objet ;

(b) servir de support pour généraliser une méthode ou pour classer un ensemble d'objets mathématiques de manière exhaustive. Un exemple paradigmatique n'est pas la simple donnée d'un objet qui vérifierait les propriétés d'un concept. Il convient de distinguer exemples *paradigmatiques* et exemples *illustratifs*. Un exemple paradigmatique n'est donc pas une réalisation particulière d'un concept général, comme lorsque l'on affirme que *le* plan complexe est *une* surface de Riemann. Mais il ne s'agit pas non plus d'un *cas isolé* dont les particularités seraient étudiées pour elles-mêmes. On peut ici se référer à la quartique de Klein d'équation $x^3y + y^3z + z^3x = 0$. Il s'agit d'une courbe de genre 3 que Klein étudie en tant que telle, sans réaliser immédiatement que les résultats obtenus dans ce cas peuvent être généralisés.

> Même si cet exemple remarquable constitue le premier exemple d'uniformisation en genre supérieur, il apparaissait à l'époque comme un joyau unique, semblable aux polyèdres réguliers, et ne semblait pas susceptible de généralisation. [32]

À la différence d'un cas isolé — ou considéré comme tel —, un exemple paradigmatique sert de support pour construire, étudier et *généraliser* certaines propriétés. Contrairement à un exemple illustratif, il *dit* le général plutôt qu'il ne l'illustre. Remarquons que Riemann s'en tient aux tores à 1, 2 et 3 trous pour associer de proche en proche à *chaque* surface (compacte, connexe, sans bord, orientable) son invariant topologique fondamental, à savoir son *genre* — ce terme étant introduit par Clebsch en 1865. Ainsi, un exemple paradigmatique

31. Le terme de genre n'est pas dû à Riemann mais à Clebsch dans ses travaux sur les intégrales abéliennes. Voir en particulier, U. Bottazzini,≪ *Algebraic Truth* vs *Geometric Fantasies* : Weierstrass' Response to Riemann ≫, Proceedings of the ICM, Beijing 2002. Vol. III. 1-3 p. 924. Au cours de son ouvrage fondamental de 1882, Klein interprète géométriquement une telle notion en se fondant sur des surfaces remarquables : les sphères à g anses qui jouent un rôle équivalent aux tores à g trous dans la classification des surfaces de Riemann fermées connexes.

32. Collectif rassemblé sous le pseudonyme Henri Paul de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann*, retour sur un théorème centenaire, Lyon, ENS éditions, 2010, p. 28.

peut servir de support pour parvenir à un théorème général. Nous pensons évidemment ici au théorème de Jordan (1866) — qui relève à strictement parler de l'*analysis situs* et non de l'analyse complexe — selon lequel toute surface *topologique* compacte, connexe, sans bord et orientable est homéomorphe à un tore à g trous. Enfin, on peut distinguer un exemple paradigmatique et un exemple problématique ou un contre-exemple qui borne la validité d'un théorème ou d'une théorie tout en permettant d'accéder à des classes plus générales d'objets mathématiques. Nous pensons notamment à l'exemple d'une fonction discontinue sur une partie dense des réels et pourtant intégrable que Riemann étudie dans son mémoire d'habilitation (1854) ou encore aux fonctions partout continues mais nulle part dérivables de Weierstrass. Ces cas apparemment ≪ exceptionnels ≫ permettent en réalité de concevoir la classe des fonctions intégrables et la classe des fonctions continues dans toute leur généralité. Ainsi, une fonction peut être partout continue tout en n'étant nulle part dérivable.

Nous investirons la notion d'exemple paradigmatique à nouveaux frais au cours de la troisième partie de notre thèse. Nous reviendrons alors sur l'article en quatre parties que Weyl consacre en 1925-1926 à la théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Nous pouvons déjà préciser notre propos. Dans cet écrit, Weyl prouve tout d'abord le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ en se fondant sur la méthode dite de restriction au cas unitaire, avant d'étendre cette méthode à tout groupe de Lie complexe semi-simple. Le groupe $\mathrm{SL}(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ a donc toutes les caractéristiques d'un exemple paradigmatique chez Weyl, le problème n'étant pas seulement ici de déterminer des propriétés générales mais bien de construire sur un exemple particulier une méthode et un type de raisonnement en droit généralisables. Cela posé, un exemple paradigmatique a des fonctions à la fois pédagogiques et heuristiques. Il constitue non seulement *une voie d'accès* au général, mais également un support pour *construire* en filigrane une théorie ou des résultats dont la portée est générale. Tel est le but affiché par Riemann lorsqu'il se réfère aux tores à 1, 2 et 3 trous pour appréhender de proche en proche les propriétés d'*analysis situs* des surfaces connexes, compactes, sans bord et orientables.

Ces considérations montrent que le développement d'une théorie mathématique repose sur une étroite corrélation entre la construction de concepts et l'étude de certains objets susceptibles d'être érigés au rang d'exemples paradigmatiques. À cela s'ajoute qu'aucun objet mathématique ne constitue en lui-même un exemple paradigmatique. Une telle propriété est relative au cadre conceptuel adopté, aux méthodes employées, etc. Pour le dire autrement, un même objet mathématique peut être plus ou moins significatif en fonction des concepts et des modes de raisonnement utilisés. Par exemple, lorsqu'en 1935, Casimir et van der Waerden

proposent une démonstration purement algébrique du théorème de complète réductibilité pour les groupes de Lie complexes semi-simples, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ n'a plus la fonction d'exemple paradigmatique que lui prêtait Weyl en 1925-1926. Casimir et van der Waerden se fondent sur SO(3) pour construire en pointillés une méthode de démonstration ensuite généralisable, non sans difficultés. [33]

Si nous revenons à la *Dissertation* et à la *Théorie des fonctions abéliennes*, nous pouvons dire que Riemann introduit les surfaces à plusieurs feuillets revêtant le plan complexe en reléguant tout d'abord au second plan l'objet fonction. Il dégage ensuite les propriétés d'*analysis situs* que ces surfaces peuvent admettre. Pour ce faire, il s'appuie sur une série d'exemples paradigmatiques. Nous pouvons donc tirer deux enseignements à partir de ces arguments : (1) l'*analysis situs* se situe au fondement de l'analyse pour Riemann ; (2) les §§ 1 à 6 de la *Dissertation* et le début du mémoire de 1857 se caractérisent par leur grande généralité : généralité dans la définition d'une fonction, généralité dans la description des surfaces de Riemann qui ne sont pas adossées à l'étude de fonctions données, généralité dans la définition des propriétés d'*analysis situs* grâce à des exemples paradigmatiques : disques, couronnes, tores à g trous, etc.

Riemann opte pour un point de vue « *topologique* » *et intégral* dans l'étude des fonctions d'une variable complexe ; ce point de vue est consacré avec le *théorème de Cauchy* que nous expliciterons dans ce qui suit. En revanche Weierstrass adopte un mode de raisonnement *local et algébrique* lorsqu'il étudie les fonctions analytiques d'une variable complexe. Comme nous l'avons souligné précédemment, les propriétés de $\mathbb{C}$-dérivabilité — assujettie aux conditions de Cauchy-Riemann — et de $\mathbb{C}$-analyticité sont équivalentes, ce qui explique partiellement pourquoi Weyl estime que les points de vue de Riemann et de Weierstrass convergent, bien qu'ils soient distincts. Weyl parviendra d'ailleurs à sceller une telle équivalence dans sa construction et son axiomatisation des surfaces de Riemann. Par extension, *Die Idee der Riemannschen Fläche* articule systématiquement le point de vue *topologique et intégral* de Riemann et le point de vue *local et algébrique* de Weierstrass. Voici comment Lautman résume la démarche suivie par ce dernier :

> Une fonction analytique est essentiellement définie pour Weierstrass au voisinage d'un point complexe z_0, par une série de puissances à coefficients numériques, qui converge dans un « cercle de convergence » autour du point z_0. La méthode du « prolongement analytique » permet ensuite de construire de proche en proche tout un domaine où la fonction est dite « analytique » et cela de la façon suivante : on prend comme nouveau centre un point intérieur du premier cercle,

33. Voir à ce propos la thèse de M. Schneider, *Die physikalischen Arbeiten des junge B. L. van der Waerden*, thèse de doctorat dirigée par E. Scholz et soutenue en octobre 2009, p. 309 et suivantes.

> on obtient ainsi à la fois une nouvelle série et un nouveau cercle [disque] de convergence qui peut déborder le premier. La nouvelle série prolonge la première si leurs valeurs coïncident dans la partie commune des deux cercles. La série peut être prolongée ainsi dans toutes les directions jusqu'aux points dans le voisinage immédiat desquels les séries obtenues divergeraient. [34]

Il décrit ici la méthode de prolongement analytique qui consiste à construire des disques de convergence enchaînés. Une telle méthode est effectivement algébrique et locale ; elle est tout à fait révélatrice du point de vue développé par Weierstrass ≪ en opposition voulue avec la conception intégrale de Cauchy et Riemann ≫. Qu'il nous suffise de nous référer à un extrait d'une lettre de Weierstrass à Schwarz reproduit par Weyl :

> Plus je réfléchis aux principes de la théorie des fonctions — et je le fais sans relâche [unablässig] — plus je me convaincs qu'elle doit être fondée sur des vérités algébriques ; inversement, on ne suit donc pas la bonne voie, lorsque l'on a recours, pour être bref, à une méthode transcendante afin de fonder des propositions algébriques simples et fondamentales, aussi séduisantes que puissent d'ailleurs être à première vue les réflexions de Riemann pour découvrir nombre de propriétés importantes des fonctions algébriques. [35]

Weierstrass ne se contente pas de se démarquer de Riemann, il s'oppose frontalement aux méthodes géométriques et transcendantes de Riemann. Weyl critique l'unilatéralité de l'argument défendu ici par Weierstrass. En effet, on ne peut pas se passer d'un substrat géométrique, à savoir les surfaces de Riemann, pour étudier des ≪ fonctions ≫ initialement multivaluées sur le plan complexe. Bien que les méthodes ≪ algébriques ≫ et ≪ intégrales ≫ soient distinctes et sans doute irréductibles l'une à l'autre, il serait faux d'en déduire qu'elles sont totalement inconciliables au point qu'il faudrait, pour ainsi dire, choisir l'une d'elles au détriment de l'autre. En outre, le fait de croire que des vérités algébriques doivent impérativement être fondées sur des méthodes purement algébriques — comme si ces dernières se suffisaient à elles-mêmes — relève d'une pétition de principe. En outre, il convient d'affiner les différences d'approche qui séparent Riemann et Weierstrass. Comme a pu le remarquer J. Gray, Riemann était tout à fait prêt à utiliser des méthodes fondées sur l'usage des séries de puissances ou des séries de

34. A. Lautman, *op. cit.*, pp. 134-135.

35. Cité par H. Weyl, dans ≪ Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses ≫ (1931), in H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen*, Band III, Heraus. von K. Chandrasekharan, Berlin, éd. Springer (1968), p. 352 : ≪ Je mehr ich über die Prinzipien der Funktionentheorie nachdenke — und ich tue das unablässig — um so fester wird meine Überzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss, und dass es deshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraischer Sätze das "Transzendente", um mich kurz auszudrücken, in Anspruch genommen wird — so bestechend auch auf den ersten Blick z. B. die Betrachtungen sein mögen, durch welche Riemann so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraischer Funktionen entdeckt hat. ≫

Fourier pour caractériser localement une fonction. En revanche, il s'écarte fondamentalement de Weierstrass par son usage systématique d'un « raisonnement géométrique » qui était pour ainsi dire banni par Weierstrass. [36]

Les différences entre les démarches suivies respectivement par Riemann et Weierstrass en analyse complexe montrent qu'un même cadre mathématique peut généralement faire intervenir diverses méthodes, provisoirement irréductibles les unes aux autres. La difficulté consiste alors à pouvoir les articuler, ce qui suppose l'introduction d'un cadre théorique qui permette d'en faire la synthèse. Weyl parvient à surmonter une telle difficulté dans les trois premiers paragraphes de son ouvrage sur les surfaces de Riemann, puisqu'il construit alors les surfaces de Riemann en se fondant sur le processus de prolongement analytique dû à Weierstrass. Il débouche donc sur un objet géométrique en utilisant un mode de raisonnement algébrique et local. Permettons-nous ici d'identifier par anticipation une caractéristique fondamentale de l'œuvre de Weyl qui dépasse d'ailleurs de loin la seule référence à *Die Idee der Riemannschen Fläche*. À plusieurs reprises dans son parcours scientifique, Weyl tente de dialectiser des méthodes différentes voire antagonistes pour souligner leur complémentarité. Nous en avons donc un premier exemple avec son ouvrage sur les surfaces de Riemann qui confronte les points de vue de Riemann et de Weierstrass. De même, en 1925, lorsque Weyl développe la théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples, à commencer par $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, il adopte tour à tour le point de vue infinitésimal et algébrique d'É. Cartan et le point de vue intégral de Hurwitz qu'il complète par des considérations d'*analysis situs*, comme en atteste sa preuve de la simple connexité de SU_n. On peut légitimement en déduire cette hypothèse : l'incidence de *Die Idee der Riemannschen Fläche* sur les travaux ultérieurs de Weyl consacrés aux représentations de groupes ne se mesure pas seulement au fait qu'il s'appuie dans les deux cas sur la théorie des revêtements. Plus profondément, dans ses travaux de 1913 comme dans ses articles de 1925-1926, il dialectise des méthodes

36. J. Gray, *op. cit.* p. 23. Précisons que le point de vue algébrique et local de Weierstrass est motivé pour des raisons purement internalistes par le fait qu'il prend également pour objet d'étude les fonctions de plusieurs variables complexes. Voir à ce propos J. Gray, « Berlin in the 19^{th} century », in *EMS Newsletter* June 2009, p. 30 : « Cauchy, and Riemann, had started with the definition of complex differentiability that leads at once to the Cauchy-Riemann equations. However, the generalisations of these equations to several variables have more equations than unknown functions so it is hard to see that they can be of any use (the system is overdetermined). The key theorem that takes you from the Cauchy-Riemann definition of holomorphic to the power series expansions of a complex function is the Cauchy integral theorem and the Cauchy residue theorem that follows from it. However, the Cauchy integral theorem is a feeble thing in several variables because it gets the dimension of the boundary wrong. That only leaves the theory of convergent power series and that is therefore what Weierstrass insisted upon ».

distinctes et il fait ainsi ressortir l'unité des champs théoriques qu'il investit (surfaces de Riemann, représentations des groupes de Lie, etc.).

L'idée selon laquelle Weyl prolongerait les travaux de Riemann en analyse complexe s'avère simplificatrice, car elle ne nous dit pas ce que Weyl emprunte à Riemann et ce qui singularise les cours de Weyl de 1910-1911 et *Die Idee der Riemannschen Fläche* par rapport à la *Dissertation* de 1851. Nous pouvons déjà répondre partiellement à ces difficultés. Tout d'abord, à l'instar de Riemann, Weyl demeure attaché à l'usage de représentations géométriques pour aborder les fonctions d'une variable complexe. Ensuite, il insiste sur le fait que l'*analysis situs* et la théorie des surfaces de Riemann sont au fondement de l'analyse complexe ; il se conforme ainsi à l'ordre des idées adopté par Riemann en 1851 comme en 1857. Enfin, il reprend à son compte la grande généralité qui caractérise la *Dissertation* de 1851. Néanmoins, Weyl s'approprie également l'approche algébrique et locale de Weierstrass en analyse complexe et il entend formuler les concepts utilisés par Riemann de manière purement abstraite en s'appuyant sur la méthode axiomatique. Il n'est donc pas possible d'adopter une vision linéaire de l'histoire, fondée sur des rapports de filiation, pour situer les travaux de Weyl sur les surfaces de Riemann. Il se trouve au croisement de diverses traditions et il opère une véritable reconfiguration dans l'enseignement consacré à la théorie des surfaces de Riemann, étant donné qu'il adopte la méthode axiomatique pour définir ses concepts et qu'il intègre les derniers travaux de Koebe (et dans une moindre mesure ceux de Poincaré) sur le théorème d'uniformisation.

1.3 Un usage contrôlé de l'intuition chez Riemann

Weierstrass critique essentiellement deux points qui sont d'une importance capitale dans la *Dissertation* de 1851 : non seulement l'usage de représentations géométriques, mais également le recours au *principe de Dirichlet*. Or, ce sont là les deux fondements sur lesquels s'appuie Riemann en analyse complexe. D'ailleurs, les critiques de Weierstrass n'en forment en réalité qu'une seule : les méthodes de Riemann manqueraient généralement de rigueur, soit parce qu'elles utilisent un principe qui n'a rien de certain, soit parce qu'elles sont guidées par des intuitions géométriques susceptibles de nous induire en erreur. Nous souhaitons justement montrer que Riemann fait un usage contrôlé de l'intuition. Les objections de Weierstrass conduisent à une remise en question trop unilatérale des méthodes de Riemann. En particulier, Riemann ne s'appuie pas sur l'*analysis situs* de manière totalement arbitraire car elle lui permet de préciser à quelle condition certains théorèmes fondamentaux de l'analyse com-

plexe sont valides. Dans le prochain paragraphe, nous verrons en revanche que les objections de Weierstrass à l'encontre du principe de Dirichlet sont parfaitement justifiées. Elles seront levées par Hilbert au début du XX^{e} siècle.

Comme nous l'avons souligné dans ce qui précède, Riemann accorde une fonction heuristique à l'intuition géométrique au cours de sa *Dissertation*. Cela est particulièrement vrai lorsqu'il introduit les concepts de connexité ou encore de simple connexité qu'il construit en se fondant sur des procédés de nature géométrique — nous pensons en particulier aux sections transverses. Cependant, nous voudrions montrer sur un exemple précis que Riemann fait un usage parfaitement contrôlé des représentations intuitives en analyse complexe. Autrement dit, le recours à l'intuition géométrique ne saurait résulter chez Riemann d'un défaut de rigueur. Cette lecture, qui est due à Weierstrass, est normative : elle consiste à évaluer et à critiquer les méthodes de Riemann en les assujettissant à une norme de rigueur supposée unique, qui est définie par Weierstrass lui-même : l'usage de représentations géométriques serait *a priori* frappé d'invalidité. Or, Riemann les utilise justement pour dégager les conditions qui doivent être satisfaites pour que certains théorèmes soient valides. Corrélativement, nous pouvons préciser le lien entre géométrie et analyse chez Riemann ; plus précisément, nous confirmons notre hypothèse d'interprétation selon laquelle l'*analysis situs* se situe au fondement de l'analyse aux yeux de Riemann. Ainsi, Riemann n'utilise pas seulement l'*analysis situs* pour décrire les surfaces de Riemann en elles-mêmes et dégager les propriétés topologiques qu'elles peuvent partager, il montre de manière systématique que l'on ne saurait mesurer la validité de la plupart des théorèmes en analyse complexe sans faire intervenir des concepts tels que celui de connexité ou de simple connexité.

Ainsi, au cours du § 9 de sa *Dissertation*, Riemann met au jour les conditions topologiques qui président au théorème de Cauchy, avant de le généraliser aux surfaces de Riemann. Pour expliciter sa démarche, restreignons-nous pour l'instant aux fonctions holomorphes sur un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. Elle repose sur la notion d'intégrale curviligne le long d'un chemin que l'on suppose généralement fermé, i.e. tel que son origine coïncide avec son extrémité. En termes équivalents, soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et K un compact, contenu dans Ω, à bord ∂K de classe C^1 par morceaux — avec l'orientation canonique du bord —, le théorème de Cauchy affirme que toute fonction f, holomorphe sur Ω, vérifie

$$\int_{\partial K} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Supposons maintenant qu'une fonction f satisfasse localement aux conditions de Cauchy-Riemann sur une surface de Riemann T. Pour que le théorème de Cauchy soit vrai, il faut

supposer que T soit simplement connexe, ce qu'indique très précisément Riemann. Mais il fait plus, comme en témoigne le passage suivant :

> Lorsque, sur une surface simplement connexe recouvrant A, l'intégrale
>
> $$\int \left(x\frac{\partial X}{\partial p} + y\frac{\partial Y}{\partial p} \right) \mathrm{d}s$$
>
> ou encore
>
> $$\int \left(x\frac{\partial X}{\partial p} - y\frac{\partial Y}{\partial p} \right) \mathrm{d}s$$
>
> Prise autour du contour total d'une partie quelconque de la surface, est nulle, cette intégrale prise le long d'une ligne menée de O_o en O, deux points fixes quelconques sur cette surface, possède la même valeur pour chacune de ces lignes. En effet, deux lignes s_1 et s_2, joignant les points O_o et O, forment toujours, par leur réunion une ligne fermée s_3 (...). Par conséquent, les intégrales prises le long des lignes s_1 et s_2, lorsque cette direction ne change pas, c'est-à-dire lorsqu'elle est comptée le long de l'une de ces lignes de O à O_o et le long de l'autre de O_o à O, se détruisent et, par suite, lorsque le long de la seconde ligne la direction est changée, les intégrales sont égales. [37]

Riemann raisonne donc sur une surface simplement connexe T. Il envisage deux chemins s_1 et s_2 — de classe C^1 par morceaux — ayant même origine et même extrémité O et O_o, les trajectoires respectives de s_1 et s_2 sont contenues dans T. En termes modernes, on peut dire que ces deux chemins sont nécessairement *homotopes* : puisque T est simplement connexe, ils sont continûment réductibles l'un à l'autre. Ensuite, Riemann construit le chemin fermé s_3 de la manière suivante : on suit le chemin s_1 de O à O_o et, arrivé à O_o, on suit le chemin s_2 jusqu'à O. D'après la généralisation du théorème de Cauchy due à Riemann, on sait que, pour toute fonction satisfaisant localement aux conditions de Cauchy-Riemann sur une surface de Riemann,

$$\int_{s_3} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Donc, les intégrales calculées respectivement le long de s_1 de O à O_o et le long de s_2 de O_o à O s'annulent. Par suite, lorsque l'on détermine les intégrales curvilignes respectivement le long de s_1 et de s_2 en suivant la même direction — à savoir de O à O_o —, on aboutit à des résultats égaux. Au moment où il généralise le théorème de Cauchy, Riemann résout simultanément le problème suivant : *à quelles conditions* les intégrales curvilignes, calculées respectivement le long de deux chemins ayant même origine et même extrémité sur une surface, sont-elles égales ? Cette difficulté exige de déterminer dans quel cadre deux chemins peuvent être regardés comme équivalents au regard de l'*analysis situs*.

Certes, dans ce passage « l'homotopie des chemins » n'est pas dégagée explicitement — on succomberait alors à une illusion rétrospective — et *a fortiori* elle n'est pas traitée

37. B. Riemann, *op. cit.*, p. 19

pour elle-même dans des situations abstraites. Il n'en reste pas moins que le point de vue intégral de Riemann dépend systématiquement de prémisses qui relèvent de l'*analysis situs* : en particulier, c'est parce que la surface est *simplement connexe* et donc que les chemins d'origine O et O_o sont continûment réductibles l'un à l'autre que Riemann en déduit l'égalité des intégrales recherchées. De telles considérations permettent ainsi à Riemann d'exhiber clairement les conditions qui doivent être satisfaites pour que les résultats de Cauchy soient vérifiés et leurs conséquences explicitées.

Dans son cours de 1910-1911 en analyse complexe, Weyl consacre l'essentiel du chapitre 3 au théorème intégral de Cauchy ; ses réflexions le conduisent justement à montrer *in concreto* dans quelle mesure des concepts relevant de l'*analysis situs* sont au fondement des principaux résultats d'analyse. Avant de parvenir à ce point, Weyl analyse le concept de chemin [Weg] et il montre à quel point ce concept est la résultante d'un processus d'*abstraction* avant même qu'on ne le formalise mathématiquement. Weyl illustre par cet exemple l'idée selon laquelle l'*abstraction* et la *formalisation* ne sont pas des processus identiques. Pour ce faire, il souligne l'ambivalence des usages du terme de chemin, puisqu'il désigne tantôt la voie sur laquelle on se trouve, tantôt la direction que l'on suit. Pour remédier à cette ambivalence, Weyl propose une double distinction conceptuelle : un « chemin » ne recouvre ni le concept de « voie » [Geleise], ni celui de mouvement [Bewegung]. Une « Geleise » désigne l'ensemble des points parcourus [die Menge der passierten Punkte] ; elle n'a donc pas de direction [Richtung]. Un mouvement [Bewegung] est dépourvu de signification s'il ne fait pas intervenir simultanément les notions de direction et de vitesse. Mais ce concept est trop fort pour caractériser la notion de chemin qui consiste justement à s'abstraire de toute donnée *quantitative* concernant la vitesse. Weyl en déduit que le concept de chemin constitue un moyen terme entre les notions de Geleise et de mouvement [Bewegung]. [38] Il précise par la suite que deux mouvements sont équivalents si et seulement s'ils suivent le même chemin. [39] Cette analyse conceptuelle qui engage bien un processus d'abstraction, constitue un préalable essentiel à la formalisation mathématique. De plus, ce travail sur les concepts a un rôle didactique que l'on doit souligner : il permet de comprendre chacun des raffinements nécessaires pour formaliser le concept de chemin et le distinguer nettement des deux autres concepts mentionnés précédemment. Ainsi, la notion de chemin implique une différenciation entre un point-origine et un point-extrémité qui permet de caractériser l'idée de direction qui est consubstantielle à ce concept.

Une fois parvenu à une formalisation rigoureuse des notions de chemin et d'intégrale

38. H. Weyl, *Einführung in der Funktionentheorie*, *op. cit.*, p. 139-140.
39. *ibid.*, p. 143.

curviligne, Weyl commence par formuler le théorème de Cauchy comme suit : « si $\varphi(z)$ est une fonction analytique qui peut être considérée comme la dérivée d'une fonction analytique régulière $\Phi(z)$ alors l'intégrale de $\varphi(z)$ calculée le long d'une courbe fermée est nulle ».[40] Weyl propose une première tentative de démonstration pour prendre la mesure du fait que ce théorème n'est pas valable sans restrictions : les chemins en question doivent être de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Après une série de détours, il exhibe les conditions pour que la fonction $\varphi(z)$ soit bien régulière analytique à l'intérieur du domaine délimité par la courbe fermée en question. Il faut et il suffit que ce domaine soit *simplement connexe*. Et Weyl d'ajouter : « mais cette restriction, qui est suffisante, est tout à fait essentielle. L'exemple suivant nous montre qu'elle est absolument nécessaire pour que le théorème intégral de Cauchy soit valide » : Weyl se donne la fonction $\varphi(z) = 1/z$ et un disque de rayon a épointé en l'origine, ce domaine est connexe mais non pas simplement connexe ; il trace une courbe fermée $\mathfrak{L}$ entourant l'origine à l'intérieur de ce disque et il montre que

$$\int_{\mathfrak{L}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i,$$

autrement dit, l'intégrale calculée le long de la courbe fermée $\mathfrak{L}$ n'est pas nulle. Donc la restriction à des domaines simplement connexes constitue une condition nécessaire à la validité du théorème intégral de Cauchy : si le domaine délimité par la courbe fermée n'était pas simplement connexe, alors la proposition ne serait pas vérifiée. Weyl rend ainsi raison de la restriction que Riemann formule explicitement au cours du § 9 de sa *Dissertation*, puisque ce dernier s'en tient effectivement à des domaines simplement connexes.

Certes, l'approche adoptée par Riemann est « géométrique » et elle tient en particulier à la place qu'il accorde à l'*analysis situs* dont les fondements ne sont pas encore garantis. Weierstrass tire prétexte de cet usage de représentations géométriques pour juger les méthodes de Riemann peu rigoureuses. Mais sans doute faut-il immédiatement ajouter que Weierstrass juge les travaux de Riemann à partir d'une norme de rigueur bien précise. Il oublie de souligner que l'*analysis situs* permet justement à Riemann de dégager les conditions sans lesquelles le théorème de Cauchy ne serait pas valable. Or, cette recherche des *conditions* qui fait effectivement intervenir des représentations géométriques, dénote tout sauf un manque de rigueur. Nous voudrions justement lever un malentendu à ce propos. La notion de « rigueur » en mathématiques ne se laisse pas réduire à une exigence de « formulation » précise, bien que celle-ci soit nécessaire afin de lever certaines ambiguïtés syntaxiques. On peut très bien savoir manipuler de manière quasiment automatique des quantificateurs et les sym-

40. *ibid.*, p. 151.

boles qui président à la définition des concepts de limite, de continuité ou de dérivabilité, tout en méconnaissant leur champ d'application et leur articulation. Si par rigueur, on entend la claire conscience des conditions auxquelles il faut satisfaire pour qu'un théorème soit vrai, alors assurément, les résultats obtenus par Riemann sont rigoureux, bien qu'ils soient démontrés géométriquement. Cette remarque souffre cependant une exception puisque, au cours de sa *Dissertation*, Riemann fonde le principe de Dirichlet sur des présupposés inexacts qui le conduisent à en conclure trop hâtivement à validité de ce même principe.

Pour mesurer toute la pertinence du point de vue topologique et intégral de Riemann, mettons en avant ses implications lorsque l'on aborde le problème de l'existence de primitives qui est une conséquence directe du théorème de Cauchy. Soit f une fonction, définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, qui est la dérivée de F ; γ désigne pour sa part un chemin — de classe C^1 par morceaux — d'origine $\gamma(a)$ et d'extrémité $\gamma(b)$ dont la trajectoire est contenue dans Ω. On a :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b))$$

Si γ est un lacet, alors $\gamma(a) = \gamma(b)$. Par extension, nous avons l'équivalence : une fonction analytique f admet une primitive sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$ si et seulement si on vérifie que pour tout lacet γ dont la trajectoire est contenue dans Ω :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Le problème est alors le suivant : à quelle condition l'existence d'une primitive est-elle assurée pour toute fonction holomorphe définie sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$? Pour résoudre cette difficulté, il suffit de supposer que Ω est simplement connexe. Ainsi, cette propriété d'*analysis situs* garantit l'existence d'une primitive pour toute fonction holomorphe définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Dans son cours de 1910-1911, Weyl montre que ce résultat est contenu dans le théorème intégral de Cauchy qu'il reformule comme suit : « Si une fonction régulière analytique est donnée dans un domaine simplement connexe G, alors 1. $\oint_{\mathfrak{L}} f(z)\mathrm{d}z = 0$, $\mathfrak{L}$ désignant une courbe fermée entièrement contenue dans G, 2. il existe une fonction régulière analytique $F(z)$ telle que $F'(z) = f(z)$ ».[41]

Observons également qu'au cours du § 9 Riemann s'intéresse à l'étude des fonctions qui satisfont localement aux conditions de Cauchy-Riemann sur une surface T, sauf pour un ensemble de points isolés. D'où la nécessité de parvenir au théorème des résidus qui se substitue alors au théorème de Cauchy. Riemann affirme en substance :

41. *ibid.*, p. 160.

> Lorsque les fonctions X et Y satisfont en chaque partie de la surface à l'équation différentielle prescrite [conditions de Cauchy-Riemann], mais sont affectées d'une discontinuité en des lignes ou points isolés, on peut adjoindre à chacune de ces lignes ou points une portion de surface entourante aussi petite que l'on voudra, et l'on obtient alors (...) : L'intégrale
>
> $$\int \left(X \frac{\partial X}{\partial p} + Y \frac{\partial Y}{\partial p} \right) \mathrm{d}s$$
>
> relative à tout le contour de T, est égale à la somme des intégrales
>
> $$\int \left(X \frac{\partial X}{\partial p} + Y \frac{\partial Y}{\partial p} \right) \mathrm{d}s$$
>
> relatives aux contours qui encadrent tous les lieux de discontinuité, et, relativement à chacun de ces lieux, l'intégrale conserve la même valeur, quelque étroites que soient les limites dans lesquelles on renferme ces discontinuités. [42]

Si nous voulons formuler en termes rigoureux cette proposition, il nous faut brièvement rappeler ce que l'on entend par résidu. Soient $a \in \mathbb{C}$, Ω un voisinage ouvert de a et f une fonction holomorphe sur $\Omega \backslash \{a\}$; C désigne un petit cercle de centre a, contenu dans Ω. Le *résidu* de f en a est défini par la formule :

$$\mathrm{res}_a(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)\mathrm{d}z.$$

Notons $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ la série de Laurent de f au point a ; de manière équivalente, on peut définir le résidu de f en a comme suit : $\mathrm{res}_a = c_{-1}$. Pour préciser les choses, nous dirons que a est une *singularité éliminable* de f si $c_n = 0$ pour tout entier $n < 0$; en particulier $\mathrm{res}_a = 0$ dans ce cas. Deux autres possibilités se présentent : a est un *pôle* de f s'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $c_{-m} \neq 0$ et $c_n = 0$ pour tout $n < -m$. Enfin, a est une *singularité essentielle* de f s'il existe une infinité de $n < 0$ tels que $c_n \neq 0$. Nous pouvons formuler maintenant le théorème des résidus : on suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et que f est une fonction holomorphe sur $\Omega \backslash \{a_\nu\}$, les a_ν étant des pôles ou des singularités essentielles de f. Pour tout compact K, contenu dans Ω à bord ∂K de classe C^1 par morceaux tel que

$$\partial K \cap \{a_\nu\} = \varnothing$$

on a :

$$\int_{\partial K} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a_\nu \in K} \mathrm{res}_{a_\nu}(f).$$

La formule des résidus peut être étendue au cadre plus général des surfaces de Riemann et l'on rend alors pleinement raison du résultat auquel Riemann aboutit au cours du § 9. D'après ce commentaire, on en déduit qu'à l'instar de Cauchy, Riemann adopte explicitement

42. *ibid.*, p. 18.

et systématiquement un point de vue intégral en analyse complexe ; il le complète par des considérations générales d'*analysis situs*, afin de déterminer les conditions qui garantissent la validité de certains théorèmes avant de les étendre à une situation plus générale : celle des surfaces de Riemann. Non seulement l'*analysis situs* conditionne l'analyse, mais de plus elle permet de généraliser toute une série de propositions dans le contexte des sufaces de Riemann.

Avant d'aborder le *principe de Dirichlet*, nous voudrions brièvement revenir sur la formule intégrale de Cauchy, bien que Riemann ne la mentionne pas dans sa *Dissertation*. Cette formule peut être considérée comme l'un des *fondements* de l'analyse complexe ; en effet elle sert de clé pour établir les principaux résultats sur les fonctions holomorphes. Supposons que f soit une fonction holomorphe — ou analytique — sur un ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$ et que K soit un compact inclus dans Ω, à bord orienté de classe C^1 par morceaux, alors pour tout point z qui fait partie de l'intérieur de K,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

Cette formule admet la conséquence immédiate suivante : toute fonction holomorphe définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est *indéfiniment différentiable*, ses dérivées n-ièmes étant toutes *holomorphes*. Lautman précise à ce propos que « la théorie de l'intégrale » qu'exemplifie de manière remarquable la formule intégrale de Cauchy « est au plus haut degré une notion globale ». Et il ajoute en commentaire à ce résultat :

> La valeur d'une fonction analytique en un point intérieur z d'un domaine limité par une courbe fermée $\mathbb{C}$ est déterminée par la valeur de la fonction sur la courbe frontière (...) si le domaine en question est simplement connexe, c'est-à-dire n'a pour frontière que la seule courbe fermée. On voit ainsi intervenir dans cette définition des propriétés structurales de simple connexion [connexité] relative à la topologie du domaine de base. [43]

L'interprétation de Lautman à propos de la *Dissertation* et de la *Théorie des fonctions abéliennes* peut se traduire de la manière suivante : il s'agit de mettre en lumière les propriétés « structurales » — de nature topologique — qui sont au fondement des principaux résultats en analyse complexe. Elles permettent de les clarifier et de les généraliser aux surfaces de Riemann. La question est de savoir si le qualificatif « structural » employé par Lautman n'est pas anachronique. En effet, pour que des propriétés topologiques soient envisagées de manière structurale, il faut au moins qu'elles soient déterminées indépendamment de la nature des objets auxquels elles s'appliquent. Or, il ne semble pas que Riemann parvienne à ce niveau

43. A. Lautman, *op. cit.* p. 134.

d'abstraction. En revanche, il met au jour les conditions de possibilité qui président à la détermination des fonctions d'une variable complexe [44] et aux théorèmes de Cauchy — dans ce dernier cas, l'introduction du concept de simple connexité joue un rôle absolument crucial.

Dans une certaine mesure, Lautman voit en Riemann un précurseur d'une approche structurale en analyse, de même que Galois serait le précurseur d'une approche structurale en algèbre. En réalité, si un rapprochement devait être fait entre Galois et Riemann, il reposerait sur le fait que dans les deux cas, les réflexions touchant aux conditions de possibilité de certains résultats ou méthodes deviennent effectivement centrales. C'est ainsi que dans son mémoire de 1831 sur la résolubilité des équations algébriques, Galois s'interroge sur la *possibilité* de résoudre des équations algébriques par radicaux. Il est alors amené à étudier les permutations des racines d'une équation donnée pour montrer dans quelle mesure l'abaissement du « groupe » de telles permutations commande la possibilité ou non de résoudre une équation générale par radicaux. Bien que Galois accorde une priorité à l'étude des permutations des racines d'une équation par rapport aux calculs qui permettraient de résoudre cette équation, l'usage qu'il propose du concept de « groupe » n'est pas fixé comme on souhaiterait rétrospectivement qu'il le soit. Par ce terme, il entend tantôt des classes de permutations, tantôt un ensemble fermé par composition de permutations. Cette remarque doit nous prévenir contre l'idée simpliste selon laquelle Galois serait le « père fondateur » de la théorie des groupes au point de soutenir qu'il conduirait massivement à substituer l'algèbre des structures à l'algèbre comme théorie des équations. De même, s'il est indiscutable que Riemann fonde l'analyse sur l'*analysis situs*, il n'en demeure pas moins que cette hiérarchie est conditionnée par un projet spécifique de géométrisation de l'analyse. Bref, il n'y a nulle trace d'une pensée « structurale » chez Riemann, puisque cela reviendrait à envisager les concepts de la topologie complètement *in abstracto*. Pour préciser notre propos, les noms de Galois et de Riemann ne sauraient être utilisés à titre de prétexte pour justifier une histoire linéaire et finaliste des mathématiques centrée sur l'idée d'une marche inexorable vers les mathématiques structurales. Précisément, Lautman semble adhérer à cette lecture au vu du commentaire qu'il propose au sujet des travaux de Riemann en analyse complexe.

44. Cette interprétation n'est ni arbitraire, ni injustifiée. Voir en particulier A. Brill, M. Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuer Zeit*, in *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Dritter Bd. 1892-1894, Berlin, G. Reimer Verlag, 1894, p. 251 : « [Riemann] formule le problème difficile relatif aux conditions minimales requises pour qu'une fonction des $x + iy$ soit convenablement définie dans le plan imaginaire [in der imaginären Ebene] (ou une partie de celui-ci) ».

1.4 Le principe de Dirichlet et les critiques de Weierstrass à son encontre

Nous avons mesuré dans ce qui précède les divergences entre les points de vue de Weierstrass et de Riemann en analyse complexe. Alors que Riemann adopte un point de vue géométrique et intégral, Weierstrass raisonne de manière algébrique et locale. Selon Riemann, l'intuition géométrique joue un rôle heuristique dans la production de connaissances en analyse complexe, elle permet également de donner un sens objectif à certains concepts et elle constitue un support essentiel pour expliciter les conditions de validité d'un théorème. Aux yeux de Weierstrass, elle apparaît en revanche comme la source d'ambivalences conceptuelles. Il est vrai que ce dernier a su repérer certaines inexactitudes dans le mémoire de Riemann — généralement engendrées par le *principe de Dirichlet*. Mais il semblerait abusif d'en inférer que la cause ultime de ces erreurs tient à une méthode qui accorderait une place trop large à l'intuition géométrique. Celle-ci participe effectivement à la construction de certains concepts dans le mémoire de Riemann — en particulier ceux qui relèvent de l'*analysis situs* —, elle permet de donner une prise sur les objets auxquels ils renvoient. Nous nous proposons d'effectuer une rapide mise en perspective du *principe de Dirichlet* avant d'indiquer la signification et la portée que Riemann lui assigne. Nous préciserons enfin l'erreur qu'il commet dans son raisonnement et nous montrerons qu'elle ne tire pas sa source d'une intuition géométrique — qui en elle-même n'est ni vraie ni fausse.

Bien que Riemann en reste à des raisonnements intra-mathématiques au cours de sa thèse, il ne faut pas perdre de vue que le principe de Dirichlet est issu de problèmes physico-mathématiques. Qu'il nous suffise de nous appuyer sur le long compte-rendu de Brill et Noether sur les fonctions algébriques, intitulé *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuer Zeit*, pour clarifier ce point. Ces derniers commencent par rappeler la diversité des usages de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

en physique mathématique. Introduite par Laplace au cours du livre II de sa *Mécanique céleste*[45] elle est utilisée dès le premier tiers du XIX$^{\text{e}}$ siècle dans l'étude des courants et des conducteurs électriques, dans la théorie de la chaleur, etc. Sur un plan mathématique, on se donne un domaine de l'espace usuel — c'est-à-dire un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ — et l'on essaie de sa-

45. P. S. de Laplace, *Mécanique céleste*, in *œuvres complètes*, tome 1, Paris, éd. Gauthier-Villars, 1878, livre 2, § 11, p. 153.

voir s'il existe fonction V, définie sur l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω, satisfaisant notamment à certaines conditions au bord $\partial\Omega$ fixées *a priori* et qui soit solution de l'équation de Laplace. Pour résoudre cette difficulté, Green tente en 1828 d'exprimer V à l'aide de sa restriction à $\partial\Omega$ et d'une fonction auxiliaire U qui correspond très exactement à la fonction de Green [46] pour le laplacien — précisons que la méthode de résolution de certaines équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles linéaires par les fonctions de Green est communément utilisée en physique. [47] Afin de s'assurer que U existe, Green se contente d'en donner une signification physique dans le cas du potentiel de masses électrisées. Sa preuve est jugée insuffisante par Dirichlet. [48] Ce dernier montre que l'existence de U dépend de celle d'une fonction u définie sur $\overline{\Omega}$, satisfaisant à certaines conditions de régularité sur $\partial\Omega$ et minimisant l'intégrale (de Dirichlet) :

$$\int\int\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Une telle fonction est solution de l'équation de Laplace. De son côté, Riemann transpose le raisonnement de Dirichlet dans le cas complexe. Ainsi, on observe qu'une difficulté relevant initialement de la physique mathématique devient de proche en proche un problème de nature purement mathématique qui consiste à prouver l'existence d'une fonction satisfaisant à certaines conditions et minimisant l'intégrale de Dirichlet. Autant dire que le développement de la théorie du potentiel ne doit pas être vu comme une simple mise en application de principes mathématiques qui lui préexisteraient ; en réalité l'émergence de cette théorie sert de point d'appui pour mettre au jour des problèmes et des principes qui, après coup seulement, peuvent être traités sur un plan purement mathématique. Ce fait n'a pas échappé à Klein dans le discours qu'il a prononcé à Vienne en l'hommage à Riemann en 1894 :

> Remarquez d'ailleurs que la théorie du potentiel, indispensable aujourd'hui comme instrument d'un emploi universel dans l'étude des phénomènes de l'électricité et des autres branches de la physique mathématique, était presque nouvelle à l'époque de Riemann. Green avait, il est vrai, publié son ouvrage fondamental en 1828, mais ce travail était resté longtemps dans l'oubli. Vient Gauss en 1839. La propagation de cette théorie, le développement ultérieur des principaux théorèmes en Allemagne du moins est essentiellement l'œuvre des leçons de Dirichlet. C'est à celles-ci que se rattache directement Riemann. Ainsi c'est à Riemann le premier que l'on doit ce progrès consistant à donner à la théorie du potentiel une signification fondamentale en

46. Cette dénomination est due à Riemann dans ses *Leçons sur la pesanteur, l'électricité et le magnétisme*, rassemblées et publiées par Hattendorf en 1876.

47. G. Green, *an Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham, 1828, cité par Brill et Noether, *op. cit.*, p. 251.

48. Cité par Brill et Noether, *op. cit.*, p. 253-254.

mathématique (...). [49]

Klein confirme d'un point de vue historique l'existence d'une étroite *interaction* entre physique et mathématiques qui nous laisse en droit de douter de deux hypothèses : (1) la physique ne consiste pas à appliquer au domaine de l'empirie des connaissances mathématiques qui seraient toujours données au préalable, en réalité nombre de principes mathématiques peuvent être dégagés à l'occasion de la résolution d'un problème de physique ; (2) il n'est pas toujours *a priori* évident de tracer une ligne de démarcation claire entre des énoncés appartenant respectivement aux domaines de la physique et de la mathématique — ces mêmes domaines n'étant pas fixés une fois pour toutes, ce qui complique d'autant une telle tentative de démarcation. On en a un exemple remarquable avec le *principe de Dirichlet*. Celui-ci peut recevoir diverses interprétations qui relèvent tantôt des mathématiques pures, tantôt de la physique mathématique. Revenons à l'argument de Klein : nul ne saurait lui contester l'importance du cours de Dirichlet en théorie du potentiel pour comprendre la *Dissertation* de Riemann. Par contre, Klein tire prétexte de cette donnée pour prétendre que Riemann a été guidé par une intuition physique pour élaborer ses principaux résultats en analyse complexe. Or cette conclusion est discutable pour deux raisons : (i) Riemann fait abstraction du sens physique que peut recevoir le principe de Dirichlet ; (ii) il appartiendra à Klein, et non à Riemann, d'accorder une place prépondérante à des intuitions physiques pour appréhender l'objet ≪ surface de Riemann ≫.

Précisons le sens du problème et du principe de Dirichlet en analyse complexe. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u_0 : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, *le problème de Dirichlet* pour u_0 et Ω revient à trouver une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, harmonique dans Ω et vérifiant $u_{|\partial\Omega} = u_0$. Le problème de Dirichlet n'a pas toujours de solution. En outre, à supposer que Ω soit borné, alors le *principe du maximum* [50] montre que, si une solution existe, elle est unique. Les §§ 16 à 18 de la *Dissertation* de Riemann sont consacrés à la résolution du problème de Dirichlet à l'aide du *principe de Dirichlet*. Il s'agit là d'un principe variationnel que l'on peut énoncer comme suit : on se donne un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, parmi toutes les fonctions continues sur Ω — ou discontinues en des points isolés de Ω — qui prennent des valeurs données *a priori* sur $\partial\Omega$, il en existe une et une seule, notée u, qui minimise l'intégrale de Dirichlet — que l'on appelle

49. F. Klein, ≪ Riemann et son influence sur les mathématiques modernes ≫, in Riemann, Œuvres complètes, *op. cit.*, pp. XVIII-XIX.

50. Soient Ω un ouvert borné et $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et harmonique dans Ω, alors

$$|u(z)| \leqslant \sup\{\mathrm{u}(\zeta) \ \mid \ \zeta \in \partial\Omega\}$$

$\forall z \in \Omega$. Une telle inégalité est stricte si Ω est connexe et u n'est pas constante.

également intégrale du carré du gradient :

$$\int\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Si une telle fonction u existe, elle est harmonique sur Ω. Cette dernière remarque montre bien que le *principe de Dirichlet* consiste à trouver une solution au problème de Dirichlet. Si la formulation de ce principe est exacte pour des fonctions analytiques par morceaux sur $\partial\Omega$, en revanche la preuve qu'en fournit Riemann au cours du § 16 demeure lacunaire. Weierstrass s'engouffre dans cette brèche et il exhibe le *présupposé* général que Riemann admet implicitement au cours de sa démonstration.

Considérons une intégrale toujours positive portant sur des fonctions définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, soumises à certaines conditions de régularité et dont les valeurs sont données *a priori* sur $\partial\Omega$. Parmi ces fonctions, on pourrait penser qu'il en existe forcément une qui minimise l'intégrale en question. Comme l'indique Weyl, le 14 juillet 1870, Weierstrass présente un contre-exemple à ce *présupposé* devant l'académie de Berlin. Il considère l'ensemble des fonctions y de classe C^1 définies sur $[-1,1]$ telles que $y(-1)=a$ et $y(1)=b$ avec $a\neq b$, alors il n'existe aucune fonction de $C^1([-1,1])$ qui minimise l'intégrale

$$\int_{-1}^{1}x^2y'^2\mathrm{d}x,$$

ce qui invalide le présupposé sur lequel reposent les raisonnements de Dirichlet et de Riemann. [51]

Deux conséquences doivent être tirées de cette objection : (1) le théorème de Riemann selon lequel tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ — distinct de $\mathbb{C}$ lui-même — est conformément équivalent au disque unité n'a qu'un statut conjectural dans la *Dissertation* puisque sa démonstration repose sur la supposée évidence du principe de Dirichlet ; (2) de plus, force est de relativiser l'importance d'un tel principe lorsque l'on souhaite résoudre le problème de

51. K. Weierstrass, ≪ Über das sog. Dirichletsche Prinzip ≫ (1870), in *Mathematische Werke*, herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten commission, Bd. II, Berlin, Mayer und Müller, 1895, p. 49-54. H. Weyl, *The Concept of Riemann Surface*, *op. cit.* p. 94 : ≪ Then Weierstrass' criticism removed the foundation of such proofs ; Weierstrass showed by examples that the existence of a minimizing function is by no means certain ≫. Weyl précise qu'il appartiendra à Hilbert d'assurer un fondement rigoureux au principe de Dirichlet (tel qu'il est utilisé par Riemann) au début du XXème siècle. Encore faut-il préciser que les résultats de Hilbert ne valent que dans le cas de fonctions suffisamment régulières. Si, par exemple, on se donne des fonctions seulement continues sur $\partial\Omega$ rien ne garantit que l'intégrale de Dirichlet soit finie lorsque l'on prolonge lesdites fonctions à Ω. Qu'il nous suffise de mentionner la note d'Hadamard : ≪ Sur le Principe de Dirichlet ≫, in *Bulletin de la S.M.F.*, 1906, pp. 135-138. Voir également U. Bottazzini, *op. cit.* p. 931.

Dirichlet. Ce dernier peut être résolu par d'autres méthodes qui ne sont ni équivalentes ni hiérarchisables puisqu'elles ne reposent pas sur les mêmes conditions. [52]

Weierstrass tire prétexte de cette erreur pour invalider le point de vue géométrique et intégral en analyse complexe et rejeter le recours à toute représentation intuitive en mathématiques. Ces deux conséquences relèvent en réalité d'un parti pris en termes de méthode et de raisonnement. En effet, on ne voit pas en quoi l'usage de représentations géométriques constituerait en général un obstacle à la rationalité mathématique, dès lors que certaines confusions conceptuelles sont écartées. Il convient peut-être de distinguer deux types d'intuition : une intuition que l'on qualifiera, faute de mieux de *naïve* — elle est l'exact équivalent de l'expérience première au sens où elle repose sur des prénotions — et une intuition *raffinée* — l'expression est de F. Klein [53] — qui est nécessaire à titre heuristique, mais également afin d'appréhender certains concepts mathématiques. Tout porte à croire que Riemann a recours à des intuitions raffinées, au sens où il exhibe systématiquement les conditions qui président aux représentations géométriques nécessaires à son raisonnement. Bref, il fait un usage contrôlé de l'intuition.

Il est vrai que l'argument développé par Riemann au cours du § 16 de sa *Dissertation* est lacunaire et qu'il repose sur un présupposé qui n'est pas vrai en général. Mais il serait excessif d'en inférer à l'instar de Weierstrass que Riemann a commis une erreur rédhibitoire en termes de contenu ou que ses raisonnements manqueraient par essence de rigueur, dans la mesure où ils seraient fondés sur des représentations intuitives. Comme le souligne Hilbert avec pertinence dans *Natur und mathematisches Erkennen*, Riemann a seulement manqué de prudence. Il a cru que sa démonstration du principe de Dirichlet était satisfaisante, ce qui n'est pas le cas. Il aurait donc dû l'ériger provisoirement au rang d'axiome ou d'hypothèse.

> Le procédé utilise par Riemann est critiquable sur le plan de la méthode en ce qu'il a présupposé inconsciemment l'existence d'un minimum. S'il avait consciemment posé cette hypothèse en tant qu'axiome au sommet de sa théorie, alors il n'y aurait rien eu à redire à ce procédé. De toute façon, il aurait introduit un axiome superflu, mais nulle erreur de méthode n'aurait été à déplorer. [54]

52. Citons par exemple la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann (1870), ou encore la méthode du balayage de Poincaré (1887).

53. F. Klein, ≪ On the mathematical Character of Space-Intuition and the Relation of pure Mathematics to applied Sciences ≫, in *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (Bd. II), Berlin, éd. Springer, 1922, p. 225. F. Klein montre que l'intuition raffinée repose en dernière instance sur un processus d'axiomatisation.

54. D. Hilbert, *Natur und mathematisches Erkennen*, Basel, Boston, Berlin, éd. Birkhäuser, 1991, p. 24 : ≪ Das methodisch Anfechtbare bei diesem Vorgehen Riemanns besteht darin, daß er unbewußt jene Voraussetzung der Existenz eines Minimums gemacht hat. Hätte er diese Annahme mit Bewußtsein als Axiom an

Ainsi, tout en reconnaissant la pertinence des objections de Weierstrass contre Riemann, Hilbert ne rejette pas d'un revers de la main les travaux de Riemann en analyse complexe, et pour cause : on doit à Hilbert la première démonstration satisfaisante du principe de Dirichlet, ce qui a sans doute contribué à rendre pleinement légitime l'approche de Riemann en théorie des fonctions d'une variable complexe. Par extension, les articles décisifs de Hilbert sur le principe de Dirichlet renforcent l'idée d'une complémentarité entre les points de vue de Weierstrass et de Riemann qui sera reprise aussi bien par Koebe que par Weyl à Göttingen. L'antagonisme entre riemanniens et weierstrassiens qui avait éclaté au cours du dernier tiers du XIX^{e} siècle n'est donc plus de mise au début du XX^{e} siècle : c'est dans ce contexte que Weyl construit les surfaces de Riemann à partir du processus de prolongement analytique de Weierstrass.

1.5 La question de la classification des surfaces de Riemann

La *Dissertation* de 1851 fait intervenir deux types de représentations et de propriétés géométriques : d'une part, Riemann interprète les fonctions holomorphes à partir de la notion d'application conforme ; d'autre part, il met en exergue les propriétés d'*analysis situs* des surfaces de Riemann. Étant donné le rôle fondamental qu'il prête à l'*analysis situs*, on peut déjà dégager, au sein même de la *Dissertation*, une hiérarchie entre deux types de ≪ structures ≫ : la ≪ structure ≫ topologique et la ≪ structure ≫ conforme qui caractérisent *complètement* une surface de Riemann. Cette hiérarchie sera d'ailleurs clarifiée de manière intuitive par Klein en 1882, avant d'être présentée sous une forme axiomatique par Weyl en 1913.

Au cours du § 21 de la *Dissertation*, Riemann entend résoudre le problème suivant : ≪ rechercher la possibilité d'opérer une représentation connexe et semblable en ses plus petites parties d'une surface donnée, dont la forme est donnée ≫. Par représentation, Riemann entend une application d'une surface sur une autre surface. Les adjectifs ≪ connexe ≫ et ≪ semblable ≫ sont introduits dans un certain ordre conformément à la hiérarchie que nous venons de mettre en exergue. Riemann ne suppose pas *a priori* que l'≪ application ≫ en question soit ≪ homéomorphe ≫, mais il se restreindra par la suite à ce cas de figure. Pour renforcer la grande abstraction qui caractérise ce passage, soulignons qu'il n'étudie pas l'application

die Spitze seiner Theorie gestellt, so wäre an diesem Verfahren nichts auszusetzen. Er hätte dann allerdings ein überflüssiges Axiom eingeführt, aber ein methodischer Fehler läge darin nicht ≫.

d'une surface particulière sur une autre, il envisage la « *possibilité* » d'une telle application en *général*. Il s'agit donc bel et bien d'un problème de *classification* que l'on peut reformuler comme suit : à quelles conditions deux surfaces de Riemann peuvent-elles être considérées comme équivalentes ? Ainsi les représentations géométriques sont un support de généralité pour Riemann ; elles ne consistent pas uniquement à exemplifier un concept abstrait dans des cas particuliers.

Cela étant, Riemann ne résout pas complètement le problème qu'il vient d'énoncer ; il se limite à une difficulté plus spécifique, sans perdre de vue l'horizon de généralité vers lequel il tend. En effet, il poursuit son argumentation en ces termes : « Nous nous en tiendrons à la solution de ce problème au cas où, à chaque point d'une surface, correspond un point unique de l'autre, et où les surfaces sont simplement connexes ». [55] La première restriction peut être traduite comme suit : l'application en question doit être bicontinue et bijective, i.e. les surfaces en question sont alors dites « homéomorphes ». La seconde restriction vient de ce que Riemann ne considère que des surfaces simplement connexes. Mais cette seule remarque ne permet pas de mesurer le niveau de spécificité du problème finalement résolu par Riemann. En effet, il ne se réfère pas à n'importe quelle surface de Riemann simplement connexe, ce qui conduirait au théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe selon lequel toute surface de Riemann simplement connexe est conformément équivalente soit au disque unité $\mathbb{D}$, soit au plan complexe $\mathbb{C}$, soit à la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Riemann se limite de fait à des ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$. Il formule et il démontre *partiellement* le théorème suivant : deux ouverts simplement connexes Ω, Ω', tous deux distincts de $\mathbb{C}$, sont conformément équivalents. Nous disons « partiellement », en ce que Riemann s'appuie sur le principe de Dirichlet pour mener son raisonnement à bien. Nous avons vu qu'au début des années 1870, Weierstrass montre que ce principe n'a rien d'évident et qu'il doit faire l'objet d'une preuve rigoureuse.

Il existe donc un écart en termes de niveau de généralité entre le problème initial — comment classer des surfaces de Riemann en général ? — et le théorème démontré *in fine* et que l'on peut formuler comme suit : tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent au disque unité — théorème de représentation conforme. Le paragraphe suivant, en l'occurrence le § 22, confirme notre hypothèse. L'objectif de Riemann est bien la classification des surfaces de Riemann en général. La fin de la *Dissertation* a donc une vertu programmatique ; une discussion autour de la validité de la démonstration du théorème de représentation conforme ne permettrait pas de comprendre les motivations réelles de Riemann à la fin de sa *Dissertation*. Aussi écrit-il :

55. B. Riemann, *op. cit.*, p. 49.

> La restriction de nos considérations à des surfaces planes (...) n'est pas essentielle. Bien plus, le problème de la représentation d'une surface donnée quelconque, en conservant la similitude dans les plus petites parties, peut être traité d'une manière tout analogue. [56]

Riemann entend bien s'intéresser à des surfaces *quelconques* et non à des surfaces planes (i.e. des ouverts connexes de $\mathbb{C}$). De même, les premières lignes de la démonstration effectuée par Riemann reflètent le niveau d'abstraction et de généralité du problème auquel il souhaite se mesurer. Voici comment Riemann formule le début du théorème plus spécifique qu'il cherche à démontrer :

> Deux surfaces planes, simplement connexes données, peuvent toujours être rapportées l'une à l'autre, de telle sorte qu'à chaque point de l'une corresponde un point unique de l'autre dont la position varie de manière continue avec celle du premier, et de telle sorte que les plus petites parties correspondantes des surfaces soient semblables. [57]

Cette formulation appelle trois commentaires. (a) Riemann dégage sans la nommer la notion d'*homéomorphisme* entre deux ouverts Ω et Ω' — simplement connexes — du plan complexe. Ainsi, même si la terminologie employée est anachronique, l'application entre deux surfaces planes dont il est question jouit de toutes les propriétés qui font d'elle un homéomorphisme. En effet, l'expression ≪ être rapportées l'une à l'autre ≫ montre qu'il envisage une application et sa réciproque. Cela le conduit nécessairement à supposer qu'il y a bijection entre Ω et Ω' comme en atteste le passage ≪ à chaque point de l'une corresponde un point unique de l'autre ≫. Enfin l'expression ≪ de manière continue ≫ vaut pour l'application f de Ω vers Ω' mais également pour l'application réciproque f^{-1} de Ω' vers Ω. Bref, les deux surfaces planes en question doivent être au moins équivalentes du point de vue de l'*analysis situs*. Effectivement, deux surfaces de Riemann conformément équivalentes sont *au moins* homéomorphes. (b) À cela s'ajoute qu'il interprète géométriquement la propriété de bi-holomorphisme, comme le montre l'expression ≪ de telle sorte que les plus petites parties correspondantes des surfaces soient semblables ≫. (c) Enfin, la formulation utilisée par Riemann peut à premier abord être déroutante, puisque le théorème tel que nous le connaissons revient à affirmer que tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est conformément équivalent au disque unité. Dans sa démonstration, il s'appuie bien sur le disque ouvert centré en 0 défini par :

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z| < 1\}.$$

En fait, il montre préalablement que la relation ≪ être conformément équivalent ≫ est une *relation d'équivalence*. Il prouve ensuite que, quels que soient les ouverts simplement connexes Ω,

56. *ibid.*, p. 53.
57. *ibid.*, p. 50.

Ω' tous deux distincts de $\mathbb{C}$, ils sont conformément équivalents à $\mathbb{D}$, ils sont donc conformément équivalents entre eux.

> Lorsque deux surfaces T et R sont rapportées sur une troisième S, de telle sorte qu'entre les plus petites parties correspondantes de T et S et de R et S il y ait similitude, par cela même il existe une correspondance entre les surfaces T et R, où le même fait a évidemment lieu. [58]

Cet argument abstrait, qui dépasse en généralité le contenu du théorème que Riemann se propose de démontrer, indique la fonction *classificatoire* qu'il assigne à la relation d'« équivalence conforme ». Cette assertion fait écho à la difficulté générale sur laquelle s'ouvre le § 21. On peut en effet grouper les surfaces de Riemann conformément équivalentes en classes. Ainsi, Riemann exhibe le critère nécessaire et suffisant pour identifier deux surfaces de Riemann au sens où elles partagent *essentiellement* les mêmes propriétés : elles doivent être homéomorphes *et* conformes en leurs plus petites parties. Riemann adopte de la sorte une position de surplomb par rapport au théorème qu'il démontre finalement. En effet, il pose au préalable un problème général de classification et il introduit le critère sur lequel s'appuyer pour parvenir à elle. Il se restreint ensuite à un cas particulier, celui des ouverts simplement connexes de $\mathbb{C}$ distincts de $\mathbb{C}$.

Cependant, il ne faudrait pas croire que Riemann parvient à ce degré remarquable de généralité *ex nihilo*. Il entend proposer dans le cas des surfaces de Riemann l'*analogue* de ce que Gauss avait effectué en 1828 dans le cas des surfaces courbes. Rappelons qu'une surface courbe se caractérise par une structure métrique définie par un $\mathrm{d}s^2$. La mesure de courbure ou courbure de Gauss en un point P d'une surface courbe S est une propriété intrinsèque au sens où sa valeur ne dépend que des coefficients du $\mathrm{d}s^2$ et de leurs dérivées jusqu'au second ordre (*theorema egregium*). Gauss peut alors *classer* deux surfaces courbes *quelconques* : elles sont équivalentes si et seulement si elles ont partout même mesure de courbure, ce qui signifie qu'elles sont localement isométriques. Ainsi, une surface cylindrique ou conique ne diffère pas essentiellement du plan euclidien. Par contre, deux surfaces courbes localement isométriques peuvent différer essentiellement l'une de l'autre d'un point de vue topologique. Ainsi, le plan euclidien est simplement connexe, ce qui n'est le cas ni d'une surface cylindrique, ni d'une surface conique (privée de son sommet). Riemann transpose à d'autres objets mathématiques — en l'occurrence les surfaces de Riemann — un problème de classification qui s'était déjà posé dans le cas des surfaces courbes. Mais le critère de classification n'est évidemment plus le même. En effet, deux surfaces de Riemann conformément équivalentes doivent *au moins* être équivalentes au regard de l'*analysis situs*. L'exemplarité du traité de Gauss sur les surfaces

58. *ibid.*, p. 50.

courbes se situe donc moins ici du côté du contenu mathématique qu'au niveau du style de problème posé.

Nous pouvons en déduire que la réception du traité de Gauss sur les surfaces courbes n'est pas univoque dans l'œuvre de Riemann. Dans sa *Dissertation* de 1851, il s'appuie sur cette référence pour proposer un programme de classification des surfaces de Riemann qui sera complètement résolu par Klein (dans le cas des surfaces compactes, connexes). En revanche, dans sa *Leçon d'habilitation* (1854), il entend généraliser les résultats obtenus par Gauss en 1828 à des variétés métriques (riemanniennes) de dimension n qui ne sont pas *a priori* plongées dans un espace euclidien de dimension plus grande. Cette remarque nous incite à préciser nos réserves à l'encontre d'une histoire linéaire des mathématiques, fondée sur des rapports de filiation. Non seulement en effet, elles ne permettent pas de mesurer la *diversité* des sources utilisées par un mathématicien (dans le cas de la *Dissertation* de Riemann la référence à Gauss est bien loin de suffire puisque Riemann emprunte à Dirichlet et la définition du concept de fonction et certains éléments de connaissance en théorie du potentiel) mais également la *diversité* des modes d'appropriation d'un même texte. Pour le dire de manière plus précise, Riemann ne lit pas le *traité* de Gauss sur les surfaces courbes de la même manière dans sa *Dissertation* de 1851 et dans sa *Leçon d'habilitation* de 1854, ce qui ne signifie pas qu'il y aurait une totale incommensurabilité entre ces deux travaux.

Toujours est-il qu'à la fin de sa *Dissertation*, Riemann formule sans le résoudre un problème très général de classification des surfaces de Riemann. Les surfaces de Riemann conformément équivalentes appartiennent à une même classe, elles sont donc des réalisations possibles d'une même surface de Riemann « idéale ». Cette expression est notamment utilisée par Klein dans ses leçons de 1882.[59] Son objectif consiste précisément à classer les surfaces de Riemann compactes connexes en général. Pour ce faire, il commence par s'appuyer sur le théorème de Jordan (1866) selon lequel toute surface connexe, compacte, sans bord et orientable est homéomorphe à un tore à g trous. Il distingue ensuite équivalence topologique et équivalence conforme en s'appuyant sur l'exemple élémentaire des tores à 1 trou : tous sont homéomorphes, mais tous ne sont pas conformément équivalents. Il ajoute que des surfaces de Riemann *conformément équivalentes* ne diffèrent pas *fondamentalement* les unes des autres. Parmi les propriétés qu'elles admettent, il convient ensuite de distinguer celles qui sont *essentielles* — i.e. communes à toutes les surfaces conformément équivalentes — de celles qui sont *inessentielles* — i.e. particulières à chacune d'entre elles prise isolément. L'idée de *surface idéale* consiste tout simplement à *faire abstraction* des propriétés dites inessentielles,

59. F. Klein, *op. cit.*, p. 545.

c'est-à-dire particulières et contingentes pour ne retenir que celles qui sont essentielles. On observe donc qu'il y a *classification* d'objets mathématiques pour autant qu'interviennent des processus d'*abstraction* — au sens où l'on s'abstrait de certaines propriétés jugées inessentielles — et d'*idéalisation* — ce dont témoigne la notion de surface de Riemann *idéale* qui s'avère opératoire à titre heuristique. À la suite de Klein, Weyl donne ses contours définitifs à une conception abstraite des surfaces de Riemann qui est largement amorcée par Riemann lui-même dans sa *Dissertation* et dans sa *Théorie des fonctions abéliennes* :

> Deux surfaces de Riemann qui peuvent être appliquées l'une à l'autre de manière conforme, sont (conformément) équivalentes et sont simplement considérées comme différentes réalisations d'une et de la même surface de Riemann idéale. Seules pourront être considérées comme des propriétés intrinsèques d'une surface de Riemann celles qui sont invariantes par une application conforme, c'est-à-dire celles qui, possédées par une surface de Riemann, sont également attachées à toutes les surfaces équivalentes à elle. Les propriétés d'Analysis Situs font bien entendu partie des propriétés intrinsèques d'une surface de Riemann. [60]

Dans ce passage Weyl reprend à son compte la notion de surface de Riemann idéale et il souligne que des surfaces de Riemann isomorphes holomorphiquement sont nécessairement équivalentes d'un point de vue topologique. Il vient ainsi confirmer le haut degré d'abstraction et de généralité qui marque la fin de la *Dissertation* de Riemann.

1.6 La *Dissertation* et le *Habilitationsvortrag*

Nous n'avons pas manqué de souligner dans ce qui précède la référence commune au mémoire de Gauss sur les surfaces courbes dans la *Dissertation* et dans le *Habilitationsvortrag* de Riemann. Cette remarque doit être l'occasion pour nous de considérer à nouveaux frais les rapports entre ces deux œuvres fondamentales. Notre objectif n'est pas ici de commenter en détail la *Leçon d'habilitation* que Riemann soutient en 1854 et qui sera publiée à titre posthume en 1868. La deuxième partie de notre thèse sera largement consacrée aux lectures qu'en a proposées Weyl au cours de la période 1917-1926. Précisons seulement que Riemann introduit le concept très général de variété « continue » — c'est-à-dire de variété lisse — et de variété métrique (riemannienne) pour relativiser la géométrie euclidienne parmi toutes les géométries qui deviennent mathématiquement concevables à l'aide de ces concepts très généraux. Cela posé, la question est de savoir s'il y a plus qu'une référence commune à Gauss dans la *Dissertation* et dans le *Habilitationsvortrag* de Riemann. Si l'on suit Lautman, il faut répondre à cette question par la négative.

60. H. Weyl, *op. cit.*, p. 40.

En effet, dans la *Dissertation*, Riemann mettrait exclusivement en avant les propriétés topologiques *globales* des surfaces de Riemann, en revanche dans sa *Leçon d'habilitation* il privilégierait un point de vue exclusivement *infinitésimal*. Lautman s'appuie donc sur l'opposition entre le ≪ global ≫ et l'≪ infinitésimal ≫ pour justifier cette ligne de démarcation. [61] Le but de Lautman est pour le moins clair : il critique très explicitement l'hypothèse formulée par Weyl en 1913 selon laquelle Riemann aurait été conscient du lien entre ces deux textes sans jamais l'expliciter. [62] Les critiques de Lautman sont de trois ordres : (1) Weyl est victime d'une projection : il construit les surfaces de Riemann en utilisant un point de vue local puisqu'il a recours au prolongement analytique de Weierstrass, il projette donc sur la *Dissertation* un type de démarche qui lui appartient en propre ; (2) Weyl commet une illusion rétrospective, en effet l'axiomatisation des surfaces de Riemann (§ 7 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*) revient à affirmer qu'une surface de Riemann est une *variété* analytique complexe de dimension 1, l'unité entre les concepts de variété et de surface de Riemann est donc scellée, ce qui n'est pas le cas dans l'œuvre de Riemann ; (3) les démarches suivies par Riemann dans sa *Dissertation* et dans sa *Leçon d'habilitation* seraient opposées.

Les deux premières critiques de Lautman sont justifiées. Le type de rapprochement établi par Weyl entre ces deux textes est *anachronique*. Néanmoins, en voulant prendre le contrepied de Weyl, Lautman adopte une position qui doit être nuancée : en effet, ce n'est pas parce que la relation établie par Weyl entre ces deux textes est anachronique qu'il faudrait en déduire qu'il n'existe finalement aucun lien entre eux. Tout d'abord, l'affirmation selon laquelle le point de vue de Riemann serait exclusivement topologique et global en 1851 est quelque peu forcée : deux surfaces de Riemann ne diffèrent pas l'une de l'autre si elles sont homéomorphes et si elles sont conformes *dans leurs plus petites parties*. Cette expression qui est utilisée de manière récurrente par Riemann dans sa *Dissertation* montre qu'il adopte également un point de vue infinitésimal pour appréhender les surfaces de Riemann. De plus, en 1851 comme en 1854, Riemann relie ses travaux à ceux de Gauss sur les surfaces courbes (1828), ce qui montre qu'il devait bien être conscient de leur parenté, même s'il ne pousse sans doute pas ce rapprochement jusqu'au bout. Qui plus est, la même définition du concept de fonction, que Riemann emprunte à Dirichlet, apparaît dans la *Dissertation* et dans le *Habilitationsvortrag*.

61. A. Lautman, *op. cit.*, p. 175-176.

62. H. Weyl, *op. cit.*, p. 35-36. Weyl maintiendra cette hypothèse dans d'autres textes bien postérieurs à celui-ci : on retrouve la même opinion dans un texte de 1925 intitulé *Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie*, et dans la troisième et dernière édition de *Die Idee der riemannschen Fläche* de 1955.

On peut avancer les quatre hypothèses suivantes :

(i) Au cours du § 4 de sa *Dissertation*, Riemann formule deux équations aux dérivées partielles qui constituent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable complexe et à valeurs complexes, $\mathbb{R}$-différentiable soit $\mathbb{C}$-dérivable. Il s'agit des conditions de Cauchy-Riemann. Riemann caractérise donc l'holomorphie — ou la $\mathbb{C}$-dérivabilité — d'une fonction d'une variable complexe en s'appuyant sur des éléments de connaissance relevant de la *géométrie différentielle réelle*. Justement, sa *Leçon d'habilitation* consiste à fonder ce domaine sur le concept général de variété.

(ii) La référence commune à Gauss (sur les surfaces) et à Dirichlet (sur les fonctions) renforce la parenté entre les deux textes ;

(iii) dans les deux cas la géométrie et, plus particulièrement, l'*analysis situs* joue un rôle surplombant par rapport à l'analyse de sorte que la *Dissertation* et le *Habilitationsvortrag* participent sous des modalités différentes à un même projet de géométrisation de l'analyse ;

(iv) lorsque l'on dit qu'il n'y a aucun lien explicite entre les travaux de 1851 et de 1854, on présuppose qu'une telle relation devrait prendre la forme d'une « preuve circonstanciée » dans l'œuvre de Riemann et qu'il ne peut être établi qu'à partir d'une comparaison « terme à terme » entre ces deux écrits.

Mais peut-être le problème historique est-il mal posé : on rechercherait — en vain — un passage dans lequel Riemann dirait qu'une surface de Riemann est une variété analytique complexe de dimension 1 — ce qui ne pourra être mis en pleine lumière qu'avec l'axiomatisation des surfaces de Riemann par Weyl en 1913. Il faut répondre par la négative à cette question, qui a toutes les chances de reposer également sur un anachronisme déguisé. Et de là, Lautman, s'opposant à Weyl, conclut qu'il n'existe aucun rapport entre la *Dissertation* et la *Leçon d'Habilitation*.

À la différence de Lautman, nous voudrions souligner les profondes similitudes entre ces deux travaux, même si elles ne sont pas de nature conceptuelle — Riemann ne précise pas qu'une surface de Riemann est une variété analytique complexe de dimension 1 —; ces similitudes sont de deux ordres : elles concernent les sources utilisées par Riemann et la place qu'il assigne à la géométrie par rapport à l'analyse. Pour autant, il ne faudrait pas en tirer la conséquence radicalement inverse selon laquelle la démarche et le raisonnement de Riemann seraient parfaitement identiques en 1851 et 1854.

Afin d'éviter cette erreur d'appréciation, nous devons rappeler que la *Dissertation* et la *Leçon d'habilitation* n'appartiennent pas au même registre. Ainsi, au début de son *Habilitationsvortrag*, Riemann rappelle que l'exercice qui lui est demandé relève de la *conception*

plutôt que de la *construction*. Les réflexions sur les variétés à n dimensions et leur application à l'espace physique se situent à la frontière entre mathématiques et philosophie. Riemann adopte d'entrée de jeu un point de vue surplombant puisqu'il touche aux fondements de la géométrie. De plus, son discours a, pour l'essentiel, une vertu programmatique : mettre en évidence l'ensemble des hypothèses physiquement concevables à partir du cadre mathématique général des variétés lisses à n dimensions munies d'une structure métrique. *A contrario*, dans la *Dissertation* de 1851, nous avons affaire à une série de théorèmes fondamentaux — conditions de Cauchy-Riemann, théorème de Cauchy, théorème de Green-Riemann [63], principe du maximum [64], principe de Dirichlet (§ 16), théorème de la représentation conforme (§ 21) —, autant dire qu'elle n'est pas réductible à un programme : elle met en jeu des résultats d'analyse en leur positivité. En outre, il est vrai que les multiplicités à n dimensions telles qu'elles interviennent au cours du *Habilitationsvortrag* sont traitées abstraitement, c'est-à-dire pour elles-mêmes : elles ne sont pas plongées dans un espace euclidien de dimension plus grande. Par contre, à s'en tenir à la *Dissertation* (1851), les surfaces de Riemann ne sont jamais envisagées abstraction faite du plan complexe qu'elles revêtent.

Pour quelles raisons Riemann ne fait-il pas explicitement le lien entre ces deux travaux ? Il existe tout d'abord une différence de registre entre la *Dissertation* et le *Habilitationsvortrag* de sorte que leur relation ne peut être que médiate. De plus, en 1854, Riemann ne considère que des variétés localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ — il n'envisage pas la possibilité de construire des variétés bidimensionnelles localement homéomorphes à $\mathbb{C}$ par identification du plan complexe à $\mathbb{R}^2$. Voilà sans doute pourquoi il ne se réfère pas aux surfaces de Riemann dans son étude générale des variétés. Ceci explique également pourquoi il ne mentionne que les surfaces courbes de Gauss dans son *Habilitationsvortrag* : celles-ci sont des variétés bidimensionnelles réelles indéfiniment différentiables munies d'une *structure métrique*. Or, cette structure métrique est centrale dans la *Leçon* de Riemann.

On retrouve d'ailleurs dans la réception immédiate de Riemann l'idée selon laquelle le concept de variété ne peut, semble-t-il, pas s'étendre au cas complexe. Cette opinion a de quoi surprendre, puisque rien n'empêche de définir des variétés analytiques complexes. Référons-nous à un passage du *Programme d'Erlangen* de F. Klein consacré aux variétés au sens riemannien, pour montrer en quoi la notion de variété analytique complexe, qui nous semble naturelle, n'a alors rien d'évident :

> On parvient d'une autre façon à la notion d'une multiplicité à courbure constante quand on

63. *ibid.*, § 7 p. 13-14.
64. *ibid.*, § 10 p. 22.

établit, au sens projectif, une détermination métrique basée sur une équation quadratique donnée entre les variables. Cette méthode, à l'encontre de celle de Riemann, permet cette généralisation que les variables peuvent être supposées complexes. [65]

Dans ce passage, Klein rappelle que l'on peut déduire les géométries hyperbolique, elliptique et euclidienne à partir d'un point de vue projectif. Une telle déduction repose sur le choix de la conique prise comme absolu sur le plan projectif complexe ; la limite qu'il croit identifier dans la « méthode de Riemann » montre bien que l'idée de variétés complexes — munies d'une structure topologique et analytique — ne va pas de soi. Signalons cependant qu'au cours de ses leçons consacrées aux fonctions algébriques d'une variable complexe (1882), Klein corrigera ce point de vue fautif, il montrera que l'ensemble des classes d'équivalence birationnelle de surfaces de Riemann (compactes connexes) peut être muni d'une structure de variété topologique (Kontinuum) *complexe*. [66] De manière encore plus claire, dans le cours qu'il donne sur les surfaces de Riemann en 1891-1892 à Göttingen, Klein considère une surface de Riemann comme une variété [Mannigfaltigkeit].

Bien que la *Dissertation* et le *Habilitationsvortrag* n'appartiennent pas au même registre, ils admettent des similitudes frappantes qui ne sont pas bornées à la référence commune au traité de Gauss sur les surfaces courbes. Ces deux œuvres participent, sous des modalités différentes, à un projet de géométrisation de l'analyse qui caractérise l'unité de la pensée mathématique de Riemann.

1.7 Une conception abstraite des surfaces de Riemann : commentaire du § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes*

Comme nous l'avons montré précédemment, l'*analysis situs* revêt une double fonction dans les écrits de Riemann : (a) elle permet de clarifier les conditions qui assurent la validité des théorèmes empruntés au domaine de l'analyse complexe dans le cas plus général des surfaces de Riemann ; (b) elle sert de cadre théorique fondamental pour développer une conception elle-même plus abstraite des surfaces de Riemann. Dans les écrits de 1851 et de 1857, ces dernières ne sont pas introduites uniquement comme un moyen afin de visualiser et de comprendre le comportement de fonctions — algébriques — initialement multiformes

65. F. Klein, « Considérations comparatives sur les Recherches géométriques modernes » (1872), trad. Padé, In *Annales Scientifiques de l'ÉNS*, 3ème série, tome huit (1891), p. 189.

66. F. Klein, « Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale », *op. cit.* p. 559.

ou multivaluées dans le plan complexe ou la sphère de Riemann. Il nous suffira d'analyser le § 12 du mémoire de Riemann sur les fonctions abéliennes pour confirmer pleinement cette hypothèse d'interprétation que l'on doit notamment à Klein et qui a ensuite été reprise par Weyl et Lautman.[67] Avant cela, nous aimerions préciser comment s'opère la montée en abstraction qui conduit au développement d'une théorie visant à classer les surfaces de Riemann compactes connexes. En outre, nous verrons comment le « genre » d'une surface se reflète dans l'étude des fonctions que l'on peut définir sur elle.

Soit P un polynôme *irréductible* de $\mathbb{C}[X,Y]$ et $P(x,y)=0$ la relation algébrique définie à partir de P. Une « fonction » algébrique d'une variable complexe satisfait à une telle relation algébrique. Par exemple la « fonction » $f(z)=\sqrt{z}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (ou de Σ dans Σ) est définie au moyen de la relation algébrique $y^2-z=0$. De même la fonction $f(z)=\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (ou de Σ dans Σ) est définie par $y^2-(z-a)(z-b)(z-c)=0$. Il s'agit là de deux exemples de fonctions algébriques d'une variable complexe. Le problème est le suivant : de telles « fonctions », pourtant élémentaires, sont multivaluées. Par exemple, si l'on prend $f(z)=\sqrt{z}$ sur $\mathbb{C}$, on peut associer deux valeurs opposées à tout z différent de 0. En outre $z=0$ est un *point de ramification* de $f(z)=\sqrt{z}$: f se prolonge en deux branches à partir de $z=0$. Riemann adopte en général ce point de vue *intuitif* et *géométrique* pour expliciter les notions de « branche d'une fonction » et de « point de ramification ». Voici, en substance, ce qu'il affirme :

> On nommera les divers prolongements d'une fonction pour une même portion du plan des z les branches de cette fonction, et un point autour duquel une branche de la fonction se prolonge en une autre un point de ramification de la fonction. Partout où il ne se trouve aucune ramification, la fonction est dite monodrome ou uniforme.[68]

Le problème initial qui permet d'identifier le fil conducteur des mémoires de 1851 et de 1857 peut être formulé de la sorte : trouver une surface de Riemann sur laquelle une fonction algébrique, initialement multiforme dans le plan complexe ou la sphère de Riemann, s'uniformise.

> Concevons une surface étendue sur le plan des (x,y) et coïncidant avec lui (...), qui s'étend autant et seulement autant que la fonction y est donnée. Lorsque la fonction sera prolongée, la surface sera donc également prolongée davantage. En une région du plan où se présentent deux ou plusieurs prolongements de la fonction, la surface sera double ou multiple. Elle se composera

67. A. Lautman, *op. cit.*, p. 188 : « la pensée de Riemann n'est pas tant de construire la surface de Riemann d'une fonction algébrique qui serait définie par son équation algébrique, que de se donner une surface arbitraire pour rechercher ensuite s'il existe une fonction algébrique dont cette surface soit la surface de Riemann ».

68. B. Riemann, *Théorie des Fonctions abéliennes*, *op. cit.*, p. 91.

> alors de deux ou de plusieurs feuillets dont chacun correspond à une branche de la fonction. Autour d'un point de ramification de la fonction, un feuillet de la surface se prolongera en un autre feuillet, et de telle sorte que, dans le voisinage de ce point, la surface pourra être regardée comme une hélicoïde dont l'axe est perpendiculaire au plan des (x, y) en ce point et dont le pas de vis est infiniment petit. [69]

Suivant le procédé descriptif et intuitif de Riemann, on obtient ainsi une surface à un nombre fini de feuillets qui revêt le plan complexe et sur laquelle la fonction algébrique étudiée est bien définie : elle ne prend qu'une seule valeur ≪ en chaque point ≫ de cette même surface. Cela étant, nous souhaiterions déterminer plus clairement les propriétés d'*analysis situs* qu'admet une telle surface. Pour ce faire, adjoignons tout d'abord un point à l'infini au plan complexe, nous obtenons ainsi la sphère de Riemann $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dans une telle situation, $f(z) = \sqrt{z}$ admet deux points de ramification, en l'occurrence 0 et ∞. En particulier $\sqrt{\infty} = \infty$. Précisons que la sphère de Riemann est ≪ le ≫ compactifié minimal de $\mathbb{C}$. Riemann raisonne d'ailleurs *in fine* sur des surfaces algébriques recouvrant Σ qui sont elles-mêmes compactes :

> Une surface sans contour d'encadrement peut être considérée comme une surface dont l'encadrement est rejeté à l'infini ou comme une surface fermée, et c'est à ce point de vue que nous regarderons la surface T, en sorte qu'à la valeur $z = \infty$ correspond un point sur chacun des n feuillets, à moins que pour $z = \infty$ l'on n'ait un point de ramification. [70]

Cette terminologie est conservée par Weyl. [71] En outre, comme nous l'avons déjà souligné, une fonction algébrique d'une variable complexe est définie à partir d'un polynôme *irréductible* de $\mathbb{C}[X, Y]$. Comme le précise Weyl, cette *irréductibilité*, qui est de nature *algébrique*, se reflète en une propriété purement *topologique* de la surface T sur laquelle cette même fonction s'uniformise : T est nécessairement *connexe*. [72] Weyl montre ainsi que la théorie des surfaces de Riemann se situe à l'intersection entre différents champs disciplinaires, en l'occurrence la *topologie* et l'*algèbre* ce qui, comme nous allons le voir, est confirmé lorsque Riemann aborde la notion d'équivalence birationnelle.

69. *ibid.*, p. 92.
70. *ibid.*, p. 108.
71. Voir en particulier H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913), *op. cit.* p. 43 et suiv., ≪ Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen ≫, *mathematische Zeitschrift* **23**, 1925, p. 289 et ≪ Topologie und Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses ≫ (1931), in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, *op. cit.* p. 352 : ≪ Zu der x-Ebene muss der unendlichferne Punkt hinzugefügt werden, so dass sie besser durch stereographische Projektion in die x-Kugel verwandelt wird, unsere Riemannsche Fläche ist darum wie die Kugel selbst geschlossen ≫.
72. H. Weyl, ≪ Topologie und Algebra... ≫, *op. cit.*, p. 352 : ≪ Die Irreduzibilität des Polynoms aber spiegelt sich wider in einer sehr einfachen topologischen Eigenschaft dieser Fläche : sie ist zusammenhängend ; wenn sie ein Papiermodell der Fläche herstellen und es schütteln, fällt es nicht in getrennte Teile auseinander ≫.

Nous avons montré précédemment que Riemann introduit le concept de connexité — ou plus exactement de connexité par arcs — aussi bien dans sa thèse que dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*. Ceci explique suffisamment les étapes qui permettent à Riemann d'associer une surface *compacte connexe* à une fonction algébrique d'une variable complexe donnée. Maintenant, étant donné des surfaces de Riemann compactes connexes, leur classification s'opère à deux niveaux, comme nous l'avons déjà précisé. En premier lieu, on peut se demander si elles sont équivalentes au sens de l'*analysis situs*, on fait alors abstraction de leur structure analytique et l'on tente de déterminer si elles s'identifient en procédant à une déformation continue. En second lieu, on cherche à déterminer si de telles surfaces sont conformément équivalentes, ce critère de *classification* mettant en jeu leur *structure analytique*. Prenons l'exemple des tores complexes à un trou. Ils peuvent être définis comme quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, où ω_1 et ω_2 sont des nombres complexes $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. Quel que soit le réseau utilisé, les tores ainsi définis sont équivalents au regard de l'*analysis situs*. Mais ils ne sont pas *en général conformément* équivalents.[73] Soient Λ_1 et Λ_2 deux réseaux distincts du plan complexe, $\mathbb{C}/\Lambda_1$ et $\mathbb{C}/\Lambda_2$ les tores qui leur correspondent, $\mathbb{C}/\Lambda_1$ et $\mathbb{C}/\Lambda_2$ sont conformément équivalents si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $\Lambda_1 = c\Lambda_2$. Riemann distingue et articule ces deux niveaux de classification dans ses mémoires de 1851 et de 1857, ce qui constitue une première étape en vue de parvenir à une conception abstraite — mais non pas axiomatisée — des surfaces de Riemann.

La seconde étape consiste à *renverser* le problème initial formulé au début de la *Théorie des fonctions abéliennes*. Riemann se proposait alors de trouver la surface de Riemann — compacte connexe — associée à une fonction algébrique d'une variable complexe donnée. Inversement, étant donné une surface de Riemann entendue comme revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, *existe-t-il* une fonction algébrique d'une variable complexe qui lui corresponde ? On a donc affaire à un problème d'existence qui permet une nouvelle fois de souligner combien la démarche de Riemann est abstraite, quand bien même il s'appuie sur des représentations géométriques.

Rappelons brièvement les étapes qui président à l'inversion du problème initial qui consiste donc à uniformiser des fonctions initialement multivaluées sur le plan complexe. Pour ce

73. Voir en particulier H. Weyl, *Die Idee der riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. 41 : ≪ En tant que surfaces au sens de l'*analysis situs*, deux tores sont toujours équivalents. Pour autant, on ne peut généralement pas les appliquer l'un sur l'autre de manière conforme, cela est possible si et seulement si le module $\frac{r\sqrt{R^2-r^2}}{R^2}$ prend la même valeur pour les deux tores ≫. [≪ Zwei Tori sind als Flächen im Sinne der Analysis Situs stets äquivalent. Sie können jedoch im allgemeinen nicht konform aufeinander abgebildet werden, sondern dies ist dann und nur dann möglich, wenn für beide Tori der ≪ Modul ≫ $\frac{r\sqrt{R^2-r^2}}{R^2}$ denselben Wert hat ≫.]

faire, revenons sur le § 12 du mémoire de 1857. Riemann part de considérations purement algébriques sur les équations de la forme $P(X, Y) = 0$, où P est un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X, Y]$. Il les regroupe en classes de la manière suivante :

> On considérera maintenant comme faisant partie d'une *même classe, toutes les équations algébriques irréductibles entre deux grandeurs variables, qui peuvent être transformées les unes dans les autres par des substitutions rationnelles* ; de la sorte
>
> $$F(s, z) = 0 \quad et \quad F_1(s_1, z_1) = 0$$
>
> appartiennent à la même classe lorsque l'on peut remplacer s et z par des fonctions rationnelles de s_1 et z_1, telles que $F(s, z) = 0$ se transforme en $F_1(s_1, z_1) = 0$, s_1 et z_1 étant également des fonctions rationnelles de s et z. [74]

Interprétons ce passage d'une manière modernisée. Considérons tout d'abord l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X, Y]$ et l'idéal premier engendré par le polynôme irréductible $F(X, Y)$. L'anneau quotient $\mathbb{C}[X, Y]/(F(X, Y))$ est *intègre*. On considère son *corps des fractions rationnelles* que l'on identifie au corps des fonctions algébriques associé à la surface de Riemann compacte, connexe S, définie par l'équation $F(X, Y) = 0$. Lorsque Riemann affirme en particulier : « les fonctions rationnelles de s et z, considérées comme fonctions de l'une quelconque ζ d'entre elles, forment un système de fonctions algébriques à mêmes ramifications », on peut légitimement supposer qu'il commence à dégager des *corps de fonctions algébriques*, bien que cette notion soit introduite postérieurement par Dedekind et Weber (1880) : on choisit une certaine fonction t qui soit non constante et méromorphe sur S et qui permet de représenter ce corps de fonctions algébriques comme *extension du corps* des fonctions rationnelles d'une variable complexe. Riemann ajoute ensuite :

> Toute équation conduit évidemment à une classe de systèmes de fonctions algébriques à mêmes ramifications qui, par l'introduction d'une fonction du système comme grandeur variable indépendante, sont transformables les unes dans les autres et cela, en sorte que toutes les équations d'une classe conduisent à la même classe de systèmes de fonctions algébriques et réciproquement (§ 11), toute classe de pareils systèmes conduit à une classe d'équations. [75]

L'expression « système de fonctions algébriques » correspond à ce que nous appelons maintenant un corps de fonctions algébriques. Ainsi, au cours du § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes*, Riemann caractérise les fonctions algébriques d'une variable complexe à partir de concepts relevant de l'algèbre et non pas seulement de la géométrie. Ce point de vue sera pleinement développé par Weber et Dedekind en 1880. On peut le reformuler comme suit : on se donne un domaine de rationalité de base, à savoir le corps $\mathbb{C}(X)$ des fonctions rationnelles

74. B. Riemann, *op. cit.*, p. 131.
75. *ibid.*, p. 131.

d'une variable complexe. [76] Il est possible d'adjoindre une fonction algébrique à $\mathbb{C}(X)$. Par ce processus d'adjonction, on obtient une extension algébrique finie de $\mathbb{C}(X)$, à savoir un corps de fonctions algébriques d'une variable complexe.

Une telle manière de procéder n'intervient guère qu'au cours du § 12 du mémoire de Riemann de 1857 ; sa démarche demeure avant tout topologique et géométrique : bien qu'il s'appuie sur des concepts relevant de l'algèbre, on ne peut pas dire que ses méthodes deviennent subitement algébriques lorsqu'il aborde la théorie des fonctions abéliennes. Une mise en perspective plus précise s'impose pour éviter tout anachronisme à la lecture de ce passage de Riemann. Le concept de corps est mis au jour par Dedekind en 1871 dans ses fameux suppléments à la nouvelle édition des *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet. Dedekind se restreint alors aux corps de nombres contenus dans $\mathbb{C}$. Weber et lui-même étendent ce concept à des ensembles de fonctions en 1880. Cela étant, Galois (1831) et Riemann (1857) repèrent certaines des caractéristiques propres au concept de corps lorsqu'ils se réfèrent à des systèmes d'éléments (nombres algébriques et corps finis dans le cas de Galois ; fonctions algébriques dans le cas de Riemann) qui sont « fonctions rationnelles » les uns par rapport aux autres. Cela signifie qu'ils doivent pouvoir se déduire les uns des autres par addition, soustraction, multiplication et division. Dedekind est sans nul doute le premier à avoir axiomatisé, au moins partiellement, le concept de corps, mais il n'est pas le premier à avoir *appréhendé* des systèmes d'éléments qui, de fait, sont des corps, comme en témoigne notre référence à Galois et à Riemann.

Revenons au passage de Riemann tiré du § 12 de sa *Théorie des fonctions abéliennes*. Que peut bien vouloir dire l'expression « classe de systèmes de fonctions algébriques à mêmes ramifications » ? Pour parler de « classes d'équivalence », il faut qu'il y ait une *relation d'équivalence*. Deux corps de fonctions algébriques font partie de la même classe s'ils sont *isomorphes*. Cette terminologie est une nouvelle fois anachronique dans la mesure où la notion d'isomorphisme de corps est seulement introduite en 1871 par Dedekind. Cependant, si nous ne nous trompons pas, Riemann affirme qu'à une classe d'équations de la forme $F(X, Y) = 0$ correspond une classe de corps de fonctions algébriques — les corps faisant partie de cette classe étant deux à deux isomorphes. Chacune de ces équations définit une certaine surface de Riemann *compacte connexe*. Soient S et S' deux quelconques d'entre elles, alors S et S' sont associées à des corps de fonctions *méromorphes* qui sont nécessairement isomorphes. En particulier, elles sont de même genre. On dit que S et S' sont *birationnelles*. Cela posé, Riemann fixe leur genre p que l'on supposera strictement supérieur à 1. Il montre

76. Il s'agit d'une extension transcendante de degré 1 de $\mathbb{C}$.

qu'elles dépendent de $3p-3$ ≪ grandeurs complexes variant d'une manière continue, qui seront nommées les modules de la classe ≫. [77]

Nous insistons sur l'expression ≪ variant d'une manière continue ≫, dans la mesure où, très précisément, l'ensemble des classes d'équivalence birationnelle de surfaces de Riemann (compactes connexes) de genre p admet une structure de variété topologique de dimension réelle $6p-6$. Dans son *Habilitationsvotrag*, Riemann utilise justement la notion de ≪ grandeurs variant d'une manière continue ≫ pour caractériser les variétés continues, c'est-à-dire topologiques, et les variétés différentielles. Nous avons pu montrer dans ce qui précède qu'il existe un lien en amont entre la *Dissertation* (1851) et la *Leçon d'habilitation* qui demeure indirect. Notre commentaire du § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes* montre qu'il existe également un lien en aval entre ce même mémoire et la *Leçon d'habilitation*.

Ainsi on peut dire que Riemann caractérise les surfaces entendues comme revêtements ramifiés de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ selon leur genre p. De plus, étant donné qu'il met au jour le nombre de paramètres complexes dont elles dépendent et qui s'élève à $3p-p$, il dessine les contours de *l'espace des modules* dont les points sont en bijection avec les surfaces fermées connexes de genre p (identifiées suivant la relation d'équivalence birationnelle). Il appartiendra à Klein de tirer toutes les conséquences du raisonnement mené ici par Riemann, ce dont témoigne assez le § 19 (3ème partie) de son ouvrage de 1882 sur les fonctions algébriques. En effet, Klein montrera (a) que l'ensemble des classes d'équivalence birationnelle de surfaces de Riemann compactes connexes forme un continuum et (b) qu'il s'agit même, pour être plus précis, d'une variété [Mannigfaltigkeit] dont le nombre de dimensions complexes [Zahl der komplexen Dimensionen] correspond au ≪ module ≫ $3p-3$. [78]

Cette remarque étant faite, Riemann formule explicitement le problème de l'existence d'un ≪ système ≫ [nous dirions un corps] de fonctions algébriques correspondant à une surface de Riemann compacte et connexe arbitrairement choisie comme en témoigne le passage suivant :

> Maintenant (...) on peut, les $2p-2$ points de ramification et les $2p$ différences de situation des portions parallèles d'encadrement de la surface étant donnés arbitrairement, démontrer qu'il existe toujours un système de fonctions à même ramification de cette surface, qui, aux points correspondants sur les portions parallèles d'encadrement, reprennent la même valeur. [79]

Nous confirmons donc l'interprétation de Lautman selon laquelle ≪ la pensée de Riemann n'est pas tant de construire la surface de Riemann d'une fonction algébrique qui serait définie

77. *ibid.*, p. 132.
78. F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, *op. cit.*, p. 558-559.
79. B. Riemann, *op. cit.*, p. 133.

par son équation algébrique, que de se donner une surface arbitraire pour chercher ensuite s'il existe une fonction algébrique dont cette surface soit la surface de Riemann ». [80] À cela s'ajoute que le § 12 du mémoire de 1857 confronte de manière inédite deux approches pour appréhender les fonctions algébriques. La première emprunte ses méthodes à l'algèbre, elle est tout juste esquissée par Riemann. La seconde, qu'il privilégie explicitement, est davantage d'ordre topologique et géométrique. On peut presque dire que Weyl se contente de traduire en termes modernisés ce paragraphe, lorsqu'il affirme :

> Le passage d'une équation algébrique $f(z;x) = 0$ à la surface de Riemann [correspondante] trouve son pendant [Gegenstück] algébrique dans le passage au corps déterminé par la fonction algébrique $z(x)$; car non seulement la fonction $z(x)$, mais encore toutes les fonctions algébriques de ce corps se déploient de manière uniforme [eindeutig] sur une telle surface de Riemann. [81]

Nous devons ajouter ici deux remarques de manière à ce que le § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes* ne donne pas lieu à des surinterprétations ou à des mécompréhensions : (a) le raisonnement de type algébrique qui marque le début de ce paragraphe est très isolé dans l'œuvre de Riemann et il n'est jamais considéré pour lui-même ; (b) l'équilibre qui semble s'instaurer ici entre les approches algébriques et topologiques / géométriques ne doit pas nous faire oublier qu'elles sont *in fine* irréductibles l'une à l'autre. Par exemple, l'étude systématique des corps de fonctions algébriques mise en œuvre par Dedekind et Weber en 1880 conduit à la théorie des fonctions algébriques d'une variable à valeurs dans un corps quelconque. Cette dernière est notamment développée par Hasse et Chevalley. En revanche, l'approche topologique et géométrique que privilégie Weyl conduit à l'axiomatisation des concepts de variété différentielle réelle bidimensionnelle et de surfaces de Riemann ainsi qu'au développement de la théorie des revêtements.

Le *niveau* d'abstraction adopté par Riemann dans l'étude des fonctions d'une variable complexe dépend (1) du cadre théorique adopté, qui est en particulier fondé sur des considérations d'*analysis situs*, (2) d'une réflexion sur les conditions de possibilité auxquels les théorèmes de Cauchy doivent satisfaire, pour que l'on puisse par là même les étendre aux surfaces de Riemann, (3) du type de problèmes posés — classification des surfaces de Riemann compactes connexes, problème d'existence d'un « système » de fonctions algébriques pour toute surface de Riemann définie comme un revêtement ramifié de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. D'une manière générale, lorsque l'on veut évaluer le niveau d'abstraction d'une théorie mathématique au regard de son développement historique, il ne suffit pas de se fonder sur la présence ou non de définitions

80. A. Lautman, *op. cit.*, p. 188.
81. H. Weyl, « Topologie und abstrakte Algebra ... », *op. cit.*, p. 353-354.

axiomatisées indépendamment de la nature des objets auxquels elles peuvent s'appliquer. Il est nécessaire de considérer une théorie mathématique donnée d'un point de vue holiste. Il s'agit alors de saisir d'un seul tenant les types de problèmes envisagés, les concepts utilisés et la portée des théorèmes démontrés. De la sorte, nous pouvons dire que Riemann conçoit les surfaces « de Riemann » abstraitement — elles ne sont pas réduites au rang de moyen pour visualiser le comportement de fonctions initialement multivaluées sur le plan complexe —, quand bien même son approche demeure intuitive et étrangère à la méthode axiomatique. Un niveau d'abstraction encore plus remarquable apparaîtra dans le *Habilitationsvortrag* de Riemann. Là encore, on ne trouve nulle trace d'une axiomatisation des variétés différentielles et des variétés métriques (riemanniennes) : pourtant, Riemann conçoit les variétés en elles-mêmes, c'est-à-dire indépendamment d'un espace ambiant dans lequel elles seraient plongées.

Nous avons suffisamment montré dans ce qui précède que l'*analysis situs* permet à Riemann de généraliser certains théorèmes, déjà établis par Cauchy, aux surfaces de Riemann. Inversement, la plupart des théorèmes pour des fonctions définies sur une surface de Riemann compacte connexe reflètent la propriété fondamentale d'*analysis situs* qui caractérise cette même surface, à savoir son genre p. Lautman et Weyl s'accordent parfaitement sur ce point, malgré leurs divergences d'interprétation concernant le statut de la *Dissertation* et sa place dans l'œuvre de Riemann. Ainsi, Lautman se réfère au passage suivant tiré de *Die Idee der Riemannschen Fläche* :

> On ne peut se refuser à reconnaître l'importance du nombre p en théorie des fonctions, et pourtant ce nombre est quant à sa nature et ses origines une grandeur d'*analysis situs*. Les grandes lignes de la théorie des fonctions (...) sont toutes inspirées par cette législatrice divine qui plane invisible au-dessus de la réalité fonctionnelle : l'*analysis situs*.[82]

Dans sa conférence consacrée à la topologie et à l'algèbre (1931), Weyl illustre brièvement cet argument général par un exemple simple. Il rappelle notamment que « le nombre de différentielles partout régulières [formes différentielles sur une surface de Riemann fermée connexe] linéairement indépendantes est égal à p ». Ce théorème est dû à Riemann dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*. Il exprime une identité entre un invariant purement topologique de la surface de Riemann compacte connexe considérée et une quantité liée à sa structure analytique, à savoir le nombre maximal de formes différentielles régulières et linéairement indépendantes que l'on peut définir sur elle. Il ajoute : « plusieurs intégrales F_1, F_2, ..., F_n sur une surface fermée sont dites linéairement indépendantes, si entre elles, il n'y

82. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. 134.

a pas d'homologie

$$c_1F_1 + c_2F_2 + ... + c_nF_n \sim 0$$

avec des coefficients constants c_i, mis à part l'homologie triviale dont les coefficients c_i sont tous nuls. Le nombre maximal d'intégrales linéairement indépendantes s'appelle le nombre de connexité de la surface. Pour une surface fermée (...) le nombre de connexité est toujours un nombre entier $2p$, où p est le genre de la surface ≫. [83]

Nous pouvons également nous référer au théorème de Riemann-Roch pour mesurer la pertinence de l'argument de Weyl. Donnons-nous une surface de Riemann S compacte connexe, de genre p. Le principal motif du théorème de Riemann-Roch consiste à déterminer la dimension de l'espace vectoriel des fonctions méromorphes à zéros et pôles prescrits sur S. Rappelons qu'un diviseur D est une fonction $\alpha : S \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui ne prend des valeurs différentes de zéro que pour un nombre fini de points $x \in S$. Intuitivement, chaque diviseur permet de choisir un nombre fini de points x de S auxquels sont associés des entiers non nuls n_x. Le degré de D (noté $\deg(D)$) correspond à la somme des n_x. Considérons maintenant l'ensemble des fonctions méromorphes f dont les pôles se situent exclusivement aux points x, ces mêmes pôles devant être d'ordre $\mathrm{ord}_x(f) \geqslant -n_x$. L'ensemble de ces fonctions forme un espace vectoriel $L(D)$ de dimension $\ell(D)$. Le théorème ou inégalité de Riemann affirme qu'il existe un entier p tel que

$$\ell(D) \geqslant \deg(D) + 1 - p$$

pour tout diviseur D de S. Le plus petit entier p vérifiant cette inégalité correspond très exactement au genre de S. Cette inégalité nous laisse deviner que le genre d'une surface de Riemann compacte connexe — qui est une propriété d'*analysis situs* —, joue un rôle fondamental pour calculer la dimension de l'espace vectoriel des fonctions méromorphes à zéros et pôles prescrits sur S. C'est ce que montre précisément l'énoncé du théorème de Riemann-Roch :

Soit $I(D)$ l'espace vectoriel des formes méromorphes ω sur S telles que $ord_x(\omega) \geqslant n_x$, la dimension de $I(D)$ sera notée $i(D)$. Le *théorème de Riemann-Roch* affirme que

$$\ell(D) - i(D) = \deg(D) - 1 + p$$

où p désigne le genre de S. Il s'agit là d'un théorème relevant de la théorie des fonctions qui *manifeste* la structure topologique de la surface sous-jacente sur laquelle ces mêmes fonctions sont définies. Voilà sans doute pourquoi Weyl est en droit de dire que l'*analysis situs* est une

83. H. Weyl, ≪ Topologie und Abstrakte Algebra ... ≫, *op. cit.*, p. 355.

« législatrice divine qui plane au-dessus de la réalité fonctionnelle ». Cet argument pour le moins imagé montre en quoi la *topologie* conditionne concrètement l'analyse.

1.8 Conclusion du premier chapitre

Notre étude très partielle de la *Dissertation* et de la *Théorie des fonctions abéliennes* montre que Riemann projette de géométriser l'analyse. C'est pourquoi, il confère une priorité logique et chronologique à l'*analysis situs* pour appréhender les fonctions d'une variable complexe. Il insiste également sur l'importance des représentations conformes afin d'interpréter géométriquement les fonctions satisfaisant aux conditions de Cauchy-Riemann. On ne peut pas dire que Riemann introduit les surfaces de Riemann uniquement pour appréhender les « fonctions » multivaluées sur le plan complexe. Dans ce cas, les représentations géométriques ne seraient qu'un moyen au service d'un objet relevant de l'analyse. Cette manière de concevoir les surfaces de Riemann, qui sera développée par Durège, n'est pas celle de Riemann. Sur ce point, l'interprétation de Klein et de Weyl nous semble parfaitement justifiée : même si Riemann envisage exclusivement des surfaces revêtant le plan complexe (ou la sphère de Riemann), il les décrit d'abord en elles-mêmes, il dégage leurs propriétés d'*analysis situs*, avant de saisir le comportement de fonctions définies sur elles. Le projet qui consiste à considérer les surfaces de Riemann au *fondement* de l'analyse complexe voit donc le jour dès les travaux inauguraux de Riemann et il sera pleinement réalisé par Klein (sous une forme encore intuitive), puis par Weyl (à l'aide de la méthode axiomatique). Notre brève comparaison entre la thèse de Riemann et l'ouvrage de Durège de 1864 confirme la pertinence des interprétations de Klein et de Weyl sur ce point.

La démarche de Riemann frappe par sa généralité — dans l'usage des concepts de fonction et de surface de Riemann qui ne sont jamais rapportées à des exemples particuliers — et par son abstraction. La question de la classification des surfaces de Riemann que l'on trouve à la fin de la *Dissertation* illustre d'ailleurs cette idée puisque Riemann exhibe alors les critères pertinents qui permettent de considérer deux surfaces de Riemann comme équivalentes. Ainsi, le projet de géométrisation de l'analyse de Riemann se double d'une « intuition de l'abstrait » pour reprendre une expression que nous avions empruntée à J. Largeault dans notre introduction.

Au cours de notre commentaire, nous ne nous sommes pas référés aux seuls textes de Riemann. Nous avons confronté trois lectures de la *Dissertation* et de la *Théorie des fonctions abéliennes* qui sont dues à Klein, Weyl et Lautman. Dès les années 1880, Klein insiste

sur l'importance que Riemann aurait assignée à la physique mathématique et aux intuitions physiques dans ses travaux d'analyse, il met en exergue la priorité qu'il faut accorder aux surfaces de Riemann en analyse complexe et il défend l'approche géométrique de Riemann contre certains de ses détracteurs, à commencer par Weierstrass. Weyl prolonge cette lecture : il estime également que la *Dissertation* de Riemann est directement issue de la physique mathématique et il montre comment la théorie des surfaces de Riemann vient fonder la théorie des fonctions d'une variable complexe. Seulement, Weyl propose cette lecture en 1910-1913 dans un contexte qui n'est plus celui de Klein (1882) : l'opposition entre les points de vue riemannien et weierstrassien ne fait plus sens. Weyl insiste sur leur complémentarité qui résulte des deux faits suivants : (1) le principe de Dirichlet est valide puisque Hilbert vient de le démontrer, donc le défaut de rigueur que Weierstrass reprochait aux méthodes de Riemann n'est plus de mise ; (2) il est possible de construire les surfaces de Riemann en s'appuyant sur le processus de prolongement analytique de Weierstrass. En outre, l'axiomatisation des surfaces de Riemann conduit Weyl à s'interroger sur les éventuels liens entre les travaux de Riemann en analyse complexe et sa *Leçon d'habilitation*. Nous avons suffisamment montré que Weyl adopte un point de vue rétrospectif et qu'il ne situe pas l'unité de la *Dissertation* et du *Habilitationsvortrag* au bon niveau. Les points communs entre ces deux textes peuvent être résumés comme suit : Riemann se fonde de part et d'autre sur la même définition d'une fonction (qu'il emprunte à Dirichlet) ; dans les deux cas, il met en œuvre un projet de géométrisation de l'analyse. Enfin, Lautman discute préalablement *Die Idee der Riemannschen Fläche* de Weyl avant d'aborder les travaux de Riemann en analyse complexe. Contrairement à Weyl, Lautman insiste sur l'incommensurabilité entre la *Dissertation* — qui serait fondée sur un point de vue topologique et global — et le *Habilitationsvortrag* — qui met en exergue un point de vue infinitésimal. Lautman force cette distinction ; mais surtout, il revendique l'affiliation supposée de Riemann aux mathématiques structurales : les interprétations de Lautman sont donc également fondées sur une projection rétrospective.

Nous n'avons pas choisi ces trois lectures par hasard, puisqu'elles se rapportent explicitement les unes aux autres. Mais les différences et / ou les divergences entre ces trois lectures tiennent moins à une obscurité ou une plurivocité du texte de Riemann qu'à l'épaisseur d'histoire qui sépare ces trois protagonistes de Riemann. Les lectures en question ne nous renseignent pas seulement sur le contenu des travaux de Riemann en analyse complexe ; elles constituent des indicateurs pertinents pour situer historiquement les arguments de Klein, Weyl et Lautman. Ainsi, Klein insiste sur l'importance de la physique mathématique chez Riemann parce qu'il projette lui-même d'unifier les mathématiques pures et les mathématiques

appliquées. Riemann lui sert ici de figure tutélaire ; d'où les surinterprétations qu'il commet en prétendant que Riemann aurait été explicitement guidé par des intuitions physiques que l'on ne trouve nulle part dans sa thèse. Lorsque Klein publie son ouvrage sur les surfaces de Riemann (1882), les méthodes de Riemann en analyse complexe ont déjà été vivement attaquées par Weierstrass. On peut alors comprendre le ton polémique de Klein et les raisons de ses arguments en faveur de l'usage des représentations géométriques en analyse : il faut les légitimer face à ses détracteurs. Ce ton polémique n'a plus lieu d'être au moment où Weyl publie *Die Idee der Riemannschen Fläche*, puisque la complémentarité entre les points de vue riemannien et weierstrassien est maintenant acquise. Enfin, la lecture rétrospective de Lautman vient de ce qu'il entend promouvoir le développement des mathématiques structurales sur un plan épistémologique. Le titre même de sa thèse principale (1937) sous la direction de Brunschvicg le montre assez : *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques.* Là encore, Riemann constitue une figure tutélaire qui annoncerait l'avènement inexorable des méthodes structurales en mathématiques.

Ainsi, les lectures proposées par Klein, Weyl et Lautman doivent d'abord être rapportées aux textes mêmes de Riemann, afin que l'on puisse dégager certaines surinterprétations et projections rétrospectives. Cela étant, il ne nous semble pas pertinent de discuter de ces différences voire de ces divergences de lecture *in abstracto*, comme si ces trois protagonistes les avaient proposées de nulle part. Lautman et Weyl ne voient pas la même chose dans les textes de Riemann parce qu'ils défendent des conceptions différentes de la pratique des mathématiques ; ces différences sont largement conditionnées par leurs situations historiques respectives. Tant que nous n'admettons pas que les lectures d'un même texte sont situées historiquement, nous pouvons certes constater en quoi elles diffèrent, mais nous ne pouvons pas rendre objectivement raison de ces différences : nous croyons seulement avoir affaire à de vagues querelles d'opinions totalement décontextualisées. Klein, Weyl et Lautman effectuent tous trois des surinterprétations à la lecture de la *Dissertation* de Riemann : l'essentiel consiste moins à dire qu'il y a surinterprétation qu'à expliquer pourquoi il y a surinterprétation et ceci ne peut se faire que si l'on revient sur la situation historique de ces trois lecteurs.

Chapitre 2

Les surfaces de Riemann et la théorie des groupes

Plusieurs sources nous montrent que Weyl a été marqué par les travaux de Klein sur l'icosaèdre (1875-1884) et par son ouvrage sur les surfaces de Riemann (1882).

Ainsi, dans un texte rédigé après 1953 intitulé « Comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques », Weyl revient sur la conception très particulière de « l'unité des mathématiques » qui se dégage des articles et ouvrage de Klein consacrés à l'icosaèdre (1875-1884) : il s'agit alors de faire converger plusieurs branches des mathématiques à partir de l'étude d'un objet particulier. [1] Il conviendra donc de mesurer les incidences de ces textes sur la pratique des mathématiques et les réflexions épistémologiques de Weyl autour de l'unité des mathématiques.

En outre, dès la première édition de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl montre que Klein est le premier à proposer de manière *systématique* une conception *abstraite* des surfaces de Riemann compactes et connexes, quand bien même il se fonde encore sur des *représentations intuitives* et non sur la *méthode axiomatique*. Avec son ouvrage de 1913 sur les surfaces de Riemann, Weyl ne se contente donc pas de dialectiser la méthode algébrique et locale de Weierstrass et la méthode « topologique » et intégrale de Riemann ; il entend synthétiser l'approche intuitive de Klein, héritée de l'ouvrage intitulé *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (1882) et les procédures axiomatiques empruntées à Hilbert.

1. H. Weyl, « Comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques » (après 1953), in H. Weyl, *Le continu et autres écrits*, Notes introductives et trad. par J. Largeault, Paris, éd. Vrin, 1994, p. 274.

Enfin, plusieurs travaux de recherche de Weyl indiquent qu'il prolonge dans une certaine mesure le projet de Klein qui consiste à unifier la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann. Weyl insiste d'ailleurs sur ce projet dans un hommage à F. Klein de 1930. Il parle alors de « Verbindung von Galois und Riemann » ou encore de « Verschmelzung von Galois und Riemann » qui atteint son paroxysme avec les théorèmes d'uniformisation. [2] Quelques références viennent confirmer notre hypothèse selon laquelle Weyl entend confronter en général la *théorie des groupes* et les *idées géométriques de Riemann* : (1) en 1916, il emploie le langage de la théorie de Galois pour présenter la théorie des revêtements [3], (2) en 1921-1923, il construit et il résout le problème de l'espace, i.e. le problème de la caractérisation commune des variétés pythagoriciennes dans l'infinitésimal en s'appuyant sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie linéaires [4], (3) en 1925, il écrit un texte d'une quarantaine de pages, publié seulement en 1988, et dont le titre est pour le moins significatif : « Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie », (4) en 1925-1926, la théorie des revêtements intervient de manière essentielle dans la preuve que propose Weyl du théorème de complète réductibilité pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ et, par extension, pour tout groupe de Lie complexe semi-simple.

Cela posé, nous voudrions évaluer plus finement le rapport entre les travaux de Riemann et de Klein. On distingue généralement les approches géométriques développées respectivement dans le *Habilitationsvortrag* de Riemann (1854) et le *Programme d'Erlangen* de Klein (1872) de la manière suivante : Riemann définit localement des variétés continues de dimension n alors que Klein s'attache essentiellement à la classification des propriétés géométriques globales qui caractérisent des espaces *homogènes*, i.e. des espaces sur lesquels un groupe de transformations agit *transitivement*. Ces différences d'approche ne sauraient être ignorées, mais elles sont loin de suffire pour rendre raison des liens étroits entre les travaux de ces deux mathématiciens. Ainsi, Klein aborde de manière récurrente et sous divers angles la théorie des surfaces de Riemann. En particulier, il s'oppose frontalement à Weierstrass et Schwarz en analyse complexe. Il entend prolonger la méthode géométrique et intégrale héritée de Riemann.

D'une manière schématique, les travaux de Klein sur les surfaces de Riemann se développent suivant deux voies, l'une plus ouvertement algébrique, l'autre résolument géométrique.

2. H. Weyl, « Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart », *Die Naturwissenschaften*, **18** p. 4-11, reproduit dans H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, *op. cit.*, p. 294 et 298 pour les expressions citées.

3. cf. la section 3.5 (première partie) de la présente thèse.

4. Voir le chapitre 4 (deuxième partie) de la présente thèse qui est consacré au « problème de l'espace ».

(i) Dans une série d'articles publiés entre 1875 et 1881, il étudie une classe de groupes, à savoir les sous-groupes de congruence formés de matrices 2×2 à coefficients entiers et indexés par un nombre entier appelé le *niveau* N. Un sous-groupe de congruence de niveau N, noté $\Gamma(N)$, est défini par :

$$\Gamma(N) = \big\{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \;\big|\; a \equiv 1, b \equiv 0, c \equiv 0, d \equiv 1 \pmod{N}\big\},$$

$\overline{\Gamma}(N)$ est l'image de $\Gamma(N)$ par la projection $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Klein construit en général une surface de Riemann qui est le compactifié du quotient du demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ par $\overline{\Gamma}(N)$.

Le concept de sous-groupe de congruence n'est pas encore explicité dans les premiers articles de Klein consacrés à l'icosaèdre et à la résolubilité des équations générales du cinquième degré (1875-1878). À partir de 1878-1879, Klein introduit explicitement la notion de *sous-groupe de congruence* dans le traitement des *fonctions modulaires*. Il étudie d'abord le cas $N = 5$. Il reprendra d'ailleurs l'ensemble de ses résultats sur l'icosaèdre dans un ouvrage publié en 1884 sous le titre *Vorlesungen über das Ikosaeder*. En 1879, il aborde également le cas $N = 7$. Il obtient la surface de Riemann notée $\overline{\Gamma}(7)\backslash\mathbb{H}$. Il la complète de manière à ce qu'elle se prolonge en une surface compacte notée $X(7)$ qui, comme il le prouve, est isomorphe à la quartique définie dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ par l'équation :

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Il donne ici l'exemple d'une correspondance remarquable que l'on peut formuler en toute généralité en ces termes : toute surface de Riemann *compacte connexe* est isomorphe à une *courbe algébrique lisse* dans un certain espace projectif complexe. Une fois les exemples étudiés pour $N = 5$ et $N = 7$, Klein dégage le principe général de construction des quotients de $\mathbb{H}$ par un sous-groupe principal de congruence de niveau N de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Au cours des travaux mentionnés, la théorie des surfaces de Riemann n'est pas envisagée pour elle-même, mais en relation avec l'étude des courbes algébriques, des fonctions modulaires, des équations modulaires et des équations algébriques du cinquième et du septième degré.

(ii) Parallèlement, Klein prolonge directement la *Dissertation* (1851) et la *Théorie des fonctions abéliennes* (1857) de Riemann, comme en témoigne son ouvrage de 1882 intitulé *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*. Ce livre est issu d'un cours donné par Klein au cours du semestre d'hiver 1880/1881 et du semestre d'été 1881 à Leipzig. Ce cours est notamment suivi par Hurwitz dont les contributions seront significatives en théorie des surfaces de Riemann. [5] Il est consacré aux fonctions algébriques

5. Voir à ce propos D. Hilbert, ≪ Adolf Hurwitz ≫, *Mathematische Annalen* **83** 1921, reproduit dans D.

d'une variable complexe et à la classification des surfaces de Riemann compactes connexes qui leur sont associées. Il s'agit là d'une étape fondamentale dans le développement d'une conception *abstraite* des surfaces de Riemann avant que Weyl ne les *axiomatise*. Ce dernier cite explicitement l'ouvrage de Klein dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913). N'oublions pas à ce propos que *Die Idee der Riemannschen Fläche* est dédiée à Klein. Inversement, dans une note additionnelle à son ouvrage de 1882 — ajoutée à l'occasion de la publication du tome III de ses *Gesammelte Abhandlungen*, Klein précise que les travaux de Weyl prolongent sous une forme plus rigoureuse ses propres travaux sur les surfaces de Riemann. [6]

Dans ce qui suit, nous entendons résoudre trois problèmes.

(a) Quel rôle la théorie des groupes joue-t-elle dans les articles consacrés à l'icosaèdre ou à la quartique de Klein ? Nous dégagerons en particulier deux points communs entre ces textes et le *Programme d'Erlangen* (1872) : (i) les groupes manipulés par Klein, qu'ils soient continus, discrets ou finis ne sont jamais considérés pour eux-mêmes, mais toujours en lien avec certaines propriétés « géométriques » qu'ils permettent de circonscrire et d'analyser ; (ii) l'étude de ces mêmes groupes est logiquement et chronologiquement première dans les raisonnements de Klein : ils nous donnent des informations sur les êtres géométriques considérés. Par exemple, en 1878/1879, la description détaillée du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ permet à Klein de calculer aisément le genre de la surface $X(7)$, qui est égal à 3.

(b) Quel type de connexion existe-t-il entre la *théorie de Galois* et les *surfaces de Riemann* dans les travaux de Klein ? Tout d'abord, il faut bien se souvenir que le problème de la résolution des équations algébriques de degré supérieur ou égal à cinq constitue l'un des motifs qui commande la rédaction des articles publiés entre 1875 et 1879, ainsi que l'ouvrage de 1884. Klein est alors amené à construire des surfaces de Riemann comme quotients de $\mathbb{H}$ par un sous-groupe principal de congruence de niveau $N = 5$ ou $N = 7$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Il est donc exact de dire que Klein prolonge ici la théorie de Galois algébrique. En outre, il entend réaliser un projet plus ambitieux, à savoir la construction de l'équivalent d'une telle théorie dans le cas des *fonctions modulaires*.

(c) Comment situer historiquement les travaux de Klein par rapport à ceux de Riemann et de Weyl ? Par extension quelle est la communauté d'idées qui semble traverser leurs ouvrages respectifs sur les surfaces de Riemann ? Nous avons signalé dans le premier chapitre que

Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, Berlin, éd. Springer, 1935, p. 370-371.

6. F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. III, *op. cit.*, p. 573 : « je précise une nouvelle fois que dans son ouvrage *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl a prouvé toutes les idées exprimées dans le présent ouvrage d'une façon qui satisfait à une exigence moderne de rigueur ».

Riemann adopte un point de vue *géométrique* et « topologique » dans sa théorie des fonctions d'une variable complexe. Pour sa part, Klein combine en analyse complexe des méthodes purement algébriques qui relèvent directement de la théorie de Galois mais aussi de la théorie des invariants et une approche géométrique qui est héritée de Riemann. Cela posé, à la différence de Klein, Weyl utilise de manière récurrente la méthode axiomatique dans son ouvrage sur les surfaces de Riemann. Par exemple, il axiomatise successivement les concepts de *variété différentielle bidimensionnelle*, de *surface de Riemann* et de *revêtement universel* d'une surface de Riemann dans la première partie de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Mais, dans le même temps, il critique ouvertement une vision trop formelle des mathématiques et il prête des vertus heuristiques aux représentations intuitives et géométriques en analyse complexe conformément aux prescriptions de Riemann et de Klein. Ainsi, Weyl s'approprie partiellement la démarche et les méthodes de Klein en analyse complexe ; dans le même temps, il énonce une série de définitions implicites de concepts qui viennent prolonger les annexes (1902) de Hilbert aux *Grundlagen der Geometrie* (1899).

Dans un premier temps, nous reviendrons plus spécifiquement sur les apports de Dedekind dans l'étude des fonctions modulaires (1877) qui joueront un rôle central dans les travaux de Klein portant sur le même objet. Dans un second temps, nous synthétiserons les articles de Klein sur l'icosaèdre, la quartique « de Klein » et la théorie générale des fonctions modulaires (1875 - 1881) et nous mettrons en évidence la conception sous-jacente de l'unité des mathématiques qui en ressort. Dans un troisième temps, nous aborderons les leçons de Klein sur les surfaces de Riemann dont l'incidence sur Weyl est absolument essentielle. Nous analyserons à cette occasion la place que Klein accorde à l'intuition dans la production de connaissances mathématiques et dans l'enseignement des mathématiques.

2.1 Les fonctions modulaires chez Dedekind

Le nom de Dedekind peut être associé à la promotion des *mathématiques conceptuelles* notamment à Göttingen au cours de la seconde moitié du XIX^{e} siècle. Il soutient sa thèse en 1852 et sa leçon d'habilitation en 1854 sous la direction de Gauss. Dedekind est donc un contemporain de Riemann à l'université de Göttingen. Entre 1854 et 1858, il travaille en qualité de *Privatdozent* essentiellement avec Dirichlet. Précisément, dans son discours en hommage à Jacobi (1852), Dirichlet met en avant l'importance des mathématiques conceptuelles, non sans quelques nuances. Son argument principal consiste à promouvoir les pensées

au détriment du calcul, sans pour autant renier l'importance de celui-ci dans certains domaines des mathématiques. On peut lire en effet :

> Même si la tendance la plus prégnante de la nouvelle analyse consiste à substituer la pensée au calcul, il existe cependant certains domaines dans lesquels le calcul conserve toute sa place. Jacobi qui a soutenu de manière essentielle cette tendance a également apporté d'importantes contributions dans ces domaines, en raison de sa maîtrise des techniques de calcul. [7]

Dedekind se conforme à ce credo comme en atteste le cours d'algèbre qu'il donne à Göttingen et dans lequel il aborde la théorie de Galois. Lecteur de Galois, Serret et Cayley, il conçoit le concept de groupe fini abstrait comme un tout, i.e. comme un ensemble fermé d'éléments indifférenciés. Il emprunte à Cayley (1854) la définition d'un groupe fini *abstrait*. Cayley et Dedekind ne s'en tiennent donc pas à des groupes de permutations de n objets. Cela étant, dans son article de 1854, Cayley envisage les éléments d'un groupe comme des symboles individualisés qu'il combine, il produit de la sorte des tables de composition pour des groupes finis de petit cardinal. En revanche, Dedekind envisage un groupe comme un tout qu'il décompose en sous-groupes. C'est pourquoi, on peut dire que l'approche de Cayley en théorie des groupes est *combinatoire* : elle repose sur l'étude de générateurs assujettis à certaines relations ; en revanche, celle de Dedekind est de nature *conceptuelle*.

Dedekind édite dans les années 1860 les écrits de Gauss en théorie des nombres rassemblés dans le second volume de ses œuvres complètes sous le titre *Höhere Arithmetik*. À partir de 1863, les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet sont également publiées sous la direction de Dedekind. Ce dernier leur adjoint des suppléments en nombre croissant au fur et à mesure de leurs rééditions : neuf suppléments en 1863, dix suppléments en 1871 et onze suppléments en 1894. Au cours de son dixième supplément (1871), Dedekind définit par voie axiomatique les concepts de corps de nombres — i.e. de corps contenu dans $\mathbb{C}$ —, d'idéal, de module, etc. Il systématise ainsi en algèbre et en théorie des nombres une approche qui relève des mathématiques conceptuelles, ce qui montre son attachement à des traditions héritées de sa formation à l'université de Göttingen. Cela étant, nous voudrions nous intéresser ici à un écrit légèrement plus tardif de Dedekind, en l'occurrence le *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (1877). Trois raisons nous incitent à faire cette étude. (1) L'approche de Dedekind est manifestement innovante dans l'étude des fonctions modulaires. [8] Nous aurons à préciser en quoi elle l'est. En particulier, Dedekind met en

7. P. Lejeune-Dirichlet, ≪ Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi ≫, 1852, in P. Lejeune Dirichlet, *Werke*, Bd. II, Berlin, 1897, p. 245.

8. Une fonction modulaire $f(z)$ de niveau N, est une fonction méromorphe sur $\mathbb{H}$, invariante par $\overline{\Gamma}(N)$ — sous cette condition, elle peut être considérée comme une fonction sur $Y(N) = \overline{\Gamma}(N)\backslash\mathbb{H}$ — qui doit demeurer

évidence le rôle central du groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ dans la description de telles fonctions. (2) Klein s'appropriera ce texte dans ses articles sur les fonctions modulaires. (3) Dedekind suit une démarche et des méthodes qui se situent dans la continuité des travaux de Gauss consacrés aux formes quadratiques binaires. Ceci permet de montrer combien ses travaux s'inscrivent sur le long terme dans des pratiques mathématiques et une tradition héritées de l'université de Göttingen.

2.1.1 Le modèle de la théorie des formes quadratiques binaires de Gauss

Notre but est de montrer l'étroite parenté entre les travaux de Gauss sur les formes quadratiques binaires définies positives et l'écrit de Dedekind à Borchardt. Comme nous allons le voir, cette parenté se joue au niveau des concepts, des raisonnements et du statut prêté aux représentations géométriques : celles-ci ont exactement les mêmes fonctions dans la théorie des formes quadratiques de Gauss et dans la théorie des fonctions modulaires telle qu'elle est développée par Dedekind dans son écrit à Borchardt. De plus, le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ — qui intervient de manière essentielle dans la théorie des fonctions modulaires — est explicitement dégagé par Gauss (1801) pour *classer* les formes quadratiques binaires définies positives.

Précisons ce point. Soit

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

l'une d'entre elles, ses coefficients a, b et c étant supposés réels. Son discriminant est défini par $D = b^2 - 4ac$.[9] Une forme quadratique binaire *définie positive* vérifie les inégalités $a > 0$,

méromorphe lorsqu'elle est envisagée en tant que fonction sur $X(N)$, c'est-à-dire sur la surface de Riemann compacte obtenue par adjonction d'un nombre fini de points à $Y(N)$. Soit maintenant $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \bigoplus \mathbb{Z}\omega_2$ un *réseau* sur $\mathbb{C}$. Il s'agit d'un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$. On rappelle que ω_1 et ω_2 doivent être $\mathbb{R}$-linéairement indépendants, ce qui signifie que ω_1 et ω_2 sont non nuls et que le rapport ω_1/ω_2 n'est pas réel. On peut définir une relation d'équivalence à partir du réseau Λ de la manière suivante : les nombres complexes z_1 et z_2 sont alors considérés comme équivalents si et seulement si $z_1 - z_2$ fait partie de Λ. Le quotient de $\mathbb{C}$ par cette relation d'équivalence, noté $\mathbb{C}/\Lambda$, est un tore complexe. Une fonction *elliptique* est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, invariante sous l'action de Λ, i.e. telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$, on vérifie

$$f(z+\lambda) = f(z)$$

On précise qu'il n'existe pas de fonction elliptique, qui soit holomorphe sur $\mathbb{C}$ et non constante. On dit aussi qu'une fonction elliptique est une fonction méromorphe *doublement périodique* sur $\mathbb{C}$.

9. C.F. Gauss, *Recherches Arithmétiques* (1801), trad. Poullet-Deslisle (1807), Paris, éd. J. Gabay, 1989, p. 119.

et $D < 0$. Gauss remarque qu'une forme quadratique binaire F en les indéterminées (x, y) peut être « changée en une autre F', dont les indéterminées soient x', y' en y substituant $x = \alpha x' + \beta y'$,$y = \gamma x' + \delta y'$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des nombres entiers ».[10] Il montre ensuite que, si $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, alors les deux formes F et F' admettent le même déterminant. Cela posé, si $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, alors F et F' sont dites *proprement équivalentes* ; si $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, elles sont *improprement équivalentes*. D'une manière plus formalisée, Gauss définit une relation d'équivalence entre formes quadratiques que l'on peut reformuler comme suit :

deux formes quadratiques binaires F et F' sont proprement équivalentes selon la terminologie de Gauss s'il existe une matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, telle que $F(x, y) = F'(A.(x, y))$. En particulier, elles ont le même déterminant. Rappelons qu'une forme quadratique binaire définie positive est dite *réduite* si $-a < b \leqslant a < c$ ou $0 \leqslant b \leqslant a = c$.[11] Toute forme quadratique binaire définie positive est équivalente à une et à une seule *forme réduite*.[12] Autrement dit, *chaque classe d'équivalence de formes quadratiques contient une et une seule forme réduite*. Cela signifie en particulier que l'ensemble des formes réduites constitue un système *complet* de représentants des classes en question. Fricke et Klein attribuent à Gauss la visualisation *géométrique* suivante des formes quadratiques binaires à coefficients réels définies positives sur la base de fragments reproduits dans les tomes III et VIII de ses œuvres complètes : soit $F(x, y)$ une forme quadratique binaire à coefficients réels définie positive, elle peut s'écrire sous la forme :

$$F(x, y) = a(x - \omega y)(x - \overline{\omega} y)$$

où $\omega \in \mathbb{H}$. Il y a une bijection entre les formes quadratiques définies positives de discriminant fixé et les éléments de $\mathbb{H}$. Lorsque F est réduite, alors ω fait partie de l'ensemble D défini par :

$$D = \{z \in \mathbb{H} \mid \ -1/2 \leqslant Re(z) \leqslant 0, \ |z| \geqslant 1\} \cup \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leqslant Re(z) < 1/2, |z| > 1\}.$$

Ainsi, à un système complet de représentants des classes d'équivalence des formes quadratiques binaires définies positives — à savoir les formes réduites — est associé un ensemble

10. *ibid.*, p. 121.
11. *ibid.*, p. 142.
12. Comme nous le verrons, ce résultat qui est énoncé par Gauss p.142-143 de ses *Recherches arithmétiques* sera mentionné par Dedekind dans son écrit de 1877 à Borchardt.

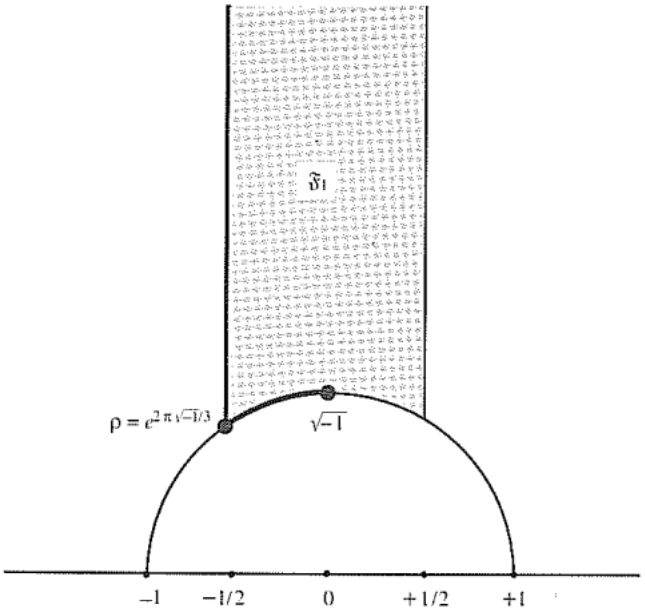


FIGURE 2.1 – Le domaine fondamental de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

bien déterminé de points de $\mathbb{H}$. [13]

Le recours à des représentations géométriques dans le domaine de l'arithmétique n'est bien sûr pas limité à la théorie des formes quadratiques dans l'œuvre de Gauss. Pour expliciter complètement les fonctions qu'il prête à de telles représentations, appuyons-nous sur un exemple plus élémentaire. En 1831, il propose de représenter géométriquement l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers « de Gauss » sous la forme d'un réseau de points dans le plan complexe, comme

13. C.F. Gauss, *Gesammelte Werke*, Bd VIII, Göttingen, 1900, p. 105 : dans son commentaire, R. Fricke estime que Gauss devait connaître ce domaine fondamental sur la base d'un fragment non daté issu du tome III, p. 477. Gauss aurait même saisi le lien entre la théorie des formes quadratiques binaires à coefficients réels définies positives et la théorie des fonctions modulaires comme en attestent l'article 17 du Nachlass intitulé « Arithmetisch geometrisches Mittel » [Tome III, p. 386] et la note 2 du Nachlass intitulé « Drei Fragmente über elliptische Modulfunktionen » [Tome VIII, p. 100-101]. Sauf erreur de notre part, ces fragments ne sont pas datés mais ils sont postérieurs aux *Recherches arithmétiques*. Fricke les situe assez tôt dans la carrière de Gauss. Klein reprend à la lettre l'interprétation de Fricke dans ses leçons sur le développement des mathématiques au XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle. Voir à ce propos F. Klein *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin, éd. Springer, 1926, p. 47 et suiv. Klein se fonde sur la figure tutélaire de Gauss, comme si ce dernier était à l'origine de la théorie moderne des fonctions modulaires. En réalité, celle-ci est essentiellement due à Dedekind et surtout à Klein lui-même à la fin des années 1870. De même, il appartient à Dedekind d'expliciter complètement le lien entre la théorie des formes quadratiques binaires à coefficients réels définies positives et la théorie des fonctions modulaires.

en témoigne le *Commentatio secunda* à la *Theoria residuorum biquadraticorum*. Il commence par proposer une définition nominale d'un nombre entier complexe qui est donc un nombre complexe $z = a+bi$, avec a et b entiers. Il précise que de tels nombres interviennent de manière essentielle dans la théorie des résidus biquadratiques. [14] Il montre ensuite comment des propriétés et des théorèmes, valables dans le cas des nombres entiers, peuvent s'étendre aux nombres entiers complexes, moyennant parfois certaines modifications. Ainsi, Gauss établit que les propriétés que l'on peut assigner à un nombre sont *relatives* aux domaines d'objets auxquels il appartient. Par exemple, 5 qui est premier dans $\mathbb{Z}$ cesse de l'être dans $\mathbb{Z}[i]$ puisqu'il peut alors se décomposer de la manière suivante : $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$. [15] À la lecture des premières pages de ce texte, on serait tenté de croire que l'arithmétique des nombres complexes repose sur des raisonnements analytiques et *a priori* dont l'objet exclusif serait des nombres. Gauss montre justement qu'il n'en est rien : la définition nominale d'un entier complexe n'est pas auto-suffisante, elle mérite d'être accompagnée d'une représentation géométrique. Gauss montre alors que les quantités numériques qu'il envisage peuvent être appréhendées intuitivement en s'appuyant sur le plan complexe. La notion d'entier complexe semble inhabituelle à premier abord, en réalité elle n'est pas contre-intuitive :

> Le transfert de la théorie des résidus biquadratiques au domaine des nombres complexes peut paraître non naturel et rebutant pour celui qui n'est pas habitué à la nature des nombres imaginaires et qui est empêtré dans des représentations erronées ; [ce transfert] peut également inciter à penser que notre investigation est dénuée de fondement, qu'elle ne repose sur aucune base solide et qu'elle est complètement éloignée de toute appréhension intuitive [Anschaulichkeit]. Il n'y pas opinion plus infondée que celle-ci. L'arithmétique des nombres complexes est susceptible de la représentation sensible la plus intuitive qui soit (...) [der anschaulichsten Versinnlichung fähig]. [16]

Gauss insiste sur la pertinence d'un tel mode de représentation : celui-ci nous aide à saisir des objets mathématiques qui semblent abstraits et vides de sens lorsque l'on s'en tient à leur définition nominale. De plus, le passage ci-dessus indique que Gauss utilise des représentations géométriques pour montrer le bien-fondé d'un domaine de l'arithmétique qu'il appelle donc *arithmétique des nombres complexes*.

Ainsi, le recours à l'intuition géométrique a une double fonction : appréhender certains objets mathématiques relevant de l'arithmétique — en l'occurrence ici les entiers de Gauss ou les formes quadratiques binaires définies positives — et justifier leur usage dans cer-

14. Un entier N est un résidu biquadratique d'un nombre premier p si $N \equiv b^4 \ (mod\ p)$.

15. C. F. Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda*, résumé dans les *Göttingische gelehrte Anzeigen* datant du 23 avril 1831, *Werke*, Bd. II *Göttingen* 1863, p. 172.

16. *ibid.*, p. 174.

taines théories. Il n'en reste pas moins qu'en droit, les concepts et les propriétés relevant de l'arithmétique peuvent être définis et manipulés indépendamment de toute visualisation géométrique. Celle-ci n'intervient donc qu'à titre subalterne pour favoriser leur appréhension et montrer leur pertinence à un lecteur implicite qui ne serait pas habitué aux objets introduits par Gauss. Par exemple, les entiers complexes ne sont pas de pures abstractions puisqu'ils peuvent être représentés géométriquement ; mais d'un autre côté, il ne faudrait pas croire que Gauss situe les représentations intuitives invoquées ici au fondement de l'arithmétique des nombres complexes. Cet argument serait en contradiction avec le statut épistémologique que Gauss assigne par ailleurs à l'arithmétique et à la géométrie.

Souvenons-nous en effet que dans la lettre à Bessel datant du 9 avril 1830, Gauss soutient qu'« à la différence du nombre, qui est un pur produit de notre esprit, l'espace admet également en dehors de notre esprit une réalité, dont nous ne sommes pas capables de prédire les lois complètement *a priori* ».[17] En d'autres termes, l'arithmétique en tant que science du nombre donne lieu à des connaissances purement *a priori* — i.e. strictement nécessaires et universelles — ; en outre, elle est engendrée exclusivement par notre entendement. En revanche, la géométrie en tant que science de l'espace est seulement en partie *a priori*. En effet, les *lois* de l'espace ne sont pas toutes indépendantes de l'expérience. Gauss se démarque ainsi de Kant, qui considérait l'espace comme une forme pure de notre sensibilité.[18] Gauss ne prétend pas par là que les domaines de l'arithmétique, de la géométrie ou même de l'analyse sont complètement séparés, ce qui serait en contradiction manifeste avec sa pratique de mathématicien. Cela étant, ses réflexions épistémologiques montrent qu'il n'assigne pas le même statut à l'arithmétique et à la géométrie : l'arithmétique relève des mathématiques « pures », au sens où les connaissances qu'elle met en jeu sont purement *a priori*, en revanche la géométrie est comparable à la mécanique. Voici comment l'on pourrait synthétiser ses arguments.

(a) Puisque l'arithmétique est purement *a priori*, les représentations géométriques n'interviennent dans ce domaine qu'à titre subalterne : il s'agit de rendre intuitivement appréhendables des concepts et des propriétés arithmétiques abstraites qui peuvent paraître inhabituels à un esprit insuffisamment entraîné. Gauss ne considère pas ces représentations géométriques comme un instrument de découverte et il ne les situe en aucune façon au fondement de l'arithmétique. Par exemple, dans les *Recherches arithmétiques*, il obtient l'essentiel de ses

17. C. F. Gauss, lettre à Bessel, 9 avril 1830, in *Werke*, Bd. VIII, *op. cit.*, p. 201.

18. Pour une analyse précise de ce point, nous renvoyons le lecteur à la section 2.2 (deuxième partie) de la présente thèse.

résultats abstraction faite de tout support intuitif, même lorsqu'il aborde un problème qui, initialement, est formulé en termes géométriques, à savoir le problème de la constructibilité à la règle et au compas d'un polygone régulier à 17 côtés — dont les points sont situés sur le cercle unité de $\mathbb{C}$.

(b) En revanche, dans ses *Recherches sur les surfaces courbes* (1828) qui relèvent de la géométrie différentielle, Gauss accorde un rôle heuristique à une pensée de type géométrique, comme en atteste la première définition de la *mesure de courbure* — ou courbure de Gauss — attachée à un point donné d'une surface courbe arbitrairement donnée. Par la suite, il définit analytiquement cette même mesure de courbure — en s'appuyant sur la première et la seconde formes quadratiques différentielles fondamentales. [19] Cela signifie que les fonctions que Gauss assigne à des représentations géométriques sont modulées selon les domaines dans lesquels elles interviennent. Tantôt elles ont pour seul but de visualiser des concepts abstraits — par exemple les entiers de Gauss —, tantôt elles président à la construction d'un concept qu'il s'agit ensuite de traduire analytiquement — nous pensons ici à la notion de mesure de courbure.

2.1.2 Comparaison entre Gauss et Dedekind

Dedekind est donc loin d'être le premier à faire usage de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et, partant, de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Cela étant, il lui revient bel et bien d'avoir montré le rôle central que joue ce dernier « groupe » dans la théorie des fonctions et des équations modulaires. Nous mettons le terme groupe entre guillemets, dans la mesure où il appartiendra en fait à Klein de montrer que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ est un ensemble stable par composition de ses éléments. Dedekind construit ses réflexions autour des fonctions modulaires indépendamment de la théorie des fonctions elliptiques [20]. Il contredit ainsi l'opinion formulée par Hermite en 1862, selon laquelle il n'existe pas d'autre chemin pour parvenir aux fonctions modulaires mis à part celui qu'ont suivi les fondateurs de la théorie des fonctions elliptiques. [21] J. Gray a pu décrire de manière détaillée le fil conducteur historique qui permet de saisir le lien entre les travaux d'Hermite, Fuchs et Dedekind. Notre objectif sera plus modeste. Nous voudrions souligner la parenté entre le

19. Nous reviendrons en détail sur l'ensemble de ces résultats au début de la deuxième partie de notre thèse.

20. R. Dedekind, « Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen », *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. **83**, 1877, p. 178 : « unabhängig von der Theorie der elliptischen Funktionen »

21. J. Gray, *Linear Differential Equations and Group Theory*, From Riemann to Poincaré, second Edition, Boston, Basel, Berlin, Birkhäuser, 2000, p. 114.

raisonnement de Dedekind au cours des §§ 1 et 2 de cet article et celui de Gauss au sujet des formes quadratiques binaires que nous avons brièvement résumé. Dedekind commence par définir une *relation d'équivalence* entre nombres complexes :

> Dans ce qui suit, deux nombres ω, ω_1 devront être dits équivalents, lorsqu'il existe quatre nombres entiers (rationnels) α, β, γ, δ qui satisfont aux deux conditions : $\omega_1 = \frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$, $\quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$. [22]

Il montre qu'une telle relation est *symétrique* et *transitive* — la propriété de réflexivité étant tenue pour évidente. Et il ajoute :

> Pour cette raison, on pourra diviser l'ensemble du domaine des nombres en classes, en mettant deux nombres dans la même classe ou dans deux classes différentes selon qu'ils sont équivalents ou non. [23]

Ainsi, à l'image de Gauss qui répartissait les formes quadratiques binaires définies positives en classes en se fondant sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, Dedekind divise un « domaine de nombres » — qu'il identifiera ensuite au demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ — en classes au moyen de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Cela posé, Dedekind désigne par la lettre S le demi-plan supérieur du plan complexe et il montre que l'ensemble des nombres rationnels auquel on adjoint ∞ forme une classe R qui contient 0. Il détermine ensuite un système complet de représentants ω_0 de toutes les classes de nombres déduites à partir de la relation d'équivalence qu'il a préalablement définie, de façon à ce qu'un nombre quelconque ω de S soit équivalent à un et à un seul des représentants en question. Il munit $\mathbb{C}$ de sa « norme » euclidienne qui correspond au module au carré. Il démontre en particulier la proposition suivante :

> Dans chaque classe du domaine S [y compris R] il n'y a en général qu'un et un seul représentant ω_0 satisfaisant aux conditions :
>
> $$\begin{array}{lll} (1) & N(\omega_0 - 1) & \geqslant N(\omega_0) \\ (2) & N(\omega_0 + 1) & \geqslant N(\omega_0) \\ (3) & N(\omega_0) & \geqslant 1 \quad . \end{array}$$ [24]

Ce domaine n'est autre que l'adhérence du domaine fondamental D. Il ajoute

> Nous pouvons en apporter la preuve par un procédé identique à celui qui est utilisé dans la théorie des formes quadratiques binaires de discriminant négatif pour démontrer que chacune de ces formes est en général équivalente à une et une seule forme réduite. [25]

Ce passage montre combien Dedekind se situe dans le prolongement des travaux de Gauss sur les formes quadratiques binaires définies positives, ce que confirme la description géométrique

22. *ibid.*, p.178.
23. *ibid.*, p. 179.
25. *ibid.*, p. 179.

que Dedekind propose de l'adhérence du domaine fondamental D de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{H}$:

> Géométriquement, l'ensemble de tous ces nombres ω_0 peut être représenté par une partie du demi-plan S, que l'on appellera domaine fondamental [*Hauptfeld*] et qui sera désigné par (ω_0). Ce même domaine est limité par trois lignes (...) posons $\omega = x + yi$, alors (...) :
>
> $$\begin{array}{lll} (1) & x_0 & \leqslant \ 1/2 \\ (2) & x_0 & \geqslant \ -1/2 \\ (3) & x_0^2 + y_0^2 & = \ 1 \end{array}$$
>
> De ce fait, le domaine (ω_0) se situe entre 2 droites, qui sont tracées parallèlement à l'axe des ordonnées en les abscisses $\pm 1/2$; en même temps, il est extérieur au demi-cercle de rayon 1, que l'on décrit à partir de 0. [26]

Ainsi, le § 1 de cet article est constitué pour l'essentiel de deux moments : le premier est d'ordre arithmétique / algébrique, le second est d'ordre géométrique et il permet d'appréhender intuitivement sur un domaine du demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ le système complet des représentants des classes d'équivalence définies par Dedekind. L'approche adoptée par ce dernier est identique à celle de Gauss en arithmétique pour les raisons suivantes : (a) il définit une relation d'équivalence entre des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive en se fondant sur $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, ce que faisait pareillement Gauss lorsqu'il déterminait l'équivalence entre formes quadratiques binaires définies positives en s'appuyant sur $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$; (b) il met au jour un système complet de représentants des classes de nombres ainsi obtenues grâce à un raisonnement en tous points semblable à celui mené par Gauss pour prouver que toute forme quadratique binaire définie positive est équivalente à une et une seule forme réduite ; (c) il procède enfin à une représentation de ce même système de représentants sur une partie de $\mathbb{H}$ appelée domaine fondamental, à l'image de l'interprétation géométrique des formes quadratiques binaires à coefficients réels définis positives attribuée à Gauss par Fricke et Klein. On retrouve donc de part et d'autre une communauté de concepts, des démonstrations similaires et surtout un même usage des représentations géométriques : sans être centrales dans les raisonnements, celles-ci ont néanmoins pour fonction de rendre intuitivement appréhendables des résultats qui peuvent en droit être obtenus par des procédés purement analytiques ou arithmétiques.

De l'aveu même de Dedekind, le § 3 de son article est d'une importance capitale : il formule et démontre à cet endroit la proposition fondamentale [Fundamentalsatz] que l'on peut traduire comme suit :

> Il existe une fonction ν de la variable ω [définie] sur le domaine S et sur la frontière R qui, pour toutes les valeurs équivalentes ω, possède une valeur déterminée de sorte que, inversement,

26. *ibid.*, p. 180.

à toute valeur du plan complexe considéré sans restriction corresponde une classe de valeurs équivalentes ω. [27]

Dedekind appelle cette fonction la *valence* [die Valenz] et il la note $val(\omega)$. À partir de Klein, cette fonction sera notée J. Dedekind raisonne sur $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. Il montre l'existence de la fonction J définie sur $\mathbb{H}^*$, holomorphe sur $\mathbb{H}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ qui doit demeurer invariante sous l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Il s'agit donc d'une fonction *modulaire*. De plus, il prouve qu'elle est surjective, comme en témoigne la seconde partie de sa proposition.

Dedekind ne donne pas une expression *analytique* à la fonction J, il montre son existence d'après des considérations d'ordre purement *géométrique*. Comme J est invariante sous l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, son domaine de définition peut être restreint au domaine fondamental D. Rappelons que D représente un système complet de représentants des classes d'équivalence définies au cours du § 1. L'axe des y divise D en deux parties F et F'. Considérons les demi-plans H et H' de $\mathbb{C}$ séparés par l'axe des réels. Dedekind montre que cette fonction consiste à appliquer l'axe des y sur l'axe des réels, F sur H et F' sur H' de manière conforme, en vertu du théorème de représentation conforme de Riemann (1851). À un nombre ω de F et à son symétrique par réflexion ω' correspondent deux nombres complexes conjugués dans $\mathbb{C}$. Il étend ensuite cette construction à $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. Il pose enfin

$$J(\rho) = 0, \quad \rho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$J(i) = 1$$

$$J(\infty) = \infty.$$

Ainsi, Dedekind s'appuie sur un raisonnement purement géométrique pour construire la fonction J dont Klein donnera une formulation analytique après coup. Les représentations géométriques utilisées ici par Dedekind ont une fonction indéniablement heuristique, puisqu'elles permettent de construire un objet mathématique, à savoir la fonction J. Ce passage montre qu'il est inexact de voir en Dedekind le promoteur d'une mathématique abstraite qui ne reposerait sur aucune visée intuitive. En réalité, il demeure attaché à une pratique que Gauss illustre de manière exemplaire dans sa théorie des formes quadratiques et qui consiste à s'appuyer sur des représentations géométriques pour appréhender intuitivement certains objets et concepts relevant de l'« arithmétique ». Ainsi, l'écrit à Borchardt souligne l'inscription des travaux Dedekind dans des traditions et des pratiques qui doivent nous prévenir contre toute tendance à ne voir dans son œuvre qu'une préfiguration des mathématiques structurales.

27. *ibid.*, p. 183.

2.2 Les travaux de Klein sur l'icosaèdre, leur lien progressif avec la théorie des fonctions modulaires

Dans un article de 1930 intitulé « Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart », Weyl revient sur les caractéristiques essentielles des travaux de Klein consacrés à l'icosaèdre : (i) Klein entend relier divers domaines des mathématiques à petite échelle, c'est-à-dire à partir de l'étude d'un objet particulier, en l'occurrence ici le groupe fini des déplacements qui laisse l'icosaèdre invariant ; (ii) la théorie des groupes et, en particulier, les « isomorphismes » entre groupes, constitue un fil conducteur dans les recherches de Klein consacrées à l'icosaèdre, c'est elle qui donne une cohérence à cet ensemble ; (iii) enfin, Klein tente de mettre au jour une série de points de recoupement entre la théorie galoisienne des équations et la théorie des surfaces de Riemann. Weyl rappelle de manière significative le credo de Klein au cours des années 1870-1880 : « l'union de Galois et de Riemann, tel était le mot d'ordre ».[28]

Nous souhaiterions tout d'abord analyser les contributions de Klein en théorie des invariants. En particulier, nous montrerons qu'il accorde une place centrale aux représentations géométriques et à la théorie des groupes dans le traitement de problèmes qui relèvent de la théorie des invariants dès le début des années 1870. Ensuite, il conviendra de montrer comment Klein relie de proche en proche la théorie des invariants, la résolution des équations algébriques du cinquième degré, la théorie des fonctions modulaires et la théorie des surfaces de Riemann dans ses travaux consacrés à l'icosaèdre entre 1875 et 1884. Enfin, nous montrerons comment ses recherches débouchent progressivement sur une théorie générale des fonctions modulaires.

2.2.1 Klein et la théorie des invariants

Les principales sources en théorie des groupes que Klein invoque au début des années 1870 alors qu'il travaille conjointement avec Sophus Lie sont les suivantes : le *Traité des substitutions* de Jordan (1870) et la troisième édition du *Cours d'algèbre supérieure* de Serret (1866 et 1868 pour la traduction en allemand). Ces deux références, que Klein juge sans doute à tort comparables, le conduisent à souligner le rôle central que le concept de groupe est amené à jouer d'abord en théorie de Galois, ensuite en théorie des invariants, enfin en géométrie. Ainsi, dans les remarques finales au *Programme d'Erlangen*, on peut lire :

28. ↗ Weyl, « Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart », in H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen* Bd. III, *op. cit.*, p. 294 : « Verbindung von Galois und Riemann, so hieß die Parole ».

> Dans la théorie de Galois telle qu'elle est exposée, par exemple, dans le *Traité d'algèbre supérieure* de Serret ou dans le *Traité des substitutions* de C. Jordan, ce qui fait proprement l'objet des recherches, c'est la théorie même des groupes ou des substitutions ; la théorie des équations en découle comme application. [29]

Ce passage ne doit pas prêter à confusion : Klein continue à considérer la théorie de Galois comme une théorie des équations. En revanche, il montre que le concept de groupe commande la formulation des principes sur lesquels elle repose. Sans doute le rôle central que joue ce concept en théorie de Galois apparaît-il plus explicitement chez Jordan que chez Serret. Cela posé, la motivation principale de Klein dans le *Programme d'Erlangen* est de proposer un analogue de la théorie de Galois en géométrie. Il s'agit en effet d'unifier le domaine de la géométrie. Pour ce faire, Klein s'appuie sur la géométrie projective dans le plan projectif complexe et il procède à une classification des géométries usuelles. Une géométrie au sens de Klein est définie comme l'ensemble des propriétés et des relations laissées invariantes sous l'action d'un sous-groupe continu de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$.

La théorie des groupes peut donc être interprétée comme un *principe classificatoire* en géométrie. C'est également le cas en théorie des invariants, le but de Klein étant donc d'accorder une place centrale au concept de groupe dans cette même théorie pour classer des invariants. Ce projet est déjà esquissé dans l'annexe VII au *Programme d'Erlangen* et il se concrétise pleinement avec les publications que Klein consacre à l'icosaèdre à partir du milieu des années 1870. [30]

Ainsi, la théorie des groupes commence tout juste à se développer de manière significative au début des années 1870 sous l'impulsion des publications de Serret et Jordan, prolongées par les recherches de Lie et de Klein. Au même moment, la théorie des invariants est déjà arrivée à maturité ; considérée pour elle-même, elle repose sur des procédés purement combinatoires de nature strictement algébrique. Que faut-il entendre exactement par théorie des invariants ? Celle-ci a essentiellement pour objet l'étude de *polynômes homogènes* de degré n en un nombre fixé d'indéterminées. On rappelle qu'un polynôme est dit homogène si ses monômes ont même degré total. Par exemple, une forme quadratique binaire $F(x, y)$ à coefficients réels A, B, C :

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

29. F. Klein, ≪ Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes ≫, (1872), in *Annales scientifiques de l'ÉNS*, 3e série, tome 8, (1891) p. 191.

30. F. Klein regroupera l'ensemble de ses recherches sur l'icosaèdre dans ses *Vorlesungen über das Ikosaeder* qui sont publiées en 1884.

est un polynôme homogène à deux indéterminées de degré 2. On peut procéder à un changement de variables au moyen d'une substitution linéaire en posant :

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y'$$

On définit par là même une nouvelle forme quadratique

$$F'(x', y') = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2.$$

D'une manière générale, la *théorie des invariants* consiste à identifier les invariants (absolus) d'un polynôme homogène à m variables de degré n, noté F. Un invariant (absolu) de F est une expression en les coefficients de F qui demeure inchangée par l'ensemble des transformations spéciales linéaires — donc de déterminant 1 — opérant sur les m indéterminées de F. Par exemple, dans le cas d'une forme quadratique binaire, les invariants sont tous des puissances de son discriminant. Ce dernier constitue par là même un *système complet d'invariants* pour la forme quadratique en question. La théorie des invariants consiste en général à mettre au jour un système complet fini d'invariants pour un polynôme F, que l'on suppose homogène, de degré n et à m indéterminées. Cela signifie que tout invariant de F peut être exprimé comme somme de produits de puissances d'éléments de ce système. En général, on cherche par extension un système de covariants, c'est-à-dire un système fini complet formé d'invariants et d'expressions analogues impliquant les variables x_1, x_2, ..., x_m.

En 1868, Gordan montre par des procédés *constructifs et combinatoires* l'existence d'une base finie de covariants pour tous les polynômes homogènes de degré quelconque n à 2 variables. Ce résultat remarquable illustre le fait que la théorie des invariants se situe au centre des préoccupations des algébristes au début des années 1870 et qu'elle est jugée fructueuse. Au cours des années 1870, dans ses travaux qui sont partiellement consacrés à la théorie des invariants, Klein se distancie de Gordan pour deux raisons : l'approche adoptée par Gordan ne laisse pas de place à une interprétation géométrique des systèmes d'invariants et de covariants d'une forme binaire ; elle est essentiellement combinatoire. Ceci vient du fait que Gordan travaille sur des formes binaires de degré quelconque n. En revanche, Klein s'intéresse exclusivement à des formes binaires cubiques ou biquadratiques. C'est dans ce cadre bien circonscrit qu'il relie la théorie des invariants à la théorie des groupes et à des représentations géométriques. On peut donc dire avec Gray :

> [Klein] was an enthusiast for anschauliche geometry, stressing the importance of a visual and tangible presentation of mathematical ideas, and preferring the conceptual framework of group

theory to the more algebraic and computational study of explicit invariants. [31]

Notre argument doit être précisé : Klein prête non sans difficulté une fonction *classificatoire* et donc *unificatrice* à la théorie des groupes dans l'étude des invariants. [32] Justement, Klein assigne une fonction du même ordre à la théorie des groupes lorsqu'il l'applique à la géométrie dans son *Programme d'Erlangen*. Par ce biais, il croit pouvoir éviter l'éclatement de *la* géométrie — comme discipline — en diverses branches cloisonnées. [33] On peut donc dire que Klein accorde une place centrale au concept de groupe en théorie des équations algébriques, en théorie des invariants et en géométrie parce qu'il s'agit d'un puissant pôle unificateur dans ces trois domaines.

2.2.2 Les travaux de Klein sur l'icosaèdre : une unification « locale » des mathématiques

Dans les articles et l'ouvrage qu'il consacre à l'icosaèdre, Klein se réfère également à la théorie des invariants mais *in fine* il entend relier divers domaines des mathématiques qui, à premier abord, sont étrangers les uns des autres. Une telle synthèse est rendue possible grâce à l'articulation entre la théorie des groupes et certaines propriétés géométriques que possèdent les objets qu'il considère — nous pensons en particulier aux surfaces de Riemann ou encore aux polyèdres réguliers. Parmi les domaines des mathématiques qu'inverstit alors Klein, nous pouvons citer la théorie des fonctions elliptiques et modulaires, la théorie des invariants, la théorie des équations algébriques et la théorie des surfaces de Riemann qu'il aborde progressivement dans un certain ordre qu'il convient de dégager. Klein considère les éléments de connaissance qu'il emprunte à ces différents domaines d'un seul tenant ; il conçoit donc l'unité des mathématiques de proche en proche par « connexité ».

Sur un plan historique, la liaison entre ces différents domaines s'accomplit en trois étapes. Tout d'abord, en 1875, Klein interprète géométriquement certains problèmes hérités de la théorie des invariants à l'image de ce qu'il avait fait dans l'annexe VII au *Programme d'Erlangen*. Ensuite, en 1877, il montre explicitement comment la résolution de l'équation de l'icosaèdre — que nous expliciterons dans ce qui suit — implique celle des équations algébriques du cinquième degré. Enfin, en 1879, il prolonge ses travaux à la théorie des fonc-

31. J. Gray, *op. cit.*, p. 82.

32. *ibid.*, p. 76.

33. F. Klein, *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, *op. cit.*, p. 88 : « la Géométrie, bien qu'elle soit une par essence, ne s'est que trop scindée en raison du rapide développement qu'elle a pris dans ces derniers temps, en des disciplines presque séparées ».

tions elliptiques et modulaires en général.

L'une des motivations de Klein est donc d'introduire des nouvelles méthodes de résolution des équations générales de degré supérieur ou égal à 5 fondées sur des procédés à la fois géométriques et analytiques. Corrélativement, il s'agit de montrer l'effectivité de la théorie des groupes dans l'étude de certains invariants et d'unifier *in concreto* les mathématiques en combinant plusieurs points de vue sur un même objet, en l'occurrence l'icosaèdre.

Résumons à cet effet sa démarche dans la série d'articles qu'il consacre aux polyèdres réguliers et, en particulier, à *l'icosaèdre* entre 1875 et 1879. Les résultats ainsi obtenus seront regroupés dans les *Vorlesungen über das Ikosaeder* (1884). Soit un polyèdre régulier dans la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, le groupe associé à ce polyèdre correspond au sous-groupe fini de SO_3 qui le laisse *invariant*. Au début de son article de 1875/1876 intitulé « Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst »[34], Klein identifie $\mathbb{S}^2$ à la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Les groupes des déplacements associés aux polyèdres réguliers peuvent ainsi être interprétés comme des sous-groupes finis de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. On rappelle à ce propos que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ est le groupe des homographies de la sphère de Riemann de déterminant 1, i.e. les transformations de la forme

$$\begin{array}{rccc} f: & \widehat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ & z & \longmapsto & \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{array}$$

Klein n'établit pas gratuitement une telle identification. Il veut interpréter géométriquement les formes binaires cubiques et biquadratiques d'une variable complexe, d'où la nécessité d'en passer par la sphère de Riemann. Cette interprétation n'a pas seulement pour fonction de rendre intuitivement appréhendables certaines formes binaires, elle a également un rôle heuristique. Qu'il nous suffise de nous appuyer sur les premières lignes de son article de 1875/1876 :

> Dans les recherches suivantes nous avons l'ambition d'employer l'interprétation géométrique de $x+iy$ sur la surface sphérique pour les formes binaires. À cette fin, j'avais déjà eu précédemment l'occasion de souligner l'étroite relation entre une telle interprétation et la géométrie métrique projective, [relation] que l'on peut fonder sur la sphère. À une transformation linéaire de $x+iy$ correspond précisément, au sens de cette géométrie métrique, un mouvement réel de l'espace et inversement. De la sorte, toute construction sur la surface sphérique qui a une signification pour la théorie des invariants de $x+iy$ peut immédiatement être exploitée dans le cadre d'une

34. F. Klein, « Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst », *Mathematische Annalen* **9**, (1875-1876), in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Band II, Berlin, éd. Springer, 1922, p. 275 à 301.

> telle géométrie métrique et inversement, tout théorème relevant de cette géométrie fournit des avancées en théorie des invariants. [35]

Réciproquement, Klein entend dégager l'ensemble des covariants permettant d'engendrer les formes invariantes par un sous-groupe fini de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Klein commence par déterminer l'ensemble des sous-groupes finis de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Au cours du § 4, il rappelle les résultats qu'il avait déjà pu établir concernant les formes binaires cubiques et biquadratiques dans l'annexe VII tirée du *Programme d'Erlangen*. Dans cette note, il étudie les formes binaires cubiques et biquadratiques et il établit une représentation géométrique des systèmes covariants qui leur sont attachés sur la sphère de Riemann. À la différence de Gordan, il ne raisonne pas sur des formes binaires de degré quelconque. La méthode géométrique qu'il entend alors développer ne vaut que pour des formes binaires cubiques et biquadratiques. Les différences que l'on peut observer chez Gordan et Klein viennent donc aussi de ce qu'ils n'envisagent pas la théorie des invariants à un niveau équivalent de généralité.

La véritable motivation de l'article de 1875/1876 se situe ailleurs. Klein inverse son raisonnement : il ne prend plus pour point de départ des formes binaires — cubiques ou biquadratiques —, il entend d'abord étudier systématiquement les groupes finis des déplacements euclidiens. Il montre que chacun d'eux est isomorphe à un sous-groupe fini G de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ sur la sphère de Riemann. Notons G^* l'image réciproque de G par la projection canonique $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Klein fait ensuite agir G^* sur l'ensemble des polynômes homogènes de $\mathbb{C}[z : w]$. Il s'agit en particulier de déterminer ceux qui sont fixés par G^*. D'où le lien avec la théorie des invariants. Ainsi s'éclaire la fin de la citation. Non seulement Klein systématise certains aspects du *Programme d'Erlangen* en 1875/1876, mais surtout il montre comment on peut déduire des résultats en théorie des invariants à partir de l'étude des groupes finis des déplacements laissant des polyèdres réguliers invariants. De ce fait, Klein ne se contente plus d'étudier certaines formes binaires de variables complexes à l'aide de représentations géométriques, il accorde une *priorité logique* à la géométrie et à la théorie des groupes par rapport à la théorie des invariants.

À partir du § 5, il fait le lien entre l'étude des groupes de déplacements associés à l'octaèdre et à l'icosaèdre d'une part et certains résultats relevant de la théorie des invariants d'autre part. Il énonce tout d'abord le principe général suivant : si deux polynômes homogènes de même degré de $\mathbb{C}[z : w]$ sont invariants par un groupe fini $G \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, alors tout polynôme homogène de même degré dépend linéairement d'eux. Ce principe général, combiné à des procédures héritées de la théorie des invariants, permet à Klein de parvenir à l'équation de

35. *ibid.*, p. 275.

l'octaèdre et de l'icosaèdre.

Détaillons le raisonnement de Klein dans le cas de *l'icosaèdre*. Pour rappel, celui-ci admet 12 sommets, 20 faces triangulaires et 30 arêtes. Klein le fixe de telle sorte que ses sommets aient les coordonnées suivantes :

$$z = 0, \infty, \epsilon^\nu(\epsilon + \epsilon^4), \epsilon^\nu(\epsilon^2 + \epsilon^3), \quad \nu = 0, 1, 2, 3, 4, \quad \epsilon = \exp^{2\pi i/5}.$$

Klein détermine les orbites de certains points remarquables de l'icosaèdre sous l'action du groupe fini de déplacements G qui le laisse invariant. Le groupe G est de cardinal 60 et il est *isomorphe* au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$. Les sommets de l'icosaèdre, les barycentres de ses faces et les milieux de ses arêtes ont respectivement une orbite d'ordre 12, 20 et 30. Chacune de ces orbites peut être considérée comme ensemble des zéros d'une forme binaire que Klein désigne respectivement par les lettres f, H et T. Il s'agit en l'occurrence de polynômes homogènes à deux variables de degré respectif 12, 20 et 30 :

$$f(z, \omega) = z\omega(z^{10} + 11z^5\omega^5 - \omega^{10})$$

$$H(z, \omega) = z^{20} - 228z^{15}\omega^5 + 494z^{10}\omega^{10} + 228z^5\omega^{15} + \omega^{20}$$

$$T(z, \omega) = z^{30} + 522(z^{25}\omega^5 - z^5\omega^{25}) - 10005(z^{20}\omega^{10} + z^{10}\omega^{20}) + \omega^{30}.$$

Il formule la première forme f en coordonnées homogènes à partir de travaux précédents de Schwarz (1872-1873).[36] Il déduit explicitement H et T dans une note de bas de page.[37] Soit dit en passant, H et T constituent le système complet des covariants de f, comme le précisera Klein au début de son article de 1877 consacré exclusivement à l'icosaèdre.[38] Il établit également la relation :

$$T^2 + H^3 - 1728f^5 = 0.$$

On voit ici concrètement comment des réflexions qui prennent pour point de départ le groupe des déplacements laissant un polyèdre régulier invariant conduisent à des résultats remarquables dans le domaine de la théorie des invariants.

Au cours de cet article, Klein introduit l'équation de l'icosaèdre. Il s'agit d'une équation du soixantième degré que l'on écrit comme quotient de deux polynômes homogènes du soixantième degré P et Q, invariants sous l'action du groupe G^* qui désigne l'image réciproque

36. F. Klein, *op. cit.*, § 5, p. 289.
37. *ibid.*, p. 292.
38. F. Klein, ≪ Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder ≫, *Math. Annalen* Bd. **12** (1877), in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. II, *op. cit.*, p. 324.

du groupe G de l'icosaèdre par la projection canonique $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Le polynôme P est égal à la puissance 3e de H, le polynôme Q à la puissance 5e de f et $P - Q$ à la puissance seconde de T. Tous calculs effectués, l'équation de l'icosaèdre s'écrit :

$$\frac{H(z_1, z_2)^3}{1728 f(z_1, z_2)^5} = X,$$

où X est le paramètre complexe de l'équation de l'icosaèdre. [39] Klein conjecture que la résolution de l'équation de l'icosaèdre entraîne une nouvelle méthode de résolution des équations générales de degré 5. Cet article a donc un caractère programmatique : Klein anticipe déjà sur les recherches qu'il publiera en 1877 et qu'il reprendra dans ses *Vorlesungen über das Ikosaeder* en 1884. Pour l'heure, il se contente de déterminer le groupe de Galois de l'équation de l'icosaèdre :

> Pour conclure, déterminons le groupe de Galois de l'équation de l'icosaèdre. Conformément aux transformations linéaires qui conservent ladite équation, 60 des birapports que l'on peut former à chaque fois à partir de ses racines sont égaux, les différences de ces birapports sont donc nulles et connues rationnellement. Une réflexion plus détaillée nous montre que de telles égalités entre les birapports en question demeurent invariantes exclusivement par les permutations suivantes des racines :
>
> 1) par les 60 permutations qui correspondent aux transformations linéaires de l'icosaèdre sur lui-même
>
> 2) par les transformations qui résultent de la substitution de ϵ_2, ϵ_3, ϵ_4 à ϵ. À ce propos, remplacer ϵ par ϵ_4 peut aisément s'interpréter géométriquement comme suit : on échange chaque sommet de l'icosaèdre avec celui qui lui est opposé. [40]

Il calcule d'abord ce groupe lorsque les coefficients de l'équation de l'icosaèdre font partie d'un corps qui ne contient pas la racine cinquième de l'unité. Il obtient alors un groupe de cardinal 240, qui résulte directement des points (1) et (2). Mais il ajoute que l'on peut réduire ce groupe par adjonction de la racine cinquième de l'unité $\epsilon = e^{2\pi i/5}$. Autrement dit, si l'on suppose que les coefficients de l'équation de l'icosaèdre sont éléments d'un corps $K \subset \mathbb{C}$ contenant ϵ, alors le groupe de Galois de cette équation n'est plus que de degré 60. Il est isomorphe au groupe de l'icosaèdre — c'est-à-dire au groupe fini $G \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ qui laisse l'icosaèdre invariant — et donc au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$. Klein insiste sur ce point à la toute fin de son article :

39. Lors de nos investigations à l'ETH de Zürich, nous avons trouvé une feuille recto-verso de la main de Weyl dans laquelle il reformule scrupuleusement les polynômes f, H et T ainsi que l'équation de l'icosaèdre. Ces notes sont classées sous la cote Hs 91a : 67. Weyl les rédige alors qu'il est professeur à l'IAS. Nous supposons qu'elles ont été prises en marge des cours en théorie des groupes qu'il donne en 1946-1949. En effet, ce cours porte notamment sur les groupes finis et Weyl y évoque le groupe de l'icosaèdre.

40. F. Klein, ≪ Über binäre Formen... ≫, *op. cit.*, p. 300.

> Pour caractériser la structure de ce groupe réduit, il suffit de remarquer que les cinq octaèdres [inscrits dans l'icosaèdre] sont permutés entre eux par les soixante mouvements qui amènent l'icosaèdre à coïncider avec lui-même. Par suite, à [ces mêmes mouvements] correspondent les substitutions du groupe des permutations de cinq objets, qui laissent invariant le produit de leurs différences [i.e. l'ensemble des substitutions paires de $\mathfrak{S}_5$]. [41]

L'isomorphisme entre le groupe alterné, le groupe de l'icosaèdre et le groupe de Galois de l'équation de l'icosaèdre constitue le fil conducteur qui garantit une cohérence d'ensemble aux travaux de Klein sur l'icosaèdre. Ce triple isomorphisme montre concrètement que la théorie des groupes constitue un *pôle unificateur* dans les recherches menées par Klein entre 1875 et 1884. Justement, dans le premier chapitre de ses *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Klein montre que des groupes isomorphes peuvent être considérés comme les représentants d'un même *groupe abstrait*, ils ne diffèrent que par la nature de leurs opérations et de leurs éléments. Conformément à la terminologie utilisée par Jordan dans son *Traité des substitutions*, la notion d'*isomorphisme holoédrique* employée par Klein correspond à ce que nous appelons un *isomorphisme de groupes*.

> En dehors des définitions élémentaires qui interviennent lorsque l'on considère des groupes isolés, je dois encore mentionner la relation entre deux groupes que l'on appelle un *isomorphisme*. Deux groupes sont dits isomorphes, si l'on peut envoyer leurs opérations S, S' l'une vers l'autre, de telle sorte que S_iS_k corresponde toujours à $S'_iS'_k$, à supposer que S_i correspond à S'_i et S_k à S'_k.
>
> La relation d'isomorphie peut être bi-univoque [wechselseitig eindeutig] ; on parle alors d'*isomorphisme holoédrique*. Dans ce cas, les groupes, considérés abstraitement, [abstract genommen] sont en somme identiques ; il n'y a guère de différence entre eux qu'au niveau de la signification [Bedeutung] de leurs opérations respectives. [42]

Preuve que l'isomorphisme entre groupes constitue une étape essentielle pour parvenir à une conception abstraite des groupes, qui est déjà à l'œuvre dans les *Vorlesungen über das Ikosaeder* (1884). De manière analogue, l'équivalence conforme — ou encore l'isomorphisme — entre surfaces de Riemann constitue une étape essentielle pour envisager les surfaces de Riemann abstraitement. C'est ce que montre Klein dans l'ouvrage qu'il consacre à la classification des surfaces de Riemann compactes connexes en 1882. Ce parallèle n'a rien d'arbitraire : deux objets mathématiques *isomorphes* constituent deux réalisations possibles d'une même entité abstraite aux yeux de Klein. Cet argument a un sens aussi bien en théorie des groupes qu'en théorie des surfaces de Riemann.

41. *ibid.*, p. 301.

42. F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Basel, Boston, Berlin, éd. Birkhäuser, 1993, p. 7-8.

Dans l'article de 1877 intitulé « Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder », Klein résout le problème qu'il avait formulé dans son article précédent : introduire une nouvelle méthode de résolution des équations du cinquième degré, en se fondant sur la résolution de l'équation de l'icosaèdre. Ainsi, ses travaux s'étendent de proche en proche de l'étude de certaines formes binaires à la théorie des équations algébriques du cinquième degré. Cet article se divise en trois parties. la première est consacrée à l'équation de l'icosaèdre en tant que telle ; la seconde, sur laquelle nous ne reviendrons pas, concerne la théorie des équations générales de Jacobi du sixième degré ; la troisième est entièrement dévolue à la théorie des équations algébriques du cinquième degré.

Dans la première partie, Klein revient sur les formes binaires $f(z_1, z_2)$, $H(z_1, z_2)$ et $T(z_1, z_2)$ qui sont respectivement du douzième, du vingtième et du trentième degré. Il redonne la relation qui les unit : $T^2 = 12f^5 - 12^4H^3$. Il formule le *problème fondamental* suivant : connaissant les valeurs numériques que prennent f, H et T pour certaines valeurs de z_1 et z_2, calculer z_1 et z_2. Il s'agit là d'un problème relevant de la théorie des formes binaires — et donc de la théorie des invariants. Cela posé, il introduit l'équation de l'icosaèdre

$$\frac{H(z_1, z_2)^3}{1728f(z_1, z_2)^5} = X,$$

où X est le paramètre complexe de l'équation de l'icosaèdre. Il montre que les soixante racines de l'équation de l'icosaèdre peuvent être déduites à partir de n'importe quelle racine supposée connue par des substitutions linéaires. Il montre que ce système de substitutions linéaires est de cardinal 60 et il en donne la forme explicite. Il déduit donc à nouveaux frais le groupe de Galois de l'équation de l'icosaèdre avant de la résoudre à l'aide des séries hypergéométriques.

Ainsi, Klein considère la notion de « groupe de Galois » exclusivement comme groupe de permutations des racines d'une équation donnée, ici en l'occurrence l'équation de l'icosaèdre. D'un côté, les isomorphismes qu'il établit entre le groupe de l'icosaèdre, le groupe de Galois de l'équation de l'icosaèdre et le groupe alterné montrent qu'il commence à développer une conception « abstraite » des groupes : ces trois groupes sont à ses yeux des réalisations possibles d'un même *groupe abstrait*. De l'autre, la notion de groupe de Galois est encore conçue comme groupe des substitutions des racines d'une équation, ce qui montre que Klein se situe encore largement dans le prolongement de Serret et de Jordan en théorie des groupes. Ajoutons à ce propos qu'à aucun moment dans ses travaux consacrés à l'icosaèdre (1875-1884), Klein ne fait usage de la notion de corps. *A fortiori*, il ne parle jamais de corps de fonctions. Précisons que dès 1871, Dedekind axiomatise la notion de corps de nombres, i.e. de sous-corps contenu dans $\mathbb{C}$ de degré fini sur $\mathbb{Q}$, avant de montrer avec Weber en 1880 qu'il est également

légitime de parler de corps de fonctions algébriques d'une variable complexe. Précisément, les notions de corps et d'extensions de corps sont essentielles pour définir le concept de groupe de Galois comme groupe d'automorphismes d'une extension L d'un corps K laissant tous les éléments de K invariants, ce que feront justement Dedekind et Weber dans les années 1890. C'est justement à cette condition que la théorie de Galois cesse d'être une simple théorie des équations.

Si, par exemple, nous voulions formuler les résultats de Klein dans un cadre qui ne relève plus de la théorie des équations, voilà ce que nous pourrions dire : soit $\mathbb{C}(z)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients complexes. On désigne par $\mathbb{C}(z)_G$ l'ensemble des fractions rationnelles laissées invariantes sous l'action du groupe G de l'icosaèdre. Le corps $\mathbb{C}(z)_G$ est un sous-corps de $\mathbb{C}(z)$, $\mathbb{C}(z)$ est en particulier une extension normale séparable de degré 60 de $\mathbb{C}(z)_G$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(z)/\mathbb{C}(z)_G)$ est isomorphe à G. Nous traduisons ici dans un langage et un cadre théorique bien distinct l'isomorphisme entre groupes établi par Klein dans la série d'articles qu'il consacre à l'icosaèdre.

La troisième partie de l'article de 1877 consiste à présenter « une nouvelle méthode de résolution des équations [algébriques] du cinquième degré ». [43] Nous ne reviendrons pas sur les détails techniques de cette méthode, mais seulement sur les motivations de Klein :

> Dans cette troisième partie, je montre qu'à l'aide de l'équation de l'icosaèdre, on peut explicitement résoudre les équations du cinquième degré dont la somme des racines et la somme des carrés des racines s'annulent. (...) J'aurais souhaité ajouter une comparaison détaillée entre cette méthode et celles de Hermite et Kronecker, toutes trois ayant d'étroits liens de parenté. Mais ceci exige de faire une incursion du côté des propriétés des fonctions elliptiques, voilà pourquoi je remets cette discussion à plus tard. [44]

Cette méthode de résolution s'applique à certaines conditions, elle n'est pas encore valable en général. Par ailleurs, il entend comparer les différentes méthodes de résolution des équations générales du cinquième degré proposées jusqu'ici, à savoir celle d'Hermite, de Kronecker (1858) et la sienne (1877). Cette comparaison l'amène à investir la théorie des fonctions elliptiques et modulaires. Cette remarque confirme une nouvelle fois l'idée selon laquelle, dans ses travaux consacrés à l'icosaèdre, Klein unifie progressivement et par connexité différents domaines des mathématiques. Ainsi, il commence par étudier les groupes finis des déplacements laissant fixes les polyèdres réguliers. Il investit ensuite de proche en proche la théorie des formes binaires, des équations générales du cinquième degré et des fonctions modulaires. Ses réflexions se prolongent enfin aux surfaces de Riemann.

43. F. Klein, « Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder », *op. cit.*, p. 364.
44. *ibid.*, p. 365.

Venons-en à l'article de 1878/1879 intitulé ≪ Über die Transformationen der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades ≫ pour confirmer ce point. Comme il l'avait annoncé précédemment, Klein étend ses recherches sur l'icosaèdre à la théorie des fonctions elliptiques et modulaires, mais aussi à la théorie des surfaces de Riemann. Les sources utilisées par Klein dans cet article sont très diverses : il se réfère en particulier aux travaux d'Hermite et Kronecker sur les équations modulaires, il reprend également à son compte l'écrit de Dedekind à Borchardt, dans lequel celui-ci détermine ≪ le ≫ domaine fondamental de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Nous avons affaire ici à un *article de transition* dans lequel Klein combine des domaines extrêmement variés des mathématiques. Il se décentre progressivement de la question de la résolution des équations du cinquième degré pour parvenir à une théorie des fonctions modulaires.[45] Cet article est divisé en quatre parties : la première a pour objet des rappels sur les périodes des intégrales elliptiques du premier genre, la seconde est consacrée à la résolution des équations de Jacobi du sixième degré, la troisième à l'équation de l'icosaèdre et la quatrième aux équations modulaires ainsi qu'à la résolution des équations générales du cinquième degré.

Trois motifs commandent la rédaction de l'article de Klein de 1878/1879. (a) Klein détermine la signification qu'ont les fonctions elliptiques — et par extension les fonctions modulaires — dans la résolution des équations du cinquième degré. (b) Il simplifie et il explicite les résultats précédents sur l'icosaèdre. (c) Il développe de nouvelles perspectives [neue Gesichtspunkte] dans le traitement des fonctions elliptiques. Mais surtout, il considère cet article comme une *transition* entre ses recherches antérieures sur l'icosaèdre et des réflexions plus générales sur les fonctions modulaires :

> D'un côté [cet article] permet de compléter et, dans une certaine mesure, de conclure mes précédentes recherches sur les équations du cinquième degré. De l'autre, il doit ouvrir la voie à des problèmes plus étendus [umfassenden Fragen] et constituer un travail préparatoire à des recherches inédites.[46]

À la fin de cette citation, Klein fait donc allusion aux recherches qu'il veut mener sur les

45. J. Gray, *op. cit.*, p. 126 : ≪ This paper began the series of papers and books on elliptic modular functions which form Klein's greatest contribution to mathematics, and in which he and his students pioneered a geometric approach to fonction theory, allied to a "field theoretic" treatment of the classes of analytic functions which were brought to light. The central element in this wor is the geometric role of certain Galois groups, which generalize the group of the icosahedron, and are connected to appropriate Riemann surfaces (...) ≫.

46. F. Klein, ≪ Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades ≫, *Mathematische Annalen* **14**, 1878 / 1879, in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. III, *op. cit.*, p. 13.

fonctions modulaires en général et les surfaces de Riemann auxquelles elles sont attachées. Pour le dire autrement, le cas des fonctions modulaires pour le niveau 5 [47] et de la surface $X(5)$ à laquelle elles sont associées engage Klein sur la voie d'une théorie systématique des fonctions modulaires. L'article consacré aux fonctions modulaires pour le niveau 7 et à la quartique de « Klein » (1878, 1879) a une fonction similaire.

Dans la première partie de son article, Klein synthétise une série de résultats déjà établis mais « mal connus » sur les fonctions elliptiques. À la suite de Weierstrass, il calcule de manière explicite les invariants pour une intégrale elliptique du première espèce :

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x)}}, \quad f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

Il s'agit de :

$$g_2 = a_0a_4 - 4a_1a_2 + 3a_2^2, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Le discriminant Δ de g_2 et g_3 est $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. [48] Klein introduit en conséquence l'invariant absolu ou J-invariant : $J = g_2^3/\Delta$. Il exprime ensuite g_2, g_3, Δ et J en fonction du quotient ω des périodes ω_1 et ω_2 de l'intégrale elliptique I. [49]

À partir du § 7, Klein interprète J comme une fonction de ω et il montre qu'elle correspond exactement à la *valence* de Dedekind : J est une fonction holomorphe définie sur $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ et à valeurs dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. De plus, elle reste invariante sous l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Il s'agit donc d'une fonction modulaire. Klein retrouve en particulier le domaine fondamental de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ qui avait déjà été établi par Dedekind dans son écrit à Borchardt (1877). Alors que Dedekind obtient ce résultat en suivant une méthode arithmético-algébrique dans le prolongement des travaux de Gauss sur les formes quadratiques binaires définies positives, Klein se fonde sur des éléments de connaissance issus de la théorie des invariants et de la théorie des fonctions elliptiques tels qu'ils étaient communément employés par Fuchs, Hermite ou encore Weierstrass. En outre, il souligne l'importance de la représentation géométrique du domaine fondamental $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ introduite par Dedekind : elle sert de point d'appui intuitif pour parvenir à une classification des substitutions de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$.

Sans reproduire dans le détail les raisonnements menés par Klein, nous voudrions préciser comment il est amené à investir la théorie des surfaces de Riemann au cours de la seconde partie de son article. Il n'envisage pas alors cette théorie pour elle-même, mais en rapport

47. i.e. les fonctions méromorphes sur $\mathbb{H}$, invariantes par $\overline{\Gamma}(5)$
48. *ibid.*, § 1, p. 14.
49. *ibid.* § 5, p. 20 et suiv.

avec l'étude des fonctions modulaires. Il commence par s'appuyer sur le § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann. En effet, Klein se donne une équation

$$\phi(s, z) = 0$$

où s représente « l'inconnue » [die Unbekannte] et z un « paramètre variable » [einen veränderlichen Parameter]. En fait, $\phi(s, z)$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{C}[s, z]$ et l'équation $\phi(s, z) = 0$ définit une surface de Riemann S. Dans le langage de Riemann et de Klein, une équation algébrique $\phi_1(s_1, z_1) = 0$ est équivalente à $\phi(s, z) = 0$ si et seulement si s et z peuvent être remplacés par des fonctions rationnelles de s et de z telles que $\phi(s, z) = 0$ se transforme en $\phi_1(s_1, z_1) = 0$.

Klein formule le problème suivant : identifier une fonction algébrique définie sur S et telle que l'on puisse déduire rationnellement les autres fonctions méromorphes sur S à partir d'elle. Ceci revient exactement à trouver un élément primitif, i.e. un élément engendrant le corps des fonctions méromorphes sur S, ce corps étant une extension finie du corps $\mathbb{C}(X)$ des fonctions rationnelles d'une variable complexe. Il interprète ensuite ce problème dans le cas des fonctions modulaires *en général*, ce qui montre qu'il entend parvenir à une théorie *systématique* des surfaces de Riemann associées aux fonctions modulaires. il accomplira pleinement ce but dans un article ultérieur intitulé « Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen » (1879 / 1881).

Klein remplace donc le paramètre z de l'équation $\phi(s, z) = 0$ par l'invariant absolu J et il montre que les points de ramification de la surface de Riemann définie par $\phi(s, J) = 0$ sont situés au-dessus de $J = 0$, $J = 1$ et $J = \infty$. De manière équivalente, Klein étudie les surfaces de Riemann correspondant aux extensions finies du corps des fonctions modulaires invariantes par $\Gamma(1) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ que l'on notera $\mathbb{C}(J)$.

Il se donne ensuite deux fonctions elliptiques f et g « qui proviennent l'une de l'autre par une transformation du n-ième ordre »[50] où n est un nombre premier. En d'autres termes, soit f une fonction elliptique, i.e. une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et invariante par un réseau Λ ; g doit être invariante par l'un des $n+1$ sous-réseaux de Λ d'ordre n. Les invariants absolus associés à ces deux fonctions elliptiques sont notés respectivement J et J'. Klein remarque que la transformation qui permet de passer de f à g donne lieu à une équation de degré $n+1$ entre leurs invariants absolus J et J' qu'il note : $\phi(J, J') = 0$. Il s'agit de l'*équation modulaire* pour le nombre premier n.

Nous pouvons traduire le raisonnement de Klein de manière modernisée comme suit :

50. *ibid.*, p. 31.

pour un nombre premier n, on se donne le groupe $\Gamma_0(n)$, défini par :

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \quad \middle| \quad c \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

En particulier

$$\mu = [\Gamma(1) : \Gamma_0(n)] = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

On considère le corps $\mathbb{C}_{\Gamma(1)} = \mathbb{C}(J)$ des fonctions rationnelles invariantes par $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, et le corps $\mathbb{C}(J')$ des fonctions invariantes par le groupe $\Gamma_0(n)$. On pose $J'(z) = J(nz)$. L'équation modulaire qui relie J à J' s'identifie au polynôme minimal $P \in \mathbb{C}(J)[X]$ de $J(nz)$ sur $\mathbb{C}(J)$. Le degré de P est égal à μ. Pour $n = 5$, P est de degré 6. Maintenant, si l'on veut formuler en langage moderne le groupe associé à une équation modulaire — qu'avait déjà introduit Galois dans sa lettre à Auguste Chevalier — il suffit préalablement d'identifier le corps de décomposition de P, c'est-à-dire la plus petite extension de corps de $\mathbb{C}(J)$ dans laquelle P se décompose en facteurs du premier degré. Il s'agit du corps des fonctions modulaires pour le sous-groupe de congruence de niveau n. On note ce corps $\mathbb{C}_{\Gamma(n)}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_{\Gamma(n)}|\mathbb{C}(J))$ est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Pour $n = 5$, un tel groupe est de degré 60. Or, comme l'avait déjà précisé Galois, le cardinal du groupe associé à l'équation modulaire pour le nombre premier n satisfait à l'égalité :

$$\mathrm{Card} \quad G = \frac{1}{2} n(n-1)(n+1)$$

ce qui redonne bien 60 pour $n = 5$.[51]

Klein n'adopte pas ce mode de raisonnement algébrique et structural pour définir l'équation modulaire pour le nombre premier n. Son approche est géométrique, puisqu'il considère J et J' comme des variables sur deux surfaces de Riemann. D'après la remarque précédente, J' est ramifiée au dessus de $J = 0$, $J = 1$ et $J = \infty$. Il calcule ensuite le genre de la surface de Riemann S définie par l'équation $\varphi(J, J') = 0$. Ce nombre satisfait à l'égalité :

$$g = -n + \sum \frac{\sigma - 1}{2}$$

51. E. Galois, ≪ Lettre à Auguste Chevalier ≫, in *Œuvres mathématiques*, *Journal de Liouville*, Tome XI, 1846, p. 411 : ≪ Voyons donc si l'équation [modulaire] de degré $p+1$, dont les racines x_k s'indiquent en donnant à k toutes les valeurs, y compris l'infini, et dont le groupe de substitutions

$$x_k, \quad x_{\frac{ak+b}{ck+d}};$$

$ad - bc$ étant un carré, peuvent s'abaisser au degré p. Or il faut pour cela que le groupe se décompose (improprement s'entend) en p groupes de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations chacun ≫.

qui correspond à la formule de Riemann. [52] En effet, la surface S peut être considérée comme un revêtement ramifié de la surface $X(1)$ associée au corps des fonctions modulaires invariantes par $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Klein précise que n correspond au nombre de feuillets de S auquel on a retiré une unité, σ désigne de manière contractée chacun des indices de ramification pour les trois points de ramification 0, 1 et ∞ de J' au-dessus de J. La surface S n'admet respectivement que 20, 30 et 12 valeurs en ces points.

Cela posé, Klein décompose les surfaces qu'il étudie en triangles (triangulation) et il calcule leur genre grâce à la formule d'Euler :

> La règle d'après laquelle on calcule le genre d'une surface à partir du nombre de ses feuillets et de ses points de ramification se transforme en la formule d'Euler généralisée :
>
> $$e + s = k - 2p + 2$$
>
> le nombre de sommets e augmenté du nombre de faces s est égal au nombre de côtés k, moins $(2p-2)$. [53]

Cette remarque ne doit pas conduire à des surinterprétations. Klein fait encore un usage purement intuitif de la triangulation des surfaces de Riemann, dans la mesure où il en reste à des cas élémentaires. il n'applique pas de manière systématique un raisonnement combinatoire dans le traitement des surfaces de Riemann. Il appartiendra à Brouwer en particulier d'expliciter les fondements du procédé de triangulation d'une surface en topologie, jetant ainsi les bases de la topologie combinatoire. Rappelons à ce propos qu'en 1913, Weyl reprendra à son compte les travaux de Klein sur les surfaces de Riemann et les articles de Brouwer consacrés à *l'analysis situs*. Dans la première édition de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, il explicitera le procédé de triangulation d'une surface et, par extension, d'une surface de Riemann, en connexion avec les résultats obtenus par Klein et surtout par Brouwer.

Au cours de la troisième partie de son article de 1878 / 1879 sur l'icosaèdre, Klein montre en particulier que, pour $n = 2$, 3, 4 et 5, on a affaire à des surfaces de genre 0. Il remarque au passage que, pour $n = 7$, on parvient à une surface de Riemann de genre 3. Il étudiera cette situation en détail dans un article ultérieur consacré aux équations générales du septième degré et à la quartique qui porte son nom. Les cas $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$ font l'objet d'un traitement particulier, puisqu'ils sont directement associés à l'étude du tétraèdre, de

52. En effet, soient Y et X deux surfaces de Riemann compactes, f une application holomophe de Y dans X.Le genre g de Y satisfait à l'égalité :

$$g_Y - 1 = (degf)(g_X - 1) + \frac{1}{2}\sum_p (e_p - 1).$$

53. F. Klein, *op. cit.*, p. 37.

l'octaèdre et de l'icosaèdre, ainsi qu'aux équations auxquelles ces trois polyèdres réguliers sont associés. En effet, Klein met directement à profit la méthode de triangulation pour dégager les propriétés des surfaces de Riemann pour $n = 3,\ 4,\ 5$; par là même il retrouve respectivement les trois polyèdres réguliers que nous venons de mentionner. Signalons enfin qu'au cours de la quatrième partie, il se consacre exclusivement à la question de la résolubilité des équations générales du cinquième degré — en lien avec l'équation de l'icosaèdre. Dans le § 7 de cette partie, il rend raison des méthodes de résolution des équations du cinquième degré introduites par Hermite et Kronecker en 1858, ce qui constituait l'un des motifs de son article.

Cela étant, Klein n'utilise pas encore dans cet article le mode de construction formel des surfaces modulaires que l'on peut énoncer comme suit : celles-ci correspondent au quotient de $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ par un sous-groupe de congruence de niveau n de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ où n est un nombre premier. Il mettra au jour ce procédé de construction à la fin des années 1870 et au début des années 1880 et, corrélativement, il clarifiera le lien entre l'équation de l'icosaèdre et les fonctions modulaires. En effet, considérons le groupe :

$$\Gamma(5) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \quad \middle| \quad \mathrm{a} \equiv 1, \mathrm{b} \equiv 0, \mathrm{c} \equiv 0, \mathrm{d} \equiv 1 \pmod 5 \right\}.$$

Il s'agit du sous-groupe de congruence de niveau 5 de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. La surface de Riemann $\overline{\Gamma}(5)\backslash\mathbb{H}$, i.e. le quotient de $\mathbb{H}$ par $\overline{\Gamma}(5)$, n'est pas compacte. [54] Cela étant, si l'on prend $\mathbb{H}^*$, on peut prolonger la structure de surface de Riemann de $\overline{\Gamma}(5)\backslash\ \mathbb{H} = Y(5)$ à $\overline{\Gamma}(5)\backslash\ \mathbb{H}^* = X(5)$ qui est compacte. De manière équivalente, on a en fait adjoint un nombre fini de points — appelés pointes — à $\overline{\Gamma}(5)\backslash\ \mathbb{H}$ de façon à obtenir une surface compacte. Ce procédé de construction se généralise à tout sous-groupe de congruence de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ et les surfaces compactes ainsi obtenues s'appellent des surfaces modulaires. $X(5)$ est de genre 0 et elle est isomorphe à la sphère de Riemann. Elle admet pour invariant modulaire une fraction rationnelle de degré soixante. Cet invariant correspond à l'équation de l'icosaèdre qui joue un rôle crucial dans la résolution des équations générales du cinquième degré. En outre le corps des fonctions associé à $X(5)$ — c'est-à-dire le corps des fonctions invariantes par $\overline{\Gamma}(5)$, mais non par un plus grand sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ — correspond au corps de décomposition de l'équation modulaire pour le nombre premier 5. On formule ici de manière ramassée le lien entre (a) les équations générales du cinquième degré, (b) l'équation de l'icosaèdre, (c) l'équation modulaire pour le nombre premier 5.

54. Le groupe $\overline{\Gamma}(5)$ n'est autre que l'image de $\Gamma(5)$ par la projection $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$.

Ajoutons que le quotient de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ par $\overline{\Gamma}(5)$, s'identifie à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ qui est de cardinal soixante. Klein considère explicitement un tel groupe dans son article final intitulé *Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen.* On peut établir en filigrane un quadruple isomorphisme entre $\mathfrak{A}_5$, le groupe de Galois de l'équation de l'icosaèdre, le groupe des déplacements qui laissent l'icosaèdre invariant et $\mathrm{PSL}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Cette série d'isomorphismes renforce l'unité des travaux de Klein sur l'icosaèdre et les fonctions modulaires.

Notre analyse sommaire du troisième article que Klein consacre à l'icosaèdre à la fin des années 1870 nous permet de préciser le propos de Weyl selon lequel Klein projette d'unifier les travaux de Galois et les idées géométriques de Riemann. Tout d'abord, Klein introduit une nouvelle méthode de résolution des équations du cinquième degré fondée sur la résolution de l'équation de l'icosaèdre. Corrélativement, il s'intéresse à l'équation modulaire pour le nombre premier $n = 5$. Ses réflexions se situent au moins partiellement dans le prolongement de la *Lettre à Auguste Chevalier* de Galois. Mais surtout, Klein analyse à nouveaux frais la méthode proposée par Hermite pour résoudre les équations générales du cinquième degré. Dans le même temps, il investit la théorie des surfaces de Riemann exclusivement pour étudier les fonctions modulaires. En particulier, il décrit certaines surfaces modulaires — notamment $X(5)$ et $X(7)$ — et il sait déterminer leur genre.

Si nous nous en tenions aux trois articles sur l'icosaèdre que nous venons de synthétiser, nous pourrions penser que Klein prolonge la théorie de Galois en se contentant d'introduire une nouvelle méthode de résolution des équations générales du cinquième degré. En réalité la théorie générale des fonctions modulaires à laquelle il veut aboutir montre qu'il a un projet plus ambitieux : construire une théorie systématique des fonctions modulaires qui constituerait un analogue à la théorie de Galois algébrique. C'est ce que nous nous proposons de vérifier dans ce qui suit.

2.2.3 La quartique de Klein et la théorie générale des fonctions modulaires

Au début de son article intitulé « Über die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen », [55] Klein résume les résultats qu'il a obtenus dans ses travaux sur l'icosaèdre, en observant que l'étude de l'équation modulaire pour $n = 5$ fait apparaître la « résolvante de Galois du 60ème degré » qui n'est autre que l'équation de l'icosaèdre. [56] Dans

55. F. Klein, « Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen », *Math. Ann.*, **14** 1878/1879, in *Ges. Math. Abh.*, Bd. III, *op. cit.*, p. 90-134.
56. *ibid.*, p. 90.

le cas de l'équation modulaire pour $n = 7$, il précise que la résolvante de Galois est du 168ème degré. Il définit aussitôt et de manière explicite les fonctions qui restent invariantes par les substitutions linéaires de la forme

$$\frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

et congrues à l'identité modulo N, N étant un nombre premier. Bref, dès le début de ce nouvel article, Klein introduit explicitement les sous-groupes de congruence de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ de niveau N. Etant donné ses motivations — à savoir l'étude des équations algébriques du 7ème degré — Klein se restreindra pour l'essentiel au cas $N = 7$. Plutôt que de raisonner sur un *groupe infini discret* — ce qui est bien le cas de $\overline{\Gamma}(7) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ — il préfère construire un groupe fini de la manière suivante :

> Dorénavant, nous ne considérerons plus les substitutions $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ en elles-mêmes, mais en fonction du module 7 et donc nous regarderons comme identiques deux substitutions $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ et $\frac{\alpha'\omega+\beta'}{\gamma'\omega+\delta'}$ lorsque $\alpha \equiv \alpha'$, $\beta \equiv \beta'$, $\gamma \equiv \gamma'$, $\delta \equiv \delta' \pmod 7$ et par suite, nous ne demanderons pas que $\alpha\beta - \gamma\delta = 1$ mais seulement qu'il soit congru à 1 modulo 7. [57]

Il obtient ainsi un groupe fini à 168 éléments, à savoir $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ qu'il note G_{168}. En particulier, $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})/\overline{\Gamma}(7)$. [58] Il s'agit d'un groupe *simple*, autrement dit il n'admet pas de sous-groupe distingué propre. C'est d'ailleurs le groupe fini simple de plus petit cardinal après le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$. Klein étudie les éléments de G_{168} en fonction de leurs classes de conjugaison, ce qui lui permet ensuite de les interpréter géométriquement ; il répertorie également les sous-groupes de G_{168}.

Cela posé, il introduit une fonction η, définie sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ — ou plutôt sur $\mathbb{H}^*$ — qui est invariante par $\overline{\Gamma}(7)$, mais non par un plus grand sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. En effet, il précise que η « se transforme en elle-même [i.e. elle demeure invariante] par toutes les substitutions $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ congrues à l'identité modulo 7 ». Dans ce paragraphe, Klein résout en fait deux problèmes qu'il ne dissocie pas explicitement.

(i) Il décrit la surface de Riemann $X(7)$ associée à η et il détermine son genre. Pour ce faire, il remarque qu'à chaque $z = J(\omega)$ où ω décrit l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}^*$, correspondent au plus 168 valeurs de $\eta(\omega)$, ce que l'on peut retraduire plus rigoureusement par le fait que η prend au plus $(\Gamma(1) : \Gamma(7)) = 168$ valeurs distinctes aux points de la fibre de J au-dessus de z. Les points de ramification de η se situent au-dessus de $J = 0$, 1 et ∞. La classification des éléments de G_{168} permet de calculer l'indice de ramification en chacun de ces trois points. Il

57. *ibid.*, p. 92.

58. Le groupe infini discret $\overline{\Gamma}(7)$ est distingué dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, ce qui permet à l'ensemble quotient $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})/\overline{\Gamma}(7)$ d'hériter d'une structure de groupe.

suffit ensuite d'appliquer la formule de Riemann. Klein en déduit que $X(7)$ est de genre 3. Ce raisonnement appelle deux commentaires :

(a) Klein n'étudie pas G_{168} pour lui-même, mais en fonction des *interprétations géométriques* qu'il est susceptible de recevoir. Il s'agit là d'une constante dans l'œuvre de Klein : il s'appuie sur la théorie des groupes pour autant qu'elle entre en relation avec la détermination de propriétés liées à des objets géométriques.

(b) En outre, son raisonnement s'effectue toujours dans le sens suivant : l'étude *préalable* d'un certain groupe (fini, discret ou continu) nous donne des informations sur l'être géométrique qui lui est associé. Cet argument est déjà vérifié dans le *Programme d'Erlangen*. La description de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ et de ses sous-groupes continus conditionne la classification des propriétés géométriques laissées invariantes par chacun de ces sous-groupes. Par analogie, l'analyse de G_{168} permet de déterminer l'essentiel des propriétés de $X(7)$. Il nous paraît donc essentiel d'insister sur *l'ordre d'exposition des idées* adopté par Klein dans cet article. Dans le premier paragraphe, Klein analyse les éléments de G_{168} pour ensuite calculer dans le § 2 le *genre* de $X(7)$.

(ii) Parallèlement, Klein établit une « relation de dépendance algébrique » entre η et J. Cette « relation de dépendance algébrique » est une équation polynomiale du 168ème degré à coefficients dans $\mathbb{C}(J)$, c'est-à-dire dans le corps des fonctions modulaires, i.e. des fonctions définies sur $\mathbb{H}$ — ou $\mathbb{H}^*$ —, à valeurs dans $\mathbb{C}$ — ou dans la sphère de Riemann — et invariantes par $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Soit $P(\eta, J)$ le polynôme permettant de définir une telle équation. Il est irréductible sur $\mathbb{C}(J)$, comme le veut l'hypothèse de Klein selon laquelle η est invariante par $\overline{\Gamma}(7)$ mais non par un plus grand sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. Il note η_1, η_2, ..., η_{168} les 168 racines de ce polynôme. Soit η_i l'une quelconque de ses racines, étant donné l'irréductibilité de $P(\eta, J)$ sur $\mathbb{C}(J)$, elle n'est pas contenue dans $\mathbb{C}(J)$. De manière équivalente, il s'agit de construire un sur-corps L de $\mathbb{C}(J)$ contenant un élément η_i ayant $P(\eta, J)$ pour polynôme minimal. Le corps L est un corps de rupture de $\mathbb{C}(J)$.

En outre, Klein montre que $\overline{\Gamma}(7)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, comme l'indique l'usage du terme *gleichberechtigt*.[59] Il en déduit que les η_1, η_2, ..., η_{168} sont à même ramification au-dessus de J. Il formule alors l'assertion générale suivante : toutes les fonctions, algébriques par rapport à J, et à même ramification au-dessus de J peuvent se déduire rationnellement les unes des autres.[60] D'où la conséquence suivante : aux 168 racines de $P(\eta, J)$ correspond la même surface de Riemann à laquelle est précisément associée l'extension L de

59. *ibid.*, p. 92.
60. *ibid.*, p. 97.

$\mathbb{C}(J)$. Cela signifie très exactement que L contient toutes les racines de $P(\eta, J)$, i.e. celui-ci se décompose en facteurs du premier degré dans L. Bref, L est un corps de *décomposition* de $P(\eta, J)$. Il s'agit d'une extension normale et séparable — donc galoisienne — de $\mathbb{C}(J)$ de degré 168, dont le *groupe de Galois*[61] est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$. Par suite, L s'identifie au corps des fonctions laissées invariantes par $\overline{\Gamma}(7)$ mais non par un plus grand sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

On notera désormais L par le symbole $\mathbb{C}_{\overline{\Gamma}(7)}$. On associe à un tel corps la courbe modulaire $X(7)$. Le fait que $\mathbb{C}_{\overline{\Gamma}(7)}$ soit une extension galoisienne de $\mathbb{C}(J)$ vient de ce que $\overline{\Gamma}(7)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Pour finir, Klein calcule explicitement le nombre d'automorphismes de $X(7)$ qui s'élève à 168. Il ajoute que cet ensemble d'automorphismes — c'est-à-dire d'applications conformes de $X(7)$ sur elle-même — forme un groupe. Précisons qu'il entend classer de manière systématique les groupes d'automorphismes des surfaces de Riemann de genre $g = 0$, $g = 1$ et $g \geqslant 2$ dans son ouvrage de 1882 consacré à l'étude des fonctions algébriques d'une variable complexe.

Au terme de ce raisonnement, Klein parvient à quatre résultats fondamentaux que l'on peut formuler comme suit :

(i) Le groupe fini $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})/\overline{\Gamma}(7)$ s'identifie à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ qui est de cardinal 168 ;

(ii) La surface $X(7)$, qui est de genre 3, est un revêtement de degré 168 de $X(1)$;

(iii) le corps $\mathbb{C}_{\overline{\Gamma}(7)}$ est une extension de degré 168 de $\mathbb{C}(J)$ — il s'agit d'une extension galoisienne de $\mathbb{C}(J)$ dont le groupe de Galois est isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$;

(iv) le groupe d'automorphismes de la surface de Riemann $X(7)$ est de cardinal 168.

La terminologie qu'il emploie correspond très exactement aux dénominations utilisées par Galois et ses successeurs en vue de construire la théorie de Galois appliquée à des extensions finies du corps des rationnels. On peut légitimement supposer qu'à partir du cas particulier des fonctions laissées invariantes par le sous-groupe de congruence de niveau 7, Klein commence à esquisser les contours d'une théorie de Galois appliquée aux extensions finies du corps des fonctions modulaires.

Klein fait plus dans cet article. Il se place dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et il définit la courbe algébrique C du quatrième degré en coordonnées homogènes $[x : y : z]$ par l'équation

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0.$$

Il s'agit d'une courbe lisse, en particulier il existe une unique tangente en chacun de ses points. Klein détermine explicitement les homographies de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ qui laissent C invariante. Elles forment

61. C'est-à-dire le groupe des automorphismes de L laissant $\mathbb{C}(J)$ invariant.

un sous-groupe fini d'ordre 168 contenu dans $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$. Comme C est lisse, elle peut être munie d'une structure de surface de Riemann. Klein établit un lien remarquable entre cette quartique et la surface modulaire $X(7)$: elles sont *isomorphes*. Ainsi, l'article de 1878/1879 exemplifie le théorème fondamental suivant : *toute surface de Riemann connexe et compacte est isomorphe à une courbe algébrique lisse dans un certain espace projectif complexe*. La condition de compacité est absolument requise : par exemple le demi-plan de Poincaré — qui n'est pas une surface de Riemann compacte — ne satisfait pas à une telle propriété. Klein exhibe *sur un exemple* une relation remarquable entre courbes algébriques lisses complexes et surfaces de Riemann compactes connexes. Il parvient une nouvelle fois à unifier divers domaines des mathématiques à partir de la description d'un cas particulier. Il s'agit là d'un trait commun aux articles que nous venons d'examiner.

Klein généralise les résultats auxquels il est parvenu entre 1875 et 1879 sur les fonctions modulaires dans un article intitulé ≪ Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen ≫. Ce dernier est d'abord publié dans les actes d'un colloque tenu à Munich en 1879, avant d'être réimprimé dans le tome 17 des *Mathematische Annalen*. Voici l'idée directrice de Klein :

> Dans une série de travaux qui ont été publiés dans les tomes 14 et 15 des *Math. Ann.*, je suis progressivement parvenu à une théorie générale et essentiellement nouvelle des fonctions modulaires elliptiques. Tout en développant dans ce qui suit quelques idées relatives à cette conception, j'ai plus particulièrement l'intention de montrer que les différentes formes que l'on a données aux équations modulaires et qui, jusqu'ici, se trouvaient dans une sorte de rhapsodie confuse [verwirrender Mannigfaltigkeit], sont soumises en tant que cas particuliers à un principe simple et général. [62]

Klein constate que la théorie des fonctions et des équations modulaires manque d'unité. Il est pour ainsi dire nécessaire de la soumettre à un même principe. Cet argument, qui justifie le titre de l'article, fait écho aux remarques liminaires du *Programme d'Erlangen*. Ce parallèle peut d'abord surprendre puisqu'il s'agit là de deux textes qui n'appartiennent pas au même registre et dont le contenu mathématique est différent. Souvenons-nous pourtant qu'au début du *Programme d'Erlangen*, Klein déplorait la dispersion de la géométrie dans des domaines éclatés, il énonçait alors un principe directeur, fondé sur le concept de groupe de transformations, qui permettrait de les unifier dans une même théorie. Ainsi, les questions

62. F. Klein, ≪ Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen ≫, *Mathematische Annalen*, **17**, in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. II, *op. cit.*, p. 169.

d'*unité* commandent les réflexions de Klein respectivement sur *les* géométries (*Programme d'Erlangen*, 1872) et sur les fonctions modulaires (1879-1881).

Cela posé, résumons rapidement les résultats auxquels il parvient dans ce court article.

(a) Il s'agit tout d'abord d'établir un analogue de la théorie de Galois dans le cas des fonctions modulaires. Pour ce faire, il importe d'introduire plusieurs propriétés et principes de classification [Klassifikationsprinzipien]. Klein se restreint aux sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, il leur impose d'être distingués dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ et il considère pour l'essentiel les sous-groupes de congruence de niveau N de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, avec N premier. On lui doit d'ailleurs cette terminologie. Dans notre commentaire de l'article précédent, nous avons montré que

$$\overline{\Gamma}(7) = \left\{ \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \quad \middle| \quad \alpha \equiv 1, \beta \equiv 0, \gamma \equiv 0, \delta \equiv 1 \pmod 7 \right\}$$

est un sous-groupe distingué et d'indice fini dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$. De telles propriétés se reflètent dans le corps des fonctions invariantes par ce même sous-groupe de la manière suivante : $\mathbb{C}_{\overline{\Gamma}(7)}$ est une extension galoisienne de $\mathbb{C}(J)$ dont le degré est égal à l'indice de $\overline{\Gamma}(7)$ par rapport à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$.

(b) Klein propose ensuite de constituer une théorie des équations modulaires pour le nombre premier N, fondée sur l'usage systématique de l'invariant modulaire J. Il montre en particulier que le groupe de Galois d'une telle équation correspond au groupe de Galois de $\mathbb{C}_{\overline{\Gamma}(N)}/\mathbb{C}(J)$ où $\mathbb{C}_{\overline{\Gamma}(N)}$ est le corps des fonctions laissées invariantes par le sous-groupe de congruence de niveau N. En particulier $\mathbb{C}_{\overline{\Gamma}(N)}$ est le corps de décomposition de l'équation modulaire pour le nombre premier N.

Ainsi, la théorie systématique des fonctions modulaires à laquelle parvient Klein constitue un analogue de la théorie de Galois algébrique pour une classe particulière de corps de fonctions méromorphes d'une variable. Elle exemplifie le credo qui oriente l'essentiel de ses recherches au cours des années 1870-1880 : faire converger les idées de Galois et de Riemann, comme le souligne avec justesse Weyl dans l'article de 1930 intitulé « Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart ». En outre, Klein formule une théorie générale des fonctions modulaires, après avoir étudié en détail les deux cas pour les nombres premiers $N = 5$ et $N = 7$. Ce mode d'exposition, qui va donc du particulier au général, et que l'on retrouve notamment dans les cours dispensés par Hilbert à Göttingen, sera très clairement repris par Weyl dans sa série d'articles consacrés aux représentations des groupes de Lie complexes semi-simples en 1925-1926.

2.2.4 Quelle conception de l'unité des mathématiques et de l'intuition chez Klein ?

L'unité des mathématiques ne correspond pas à un but que l'on pourrait atteindre une fois pour toutes, il s'agit d'un horizon régulateur auquel des mathématiciens tels que Klein, Hilbert ou encore Weyl assignent des sens différents et qui, dans le même temps, conditionne leur pratique des mathématiques. Nous empruntons l'expression d'idée régulatrice à Kant. Il introduit cette notion dans l'appendice à la « Dialectique transcendantale » pour rendre justement raison de l'unité systématique des connaissances établies par l'*entendement*. Celui-ci nous permet d'élaborer des régularités auxquelles sont assujettis les phénomènes, par exemple les lois de la nature dans le domaine de la physique ; mais il appartient à la *raison* dans son usage théorique de relier ces règles. Kant affirme que l'unité de nos connaissances ne saurait être postulée de manière dogmatique : elle ne dérive pas d'un principe constitutif établi une fois pour toutes ; elle s'apparente davantage à un *focus imaginarius*, c'est-à-dire un point de convergence auquel on ne peut pas parvenir de manière effective, mais dont on peut seulement s'approcher de manière asymptotique. Kant parle ainsi d'un usage *régulateur* de la raison. Il s'agit de

> diriger l'entendement vers un certain but dans la perspective duquel les lignes directrices de toutes ses règles convergent en un point qui, bien qu'il ne soit qu'une idée (focus imaginarius), c'est-à-dire un point d'où les concepts de l'entendement ne partent pas réellement, puisqu'il se situe tout à fait en dehors des limites de l'expérience possible, sert cependant à leur fournir la plus grande unité avec la plus grande extension. [63]

L'unité de nos connaissances à laquelle la raison peut prétendre sur un plan théorique n'est donc jamais réalisée complètement. Une telle unité n'est pas « donnée » nous dit Kant, elle est « projetée » à titre de problème que l'on ne peut pas résoudre de manière satisfaisante, mais qui oriente pourtant nos recherches. En outre, Kant insiste sur le fait qu'une telle unité ne s'obtient pas par *dérivation* ou déduction de propositions à partir d'un petit nombre de principes décrétés dogmatiquement, elle vient après coup et elle repose sur un processus de *convergence* entre des connaissances d'abord établies séparément par notre entendement. Par ailleurs, on peut distinguer deux types d'unité à la suite de Kant : une unité *distributive*, qui consiste à *ranger* chaque connaissance dans des domaines ou des disciplines aux contours flous et changeants et une unité *organisatrice* : il s'agit alors de *relier* de manière effective des connaissances ou des concepts initialement considérés indépendamment les uns des autres.

63. E. Kant, *Critique de la Raison pure*, trad. Barni, Paris, éd. Gallimard 1980, p. 554, [A 644 / B 672].

Pour Kant, le processus d'unification des concepts et des règles fournis par notre entendement repose sur trois principes : (1) le principe de l'homogénéité qui consiste à assujettir une diversité de concepts à un même genre supérieur ; (2) le principe de la variété dans l'homogénéité qui revient à décliner les espèces issues du même genre ; (3) la « la loi de l'affinité de tous les concepts, c'est-à-dire la loi qui ordonne de passer continuellement de chaque espèce à chaque autre par l'acroissement graduel de la diversité ».[64]

Pour qu'il y ait unité des connaissances, il faut qu'il y ait ces trois principes en même temps. En effet, imaginons que nous n'ayons que le premier principe, alors il ne serait pas question d'*unité*, mais d'*uniformité* ; nous aurions des genres ou des concepts très généraux, mais ils demeureraient vides. C'est exactement ce qui se passe lorsque nous avons les définitions abstraites des principales structures algébriques en notre possession. Nous pouvons bien comprendre la signification des axiomes qui les régissent, nous ne savons pas pourquoi il faut ajouter ou retrancher tel axiome plutôt que tel autre, parce que nous ignorons à quoi ces concepts se rapportent exactement. Ces définitions sont sans nuance et éthérées. Voilà pourquoi nous parlons d'uniformité et non pas d'unité. À l'extrême inverse, si nous avions une variété d'objets ou d'espèces sans un principe d'homogénéité sous-jacent, il ne serait plus question d'*unité* mais de *diversité*. Quant à la « loi d'affinité », elle s'impose naturellement lorsque l'on passe d'un concept très général à des concepts spécifiques.

Les réflexions menées par Kant dans son appendice à la « Dialectique transcendantale » sont très opératoires pour penser l'unité des mathématiques chez Klein. En effet, à aucun moment Klein ne prétend être parvenu à une unité achevée en mathématiques, elle n'est guère qu'un horizon régulateur à ses yeux. Dans le *Programme d'Erlangen* comme dans ses travaux sur l'icosaèdre, il met en œuvre des processus d'unification tout à fait spécifiques dont il convient de rendre raison. En particulier, il ne se satisfait pas d'une unité *distributive* en mathématiques. Ainsi, au début du *Programme d'Erlangen*, il déplore que la géométrie se soit morcelée en des théories et des disciplines cloisonnées. Il entend parvenir à une unité *organisatrice* en montrant que la plupart des propriétés géométriques connues peuvent être définies par leur invariance sous l'action d'un certain sous-groupe continu de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ convenablement choisi. Il s'agit là du principe directeur du *Programme d'Erlangen*. Klein reconnaît que ce principe ne vient qu'après coup :

> En entreprenant ici l'établissement d'un tel principe, nous ne développons assurément aucune pensée particulièrement neuve : nous ne faisons que donner une expression claire et nette à ce que beaucoup ont pensé d'une façon plus ou moins précise. Toutefois la publication de considérations

64. *ibid.*, [A 658, B 686].

> destinées à établir un tel lien a paru d'autant plus justifié que la Géométrie, bien qu'elle soit une par essence, ne s'est que trop scindée, en raison du rapide développement qu'elle a pris dans ces derniers temps, en des disciplines presque séparées, dont chacune continue de se développer presque indépendamment des autres. [65]

Dans le *Programme d'Erlangen*, Klein déduit en particulier les géométries métriques euclidienne et non-euclidiennes à partir d'un même cadre théorique, à savoir celui de la géométrie projective. Il met ce point en exergue lorsqu'il affirme à la suite de Cayley que la « méthode projective embrasse maintenant la géométrie tout entière ». [66]

Au cours de ses travaux sur l'icosaèdre, il se réfère continuellement à un même objet géométrique, à savoir l'icosaèdre, qu'il considère en fonction de différents points de vue. L'icosaèdre ou, plus exactement, le groupe des déplacements qui le laisse invariant, constitue un point fixe à partir duquel il fait converger des connaissances issues de la théorie des invariants, de la théorie des équations algébriques, de la théorie des surfaces de Riemann, mais aussi de la théorie des fonctions elliptiques et modulaires. Ses travaux se situent ainsi à l'intersection entre différents domaines théoriques et différents champs disciplinaires. L'enjeu n'est plus le même que dans le *Programme d'Erlangen* : non pas unifier le domaine de la géométrie à partir d'un principe général d'invariance, mais faire apparaître *in concreto* les points de recoupement entre divers cadres théoriques à partir de l'étude d'un objet et d'un problème particuliers, à savoir l'icosaèdre et la résolution des équations générales du cinquième degré.

Trois difficultés méritent d'être résolues. (1) Qu'est-ce que Klein entend unifier ? S'agit-il de hiérarchiser des concepts, d'harmoniser des méthodes ou, tout simplement, de faire converger des éléments de connaissance ? (2) Quels sont les outils ou les instruments qui lui servent de pôles unificateurs, étant entendu qu'il ne peut y avoir de savoir organisé sans *principes organisateurs* ? (3) À quelle échelle l'unité des mathématiques se joue-t-elle chez Klein ? Se rapporte-t-elle à des objets spécifiques ou davantage à des entités indéterminées qui renvoient à des concepts abstraitement définis ?

(a) La première question ne peut pas recevoir les mêmes éléments de réponse selon que l'on se réfère au *Programme d'Erlangen* ou aux articles de Klein sur l'icosaèdre. Ainsi, dans le *Programme d'Erlangen*, il s'agit d'harmoniser les méthodes en géométrie et de regrouper des domaines dispersés. En revanche, dans ses leçons sur l'icosaèdre, Klein entend faire converger des éléments de connaissance issus de différents cadres théoriques à partir de la référence

65. F. Klein, *Considérations comparatives sur les Recherches géométriques modernes*, 1872, trad. Padé, *Ann. Sc. de l'ENS, 3ème série, tome VIII*, 1891, p. 88.
66. *ibid.*, p. 88.

initiale à un même objet d'étude.

(b) Abordons la seconde difficulté. Dans les travaux de Klein publiés au cours des années 1870 et 1880, on peut repérer deux pôles unificateurs :

(i) la théorie des groupes de transformations, qu'ils soient discrets ou continus, en lien plus ou moins direct avec la théorie de Galois ;

(ii) le recours à des représentations géométriques, c'est-à-dire intuitivement appréhendables.

Pour illustrer le premier point, rappelons que le *Programme d'Erlangen* est construit sur la base d'une classification des propriétés géométriques laissées invariantes par un *sous-groupe continu de transformations* de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$. Dans ses remarques finales, Klein insiste sur la similitude entre la *classification des géométries* qu'il a opérée et la *théorie de Galois*.[67] Entre 1875 et 1879, Klein élabore un analogue de la théorie de Galois dans le cas des fonctions modulaires. Preuve que la correspondance de Galois joue un rôle heuristique tout à fait fondamental dans ses travaux aussi bien en géométrie que dans l'étude des fonctions modulaires. Dans ses leçons sur le développement des mathématiques au XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, Klein insiste sur cette fonction unificatrice de la théorie des groupes dans diverses branches des mathématiques. On peut lire en effet :

> [La théorie des groupes] intervient en tant que principe d'organisation et de clarification dans les domaines les plus variés. Nous l'avons abordée non seulement dans la théorie des équations, mais également à propos des fonctions elliptiques (...) et pour différencier les géométries projective, affine et métrique ainsi que la théorie des invariants associée à chacune d'elles.[68]

Venons-en au second point. Klein accorde une large place aux représentations *intuitives* et géométriques dans le *Programme d'Erlangen* (1872), dans ses leçons sur l'icosaèdre (1884) ou encore dans son ouvrage sur les surfaces de Riemann (1882). Il entend alors se démarquer des divers projets d'*arithmétisation* ou d'*algébrisation* des mathématiques qui semblent prédominer au cours de la seconde moitié du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle. Nous songeons notamment aux travaux de Weierstrass en analyse et de Dedekind / Weber dans l'étude des fonctions algébriques d'une variable complexe.

---

67. *ibid.*, remarques finales p. 191 : « Dans la théorie de Galois comme ici, tout l'intérêt réside dans les groupes de transformations. Mais les objets auxquels se rapportent les transformations sont bien diff'erents. Là on a affaire à un nombre limité d'éléments distincts, ici à un nombre indéfini d'éléments d'un ensemble continu ; mais on peut, par l'identité de la notion de groupe, pousser plus loin la comparaison (...) ».

68. F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, *op. cit.*, Tome I, p. 334.

Pour comprendre l'importance des représentations intuitives dans l'œuvre de Klein, revenons sur la note III qui se trouve à la fin du *Programme d'Erlangen.*[69] Klein assigne deux fonctions différentes à l'intuition de l'espace. Celle-ci peut d'abord être utilisée pour représenter des objets mathématiques particuliers. Elle donne alors une prise sur les concepts que nous manipulons. Sans intuitions, ces mêmes concepts seraient vides. L'ouvrage de 1882 sur les surfaces de Riemann illustre parfaitement ce point : pour comprendre le comportement d'une fonction définie sur une surface de Riemann compacte et connexe, Klein se donne intuitivement une surface métallique et il étudie la manière dont le courant électrique se distribue sur elle. Cet exemple montre que Klein assigne un rôle pédagogique et heuristique tout à fait essentiel à de telles représentations sensibles. À ses yeux, elles servent de point d'appui pour produire des connaissances nouvelles.

Mais « l'intuition de l'espace » peut également valoir comme fondement de la géométrie en un sens très spécifique.[70] Klein s'appuie alors sur deux passages de la *Critique de la raison pure* de Kant à savoir l'« Esthétique transcendantale » et le paragraphe de l'« Analytique transcendantale » consacré aux axiomes de l'intuition :

> Mais c'est tout autre chose s'il s'agit de l'importance de l'intuition de l'espace en général. Je la considère comme subsistant par elle-même. Il existe une Géométrie proprement dite qui ne peut pas, comme les recherches qui nous ont occupé, n'être qu'une forme sensible de considérations abstraites. Il y faut concevoir les figures de l'espace dans la pleine vérité de leur forme et (ce qui constitue le côté mathématique) apercevoir leur relations comme des conséquences évidentes des postulats de l'intuition de l'espace. Pour cette géométrie, un modèle, qu'il soit exécuté et examiné ou seulement figuré avec force, n'est pas seulement un moyen pour atteindre un but, mais la chose elle-même.[71]

Dans ce passage, Klein n'évoque pas la géométrie comme discipline, il ne se réfère pas non plus à ses propres considérations sur les géométries qu'il juge abstraites. En fait, l'expression « une géométrie proprement dite » renvoie au cadre géométrique censé correspondre à la réalité phénoménale. Cette géométrie est fondée à la fois sur l'intuition de l'espace et sur les « postulats de l'intuition ». Klein reste ici très attaché à la philosophie kantienne : la géométrie qui s'accorde avec les conditions de l'expérience est *fondée* sur l'intuition de l'espace. Cette dernière peut donc valoir soit comme « méthode » pour appréhender des

69. F. Klein, « Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes », *op. cit.*, p. 193-194.

70. l'expression « intuition de l'espace » est ambiguë. Elle n'apparaît jamais dans la *Critique de la raison pure* pour la raison suivante : l'espace n'est pas l'objet d'une représentation intuitive mais une forme qui conditionne nos représentations intuitives.

71. F. Klein, *op. cit.*, p. 194.

concepts abstraits, soit comme fondement lorsqu'il s'agit d'étudier la géométrie qui permet de mathématiser la réalité phénoménale.

D'une manière générale, les représentations intuitives sont nécessaires aux yeux de Klein pour produire des connaissances nouvelles en mathématiques. Dans une série de conférences à caractère épistémologique et pédagogique (1895), il affine cet argument. Il distingue *l'intuition naïve*, qui fait obstacle à la rigueur dans les raisonnements, et l'*intuition raffinée* qui leur garantit une effectivité. Il est question d'intuition raffinée à partir du moment où certaines ambivalences conceptuelles sont écartées. Klein songe en particulier à la distinction nette entre continuité et dérivabilité en analyse. Parallèlement, il s'inscrit en faux contre les diverses tentatives d'arithmétisation des mathématiques incarnées par Weierstrass ou encore Peano : si elles n'étaient pas accompagnées de représentations intuitives, les mathématiques perdraient toute substance. De plus, l'intuition constitue aux yeux de Klein un élément indispensable dans le processus d'invention de concepts et de théories mathématiques. Cet argument s'étend bien au-delà de la géométrie. Pour confirmer ce point, nous pouvons citer à la suite de Weyl ce passage tiré des leçons sur le développement des mathématiques au XIX^{e} siècle de Klein :

> Il est certain que la pierre angulaire de toute théorie mathématique consiste dans les démonstrations. En y renonçant, les mathématiques se condamneraient elles-mêmes. Cependant ce sera toujours le secret de la productivité d'un génie que de dénicher de nouveaux problèmes et de définir des résultats et des connexions nouvelles et inattendues. À défaut de découvrir de nouveaux points de vue et de nouveaux buts, les mathématiques s'épuiseraient bientôt dans la précision du raisonnement logique et commenceraient à stagner par manque de matière. Ainsi d'une certaine façon les mathématiques ont avancé surtout grâce à ceux dont la force réside dans l'intuition plutôt que dans la rigueur logique. [72]

Les représentations intuitives et géométriques constituent donc un pôle unificateur de premier plan aux yeux de Klein, dans la mesure où elles sont un instrument de recherche et de découverte tout à fait essentiel. Elles accompagnent constamment ses investigations sur des groupes de transformations discrets ou continus. En revanche, Klein ne raisonne jamais sur des groupes abstraits au sens où ils seraient définis par voie axiomatique indépendamment de la nature des objets auxquels ils renvoient : ce mode d'investigation ne permet pas, selon lui, de s'appuyer sur des intuitions de type géométrique. Il n'en reste pas moins que Klein considère deux groupes isomorphes comme les représentants d'un même groupe « idéal », preuve que ses travaux font intervenir une « intuition de l'abstrait ».

72. Cité par Weyl in « Comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques », *op. cit.*, p. 273.

(c) Dernier problème à résoudre : à quelle échelle Klein envisage-t-il l'unité des mathématiques ? À s'en tenir au *Programme d'Erlangen*, nous pourrions penser que Klein considère l'unité des mathématiques à grande échelle, puisqu'il énonce un principe général d'invariance qui doit valoir pour une diversité de géométries. Mais, à y regarder de plus près, il se réfère exclusivement à des *groupes de transformations* auxquels correspondent des propriétés géométriques connues. Il n'a pas recours à l'axiomatisation entendue comme formulation de définitions implicites de concepts, i.e. indépendamment de la nature des objets auxquels ils sont censés s'appliquer. Bref, le principe qu'il formule dans le *Programme d'Erlangen* ne renvoie pas à des situations purement abstraites. Les articles consacrés à l'icosaèdre montrent pour leur part que Klein tente avant tout d'unifier les mathématiques à petite échelle, en prenant pour point d'appui des problèmes et des objets particuliers. Il s'agit là pour Weyl de l'un des traits caractéristiques du « style » de mathématiques auquel souscrit Klein. En effet, dans « Comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques », Weyl fait la remarque suivante :

> À l'époque où Klein produisait, et qui était terminée quand j'entrai à l'université en 1904, la perception de connexions internes entre divers domaines était le trait le plus caractéristique de ses travaux. Son livre sur l'icosaèdre, où géométrie, algèbre, théorie des fonctions et théorie des groupes se fondent en une harmonie polyphonique, est typique de sa manière. En conséquence, il n'aimait pas qu'on systématise en une axiomatisation rigoureuse sa compréhension des choses ; même en analysant, il ne voulait pas perdre un instant de vue le tout. [73]

Bien qu'il existe au moins deux pôles unificateurs dans les travaux de Klein — la théorie des groupes et les représentations géométriques —, celui-ci s'interdit de privilégier un domaine des mathématiques au détriment des autres. Il envisage l'unité des mathématiques par voie synthétique, en montrant comment des éléments de connaissance issus de différents cadres théoriques peuvent être considérés d'un seul tenant pour résoudre un problème particulier. Comme le souligne Weyl, « le principal organe de la productivité de Klein était la perception intuitive des connexions et des rapports entre des domaines séparés ». [74] Klein rejette l'axiomatisation pour une double raison : elle reposerait sur une analyse des concepts et elle n'aurait donc pas le caractère synthétique voire synoptique que l'on peut prêter à la « perception intuitive » évoquée par Weyl ; de plus, elle nous éloignerait d'une saisie directe des objets et des problèmes auxquels le mathématicien doit se mesurer.

Ainsi, les travaux de Klein sur l'icosaèdre nous permettent de prendre la mesure de sa conception de l'intuition et de l'unité des mathématiques. Les méthodes qu'il emploie et son

73. *ibid.*, p. 274.
74. *ibid.*, p. 274.

épistémologie implicite ont eu une incidence directe sur Weyl. Deux arguments permettent de justifier cette hypothèse. À l'instar de Klein, Weyl ne privilégie pas un domaine des mathématiques au détriment des autres. Il résout des problèmes en combinant des éléments de connaissance qui relèvent de différents cadres théoriques. Plus radicalement, il confronte des méthodes qui ne sont pas *a priori* conciliables. L'ouvrage de 1913 sur les surfaces de Riemann constitue ici un bon exemple, puisque Weyl fait la synthèse entre les points de vue de Riemann et de Weierstrass en analyse complexe. Nous avons remarqué que Weyl utilise la notion d'*harmonie polyphonique* pour qualifier l'unité des mathématiques qui se dégage de l'œuvre de Klein. Il nous semble qu'une telle expression conviendrait parfaitement pour caractériser en retour les travaux de Weyl sur les surfaces de Riemann ou sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. En effet, dans *die Idee der Riemannschen Fläche*, il est bien question d'une « harmonie polyphonique », puisque Weyl s'approprie le processus de prolongement analytique dû à Weierstrass pour construire des surfaces de Riemann. De même dans ses articles consacrés aux représentations des groupes de Lie complexes semi-simples, Weyl combine la méthode algébrique et infinitésimale de Cartan à la méthode intégrale et transcendante de Hurwitz.

Dans son histoire des mathématiques au XIX^{e} siècle, Klein insiste sur le fait que les mathématiques perdraient en contenu et en effectivité si l'on réduisait les raisonnements qu'elles mettent en œuvre à de pures inférences logiques détachées de tout support intuitif. Cet argument est connu de Weyl et il le réutilise en 1931 pour critiquer les méthodes héritées de l'algèbre abstraite qui, à ses yeux, risquent d'évider les mathématiques de leur substance parce qu'elles semblent également mettre de côté toute visée intuitive.

Ainsi, Klein et Weyl partagent une même conception de l'unité et du rôle de l'intuition en mathématiques. Il existe pourtant un point de désaccord entre ces deux mathématiciens au sujet de la méthode axiomatique. En effet, dans son ouvrage de 1882 sur les fonctions algébriques d'une variable complexe, Klein ne fait qu'expliciter de manière purement intuitive la notion de surface de Riemann. Plus radicalement, Klein rejette catégoriquement l'usage des procédures axiomatiques en mathématiques. Ce point n'a pas échappé à Weyl. En 1953, ce dernier rapporte l'anecdote suivante qui, bien qu'elle ait seulement valeur de témoignage, n'en est pas moins significative :

> Je me souviens qu'un jour en conversation [Klein] tint le propos suivant : « Supposez que j'aie résolu un problème, eh bien j'aurai franchi une haie ou sauté un fossé. Alors nos axiomaticiens arrivent en demandant : pouvez-vous encore le faire avec une chaise attachée à votre jambe ? »[75]

75. *ibid.*, p. 274-275.

Au cours du § 7 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl propose une définition axiomatisée des surfaces de Riemann qu'il conçoit abstraitement. Pour Weyl, la méthode axiomatique est donc tout à fait essentielle pour clarifier des concepts et les saisir dans des situations générales et abstraites, mais aussi pour comprendre les relations qu'ils entretiennent avec d'autres notions. C'est ainsi qu'en 1913, Weyl considère explicitement les surfaces de Riemann comme des *variétés* analytiques complexes de dimension 1. Autrement dit, alors que Klein envisage la méthode axiomatique comme un obstacle à la recherche en mathématiques, Weyl la regarde dès 1913 comme un outil nécessaire de clarification et de généralisation. Cependant, Weyl n'ira jamais jusqu'à considérer l'axiomatisation comme un instrument de découverte à proprement parler, c'est là ce qui le distingue de Hilbert et, plus tardivement, d'Artin et Noether notamment. Voilà pourquoi on peut dire que dès 1913, Weyl entend concilier les méthodes de Klein et de Hilbert en mathématiques. Il emprunte à Klein l'idée selon laquelle l'unité des mathématiques prend la forme d'une harmonie polyphonique guidée par des représentations intuitives ; dans le même temps, il s'approprie la méthode axiomatique de Hilbert parce qu'elle garantit clarté et généralité. Précisément, la méthode axiomatique constitue aux yeux de Hilbert non seulement un élément heuristique pour être au jour de nouvelles connaissances, mais surtout *le* principe organisateur et unificateur des mathématiques.

2.3 Klein 1882 : une théorie systématique des surfaces de Riemann

Dans les articles de 1876 à 1879 que nous avons étudiés, Klein ne traite pas des surfaces de Riemann pour elles-mêmes, il ne considère que celles que l'on peut associer aux corps des fonctions modulaires. Si l'on en croit l'introduction à son ouvrage intitulé *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* publié en 1882, il a régulièrement donné des leçons sur les surfaces de Riemann à côté de ses travaux de recherche sur les fonctions modulaires. Plus précisément, cet ouvrage est issu d'un cours qu'il a dispensé lors du semestre d'hiver 1880 / 1881 et le semestre d'été 1881 à Leipzig. Il s'agit donc pour lui de synthétiser des résultats théoriques à des fins pédagogiques. Ainsi, l'ouvrage de 1882 n'appartient pas au même registre que les textes que nous avons précédemment commentés. Le principal motif de Klein consiste à proposer une théorie *systématique* des fonctions algébriques d'une variable complexe et des surfaces auxquelles elles sont attachées, au lieu de se perdre dans une rhapsodie de particularités sans lien les unes avec les autres. Klein défend deux

hypothèses fortes dans cet ouvrage :

(1) À la différence de Riemann, il ne considère pas nécessairement les surfaces de Riemann comme des surfaces à plusieurs feuillets au-dessus du plan complexe. Il les regarde comme des surfaces courbes *quelconques* sur lesquelles peuvent être définies des fonctions. [76] Il s'agit essentiellement pour lui de *classer* les surfaces de Riemann *compactes connexes*, ce qui permet de mesurer assez le degré d'abstraction auquel il tend dans cet ouvrage, malgré le recours à des représentations intuitives. Ce point n'a pas échappé à Weyl. Ce dernier montre qu'en 1882, Klein franchit une étape fondamentale en vue de saisir les surfaces de Riemann abstraitement, quand bien même il ne formalise pas rigoureusement le concept de ≪ surface de Riemann ≫ par voie axiomatique. [77]

(2) Bien que le point de vue adopté par Klein soit abstrait, il n'en laisse pas moins d'être articulé à une appréhension intuitive — à la fois géométrique et physique — des surfaces de Riemann. En particulier, Klein analyse la manière dont se comporte un courant électrique sur ces surfaces, ce que l'on peut expliciter comme suit dans le cas d'un ouvert simplement connexe à bord du plan complexe :

> Imaginons que son bord soit un fil parfaitement conducteur. Si on branche l'un des pôles d'une batterie en un point de l'ouvert et l'autre pôle en un point du bord, on obtient un écoulement des charges dans l'ouvert. Cet écoulement se fait en suivant les pentes de gradient d'un potentiel. On voit alors que ce potentiel a une singularité logarithmique là où est branchée la batterie à l'intérieur du domaine et est constant sur le bord (supposé parfaitement conducteur). Il s'agit donc d'une fonction de Green de l'ouvert. [78] On a ainsi ≪ prouvé ≫ expérimentalement le théorème de représentation conforme. [79]

76. F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. II, *op. cit.*, p. 502.

77. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. 35 : ≪ Diese Auffassung des Begriffs der Riemannschen Fläche, in anschaulicher Form zuerst von F. Klein in seiner Schrift Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale ≫) entwickelt, ist allgemeiner als diejenige, deren sich Riemann selbst in seinen grundlegenden Arbeiten über die Theorie der analytischen Funktionen bedient ≫. Pour la traduction en anglais, voir en particulier H. Weyl, *The Concept of a Riemann Surface*, *op. cit.*, p. 33 : ≪ This [abstract] formulation of the concept of a Riemann surface, first developped in intuitive form by F. Klein in his monograph *Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* is more general than the formulation which Riemann himself used in his fundamental work on the theory of analytic functions ≫.

78. Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, z_0 un point fixé dans Ω, une fonction de Green pour Ω est une fonction $u : \Omega\backslash\{z_0\} \to \mathbb{R}$ telle que

1. u est harmonique sur $\Omega\backslash\{z_0\}$,
2. La fonction $z \in \Omega\backslash\{z_0\} \mapsto u(z) + \log|z - z_0|$ s'étend en z_0 en une fonction harmonique,
3. $u(z)$ tend vers 0, lorsque z tend vers le bord de Ω.

79. Collectif sous le pseudonyme Henri Paul de Saint-Gervais, *Uniformisation des surfaces de Riemann*,

Le théorème de représentation conforme, dont la validité est alors mise en suspens en raison des objections de Weierstrass à l'encontre du principe de Dirichlet, est ainsi *vérifié* à l'aide d'un support intuitif emprunté à la physique. Dans son ouvrage, Klein généralise cette démarche à toute surface de Riemann compacte connexe. Comme il le dit lui-même : « je n'ai pas hésité à utiliser ces intuitions physiques tout simplement comme point de départ à mes représentations ». [80] L'expression « point de départ » nous indique qu'il assigne clairement un rôle heuristique à l'intuition dans la constitution d'une théorie mathématique — il parlera d'ailleurs quelques lignes plus loin d'élément heuristique de la méthode [das heuristische Element der Methode], ce qui confirme assez notre hypothèse d'interprétation. Autrement dit, Klein ne se contente pas d'utiliser ce type de représentations à des fins pédagogiques, il s'agit bien de construire une théorie à partir d'intuitions qu'il emprunte aussi bien à la géométrie qu'à la physique. Klein juge ce recours à « l'intuition physique » conforme à l'esprit des travaux de Riemann. Il formule à ce propos l'hypothèse de lecture suivante : en analyse complexe, Riemann serait également parti de problèmes physiques — dérivant en particulier de la théorie du potentiel — avant de les dissimuler derrière un principe dont il tient les interprétations physiques pour implicites, en l'occurrence le principe de Dirichlet. [81] Nous avons justement montré dans le premier chapitre de cette partie que Klein projette sur Riemann une manière d'envisager le rapport entre mathématiques et physique qui lui appartient en propre.

Les sources utilisées par Klein dans son ouvrage sur les surfaces de Riemann sont très diverses. Concernant la théorie des fonctions d'une variable complexe, il s'appuie principalement sur la *Dissertation* (1851), la *Théorie des fonctions abéliennes* (1857) de Riemann et les *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale* de C. Neumann (1865). Pour classer les surfaces de Riemann compactes connexes du point de vue de leur seule structure topologique, Klein se fonde sur l'article de Jordan intitulé « Sur la déformation des surfaces » (1866). En outre, Klein invoque à plusieurs reprises ses travaux sur l'icosaèdre et sur les fonctions modulaires dans lesquels il investit effectivement certains aspects de la théorie des surfaces de Riemann. [82] Preuve que ses recherches sur les fonctions modulaires et ses enseignements sur les surfaces de Riemann ne sont pas cloisonnés. Enfin, il se réfère à une série de travaux en physique et en physique mathématique consacrés à l'étude des courants électriques sur des surfaces conductrices. Il invoque notamment un article de Kirchhoff inti-

op. cit., p. 114.

80. F. Klein, *op. cit.*, p. 502.

81. *ibid.*, p. 502.

82. *ibid.*, p. 522, note 20 ou encore p. 556, note 45.

tulé « Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene » (1845), un article de Helmholtz qui a pour titre « Über einige Gesetze der Verteilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern » (1853) ainsi que le *Treatrise on Electricity and Magnetism* de Maxwell (1873). Klein entend faire converger des sources qui relèvent aussi bien des mathématiques que de la physique mathématique afin de renforcer son hypothèse selon laquelle la théorie des fonctions d'une variable complexe et des surfaces de Riemann aurait pour origine une intuition physique qui lui confèrerait en retour toute son effectivité.

Dans la première partie de son ouvrage, Klein montre comment les fonctions d'une variable complexe peuvent être interprétées comme des courants stationnaires dans le plan. Il étend ensuite son raisonnement à la sphère de Riemann et au corps des fonctions rationnelles qui est associé à elle. Dans la deuxième partie, Klein aborde la classification des surfaces de Riemann compactes connexes en général ; il exemplifie notamment cette classification dans le cas des surfaces de genre 1. Dans la troisième partie, il tire les conséquences de cette théorie : il définit précisément l'espace des modules que Riemann avait abordé dans le § 12 de sa *Théorie des fonctions abéliennes*, de plus il entend déterminer le nombre d'automorphismes qu'une surface de Riemann de genre prescrit peut admettre et il revient sur la notion d'application conforme entre surfaces de Riemann.

Notre but n'est pas de commenter cet ouvrage *in extenso*. Nous nous proposons tout d'abord de revenir sur les emprunts de Klein à Maxwell. Nous montrerons ensuite comment Klein explicite le lien entre la théorie des surfaces courbes et la théorie des surfaces de Riemann. Enfin, nous insisterons sur le niveau de généralité auquel aboutit Klein dans l'étude des surfaces compactes connexes et des fonctions auxquelles elles sont associées. Nous reviendrons sur l'exemple des surfaces de genre 1 pour saisir concrètement les étapes de son raisonnement.

2.3.1 Klein et Maxwell

Au début de son ouvrage de 1882, Klein introduit une interprétation physique [physikalische Deutung] pour décrire le comportement des fonctions d'une variable complexe. Pour ce faire, il se réfère à l'étude de courants stationnaires [stationäre Strömungen] sur des surfaces métalliques et il montre dans quelle mesure ses arguments prolongent le *Treatrise on Electricity and Magnetism* de Maxwell (1873).[83] Expliquons pourquoi Klein utilise cette référence. Maxwell se donne pour but de traduire les résultats expérimentaux obtenus par

83. *ibid.*, p. 506, note 10.

Faraday dans l'étude des champs électrique et magnétique à l'aide d'un cadre mathématique rigoureux, comme en témoigne le passage suivant tiré de la préface à la première édition du *Treatrise* :

> Dans ce traité, je me propose de décrire les plus importants de ces phénomènes, de montrer comment on peut les soumettre à la mesure et de rechercher les relations mathématiques qui existent entre les quantités mesurées. [84]

À la différence de Faraday, qui accorde une large place aux observations pour rendre raison du concept de *champ* qu'il a nouvellement introduit, Maxwell met en avant la forme mathématique sous-jacente à la théorie électromagnétique pour présenter celle-ci de manière systématique. Il faut savoir que Klein s'intéresse généralement aux théories physiques *du point de vue de leur mathématisation et de leur géométrisation.* Ce sera le cas entre 1906 et 1910, lorsqu'il mettra en avant les travaux de Minkowski sur la géométrisation de la relativité restreinte. Il lui rendra d'ailleurs hommage dans une allocution connue sous le titre « Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe » devant la société mathématique de Göttingen. Dans la note 10 issue de son ouvrage sur les surfaces de Riemann, Klein insiste sur le fait que Maxwell aurait accordé une large place à des représentations géométriques à des fins heuristiques, mais également pour rendre plus explicites les formules « analytiques » auxquelles il serait parvenu. Donnons deux exemples tirés du *Treatrise* pour préciser notre propos.

(a) Au début du chapitre VII de cet ouvrage, Maxwell rappelle que la « détermination de la distribution électrique à la surface d'un conducteur » se traduit mathématiquement par la résolution de l'équation de Laplace — qui est une équation aux dérivées partielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Il montre ensuite qu'au lieu de résoudre le *problème direct*, qui consiste à déterminer le potentiel, étant donné la forme du conducteur, il convient davantage de résoudre le problème inverse, que l'on peut formuler comme suit : déterminer la forme du conducteur, étant donné l'expression du potentiel. Or la résolution d'un tel problème ne peut se faire que par tâtonnements successifs, notamment en visualisant la forme des surfaces équipotentielles et les lignes d'induction ou lignes de force. Ainsi, l'inversion du problème formulé au début du chapitre VII conduit Maxwell à accorder une large place à l'intuition géométrique et physique à des fins heuristiques au cours de ses raisonnements, ce qui n'a pas échappé à Klein.

84. F. Clerck Maxwell, *Traité d'Electricité et de Magnétisme* (1873), tome 1, trad. G. Sélignan-lui, Paris, éd. Gauthier-Villars, 1885, p. IX.

(b) Le chapitre IX est consacré à l'étude des *harmoniques sphériques* et à leur représentation géométrique sur une surface sphérique. Rappelons brièvement ce qu'il faut entendre par *harmonique sphérique*. Raisonnons en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) sur $\mathbb{R}^3$. Désignons par $\mathcal{P}^{(\ell)}$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré ℓ à coefficients complexes dans $\mathbb{R}^3$. Parmi ces polynômes, ceux qui sont à laplacien nul — au sens où ils sont solution de l'équation de Laplace —, sont appelés *polynômes harmoniques*. l'ensemble des polynômes harmoniques forme un espace vectoriel noté $\mathcal{H}^{(\ell)}$, qui est de dimension $2\ell + 1$. Cela posé, *en général*, les polynômes homogènes harmoniques définis sur $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ s'appellent des *harmoniques sphériques*. L'ensemble de telles fonctions constitue également un espace vectoriel, noté $\widetilde{\mathcal{H}}^{(\ell)}$, de dimension $2\ell + 1$, isomorphe à $\mathcal{H}^{(\ell)}$. Pour être plus précis, $\widetilde{\mathcal{H}}^{(\ell)}$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{S}^2)$ [85] Le terme *harmoniques sphériques* désigne plus particulièrement — et c'est d'ailleurs en ce sens que Maxwell emploie une telle expression — les éléments notés Y_m^ℓ d'une base orthonormée privilégiée de $\widetilde{\mathcal{H}}^{(\ell)}$, m étant un entier vérifiant $-\ell \leqslant m \leqslant \ell$. [86] On peut opérer la classification suivante des Y_m^ℓ, la terminologie étant d'ailleurs présente dans le chapitre IX du *Treatrise* de Maxwell : lorsque $m = 0$, on parle d'harmonique *zonale*, lorsque $m = \ell$, l'harmonique sphérique est dite *sectorale*, enfin lorsque $0 < m < \ell$, on dit que l'harmonique est *tessorale*. [87] Pour mieux se figurer de telles fonctions, Maxwell représente des cas élémentaires sur des surfaces sphériques — planches V, VII, IX.

85. L'espace $L^2(\mathbb{S}^2)$ est l'espace de Hilbert des fonctions complexes sur $\mathbb{S}^2$ de carré intégrable pour le produit scalaire

$$(f_1|f_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \overline{f_1(\theta, \phi)} f_2(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi,$$

où θ désigne la co-latitude et ϕ la longitude.

86. Chaque Y_m^ℓ est défini par :

$$Y_m^\ell(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(1 + m)!}\right]^{1/2} P_m^\ell(\cos\theta) e^{im\phi}$$

où P_m^ℓ est le polynôme de Legendre de degré ℓ du m-ième ordre défini comme suit :

$$P_m^\ell = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2 - 1)^\ell$$

et $P_m^\ell(\cos\theta)$ la fonction de Legendre associée à P_m^ℓ.

87. *ibid.*, p. 244 et suivantes.

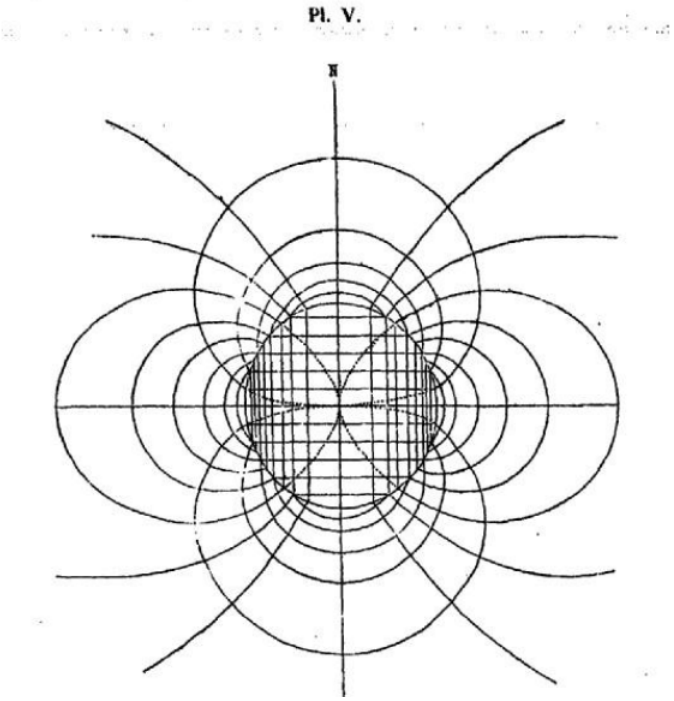
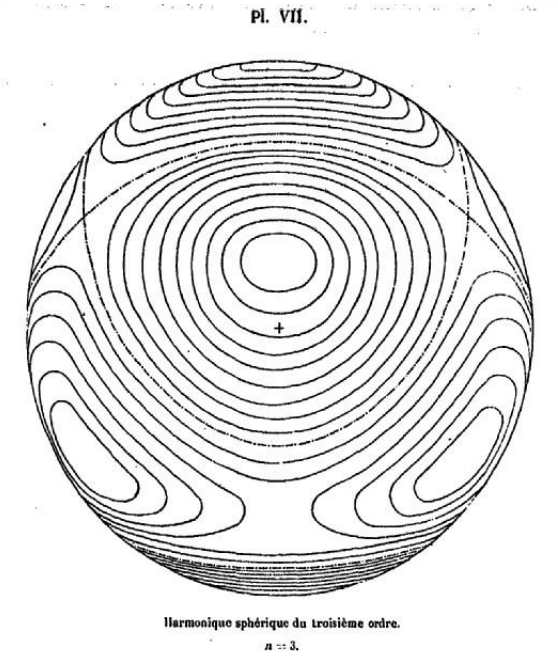


FIGURE 2.2 – Lignes de force et surfaces équipotentielles dans une section diamétrale d'une surface sphérique, pour laquelle la densité superficielle est un harmonique sphérique

En particulier, il repère les zones positives, négatives ainsi que les passages à zéro. De telles représentations deviendront canoniques dans l'étude des harmoniques sphériques. Ces représentations ont pu inspirer par analogie Klein pour figurer géométriquement le comportement d'une fonction algébrique sur la surface de Riemann à laquelle elle est associée.

Toujours est-il que, dans l'ouvrage de Klein, la théorie des courants électriques n'est pas traitée pour elle-même, elle sert exclusivement de moyen en vue d'appréhender des résultats qui relèvent *in fine* des *mathématiques pures*. En ce sens, il faut sans doute se prémunir contre une lecture superficielle et hâtive de l'ouvrage de Klein : ce texte n'appartient guère au registre des mathématiques appliquées ou de la physique mathématique. C'est ce que souligne Weyl à juste titre dans l'article de 1930 intitulé « Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart ».[88] Le but principal de Klein consiste à résoudre le problème

88. H. Weyl, « Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart », in H. Weyl, *Gesammelte Abhandlungen*, *op. cit.*, p. 292. Weyl commente l'article de Klein de 1882 sur les surfaces de Riemann en ces termes : « Aber der Verfasser war kein Physiker — auch nicht, wenn er damals die fundamentalen Existenzsätze auf



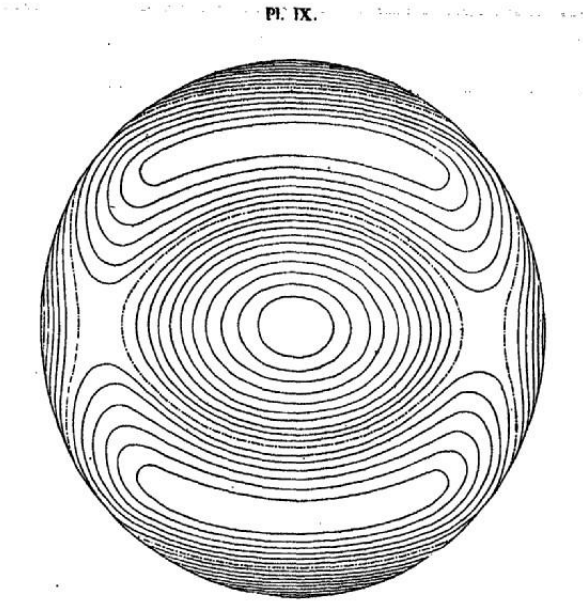


FIGURE 2.3 – Harmoniques sphériques des troisième et quatrième ordres

formulé par Riemann à la fin de sa thèse (1851) : parvenir à une classification systématique des surfaces de Riemann compactes connexes. C'est précisément ce que Klein appelle *la théorie de Riemann*. Il la présente de manière exhaustive au cours de la deuxième partie de son ouvrage.

Avant de parvenir à ce point, Klein commence par raisonner dans le plan complexe : il rappelle les conditions de Cauchy-Riemann auxquelles les fonctions holomorphes sur un « domaine » [Gebiet], i.e. un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ doivent satisfaire et il donne immédiatement une interprétation physique à ces résultats élémentaires. Posons $\omega = u + iv$, $z = x + iy$ et $\omega = f(z)$, la fonction f étant supposée holomorphe sur un domaine de $\mathbb{C}$. Imaginons maintenant que l'on étudie le courant d'un fluide enserré dans deux plans parallèles au plan complexe, ce fluide étant supposé d'une épaisseur infiniment petite. Dès lors, u désigne le potentiel de vitesse de ce fluide, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$, les composantes de sa vitesse. L'harmonicité de u signifie physiquement que le courant est *stationnaire*. Les courbes « $u =$ constante » sont les courbes niveau, les courbes « $v =$ constante » les courbes de courant qui, en vertu de la condition de Cauchy-Riemann, sont perpendiculaires au premières. Dans la suite de son ouvrage, Klein se réfère non plus au courant d'un fluide mais à un courant électrique. À partir du § 2, il étend son raisonnement aux fonctions « méromorphes » sur un domaine de $\mathbb{C}$. Pour ce faire, il commence par caractériser les points singuliers ou *points de discontinuité* [Unstetigkeit] d'une fonction, selon qu'il s'agit de *singularités essentielles* [points singuliers logarithmiques] ou de *pôles* [points singuliers algébriques]. Il précise immédiatement qu'il s'occupera exclusivement des fonctions dont les singularités ne sont pas essentielles. [89]

Dès la première partie, Klein montre qu'il ne souhaite pas se restreindre à des domaines du plan complexe. Pour ce faire, il commence par introduire la « surface sphérique » complexe, i.e. la sphère de Riemann — cette dernière terminologie étant due à Neumann dans ses *Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale* (1865) — par adjonction d'un

der Riemannschen Fläche ableitete, indem er sich die Fläche als einen homogenen Leiter dachte, in welchem die Verteilung des elektrischen Stromes durch die Quellen eindeutig festgelegt wird ».

89. *ibid.*, p. 509-510 : « Désormais, nous voulons également intégrer à notre domaine les points z_0 en lesquels $\omega = f(z)$ devient infiniment grand (...). Nous supposerons que le quotient différentiel $\frac{d\omega}{dz}$ ne doit pas posséder de singularité essentielle ou, ce qui revient au même, nous poserons que ω doit être infini de façon à ce que l'on ait une expression de la forme

$$A \log(z - z_0) + \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{A_\nu}{(z - z_0)^\nu},$$

ν étant un nombre entier fini déterminé ». Cette assertion de Klein revient à affirmer qu'au point z_0, f admet un développement en série de Laurent tel que la partie négative $\sum_{n<0} a_n(z - z_0)^n$ se réduise à une somme finie contenant ν termes. Par suite, z_0 est un pôle de f d'ordre ou de multiplicité ν.

point à l'infini, noté ∞, à $\mathbb{C}$. Soit dit en passant, puisqu'une telle surface est *connexe*, l'ensemble des fonctions méromorphes que l'on peut définir sur elle forme un corps : il s'agit ici du corps des fractions rationnelles d'une variable complexe, c'est-à-dire le corps des fonctions de la forme :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

où P et Q sont des polynômes premiers entre eux. Les pôles de f correspondent exactement aux zéros de Q auxquels il faut ajouter le point à l'infini ∞ lorsque le degré de P est strictement supérieur au degré de Q.

Pour résumer, Klein s'appuie d'entrée de jeu sur des intuitions physico-géométriques qui le guideront tout au long de son ouvrage. Il croit que de telles intuitions sont déjà explicitement présentes dans l'œuvre de Riemann, étant donné que ce dernier s'approprie tout un pan de la théorie du potentiel dans sa *Dissertation*. Nous avons suffisamment montré dans le chapitre précédent que cette filiation est reconstruite par Klein. En réalité, ses sources directes d'inspiration en physique mathématique se trouvent chez Kirchhoff, Helmholtz ou encore Maxwell, comme il le souligne lui-même dans la note 10. Cette double filiation permet à Klein de construire un parallèle entre les travaux de Riemann en géométrie et les apports de Faraday et Maxwell en physique et en physique mathématique durant la seconde moitié du XIX^{e} siècle. Nous allons voir que Klein s'appuie sur une autre source au cours de son raisonnement. Il s'agit en l'occurrence de l'ouvrage que Gauss consacre aux surfaces courbes (1828). Il explicite ainsi la fin de la *Dissertation* dans laquelle Riemann invoquait ce traité de Gauss sans préciser son propos.

2.3.2 Une incursion du côté de la théorie des surfaces courbes

En effet, avant de classer surfaces de Riemann compactes connexes — il s'agit là du motif principal qui commande la seconde partie de l'ouvrage —, Klein fait une incursion du côté de la théorie des surfaces courbes développée par Gauss dans son traité de 1828. Il convient de préciser les raisons qui le conduisent à effectuer ce détour. Nous voudrions préciser l'hypothèse d'interprétation formulée par R. Chorlay : au cours du § 5, Klein reprendrait, via Beltrami, la *Leçon* de Riemann de 1854 et il expliciterait ainsi le lien que celle-ci admet avec la *Thèse* de 1851. [90] Il nous semble nécessaire de nuancer cette lecture : si Klein se réfère indéniablement à Beltrami, il n'est en revanche pas certain qu'il ait en tête le *Habilitationsvortrag* de Riemann.

90. R. Chorlay, *L'émergence du couple local/global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953)*, thèse de Doctorat sous la direction de C. Houzel, 2007 p. 139.

À notre sens, l'objectif de Klein est plus modeste : il veut expliquer l'allusion de Riemann au traité des surfaces courbes de Gauss à la fin de sa *Dissertation*. En revanche, il nous semble qu'il appartient à Weyl (1913) et non à Klein (1882) de saisir le lien conceptuel entre la *Dissertation* et le *Habilitationsvortrag*.

Suivons le raisonnement de Klein. Il propose d'étudier un courant électrique sur une surface courbe notée S. Comme dans le cas du plan, u désigne le potentiel de vitesse du courant électrique. Klein montre à quelles conditions analytiques u doit satisfaire pour que l'on ait affaire à un courant stationnaire. Pour ce faire, il commence par reprendre à son compte le début du traité de Gauss sur les surfaces courbes : S est munie de coordonnées curvilignes notés p et q, elle est également dotée d'une structure métrique, le carré de son élément linéaire étant défini comme suit :

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2.$$

Cela posé, pour que le courant en question soit stationnaire, il faut et il suffit que u soit solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \frac{F\frac{\partial u}{\partial q} - G\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \frac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0.$$

À côté de la fonction u, Klein introduit la fonction v qui satisfait aux relations :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial p} &= \frac{F\frac{\partial u}{\partial p} - E\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial q} &= \frac{G\frac{\partial u}{\partial p} - F\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}} \end{cases}$$

À l'instar de u, la fonction v vérifie :

$$\frac{\partial \frac{F\frac{\partial v}{\partial q} - G\frac{\partial v}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial p} + \frac{\partial \frac{F\frac{\partial v}{\partial p} - E\frac{\partial v}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}}{\partial q} = 0.$$

Cela posé, Klein introduit une seconde surface courbe que l'on notera S' et dont le carré de l'élément linéaire sera noté $\mathrm{d}s'^2 = E'\mathrm{d}p^2 + 2F'\mathrm{d}p\mathrm{d}q + G'\mathrm{d}q^2$. Il suppose que S et S' ne sont pas *localement isométriques*, mais seulement *conformes en leurs plus petites parties*. Les coefficients E', F' et G' ne sont pas égaux mais proportionnels à E, F et G. Bref, le $\mathrm{d}s^2$ de S ne diffère de l'élément du $\mathrm{d}s'^2$ de S' que d'un facteur. Un tel facteur peut être mis de côté dans l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les fonctions u et v introduites précédemment. En « combinant » u et v, Klein forme une fonction complexe définie sur S. Il en déduit le théorème fondamental :

> Si une surface s'applique sur une autre surface de manière conforme, alors chaque fonction complexe du lieu existant sur elle se transforme en une fonction du même type sur la seconde surface. [91]

Pour le dire autrement, lorsque deux surfaces courbes sont conformes en leurs plus petites parties, les fonctions complexes que l'on définit sur elles ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres. Si l'on veut être plus précis, la condition ≪ être conformes en leurs plus petites parties ≫ se traduit analytiquement comme suit : les surfaces S et S' sont holomorphiquement équivalentes.

Ce rappel étant fait, il ne nous semble pas que Klein se réfère ici — même indirectement — à la *Leçon d'habilitation* de Riemann. En réalité, ses motifs sont triples : (i) il s'appuie sur le traité de Gauss afin de passer d'une théorie des fonctions d'une variable complexe définies sur un domaine de $\mathbb{C}$ ou de $\widehat{\mathbb{C}}$ à une théorie générale des surfaces de Riemann ; (ii) il explicite en détail et de façon analytique le lien que Riemann avait seulement suggéré à la fin de sa thèse entre ses propres travaux en analyse complexe et le traité de Gauss sur les surfaces courbes ; (iii) Klein parvient surtout à construire des coordonnées locales complexes sur les surfaces de Riemann, ce qui lui permet de rendre raison de leur structure analytique qu'il distingue clairement de leur structure topologique. On ne saurait donc manquer de souligner le caractère synthétique du raisonnement de Klein : il relie effectivement les travaux de Gauss et de Riemann que nous venons de mentionner.

De telles tentatives d'unification constituent une constante dans l'œuvre de Klein. Par exemple, à la fin d'un article consacré au géometries non-euclidiennes (1871), il rappelle que l'on peut déduire les géométries métriques euclidienne et non-euclidiennes de deux manières : soit en partant de la notion de métrique projective qu'il utilise à la suite de Cayley et qu'il généralise aux géométries non euclidiennes, soit en adoptant pour cadre la théorie gaussienne des surfaces courbes. Il montre justement que ces deux démarches sont équivalentes, [92] à ceci près que le modèle de la géométrie hyperbolique proposé par Klein est complet. En revanche, il conjecture l'impossibilité de trouver une surface courbe qui pourrait constituer un modèle complet de la géométrie hyperbolique. Cette conjecture est déjà formulée par Beltrami et elle sera démontrée par Hilbert au tournant du XX$^{\text{e}}$ siècle.

Klein formule la transition entre la première et la deuxième partie de son ouvrage en ces termes :

---

91. F. Klein, *op. cit.*, p. 521.

92. F. Klein, ≪ Sur la géométrie dite non-euclidienne ≫, (1871), trad. Laugel, *Annales de la faculté de Toulouse*, tome 11, n° 4, 1897, § 14, p. 50 et suiv.

> Toutes les questions que nous venons à l'instant de formuler concernant la surface sphérique [i.e. la sphère de Riemann] peuvent se poser de la même manière, lorsque l'on se donne une surface fermée quelconque [eine geschlossene Fläche] au lieu de la surface sphérique. [93]

Ce passage montre que Klein cesse de considérer les surfaces de Riemann comme des surfaces à plusieurs feuillets recouvrant le plan complexe. Il les envisage en elles-mêmes, c'est-à-dire de manière purement *intrinsèque*. On peut donc souscrire au bref commentaire de Weyl au sujet de cet ouvrage : il s'agit bel et bien d'une théorie générale et abstraite des surfaces de Riemann, quand bien même elle est exposée sous une forme intuitive [in anschaulicher Form]. [94]

2.3.3 La classification des surfaces de Riemann compactes connexes

Au début de la deuxième partie de son ouvrage, Klein introduit le critère nécessaire et suffisant de classification des surfaces de Riemann : celles-ci doivent être *conformément équivalentes*. Il ajoute l'exemple suivant :

> Si, par exemple, on peut appliquer de manière conforme l'ellipsoïde à la sphère, de telle sorte qu'à chaque point de la première corresponde un et un seul point de la seconde, alors l'ellipsoïde convient tout aussi bien que la sphère pour représenter les fonctions rationnelles et leurs intégrales. [95]

D'une manière générale, toute surface de Riemann compacte connexe de genre $g = 0$ est topologiquement *et* conformément équivalente à la sphère de Riemann. Ce point n'est déjà plus vérifié pour $g = 1$. Les surfaces de Riemann de genre 1, i.e. les tores complexes, sont toutes équivalentes au regard de l'*analysis situs* ; en revanche, il s'en faut de beaucoup pour qu'elles soient toutes conformément équivalentes, comme le montre Klein dans le § 15 que nous commenterons en détail dans ce qui suit. En conséquence, Klein distingue explicitement la « structure » *topologique* et la « structure » *analytique* d'une surface de Riemann. Il fait tout d'abord la remarque suivante :

> Il est tout aussi important de connaître l'élément qui demeure invariant non seulement par transformations conformes mais encore par déformations continues. Il s'agit du p riemannien, i.e. du nombre de rétrosections [Rückkehrschnitte] que l'on peut appliquer sur la surface de Riemann sans la diviser. [96]

93. F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, *op. cit.*, p. 525.
94. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. 35.
95. F. Klein, *op. cit.*, p. 526.
96. *ibid.*, p. 526.

Le nombre « p » correspond au *genre* de la surface de Riemann — compacte, connexe — étudiée. Le terme « genre » est introduit par Clebsch dans une série de travaux consacrés à l'étude des courbes algébriques en 1865 et il est donc repris par Klein dans ses leçons sur les surfaces de Riemann.[97] Klein donne successivement l'exemple de la sphère, où $p = 0$, et celui du Tore [Ring / Torus] où $p = 1$. Il formule ensuite la proposition suivante : si deux surfaces de Riemann compactes connexes n'ont pas le même genre, alors elles ne peuvent pas être transformées l'une en l'autre par déformation continue, ce que l'on peut retraduire comme suit — en inversant la contraposée utilisée ici par Klein — : si deux surfaces de Riemann (compactes connexes) sont homéomorphes, alors elles ont le même genre. En conséquence, l'identité des *genres* est une condition nécessaire pour que deux surfaces de Riemann soient équivalentes au sens de *l'analysis situs*. Klein admet ensuite la réciproque tout en reconnaissant qu'elle s'avère plus difficile à démontrer : si deux surfaces de Riemann compactes connexes ont le même genre, alors elles sont homéomorphes. L'identité des genres devient par suite une condition nécessaire et suffisante pour classer les surfaces de Riemann compactes connexes en fonction de leur *seule structure topologique*. Comme le rappelle Klein dans une note[98], ce théorème a en fait été démontré par C. Jordan dans son article intitulé « Sur la déformation des surfaces » (1866). Nous rappelons à ce propos que Jordan commence par énoncer le célèbre problème résolu par Gauss dans son traité sur les surfaces courbes (1828) :

> trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.[99]

---

97. A. Clebsch, « Über diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines parameters sind », *Journal für reine und angewandte Mathematik*, **64**, 1865, p. 43 : « La classe des fonctions abéliennes à laquelle est associée une courbe algébrique plane du n-ième degré est déterminée par le nombre $p = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ lorsque la courbe en question ne possède ni point double, ni point de rebroussement ; dans le volume 63 du présent journal, j'ai introduit une série de résultats fondés sur cette remarque. (...)

Au lieu de répartir les courbes algébriques en fonction de leur degré et d'effectuer des subdivisions à partir du nombre de points doubles et de points de rebroussement qui les caractérisent, on peut les répartir en *genres* (Geschlechter) d'après le nombre p, celles du premier genre sont telles que $p = 0$, celles du second genre telles que $p = 1$, etc. Inversement, les différents degrés constituent des subdivisions au sein des genres, tous les degrés interviennent pour un genre donné jusqu'[au degré n] tel que $p = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ auquel correspond la courbe la plus générale, c'est-à-dire la courbe du n-ième degré sans point double ni point de rebroussement ».

98. F. Klein, *op. cit.*, p. 527, note 24.

99. C. Jordan, « Sur la déformation des Surfaces », in *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, deuxième série, tome XI, 1866, Ed. Gauthier-Villars, p. 105.

Les surfaces courbes sont munies d'une structure métrique définie localement par un $\mathrm{d}s^2$. Deux surfaces courbes sont équivalentes au sens de Gauss si et seulement si elles ont la même mesure de courbure en chacun de leurs points.[100] En revanche elles peuvent différer au point de vue de l'*analysis situs*. Jordan formule ensuite l'*analogue* du problème de Gauss en « géométrie des situations » — donc abstraction faite de toute détermination métrique. Pour ce faire, il considère des surfaces qui sont non seulement *flexibles*, mais encore *extensibles*, c'est-à-dire continûment déformables. Il montre que deux surfaces fermées (compactes, connexes, orientables, sans bord) sont équivalentes si et seulement si elles admettent le même nombre n de courbes fermées, irréductibles l'une à l'autre, susceptibles d'être tracées sur elles sans les séparer en deux parties disjointes. Ce théorème relève strictement de la *géométrie des situations*. On peut aisément retraduire le résultat auquel parvient Jordan en se fondant sur le genre p d'une surface : en effet, $n = 2p$.

Ainsi, contrairement à Riemann (1857), Klein (1882) dispose du théorème de Jordan qui revient à dire qu'une surface topologique orientable, compacte, connexe, sans bord est topologiquement équivalente à un tore à p trous. Rappelons que, dans la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann, les tores à p trous constituaient des exemples paradigmatiques : ils servaient de support intuitif pour dégager certaines propriétés générales d'*analysis situs*. Dans l'ouvrage de Klein, les tores à p trous deviennent carrément des *types* ; en vertu du théorème de Jordan, on sait qu'ils permettent de classer *complètement* les surfaces de Riemann compactes connexes en fonction de leur structure topologique :

> Tant que l'on considère uniquement les rapports généraux de situation [Lagenverhältnisse], on est en droit de se fonder sur le type le plus simple possible pour chaque p dans l'étude des surfaces fermées.[101]

Les tores à p trous ou les sphères à p anses sont des *Normalflächen*. L'adjectif « normal » mérite commentaire. Klein l'utilise dans d'autres contextes. Par exemple, les intégrales elliptiques peuvent être classées en trois espèces — précisément mises au jour par Legendre — qui en sont les *Normalformen*. Bref, ce terme caractérise des objets mathématiques qui ne sont pas étudiés en fonction de leurs particularités, mais d'après un objectif de *classification exhaustive*. Nous voudrions préciser ici la différence entre un *exemple paradigmatique* et un *type*. Un *exemple paradigmatique* est un cas qui n'est pas étudié pour lui-même ; il a une portée générale qui demeure en partie *indéterminée*. Ses fonctions sont avant tout heuristiques ; il sert de point d'appui pour généraliser des propriétés ou des propositions à d'autres cas de

100. Voir à ce propos la sous-section 1.1.3 (deuxième partie) de la présente thèse.
101. F. Klein, *op. cit.*, p. 527.

figure sans que l'on sache *a priori* jusqu'où une telle généralisation est possible. Ainsi, les surfaces remarquables que Riemann étudie au début de sa *Dissertation* et de sa *Théorie des fonctions abéliennes* lui permettent d'exhiber des propriétés d'*analysis situs* dont la portée est générale, mais dont les contours ne sont pas encore parfaitement arrêtés. À la différence d'un *exemple paradigmatique*, un *type* dit le général de manière parfaitement déterminée : sa fonction n'est pas tant heuristique que classificatoire : il permet de classer un ensemble d'objets mathématiques de manière exhaustive.

Ainsi, les tores à p trous sont des exemples paradigmatiques chez Riemann, ils deviennent des types sous la plume de Klein, car celui-ci dispose du théorème de Jordan. Cela étant, Klein est parfaitement conscient que ce premier critère de classification, fondé sur les tores à p trous ou les sphères à p anses, ne concerne que la structure topologique des surfaces de Riemann compactes connexes :

> Évidemment, les surfaces normales ne sont en aucune manière suffisantes touchant aux déterminations quantitatives ; mais elles nous offrent malgré tout un moyen de nous orienter à ce niveau. [102]

Cette affirmation appelle deux commentaires. En premier lieu, Klein différencie les propriétés « qualitatives » — qui relèvent de l'*analysis situs* — et les propriétés « quantitatives » d'une surface de Riemann, ces dernières dépendant de sa *structure analytique*. Le début de la citation indique en filigrane que deux surfaces de Riemann équivalentes au regard de l'*analysis situs* ne sont pas nécessairement *conformément* équivalentes. Bref, le genre d'une surface de Riemann ne la décrit pas complètement. En second lieu, Klein montre que le nombre p joue cependant un rôle fondamental dans la théorie des fonctions.

Pour comprendre comment s'articule la théorie des fonctions avec les surfaces de Riemann, Klein étudie à partir du § 15 l'exemple des surfaces de genre 1. Il se réfère explicitement à la classification qu'il a établie précédemment et donc aux *surfaces normales* [Normalflächen] sur lesquelles on peut travailler en genre 1, à savoir les tores complexes.

Il commence par rappeler un principe géométrique élémentaire de construction d'un tore dans un espace affine euclidien tridimensionnel, muni d'un repère orthonormé d'origine O. On trace un cercle sur le plan défini par les axes Ox et Oz. Le centre C de ce cercle est situé sur l'axe Ox. Son rayon est de longueur ρ. La distance OC est désignée par R. On impose pour des raisons évidentes que R soit strictement supérieure à ρ. On considère maintenant Oz comme un axe de rotation. Tout point κ situé sur le tore qu'il s'agit de construire dépend de deux paramètres : (i) l'angle α tel qu'il est indiqué sur la figure 2.4 et l'angle φ de rotation autour de l'axe Oz. À partir de ce procédé simple, Klein engendre un tore quelconque dans

102. *ibid.*, p. 527.

un espace affine euclidien. Ce procédé intuitif et géométrique de construction sera repris littéralement par Weyl dans *Die Idee der Riemannschen Fläche.* [103]

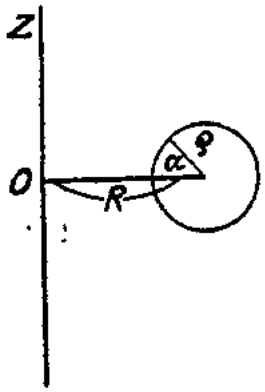


Fig. 34.

FIGURE 2.4 – Engendrement d'un tore de révolution

Soit donc κ un point quelconque situé sur le tore que l'on vient d'obtenir, il est défini par les coordonnées suivantes :

$$X = (R - \rho\cos\alpha)\cos\varphi \qquad Y = (R - \rho\cos\alpha)\sin\varphi \qquad Z = \rho\sin\alpha.$$

Tous calculs effectués, l'élément linéaire satisfait à l'égalité :

$$\mathrm{d}s = (R - \rho\cos\alpha)\cdot\sqrt{\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2} \qquad \xi = \varphi, \quad \eta = \int_0^\alpha \frac{\rho\mathrm{d}\alpha}{R - \rho\cos\alpha}.$$

Klein en déduit (i) que l'on peut définir une application conforme entre le tore et le plan des ξ, η, (ii) que par une telle application, la surface du tore revêt un rectangle, comme l'indique la figure ci-après :

103. H. Weyl, *op. cit.*, p. 27.

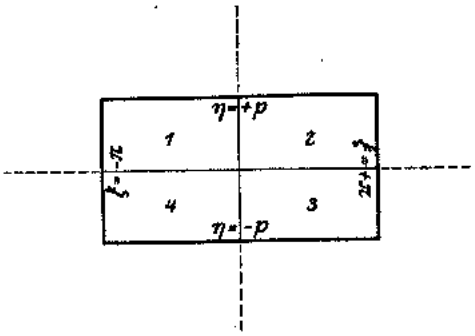


Fig. 35.

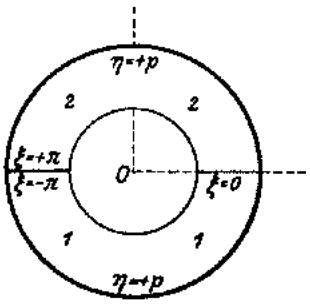


Fig. 36.

FIGURE 2.5 – Application conforme entre un tore et un rectangle

Il ajoute :

> Si l'on veut se représenter intuitivement le lien entre un rectangle et la surface d'un tore, il suffit de se l'imaginer en un matériau extensible et de courber sans torsion les côtés opposés du rectangle. [104]

Cela posé, Klein se donne une surface à deux feuillets au-dessus du plan complexe qui admet quatre points de ramification, à savoir

$$\pm 1, \quad \pm\frac{1}{x}$$

pour $0 < x < 1$. Il met en évidence les deux « demi-feuillets » qui revêtent le demi-plan supérieur, ce dernier étant hachuré de manière élémentaire comme suit :

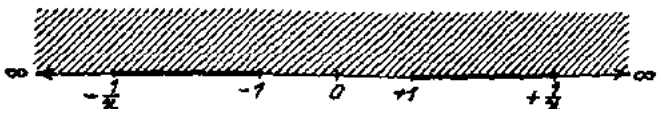


FIGURE 2.6 – Points de ramification de la fonction ω

104. F. Klein, *op. cit.*, p. 547.

La surface qu'il vient d'introduire représente la ramification [die Verzweigung] de la fonction définie par :

$$\omega = \sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}$$

Il considère ensuite l'intégrale elliptique de *première espèce* définie par :

$$\Omega = \int_0^k \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}$$

Posons :

$$K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}, \quad K' = \int_1^{1/x} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}.$$

Il faut savoir que cette intégrale applique injectivement le demi-plan supérieur sur l'intérieur d'un rectangle du plan complexe, dont les quatre sommets ne sont autre que K, $K+iK'$, $K-iK'$ et $-K$. Klein montre surtout qu'elle applique la surface de Riemann à deux feuillets qu'il a introduite sur le rectangle suivant :

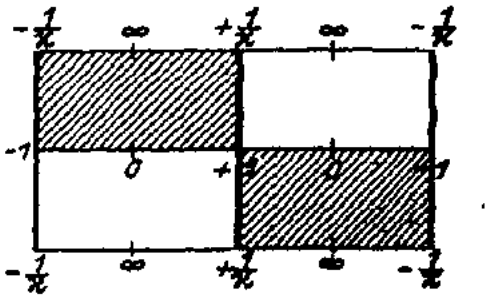


Fig. 38.

FIGURE 2.7 – Image d'un revêtement à deux feuillets du plan complexe

La partie gauche de cette figure correspond au feuillet supérieur de la surface. Les deux portions hachurées correspondent aux deux demi-feuillets (supérieur et inférieur) revêtant le demi-plan supérieur. Le but de Klein est alors clair : il s'agit d'établir le lien entre la surface de Riemann à deux feuillets qu'il a arbitrairement introduite et la surface d'un tore. Pour ce faire, il considère les figures 35 et 38 : si les deux rectangles qu'il vient d'obtenir sont semblables — au sens où l'on peut agrandir de manière proportionnelle l'un deux de manière à ce qu'il coïncide exactement avec l'autre, alors on en déduit que les deux surfaces sont conformément équivalentes. On peut ajouter le raisonnement suivant en complément des arguments de Klein. Considérons *l'inverse* de l'intégrale elliptique $\Omega = \int_0^k \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}$; il

s'agit de la fonction *sinus amplitudinus* (ou fonction elliptique de Jacobi) de module x, notée $sn(z, x)$. On a affaire à une *fonction elliptique* qui admet par suite deux périodes complexes indépendantes, à savoir

$$\omega_1 = 4K, \quad \omega_2 = 2iK'.$$

Elle constitue une fonction uniforme — à valeurs dans la sphère de Riemann — sur le tore $\mathbb{C}/\Lambda$, où $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Ce tore est conformément équivalent à la surface à deux feuillets introduite par Klein.

Le § 15 de l'ouvrage de Klein s'achève sur la représentation des courbes de courant sur un tore à un trou, conformément à l'intention initiale de Klein : construire la théorie des surfaces de Riemann à partir d'intuitions physiques empruntées à l'étude du comportement d'un courant électrique sur une surface constituée d'un matériau conducteur.

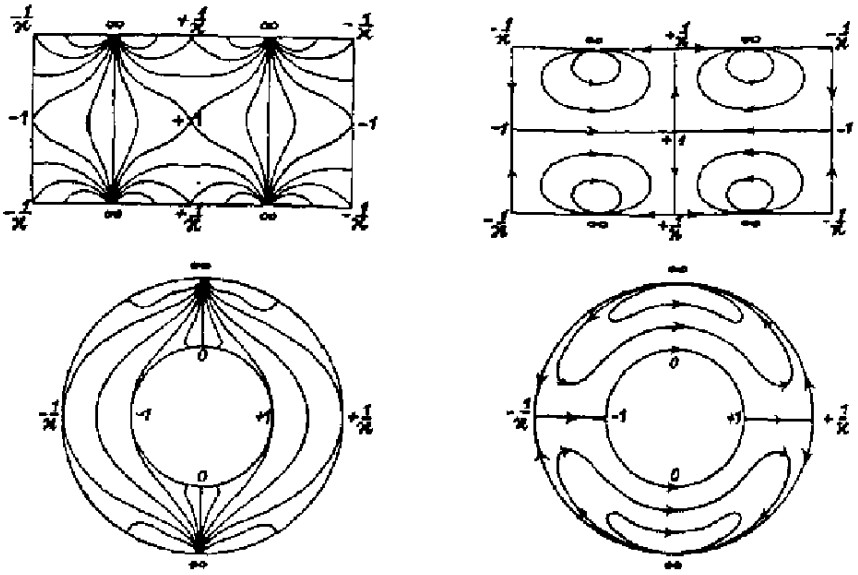


FIGURE 2.8 – Lignes de courant sur un tore conducteur

Le résumé de ce paragraphe nous apporte trois enseignements. (1) Klein *distingue* la structure topologique et la structure analytique d'une surface de Riemann et il énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces de Riemann de genre 1 soient holomorphiquement équivalentes. Une telle distinction a une portée générale. (2) Son raisonnement est guidé par l'analyse de *types*, à savoir les tores complexes, en l'occurrence ici les tores à 1 trou. (3) Il s'appuie systématiquement sur des représentations physico-géométriques :

son argumentation commence par une construction géométrique d'un tore à 1 trou et elle s'achève sur la description des courbes de courant sur un tore à un trou.

Nous ne saurions manquer de résumer les résultats généraux auxquels aboutit Klein dans cet ouvrage au-delà du cas des surfaces de genre 1. Ainsi, il parvient à une classification exhaustive des surfaces de Riemann compactes connexes, quel que soit leur genre. Tel est justement l'objectif principal de la deuxième partie de son ouvrage qu'il exemplifie donc en détail dans le cas des surfaces de genre 1. Au début de la troisième partie, il prolonge le § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann ; en particulier, il précise les contours de l'*espace des modules* de dimension complexe $3p-3$ dont les points sont en bijection avec les surfaces compactes connexes de genre p à équivalence birationnelle près. [105] Ensuite, il étudie les automorphismes qu'une surface de Riemann compacte connexe peut admettre en fonction de son genre et il établit le théorème suivant : une surface de Riemann compacte connexe de genre $p \geqslant 2$ n'admet qu'un nombre fini d'automorphismes. [106] Cet énoncé caractérise de manière exemplaire le niveau de généralité remarquable auquel Klein aboutit dans cet ouvrage.

2.3.4 L'intuition et l'arithmétisation des mathématiques

Nous ne devons pas perdre de vue l'aspect polémique de l'ouvrage de Klein sur les surfaces de Riemann. En 1882, Klein s'inscrit en faux contre ce qu'il appellera plus tard l'« arithmétisation » de l'analyse. Il vise en particulier Schwarz et Weierstrass, mais sans doute plus largement l'école algébrique de Berlin. Voici ce qu'il affirme à propos des travaux de Schwarz et Weierstrass visant à fonder « rigoureusement » la théorie des fonctions d'une variable complexe :

> J'ai laissé ces réflexions complètement de côté dans ce qui suit et j'ai donc renoncé à fonder les propositions présentées ici autrement qu'en me conformant à l'intuition. [107]

Souvenons-nous que, dans une lettre à Schwarz que nous avons précédemment citée, Weierstrass critiquait frontalement l'approche géométrique, intégrale et topologique adoptée par Riemann dans sa thèse et dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*. En revanche, Klein prône les méthodes de Riemann en analyse complexe. D'où la place importante qu'il accorde à une « pensée géométrique et physique » dans l'étude des surfaces de Riemann. Il mentionne certains fragments inédits de Riemann consacrés à la philosophie naturelle. Il en tire

105. *ibid.*, § 19, p. 557 à 561.
106. *ibid.*, p. 562.
107. *ibid.*, p. 502-503

l'hypothèse d'interprétation suivante : il existerait un rapport étroit entre mathématiques et physique dans l'œuvre de Riemann, dont il ne précise toutefois pas la nature. Les travaux de Riemann en analyse complexe seraient directement issus de la physique mathématique. Klein n'insiste pas gratuitement sur cette interprétation. Il voit en Riemann une figure tutélaire qui lui permet de justifier la complémentarité entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées à la physique. [108]

Dans son ouvrage de 1882 sur les surfaces de Riemann, Klein met donc en valeur le rôle de l'intuition (géométrique et physique) dans la constitution des connaissances en analyse complexe. Il développera largement cette idée lorsqu'il précisera ses conceptions sur l'enseignement des mathématiques au cours des années 1890. Elles ne seront d'ailleurs pas sans influence sur les méthodes pédagogiques qu'adoptera Weyl en 1910 et en 1911 dans ses leçons sur les fonctions d'une variable complexe et sur les surfaces de Riemann.

Précisons ce point. En 1895, Klein prononce une célèbre conférence devant la société royale des sciences de Göttingen intitulée « Über Arithmetisierung der Mathematik ». [109] Publiée en 1895 dans les *Nachrichten* de la société des sciences de Göttingen, elle est traduite en langue anglaise dans le *Bulletin of the American Mathematical Society* en 1896 [110] ; une version en français de ce texte est disponible l'année suivante dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, revue principalement adressée à un public d'enseignants et d'étudiants préparant les concours d'entrée aux Écoles polytechnique et normale. [111] Les idées développées par Klein dans cet article connaissent donc une audience bien au-delà de Göttingen et elles admettent des similitudes frappantes avec certaines thèses défendues de manière quasiment contemporaine par Poincaré sur l'enseignement des mathématiques, notamment dans deux articles publiés respectivement en 1899 et en 1900 : « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement » et « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques ». [112] La proximité entre les arguments de Poincaré et de Klein nous laisse

108. Voir en particulier F. Klein, « Riemann et son influence sur les mathématiques modernes », in B. Riemann, *Œuvres*, *op. cit.*, p. XVIII, XIX.

109. F. Klein, « Über Arithmetisierung der Mathematik », *Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1895, in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Band II, *op. cit.*, p. 232-240.

110. F. Klein, « The Arithmetizing og Mathematics », *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 2, n. 8, p. 241-249.

111. F. Klein, « Sur "l'arithmétisation" des mathématiques », *Nouvelles annales de mathématiques*, troisième série, tome 16, 1897, p. 114-128.

112. H. Poincaré, « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *L'enseignement mathématique*, Vol. 1., 1899, p. 157-162, « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques », *Compte-rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens*, p. 115-130.

présumer que Poincaré a pu consulter la traduction en français de l'article de Klein sur l'arithmétisation des mathématiques. Ajoutons que la traduction de l'article de Klein paraît dans *Les Nouvelles annales de mathématiques* ; de son côté, Poincaré publie dans *L'enseignement mathématique* : ces deux revues s'adressent à des enseignants et des étudiants, elles ne sont pas réservées à des chercheurs. La proximité des textes de Poincaré et de Klein se trouve renforcée par le fait qu'ils s'adressent à des publics relativement similaires.

Précisons ce que Klein entend par ≪ arithmétisation des mathématiques ≫ [Arithmetisierung der Mathematik] et décrivons la place qu'il accorde à l'*intuition* en analyse. Klein parle d'≪ arithmétisation des mathématiques ≫ pour désigner à la fois une *thèse* sur les mathématiques et une *méthode* de recherche. Voici comment il les résume :

> Seul ce dont on peut prouver clairement et identiquement la vérité au moyen des opérations de calcul usuelles doit être considéré comme un élément de connaissance. [113]

L'arithmétisation des mathématiques renvoie à un point de vue normatif : il s'agit de dégager des critères de rigueur pour sanctionner les connaissances mathématiques et traquer les indéterminations voire les erreurs véhiculées par l'intuition. Cette expression désigne également sous la plume de Klein une méthode qui consiste à promouvoir l'usage des opérations élémentaires de l'arithmétique, comme si elles garantissaient à elles seules et avec certitude la vérité des conclusions que nous tirons de nos raisonnements. Les arguments de Klein admettent une certaine ambiguïté : en effet, par arithmétisation des mathématiques, on peut entendre l'application des méthodes de l'arithmétique aux autres domaines des mathématiques ou, de manière plus radicale, la réduction pure et simple des mathématiques à l'arithmétique. Klein assume cette ambiguïté puisqu'il associe ce processus d'arithmétisation à la rigueur weierstrassienne [die Weierstraßsche Strenge] mais aussi au projet de Kronecker visant à ≪ ramener le traitement de la science mathématique à l'étude des relations entre les seuls nombres entiers ≫. [114]

Klein n'adopte sans doute plus le ton polémique qui était le sien en 1882 pour fonder l'analyse complexe sur des bases purement géométriques contre Weierstrass et Schwarz. En effet, dans son discours de 1895, il se montre prêt à faire quelques concessions à Weierstrass ; ainsi, il est parfaitement conscient que l'intuition sensible peut être la source de confusions conceptuelles, comme en atteste assez la difficulté à saisir de manière purement intuitive le fait

113. F. Klein, ≪ Über Arithmetisierung der Mathematik ≫, Nachrichten der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1895, in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, p. 233 et p. 166 pour la trad. en français.

114. *ibid.*, p. 116 pour la trad. en français.

que la *continuité* soit complètement distincte de la *dérivabilité* en analyse. Comme le montre Weierstrass, on peut *concevoir* des fonctions partout continues, mais nulle part dérivables. À ce niveau, Klein ne remet pas en cause les acquis liés à l'arithmétisation de l'analyse que l'on doit en particulier à Weierstrass. Cependant, il réfute le raisonnement suivant : de ce que les représentations intuitives peuvent nous induire en erreur ou être la source d'amphibologies conceptuelles, il faudrait toujours les bannir de nos raisonnements.

> Mais, et c'est là l'aspect négatif [de l'arithmétisation des mathématiques], je dois montrer en détail et insister vigoureusement sur le fait que les mathématiques ne se réduisent en aucun cas à la déduction logique et que l'intuition conserve encore aujourd'hui à côté d'elle une signification spécifique et complète. [115]

Voici les arguments de Klein pour défendre cette idée. S'il admet que l'arithmétisation des mathématiques apporte une plus grande rigueur, en revanche il accorde une priorité chronologique mais aussi une prééminence à l'intuition dans la *découverte* des connaissances mathématiques. Il s'appuie d'ailleurs sur l'exemple de ses propres travaux en théorie des surfaces de Riemann pour justifier cette idée. Parallèlement, il croit observer que l'enseignement des mathématiques au niveau universitaire se caractérise par un rejet massif de l'intuition. Cette tendance serait l'effet de l'arithmétisation des mathématiques. Il s'inscrit en faux contre ce type d'enseignement en rappelant que le recours à des représentations intuitives est essentiel durant les premières années d'études de mathématiques et devant un public de futurs ingénieurs. Klein justifie son argument en affirmant que l'enseignement des mathématiques ne doit pas suivre un ordre logique, mais un ordre historique en raccourci :

> Le maître doit, conformément à la nature des choses, parcourir en petit la même voie de développement que la Science a suivie en grand. [116]

Poincaré défendra exactement la même idée au cours de l'article qu'il publiera en 1899 dans *L'enseignement mathématique* : ≪ la tâche de l'éducateur est de faire repasser l'esprit de l'enfant par où a passé l'esprit de ses pères, en passant rapidement par certaines étapes mais en n'en supprimant aucune ≫. [117] Un principe logiquement premier ou une définition parfaitement rigoureuse ne sauraient être énoncés d'emblée, ils doivent être introduits à la suite d'un processus de raffinement progressif de nos intuitions. Dans son cours d'introduction aux fonctions d'une variable complexe, Weyl se conforme d'ailleurs aux prescriptions de Klein : par exemple il introduit progressivement les propriétés topologiques auxquelles les

115. *ibid.*, p. 234, p. 117 pour la trad. en français.
116. *ibid.*, p. 240, p. 127 pour la trad. en français.
117. H. Poincaré, ≪ La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement ≫, *op. cit.*, p. 159.

domaines de définition des fonctions d'une variable complexe doivent satisfaire pour que tel ou tel théorème soit vérifié. Ainsi, le théorème de Cauchy n'est énoncé dans sa forme achevée qu'après un parcours sinueux mêlant intuitions géométriques et souci de formalisation analytique.

La conférence de Klein sur l'arithmétisation des mathématiques s'achève sur l'idée d'une complémentarité entre la rigueur logique et l'intuition dans le développement des sciences mathématiques et leur enseignement. Aussi écrit-il :

> En même temps que j'exige partout l'étude logique complète et approfondie des matériaux, j'affirme également que l'on doit aussi nécessairement les travailler et les envisager sous tous les aspects à l'aide de l'intuition et de ses méthodes. Les développements mathématiques qui tirent leur origine de l'intuition ne peuvent d'autre part être admis comme possession définitive de la science que lorsqu'ils sont ramenés à une forme logique rigoureuse. Réciproquement, le traitement abstrait des relations logiques ne peut nous suffire, tant que leur portée n'a pas été vivifiée à l'aide de chaque mode d'intuition et tant que nous n'apercevons pas les combinaisons multiples qui relient le *schéma* logique dans le domaine que nous avons choisi, avec les autres parties de nos connaissances. [118]

Lorsque nous supposons que les idées défendues par Klein dans cette conférence ont eu une incidence sur le traitement adopté par Weyl dans ses leçons en analyse complexe, nous ne formulons pas cette hypothèse au gré de rapprochements arbitraires. Tout d'abord, Weyl connaît certainement ce texte, qui est l'un des plus célèbres de Klein. En effet, dans son *Habilitationsvortrag* (1910), Weyl compare les sciences mathématiques à un arbre dont les racines s'enfonceraient de plus en plus profondément dans le sol, tandis que son feuillage se déploierait dans le ciel. [119] Il reprend au mot près une comparaison qui apparaît à la fin de la conférence de Klein pour justifier de manière imagée la complémentarité entre l'intuition et la logique en mathématiques. En outre, dans son cours élémentaire d'introduction à l'analyse complexe, Weyl a régulièrement recours à des intuitions physiques et / ou géométriques conformément aux prescriptions de Klein en matière d'enseignement des mathématiques à un niveau élémentaire à l'université. Enfin, Weyl revendique l'idée de complémentarité entre la logique et l'intuition en s'appuyant sur les deux figures tutélaires que sont Weierstrass et Riemann. Nous en déduisons que les leçons de Weyl en analyse complexe sont influencées non seulement par l'ouvrage de Klein sur les surfaces de Riemann mais encore par ses prescriptions générales en matière d'enseignement des mathématiques à l'université.

118. *ibid.*, p. 240, p. 128 pour la trad. en français.

119. H. Weyl, ≪ Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe ≫, *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. I, *op. cit.*, p. 304.

Poincaré soutient des arguments très proches de ceux de Klein dans deux articles de 1899 et de 1900 dont nous avons déjà indiqué les références. Poincaré s'appuie sur le domaine de l'analyse réelle dont les développements au XIX^{e} siècle sont marqués par des progrès significatifs en termes de *rigueur*. Il oppose *rigueur* et *représentations intuitives* ; tout se passe d'abord comme s'il se prononçait en faveur d'une réduction de la « part de l'intuition dans la science » qui est corrélative d'une plus grande rigueur.[120] Celle-ci consiste pour Poincaré à privilégier la « logique formelle » au détriment de l'intuition. Il précise ensuite son propos en affirmant que cette rigueur revient à réduire le nombre de notions dites primitives jusqu'à ce qu'il ne reste plus que les nombres entiers et leurs opérations. On retrouve là l'une des définitions de l'arithmétisation des mathématiques proposée par Klein en 1895. Cette entreprise de réduction des mathématiques à l'arithmétique ouvre le champ à des fonctions logiquement concevables mais contre-intuitives en analyse :

> C'est alors que l'on vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées, etc. etc.[121]

Poincaré se réfère implicitement à deux types d'exemples : celui d'une fonction discontinue sur une partie dense des réels et pourtant intégrable que propose Riemann dans son mémoire d'habilitation de 1854 afin de montrer que l'intégrabilité ne suppose pas la continuité ; celui des fonctions partout continues et nulle part dérivables de Weierstrass. Nous avons là deux types de fonctions « bizarres » qui conduisent à distinguer nettement intégrabilité, continuité et dérivabilité. Or, ces cas « pathologiques » qui se donnent pour exceptionnels parce qu'ils sont inhabituels ne constituent pas des cas singuliers isolés : ils permettent d'envisager les concepts d'intégrabilité — au sens de Riemann —, de continuité et de dérivabilité dans toute leur généralité, i.e. en supprimant certaines conditions superflues. Le privilège accordé à la logique sur l'intuition inverse le rapport du particulier au général : les fonctions « bizarres » que construisent Riemann et Weierstrass sont exceptionnelles au regard de l'intuition, mais elles nous disent le général au regard de la logique : parmi les fonctions intégrables, certaines sont discontinues sur une partie dense de $\mathbb{R}$. La classe des fonctions intégrables que nous pouvons *concevoir logiquement* est bien plus étendue que la classe des fonctions intégrables que nous *appréhendons intuitivement*. D'où l'argument de Poincaré :

> Bien plus, au point de vue logique, ce sont ces fonctions étranges qui sont les plus générales ; au contraire, celles qu'on rencontre sans les avoir cherchées, et qui suivent des lois simples,

120. H. Poincaré, « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *op. cit.*, p. 157.
121. *ibid.*, p. 157.

n'apparaissent plus que comme un cas très particulier, il ne leur reste qu'un tout petit coin. [122]

Si donc l'enseignement des mathématiques se fondait sur la seule logique, il faudrait commencer par les définitions générales de l'intégrabilité, de la continuité et de la dérivabilité et présenter ces fonctions « bizarres » pour contrer les bornes étroites que nous impose l'intuition et qui s'accompagnent de confusions au niveau des concepts. Mais Poincaré s'inscrit justement en faux contre cette manière de procéder qui conduirait les élèves à penser que les mathématiques se perdent dans d'inutiles subtilités. Une trop grande généralité dans l'appréhension des concepts crée au surplus un sentiment d'arbitraire. Si donc Poincaré adhère à une lecture historique de l'analyse au XIX^{e} siècle comme progrès vers une plus grande rigueur, il n'estime pas qu'il faudrait se calquer sur ce développement pour réformer l'enseignement des mathématiques et évincer l'usage de l'intuition dans les cours d'analyse. Sur ce point, ses conclusions rejoignent exactement celles de Klein dans son article sur l'arithmétisation des mathématiques. Aussi Poincaré affirme-t-il avec force :

> Le but principal de l'enseignement mathématique est de développer certaines facultés de l'esprit, et parmi elles, l'intuition n'est pas la moins précieuse. C'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le monde réel ; et quand même les mathématiques pures pourraient s'en passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler l'abîme qui sépare le symbole de la réalité. [123]

Mais les conclusions de Poincaré ne s'arrêtent pas à l'enseignement des mathématiques. Bien qu'il reconnaisse la pertinence des apports de Weierstrass en analyse réelle, il démontre que les mathématiques sont irréductibles à la logique formelle. Il tient à insister sur la place et les fonctions de l'intuition non seulement dans l'enseignement des mathématiques mais également dans la production de nouvelles connaissances en mathématiques. Telle est la motivation principale de son article de 1900 intitulé « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques » que Poincaré reprendra à quelques modifications près dans le chapitre premier de *La valeur de la science* (1905). L'argumentation suivie par Poincaré est marquée par une tension entre l'intuition et la logique qui recouvre *partiellement* la distinction entre deux types de mathématiciens : les *analystes* et les *géomètres*. Les « analystes » sont « avant tout préoccupés de logique », alors que les « géomètres » se laissent guider par l'intuition. Poincaré insiste sur le fait que cette distinction ne recouvre aucun champ disciplinaire : il considère par exemple Riemann comme un géomètre au vu de ses travaux en analyse complexe notamment. Sans donc avoir précisé ce qu'il entend par logique et par intuition,

122. *ibid.*, p. 157.
123. *ibid.*, p. 160.

Poincaré commence par classer d'illustres mathématiciens en fonction de ces deux grandes catégories que sont les analystes et les géomètres. On trouve Weierstrass et Hermite dans la première catégorie ; Klein et Lie sont rangés dans la seconde catégorie aux côtés de Riemann.

Nous avons donc affaire à deux types de mathématiciens qui seraient d'égale dignité. Mais Poincaré ne s'en tient pas à ce constat, il revient sur l'intuition (sensible) et il montre qu'elle ne donne pas la rigueur, en particulier parce qu'elle peut entraîner des erreurs. Il reprend alors à son compte deux exemples qui pourraient nous laisser croire qu'il abonde dans le sens de Weierstrass : sont invoqués successivement les fonctions partout continues, nulle part dérivables et le principe de Dirichlet. Pour Poincaré, l'intuition est en cause lorsque nous croyons que ≪ toute fonction continue a une dérivée ≫ ou que le principe de Dirichlet va de soi. On retrouve dans cet article une même vision de l'histoire de l'analyse au XIX^{e} siècle en direction d'une plus grande rigueur. Poincaré rejoint ici au mot près la description proposée par Klein dans ≪ Über Arithmetisierung der Mathematik ≫ comme en témoigne le passage suivant :

> Il ne reste plus aujourd'hui en Analyse que des nombres entiers ou des systèmes finis ou infinis de nombres entiers, reliés entre eux par un réseau de relations d'égalité ou d'inégalité.
> Les mathématiques, comme on l'a dit, se sont arithmétisées. [124]

Mais, par un mouvement de balancier, Poincaré montre que cette plus grande rigueur ne saurait faire l'économie de l'intuition, d'abord critiquée parce qu'elle serait trompeuse. Poincaré s'oppose à une tendance logiciste, alors représentée notamment par Russell, qui consiste à réduire les mathématiques à la logique pure. Dans ce cas de figure, les mathématiques s'apparenteraient à des tautologies et nulle connaissance nouvelle ne pourrait voir le jour. C'est alors seulement qu'il précise ce qu'il entend par intuition à laquelle il attribue trois sens. L'intuition peut être entendue (i) soit comme un appel aux sens et à l'imagination, (ii) soit comme une généralisation par induction à l'image de ce qui se produit dans les sciences expérimentales, (iii) soit comme intuition du nombre pur. Seules les deux premières sont sources d'erreur. Nous devons donc relativiser l'opposition entre l'intuition et la rigueur à laquelle Poincaré semblait d'abord souscrire. De plus, l'intuition du nombre pur, que Poincaré situe au fondement du raisonnement par récurrence, est l'instrument essentiel dont se sert l'analyste à côté de la logique. Nous devons également relativiser la superposition entre les deux couples de distinctions : analyste / géomètre ; logique / intuition. L'analyste s'appuie sur l'intuition du nombre pur en plus de la logique pour produire des mathématiques. Pourquoi Poincaré fait-il cette importante correction ? En voici la raison : si elles étaient réduites à la

124. *ibid.*, p. 120.

logique, les mathématiques seraient stériles puisqu'elles s'apparenteraient à des tautologies. Or, les analystes produisent des mathématiques nouvelles. Donc, il faut qu'ils soient guidés par une intuition d'une nature particulière que Poincaré appelle l'intuition du nombre pur. Derrière ces aménagements, Poincaré défend une thèse extrêmement forte : la logique n'est jamais qu'un *instrument de démonstration*, seule l'intuition est un *instrument d'invention* à proprement parler.

Si l'on analyse plus finement ce texte, on peut remarquer que Poincaré prête quatre fonctions aux représentations intuitives en mathématiques :

(i) tout d'abord elles sont nécessaires afin *d'appréhender* des objets mathématiques, sans elles nous serions tentés de considérer les mathématiques comme un ensemble de concepts arbitrairement posés, sans lien avec réel ;

(ii) ensuite, elles ont une fonction heuristique, au sens où elles nous aident à formuler des problèmes inédits et à inventer de nouvelles connaissances ;

(iii) par ailleurs, bien qu'elles ne permettent pas de résoudre rigoureusement une difficulté, elles nous aident cependant à comprendre comment elle doit être posée ;

(iv) enfin, elles jouent un rôle essentiel afin de saisir une démonstration d'un seul tenant, au lieu d'en analyser les moindres parties de manière décousue — on retrouve là l'idée kantienne selon laquelle les connaissances synthétiques ne sont possibles que parce qu'elles reposent sur l'intuition.

Weierstrass adopte essentiellement un point de vue normatif lorsqu'il critique le manque de rigueur consubstantiel à toute représentation intuitive en mathématiques. Klein et Poincaré adoptent un point de vue tout aussi normatif lorsqu'ils valorisent le recours à l'intuition dans l'enseignement ou dans la recherche en mathématiques. À les suivre, un mathématicien privé de représentations intuitives ou d'une pensée géométrique serait comme un peintre privé de ses mains. Poincaré s'appuie également sur la figure de l'écrivain pour montrer que l'intuition est essentielle dans la production et donc l'invention de connaissances nouvelles en mathématiques : « sans [l'intuition] le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idée ».[125] La logique est à la grammaire, ce que l'intuition est aux idées. Cette analogie illustre l'idée selon laquelle la logique est instrument de démonstration, l'intuition un instrument d'invention.

Nous l'avons suffisamment souligné : l'intuition ne constitue pas le monopole des géomètres. Poincaré est bien obligé d'associer l'intuition du nombre pur aux travaux des analystes, si-

125. H. Poincaré, « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *op. cit.*, p. 161.

non il condamnerait ces derniers à ne produire que des tautologies. Le fait est qu'il naturalise la distinction géomètre / analyste puisqu'il prétend qu'ils renvoient à deux types d'esprits mathématiques différents par nature :

> C'est la nature même de leur esprit qui les fait logiciens ou intuitifs, et ils ne peuvent la dépouiller lorsqu'ils abordent un problème nouveau. Ce n'est pas non plus l'éducation qui a développé en eux l'une des deux tendances qui a étouffé l'autre. On naît mathématicien, on ne le devient pas, et il semble aussi qu'on naît géomètre, ou qu'on naît analyste. [126]

Comme nous l'avons déjà précisé, il classe Klein parmi les géomètres. Pour justifier ce choix, il s'appuie sur les travaux que celui-ci consacre justement aux surfaces de Riemann :

> [Klein] étudie une des questions les plus abstraites de la théorie des fonctions ; il s'agit de savoir si, sur une surface de Riemann donnée, il existe toujours une fonction admettant des singularités données. Que fait le célèbre géomètre allemand ? Il remplace sa surface de Riemann par une surface métallique dont la conductibilité électrique varie suivant certaines lois. Il met deux de ses points en communication avec les deux pôles d'une pile. Il faudra bien, dit-il, que le courant passe, et la façon dont ce courant sera distribué sur la surface définira une fonction dont les singularités seront précisément celles qui sont prévues par l'énoncé. [127]

Nous pouvons donc observer que Klein et Poincaré adoptent la même stratégie visant d'abord à reconnaître les progrès permis par l'accès à une plus grande rigueur en analyse, avant de donner la part belle à l'intuition dans la production de connaissances nouvelles en mathématiques. Tous deux rejettent fermement la possible réduction des mathématiques à la logique. S'ils jugent que l'analyse s'est « arithmétisée » sous l'impulsion des analystes, ils n'hésitent pas à valoriser les contributions des grands géomètres en analyse, à commencer par Riemann. Derrière une attitude de compromis marquée par une forme de complémentarité entre la logique et l'intuition, leur argumentation n'en demeure pas moins clivante. Poincaré se hasarde ainsi à classer non pas des textes, mais des « esprits » mathématiques avec une assurance confondante. Il s'appuie donc au moins sur deux présupposés : (i) ces esprits mathématiques se développeraient indépendamment de tout processus de socialisation que Poincaré écarte d'un revers de la main, sans doute pour ne pas obscurcir la distinction tranchée entre géomètres et analystes ; (ii) les textes mathématiques refléteraient exactement ou manifesteraient parfaitement ces deux manières, distinctes par nature, de faire des mathématiques.

Nous savons bien maintenant qu'il n'en va pas ainsi. Les écarts peuvent être extrêmement différents parmi les productions et les stratégies d'écriture utilisées par un même mathématicien. Elles sont fonction de sa trajectoire sociale, des traditions institutionnelles dont il

126. H. Poincaré, Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques », *op. cit.*, p. 115-116.
127. *ibid.*, p. 116.

dépend, de la nature des textes (articles, cours, conférences, etc.), des destinataires visés, de la période examinée et des domaines de recherche investis. Nous voudrions prendre deux exemples pour mettre en défaut la classification opérée par Poincaré. Le premier est d'un usage polémique. Certes, si l'on se réfère à la thèse de Riemann ou encore à sa *Leçon d'habilitation*, elles vont dans le sens d'un projet de géométrisation de l'analyse. Mais il ne faudrait pas tirer prétexte de ce projet pour essentialiser « le » mathématicien Riemann et considérer qu'il raisonne toujours en géomètre ou que tous ses textes reflètent une même tendance à raisonner géométriquement — ce que l'on peut d'ailleurs faire de bien des manières différentes. Si, par exemple, on prend son mémoire d'habilitation (1854), sa manière de procéder nous semblerait assez singulière : il s'interroge sur les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité d'une fonction d'une variable réelle. Il *analyse* donc le concept de fonction intégrable et il montre qu'il existe des fonctions discontinues sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$ et pourtant intégrables. Dans ce mémoire, Riemann raisonne à bien des égards en *analyste*. Dans le fond, Poincaré essentialise et généralise la distinction entre géomètres et analystes en s'appuyant notamment sur le clivage entre riemanniens et weierstrassiens sur les fondements de l'analyse complexe, lequel clivage est lui-même situé historiquement puisqu'il cesse de faire sens aux yeux de Hilbert, Koebe et Weyl à Göttingen au début du XX^{e} siècle.

La distinction entre analyste et géomètre ne semble pas même opératoire à s'en tenir à un même texte. L'exemple de Weyl est ici remarquable. Dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*, il montre comment on peut définir de manière précise une fonction sur une surface de Riemann, ce qui nécessite préalablement une axiomatisation de ce même concept ; à cette fin, il fait appel à la rigueur weierstrassienne et à la méthode axiomatique prônée par Hilbert. Dans le même temps, il n'hésite pas à revenir sur l'étude particulière et la représentation géométrique de certaines surfaces de Riemann remarquables comme, par exemple, les tores complexes ; on s'aperçoit alors qu'il emprunte de tels résultats à l'ouvrage ouvertement plus géométrique de Klein. On verrait également que dans ses cours d'introduction à l'analyse complexe (1910), Weyl accorde une large place aux intuitions physiques dans la stricte tradition kleinéenne ; il utilise en revanche la méthode axiomatique avec parcimonie. L'usage de représentations intuitives est ici lié à une certaine stratégie pédagogique doublée du fait que Weyl s'en tient à des résultats d'un niveau élémentaire dont il s'agit de saisir pas à pas les subtilités.

La question est donc moins de ranger les mathématiciens en catégories étroites que de définir les diverses modalités et les différents usages d'un raisonnement géométrique ou analytique en fonction de la nature d'un texte mathématique, de ses destinataires et de sa réception.

Toujours est-il que les réflexions de Klein et de Poincaré sur la place de l'intuition dans l'enseignement et la recherche en mathématiques sont convergentes et elles auront une incidence sur Weyl. Preuve qu'il ne faut pas survaloriser l'importance de la méthode axiomatique dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*.

2.4 Conclusion du deuxième chapitre

Les travaux de Klein sur l'icosaèdre et, plus généralement, sur la théorie des fonctions modulaires a été pour nous l'occasion de préciser sa conception de l'unité des mathématiques. Celle-ci se caractérise par la *mise en relation* de domaines extrêmement divers des mathématiques à partir de l'étude d'un même objet que Klein sait étudier à différents points de vue. C'est ce qui ressort de notre analyse des articles successifs que Klein consacre à l'icosaèdre entre 1875 et 1879 et dont il rassemblera les résultats dans ses *Vorlesungen über das Ikosaeder* (1884). Ajoutons qu'il assigne un rôle central à la théorie des groupes et aux représentations géométriques pour procéder à une telle unification. Dans le domaine des fonctions modulaires, un tel mode d'unification est déjà à l'œuvre dans l'écrit de Dedekind à Borchardt dont nous avons commenté les trois premiers paragraphes.

Les questions d'*unité* théorique sont récurrentes dans l'œuvre de Klein puisqu'elles constituent le motif principal qu'il met en avant au début du *Programme d'Erlangen* (1872) ou dans sa théorie générale des fonctions modulaires (1879 / 1881). Cela posé, il est judicieux de dire à la suite de Weyl qu'une telle unité est *polyphonique* puisque Klein combine des méthodes géométriques, analytiques et algébriques. C'est, en tous les cas, ce qui ressort de ses travaux sur les fonctions modulaires. Dans une certaine mesure, Weyl se situe ici dans le prolongement de Klein ; ses travaux sur les surfaces de Riemann (1913) ou sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples (1925-1926) se fondent également sur la comparaison et la combinaison de méthodes qui ne relèvent pas des mêmes domaines des mathématiques. L'idée d'une « unité polyphonique » est opératoire aussi bien chez Klein que chez Weyl. Cependant, nous avons montré que Klein refuse d'utiliser la méthode axiomatique, alors que Weyl en reconnaît la pertinence pour définir des concepts de manière précise et générale.

En outre, notre commentaire des travaux de Klein sur l'icosaèdre, la quartique « de Klein » et la théorie générale des fonctions modulaires a permis d'apprécier *in concreto* l'argument de Weyl selon lequel Klein entend faire converger la théorie de Galois et les idées géométriques de Riemann. Nous montrerons dans le dernier chapitre de la première partie, le dernier chapitre de la deuxième partie et le deuxième chapitre de la troisième partie que

Weyl prolonge sous des angles très différents l'idée de Klein qui consiste à faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann.

Notre commentaire des apports de Klein en théorie des fonctions modulaires peut maintenant être complètement justifié. Certes, il n'existe pas de contributions significatives de Weyl dans ce domaine. Pour autant, il connaît parfaitement les articles de Klein sur l'icosaèdre et, plus généralement, sur les fonctions modulaires. En outre, il est attentif à la conception de l'unité des mathématiques qui ressort de ces travaux et il insiste sur l'admirable combinaison des idées de Galois et de Riemann que Klein parvient alors à mettre en œuvre. Précisément, Weyl transpose ces deux aspects de la théorie kleinéenne des fonctions modulaires aux domaines de recherche qui seront les siens.

Ainsi, il est inexact de croire que Weyl ne s'approprie que l'ouvrage de Klein de 1882 sur les surfaces de Riemann. Cette erreur dérive du présupposé suivant : seul le « contenu » d'un texte scientifique ferait l'objet d'un processus d'appropriation par ses lecteurs. Admettons cette hypothèse. Alors, étant donné la grande proximité en termes de contenu entre *Die Idee der Riemannschen Fläche* de Weyl (1913) et *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* de Klein (1882), nous pourrions penser que seul cet ouvrage de Klein mériterait d'être évoqué pour cerner l'œuvre de Weyl. Or, il s'avère qu'un lecteur ne s'approprie pas seulement un « contenu » parfaitement thématisé, mais aussi des méthodes, un projet général ou une conception sous-jacente des mathématiques qu'il peut déplacer et transposer à d'autres domaines des mathématiques. Ainsi, Weyl est moins sensible au contenu de la théorie des fonctions modulaires qu'à la conception générale de l'unité des mathématiques et du lien entre « Galois » et « Riemann » qui en ressort. Or, ces deux éléments affecteront durablement la pratique des mathématiques de Weyl lui-même dans des domaines qui ne renvoient pas directement à la théorie des fonctions modulaires.

Revenons maintenant à l'ouvrage général de Klein sur les surfaces de Riemann (1882). Weyl en retient deux aspects. En premier lieu, Klein adopte un niveau remarquable de généralité et d'abstraction. Il conçoit les surfaces de Riemann abstraitement, i.e. en elles-mêmes et non comme des surfaces revêtant le plan complexe ou la sphère de Riemann. Il sait les classer du point de vue de l'*analysis situs* en se fondant sur le théorème de Jordan et des *types* qu'il appelle « Normalflächen » : les tores à g trous ou les sphères à g anses. Il analyse de manière systématique leur structure analytique, comme le montre son raisonnement sur les surfaces de genre $g = 1$. Enfin, il aboutit à des résultats généraux sur l'espace des modules ou le nombre d'automorphismes que comporte une surface de Riemann, ce nombre étant fini pour $g \geqslant 2$. Ce niveau de généralité et d'abstraction est commandé par l'idée selon laquelle

la théorie des surfaces de Riemann doit se situer au fondement de l'analyse complexe. Weyl reprend à son compte et il précise cette idée dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Pour ce faire, il s'appuie sur la méthode axiomatique à laquelle Klein est totalement étranger dans cet ouvrage. En second lieu, Klein a systématiquement recours à des représentations physico-géométriques pour deux raisons. Tout d'abord, il estime que Riemann a lui-même développé ses réflexions sur les fonctions d'une variable complexe en se fondant sur des intuitions physiques, d'où la tentative de Klein en vue de rapprocher les travaux de Riemann en analyse et ceux de Faraday ou encore de Maxwell en électromagnétisme. Ensuite, il estime que ces représentations physico-géométriques ont une fonction heuristique et didactique essentielle.

Ces arguments sont entièrement repris par Weyl. Par exemple, à l'instar de Klein, il souligne la « proximité » entre les idées géométriques de Riemann et la physique des actions de contact de Faraday et de Maxwell.[128] En outre, dans ses cours en analyse complexe à Göttingen en 1910 / 1911, Weyl accorde une large place aux représentations physico-géométriques à des fins didactiques et heuristiques, conformément aux prescriptions de Klein en matière d'enseignement des mathématiques qui ressortent de son célèbre article « Über Arithmetisierung der Mathematik ».

Ainsi, la référence à Klein est essentielle pour cerner au moins partiellement *Die Idee der Riemannschen Fläche* de Weyl. Dans cet ouvrage, Weyl combine d'une part les méthodes de Weierstrass et de Riemann, d'autre part les approches de Klein et de Hilbert. En effet, s'il reconnaît la nécessité de formaliser les principaux concepts mathématiques — variétés topologiques bidimensionnelles, surfaces de Riemann, revêtements — en se fondant sur la méthode axiomatique, il insiste dans le même temps sur le fait qu'une telle formalisation ne se suffit pas à elle-même. Elle ne peut pas faire l'économie de représentations intuitives, aussi défaillantes soient-elles à première vue. Mais la référence à Klein est également décisive pour saisir les projets à plus long terme de Weyl. Nous pensons en particulier au lien entre la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann qui est une constante dans l'œuvre de Weyl. Enfin, n'oublions pas que ce dernier hérite partiellement de la conception kleinéenne de l'intuition et de l'unité des mathématiques. Les critiques de Klein contre l'arithmétisation des mathématiques en 1895 nous font irrésistiblement penser à celles que Weyl opposera à une « algébrisation » des mathématiques dans « Topologie und abstrakte Algebra » en 1931. Ce rapprochement ne doit cependant pas effacer l'écart historique qui sépare ces deux conférences.

128. Dans la sous-section 1.2.6 (deuxième partie) de notre thèse, nous montrerons que Weyl emprunte à Klein ce rapprochement lorsqu'il commente le *Habilitationsvortrag* de Riemann en 1919, 1921 et 1923.

Chapitre 3

Weyl et l'axiomatisation des surfaces de Riemann

Comme nous l'avons souligné dans notre introduction générale à la présente partie, l'ouvrage de Weyl sur les surfaces de Riemann (1913) ne marque pas le point de départ d'une conception *abstraite* des surfaces de Riemann. Notre analyse de la *Dissertation* de Riemann et du § 12 de sa *Théorie des fonctions abéliennes* nous a permis de montrer que Riemann commence à concevoir les surfaces de Riemann abstraitement, même s'il demeure attaché à des représentations géométriques. Nous avons insisté à ce propos sur le fait qu'un projet similaire de géométrisation de l'analyse anime la *Dissertation* (1851) et le *Habilitationsvortrag* (1854). De même, dans notre commentaire de l'ouvrage de Klein publié en 1882, nous avons indiqué qu'au-delà du recours à des intuitions physico-géométriques, Klein entend classer systématiquement les surfaces de Riemann compactes connexes. Autrement dit, un processus d'abstraction est bien à l'œuvre dans les travaux de Riemann et de Klein sur les surfaces de Riemann. Ils illustrent comment des objets mathématiques peuvent être conçus *abstraitement* sur la base de représentations intuitives. Leurs contributions dans ce domaine se singularisent par rapport aux méthodes algébriques et locales de Weierstrass, lesquelles relèvent selon Klein d'un processus d'≪ arithmétisation des mathématiques ≫ dont il se démarque. En outre, ni Riemann, ni Klein ne préfigurent le recours à la méthode axiomatique, que ce soit en topologie ou en analyse complexe.

Il n'y a pas une, mais plusieurs manières de concevoir abstraitement les surfaces de Riemann et les fonctions d'une variable complexe. L'ouvrage de Weyl de 1913 permet de les faire converger puisqu'il s'appuie sur (i) le processus de prolongement analytique de Weierstrass, (ii) l'approche plus géométrique de Riemann-Klein et (iii) la méthode axiomatique qu'il em-

prunte à Hilbert. Cette remarque ne doit pas nous inciter à penser que l'ouvrage de Weyl de 1913 serait seulement *l'effet cumulatif* de travaux antérieurs qu'il se contenterait, pour ainsi dire, de compiler. Si Weyl ne présente guère de résultats et de théorèmes nouveaux, il n'en reste pas moins qu'il opère bel et bien un *décrochage* — mais non pas une rupture radicale — sur le plan de la méthode et en termes de niveau de généralité par rapport à ses prédécesseurs. À certains égards, on *pourrait penser* que Weyl réalise en analyse complexe ce que Steinitz était parvenu à faire trois ans plus tôt en algèbre dans son *Algebraische Theorie der Körper* : hiérarchiser convenablement les concepts utilisés en les soumettant logiquement les uns aux autres ; proposer des définitions implicites de ces mêmes concepts en formulant les axiomes auxquels ils satisfont sans tenir compte de la nature des objets auxquels ils renvoient ; utiliser la rigueur des méthodes et raisonnements ensemblistes. Toutefois, ce parallèle ne pourra pas et ne devra pas être mené jusqu'au bout. l'*Algebraische Theorie der Körper* relève des mathématiques structurales. Ce n'est pas le cas de *Die Idee der Riemannschen Fläche* et nous le montrerons.

Pour mesurer le caractère novateur de l'ouvrage de Weyl — sans nier les nombreux emprunts à ses prédécesseurs —, formulons clairement les difficultés auxquelles il se mesure : (i) comment élever *rigoureusement* les surfaces de Riemann au rang de *fondement* en théorie des fonctions d'une variable complexe ? ; (ii) quel lien explicite existe-t-il entre les variétés bidimensionnelles et les surfaces de Riemann ? ; (iii) comment parvenir à une définition formellement exacte et générale des surfaces de Riemann, en faisant abstraction du cadre restrictif dans lequel elles ont été pour l'essentiel étudiées jusque-là, à savoir la théorie des fonctions algébriques d'une variable complexe ? ; (iv) comment dialectiser et donc synthétiser les points de vue de Weierstrass et de Riemann ? Weyl répond *d'un seul tenant* à des problèmes de fondement, d'unité, de généralité, de rigueur et de synthèse en théorie des surfaces de Riemann.

Ainsi l'hypothèse selon laquelle les surfaces de Riemann ont un statut de *fondement* en analyse complexe est essentiellement due à Klein en 1882. Celui-ci refuse de leur prêter un rôle auxiliaire en analyse complexe : elles ne sauraient être introduites dans l'unique but de visualer ou de comprendre le comportement de certaines « fonctions » initialement multivaluées sur le plan complexe. Entendons-nous ici sur le sens que l'on doit assigner au concept de fondement. Rapporté à une théorie — et non pas aux mathématiques tout entières —, un fondement doit être logiquement premier par rapport aux connaissances qui en dérivent. Mais cette antériorité logique ne fait pas tout : un fondement doit également être considéré comme l'*élément générateur* d'un système de connaissances. L'argument selon lequel les surfaces de Riemann se situent au « fondement » de la théorie des fonctions d'une

variable complexe est central et décisif dans l'ouvrage de Weyl, comme en témoigne le passage suivant :

> Nous sommes parfois encore confrontés à l'idée selon laquelle la surface de Riemann ne serait rien d'autre qu'une ≪ image ≫, un moyen — que l'on estime précieux et suggestif —, afin de représenter et de rendre intuitivement appréhendable le caractère multiforme [Vieldeutigkeit] des fonctions. Une [telle] conception est totalement absurde. La surface de Riemann est un élément objectif indispensable à la théorie, elle en est bel et bien le fondement. Elle n'est pas non plus quelque chose, que l'on doit plus ou moins artificiellement induire a posteriori à partir des fonctions analytiques ; au contraire, il faut la considérer pour l'essentiel comme la terre natale sur laquelle les fonctions peuvent avant tout grandir et se développer. [1]

Cela posé, deux difficultés méritent d'être surmontées pour que la théorie des surfaces de Riemann devienne la clé de voûte dans l'étude des fonctions d'une variable complexe : (1) les contours du concept de surface de Riemann doivent être clairement déterminés ; (2) il convient de s'assurer que la théorie des surfaces de Riemann exclut l'usage de principes incertains, voire arbitraires, au sens où l'on ignorerait leur domaine de validité. Précisément les écrits de Riemann ne satisfont pas à ces deux réquisits. En effet, Riemann se contente d'expliciter la notion de surface de Riemann, il ne la définit pas rigoureusement ; jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle, on ne sait pas si le principe de Dirichlet — qui occupe une place centrale dans la *Dissertation* de Riemann — est valide, comme le montrent assez les objections de Weierstrass et de Schwarz dans les années 1870.

Il revient justement à Hilbert et à Weyl d'avoir levé les deux obstacles qui empêchaient de voir la méthode et les concepts utilisés par Riemann autrement que comme des outils séduisants mais fort imparfaits, voire comme des sources d'erreurs en analyse complexe. En effet, Hilbert démontre le principe de Dirichlet en 1900-1904 ; parallèlement, il effectue une première tentative, encore imparfaite, d'axiomatisation des variétés topologiques bidimensionnelles. Ces deux résultats permettront à Weyl de rendre formellement adéquate l'antériorité logique de la théorie des surfaces de Riemann par rapport à l'étude des fonctions d'une variable complexe. Le plan adopté par Weyl est explicite : la première partie de l'ouvrage est consacrée au concept de surface de Riemann et à la topologie des surfaces de Riemann ; la deuxième partie a pour objet l'étude des fonctions définies sur ces mêmes surfaces. Sans doute une définition rigoureuse et générale des surfaces de Riemann est-elle également suspendue aux progrès décisifs que Hilbert et Weyl accomplissent plus globalement en topologie ensembliste : ils donnent ses contours quasiment définitifs au concept de *voisinage*.

1. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.* préface, p. VI.

Entendons-nous maintenant sur ce que signifient les idées de synthèse et d'unité dans l'ouvrage de Weyl. Comme nous l'avons souligné, la *synthèse* opérée par Weyl n'est pas une simple compilation de connaissances théoriques dispersées : il s'agit de combiner les approches respectives de Weierstrass et de Riemann. Il n'y a donc pas synthèse sans un *dépassement* de l'antagonisme qui semblait rendre incommensurables les méthodes weierstrassienne et riemannienne. Bref, une telle synthèse n'est pas donnée à l'avance et elle ne procède pas par accumulation ou sommation d'énoncés déjà établis. Ce n'est pas parce que Weyl s'approprie des éléments de connaissance dus à Riemann, Weierstrass, Klein, Hilbert ou encore Brouwer qu'il faudrait minimiser les innovations conceptuelles et formelles qu'il a dû introduire pour que ces mêmes éléments fassent partie d'un tout cohérent. De plus, Weyl montre pour la première fois explicitement en quoi le concept de surface de Riemann tel qu'il apparaît dans la *Disseration* de 1851 est assujetti à la notion plus générale de variété. Bref, l'unité qui caractérise son ouvrage est l'effet (i) d'une *dialectique* entre les méthodes de Riemann et de Weierstrass, (ii) d'une *synthèse* entre les procédures intuitives de Klein et les procédures axiomatiques de Hilbert et (iii) d'une *hiérarchie* entre les concepts de variété et de surfaces de Riemann. Weyl croit alors expliciter le lien sous-jacent entre la *Dissertation* de Riemann (1851) et son *Habilitationsvortrag* (1854).

Nous l'avons également souligné : les surfaces de Riemann ne peuvent tenir lieu de principes en analyse complexe que si elles font l'objet d'un traitement rigoureux. C'est là toute la distance qui sépare l'ouvrage de Weyl de celui de Klein. Mais cela ne doit pas nous laisser croire qu'en 1913 (1) Weyl rejetterait d'un revers de la main l'approche intuitive de Riemann et de Klein en analyse complexe, (2) qu'il adhérerait au « formalisme », (3) que son ouvrage devrait être lu à l'aune des méthodes structurales en mathématiques. Certes, il insiste dans sa préface sur le fait que l'intuition naïve est trompeuse : elle peut générer des confusions conceptuelles en mathématiques — Klein n'aurait lui-même pas démenti ce point. Cependant il n'adopte pas une position dogmatique qui reviendrait à exclure par principe toute représentation intuitive dans l'élaboration des connaissances mathématiques. Ses cours de 1910-1911 en analyse complexe, de même que certains passages de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, montrent qu'il n'en est rien. En outre, il sera nécessaire de différencier une exigence de *formalisation* qui anime l'ouvrage de Weyl sur les surfaces de Riemann et une position *formaliste* au sens strict qui ne caractérise pas la conception weylienne des mathématiques en 1910-1913. Bien qu'il s'appuie sur la méthode axiomatique pour définir des concepts indépendamment de la nature des objets auxquels ils renvoient conformément aux prescriptions de Hilbert, il se situe également dans le sillage de Klein.

Ainsi, avec la publication de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl n'est pas le précurseur des mathématiques structurales en analyse. Ses apports ne sont pas comparables à ceux de Steinitz en algèbre ni à ceux de Hausdorff en topologie générale. [2] Par exemple, Steinitz met en exergue la distinction entre corps parfaits et corps imparfaits : il entend ainsi aller au-delà de la théorie commune des équations de Galois sur laquelle il ne revient d'ailleurs pas explicitement. L'article de Steinitz constitue l'une des premières études d'une « structure » algébrique pour elle-même ; tous les théorèmes qu'il démontre sont des théorèmes de structure énoncés à partir d'un « enrichissement progressif » des concepts de corps et d'extension de corps. La méthode axiomatique est ainsi utilisée par Steinitz comme un *instrument de découverte* qui permet d'engendrer de nouveaux concepts, une nouvelle théorie et des théorèmes inédits. En revanche, dans son ouvrage sur les surfaces de Riemann, Weyl ne fait appel à la méthode axiomatique que pour clarifier et généraliser certaines définitions de concepts ; les théorèmes qu'il redémontre sont pour l'essentiel déjà établis par les analystes de la seconde moitié du XIX^{e} siècle.

Notre objectif est donc triple. (1) Il nous faut montrer que, dans son ouvrage sur les surfaces de Riemann, Weyl définit axiomatiquement les variétés bidimensionnelles et les surfaces de Riemann sans se préoccuper de questions métamathématiques touchant, par exemple, à la consistance des systèmes d'axiomes utilisés, ou encore à l'indépendance de ces mêmes axiomes. (2) Certes, son ouvrage consiste à formaliser rigoureusement les surfaces de Riemann et à proposer des démonstrations claires et concises du *principe de Dirichlet*, du *théorème de Riemann-Roch* ou du *théorème d'uniformisation*. Mais il serait erroné d'en déduire que Weyl adhère implicitement en 1913 à une thèse de style *formaliste* en mathématiques à laquelle il aurait renoncé en 1918-1921. Dès 1910-1913, il formule des réserves non seulement à l'encontre du logicisme — qui suppose de réduire les mathématiques à la logique formelle — mais également à l'encontre du formalisme qui perdrait tout contact avec les représentations intuitives par lesquelles des objets nous sont donnés. D'une part, dans ses cours à Göttingen en analyse complexe, Weyl s'approprie les méthodes de Klein fondées sur des intuitions physico-géométriques ; d'autre part, il fait siennes les conclusions qu'avait énoncées Klein sur la place de l'intuition en mathématiques dans son célèbre article sur l'arithmétisation des mathématiques (1895). (3) Enfin, il convient de décrire précisément la classification des revêtements à laquelle aboutit Weyl dans le § 9 de son ouvrage en lien avec le théorème

2. E. Steinitz, « Algebraische Theorie der Körper », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **137**, 1910, p. 167-309. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914 pour la première édition), *Werke*, Bd. II, Berlin, éd. Springer, 2002.

d'uniformisation qu'il redémontre au cours du § 19. En effet, la théorie des revêtements, que Weyl aborde exclusivement dans le contexte des surfaces de Riemann en 1911-1913, sera décisive lorsqu'il abordera la théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples en 1925-1926. Les travaux de Weyl sur les surfaces de Riemann (1911-1913), les variétés métriques (1918-1923) et les représentations de groupes (1924-1931 pour la période qui nous intéresse) ne sont pas restés imperméables les uns aux autres : ainsi, la référence à *Die Idee der Riemannschen Fläche* constitue une clé pour comprendre les passages que Weyl consacre en 1925-1926 à la démonstration du théorème de complète réductibilité dans le cas des groupes de Lie complexes semi-simples.

3.1 Le rejet de l'intuition naïve

Dans la préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl revient sur la place qu'il convient d'accorder à l'intuition en analyse complexe. Il montre en particulier que la représentation intuitive d'une courbe [Kurve] conduit à une conception naïve des propriétés de continuité et de dérivabilité. Pour le dire autrement, on ne saurait fonder l'analyse complexe sur des évidences intuitives. En ce sens, il reprend à son compte la critique weierstrassienne contre l'ambivalence et le caractère inapproprié de l'intuition *sensible*. Le manque de rigueur qu'elles induisent ne permet pas d'élaborer des connaissances rigoureuses, fondées sur des preuves marquées du sceau de l'universalité et de la nécessité logique. En dernière instance, il convient d'arithmétiser l'analyse au lieu de la constituer sur la base d'une intuition instable et fluente. Ainsi, la motivation principale de cet ouvrage, issu des cours donnés par Weyl durant le semestre d'hiver 1911-1912 à Göttingen, consiste à présenter *rigoureusement* la théorie des surfaces de Riemann. Weyl insiste sur la notion de rigueur [Strenge] qu'il rapporte (i) aux travaux de Weierstrass en analyse, (ii) à la méthode axiomatique de Hilbert et (iii) à la théorie des ensembles.

> Le présent écrit donne l'essentiel du contenu d'une leçon que j'ai prononcée durant le semestre d'hiver 1911-1912 à l'université de Göttingen et dont le but consistait à développer les idées principales de la théorie riemannienne des fonctions sous une forme qui satisfait aux exigences modernes de *rigueur*. Cette présentation rigoureuse, qui ne fait pas appel à l'incertitude intuitive, mais qui donne des preuves exactes, issues de la théorie des ensembles, à l'appui des concepts et propositions fondamentaux de l'*analysis situs* en jeu dans théorie des fonctions, reste encore à faire. [3]

3. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. V.

D'une part, cet argument reflète jusqu'à un certain point les réflexions de Weyl sur les fondements et le statut des définitions en mathématiques, comme en atteste le court article qu'il publie en 1910 dans les *Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter* sous le titre « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe » : la théorie des ensembles serait arrivée à maturité avec les travaux de Zermelo, elle permettrait de définir rigoureusement le concept de continuité et il reste à fonder l'*analysis situs* sur elle. Dans cet article, Weyl souligne l'importance de deux types de définitions : les définitions implicites, fondées sur la méthode axiomatique — c'est par exemple le cas de la définition d'un groupe abstrait, ensemble muni d'une loi de composition interne, satisfaisant aux axiomes suivants : associativité, existence d'un neutre, existence d'un inverse pour tout élément de cet ensemble — et les définitions par abstraction, fondées sur la relation d'équivalence — il en va ainsi de la construction des nombres complexes par Cauchy — ; or, ces deux manières de définir un concept interviennent explicitement dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*.[4] D'autre part, Weyl construit les surfaces de Riemann en s'appuyant sur le prolongement analytique de Weierstrass et il refuse de considérer les surfaces de Riemann comme un simple support intuitif pour appréhender les fonctions initialement multivaluées sur le plan complexe. Enfin, Weyl adhère à une lecture historique des mathématiques XIX^{e} siècle qui est communément partagée : celle-ci se développerait vers davantage de rigueur. Cette lecture est également faite par Poincaré ou encore Klein, malgré leur volonté de souligner l'importance de l'intuition dans la production de connaissances mathématiques nouvelles.

À s'en tenir à ces remarques, tout porterait à croire que Weyl adhère *sans concession* à l'entreprise de formalisation de l'analyse réelle et complexe réalisée par Weierstrass ou encore Schwarz au cours de la seconde moitié du XIX^{e} siècle. La référence à Weierstrass est pertinente à deux niveaux. Tout d'abord, on lui doit les définitions rigoureuses des concepts de continuité et de limite en analyse réelle sur un mode purement « arithmétique » ; Klein s'appuie d'ailleurs en partie sur la référence à Weierstrass lorsqu'il décrit le processus d'arithmétisation des mathématiques. En outre, Weierstrass exhibe le contre-exemple de fonctions d'une variable réelle partout continues et nulle part dérivables qui conduit à distinguer très nettement continuité et dérivabilité et à constituer, à partir de ces cas supposés exceptionnels, des classes très générales de fonctions. Weyl pense sans doute à ces arguments lorsque, dans sa préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche*, il montre que la représentation intuitive d'une courbe continue implique un défaut de rigueur et de généralité. La réduction de l'analyse aux axiomes

4. *ibid.*, p. 7 pour la notion de définition par abstraction et p. 17 pour une définition implicite d'une variété topologique de dimension 2.

de l'arithmétique et la déduction de l'*analysis situs* à partir de la théorie des ensembles permettent d'accéder à des classes très générales d'objets que notre intuition sensible n'est pas en mesure d'appréhender.

Weyl insiste sur l'écart entre le concept général [Allgemeinbegriff] de continuité et la représentation intuitive que nous en avons :

> Il est certain que le concept mathématique général de ≪ courbe continue ≫ recouvre beaucoup de choses, dont nous ne trouvons pas l'équivalent dans notre intuition. [5]

Cet argument souligne le hiatus entre détermination *conceptuelle* et représentation *intuitive* d'une propriété — ici la continuité —; l'idée d'un gain de généralité engendré par une mathématique arithmétisée est communément admise par les mathématiciens qui participent à la formalisation de l'analyse réelle et complexe à la fin du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle.

En dernière instance, Weyl montre que la définition la plus générale d'une courbe continue sur une surface topologique $\mathfrak{F}$ relève de la topologie ensembliste, comme en atteste le passage suivant :

> Une courbe continue γ sur $\mathfrak{F}$ est donnée lorsqu'à tout nombre réel λ de l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ est associé un point $\mathfrak{p}(\lambda)$ sur $\mathfrak{F}$ de telle sorte que la propriété de continuité soit satisfaite. Cela signifie que, si λ_0 est une valeur quelconque du paramètre λ, $\mathfrak{U}_0$ un voisinage quelconque du point $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ sur $\mathfrak{F}$, alors il existe toujours un réel positif ε tel que, pour tous les λ satisfaisant à la condition $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$, le point $\mathfrak{p}(\lambda)$ appartient à $\mathfrak{U}_0$. [6]

Ce passage montre que, pour définir une courbe continue sur une surface topologique, Weyl s'appuie sur le langage de Weierstrass et des concepts qui reflètent l'importance de la théorie des ensembles afin que l'*analysis situs* devienne parfaitement rigoureuse. Weyl justifie plus largement l'usage d'une approche ensembliste pour fonder la théorie des surfaces de Riemann à l'aide de l'argument suivant :

> Dans le cas de la théorie riemannienne des fonctions, un fondement ensembliste des concepts et des théorèmes topologiques qui entrent en jeu est d'autant plus nécessaire que les ≪ points ≫ qui constituent les variétés de base (courbes et surfaces), ne sont pas des points de l'espace au sens habituel du terme, mais des objets mathématiques quelconques, qui peuvent être d'une autre sorte (par exemple les éléments d'une fonction). [7]

5. *ibid.*, p. V : ≪ Ist es doch sicher, dass der mathematische Allgemeinbegriff der ≪ stetigen Kurven ≫vieles deckt, wozu wir Korespondierendes in unserer Anschauung nicht vorfinden ≫.

6. *ibid.*, p. 18.

7. *ibid.*, p. VI : ≪ Eine strenge mengentheoretische Fundierung der für die Riemannsche Funktionentheorie in Frage kommenden topologischen Begriffe und Theoreme ist um so mehr erforderlich, als die ≪ Punkte ≫, aus denen hier die Grundgebilde (die Kurven und Flächen) bestehen, keine Raumpunkte im gewöhnlichen

Ainsi, la notion de point doit être conçue de manière *formelle*, c'est-à-dire indépendamment de la nature des objets auxquels elle renvoie spontanément — Weyl s'appuiera d'ailleurs sur cet argument pour construire les surfaces de Riemann à partir du processus weierstrassien de prolongement analytique. Un tel niveau d'abstraction est déjà présent au début des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (1899). Ainsi, dans sa notice nécrologique consacrée à Hilbert, Weyl montre qu'à la différence d'Euclide, Hilbert ne propose pas une définition *descriptive* des concepts de points, de droite ou de plan — ce qui reviendrait à spécifier la nature des objets auxquels ils renvoient —, au contraire, il s'en tient à des définitions *implicites* de concepts au moyen d'axiomes.[8] Si l'on se fondait sur l'intuition, alors le concept de point serait indûment associé à la représentation commune de « point dans l'espace ».[9] Weyl ne critique pas le recours à l'intuition sensible dans l'absolu, mais relativement à une exigence de formalisation des surfaces de Riemann qui constitue l'un des principaux objectifs de la première partie de son ouvrage. Le processus de « formalisation » implique une construction rigoureuse (§ 1-3) et une définition axiomatisée de ce concept (§ 4-7) qui peut dès lors s'insérer dans une théorie autonome.

Nous voudrions écarter trois surinterprétations à la lecture de cette préface : (i) l'exigence de rigueur prônée par Weyl ne dérive pas de la seule référence à Weierstrass, l'évocation de la théorie des ensembles et de la méthode axiomatique de Hilbert le montre assez ; (ii) inversement, Weyl n'invoque pas la figure de Weierstrass uniquement pour des questions de rigueur, mais parce que ses méthodes algébriques et locales permettent de construire les surfaces de Riemann à nouveaux frais ; (iii) enfin, si Weyl se montre d'abord très critique à l'égard des évidences intuitives, il n'exclut pas le recours à l'intuition en mathématiques. Certes, il estime en 1910-1913 que l'analyse peut être déduite à partir des axiomes de l'arithmétique et que la théorie des ensembles constitue le fondement des mathématiques. Mais, ni dans son article de 1910, ni dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*, il ne réduit les mathématiques à la logique formelle. Ainsi, alors que le début de la préface à cet ouvrage nous donne le sentiment que Weyl rompt de manière radicale avec l'approche de Klein en théorie des surfaces de Riemann, une lecture plus fine de ce texte, mais également de l'article de 1910 et de ses cours en analyse complexe, montre qu'il fait au moins deux grandes concessions à Klein — auquel *Die Idee*

Sinne sind, sondern beliebige mathematische Dinge anderer Art (z. B. Funktionselemente) sein können ».

8. H. Weyl, « D. Hilbert and his mathematical Work », In *Bull. Amer. math. Soc. Vol. 50*, 1944, p. 635 : « Euclid tried to give a descriptive definition of the basic spatial objects and relations with which the axioms deal ; Hilbert abstains from such an attempt. All that we must know about those basic concepts is contained in the axioms. The axioms are, as it were, their implicit (necessarily incomplete) definitions ».

9. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. VI.

der Riemannschen Fläche est d'ailleurs dédié — : (i) les représentations intuitives demeurent nécessaires et pertinentes à des fins heuristiques et pédagogiques en mathématiques, (ii) pour cette raison, les mathématiques sont irréductibles à la logique formelle et elles ne sont pas non plus d'ordre purement conceptuel. L'article de 1910 de Weyl s'achève sur la remarque suivante :

> Je crois que l'esprit humain ne peut pas s'élever vers les concepts mathématiques autrement qu'en façonnant la réalité donnée. L'applicabilité de notre science n'apparaît alors que comme un symptôme de son enracinement et non comme une véritable unité de mesure ; il serait funeste pour les mathématiques que cet arbre — qui déploie sa large cime dans le ciel mais qui, dans le même temps, puise sa force grâce à ses nombreuses racines dans le sol des intuitions et des représentations réelles — soit élagué par un utilitarisme trop étroit ou qu'il soit arraché du sol dont il est issu. [10]

Weyl emprunte explicitement cette métaphore à Klein. À la fin de « Sur l'arithmétisation des mathématiques », on peut lire en effet :

> Je compare la science mathématique à un arbre dont les racines s'enfoncent chaque jour plus profondément dans la terre, tandis qu'au-dessus les ombres s'étendent librement et nous ombragent. Devons-nous regarder les racines ou les branches comme la partie la plus essentielle ? Le botaniste nous enseigne que la question est mal posée et que la vie de l'organisme dépend plutôt de l'*échange mutuel entre ses différentes parties.* [11]

Certes, Weyl admet que les évidences intuitives peuvent nous tromper. Mais, à l'instar de Klein, il reconnaît que les représentations intuitives font partie intégrante de la science mathématique. Il n'y a pas là de contradiction : Weyl distingue la production de connaissances mathématiques qui nécessite le recours à l'intuition et la formalisation des concepts mathématiques qui suppose de mettre à distance ces représentations intuitives sans nier leur fécondité. Weyl rejette simultanément l'utilitarisme qui restreindrait les mathématiques à ses seules applications pratiques et une conception purement abstraite des mathématiques incarnée notamment dans la promotion des mathématiques conceptuelles. Il nous semble donc difficile d'interpréter l'article de 1910 et la préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche* en fonction de la distinction entre le logicisme, le formalisme et l'intuitionnisme, non seulement parce que le formalisme et l'intuitionnisme ne sont pas encore catégorisés, mais aussi parce que les sources combinées par Weyl sont trop complexes pour que l'on se hasarde à ranger ses arguments dans l'un de ces compartiments. Contentons-nous de faire les remarques suivantes :

10. H. Weyl, « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe » (1910), in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. I, *op. cit.*, p. 304.
11. F. Klein, « Sur l'arithmétisation des mathématiques », *op. cit.*, p. 128.

1. En 1910-1913, Weyl ne discute pas le bien-fondé de la théorie des ensembles ; il admet même que le continu dérive d'une conception ensembliste des mathématiques. Il reconnaît la pertinence de l'axiomatique de Zermelo pour résoudre les paradoxes qui semblaient frapper d'inanité la théorie des ensembles et il reconnaît que la *topologie ensembliste* permet de fonder rigoureusement l'*analysis situs*.

2. La méthode des définitions implicites de concepts constitue la clé de voûte pour rendre la science mathématique plus rigoureuse qu'elle ne l'était. Weyl s'appuie d'ailleurs indéniablement sur les suppléments de Hilbert aux *Grundlagen der Geometrie* pour définir les variétés topologiques bidimensionnelles.

3. Enfin, on ne peut pas nier que Weyl reprend à son compte les réflexions de Klein sur la place de l'intuition en mathématiques. En outre, les cours donnés par Weyl sur les fonctions d'une variable complexe nous montrent combien il est attaché aux prescriptions de Klein en matière d'enseignement, l'intuition physique et géométrique étant systématiquement considérée comme une voie d'accès aux concepts mathématiques dont la définition rigoureuse n'est présentée qu'après coup.

Weyl développe ainsi une voie moyenne entre Hilbert et Klein lorsqu'il évalue la part de l'intuition et des concepts dans les sciences mathématiques. Il est donc impossible de le dire formaliste, intuitionniste ou encore logiciste en 1910-1913 ; en revanche, il tente déjà de faire la synthèse entre des approches sinon antagonistes, du moins en apparence irréductibles les unes aux autres. Il s'avère qu'en 1923-1924, Weyl parviendra également à une voie moyenne entre le formalisme de Hilbert et l'intuitionnisme de Brouwer ce qui, au regard de son article de 1910 et de la préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche*, n'a pas de quoi surprendre, même si les thèses qu'il concilie ne sont pas exactement du même ordre ici et là.

3.2 La « rigueur » weierstrassienne dans la construction des surfaces de Riemann

Comme nous l'avons déjà souligné, Weyl effectue une synthèse entre Klein et Hilbert, mais aussi entre Weierstrass et Riemann. Il convient de préciser comment Weyl passe d'un point de vue weierstrassien à un point de vue riemannien en analyse complexe, ce qui n'est pas sans poser des difficultés : en effet, le point de vue algébrique et local de Weierstrass ne semble à premier abord pas adapté pour appréhender des objets géométriques tels que les surfaces de Riemann. Nous nous proposons d'abord de décrire le raisonnement de Weyl

pour construire les surfaces de Riemann : il s'appuie alors sur le processus de prolongement analytique qu'il emprunte à Weierstrass. Nous essaierons ensuite de savoir dans quelle mesure cette construction conduit Weyl à développer une conception nouvelle des surfaces de Riemann.

Pour répondre au premier point, appuyons-nous sur l'argument suivant de R. Chorlay qui résume de manière pertinente les six premiers paragraphes de l'ouvrage de Weyl :

> Le travail de Weyl dans les six premiers paragraphes consiste en un aller-retour assez subtil, c'est tout d'abord l'une des voies concurrentes de la voie standard qui est présentée, la voie *funktiontheoretisch* de Weierstrass ; mais la présentation en isole certains traits, de sorte qu'elle peut ensuite servir de modèle à la formulation des objets à étudier, surfaces topologiques et surfaces munies d'une structure analytique complexe. [12]

Weyl reprend à Weierstrass les notions d'éléments de fonction et de configuration analytique, il lui emprunte également le processus de prolongement analytique. Cependant, comme le remarque R. Chorlay, Weyl tend à passer des notions *fonctionnelles* héritées de Weierstrass, à des notions *géométriques* dans le prolongement de Riemann et de Klein. Qu'il nous suffise de mentionner les concepts de variété topologique bidimensionnelle et de surface de Riemann. Cette remarque montre que la *synthèse* opérée par Weyl entre les points de vue de Weierstrass et de Riemann ne va aucunement de soi. Pour parvenir à elle, il faut adosser des notions fonctionnelles à des notions géométriques et définir ces dernières axiomatiquement au lieu d'en proposer une représentation purement intuitive.

Revenons sur les §§ 1 et 2 de *Die Idee der Riemannschen Fläche* pour examiner comment Weyl passe très concrètement du point de vue de Weierstrass, incarné par le processus de *prolongement analytique*, à un point de vue riemannien, qui repose sur le concept géométrique de *surface de Riemann*. Weyl rappelle tout d'abord ce que signifie le prolongement analytique. Reprenons ses notations. Soient z une variable complexe et a un nombre complexe fixé. Une série de puissances

$$\mathfrak{B}(z-a) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + ...,$$

avec un rayon de convergence positif s'appelle un élément de fonction de centre a ; A_0, A_1, ... étant des nombres complexes. Le domaine de convergence d'une telle série s'identifie à un disque $|z-a| < r, (r > 0)$ auquel on ajoute un sous-ensemble de points situés à la périphérie $|z-a| = r$ de ce disque. Si ce domaine de convergence s'identifie au plan complexe tout entier, on pose alors $r = \infty$. Un élément de fonction représente une fonction f qui est analytique

12. R. Chorlay, , *op. cit.*, p. 478.

à l'intérieur de ce disque de convergence. Le principe de prolongement analytique consiste à prolonger le domaine d'analyticité de f. Soit donc b une valeur prise par la variable z à l'intérieur du disque de convergence $|z-a| < r$. Les puissances entières de $z-b$ donnent lieu à une nouvelle série de puissances que Weyl formule de la manière suivante :

$$\mathfrak{Q}(z-b) = B_0 + B_1(z-b) + B_2(z-b)^2 + \ldots \quad .$$

Comme il le précise, une telle série converge au moins dans le disque $|z-b| < r - |b-a|$. Pour qu'il y ait prolongement analytique, il faut que son disque de convergence soit plus grand que $r - |b-a|$, sachant que les deux séries de puissances entières prennent les mêmes valeurs en tout point commun à leurs rayons de convergence respectifs. Nous obtenons ainsi un prolongement analytique immédiat. Le principe du prolongement analytique revient donc à itérer la construction d'un prolongement analytique immédiat un nombre fini de fois. Ce processus s'effectue le long d'une courbe $\mathfrak{c}$. S'il est possible, le prolongement analytique le long d'une courbe est unique. On aboutit à la définition suivante d'une fonction analytique : celle-ci est constituée de l'ensemble de tous les éléments G obtenus par prolongement analytique à partir d'un élément de fonction donné. À l'issue de ce premier paragraphe, Weyl formule en toute clarté les motivations qui l'ont conduit à faire ces rappels : il s'agit de reprendre à nouveaux frais la méthode du prolongement analytique, héritée de Weierstrass, de manière à pouvoir construire la surface de Riemann associée à une fonction partout analytique sauf en certains points qui correspondent soit à des points de ramification d'ordre n soit à des pôles.

Pour ce faire, Weyl introduit le concept cardinal de *forme analytique* au cours du § 2 de son ouvrage. Il entend généraliser le concept d'élément de fonction afin d'obtenir une définition précise de ce qu'il appelle une configuration ou une forme analytique. Il fait tout d'abord la remarque suivante :

> Nous pouvons représenter l'élément de fonction $u = \mathfrak{B}(z-a)$ à l'aide du paramètre t de la manière suivante :
>
> $$z = a + t, \quad u = \mathfrak{B}(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots \quad .$$
>
> Si nous laissons de côté le rôle particulier joué par z et que nous admettons qu'il y ait un nombre fini de puissances négatives de t, nous obtenons une formulation plus générale. Soient
>
> $$z = P(t), \quad u = Q(t)$$
>
> deux séries de puissances entières de t qui ne contiennent qu'un nombre fini de puissances négatives de t et telles que dans un voisinage $|t| < r$ de l'origine (r étant une constante positive) : (1) les deux séries convergent et (2) deux valeurs différentes de t dans ce voisinage ne donnent pas la même paire de valeurs (z, u). Nous disons donc que cette paire de séries *définit un élément de fonction*. Nous ajoutons à cette condition que $P(t)$ ne soit pas une simple constante. [13]

13. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. 4-5 : ≪ Das Funktionselement : $u = \mathfrak{B}(z-a)$

En réalité, cette paire de séries de puissances $P(t)$ et $Q(t)$ ne s'identifie pas elle-même à l'élément de fonction ainsi défini, elle n'en est qu'un *représentant*. Bref, une infinité d'autres paires de séries de puissances peuvent représenter le même élément de fonction. Pour expliciter ce point, Weyl introduit une relation d'équivalence $\sim$ entre paires de séries de puissances :

> Si l'on remplace le paramètre t par la série de puissances
>
> $$t(\tau) = c_1\tau + c_2\tau^2 + ...$$
>
> aussi bien en $P(t)$ qu'en $Q(t)$, alors $P(t)$ se transforme en la série de puissances $\Pi(\tau)$ et $Q(t)$ en $K(\tau)$. Supposons que $t(\tau)$ converge en un certain voisinage $\tau = 0$ et que le premier coefficient c_1 soit différent de 0, alors à l'aide d'une certaine constante positive ϱ, on peut délimiter autour de $\tau = 0$ un voisinage $\tau < \varrho$ tel que 1) $t(\tau)$ converge dans ce voisinage et demeure $< \tau$ en valeur absolue et 2) τ prenne toujours des valeurs différentes en des points différents. [Les séries] Π et K convergent également dans ce voisinage $\tau < \varrho$ et, pour deux points distincts τ_1, τ_2 de ce voisinage, on n'a jamais simultanément $\Pi(\tau_1) = \Pi(\tau_2)$ et $K(\tau_1) = K(\tau_2)$. Nous disons que la paire Π, K est équivalente à la paire initiale P, Q, à condition que les coefficients de la série de puissances $t(\tau)$ soient tels que la convergence ait lieu et que c_1 soit différent de 0. Cette dernière supposition implique qu'inversement, $P(t)$, $Q(t)$ peuvent être obtenus à partir de $\Pi(\tau)$, $K(\tau)$ lorsque l'on introduit pour τ une certaine série de puissances en t
>
> $$\tau = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + ... \quad (\gamma_1 = \frac{1}{c_1} \neq 0).$$
>
> La relation d'équivalence est donc symétrique. En outre, une paire de séries de puissances est manifestement équivalente à elle-même et, si deux paires de séries de puissances sont équivalentes à une même troisième, alors elles sont équivalentes entre elles. Ces faits nous laissent en droit de concevoir des paires de séries de puissances équivalentes comme des représentations (Darstellungen) d'un même [élément de fonction]. [14]

Autrement dit les paires $P(t)$, $Q(t)$ et $\Pi(\tau)$, $K(\tau)$ qui sont équivalentes pour la relation $\sim$ représentent le même élément de fonction. Par suite, l'ensemble des paires de séries de puissances peut être divisé en classes d'équivalence. Chaque élément de fonction s'identifie à

---

können wir mit Hilfe eines komplexen Parameters t so darstellen :

$$z = a + t, \quad u = \mathfrak{B}(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + ... \quad .$$

Indem wir die die bevorzugte Rolle, welche z spielt, aufgeben und außerdem auch endlich viele negative Potenzen von t zulassen, kommen wir zu der allgemeineren Erklärung : Es seien

$$z = P(t), \quad u = Q(t)$$

irgend zwei Reihen, die nach ganzzahligen Potenzen von t fortschreiten und nur endlichiviele negative Potenzen von t enthalten, von der Art, daß in einer gewissen Umgebung $|t| < r$ (r eine positive Konstante) des Nullpunktes der i-Ebene (1) beide Reihen konvergieren und (2) niemals für zwei verschiedene t-Werte dieser Umgebung sich das gleiche Wertepaar (z, u) ergibt : so sagen wir, dieses Paar von Potenzreihen definiere ein Funktionselement ≫.

14. *ibid.*, p. 6.

l'une de ces classes que l'on notera entre crochets $[P(t), Q(t)]$ pour éviter toute ambiguïté. Laissons pour l'instant de côté les réflexions épistémologiques que Weyl consacre à la relation d'équivalence et à ce qu'il appelle les *définitions par abstraction* en mathématiques. Suivons le fil conducteur qui lui permet d'aboutir à la construction de surfaces de Riemann à partir d'une méthode similaire au prolongement analytique hérité de la tradition weierstrassienne. Pour ce faire, il introduit les concepts de *voisinage analytique* et de *chaîne analytique*. Voici comment il définit la notion de voisinage analytique :

> Soient $\mathfrak{e}$ un élément de fonction et
>
> $$z = P(t), \quad u = Q(t)$$
>
> n'importe quel représentant de $\mathfrak{e}$ qui soit valide dans le disque $|t| < r, (r > 0)$ (autrement dit $P(t)$ et $Q(t)$ convergent dans ce disque et au plus l'une des deux équations $P(t_1) = P(t_2)$, $Q(t_1) = Q(t_2)$ est vérifiée pour $t_1 \neq t_2$, avec $|t_1| < r$, $|t_2| < r$). Pour toute valeur t_0 avec $|t_0| < r$, nous pouvons transformer $P(t)$ et $Q(t)$ de telle sorte qu'elles deviennent des séries de puissances de $t' = t - t_0$, nous obtenons ainsi une nouvelle paire de séries de puissances $P'(t')$, $Q'(t')$ et donc un nouvel élément de fonction $\mathfrak{e}_{t_0}$. Nous disons que l'ensemble des éléments $\mathfrak{e}_{t_0}$ contenus dans le disque $|t_0| < r$ forme un *voisinage analytique* de l'élément initial $\mathfrak{e}$ $(= \mathfrak{e}_0)$ (...). [15]

D'une manière intuitive, on peut dire qu'une chaîne analytique consiste à relier un élément de fonction origine à un élément de fonction extrémité. Tentons maintenant de saisir ce que Weyl appelle une forme ou une configuration analytique (analytisches Gebilde). À l'instar d'une *fonction analytique*, une configuration analytique est un ensemble G d'éléments de fonction qui satisfait aux propriétés suivantes : « (1) deux éléments de fonction quelconques de G peuvent être reliés les uns aux autres par une chaîne analytique dont les éléments appartiennent à G. (2) Il est impossible d'étendre G par adjonction d'éléments de fonction supplémentaires tel que l'ensemble plus étendu ainsi obtenu satisfasse encore à la propriété (1) ». [16] Il s'agit maintenant de considérer l'ensemble de tous les éléments de fonction comme

15. *ibid.*, p. 8-9 : « Es sei $\mathfrak{e}$ ein Funktionselement und

$$z = P(t), \quad u = Q(t)$$

irgendeine Darstellung desselben, $|t| < r, (r > 0)$ irgendein Kreis, in welchem diese Darstellung gültig ist (d. h. in welchem $P(t)$, $Q(t)$ konvergieren und niemals gleichzeitig $P(t_1) = P(t_2)$, $Q(t_1) = Q(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$, $|t_1| < r$, $|t_2| < r$ eintritt). Für jeden Wert t_0, für den $|t_0| < r$ ist, können wir dann die Reihen $P(t)$, $Q(t)$ nach Potenzen von $t' = t - t_0$ umordnen und erhalten so ein neues Potenzreihenpaar $P'(t')$, $Q(t')$ und damit ein neues Funktionselement $\mathfrak{e}_{t_0}$. Von allen so den verschiedenen im Kreise $|t_0| < r$ gelegenen zugehörigen Funktionselementen $\mathfrak{e}_{t_0}$ sagen wir, sie bilden eine analytische Umgebung des ursprünglichen Elementes $\mathfrak{e}$ $(= \mathfrak{e}_0)$ (...) ».

16. *ibid.*, p. 10 : Ein analytisches Gebilde ist eine Gesamtheit G von Funktionselementen mit folgenden

un « espace » de manière à pouvoir identifier certains de ces mêmes éléments de fonction à des points sur une surface. Pour ce faire, Weyl s'appuie sur la notion « d'espace abstrait » développée par Hilbert dans ses *Grundlagen der Geometrie*. Un espace *abstrait* ne correspond pas à l'espace usuel de la géométrie élémentaire — ce dernier étant constitué de points — il s'agit purement et simplement d'un ensemble, la nature des éléments qu'il contient n'étant pas spécifiée. Weyl s'appuie sur un mode de pensée ensembliste pour passer du point de vue weierstrassien au point de vue riemannien en analyse complexe. Cela posé, pour avoir une prise sur l'espace des éléments de fonction, Weyl établit un « dictionnaire » entre les notions qui s'appliquent respectivement à l'espace tridimensionnel usuel E et à l'espace $\mathfrak{E}$ des éléments de fonction. Par exemple, au concept de voisinage d'un point dans E correspond celui de voisinage analytique d'un élément de fonction dans $\mathfrak{E}$; la notion de chaîne analytique dans $\mathfrak{E}$ admet pour équivalent celle de courbe continue dans E. Néanmoins, alors que E comporte trois dimensions, $\mathfrak{E}$ est à un nombre infini de dimensions, il se divise en une infinité de strates bidimensionnelles qui sont deux à deux disjointes. Ces strates qui correspondent très exactement aux configurations analytiques définies plus haut sont connexes. Nous avons donc affaire à des variétés bidimensionnelles analytiques complexes, c'est-à-dire à des surfaces de Riemann. On retrouve en quelque sorte le point de vue de Riemann-Klein, comme le fait d'ailleurs remarquer H. Weyl à la fin du § 2 de son ouvrage.

Ainsi, la synthèse entre la méthode algébrique et locale de Weierstrass et la méthode géométrique de Riemann trouve une véritable effectivité dans le raisonnement mené par Weyl au début de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Trois remarques supplémentaires méritent ici d'être faites. (1) Weyl définit ici les surfaces de Riemann de manière constructive et génétique ; il reprend à son compte le *processus* de prolongement analytique de Weierstrass qui lui permet d'engendrer une surface de Riemann à partir de ce qu'il appelle des « éléments de fonction ». En revanche, à partir du § 4, il ne se fonde plus sur une définition *constructive* mais sur une définition *implicite* des variétés topologiques bidimensionnelles et des surfaces de Riemann. Il conviendra d'identifier les emprunts que fait Weyl aux travaux de Hilbert pour comprendre comment il parvient à une telle axiomatisation de ces deux concepts. (2) Le § 2 de *Die Idee der Riemannschen Fläche* surprend par son très grand degré d'abstraction. Cette remarque se vérifie à deux moments dans le raisonnement mené par Weyl, tout d'abord

Eigenschaften : (1) Je zwei Funktionselemente, die zu G gehören, können durch eine analytisch zusammenhängende Reihe von lauter zu G gehörigen Funktionselementen mit einander verbunden werden. (2) G läßt sich durch Hinzufügung von Funktionselementen auf Keine Weise so erweitern, daß auch die erweiterte Gesamtheit noch die Eigenschaft (1) besitzt.

lorsqu'il fait usage d'une « définition par abstraction » pour préciser ce qu'il entend par élément de fonction, ensuite lorsqu'il introduit l'espace $\mathfrak{E}$ des éléments de fonction qui est à un nombre infini de dimensions. (3) Lautman souligne avec justesse que la construction des surfaces de Riemann proposée par Weyl l'invite à envisager ce concept de manière locale. [17] Grâce à ce point de vue, Weyl relie les concepts de variété bidimensionnelle et de surface de Riemann : une surface de Riemann est une variété analytique de dimension complexe 1. La synthèse entre les méthodes de Riemann et de Weierstrass ne saurait donc être séparée du coup de force mené par Weyl sur un plan purement conceptuel en assujettissant le concept de surface de Riemann à celui de variété.

Pour finir, précisons ce que signifie l'expression « définition par abstraction » (Definition durch Abstraktion) que Weyl commente après avoir introduit la relation d'équivalence entre paires de séries de puissances. [18] Weyl affirme d'une manière générale qu'une définition par abstraction fait intervenir une relation d'équivalence $\sim$ appliquée à une collection d'objets a, b, ... Il rappelle qu'une relation d'équivalence est réflexive, symétrique et transitive. Il montre ensuite que deux objets a et b peuvent être considérés comme les représentants d'un même objet abstrait α si et seulement si $a \sim b$. Pourquoi parler de processus d'abstraction ? Nous pouvons donner deux éléments de réponse à cette question : (1) une relation d'équivalence permet littéralement de faire abstraction de certaines propriétés qui caractérisent en propre les objets a, b, ..., à supposer qu'ils soient équivalents entre eux par $\sim$; (2) on sélectionne ainsi les propriétés *essentielles* de a, b, ..., c'est-à-dire celles qui demeurent *invariantes* pour la relation d'équivalence $\sim$. La notion de *groupe abstrait*, qui intervient au cours du § 9 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, dérive de ce que Weyl appelle une *définition par abstraction*. En effet, un groupe abstrait Γ est tel que la nature des éléments qu'il contient n'est pas spécifiée. Il est susceptible de diverses réalisations que nous pouvons noter Γ_1, Γ_2, etc. Les groupes Γ_1, Γ_2, etc. sont isomorphes entre eux. Précisément, la relation « être isomorphe à » est une relation d'équivalence. Weyl prend deux autres exemples canoniques pour illustrer les définitions par abstraction : celui de droites parallèles et de mouvement.

> Nous disons de deux droites parallèles qu'elles ont la même *direction*, de deux droites non parallèles qu'elles ont des directions différentes. Les objets initiaux (a) sont les droites, la relation qui a le caractère de l'équivalence est le parallélisme ; il est attendu que l'on associe à chaque droite un quelque chose, sa direction de telle sorte que le parallélisme des droites corresponde à

17. A. Lautman, *op. cit.*, p. 175.

18. Weyl reprend ici des réflexions qu'il avait déjà menées dans son article de 1910 intitulé « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe ».

l'identité des ≪ directions ≫ associées. [19]

Weyl considère donc le parallélisme comme une *identité* de directions, mais l'intervention du terme ≪ Etwas ≫ montre qu'il ne sait pas définir la notion même de direction, puisqu'elle se trouve réduite à un simple quelque chose. Weyl ne fait que confirmer à son insu les objections que Frege avait formulées contre une telle définition du parallélisme. En effet, dans les *Grundlagen der Arithmetik* (1884), Frege montre 1. qu'une expression du type ≪ la direction de la droite a ≫ n'a pas un sens déterminé ; 2. qu'en l'absence d'une définition explicite de cette expression, on ne peut pas s'appuyer rigoureusement sur le principe d'identité fondé sur l'opération de substituabilité — si a et b sont parallèles, on devrait pouvoir substituer ≪ la direction de b ≫ à ≪ la direction de a ≫ *salva veritate* — ; 3. que la formule ≪ la direction de a est identique à q ≫ demeure indéterminée tant que l'on n'écrit pas q sous la forme ≪ la direction de b ≫. Pour remédier à ces difficultés, Frege propose la solution suivante :

> Si la droite a est parallèle à la droite b, l'extension du concept ≪ droite parallèle à la droite a ≫ est identique à l'extension du concept ≪ droite parallèle à la droite b ≫. Et à l'inverse, si les extensions des concepts ci-dessus sont identiques, a est parallèle à b. [20]

Il s'agit là d'une solution purement logique à la définition du parallélisme entre des droites en appliquant l'identité à des extensions de concepts : deux concepts ont la même extension si et seulement si les objets qui tombent sous ces concepts sont en correspondance biunivoque. L'identité est alors bien définie grâce à la relation d'*équinumériсité*. Il s'appuie d'ailleurs sur elle pour proposer une définition logique du concept de nombre cardinal.

Lorsque Weyl évoque les ≪ définitions par abstraction ≫ qu'il fonde donc sur la relation d'équivalence, il est loin de partager le point de vue logiciste de Frege ; en particulier, il ne souscrit pas au principe de séparation du psychologique et du logique que Frege met en avant dans son introduction aux *Grundlagen der Arithmetik*. [21] En effet, dans les définitions du parallélisme ou du mouvement qu'il propose, Weyl met en avant un processus d'abstraction qui, comme il le souligne, ne dépend pas des seules lois logiques. L'opération qui consiste à répartir une collection d'objets en classes d'équivalence par une relation d'équivalence $\sim$ tirerait ses ≪ racines psychologiques de la capacité d'abstraction propre à notre esprit ≫. Ce passage n'est pas suffisamment explicite pour nous permettre de comprendre la nature du lien sous-jacent entre psychologie et logique envisagée par Weyl. Cependant, cette assertion montre au moins qu'il n'adhère pas à une position logiciste. En effet, alors que Frege s'appuie sur la notion

19. *ibid.*, p. 7.
20. G. Frege, *Les fondements de l'arithmétique* (1884), trad. C. Imbert, Paris, éd. du Seuil, 1969, p. 193.
21. *ibid.*, p. 122 : ≪ Il faut nettement séparer le psychologique du logique, le subjectif de l'objectif ≫.

de relation d'équivalence pour montrer qu'un entier naturel, loin d'être un indéfinissable, est susceptible d'une définition logique, Weyl tend à assujettir la relation d'équivalence à un processus psychologique d'abstraction. Cette remarque n'a rien d'anecdotique. Elle indique que dès 1913, Weyl défend des arguments qui, toute proportion gardée, rendent son adhésion ultérieure à l'intuitionnisme de Brouwer moins étonnante. Il serait néanmoins hasardeux de vouloir rattacher *Die Idee der Riemannschen Fläche* à une doctrine en particulier.

Résumons-nous : Weyl ne souscrit pas au principe de séparation du psychologique et du logique qui caractérise le logicisme, ce dont attestent ses réflexions sur les « définitions par abstraction ». En outre, il insiste sur l'importance des définitions implicites de concepts dans le prolongement des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. Or, la correspondance Frege / Hilbert autour du statut des définitions et des axiomes en mathématiques atteste d'une opposition marquée entre ces deux protagonistes. En effet, les définitions implicites se caractérisent par le fait que la nature des objets auxquels elles renvoient demeure indéterminée. De plus, ces définitions se présentent sous la forme d'une liste d'axiomes. Contre Hilbert, Frege met en exergue les définitions explicites qui, par l'assignation d'un sens à un concept, doivent nous permettre de déterminer quels sont les objets qui tombent ou non sous ce concept. De plus, Frege insiste sur la distinction entre les axiomes qu'il considère comme des assertions *vraies* à partir desquelles on peut déduire des propositions et les définitions qui ne font qu'attribuer un *sens* à des concepts. Les définitions ne sont donc que des simples stipulations aux yeux de Frege. [22] Pour celui-ci, ce serait un non-sens que de parler de « définitions axiomatisées ». Or, lorsque Weyl définit les concepts de variété topologique bidimensionnelle et de surface de Riemann, il se situe dans cette veine hilbertienne. Enfin, s'il n'hésite pas à formaliser rigoureusement certains concepts par voie axiomatique, il formule une série de réserves à l'encontre d'une tendance excessive à la formalisation qui finit par devenir vide de sens. C'est ce qu'il convient de montrer.

22. Voir en particulier G. Frege, lettre à Hilbert du 27 décembre 1899, in *Gottlob Freges Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe*, Hambourg, éd. F. Meiner, 1980, p. 6 et suiv.

3.3 Les emprunts de Weyl à Hilbert et ses réserves à l'égard du « formalisme »

Après la construction des surfaces de Riemann à l'aide du processus de prolongement analytique (§§ 1 à 3), Weyl s'appuie sur la méthode axiomatique pour définir les variétés topologiques bidimensionnelles (§ 4) et les surfaces de Riemann (§ 7). Une telle axiomatisation se situe dans le prolongement des travaux de Hilbert consacrés à une définition rigoureuse du concept de « plan » dans deux annexes (1902) aux *Grundlagen der Geometrie* (1899). Pour parvenir à cette fin, Hilbert et Weyl analysent la notion de voisinage ; il s'agit bel et bien de fonder partiellement l'*analysis situs* sur des bases purement ensemblistes de manière à ce qu'elle ne dérive plus d'intuitions vagues. Les concepts de variété et de surface de Riemann qui avaient seulement été décrits dans le *Habilitationsvortrag* et la *Dissertation* de Riemann sont donc en passe d'être vraiment « définis » au sens où Hilbert et Weyl entendent exhiber les axiomes auxquels ils satisfont indépendamment de leurs réalisations. Il s'agit de définir *implicitement* les concepts de variété et de surface de Riemann. Néanmoins, il ne faudrait pas surdéterminer cet argument en estimant que la définition du concept de variété dans sa « forme achevée » se trouve chez Hilbert et Weyl. Tout d'abord, l'analyse de la notion de voisinage n'est pleinement accomplie qu'en 1914 avec la parution des *Grundzüge der Mengenlehre* de Hausdorff. Ainsi, une variété topologique M satisfait à l'axiome de Hausdorff selon lequel pour tous points x et y de M, il existe un voisinage U de x et un voisinage V de y tels que : $U \cap V = \varnothing$. Plus tardivement, dans son commentaire (1919, 1921, 1923) du *Habilitationsvortrag* de Riemann, Weyl insistera sur le fait que le concept de variété continue de dimension n n'a pas encore été défini de manière entièrement satisfaisante. Cette réserve est motivée par deux raisons : (1) Weyl est conscient des lacunes que présente sa propre définition des variétés topologiques bidimensionnelles en 1913 ; (2) ses réflexions épistémologiques sur le continu (1918) le conduisent à tenir en échec toute tentative en vue de définir les variétés continues sur des bases purement ensemblistes.

En 1902, Hilbert publie deux articles intitulés « Über die Grundlagen der Geometrie »[23] dans lesquels il esquisse une définition rigoureuse et générale des variétés topologiques bidimensionnelles à l'occasion de son axiomatisation du concept de *plan*. Il convient de comprendre en quoi sa manière de concevoir un plan [Ebene] le conduit à une telle généralisation.

Hilbert s'appuie tout d'abord sur le concept de « plan numérique » [Zahlenebene], muni

23. D. Hilbert, « Über die Grundlagen der Geometrie », *Göttinger Nachrichten*, 1902, p. 233-241, et « Über die Grundlagen der Geometrie », *Math. Ann.* 56, 1902 pp. 381-422

d'un système de coordonnées rectangulaires. Il s'agit tout simplement de $\mathbb{R}^2$. Il envisage une courbe de Jordan fermée J sur $\mathbb{R}^2$ et il appelle domaine de Jordan [jordansches Gebiet] l'intérieur d'une telle courbe.[24] En particulier, Hilbert s'appuie sur le *théorème de Jordan* selon lequel le complémentaire d'une courbe de Jordan a deux composantes connexes de frontière commune J. Cette proposition, qui n'a rien de trivial, entraîne la conséquence suivante : si un chemin joint un point intérieur à J à un point extérieur à J, alors son image possède au moins un point commun avec J. Hilbert poursuit en ces termes :

> Le plan est un système de points. Chaque point A détermine certains systèmes partiels de points, auxquels lui-même appartient et qui s'appellent les voisinages de ce point.[25]

Il précise les quatre propriétés auxquelles ces voisinages doivent satisfaire.

(1) Tout point A du plan est contenu dans chacun de ses voisinages ;

(2) si B est un point quelconque appartenant à un voisinage V de A, alors V est également un voisinage de B ;

(3) pour deux voisinages quelconques V et W de A, il existe toujours un voisinage de A qui est commun à V et W ;

(4) si A et B sont deux points quelconques du plan, alors il y a toujours un voisinage qui contient en même temps les points A et B.

Deux remarques s'imposent ici. Tout d'abord, moyennant quelques reformulations, ces énoncés préfigurent l'axiomatisation des espaces topologiques par les voisinages qui est due à Hausdorff (1914). Ainsi, les axiomes (1) et (3) de Hilbert correspondent exactement aux axiomes 1. et 3. de Hausdorff. L'axiome (2) de Hilbert est remplacé par l'axiome 4. que l'on peut formuler comme suit : tout voisinage U de x contient un voisinage V de x tel que U soit également un voisinage de tout point de V. L'axiome 2. de Hausdorff affirme que tout sur-ensemble V d'un voisinage U de x est un voisinage de x. L'axiome (4) de Hilbert est problématique, il doit être mis de côté. C'est à cause de cet axiome que, dans le cas d'un plan ou, plus généralement, d'une variété, Hilbert n'entrevoit pas la nécessité de se fonder sur la condition selon laquelle, pour deux points quelconques A et B, il existe au moins un voisinage V de A et un voisinage W de B d'intersection vide (axiome de Hausdorff). Cette condition est pourtant essentielle pour caractériser une classe spécifique d'espaces topologiques, à savoir les espaces topologiques *séparés*. Manifestement, l'axiome (4) de Hilbert fait obstacle à une telle caractérisation.

24. Une courbe de Jordan fermée J dans $\mathbb{R}^2$ est l'image par homéomorphisme du cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

25. D. Hilbert, *op. cit.*, pp. 234-235 : ≪ Die Ebene ist ein System von Punkten. Jeder Punkt A bestimmt gewisse Teilsysteme von Punkten, zu denen er selbst gehört und welche Umgebungen des Punktes A heißen ≫.

Cela étant précisé, Hilbert ajoute que pour tout point p du plan, il existe un voisinage de p qui peut être mis en correspondance biunivoque et bi-continue avec l'un des domaines de Jordan de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, chaque point du plan admet au moins un voisinage qui est homéomorphe à un domaine de Jordan de $\mathbb{R}^2$. De plus, s'il se présente différentes images d'un même voisinage, alors la transformation intermédiaire qui permet de passer de l'un des domaines de Jordan correspondant à l'autre est biunivoque et bi-continue. Enfin, Hilbert formule une hypothèse fondamentale sur laquelle s'appuiera Weyl en 1912-1913 pour axiomatiser les variétés continues de dimension 2 :

> Dans le cas de deux dimensions, ces conditions contiennent comme je le crois la définition précise [scharfe Definition] du concept que Riemann et Helmholtz appelaient ≪ variété n fois étendue ≫ et Lie ≪ variété numérique ≫, [concept sur lequel] ils fondaient leurs recherches tout entières. [26]

À l'occasion de la définition de ce qu'il appelle abstraitement un plan, Hilbert fait remarquer qu'il vient d'exhiber partiellement les conditions générales qui président à l'axiomatisation des variétés quelconques de dimension n. Weyl reprend à son compte cette hypothèse en 1913 et il tente de l'approfondir. À l'instar de Hilbert, Weyl considère le concept de variété topologique indépendamment de la nature des objets auxquels elle renvoie, comme en atteste le passage suivant :

> Nous ne devons pas assujettir le concept de ≪ surface bidimensionnelle ≫ ou de ≪ surface ≫ à l'idée de points de l'espace ; au contraire, il doit recevoir une signification beaucoup plus générale et abstraite. [27]

Weyl annonce clairement qu'il entend formuler une *définition implicite*, au sens où la notion de point d'une variété doit demeurer libre de toute interprétation. Ce préalable est nécessaire pour concevoir les variétés et les surfaces de Riemann en toute généralité. Weyl veut définir le concept de variété topologique de manière à ce qu'il soit aussi large que possible en *extension*. Cela posé, pour qu'un ensemble d'objets soit considéré comme une variété, il faut que ces mêmes objets puissent recevoir le statut de ≪ points ≫ et qu'il y ait une ≪ liaison continue ≫ entre eux similaire à celle qui prévaut dans le cas de points du plan. Conformément aux prescriptions de Hilbert, Weyl montre que la propriété de continuité peut

26. *ibid.*, p. 235 : ≪ Diese Forderungen enthalten, wie ich glaube, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffes, den Riemann und Helmholtz als ≪ mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ≫ und Lie als ≪ Zahlmannigfaltigkeit ≫bezeichneten und ihren gesammten Untersuchungen zu Grunde legten ≫.

27. H. Weyl, *op. cit.*, p. 17 : ≪ Der Begriff der ≪ zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ≫ oder der ≪ Fläche ≫ soll für uns also nicht an die Idee des Raumpunktes geknüpft sein, sondern eine viel allgemeine abstrakte Bedeutung erhalten ≫.

être entièrement déterminée à partir du concept de voisinage. Il raisonne sur des voisinages autour de chaque point d'une variété de dimension 2, ce qui lui permet de fixer le sens du terme de « région » entourant un point qui apparaît de manière récurrente dans les écrits de Riemann :

> Pour tout point p de la variété F on définit certains ensembles de points de la variété comme « voisinages de p sur F ». [28]

Il suppose que l'un au moins des voisinages U d'un point p d'une variété F entre en correspondance avec « les points intérieurs d'un cercle euclidien K_0 », c'est-à-dire un disque ouvert de $\mathbb{R}^2$. Il parle tout d'abord d'une « application injective » entre U et l'intérieur de K_0, mais il ajoute immédiatement deux conditions supplémentaires.

(a) On peut envisager une surface circulaire k dans K_0 de manière à ce que « chaque point de k soit l'image d'un point de U ». L'application de U dans k est non seulement injective, mais également surjective. U et k sont en correspondance biunivoque.

(b) L'application en question doit être continue. Weyl caractérise cette notion en termes de voisinages : « soit K l'intérieur d'un cercle quelconque entièrement situé dans K_0 et de centre p, alors il existe toujours un voisinage U de p sur F, dont l'image se trouve tout entière dans K ». [29] Il emprunte une telle définition à Brouwer (Math. Ann. Bd. 71, 1912). Il suffit d'ajouter que la réciproque à l'application en question doit elle-même être continue pour en déduire que chaque point p de la variété admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Weyl simplifie nettement la définition proposée par Hilbert puisqu'il ne s'appuie ni sur les domaines de Jordan, ni sur le théorème de Jordan.

Weyl montre également comment on peut assigner un système de coordonnées locales à chaque point d'une variété. En 1919 et en 1921, il ajoutera que la détermination de la dimension d'une variété ne repose sur aucune base solide tant que l'on n'a pas prouvé que cette même dimension est un *invariant topologique*, ce qui constitue précisément l'un des résultats établis par Brouwer en 1911 sous le nom de *théorème de la dimension.* [30]

---

28. H. Weyl *op. cit.*, p. 17.

29. *ibid.*, p. 18 : « ist K das Innere irgend eines ganz in K_0 gelegenen Kreises mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{p}$, so gibt es stets eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$, deren Bild ganz in K liegt ».

30. B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl, Zweite Auflage (1921), éd. Springer, pp. 24-25 : « zwar kommt hier die Invarianz gegenüber beliebigen umkehrbar-eindeutigen stetigen Transformationen in Betracht, Vor allem muss von der Dimensionenzahl selber gezeigt werden, dass sie eine derartige Invariante ist, weil sonst der Dimensionsbegriff ganz in der Luft hängt. Dieser Beweis wurde erbracht von Brouwer (Math. Ann. Bd. **70**, 1911, S. 161-165 ; vgl. dazu auch Math. Ann. **72**, 1912, S. 55-56) ».

Avant de définir implicitement le concept de surface de Riemann, Weyl revient sur certains résultats de topologie combinatoire et, plus particulièrement, sur la triangulation des surfaces « fermées ». En outre, il étudie de manière plus ou moins détaillée quelques exemples de surfaces qui viennent seulement illustrer le concept général de variété bidimensionnelle continue. Weyl mentionne tour à tour le plan euclidien, l'intérieur d'un carré, la surface d'un octaèdre régulier, la bande de Möbius et le tore à un trou. Preuve qu'il ne juge pas la définition abstraite d'un concept auto-suffisante. La référence à des figures particulières demeure nécessaire pour appréhender certaines réalisations du concept de variété topologique bidimensionnelle. Le choix de ces exemples n'est pas arbitraire : il s'agit en effet d'embrasser d'un seul regard des types de surfaces très différentes les unes des autres et donc de mesurer la grande *variabilité* des réalisations possibles attachées à un même concept, celui de variété topologique bidimensionnelle. Ainsi, le plan euclidien est une variété simplement connexe non compacte. La bande de Möbius est une surface non orientable. Le tore à un trou est une variété compacte, connexe mais non simplement connexe, etc. Ces exemples ont de fait une vertu classificatoire : Weyl ne les traite pas comme des cas isolés ; il s'agit bien de mettre en exergue certains types généraux de surfaces topologiques.

Ainsi, Weyl ne se meût pas exclusivement dans l'abstraction dans ce premier chapitre. Si, d'un côté, l'intuition naïve doit être bannie lorsque l'on entend définir rigoureusement le concept de variété topologique bidimensionnelle, inversement il ne faudrait pas négliger de mentionner ces pages qui montrent combien des représentations géométriques intuitives demeurent nécessaires pour comprendre comment certains objets particuliers satisfont aux caractères du concept de variété continue bidimensionnelle. Sans doute le § 5 de *Die Idee der Riemannschen Fläche* renvoie-t-il à l'approche résolument intuitive adoptée par Klein en 1882. Bref, la première partie de l'ouvrage de Weyl ne prend pas la forme d'un exposé hautement formalisé de bout en bout.

Ces précisions étant faites, venons-en au procédé utilisé par Weyl pour parvenir à une définition implicite des surfaces de Riemann. Commme il l'indique, il convient de munir une surface au sens de l'*analysis situs* d'une structure analytique — cette expression n'est pas elle-même employée par Weyl :

> Sur une surface, dont on ne considère que les propriétés d'*analysis situs*, on peut bien parler de fonctions continues, mais non pas de fonctions « continûment différentiables », « analytiques », (ou même rationnelles entières) etc. Pour pouvoir appliquer la théorie des fonctions analytiques sur une surface $\mathfrak{F}$ d'une manière analogue à ce qui prévaut dans le plan complexe, (outre une définition de la surface), on doit fournir une explication grâce à laquelle le sens de l'expression « fonction analytique sur une surface » est déterminé de telle sorte que toutes les propositions

> concernant les fonctions analytiques qui sont valables localement dans le plan, se transposent à ce concept plus général. [31]

Cet argument rend compte des motifs qui justifient l'introduction du concept de surface de Riemann. En particulier, Weyl distingue clairement une surface munie d'une structure topologique et une surface qui, au surplus, est dotée d'une structure différentielle ou analytique. Mais surtout, la définition généralisée des surfaces de Riemann proposée par Weyl est la clé pour rendre explicite le lien qu'une telle notion entretient avec le concept de variété bidimensionnelle. Dans une certaine mesure, c'est parce que Riemann s'en est tenu à une conception restrictive des surfaces qui portent son nom, qu'il n'a pas pu montrer en toute clarté qu'il s'agit là de variétés bidimensionnelles particulières. Pour le dire autrement, Le *Habilitationsvortrag* (1854) admet un niveau de généralité supérieur à la *Dissertation* (1851) : ce déséquilibre explique en partie l'absence de lien *explicite* entre ces deux écrits dans l'œuvre même de Riemann.

Voici en substance comment Weyl définit les surfaces de Riemann :

> Soit $\mathfrak{F}$ une surface, et supposons avoir déjà défini, pour tout point p_0 de $\mathfrak{F}$ et toute fonction $f(p)$ en un voisinage quelconque de p_0 sur $\mathfrak{F}$, quand $f(p)$ doit être régulière et analytique au point p_0, on obtient de cette manière une surface de Riemann ${}^{\mathfrak{M}}\mathfrak{F}$ dès que ses points auront été considérés comme points de $\mathfrak{F}$. Une telle définition doit satisfaire aux conditions suivantes :
>
> 1. Si p_0 est un point quelconque de $\mathfrak{F}$, alors il existe une fonction $t(p)$ qui n'est pas seulement régulière analytique en p_0 (pour lequel elle prend la valeur 0) mais aussi en tout point p d'un certain voisinage de p_0 et elle décrit une image de ce voisinage dans le plan complexe des t de manière uniforme [eindeutig] et continue ;
>
> 2. Si $f(p)$ est une fonction régulière analytique quelconque au point p_0 et $t(p)$ une uniformisante locale correspondante en p_0, alors il existe toujours un voisinage $\mathfrak{U}_0$ de p_0 dans lequel $f(p)$ peut être représentée comme une série de puissances régulière [une série entière] en $t(p)$ $f(p) = a_0 + a_1 t(p) + a_2 (t(p))^2 + \ldots$. [32]

Bien que cette axiomatisation demeure encore incomplète et hésitante, Weyl résout la principale difficulté liée à toute tentative de définition des surfaces de Riemann : déterminer les *conditions* qui donnent *un sens* à l'existence de fonctions analytiques sur de telles surfaces.

31. *ibid.*, p. 35 : ≪ auf einer Fläche, von der allein Analysis-situs-Eigenschaften in Betracht gezogen werden, kann man wohl von stetigen Funktionen sprechen, nicht aber von ≪ stetig differentiierbaren ≫, ≪ analytischen ≫ (oder gar ≪ ganzen rationalen ≫) Funktionen oder dergl. Um auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ analytische Funktiontheorie in analoger Weise wie in der komplexen Ebene treiben zu können, muss vieler (ausser der Definition der Fläche) eine Erklärung abgegeben sein, durch welche der Sinn des Ausdrucks ≪ analytische Funktion auf der Fläche ≫so festgelegt wird, dass sich alle Sätze über analytische Funktionen in der Ebene, die ≪ im Kleinen gültig sind, auf diesen allgemeineren Begriff übertragen ≫.

32. *ibid.*, p. 36.

En outre, grâce à une telle axiomatisation, Weyl ne se contente pas de clarifier le concept de surface de Riemann, il lui assigne un niveau inégalé de généralité.

Ainsi, dans la première partie de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl s'appuie sur la « méthode des définitions implicites » pour clarifier, généraliser et hiérachiser les concepts qu'il introduit. Les surfaces de Riemann sont logiquement introduites après les variétés topologiques bidimensionnelles : en effet, Weyl établit que les surfaces de Riemann sont des variétés analytiques complexe de dimension 1. Une telle hiérarchie sera également à l'œuvre lorsque Weyl entreprendra une classification des variétés dans « Reine Infinitesimalgeometrie » (1918) : seront évoquées tour à tour les variétés continues, les variétés différentielles, les variétés à connexion affine et les variétés métriques — les variétés riemanniennes, qui vérifient le théorème de Pythagore dans l'infiniment petit constituent une classe tout à fait spécifique de variétés métriques. Pour ne pas forcer ce parallèle, précisons qu'en 1918, Weyl montre que le continu, qui intervient de manière essentielle pour définir les variétés topologiques, différentielles et riemanniennes, échappe à tout procédé d'axiomatisation. En revanche, en 1910-1913, Weyl est encore convaincu que le continu peut être traité de manière purement ensembliste.

Étant donné ces hiérarchies entre concepts mathématiques, peut-on en inférer que les travaux de Weyl sur les surfaces de Riemann ou en géométrie différentielle relèveraient des mathématiques « structurales » ? Pour pouvoir répondre à cette question, encore faut-il nous entendre sur l'expression « mathématiques structurales ». Comme le souligne à juste titre Lautman, une structure est la donnée d'un domaine et d'opérations valables sur ce domaine. [33] Une structure est définie par une liste d'axiomes qui portent à la fois sur l'existence de certaines entités — par exemple existence d'un neutre ou d'un inverse pour une certaine opération — et de propriétés auxquelles les opérations en question sont assujetties. Il est indubitable qu'une mathématique structurale implique le recours à des définitions implicites de concepts. Mais ce point n'est pas suffisant pour pouvoir qualifier une théorie de structurale. Pour préciser notre raisonnement, il convient maintenant de le contextualiser davantage. Sans doute est-il absurde de restreindre l'émergence des mathématiques structurales à l'algèbre dite « abstraite » et à deux figures tutélaires en particulier : Artin et E. Noether. Les travaux de Hausdorff en topologie ensembliste sont abstraits, puisqu'ils ne se rapportent pas à des objets dont la nature serait spécifiée, preuve que « l'algèbre » n'est pas la seule discipline mathématique qui met en jeu des structures. L'incidence des travaux de Wedderburn notamment sur les « algébristes allemands » au cours des années 20 est significative : preuve que

33. A. Lautman, « Mathématiques et réalité », *op. cit.*, p. 48.

le développement des mathématiques structurales ne se joue pas seulement à Göttingen ou à Hambourg. Ces deux restrictions étant levées, rien ne nous empêcherait d'annexer l'ouvrage de Weyl sur les surfaces de Riemann aux mathématiques structurales. Mais il s'agit sans doute là d'une extrapolation.

En effet, les mathématiques structurales ne se reconnaissent pas seulement à l'usage de définitions implicites de concepts, elles admettent trois caractéristiques auxquelles *Die Idee der Riemannschen Fläche* ne satisfait pas exactement. (1) La méthode axiomatique n'est pas seulement là pour clarifier et généraliser des concepts, elle constitue un instrument de découverte à part entière, autrement dit, les procédures axiomatiques sont alors utilisées pour produire des mathématiques nouvelles, ce que l'on ne retrouve justement pas chez Weyl. (2) Certaines structures mathématiques sont étudiées pour elles-mêmes, abstraction faite des théories déjà constituées auxquelles elles pourraient s'appliquer. Il en va ainsi de la structure de corps telle qu'elle est analysée par Steinitz dans son « Algebraische Theorie der Körper » (1910) : Steinitz s'abstrait de la théorie de Galois pour aborder les corps et les extensions de corps en tant que tels. Nous pourrions justement penser que l'ouvrage de Weyl de 1913 a pour objet les surfaces de Riemann en elles-mêmes. En réalité, la seconde partie de son ouvrage nous montre qu'il cherche essentiellement à moderniser les preuves de théorèmes déjà bien constitués en analyse complexe. (3) Les mathématiques structurales se caractérisent enfin par des théorèmes de structure, i.e. des théorèmes qui mettent en jeu des structures inter-reliées. La réforme de la théorie de Galois opérée par Artin dans les années 20 illustre de manière remarquable ce troisième point : le théorème fondamental de la théorie de Galois devient, sous la plume d'Artin, un théorème de structure. Nous ne pouvons pas dire que Weyl met systématiquement en jeu des théorèmes de structure dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*.

Nous succomberions donc à une illusion rétrospective si nous pensions que les travaux de Weyl sur les surfaces de Riemann relèvent d'une mathématique structurale. En outre, il ne faut pas oublier que *Die Idee der Riemannschen Fläche* est dédié à F. Klein qui s'oppose carrément à l'idée selon laquelle les procédures axiomatiques seraient un instrument de clarification des concepts mathématiques. Le premier motif de Weyl consiste à donner une forme rigoureuse à l'ouvrage de Klein de 1882 que nous avons commenté en détail dans la section précédente. Bref, à la synthèse entre les points de vue de Weierstrass et Riemann sur un plan mathématique se superpose une synthèse entre Hilbert et Klein sur un plan méthodologique, ce qui nous éloigne encore un peu plus d'une approche structurale en analyse complexe. Inversement, nous devons prendre conscience que Weyl sera sinon hostile du moins étranger à

l'avènement de l'algèbre abstraite au cours des années 20 et au début des années 30. Nous pensons bien sûr à sa célèbre conférence « Topologie und Abstrakte Algebra » (1931), dans laquelle il montre qu'une approche abstraite et structurale peut conduire à des généralités creuses, i.e. sans réel contenu mathématique. Nous renvoyons le lecteur à la fin du deuxième chapitre de la troisième partie pour une analyse plus précise de cette conférence.

Comme nous l'avons déjà souligné, ce n'est pas parce que Weyl propose une définition rigoureusement formalisée des surfaces de Riemann, qu'il adhère sans concession à une conception formaliste des mathématiques au début de sa carrière scientifique et intellectuelle. D'un côté, il reconnaît l'ambivalence de nos *idées communes*, lorsque celles-ci se fondent sur l'intuition sensible ; de l'autre il ajoute la restriction suivante à propos des mathématiques formalisées :

> On ne peut pas le dénier, la mise au jour d'un niveau de généralité qui dépasse de loin toutes nos représentations à propos des concepts tels que « fonction », « courbe », etc d'un côté, l'usage de la rigueur logique de l'autre, aussi salutaires [erspriesslich] soient-elles pour notre science, ont également engendré des effets indésirables dans le développement de la mathématique contemporaine. [34]

Les limites que Weyl croit reconnaître dans une approche purement formalisée des mathématiques ne sont pas formulées sur un mode intuitionniste en 1913. Outre que l'on commettrait sans doute là un anachronisme, il s'avère que les arguments avancés par Weyl ont un autre sens. En premier lieu, il affirme qu'une partie de la production mathématique de son temps « en s'évaporant dans le vide ou en s'écoulant dans des chemins de traverse, a perdu le contact avec le flot vivant de la connaissance » [mit dem lebendigen Strom der Wissenschaft]. Bien que certaines expressions demeurent indéterminées dans ce propos, on peut supposer que Weyl entrevoit le risque que la mathématique formalisée produise des concepts vides de sens. Sur ce point seulement, son argument rejoint la définition du formalisme due à Brouwer (1912) :

> En conséquence pour le formaliste l'exactitude mathématique consiste uniquement dans la méthode selon laquelle se déroule la série des relations, et cette exactitude est indépendante du sens qu'on sera libre de donner aux relations ou aux entités que ce déroulement met en rapport. [35]

34. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. VI : « Es kann nicht geleugnet werden : die Entdeckung der sich weit über alle unsere Vorstellungen hinausspannenden Allgemeinheit solcher Begriffe wie « Funktion », « Kurve », usw. auf der einen Seite, das Bedürfnis nach logischer Strenge auf der anderen, so erspriesslich, ja notwendig sie für unsere Wissenschaft waren, doch auch ungesunde Erscheinungen hervorgerufen ».

35. L. E. J. Brouwer, « Intuitionnisme et formalisme » (1912), in J. Largeault, *Intuitionnisme et théorie*

Cela étant précisé, l'expression « Strom der Wissenschaft » employée par Weyl ne renvoie ni nécessairement à une intuition inhérente à notre intellect, ni au développement historique des diverses théories mathématiques, comme en attestent les arguments qu'il développe par la suite. En effet, Weyl estime que les concepts rigoureux qu'il introduit dans cet ouvrage, aussi nécessaires soient-ils pour formaliser les surfaces de Riemann, n'en constituent pourtant pas le fondement ultime. Il ne s'agit jamais que d'un expédient en vue de saisir l' « Idée » des surfaces de Riemann au sens platonicien de *Forme en soi*. Les Idées sont des essences immuables qui constitueraient le noyau (Kern) de tout système théorique. En 1913, Weyl oppose donc un *réalisme des Idées* à une conception purement formaliste des mathématiques ; il est d'ailleurs cohérent avec lui-même, puisque le platonisme consiste à rejeter aussi bien l'intuition sensible, parce qu'elle est trompeuse, que le formalisme, parce qu'il s'agit de percer l'être même des choses.

L'argument développé par Weyl dans cette préface se calque d'ailleurs sur les dichotomies établies par Platon dans le livre VI de la *République*. Weyl commence par évoquer l'appréhension intuitive des surfaces de Riemann ; ensuite, il montre qu'elles doivent répondre à une exigence de conceptualisation rigoureuse ; pour finir, il introduit les *Idées* au sens platonicien du terme afin de montrer les limites du formalisme. Souvenons-nous que Platon divise le monde intelligible en deux parties, d'un côté la *dianoïa* qui correspond globalement aux connaissances hypothétiques — c'est notamment le cas des connaissances mathématiques —, de l'autre la *noesis* qui nous permet de nous élever à un principe anhypothétique et que l'on peut définir comme une *contemplation* des Formes en soi. Weyl considère ici les concepts mathématiques conformément à la division platonicienne : d'une part, ils doivent nous prémunir contre les représentations défaillantes et naïves héritées de l'intuition sensible ; d'autre part, on ne peut pas s'en tenir à eux, ils ne sont qu'une étape intermédiaire en vue d'accéder aux Idées que l'on doit viser par-delà la formalisation des *théories mathématiques*.

Cet argument est également riche d'enseignements pour comprendre la place que Weyl accorde à la méthode axiomatique dans cet ouvrage : s'il reconnaît qu'elle permet de définir de la manière la plus générale et la plus rigoureuse qui soit le concept de surface de Riemann, il ne lui assigne certainement pas de fonction heuristique et il refuse de la percevoir comme une fin en soi, voire comme un *fondement*. Sur ce point, il s'écarte déjà de manière significative des thèses de Hilbert qui, dès 1899, attribue à la méthode axiomatique le double rôle de *moyen* en vue de formaliser la géométrie euclidienne et de *fondement* ultime sur lequel l'édifice élaboré par Euclide doit reposer. En outre, il n'y a pas, pour Hilbert, d'idée platonicienne par-delà

de la démonstration, Paris, éd. Vrin, 1992, p. 41.

les propositions de base préalablement admises pour conduire un raisonnement.

Plus radicalement, Weyl (1913) et Hilbert (1899) ne prêtent pas au mot de fondement le même sens. Pour le premier, l'expression « Im Grunde » renvoie à une réalité en soi de style platonicien, pour le second les « Grundlagen » ne sont jamais que des hypothèses admises, dont la nécessité — purement logique — vient précisément de ce que, relativement à un même système, elles ne conduisent à aucune contradiction : ce qui est nécessaire est ce dont le contraire est impossible.

Bien qu'elles ne soient pas de style « intuitionniste », on peut se demander si les réserves formulées ici par Weyl contre le formalisme n'ont pas, malgré tout, un lien indirect avec les thèses avancées par Brouwer quasiment au même moment. Weyl reconnaît dans sa préface qu'il doit beaucoup aux recherches fondamentales menées par Brouwer dans le domaine de la topologie et illustrées par les deux résultats suivants :

1. *Le théorème de la dimension* : soient $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis de leurs topologies usuelles ; alors ils sont homéomorphes, i.e. il existe une bijection continue dont la réciproque est également continue, si et seulement si $n = m$. Ce théorème établit ainsi que la dimension est un *invariant topologique*, au sens où elle demeure inchangée par homéomorphisme.

2. *Le théorème du point fixe* : toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ sur elle-même admet au moins un point fixe. Les résultats ainsi obtenus par Brouwer en 1909 dans le domaine de la topologie contribuent à sa reconnaissance internationale, avant même que ne se sédimente, dans ses réflexions épistémologiques, l'opposition entre intuitionnisme et formalisme.

Weyl espère que ses propres écrits ne dénatureront pas l'esprit des travaux en topologie dus à Brouwer. D'ailleurs, il soutiendra invariablement dans les éditions ultérieures de son ouvrage sur les surfaces de Riemann que les travaux de Brouwer ont joué un rôle déterminant dans le développement de ses propres pensées. Ce constat entre manifestement en contradiction avec la remarque de Weil et de Chevalley selon laquelle Weyl ne « fait aucun usage » des travaux de Brouwer dans *Die Idee der Riemannschen Fläche.*[36] Il nous paraît nécessaire de nuancer une telle interprétation. En réalité, comme l'a montré R. Chorlay dans sa thèse, Weyl adopte une approche similaire à celle de Brouwer en topologie : il s'agit de recourir à un « point de vue » mixte, qui mêle topologie combinatoire et topologie ensembliste pour appréhender le concept de surface de Riemann et les différents objets qui lui correspondent. En ce sens, il n'est pas infondé de corriger les affirmations de Chevalley et de Weil selon

36. C. Chevalley, A. Weil, « Hermann Weyl » in K. Chandrasekharan (ed.), *Hermann Weyl, Gesammelte Abhandlungen*, Vol. IV, *op. cit.*, p.669.

lesquelles Weyl se serait contenté de citer Brouwer sans réellement s'approprier les travaux ou tout du moins les méthodes combinatoires utilisées par ce dernier en topologie. Or, comme l'a souligné avec justesse Dubucs, les méthodes et les résultats de Brouwer en topologie ne sont pas sans rapport avec sa conception constructiviste des mathématiques. [37]

Toutefois, cette précision ne doit pas donner lieu à extrapolations. Mis à part une critique du principe du tiers-exclu datant de 1908 et un premier texte de 1911 dans une recension de l'ouvrage de Gerrit Mannoury intitulé *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik*, il faut attendre le fameux discours d'ouverture à l'Université d'Amsterdam (1912) intitulé *Intuitionnisme et Formalisme*, pour voir Brouwer se positionner contre le formalisme *et* le logicisme. [38] Rien ne prouve qu'au moment de la publication de son ouvrage sur les surfaces de Riemann, Weyl ait eu connaissance de ce discours traduit en anglais dès 1913. D'une part Weyl parle exclusivement d'intuition sensible (Sinnliche Anschauung) et non pas d'intuition (intellectuelle) au sens de Brouwer ; d'autre part, il demeure convaincu que le continu peut être entièrement fondé sur la théorie des ensembles telle qu'elle est axiomatisée par Zermelo en 1908. On est seulement en droit de dire que les premières réflexions épistémologiques menées par Weyl dans sa préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche* constituent un terrain favorable à ses thèses ultérieures en faveur de l'intuitionnisme :

(i) il reconnaît déjà certaines limites au formalisme sans nier la nécessité de définir axiomatiquement les concepts sur lesquels s'appuie une théorie ;

(ii) le fait qu'il se soit approprié très tôt les travaux de Brouwer en topologie peut servir de fil conducteur afin de comprendre comment, par la suite, il a pu s'intéresser de proche en proche aux thèses philosophiques défendues par ce dernier.

Si donc on se réfère à l'article « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe » (1910) et à la préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche*, on peut dire que Weyl

37. J.P. Dubucs, « L.J.E. Brouwer, Topologie et constructivisme », *Revue d'Histoire des Sciences*, 1988, Tome 41, 2, p.135-136 : « Brouwer estimait lui-même que les travaux de topologie qui lui conférèrent sa notoriété ne contredisaient nullement les révisions logiques pour lesquelles il avait plaidé à la même époque. Il s'est nettement exprimé sur ce point dans un texte de 1919 *Intuitionistische Mengenlehre* (...). Brouwer affirme donc que ses théorèmes topologiques fondamentaux, dont la preuve utilisait librement le principe du tiers-exclu, étaient pourtant « intuitionnistisables », c'est-à-dire que les concepts et les raisonnements en jeu possédaient déjà un aspect constructif ».

38. Dans son article « La critique de la théorie des ensembles dans la *Dissertation* de Brouwer », M. Bourdeau montre que dès sa *Dissertation* (1907) Brouwer demeure attaché à l'idée kantienne selon laquelle une intuition intervient de manière essentielle dans la construction des connaissances mathématiques et il attribue un statut spécifique au continu, ce qui préfigure ses travaux fondateurs de 1917 en mathématiques intuitionnistes

n'adhère pas du tout au logicisme et qu'il souscrit partiellement au formalisme. Il ne réduit pas les mathématiques à la logique, bien qu'il admette la pertinence de l'axiomatique de Zermelo pour rendre raison du continu. En outre, il souligne l'importance des représentations intuitives dans la construction des connaissances mathématiques, conformément aux thèses avancées par Klein dans « Über Arithmetisierung der Mathematik » (1895). Enfin, il critique ouvertement le formalisme pour le formalisme. Il convoque à cet effet une philosophie de style platonicien au début de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Nous pouvons déjà observer que dès 1910-1913 Weyl n'adhère pas sans réserves aux procédures axiomatiques prônées par Hilbert pour définir des concepts et fonder des théories mathématiques. Ces réserves s'expliquent en raison de l'importance que Weyl accorde aux thèses concurrentes de Klein sur les connaissances mathématiques. Permettons-nous cette courte mise en perspective : Weyl souscrira non sans nuances à l'intuitionnisme de Brouwer entre 1919 et 1924 avant de parvenir à une voie moyenne entre formalisme et intuitionnisme qu'il développera jusque dans des écrits très tardifs. Comme nous le montrerons dans les parties suivantes de notre thèse, rien ne prouve que sa pratique des mathématiques soit toujours en conformité avec ses thèses philosophiques sur les mathématiques. En particulier, son adhésion à l'intuitionnisme ne se traduira pas par un abandon d'une pratique fondée sur le recours à des définitions implicites de concepts.

3.4 Revêtements et théorème d'uniformisation

Ainsi, dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl synthétise les points de vue de Riemann et de Weierstrass ; il propose une définition rigoureuse des variétés différentielles bidimensionnelles et des surfaces de Riemann, tout en se montrant réservé à l'égard d'une conception purement formaliste des mathématiques ; enfin, il investit l'approche ensembliste et combinatoire de Brouwer en topologie.

Weyl s'approprie également les travaux que Koebe consacre au *théorème d'uniformisation*. Il n'est pas certain qu'entre 1911 et 1913, Weyl ait eu connaissance des articles de Poincaré sur le théorème d'uniformisation, sinon de manière indirecte via la version écrite de la célèbre conférence prononcée par Hilbert à Paris en 1900, mais aussi via les travaux de Koebe. On ne s'étonnera pas si, dans sa préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl mentionne exclusivement Koebe sur le problème de l'uniformisation des « fonctions » analytiques multivaluées d'une variable complexe. Trois motifs nous engagent à nous pencher de manière plus détaillée sur le théorème d'uniformisation : (1) Weyl prend directement appui sur les résultats

obtenus par Koebe en 1907 pour proposer une définition précise du concept de revêtement universel d'une surface de Riemann ; (2) il se familiarise avec des résultats d'*analysis situs* qu'il réinvestira pour prouver le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ en 1925, avant de l'étendre à tout groupe de Lie complexe semi-simple — rétrospectivement, les notions qu'explicite Weyl relèvent de la topologie algébrique ; (3) Lautman s'appuiera sur l'ouvrage de Weyl pour proposer une lecture philosophique très intéressante du théorème d'uniformisation de Poincaré / Koebe. [39] Lautman construira une analogie entre quatre théories : la théorie de Galois, la théorie du corps de classes, la théorie des revêtements et la théorie des surfaces de Riemann. Précisons à ce propos que dès 1916, Weyl utilise une terminologie issue de la théorie de Galois pour aborder la théorie des revêtements : il montre ainsi leur grande proximité. [40] Lautman étendra cette analogie à d'autres théories mathématiques qui sont ainsi constituées selon le même schéma que la théorie de Galois.

Revenons tout d'abord sur le théorème d'uniformisation et sur l'axiomatisation de la notion de revêtement universel proposée par Weyl en 1913. La question de l'uniformisation des fonctions *algébriques* d'une variable complexe est complètement résolu par Klein et Poincaré au début des années 1880. Ainsi, en 1882, Poincaré montre le théorème suivant dans le cas des fonctions *algébriques* d'une variable complexe [41] : soit $f(x, y) = 0$ une relation algébrique, i.e. $f(x, y)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[x, y]$ que l'on suppose irréductible, il existe des fonctions automorphes [42] F et G définies sur $\mathbb{D}$, c'est-à-dire sur le disque ouvert de Poincaré, telles que les points non singuliers de la courbe algébrique $f(x, y) = 0$ soient paramétrés par les

39. A. Lautman, ≪ La montée vers l'absolu ≫, *op. cit.*, p. 165 à 178.

40. H. Weyl, ≪ Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen ≫, *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung*, **25**, p. 265-278.

41. H. Poincaré, ≪ Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires ≫, in *Math. Ann.* **19**, 1882, p. 561 : ≪ Soit une relation algébrique quelconque

$$f(x, y) = 0,$$

admettant comme points singuliers

$$a_1, a_2 ..., a_n.$$

Faisons-y

$$x = F(\zeta)$$

$F(\zeta)$ étant la fonction définie plus haut ; tant que ζ sera définie à l'intérieur du cercle fondamental, x ne pourra passer par aucun des points singuliers ; si ζ sort du disque, x cessera d'exister. Il résulte de là que y est une fonction uniforme de ζ qui n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental et on voit aisément que cette fonction est une fonction Fuchsienne ≫.

42. Une fonction automorphe est une fonction méromorphe sur $\mathbb{B}$ qui est invariante par un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$

équations $x = F(\zeta)$ et $y = G(\zeta)$ de sorte que $f(F(\zeta)G(\zeta)) = 0$ pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$.

Dans un article de 1883 intitulé « Sur un théorème de la théorie générale des fonctions », Poincaré formule le problème plus général de l'uniformisation des « fonctions » *analytiques* d'une variable complexe. [43] Il tente donc de prouver le théorème d'uniformisation dans le cas *général*, c'est-à-dire pour des fonctions *analytiques* multivaluées quelconques d'une variable complexe. Voici comment il formule ce théorème :

> Soit y une fonction analytique quelconque de x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z. [44]

Bien que la démonstration proposée par Poincaré en 1883 soit incomplète, les grandes lignes de son raisonnement demeurent pertinentes. Mais surtout, dans l'article de 1883, Poincaré introduit pour la première fois une surface de Riemann S simplement connexe revêtant un domaine $D \subset \mathbb{C}$; S n'est autre que le *revêtement universel* de D. Qu'il nous suffise de mentionner le passage suivant :

> Considérons m fonctions de x,
>
> $$y_1, y_2, ..., y_m,$$
>
> analytiques, non uniformes en général. Ces fonctions seront complètement définies lorsque l'on connaîtra, non seulement la valeur de x, mais encore le chemin par lequel la variable x a atteint cette valeur en partant du point initial O.
>
> Nous considérerons la variable x comme se mouvant non sur un plan, mais sur une surface de Riemann S. Cette surface sera formée de feuillets plans superposés comme dans les surfaces de Riemann, à l'aide desquelles on étudie les fonctions algébriques : seulement le nombre de feuillets sera ici infini.
>
> Traçons dans le plan un contour fermé quelconque C partant d'un point initial x quelconque et revenant à ce même point x. La surface sera complètement définie, si nous disons à quelles conditions le point initial et le point final de ce contour devront être regardés comme appartenant à un même feuillet ou à des feuillets différents. Or il y a deux sortes de contours C :
>
> (1) Ceux qui sont tels que l'une au moins des m fonctions y ne revient pas à leurs valeurs initiales quand la variable x décrit le contour C.
>
> (2) Ceux qui sont tels que les m fonctions y reviennent à leurs valeurs initiales quand la variable x décrit le contour C.
>
> Parmi les contours de la deuxième sorte, je distinguerai encore deux espèces :
>
> (1) C sera de la première espèce, si l'on peut, en déformant ce contour d'une façon continue, passer à un contour infinitésimal de telle façon que le contour ne cesse jamais d'être de la seconde sorte,
>
> (2) C sera de la seconde espèce dans le cas contraire.

43. H. Poincaré, « Sur un théorème de la théorie générale des fonctions », in *Bulletin de la Société mathématique de France, t. XI*, 1883.

44. H. Poincaré, Sur un Théorème de la théorie générale des Fonction », *op. cit.*, p. 112

> Eh bien, le point initial et le point final de C appartiendront à des feuillets différents si ce contour est de la première sorte, ou de la seconde espèce de la seconde sorte. Il appartiendront au même feuillet si C est de la première espèce de la seconde sorte. [45]

Poincaré note que la surface de Riemann S ainsi obtenue est simplement connexe et qu'elle est homéomorphe au disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Il prouve ensuite qu'elle est conformément équivalente à $\mathbb{D}$ et il admet dans les deux notes additionnelles que son raisonnement n'est pas totalement satisfaisant puisqu'il est amené à exclure les points singuliers de la surface S qu'il a ainsi construite et qui correspondent à 0, 1 et ∞ : ≪ Il résulte de la manière dont cette surface S a été construite qu'autour de chaque point singulier viennent s'échanger une infinité de feuillets. Nous ne regarderons pas un point singulier comme faisant partie de la surface de Riemann, mais seulement de sa frontière ≫. [46] Il est nécessaire d'éviter une lecture rétrospective de cet article. Poincaré se contente d'expliciter de manière purement intuitive l'idée d'une surface simplement connexe à un nombre infini de feuillets recouvrant un domaine du plan complexe. On ne peut donc pas dire qu'il propose une *définition* d'un revêtement universel en général. Qui plus est, Poincaré n'envisage pas encore en 1883 la notion de revêtement universel comme un concept de premier plan en *analysis situs*, il s'agit seulement ici d'un auxiliaire afin de résoudre le problème de l'uniformisation d'une ≪ fonction ≫ analytique initialement multivaluée d'une variable complexe.

À la différence de Klein, il ne considère pas les surfaces de Riemann en elles-mêmes ; pour Poincaré comme pour Riemann, les surfaces de Riemann sont censées revêtir le plan complexe ou un domaine du plan complexe. Poincaré ne peut donc absolument pas interpréter le théorème d'uniformisation en termes de *classification* des surfaces de Riemann simplement connexes, celles-ci étant conformément équivalentes soient à la sphère de Riemann Σ, soit au disque ouvert $\mathbb{D}$, soit au plan complexe $\mathbb{C}$. D'ailleurs, dans son article de 1883, il envisage exclusivement le cas où la surface simplement connexe S qu'il introduit est homéomorphe et conformémement équivalente à $\mathbb{D}$.

Comme le précise Hawkins [47], le mathématicien américain Osgood en 1898 et Hilbert dans sa conférence de Paris de 1900 n'ont pas manqué de repérer certaines insuffisances dans la démonstration proposée par Poincaré en 1883. Revenons à ce propos sur les arguments développés par Hilbert dans l'exposé du vingt-deuxième problème qui porte le titre suivant : ≪ uniformisation des relations analytiques par des fonctions automorphes ≫ [Uniformisierung analytischer Beziehungen mittelst automorphen Funktionen] :

45. *ibid.*, p. 114-115.
46. *ibid.*, p. 125.
47. T. Hawkins, *Emergence of the theory of Lie groups*, Berlin, éd. Springer, p. 356 et suiv.

> Comme l'a d'abord montré Poincaré, on peut toujours uniformiser une relation algébrique entre deux variables quelconques à l'aide de fonctions automorphes d'une variable (...). Poincaré est également parvenu à généraliser avec succès ce théorème fondamental à des relations non pas algébriques mais analytiques entre deux variables, d'une manière qui est d'ailleurs toute différente de celle qu'il a suivie pour résoudre le problème particulier mentionné plus haut. Néanmoins, la preuve de Poincaré montrant la possibilité d'uniformiser une relation analytique quelconque entre deux variables n'implique pas qu'il soit possible de choisir les fonctions de la nouvelle variable de telle sorte que, au moment où cette variable parcourt le domaine régulier de telles fonctions, les points réguliers de la configuration analytique donnée soient finalement représentés dans leur ensemble. Au contraire, dans les recherches de Poincaré, mis à part les points de branchement, il y a d'autres points généralement en nombre infini et discret qui ne peuvent être atteints que si la variable s'approche de certains points limites [Grenzstellen] des fonctions. Au vu de la signification fondamentale du problème énoncé par Poincaré, il me paraît souhaitable de clarifier et de résoudre cette difficulté. [48]

Au début de cet extrait, Hilbert mentionne l'article de Poincaré de 1882 dans lequel il est établi que l'on peut uniformiser une relation algébrique entre deux variables x et y à l'aide de fonctions automorphes définies sur $\mathbb{D}$. Il rappelle ensuite la tentative menée par Poincaré en 1883 pour généraliser le théorème d'uniformisation à des relations analytiques quelconque entre deux variables. Ces remarques ont pour but de montrer que Hilbert connaît très bien les travaux que Poincaré a consacrés au théorème d'uniformisation dans le cas des courbes algébriques et analytiques. Hilbert met ensuite en évidence une faiblesse essentielle dans le raisonnement de Poincaré. Ce dernier était déjà pleinement conscient que sa démonstration n'était pas complète, comme en atteste la première note additionnelle à son article de 1883. Toujours est-il que le vingt-deuxième problème de Hilbert a le mérite de souligner la nécessité

48. D. Hilbert, ≪ Mathematische Probleme ≫, in *Göttinger Nachrichten 1900*, p. 290-291 : ≪ Wie Poincaré zuerst bewiesen hat, gelingt die Uniformisierung einer beliebigen algebraischen Beziehung zwischen zwei Variabeln stets durch Automorphen Funktionen einer Variabeln (...). Die Verallgemeinerung dieses fundamentalen Satzes auf nicht algebraische, sondern beliebige analytische Beziehungen zwischen zwei Variabeln hat Poincaré ebenfalls mit Erfolg in Angriff genommen und zwar auf einem völlig anderen Wege als derjenige war, der ihn bei dem anfangs genannten speciellen Probleme zum Ziele führte. Aus Poincarés Beweis für die Möglichkeit der Uniformisierung einer beliebigen analytischen Beziehung zwischen zwei Variabeln geht jedoch noch nicht hervor, ob es möglich ist, die eindeutigen Funktionen der neuen Variabeln so zu wählen, dass, während diese Variabele das reguläre Gebiet jener Funktionendurchläuft, auch wirklich die Gesamtheit aller regulären Stellen des vorgelegten analytischen Gebildes zur Darstellung gelangt. Vielmehr scheinen in Poincarés Untersuchungen, abgesehen von den Verzweigungspunkten, noch gewisse andere im Allgemeinen unendlichviele diskrete Stellen vorgelegten analytischen Gebildes ausgenommen zu sein, zu denen man nur gelangt, indem man die neue Variable gewisse Grenzstellen der Funktionen nähert. *Eine Klärung und Lösung dieser Schwierigkeit scheint mir in Angebracht der fundamentalen Bedeutung der Poincaréschen Fragestellung äussert wünschenswert.*

de parvenir à une démonstration satisfaisante du théorème d'uniformisation dans le cas de relations analytiques quelconques entre deux variables.

Poincaré et Koebe démontrent cette proposition en général et sans restriction de manière indépendante en 1907. Notre objectif n'est pas de comparer leurs démonstrations respectives. Étant donné que Weyl s'approprie essentiellement les travaux de Koebe qui est *Privatdozent* à l'université de Göttingen à partir de 1907, nous nous focaliserons sur ces derniers. Précisons à la suite d'Hawkins que Koebe publie pas moins de dix-neuf articles sur le théorème d'uniformisation entre 1907 et 1911 à l'université de Göttingen. C'est dire à quel point les recherches autour du théorème d'uniformisation occupent une place centrale à Göttingen avant même que Weyl ne dispense ses cours sur les fonctions d'une variable complexe et les surfaces de Riemann entre 1910 et 1912. Cela posé, la premère preuve complète du théorème d'uniformisation apparaît dans l'article de Koebe intitulé « Sur l'uniformisation de courbes analytiques quelconques » [Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven]. [49] Pour prouver qu'il est possible sans restriction d'uniformiser une relation analytique entre deux variables, Koebe s'appuie sur une proposition qui correspond exactement au « théorème d'uniformisation ». Voici comment nous pouvons la formuler : toute surface de Riemann simplement connexe est conformément équivalente soit à la sphère de Riemann Σ, soit au plan complexe $\mathbb{C}$, soit au disque de Poincaré $\mathbb{D}$. Dans son article, Koebe prend pour surface de référence la sphère de Riemann. Lorsque l'on retire le point à l'infini de Σ, on obtient $\mathbb{C}$. Une calotte sphérique [Kugelkalotte] est conformément équivalente à $\mathbb{D}$. Koebe se donne une surface de Riemann S, si S n'est pas simplement connexe, alors il convient de construire « un domaine simplement connexe » B par un processus de revêtement [Überlagerungsprozess] au-dessus de S. Koebe reprend donc à son compte et il affine le procédé mis au jour par Poincaré en 1883. Il parvient en particulier au résultat suivant, dont nous avons déjà souligné l'importance :

> Il est possible d'appliquer le domaine B de manière biunivoque et conforme à un domaine également simplement connexe revêtant la sphère. On construit ce domaine soit à partir de la sphère tout entière, soit à partir de la sphère moins un point, soit à partir d'une calotte sphérique à laquelle on a retiré le cercle frontière. [50]

49. P. Koebe, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven », *Göttinger Nachrichten*, 1907, pp. 191-210.

50. *ibid.*, p. 198 : « Es ist möglich den einfach zusammenhängenden Bereich B in eindeutig umkehrbarer Weise konform auf einen die Kugel schlicht überdeckenden ebenfalls einfach zusammenhängenden Bereich abzubilden. Der letztere Bereich wird entweder von der ganzen Vollkugel gebildet oder von den ganzen Vollkugel mit Ausnahme eines Punktes oder von einer Kugelkalotte deren Begrenzungskreis nicht als zur Kalotte gehörig betrachtet wird ».

Si l'on suit les interprétations de Hawkins, l'article de Koebe semble plus systématique et plus complet que celui de Poincaré. En effet, ce dernier n'envisage que des surfaces dont un revêtement universel est conformément équivalent à $\mathbb{D}$. Par suite, au cours de son raisonnement, Poincaré exclut tacitement de son raisonnement les courbes algébriques complexes de genre 0 et 1. A contrario, l'un des principaux motifs de Koebe consiste à proposer une classification rigoureuse et exhaustive des surfaces de Riemann simplement connexes. Koebe a sans doute été marqué par les travaux de *classification* des surfaces de Riemann compactes connexes menés par Klein en 1882. D'ailleurs, à la fin de son article, Koebe revient sur les courbes algébriques complexes et il montre très exactement le résultat suivant : si S est de genre $p \geqslant 2$, alors un revêtement universel $\widetilde{S}$ de S est conformément équivalent à $\mathbb{D}$, si S est de genre 1, alors $\widetilde{S}$ est conformément équivalent à $\mathbb{C}$, enfin si S est de genre 0, alors $S \simeq \widetilde{S} \simeq \Sigma$.

Dans son article, Koebe se réfère aussi bien à Weierstrass et Schwarz, dont il a été l'élève, qu'à Riemann et Klein. Preuve que l'opposition entre le point de vue algébrique et local de Weierstrass et le point de vue géométrique de Riemann tend à s'émousser au début du XX$^{\text{e}}$ siècle à l'université de Göttingen. Nous trouvons une preuve éclatante de cette hypothèse au début de l'article en deux parties que Koebe publiera dans le *Journal de Crelle* en 1910 et 1911 : « le problème de l'uniformisation apparaît comme une combinaison des conceptions riemannienne et weierstrassienne en théorie des fonctions ».[51] Les travaux de Koebe permettent de dépasser l'opposition entre Weierstrass et Riemann en analyse complexe. Weyl montrera avec éclat la complémentarité de leurs méthodes respectives au début de *Die Idee der Riemannschen Fläche*.

Venons-en aux §§ 8 et 9 de ce même ouvrage. Faisons quelques précisions sur les sources utilisées par Weyl. Certes, il renvoie à l'article de Poincaré de 1883 qui constitue l'acte de naissance du concept de revêtement universel. En réalité, il s'appuie pour l'essentiel sur les travaux que Koebe consacre au théorème d'uniformisation. Weyl mentionne ainsi les troisième et quatrième conférences de Koebe consacrées à l'« Uniformisation des courbes analytiques quelconques » publiées en 1908 et en 1909 dans les *Göttinger Nachrichten* ainsi que la seconde partie d'un article également intitulé « sur l'uniformisation des courbes analytiques quelconques » et publié dans le *Journal de Crelle* en 1911.

Avant de revenir de manière précise sur le procédé utilisé par Weyl pour définir les « sur-

51. P. Koebe, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven », Erster Teil : das uniformisierende Prinzip, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **138**, p. 196 : « Das Uniformisierungsproblem erscheint als eine Verbindung Weierstraßscher und Riemannscher Auffassung der Funktionentheorie ».

faces de revêtement » [Überlagerungsflächen] et les surfaces simplement connexes, nous pouvons déjà mentionner deux points qui singularisent le raisonnement de Weyl par rapport à ceux de Poincaré et Koebe. (1) Alors que Poincaré et Koebe introduisent le concept de revêtement universel pour prouver le théorème d'uniformisation, Weyl isole ce même concept ; il le définit indépendamment des problèmes mathématiques qu'il a contribué à résoudre. Cette manière de procéder repose sur l'architecture générale de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. La première partie de cet ouvrage est consacrée aux concepts fondamentaux en théorie des surfaces de Riemann. Comme nous l'avons souligné, Weyl élabore des définitions par axiomes ou définitions implicites qui permettent d'importantes clarifications conceptuelles. Les propositions fondamentales attachées à la théorie des surfaces de Riemann — parmi lesquelles le théorème d'uniformisation — sont abordées dans une seconde partie. (2) Dans l'article de Poincaré de 1883 comme dans les travaux de Koebe publiés entre 1907 et 1912, les concepts de revêtement et de revêtement universel s'appliquent exclusivement aux surfaces de Riemann. Puisque ces notions relèvent de l'*analysis situs*, Weyl montre qu'elles ont déjà un sens pour des surfaces topologiques quelconques. Cette remarque ne doit pas prêter à des surtinterprétations que nous avons déjà écartées : certes, Weyl définit axiomatiquement les concepts de revêtement et de revêtement universel, néanmoins son argument ne relève pas encore des mathématiques abstraites et structurales. Nous souhaitons donc écarter une nouvelle fois la surinterprétation suivante : cet ouvrage ne constitue pas, dans les domaines de l'*analysis situs* et de l'analyse complexe, l'équivalent de l'article de Steinitz intitulé *Algebraische Theorie der Körper* en algèbre. Il faudra attendre le *Lehrbuch der Topologie* de Seifert et Threlfall (1935) pour que la théorie des revêtements soient traitée de manière abstraite et structurale.

Le début du § 9 s'ouvre sur une série de distinctions conceptuelles qu'il convient de clarifier. Weyl affirme : « le concept de simple connexité [des einfachen Zusammenhangs], qui est étroitement lié à la construction de surfaces de revêtement [Überlagerungsfläche], est plus précis que celui de planéité [Schlichtartigkeit] ». [52] Une première question se pose : que faut-il entendre par « Schlichtartigkeit » ? Il s'agit d'un néologisme introduit par Koebe dans les troisième et quatrième conférences consacrées à l'uniformisation des courbes analytiques quelconques. Une surface de Riemann est « schlichtartig » lorsque toute rétrosection [Rückkehrschnitt] — i.e. toute courbe fermée simple — la divise en deux parties disjointes. [53] Weyl s'appuie sur des rudiments de triangulation des surfaces de Riemann pour définir cette pro-

52. H. Weyl, *die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. 47.

53. P. Koebe, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven », Vierte Mitteilung, in *Göttinger Nachrichten*, 1909, p. 324.

priété. De manière équivalente, une surface est « schlichtartig » si tout polygone tracé sur elle la divise en au moins deux parties disjointes. [54] Un tore ne satisfait pas à cette propriété. Si l'on interprète correctement l'argument de Weyl, il y a un rapport de genre à espèce entre les concepts de planéité [Schlichtartigkeit] et de simple connexité. Il montrera d'ailleurs au cours du § 9 que toute surface simplement connexe est « schlichtartig », [55] la réciproque étant fausse : une couronne ou un disque épointé sont « schlichtartig » : toute courbe fermée simple tracée sur de telles surfaces les divise en deux parties disjointes. Par contre, il ne s'agit pas là de surfaces simplement connexes : On peut tracer des lacets sur une couronne ou un disque épointé qui ne sont pas continûment réductibles à un point. Dans le cas des surfaces « fermées » ou *compactes*, les propriétés de planéité [Schlichtartigkeit] et de simple connexité coïncident.

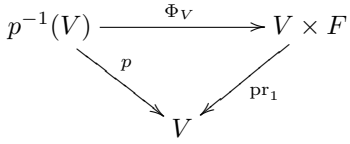
Ce point étant précisé, on remarque d'entrée de jeu que Weyl ne considère pas le concept de simple connexité en lui-même, mais relativement à la construction d'un revêtement au-dessus d'une surface topologique donnée. Ce point apparaît jusque dans la définition de la simple connexité retenue par Weyl : une surface topologique est simplement connexe lorsqu'elle n'admet que des « surfaces de revêtement » illimitées [unbegrenzt] et non ramifiées à un seul feuillet, ces dernières ne différant donc pas essentiellement d'elle. Avant de parvenir à ce point, voyons comment Weyl définit le concept de revêtement d'une surface de base donnée.

> Soit $\mathfrak{F}$ une surface donnée, [à savoir] la surface de base, nous dirons que $\overline{\mathfrak{F}}$ est une surface de revêtement de $\mathfrak{F}$ lorsque, à un point $\overline{\mathfrak{p}}$ de $\overline{\mathfrak{F}}$ est associé un unique point $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{F}$, entendu comme « point trace » de $\overline{\mathfrak{p}}$; nous disons également que $\overline{\mathfrak{p}}$ se situe au-dessus de $\mathfrak{p}$. Si nous considérons $\overline{\mathfrak{F}}$ comme une surface non-ramifiée par rapport à $\mathfrak{F}$, alors une telle correspondance [Zuordnung] doit toujours satisfaire à la condition suivante : si $\overline{\mathfrak{p}}_0$ est un point quelconque de $\overline{\mathfrak{F}}$, alors il existe toujours un voisinage de $\overline{\mathfrak{p}}_0$ de $\overline{\mathfrak{F}}$ qui peut être appliqué de manière biunivoque et inversiblement ouverte [gebietsstetig] [56] à un domaine de $\mathfrak{F}$. [57]

Pour mesurer le sens et la portée d'une telle définition, il nous semble opportun de la comparer à la définition du concept de revêtement tel que nous l'utilisons. Dans ce qui suit, nous raisonnerons exclusivement sur des espaces topologiques séparés et localement connexes par arcs. Soit B un espace topologique. Un *revêtement* est la donnée d'un espace E et d'une application continue $p : E \to B$ satisfaisant à la propriété de *trivialisation locale* suivante :

54. H. Weyl, *op. cit.*, p. 45.
55. *ibid.*, p. 51.
56. E. Scholz précise qu'une « gebietsstetige Abbildung » désigne une application ouverte. Voir en particulier E. Scholz, « Weyls Infinitesimalgeometrie », in *Hermmann Weyl's Raum - Zeit - Materie and a General Introduction to His Scientific Work*, *op. cit.*, p. 55.
57. H. Weyl, *op. cit.*, p. 47.

pour tout point b de B, il existe un voisinage V de b dans B, un espace discret non vide F et un homéomorphisme $\Phi_V : p^{-1}(V) \to V \times F$ tel que le diagramme suivant :



soit commutatif. On dit que B s'appelle la *base*, E l'*espace total*, F la *fibre* du revêtement, Φ_V la *trivialisation locale* du revêtement au-dessus de V et pr_1 la *projection* de $V \times F$ sur V. Le nombre de feuillets d'un revêtement correspond au cardinal de la fibre F. La définition d'un revêtement proposée par Weyl n'est guère éloignée de celle que nous venons de formuler pour au moins trois raisons : (1) comme l'a souligné R. Chorlay, Weyl adopte une conception ensembliste des surfaces ; (2) il s'appuie sur la notion de voisinage qui lui permet de définir rigoureusement aussi bien les variétés bidimensionnelles que les revêtements ; la correspondance (Zuordnung) introduite par Weyl s'identifie manifestement à la trivialisation locale du revêtement au-dessus de l'un des voisinages de la surface de base notée $\mathfrak{F}$. En effet, il s'agit d'un homéomorphisme puisqu'elle est « umkehrbar eindeutig und umkehrbar gebietsstetig ». Nous mesurons une nouvelle fois à quel point l'axiomatisation de la notion de voisinage par Hilbert au tout début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle est centrale pour parvenir à une définition rigoureuse des concepts fondamentaux relevant de l'*analysis situs*, de la géométrie différentielle ou encore de la théorie des surfaces de Riemann. Cela étant, *Die Idee der Riemannschen Fläche* relève encore des mathématiques pré-structurales, dans la mesure où Weyl ne formule pas les grands théorèmes de structure qui caractériseront la topologie algébrique et, plus particulièrement, la théorie des revêtements.

Donnons quelques exemples pour avoir une prise sur le concept de revêtement. On peut montrer que $\mathbb{R}$ muni de l'application $p : t \mapsto e^{it}$ est un revêtement à un nombre infini de feuillets du cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. De manière un peu plus subtile, on peut également se référer à l'exponentielle complexe. Elle est définie comme suit :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = e^z = \sum_{0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Contrairement à l'exponentielle réelle — qui est bijective et donc injective —, l'exponentielle complexe n'est pas injective. Son noyau n'est pas réduit à l'élément neutre, il s'identifie à $2i\pi\mathbb{Z}$. L'application exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C} - \{0\}$. Étant donné que l'exponentielle complexe n'est pas bijective, elle n'est pas inversible. On ne peut donc pas avoir un logarithme complexe bien défini. Une fonction f définie sur un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$

ne contenant pas 0 est une détermination du logarithme sur U si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(f(z)) = z.$$

Précisons qu'il n'existe pas de détermination continue du logarithme dans $\mathbb{C} - \{0\}$. De plus, si f constitue une détermination du logarithme sur U, $f + 2i\pi k$ constitue également une détermination du logarithme sur U, pour un entier k arbitrairement donné. Ainsi, l'application logarithme est infiniment multiforme. L'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ est un revêtement. Voici comment l'on peut montrer ce point : on se donne un disque ouvert $V \subset \mathbb{C} - \{0\}$ de centre b. Il existe une détermination continue du logarithme sur ce disque, i.e. une application f de V dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(f(z)) = z$. Les autres déterminations continues du logarithme diffèrent de f de $2ik\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. La trivialisation locale $\Phi : \exp^{-1}(V) \to V \times \mathbb{Z}$ peut être définie comme suit :

$$\Phi(t) = \left(\exp(t), \frac{f(\exp(t)) - t}{2i\pi}\right).$$

Il s'agit d'une application continue, bijective, dont la réciproque :

$$\begin{array}{rcl} V \times \mathbb{Z} & \to & \exp^{-1}(V) \\ (z, k) & \mapsto & f(z) - 2ik\pi \end{array}$$

est continue. Nous avons affaire ici à un revêtement à un nombre infini de feuillets. Dernier exemple : soit $n \in \mathbb{N}$, l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C} - \{0\} & \to & \mathbb{C} - \{0\} \\ & z & \mapsto & z^n \end{array}$$

définit un revêtement à n feuillets. La fibre de ce revêtement s'identifie à U_n, c'est-à-dire au groupe fini des racines n-ièmes de l'unité.

Revenons maintenant aux arguments de Weyl et voyons de manière précise comment il introduit le concept de simple connexité — nous laisserons de côté les subtilités liées au concept de surface de revêtement illimitée [Unbegrenzte Überlagererungsfläche] au-dessus d'une surface de base :

> Si, au-dessus de chaque point de $\mathfrak{F}$, il ne se trouve qu'un seul point de la surface de revêtement non ramifiée et illimitée $\overline{\mathfrak{F}}$, alors $\overline{\mathfrak{F}}$ est à un feuillet et elle ne diffère pas essentiellement de $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{F}$ n'admet que des surfaces non ramifiées et illimitées à un seul feuillet, alors $\mathfrak{F}$ est dite *simplement connexe.* [58]

58. *ibid.*, p. 47.

Weyl commence donc par définir ce que nous appelons un revêtement *trivial* de la surface $\mathfrak{F}$. Il montre ensuite qu'une surface $\mathfrak{F}$ est *simplement connexe* si tout revêtement de $\mathfrak{F}$ est *trivial*. Il prend l'exemple du disque ouvert $\mathbb{D}$. Une telle définition appelle deux remarques : (1) Weyl ne considère pas la notion de simple connexité à partir des classes d'homotopie de lacets. On rappelle en effet qu'une surface topologique $\mathfrak{F}$ est simplement connexe si, quel que soit le point de base x_0 choisi sur $\mathfrak{F}$, tout lacet — c'est-à-dire tout chemin ayant pour origine et extrémité x_0 — se réduit continûment à un point. (2) Voilà pourquoi au cours du § 9 de son ouvrage, Weyl n'introduit pas le concept de *groupe fondamental* dû à Poincaré dans son *Analysis Situs*[59], ce qui ne signifie pas que Weyl ignore ce concept. Il classe ensuite les revêtements. Pour ce faire, il introduit deux nouveaux concepts : celui de « surface de revêtement régulière » [reguläre Überlagerungsfläche] et celui de « surface de revêtement universelle » [universelle Überlagerungsfläche]. Voici comment il définit la première notion :

> On prendra le soin de dire qu'une surface de revêtement non-ramifiée et illimitée $\overline{\mathfrak{F}}$ au-dessus de $\mathfrak{F}$ est régulière, lorsqu'il n'arrive jamais que, de deux courbes sur $\overline{\mathfrak{F}}$ qui admettent la même ligne-trace [Spurlinie] dans $\mathfrak{F}$, l'une serait fermée et l'autre ouverte. Supposons que $\overline{\mathfrak{F}}$ soit régulière et que $\overline{\mathfrak{p}}_0$ et $\overline{\mathfrak{p}}'_0$ soient deux points de $\overline{\mathfrak{F}}$ qui « se recouvrent » (c'est-à-dire qui possèdent le même point-trace dans $\mathfrak{F}$), il existe une et une seule application bi-univoque et inversiblement ouverte de $\overline{\mathfrak{F}}$ sur elle-même, telle que chaque point $\overline{\mathfrak{p}}$ se transforme en un point $\overline{\mathfrak{p}}'$ qui le recouvre et, en particulier, telle que $\overline{\mathfrak{p}}_0$ se transforme en $\overline{\mathfrak{p}}'_0$. Ces transformations de revêtement [Deck-transformationen] de $\overline{\mathfrak{F}}$ sur elle-même forment un groupe Γ et, tant qu'elle est de nature topologique, la relation entre $\overline{\mathfrak{F}}$ et $\mathfrak{F}$ clairement et complètement lorsque l'on se fonde sur Γ considéré comme un *groupe abstrait*.[60]

Le concept de « surface de revêtement régulière » correspond très exactement à un revêtement *galoisien*. Weyl adopte d'ailleurs cette terminologie dans l'article de 1916 intitulé « Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen ».[61] Il souligne alors l'étroite analogie entre la théorie des revêtements et la théorie des corps de nombres. L'adjectif « régulier » ou « galoisien » qualifie les revêtements satisfaisant à la propriété suivante : il n'arrive jamais que, de deux courbes sur $\overline{\mathfrak{F}}$ qui correspondent à la même courbe fermée dans $\mathfrak{F}$, l'une soit fermée et l'autre ouverte. Weyl donne ses contours quasiment définitifs au processus de relèvement des chemins et des lacets tracés sur la surface de base $\mathfrak{F}$. Quant au

59. H. Poincaré, *Analysis Situs*, 1895, in *Œuvres*, tome VI, Paris éd. Gauthier-Villars, 1953, p. 239 et suiv.
60. H. Weyl, *op. cit.*, p. 50.
61. Weyl emprunte l'expression « surface de revêtement régulière » à Koebe, voir en particulier P. Koebe, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven », Erster Teil : das uniformisierende Prinzip, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **138**, p. 202. Dans son article de 1916, Weyl affirme : « Eine reguläre (unverzweigte, unbegrenzte) Überlagerungsfläche $\widetilde{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{F}$ kann man gemäß der in der Zahlenkörpertheorie üblichen Terminologie als eine Galoissche Überlagerungsfläche (relativ zu $\mathfrak{F}$) bezeichnen ».

groupe Γ, nous pouvons l'identifier purement et simplement au groupe Aut $\left(\overline{\mathfrak{F}}\right)$ qui laisse la surface de base $\mathfrak{F}$ inchangée. Dans son article de 1916, Weyl parle de *groupe de Galois* de $\widetilde{\mathfrak{F}}$ par rapport à $\mathfrak{F}$, renforçant ainsi l'analogie entre la théorie des revêtements et la théorie des corps de nombres.

Quelques remarques mathématiques méritent ici d'être faites pour saisir les propriétés de ce groupe. Commençons par définir la notion d'homomorphisme de revêtements. Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ deux revêtements. Un homomorphisme de p dans p' est un couple d'applications continues $H : E \to E'$ et $h : B \to B'$ telles que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

soit commutatif. Si H et h sont des homéomorphismes, alors on a affaire à un isomorphisme de revêtements. Enfin, si $E = E'$ et $B = B'$, on parle d'automorphismes de revêtements. L'ensemble des automorphismes de revêtements forme un groupe que l'on note généralement Aut(E). Le groupe Γ introduit par Weyl en 1913 correspond très exactement à Aut(E). Précisons qu'un revêtement $p : E \to B$ est *galoisien*, si E est connexe par arcs et si le groupe Aut(E) opère simplement transitivement sur les fibres de E. Bien que Weyl n'utilise pas ici le cadre conceptuel hérité des actions de groupes, il n'en reste pas moins que l'affirmation selon laquelle l'image d'un point $\overline{\mathfrak{p}}$ de $\overline{\mathfrak{F}}$ par l'une des transformations de Γ est un point $\overline{\mathfrak{p}}'$ qui *recouvre* $\overline{\mathfrak{p}}$ équivaut à l'idée selon laquelle Γ agit transitivement sur les fibres du revêtement.

L'objectif de Weyl est clair lorsqu'il introduit le groupe des automorphismes de revêtements qu'il note Γ : il s'agit de saisir de manière exhaustive la relation qu'entretient une surface de revêtement régulière (i.e. un revêtement galoisien) avec la surface $\mathfrak{F}$ qu'elle revêt. Par contre, Weyl ne cherche ni à décomposer Γ, ni à savoir si et dans quelle mesure celui-ci admet des sous-groupes distingués auxquels correspondraient des revêtements eux-mêmes réguliers de $\mathfrak{F}$. Une question reste en suspens : comment interpréter l'idée selon laquelle Γ peut être considéré comme un groupe abstrait ? Que faut-il entendre exactement par l'expression « groupe abstrait » ? Quelques rappels terminologiques s'imposent ici. Un groupe peut être qualifié d'*abstrait* lorsque l'on ne spécifie ni la loi de composition qui le structure, ni la nature des éléments qu'il contient. Avant l'axiomatisation du concept de groupe formulée de manière rigoureuse par H. Weber dans « Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie » (1893), les mathématiciens étudiaient essentiellement des groupes de

transformations opérant sur des ensembles de *points* ou d'objets, mais non pas des groupes *abstraits*.

Les premières pages du chapitre III de l'ouvrage de Weyl intitulé *The theory of groups and quantum mechanics* (édition de 1931) nous permet de bien saisir le lien et la distinction entre « groupes de transformations » et « groupes abstraits ». Par *groupe de transformations*, il faut entendre un ensemble $\mathfrak{G}$ de transformations opérant sur un ensemble de points et satisfaisant aux conditions suivantes : $\mathfrak{G}$ contient la transformation identité, si S appartient à $\mathfrak{G}$, il en va de même pour S^{-1}, enfin la résultante TS de deux transformations S et T appartient également à $\mathfrak{G}$. Cela posé, *un processus d'abstraction* nous conduit de la notion de groupe de transformations à celle de groupe abstrait. Ce processus admet une double caractéristique : il permet de faire émerger la *structure* d'un groupe de transformations $\mathfrak{G}$ par-delà ses caractéristiques particulières. Mais surtout, les transformations de $\mathfrak{G}$ finissent par être considérées comme des éléments de nature immatérielle. Revenons au groupe Γ des transformations de revêtement [Gruppe der Deck-Transformationen]. Il s'agit bien originairement d'un groupe de transformations comme son nom l'indique. Weyl nous dit tout simplement qu'il faut faire abstraction de la nature des transformations pour décrypter la relation entre $\overline{\mathfrak{F}}$ et la surface $\mathfrak{F}$ qu'elle revêt. Bref, une fois que l'on a défini Γ, il convient de s'abstraire de la nature des transformations qu'il contient pour pouvoir le manipuler et le rendre opératoire. Il s'agit là d'une interprétation possible du passage suivant : « la relation entre $\overline{\mathfrak{F}}$ et $\mathfrak{F}$ parvient à une expression claire et aboutie lorsque l'on se fonde sur Γ considéré comme un *groupe abstrait* ». Weyl conservera cette assertion en l'état dans la troisième et dernière édition de *Die Idee der Riemannschen Fläche* qui date de 1955.

Montrons sur un plan purement mathématique en quoi l'assertion de Weyl n'a rien de gratuit. Supposons que l'espace de base B soit connexe et localement connexe par arcs, donnons-nous un revêtement $p : E \to B$ de B que nous supposerons galoisien. Nous désignerons par $\pi_1(E, x_0)$ le groupe fondamental de E au point x_0. Rappelons que $\pi_1(E, x_0)$ est constitué de l'ensemble des classes d'homotopie de lacets ayant x_0 pour origine et pour extrémité. Soit x un autre point de E. Puisque E est connexe par arcs, $\pi_1(E, x)$ est isomorphe à $\pi_1(E, x_0)$. Nous désignerons par p^* le morphisme injectif de groupes $p^* : \pi_1(E, x_0) \to \pi_1(B, p(x_0))$. Soit b dans B et x dans $p^{-1}(b)$. Puisque nous avons supposé que $p : E \to B$ est galoisien, nous pouvons immédiatement en inférer que $p^*(\pi_1(E, x)) \subset \pi_1(B, b)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(B, b)$. De plus, *le groupe des automorphismes de revêtements de E, noté* $\mathrm{Aut}(E)$ *vérifie* :

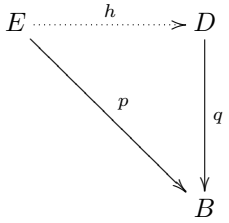
$$\mathrm{Aut}(E) \simeq \frac{\pi_1(B, b)}{p^*(\pi_1(E, x))}.$$

Cet isomorphisme de groupes rend compte, nous semble-t-il, de l'assertion de Weyl selon laquelle le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ considéré comme un groupe abstrait permet de saisir la relation entre B et un revêtement galoisien E de B. Il ajoute même : « la représentation d'une surface de revêtement par un groupe abstrait Γ (...) n'est possible que pour des surfaces de revêtement régulières », ce que l'on peut expliquer comme suit : si $p : E \to B$ n'était pas galoisien, alors $p^*(\pi_1(E, x))$ ne serait pas un sous-groupe distingué de $\pi_1(B, b)$. Par suite, l'ensemble quotient $\frac{\pi_1(B,b)}{p^*(\pi_1(E,x))}$ ne formerait pas un groupe et l'on ne pourrait donc plus décrire la relation entre E et B à partir de $\mathrm{Aut}(E)$.

Venons-en à la définition du concept de revêtement universel proposée par Weyl :

> parmi toutes les surfaces de revêtement non-ramifiées et illimitées d'une surface donnée, il en existe une qui est la plus forte ; elle peut être caractérisée à l'aide de l'énoncé : Une courbe $\widetilde{\gamma}$ [tracée] sur elle est fermée si toutes les courbes tracées sur des surfaces de revêtement et qui possèdent la même courbe-trace sur $\mathfrak{F}$ que $\widetilde{\gamma}$ sont elles-mêmes fermées. En raison de cette propriété, « la surface de revêtement universelle » $\widetilde{\mathfrak{F}}$ est régulière, et le groupe de ses transformations de revêtement, considéré comme un groupe abstrait, est un invariant topologique de la surface de base $\mathfrak{F}$. En outre, $\widetilde{\mathfrak{F}}$ est simplement connexe. En effet, si $\widetilde{\mathfrak{F}}^*$ constituait une surface de revêtement non-ramifiée, illimitée et à plus d'un feuillet au-dessus de $\widetilde{\mathfrak{F}}$, alors nous pourrions tracer une ligne ouverte sur $\widetilde{\mathfrak{F}}^*$, dont la courbe-trace sur $\widetilde{\mathfrak{F}}$ serait fermée. Mais puisque $\widetilde{\mathfrak{F}}^*$ est également une surface de revêtement non-ramifiée et illimitée au-dessus de $\mathfrak{F}$, une telle possibilité contredit immédiatement la propriété caractéristique de $\widetilde{\mathfrak{F}}$. [62]

Rappelons qu'un revêtement $p : E \to B$ est universel s'il est galoisien et si, pour tout revêtement connexe $q : D \to B$, il existe un homomorphisme de revêtements h au-dessus de B, ce que l'on peut transcrire à l'aide du diagramme :



Pour comprendre ce concept, nous pouvons reprendre l'un des exemples élémentaires de revêtements que nous avons précédemment mentionné : $\mathbb{R}$ muni de l'application $p : t \mapsto e^{it}$ est un revêtement universel à un nombre infini de feuillets du cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. En particulier, nous remarquons que $\mathbb{R}$ est simplement connexe. Nous exemplifions ainsi la proposition générale, démontrée par Weyl dans le passage que nous venons de traduire, selon laquelle le revêtement universel E d'un espace de base B est simplement connexe. Il n'a

62. *ibid.*, p. 50-51.

pas non plus échappé à Weyl qu'une « surface de revêtement » universelle est régulière, i.e. qu'un revêtement universel est galoisien. Weyl établit le résultat suivant : dans le cas d'un revêtement universel $p : E \to B$, le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ comme un groupe *abstrait* est un invariant topologique de la surface de l'espace de base B.

En effet, le groupe des automorphismes de revêtement de E est alors isomorphe au groupe fondamental de B, ce que l'on note

$$\mathrm{Aut}(E) \simeq \pi_1(B, b).$$

Reprenons l'exemple précédent pour clarifier ce point : le cercle unité tracé sur le plan complexe n'est pas simplement connexe. Son groupe fondamental est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. D'après ce qui précède, $\mathbb{R}$ est un revêtement universel de $\mathbb{S}^1$ à un nombre infini de feuillets. Le groupe des automorphismes de revêtement de $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ opérant par translations $t \to t+k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc, Le groupe des automorphismes de revêtement de $\mathbb{R}$ est bien isomorphe au groupe fondamental de $\mathbb{S}^1$. Cela posé, le groupe fondamental d'un espace topologique — que l'on supposera séparé et localement connexe par arcs — constitue bel et bien un invariant topologique. En effet, deux espaces topologiques — séparés et localement connexes par arcs — homéomorphes ont nécessairement des groupes fondamentaux isomorphes, la réciproque étant fausse. L'isomorphisme entre les groupes fondamentaux de deux tels espaces topologiques est donc une condition nécessaire mais non pas suffisante pour déterminer si ces derniers sont homéomorphes, c'est-à-dire s'ils sont équivalents du point de vue de l'*analysis situs*.

Au terme de notre commentaire du § 9 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, nous pouvons formuler trois remarques sur l'usage par Weyl du groupe Γ des transformations de revêtement en *analysis situs*. (1) Il n'explicite pas les relations qu'il entretient avec le groupe fondamental calculé sur la surface de base $\mathfrak{F}$. Pour le dire de manière plus directe, Weyl ne mentionne pas le concept de groupe fondamental pourtant introduit par Poincaré dès 1895. Mais Weyl a vraisemblablement eu connaissance d'une telle notion, puisqu'elle apparaît dans la littérature consacrée au théorème d'uniformisation à l'université de Göttingen. Il cite les deux parties de l'article de Koebe qui sont publiées en 1910 et en 1911 dans le *Journal de Crelle*. Or, au début de la première partie de son article (1910), Koebe définit explicitement la notion de groupe fondamental. Il affirme en substance :

> Considérons maintenant tous les chemins fermés commençant en un point P fixé dans F [F est une surface de Riemann], nous ne tiendrons pas pour différents deux de ces chemins qui peuvent être transformés l'un en l'autre par une déformation continue sur F. L'ensemble de ces chemins

forme un groupe $\mathfrak{G}$ (...). [63]

Weyl fait délibérément l'impasse sur le groupe fondamental — notion qui est connue à Göttingen au début des années 10. Mais on peut raisonnablement supposer qu'il est conscient des relations que l'on peut établir entre le groupe fondamental d'une surface de base (connexe par arcs) et le groupe des automorphismes de revêtement (dans le cas d'un revêtement régulier et d'un revêtement universel).

Voilà pourquoi, il n'est pas totalement inapproprié de s'appuyer sur la notion de groupe fondamental pour rendre raison de deux formules très lapidaires mais parfaitement exactes de Weyl à propos du groupe Γ des automorphismes de revêtement : (a) ce dernier permet de traduire de manière exhaustive la relation qu'entretient une ≪ surface de revêtement ≫ régulière — i.e. galoisienne — avec la surface de base qu'elle revêt ; (b) si $\widetilde{\mathfrak{F}}$ est un revêtement universel de $\mathfrak{F}$, alors Γ constitue carrément un invariant topologique de $\mathfrak{F}$. (2) Weyl raisonne abstraitement sur Γ, autrement dit il fait abstraction de la nature des transformations qui font partie de Γ. (c) Cela étant, le groupe Γ n'est jamais étudié et décomposé pour lui-même. Bref, Weyl ne raisonne à aucun moment en algébriste au cours de ce paragraphe. Son but est de classer des revêtements d'une surface donnée. On constate donc une dissymétrie entre le concept de revêtement, qui est largement prédominant, et celui de groupe, qui reste au second plan, dans le § 9 de l'ouvrage de Weyl.

Ce déséquilibre indique que la ≪ topologie algébrique ≫ ne constitue pas encore un champ disciplinaire autonome qui aurait pour fonction de traiter à parts égales structures algébriques et structures topologiques. Pour le dire autrement, Weyl utilise exclusivement le terme *analysis situs* pour caractériser des propriétés, des concepts et des théorèmes qui, rétrospectivement, relèvent soit de la topologie générale, soit de la topologie algébrique. Il nous paraît significatif de remarquer que, dans la dernière édition de *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1955), Weyl continuera à employer largement l'expression *analysis situs*. C'est dire s'il demeure réfractaire à une redistribution des domaines des mathématiques commandée par l'avènement des structures algébriques, topologiques et d'ordre. Malgré certaines modifications terminologiques, malgré quelques corrections nécessaires pour rendre son raisonnement plus rigoureux, Weyl demeure attaché jusqu'en 1955 au style de mathématiques qui était déjà le sien en 1913.

Il nous semble donc doublement inexact de rattacher la première édition de *Die Idee*

63. P. Koebe, ≪ Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven ≫, Erster Teil, *op. cit.*, p. 199 : ≪ Wir betrachten nun alle in einem festen Punkte P auf F beginnenden geschlossenen Wege, indem wir zwei solchen Wege als nicht verschieden gelten lassen, wenn sie durch stetige Deformation auf F ineinander übergeführt werden können. Diese Gesamtheit von Wegen bildet eine Gruppe $\mathfrak{G}$ (...) ≫.

der Riemannschen Fläche aux mathématiques structurales : (1) bien que Weyl définisse axiomatiquement les concepts de variété continue bidimensionnelle, de surface de Riemann et de revêtement, il ne formule pas systématiquement des théorèmes de structure et il n'utilise pas les procédures axiomatiques comme un instrument de découverte ; (2) les rééditions de son ouvrage ne reflètent pas le développement des mathématiques structurales entre les années 20 et les années 50. La première édition de l'ouvrage de Weyl sur les surfaces de Riemann nous éclaire déjà sur le style qui sera le sien dans la série d'articles qu'il consacrera aux groupes de Lie complexes semi-simples : confrontation de diverses méthodes — méthodes de Weierstrass et de Riemann en analyse complexe, méthodes de Cartan et de Hurwitz-Schur dans l'étude des groupes de Lie — ; raisonnements à l'intersection entre plusieurs domaines des mathématiques ; extension de la théorie des revêtements aux groupes de Lie par *analogie* avec ce qui a été établi dans le cas des surfaces de Riemann.

Pour finir, revenons brièvement sur le § 19 de *Die Idee der Riemannschen Fläche* qui s'intitule « Uniformisierung ». Weyl rappelle à la suite de Koebe que « dans la théorie d'uniformisation, les idées de Weierstrass et de Riemann se fondent en une unité complète ». [64] Weyl précise que le théorème d'uniformisation a été démontré de manière indépendante par Poincaré et Koebe en 1907. Pourtant, il n'est pas sûr que Weyl ait lu l'article de Poincaré. En outre, au cours du § 19, Weyl se fonde presque exclusivement sur trois sources : l'article de Hilbert de 1909 qui permet d'apporter une preuve du théorème d'uniformisation à l'aide du principe de Dirichlet, la réponse de Koebe à cet article (1910) et les imposants textes de Koebe publiés en 1910-1911 dans le *Journal de Crelle*. [65]

Weyl rappelle tout d'abord en quelques lignes le lien entre le problème de l'uniformisation et le concept de revêtement universel. On se donne une relation analytique $f(x, y) = 0$, y étant en général une fonction multiforme de x. Le problème de l'uniformisation consiste à ramener l'étude d'une fonction multivaluée à des fonctions uniformes. On doit donc trouver deux fonctions uniformes $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ telles que $f(\varphi(t), \psi(t)) = 0$, autrement dit il s'agit d'identifier une représentation $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ de la fonction multivaluée $y = f(x)$, t étant la variable uniformisante ou plutôt le paramètre d'uniformisation. Soit $\mathfrak{F}$ la courbe

64. H. Weyl, *op. cit.*, p. 141 : « In der Uniformisierungstheorie verwachsen die Weierstraßschen und die Riemannschen Gedankenkreise zu einer vollständigen Einheit ».

65. D. Hilbert, « Zur Theorie der konformen Abbildung », *Göttinger Nachrichten*, 1909, p. 314 à 323. Voici les référence pour la réponse de Koebe : P. Koebe, « Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode », *Nachrichten der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen* 1910, p. 6165. Voir enfin P. Koebe, « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven I », *Journal de Crelle*, **138**, 1910, p. 192 à 253 et « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven II », *Journal de Crelle*, **139**, 1911, p. 251 à 292.

analytique, i.e. la surface de Riemann définie par l'équation $f(x, y) = 0$, Weyl affirme en substance que ≪ le paramètre d'uniformisation t doit être une fonction uniforme, régulière analytique, excepté pour des pôles d'ordre un, sur la surface de revêtement universelle $\widetilde{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$ ≫.[66] Au cours du § 9 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl n'a pas manqué de préciser que si la surface de base $\mathfrak{F}$ est une surface de Riemann, alors tout revêtement $\overline{\mathfrak{F}}$ au-dessus de $\mathfrak{F}$ hérite naturellement d'une structure de surface de Riemann.[67]

Weyl ajoute ensuite : ≪ si nous cherchons la fonction t qui possède la plus grande puissance d'uniformisation [Die Stärkste uniformisierende Kraft], alors nous tenterons de déterminer t de telle sorte qu'elle ne prenne jamais la même valeur en deux points distincts de $\widetilde{\mathfrak{F}}$; dès lors elle envoie $\widetilde{\mathfrak{F}}$ de manière bi-univoque et conforme dans un domaine de la t-sphère ≫.[68] Il nous semble que cet extrait montre de manière parfaitement claire la nécessité du concept de revêtement universel pour résoudre le problème de l'uniformisation d'une fonction analytique complexe multivaluée. La preuve du théorème d'uniformisation proposée par Weyl se fonde sur le principe de Dirichlet. Hilbert a justement démontré la validité de ce principe pour des fonctions suffisamment régulières en 1900-1904 ; Weyl consacre un paragraphe à ce principe dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*.[69] L'idée de Weyl est donc simple : pour parvenir au paramètre d'uniformisation recherché, il convient d'appliquer le principe de Dirichlet non pas à $\mathfrak{F}$, mais à $\widetilde{\mathfrak{F}}$. Voici comment J. Gray résume son raisonnement :

> The proof Weyl offered constructed the uniformising parameter as a function on the covering surface by using the Dirichlet principle to find a Green's function U with a logarithmic singularity at one point O and that in turn allowed him to obtain a differential $\mathrm{d}\tau$ on the covering surface. Since this surface is simply connected this differential must be the differential of a function $\tau = U + iV$ that is regular everywhere on the covering surface except at the point O, where it has a simple pole.[70]

Weyl attribue ce dernier argument à Koebe.[71] Le paragraphe § 19 de *Die Idee der Riemannschen Fläche* montre donc combien l'ouvrage de Weyl croise des éléments de connaissance et des méthodes alors prônées à l'université de Göttingen, comme en témoigne la double référence aux travaux de Koebe sur le théorème d'uniformisation et aux travaux de Hilbert

66. H. Weyl, *op. cit.*, p. 142.

67. *ibid.*, p. 53 : ≪ la signification des surfaces de revêtement en théorie des fonctions d'une variable complexe provient déjà du fait que toute surface de revêtement non-ramifiée et illimitée $\overline{F}$ au-dessus d'une surface de Riemann $\mathfrak{F}$ est elle-même une surface de Riemann ≫.

68. *ibid.*, p. 142.

69. *ibid.*, § 12 : ≪ Das Dirichletssche Integral ≫, p. 77 et suivantes.

70. J. Gray, ≪ Poincaré's uniformisation theorem ≫, *prépublication*, p. 19.

71. H. Weyl, *op. cit.*, p. 143 : cet argument se trouverait dans la réponse que Koebe adresse à Hilbert en 1910.

visant à montrer la *validité* et l'*effectivité* du principe de Dirichlet en analyse complexe. Cela étant, Weyl ne se contente pas d'utiliser la notion de revêtement universel pour formuler et démontrer le théorème d'uniformisation. Il veut montrer au surplus l'étroite analogie entre la théorie des revêtements et la théorie des corps de nombres algébriques. Nous allons montrer ce point en nous référant à un article de 1916 publié par Weyl sous le titre : « Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen ».

3.5 La « montée vers l'absolu » : Weyl et Lautman

Nous pouvons nous fonder sur la classification des revêtements et sur le thórème d'uniformisation pour affiner notre comparaison entre Weyl et Lautman. Dans notre premier chapitre, nous avions montré que Weyl et Lautman n'interprètent pas les travaux de Riemann en analyse complexe de la même manière. Alors que Lautman insiste sur les aspects topologiques et globaux qui caractérisent la *Dissertation* de 1851 et la *Théorie des fonctions abéliennes* (1857), Weyl ne manque pas de repérer que Riemann s'approprie également le point de vue infinitésimal de Gauss dans l'étude des surfaces étendues au-dessus du plan complexe. Comme nous l'avons souligné dans la section précédente, Weyl insiste en 1916 sur la profonde analogie entre la théorie des revêtements et la théorie des corps de nombres, introduisant ainsi la terminologie suivante : il parle de « revêtement galoisien » et de groupe de Galois d'un revêtement galoisien relativement à une surface donnée. Cette analogie ne se joue pas seulement au niveau des concepts, mais également au niveau des théorèmes, Weyl formulant ainsi un analogue du *Hauptidealsatz* de Hilbert dans le cas des surfaces de Riemann.

Le *Hauptidealsatz* de Hilbert est l'un des théorèmes fondamentaux de la théorie du corps de classes. Avant de l'énoncer, quelques rappels en théorie des corps de nombres algébriques s'imposent. Soit K un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$. Nous désignerons par $\mathbb{Z}_K$ l'anneau des éléments de K qui sont des entiers algébriques. Cela signifie que, pour tout x de $\mathbb{Z}_K$, il existe un polynôme unitaire P de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Nous pouvons regrouper les idéaux de $\mathbb{Z}_K$ en classes. Pour ce faire, introduisons la relation d'équivalence suivante : deux idéaux $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de $\mathbb{Z}_K$ sont équivalents si et seulement s'il existe des éléments a et b non nuls de $\mathbb{Z}_K$ tels que $a\mathcal{I} = b\mathcal{J}$.[72] En particulier, les *idéaux principaux* de $\mathbb{Z}_K$ sont tous équivalents à (1). On précise que de telles classes sont en nombre fini n.

72. Une telle relation d'équivalence est définie en particulier par D. Hilbert en 1897 dans sa *Théorie des Corps de Nombres algébriques*, trad. Levy (1909), in *Annales de la faculté des Sciences de Toulouse*, 3ème série, tome I, p. 307.

L'ensemble de ces classes admet une structure de *groupe fini abélien*. En particulier Hilbert désigne la classe des idéaux principaux par l'expression « classe principale », cette dernière correspond au neutre du groupe des classes d'idéaux de $\mathbb{Z}_K$.

Le *Hauptidealsatz* de Hilbert affirme que, pour tout corps de nombres K, il existe une *extension abélienne* remarquable H_K de K dans laquelle les idéaux de K — c'est-à-dire les idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}_K$ — deviennent tous *principaux*. Cette extension s'appelle le *corps de classes* de K.

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H_K/K)$, i.e. le groupe des automorphismes de H_K qui laisse tous les éléments de K fixes, est isomorphe au groupe des classes d'idéaux de K, noté $Cl(K)$. D'après le *Hauptidealsatz* de Hilbert, les idéaux de K « deviennent » tous principaux dans H_K, ils sont donc équivalents entre eux dans H_K. Par suite, le groupe des classes d'idéaux de K se réduit à *l'identité* dans H_K. On peut construire une correspondance de Galois entre les sous-groupes de $Cl(K)$ et les corps intermédiaires situés entre K et H_K. On obtient ainsi un *analogue de la théorie de Galois algébrique pour les corps de nombres et les anneaux d'entiers algébriques*.[73] Par exemple, lorsque $K = \mathbb{Q}$, le corps de classes de $\mathbb{Q}$ s'identifie à $\mathbb{Q}$. Cette propriété vient de ce que l'anneau des entiers est principal, ce qui signifie que $Cl(\mathbb{Q})$ se réduit à *l'identité*.

Dans la notice nécrologique qu'il consacre à Hilbert (1944), Weyl évoque le souvenir de ses premières années en qualité d'étudiant à l'université de Göttingen. Il met alors en exergue le *Zahlbericht* de Hilbert (1897) qui constitue la première œuvre majeure de Hilbert qu'il aurait parcourue :

> I came to Göttingen as a country lad of eighteen, having chosen that university mainly because the director of my high school happened to be a cousin of Hilbert's and had given me a letter of recommendation to him. In the fullness of my innocence and ignorance I made bold to take the course Hilbert had announced for that term, on the notion of number and the quadrature of the circle. Most of it went straight over my head. But the doors of a new world swung open for me, and I had not sat long at Hilbert's feet before the resolution formed itself in my young heart that I must by all means read and study whatever this man had written. And after the first year I went home with Hilbert's *Zahlbericht* under my arm, and during the summer vacation I worked my way through it without any previous knowledge of elementary number theory or

73. A. Lautman, *op. cit.*, p. 171 : « Puisqu'il y a en effet, un groupe minimal dans la série des sous-groupes, le groupe S des idéaux principaux, et qu'à une hiérarchie descendante entre les groupes correspond une hiérarchie ascendante entre les corps correspondants, il y a un corps de classe maximal, celui qui correspond au groupe des idéaux principaux. Il se trouve alors que ce corps de classes maximal est tel que tous les idéaux de k y subissent une même modification de structure : ils deviennent tous des idéaux principaux. (...) De la théorie tout entière se dégage le même mouvement cartésien que de la théorie de Galois ». Voir également D. Hilbert, *op. cit.* 3ème série, tome 2 (1910), p. 253-254.

> Galois theory. These were the happiest months of my life, whose shine, across years burdened with our common share of doubt and failure, still comforts my soul. [74]

Ce passage montre l'importance que Weyl accorde très tôt à la théorie des corps de nombres et à la théorie du corps de classes. En 1916, il souligne les points de recoupement entre la théorie des surfaces de Riemann et la théorie des corps de nombres. En particulier, il formule un analogue du *Hauptidealsatz* de Hilbert en théorie des fonctions d'une variable complexe dans l'article intitulé ≪ strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen ≫. Pour ce faire, il commence par introduire les notions suivantes : un revêtement $\overline{\mathfrak{F}}$ d'une surface de Riemann compacte connexe $\mathfrak{F}$ est abélien, si le groupe des automorphismes de revêtements $\mathrm{Aut}(\overline{\mathfrak{F}})$ est abélien. Parmi les revêtements abéliens de $\mathfrak{F}$, il en existe un qui est le plus fort, i.e. qui ≪ contient ≫ [enthält] tous les autres revêtements. Pour être plus explicite, il s'agit ≪ du ≫ revêtement abélien maximal $\widehat{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$. [75] Weyl ajoute :

> La relation entre $\widehat{\mathfrak{F}}$ et $\mathfrak{F}$ est parfaitement analogue à celle que l'on peut établir entre un corps de base K et le *corps de classes* hilbertien $\widehat{K}$ en théorie des corps de nombres ; en effet $\widehat{K}$ est le corps non ramifié relativement abélien [relativ-abelschen] au-dessus de K qui contient tout les corps abéliens non-ramifiés [au-dessus de K]. [76]

Autrement dit, en théorie des surfaces de Riemann, le revêtement $\widehat{\mathfrak{F}}$ est l'analogue du corps de classes en théorie des corps algébriques. Cela posé, voici le théorème qui, selon Weyl correspond au *Hauptidealsatz* de Hilbert en théorie des fonctions d'une variable complexe :

> Étant donné deux points 1 et 2 sur une surface de Riemann fermée $\mathfrak{F}$, il existe une fonction multiplicative (uniforme sur la surface de revêtement $\widehat{F}$ des fonctions intégrales) qui est régulière en tous points de $\widehat{\mathfrak{F}}$, excepté au-dessus du point 2 où elle admet un pôle du premier ordre et au-dessus du point 1 où elle admet un zéro qui est également du premier ordre. [77]

À la fin de cet article, Weyl tente d'utiliser cette analogie en sens inverse, i.e. pour prolonger la théorie du corps de classes, comme en témoigne le passage suivant :

---

74. H. Weyl, ≪ David Hilbert and his mathematical work ≫, *op. cit.*, p. 614.

75. ≪ Le ≫ revêtement $\widehat{\mathfrak{F}}$ est le quotient du revêtement universel par le sous-groupe dérivé du groupe fondamental Γ de $\mathfrak{F}$, on rappelle que le sous-groupe dérivé est engendré par les commutateurs de Γ.

76. H. Weyl, ≪ strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen ≫, *op. cit.* p. 274.

77. *ibid.* p. 277. Voici comment on peut expliciter ce résultat : étant donné deux points distincts 1 et 2 sur la surface de Riemann compacte $\mathfrak{F}$, il existe une fonction méromorphe Θ sur ≪ le ≫ revêtement universel $\widetilde{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$ ayant un zéro (resp. un pôle) simple en tout point au-dessus de 1 (resp. 2), régulière partout ailleurs et telle que $\Theta(s.x) = m(s)\Theta(x)$ pour tout point x et tout élément s du groupe fondamental de $\mathfrak{F}$, où $m(s)$ est un nombre complexe non nul. On vérifie que m définit un homomorphisme du groupe fondamental de $\mathfrak{F}$ dans le groupe multiplicatif des nombres complexes inversibles. Il en découle que $m([s,s']) = m(1) = 1$ pour tout commutateur $[s,s'] = ss's^{-1}s'^{-1}$, donc $\Theta([s,s'].x) = \Theta(x)$ et la fonction Θ définit une fonction sur le quotient $\widehat{\mathfrak{F}}$ du revêtement universel par le sous-groupe dérivé.

> De même que la ≪ surface de revêtement des fonctions intégrales ≫ $\widehat{\mathfrak{F}}$ d'une surface de Riemann avec ses fonctions multiplicatives est l'analogue au corps de classes en théorie des fonctions, de même, à la théorie de l'uniformisation fondée sur la ≪ surface de revêtement universel ≫ $\widetilde{\mathfrak{F}}$ peut être associé le problème suivant en théorie des nombres : pour un corps de nombres algébriques donné, construire l'extension la plus étendue parmi *toutes* les extensions de corps non ramifiées, sans donc se restreindre à celles qui sont seulement *abéliennes*.

Ce passage montre combien la *théorie du corps de classes* joue le rôle de théorie-modèle au yeux de Weyl dans la constitution d'une théorie des surfaces de Riemann. Il assigne des fonctions heuristiques à une telle analogie puisqu'elle permet des développements *corrélatifs* en théorie des nombres et en théorie des fonctions. L'analogie ne se joue plus seulement entre des concepts et des théorèmes mais, plus massivement, entre des théories. Cela étant, l'utilisation d'un vocabulaire emprunté à la théorie de Galois dans l'étude des surfaces de Riemann nous incite également à évoquer le nom de Klein qui, dès les années 1870-1880, entend unifier les idées de Galois et de Riemann.[78] On peut raisonnablement supposer que Weyl prolonge ce projet lorsqu'en 1916 il met en avant les parentés entre la théorie de Galois et la théorie des revêtements qu'il envisage exclusivement dans le contexte des surfaces de Riemann. Pour confirmer notre propos, ajoutons qu'en 1925, Weyl résume l'essentiel du contenu de son article de 1916 dans un écrit intitulé *Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie*. Le titre même de cet ouvrage, qui ne sera publié qu'en 1988, montre combien Weyl est attentif aux points de coïncidence entre les idées géométriques de Riemann et la théorie des groupes, conformément à une tradition kleinéenne.

Relisons maintenant le chapitre III de la thèse principale de Lautman (1937) ; ce chapitre est intitulé ≪ La montée vers l'absolu ≫.[79] Lautman s'appuie sur la métaphysique cartésienne pour systématiser l'analogie établie par Weyl en 1916. Pour ce faire, Lautman se réfère à quatre théories mathématiques : (1) la théorie de Galois, (2) la théorie du corps de classes, (3) la théorie des revêtements, (4) la théorie de l'uniformisation des fonctions analytiques d'une variable complexe. Lautman repère ainsi les principaux points de recoupement entre la théorie de Galois et la classification des revêtements en se fondant sur le rapport entre les êtres *imparfaits* et l'être *parfait* tel qu'il est exposé par Descartes dans la quatrième partie du *Discours de la méthode*.

Précisons tout d'abord la place qu'occupe ≪ la montée vers l'absolu ≫ dans l'économie

78. Nous renvoyons le lecteur au chapitre précédent de la première partie.

79. A. Lautman, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, chapitre 3, p. 165 à 178.

générale de la thèse principale de Lautman (1937) (sous la direction de L. Brunschvicg). Celle-ci se divise en deux parties : la première est consacrée aux *structures* alors que la seconde a pour objet la notion problématique d'*existence* en mathématiques. Ces indications nous laissent deviner que Lautman s'intéresse essentiellement aux mathématiques structurales sans d'ailleurs se restreindre à l'algèbre abstraite : son intérêt pour la topologie générale et la topologie algébrique le montre. Sa démarche ne consiste ni à ajouter un supplément d'âme philosophique à des théories mathématiques existantes, ni à forcer le sens et la portée de ces dernières pour les annexer à un système de pensée qui leur préexisterait. C'est ce qui ressort du statut qu'il assigne à la *philosophie mathématique* dans la conclusion de sa thèse principale :

> La philosophie mathématique, telle que nous la concevons, ne consiste pas tant à retrouver un problème logique de la métaphysique classique au sein d'une théorie mathématique, qu'à appréhender globalement la structure de cette théorie pour dégager le problème logique qui se trouve à la fois défini et résolu par l'existence même de cette théorie. Une expérience spirituelle est ainsi de nouveau attachée à l'effort de l'intelligence pour créer ou comprendre, mais cette expérience a un autre contenu que la mathématique qui se fait en même temps qu'elle. [80]

En outre, il se démarque sur un ton polémique des principaux représentants du positivisme logique. Il prend appui sur certaines théories structurales pour montrer que les mathématiques demeurent irréductibles à leur forme logique :

> À vouloir construire toutes les notions mathématiques à partir d'un petit nombre de notions et de propositions logiquement primitives, on perd de vue le caractère qualitatif et intégral des théories constituées. [81]

Selon Lautman, les philosophes des sciences ne sauraient s'intéresser exclusivement aux propositions premières qui seraient au fondement des mathématiques, ils doivent bien plutôt considérer d'un seul tenant les connaissances produites par les mathématiciens. En effet, une théorie mathématique est un tout dont les parties sont solidaires les unes des autres. Il serait réducteur de penser qu'elle dérive *régulièrement* d'un système de propositions primitives indépendantes les unes des autres. Plus radicalement, Lautman met au jour des couples de propriétés antithétiques que les mathématiciens *dialectisent* dans une grande diversité de théories mathématiques. Nous pensons au couple continu / discontinu, que Lautman aborde dans le chapitre IV de sa thèse complémentaire : *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*. Ainsi, pour montrer comment la dialectique entre le continu et le discontinu est à l'œuvre en mathématiques, il prend deux exemples de théories : la

80. *ibid.*, p. 229.
81. A. Lautman, *ibid.*, p. 127-128.

théorie analytique des nombres et la théorie des fonctions automorphes, notamment incarnée par les travaux de Dedekind et de Klein que nous avons commentés précédemment. D'autres couples de notions antithétiques interviennent dans la première partie de sa thèse principale : (1) le local / le global, (2) les propriétés intrinsèques / les propriétés induites, (3) le parfait / l'imparfait. Précisément, le chapitre III de la thèse principal intitulé « la montée vers l'absolu » consiste à exemplifier l'opposition entre le parfait et l'imparfait dans les quatre théories mathématiques que nous avons énumérées précédemment.

Pour résumer, d'un côté Lautman refuse de réduire les connaissances mathématiques à des jugements analytiques. Ce n'est pas un hasard s'il affirme que les théories mathématiques sont « intégrales » : pour pouvoir en rendre raison, il est nécessaire de faire prévaloir la synthèse sur l'analyse. De l'autre, il souscrit pleinement aux mathématiques structurales qu'il associe à l'école de Hilbert, en particulier à Noether et Artin en algèbre, à Alexandroff et Hopf en topologie. Lautman ne partage donc pas les réserves que Weyl formule au début des années 30 à l'encontre des mathématiques structurales. [82] Weyl les juge alors trop abstraites et trop générales pour recevoir une quelconque effectivité. Certes, Weyl est conscient des connexions entre la théorie de Galois, la théorie des revêtements, la théorie du corps de classes et la théorie des surfaces de Riemann dès 1916. En outre, on sait que Lautman a lu assez précisément *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Ce n'est pourtant pas à Weyl que Lautman emprunte l'analogie entre théorie de Galois et théorie des revêtements mais à des articles et ouvrages bien plus tardifs de Seifert et Threlfall (1935).

Dans « la montée vers l'absolu », il est doublement paradoxal que Lautman se réfère à Descartes pour rendre compte de théories structurales. Tout d'abord, l'algèbre cartésienne est une théorie des équations. En revanche Lautman pense ce domaine des mathématiques à partir de la théorie de Galois telle qu'elle est réformée par E. Artin dans les années 20. Celui-ci traduit la théorie de Galois sous la forme de théorèmes de structure indépendamment du problème de la résolubilité des équations générales par les radicaux. Ce problème, qui constituait la motivation première d'Abel, Galois et leurs successeurs, n'est plus, sous la plume d'Artin, qu'une application périphérique, à tel point qu'il est relégué en annexe à cette théorie. Ensuite, on peut se demander comment un réseau de concepts hérités de la philosophie classique — à savoir la distinction entre l'*être parfait* et les *êtres imparfaits* — peut devenir opératoire pour penser les mathématiques structurales.

82. Nous pensons en particulier à la conférence de Weyl connue sous le titre « Topologie und Abstrakte Algebra als zwei Wege des mathematischen Verständnisses » qu'il prononce en 1931 devant la société suisse des enseignants des lycées.

En réalité, Lautman ne conserve pas la métaphysique cartésienne en l'état ; il n'hésite pas à en déplacer le sens à mesure qu'il la confronte aux domaines les plus avancés des mathématiques. Philosophie et mathématiques s'éclairent l'une par l'autre et se conditionnent mutuellement dans l'œuvre de Lautman, comme en témoigne le statut qu'il assigne à la *philosophie mathématique* : il ne s'agit ni d'une manière d'annexer des théories mathématiques à des doctrines philosophiques, ni d'une réflexion de surface sur certaines théories mathématiques données. Loin de considérer les mathématiques et la philosophie comme deux disciplines autonomes qui, tout en admettant certains points de recoupement, demeureraient distinctes quant à leur objet, leur méthode et leurs buts respectifs, Lautman estime qu'elles peuvent interagir sur le plan des concepts. Ainsi, lorsqu'elle entre en contact avec les quatre théories mathématiques mentionnées dans « la montée vers l'absolu », la relation entre l'être parfait et les êtres imparfaits se trouve libérée de ses présupposés métaphysiques ; inversement, elle permet à Lautman d'adopter un point de vue surplombant et d'assujettir la théorie de Galois, la théorie du corps de classes, la théorie des revêtements et la théorie de l'uniformisation des fonctions analytiques complexes à un même « schéma logique ». J. Dieudonné montre d'ailleurs que le point de vue surplombant adopté par Lautman dans ce chapitre, aussi philosophique soit-il en son fondement, n'en recèle pas moins une certaine effectivité sur un plan mathématique. Dieudonné n'hésite pas à interpréter « la montée vers l'absolu » comme une préfiguration de la théorie des catégories :

> Plus remarquable encore est le long passage que [Lautman] consacre à ce que l'on appelle la notion de revêtement universel d'une variété (on disait à l'époque « variété de recouvrement universelle »). La « montée vers l'absolu » qu'il y discerne, et où il voit une tendance générale, a pris en effet, grâce au langage des catégories, une forme applicable à toutes les parties des mathématiques : c'est la notion de foncteur représentable qui joue aujourd'hui le rôle considérable, tant dans la découverte que dans la structuration d'une théorie. [83]

Sans doute cet argument est-il quelque peu abusif, mais il a le mérite de montrer que la *philosophie mathématique* à laquelle Lautman entend parvenir se caractérise par sa profonde *transversalité*. Ainsi, Lautman déplace la relation entre être parfait et êtres imparfaits, qui relève initialement de la métaphysique cartésienne, pour la rendre opératoire en mathématiques.

Il convient de commenter plus en détail la quatrième partie du *Discours de la méthode* à laquelle Lautman fait d'ailleurs référence pour saisir le troisième chapitre de sa thèse. Après avoir établi une première connaissance susceptible de résister au doute, à savoir la certitude d'exister et d'être une « substance dont toute l'essence ou la nature n'est que de

83. J. Dieudonné, préface pour l'édition de 1977 des œuvres de Lautman, reproduite dans l'édition de 2006, *op. cit.*, p. 36.

penser », Descartes prouve qu'il y a un être parfait. Il s'agit là de la vérité première selon l'ordre des raisons dans le cadre de la métaphysique cartésienne. Lautman s'intéresse tout particulièrement au procédé utilisé par Descartes pour démontrer l'existence de dieu. Celui-ci n'emploie pas ici un syllogisme qui ferait de « l'existence » un prédicat de l'être parfait. Il montre que le sujet méditant, qui demeure un être fort imparfait, parvient à se forger l'idée d'un être plus parfait que lui. Il juge cette idée aussi indubitable que la certitude touchant à sa propre existence et à sa nature d'être pensant. Et Descartes d'ajouter : je ne peux avoir l'idée d'un être parfait que si ce dernier existe. Pour le dire autrement, si dieu n'existait pas, alors je ne pourrais pas avoir son idée en moi. C'est donc à partir d'un être imparfait, à savoir le sujet méditant, que se révèle de manière sous-jacente l'existence de l'être parfait. Mais surtout, Descartes s'appuie sur un raisonnement par l'absurde pour prouver qu'il y a un rapport de dépendance entre le sujet méditant et dieu. Car si j'étais indépendant, moi qui suis capable de me former l'idée d'un être parfait, alors toutes mes imperfections devraient s'évanouir, ce qui n'est pas. En effet, outre l'idée de dieu, le sujet méditant connaît ses propres défauts et privations qu'il sait ne pas être présents dans l'être parfait dont il dépend. Lautman comprend ce passage de la manière suivante :

> La distance qui sépare la perfection de l'imperfection est donc inscrite dans la nature même de l'être imparfait ; l'esprit s'élève à l'absolu en un mouvement dont les démarches sont commandées par le but que l'on aperçoit dès le point de départ. La structure de l'être imparfait prend alors son véritable sens : sa complication ou son obscurité ne sont que des écarts par rapport à la simplicité transparente de sa vision finale ; la montée vers la perfection semble parcourir en sens inverse les étapes d'une dégradation antérieure. [84]

Lorsqu'il affirme que « de pareilles relations entre la perfection et l'imperfection » peuvent valoir dans « certaines théories de l'algèbre moderne », Lautman fait subir en réalité deux changements aux thèses de Descartes. (1) Quand bien même le sujet méditant, en tant qu'être imparfait, a en lui l'idée d'un être parfait, il y a, dans la métaphysique cartésienne, une *incommensurabilité* entre les êtres imparfaits, caractérisés par leur finitude, et dieu, auquel Descartes prête deux attributs : l'infinité et l'immutabilité. En revanche, entre un corps de base — par exemple $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire le corps des rationnels — et une extension normale de ce même corps, il existe seulement une différence de degré. Nous n'avons pas affaire à deux êtres incommensurables, puisqu'ils partagent la même structure, à savoir celle de corps. (2) Lautman déplace sur le terrain des mathématiques un argument qui vaut exclusivement pour des vérités situées au fondement de la métaphysique entendue comme philosophie première. Des-

84. A. Lautman, *op. cit.*, p. 166.

cartes affirme sans ambiguïté que l'existence d'objets n'est jamais comprise dans un concept mathématique, en revanche elle est consubstantielle à l'idée de l'être parfait. Il établit donc une hiérarchie entre vérités premières et vérités géométriques que Lautman met sciemment entre parenthèses.

Lautman ne lit pas Descartes en métaphysicien, mais en philosophe des mathématiques. Par suite, l'absolu dont il est question dans le chapitre III de sa thèse principale n'a rien à voir avec dieu. Pour le dire autrement, Lautman emprunte la relation entre les êtres imparfaits et l'être parfait à Descartes, mais il la transforme de manière significative lorsqu'il la fait entrer en contact avec les quatre théories mathématiques qu'il examine tour à tour, à savoir la théorie de Galois, la théorie du corps de classes, la théorie des revêtements et la théorie de l'uniformisation des fonctions analytiques d'une variable complexe. On peut même se demander si la référence à la théorie de Galois ne vient pas contaminer d'entrée de jeu la lecture que propose Lautman du passage consacré à l'être parfait dans le *Discours de la méthode*. Lautman affirme en effet : « la montée vers la perfection semble parcourir en sens inverse les étapes d'une dégradation antérieure ». [85] L'expression « en sens inverse » fait déjà allusion à la bijection décroissante qui caractérise la correspondance de Galois. Lautman n'applique donc pas de l'extérieur la métaphysique cartésienne à la mathématique abstraite, il interprète d'emblée la relation entre être parfait et êtres imparfaits à travers le prisme de « l'algèbre moderne », pour ensuite établir de grandes analogies entre diverses théories mathématiques.

Examinons de manière élémentaire ce que serait la « montée vers l'absolu » dans le cas de la théorie de Galois dont Lautman souligne l'exemplarité pour pouvoir penser les trois autres théories auxquelles il se réfère. Soient K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme de degré n que l'on suppose irréductible sur K. Lautman interprète l'irréductibilité de P sur K comme le signe d'une imperfection de K. Précisons tout d'abord qu'une extension L d'un corps K est un corps contenant K, L hérite naturellement d'une structure de K-espace vectoriel. Le degré d'une extension de corps correspond à sa dimension en tant que K-espace vectoriel. Lautman se donne notamment pour but de rechercher la plus petite extension L de K telle que $P \in K[X]$ se décompose en produit de facteurs du premier degré sur L. Lorsque L vérifie une telle propriété, on dit que L est le corps de décomposition de P. Il affirme en substance :

> [L'imperfection du corps de base] réside en ce qu'il est besoin d'une extension de degré n pour passer du corps k au corps K qui contient toutes les racines du polynôme en question et elle est

85. *ibid.*, p. 166.

mesurée par l'ordre du groupe de Galois attaché à l'équation. [86]

Laissons pour l'instant de côté la fin de la citation qui exige une définition précise de ce que l'on entend par groupe de Galois et prenons un exemple simple pour saisir l'argument de Lautman : soit le polynôme $P(X) = X^2 - 2$, il est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Il suffit d'adjoindre $\sqrt{2}$ à $\mathbb{Q}$ pour que P se décompose en facteurs du premier degré. On obtient l'extension de corps $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. En outre, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est une extension de degré 2 de $\mathbb{Q}$. En effet, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + \sqrt{2}b \quad | \quad a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$. Remarquons au passage que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ contient bien évidemment les deux racines de $P(X) = X^2 - 2$, à savoir $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Introduisons maintenant les concepts d'extension normale, d'extension séparable, d'extension galoisienne et de clôture algébrique. Une extension N de K est dite normale (ou prégaloisienne) si elle est algébrique sur K (i.e. tous les éléments de N sont racines d'un polynôme de $K[X]$) et si, lorsqu'elle contient l'une des racines d'un polynôme de $K[X]$, elle les contient toutes. Par exemple le corps de décomposition d'un polynôme $P(X) \in K[X]$ est une extension normale de degré fini de K. Soit maintenant L une extension algébrique de K, on dit qu'elle est séparable si tout élément de L est séparable sur K, i.e. s'il est racine simple de son polynôme minimal. Une extension galoisienne de K est tout simplement une extension normale et séparable de K. Ajoutons au passage que K est un corps *parfait* si et seulement si toute extension algébrique de K est séparable. [87] Par suite, lorsque K est parfait, les notions d'extension galoisienne et d'extension normale se recouvrent. En effet, dans ce cas, toute extension algébrique est séparable. Or toute extension normale d'un corps K est algébrique, ainsi elle est séparable et donc galoisienne. Enfin, une clôture algébrique Ω d'un corps K est une extension algébrique de K telle que *tout* polynôme de $K[X]$ se décompose en produits de facteurs du premier degré dans Ω. Au moyen de cette terminologie concernant les différentes extensions d'un corps K, nous pouvons repérer qu'elle est analogue à la classification des revêtements opérée par Weyl en 1913. Par exemple, au concept d'*extension normale* correspond celui de *revêtement galoisien*. De plus, nous serions tentés de considérer la notion de *revêtement universel* comme un analogue de celle de *clôture algébrique*. En effet, un revêtement universel $\widetilde{\mathfrak{F}}$ d'un espace topologique $\mathfrak{F}$ — séparé et localement connexe par arcs — jouit de la simplicité maximale sur un plan topologique : toute courbe fermée se réduit continûment à un point dans $\widetilde{\mathfrak{F}}$, autrement dit $\widetilde{\mathfrak{F}}$ est simplement connexe. De même

86. *ibid.*, p. 167.

87. Faisons le rappel suivant : soit K un corps de caractéristique $p > 0$, K^p est l'image de l'homomorphisme de Frobenius $F : K \to K$ défini par $F(x) = x^p$. Puisque F est injectif, K^p est un sous-corps de K. Un corps est parfait s'il est de caractéristique zéro ou s'il est de caractéristique $p \neq 0$, avec $K^p = K$.

une clôture algébrique Ω d'un corps K jouit de la simplicité maximale sur un plan algébrique : tout polynôme irréductible de $\Omega[X]$ est au plus de degré 1. Autrement dit Ω est un corps algébriquement clos. Ce point n'a pas échappé à Lautman : « On rencontre bien en algèbre un certain nombre d'autres théorèmes qui affirment, pour un domaine de base imparfait à un certain point de vue, l'existence d'une extension où cette imperfection ait disparu. Ainsi par exemple il existe pour tout corps de nombres, une extension Ω qui est « algébriquement fermée » c'est-à-dire telle que tout polynôme en x à coefficients dans Ω, soit complètement décomposable en facteurs du premier degré à coefficients dans Ω ».[88]

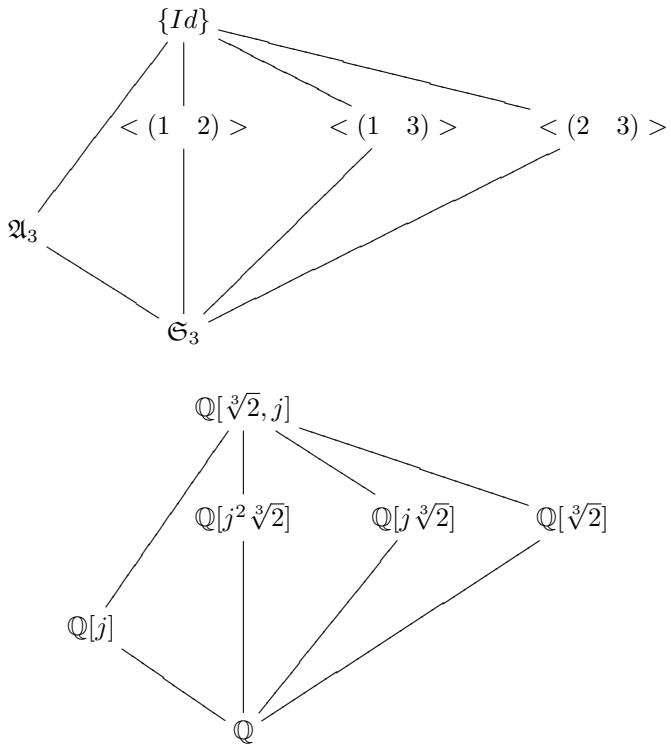
Précisons maintenant ce qu'il faut entendre par groupe de Galois d'une extension L de K. Soit donc L une extension de K, un K-automorphisme σ est un endomorphisme bijectif de L qui laisse tous les éléments de K invariants. Pour le dire autrement, $\forall x \in K, \sigma(x) = x$. L'ensemble des K-automorphismes de L muni de la composition des K-automorphismes forme un groupe noté $\mathrm{Gal}(L|K)$ et appelé groupe de Galois de l'extension L sur K. Soit N une extension normale de degré fini d'un corps K contenu dans $\mathbb{C}$, le cardinal ou l'ordre de $\mathrm{Gal}(L|K)$ correspond très exactement au degré de N, c'est-à-dire à la dimension de N en tant que K-espace vectoriel. Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré n irréductible sur $K \subset \mathbb{C}$, P admet donc n racines simples $x_1, x_2, ..., x_n$. L'extension $N = K[x_1, x_2, ..., x_n]$ obtenue par adjonction des n racines de P à K correspond tout simplement au corps de décomposition de P. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(N|K)$ est appelé le groupe de Galois du polynôme P. Il est clair d'après ce qui précède que le degré de l'extension N sur K correspond à l'ordre de $\mathrm{Gal}(N|K)$. C'est très exactement ce que signifie Lautman lorsqu'il affirme qu'une telle extension « est mesurée par le groupe de Galois attaché à l'équation ». Il présente ensuite très brièvement ce que nous appelons la *correspondance de Galois*. Voici comment nous pouvons formuler le théorème fondamental i.e. le principe qui vient structurer l'ensemble de la théorie de Galois : soient K un corps contenu dans $\mathbb{C}$ et N une extension normale de degré fini de K, $\mathcal{E}$ l'ensemble des extensions intermédiaires entre K et N, $\mathcal{G}$ l'ensemble des sous-groupes de $\mathrm{Gal}(N|K)$. Notons $I : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$ l'application qui, à tout sous-groupe $H \subset Gal(N|K)$ associe le corps des invariants $I(H)$ [89]. L'application $G : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ associe $\mathrm{Gal}(N|L)$ à toute extension L de K qui fait partie de $\mathcal{E}$. Les applications I et G définissent des bijections réciproques, décroissantes pour la relation d'inclusion. Qui plus est, elles définissent par restriction des bijections réciproques, décroissantes pour la relation d'inclusion de l'ensemble $\mathcal{E}'$ des extensions

88. *ibid.*, p. 167-168.

89. Le corps $I(H)$ des invariants de H est un sous-corps de N, il contient les éléments x de N tels que $\forall \sigma \in H, \sigma(x) = x$.

normales de K contenues dans N sur l'ensemble $\mathcal{G}'$ des sous-groupes distingués de $\mathrm{Gal}(N|K)$.

Référons-nous à l'exemple devenu canonique du corps de décomposition $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, j]$ du polynôme $P(X) = X^3 - 2$, qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, j]|\mathbb{Q})$ s'identifie canoniquement au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$. À l'extension normale $\mathbb{Q}[j]$ de degré 2 sur $\mathbb{Q}$ correspond le groupe alterné $\mathfrak{A}_3$ qui est distingué dans $\mathfrak{S}_3$. Aux corps intermédiaires $\mathbb{Q}[j^2\sqrt[3]{2}]$, $\mathbb{Q}[j\sqrt[3]{2}]$ et $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ on associe les sous-groupes d'ordre 2 engendrés par les transpositions $(1 \quad 2)$, $(1 \quad 3)$ et $(2 \quad 3)$. Nous pouvons résumer la correspondance de Galois dans ce cas à l'aide des deux figures suivantes :



Ainsi, Lautman décrit assez rigoureusement la correspondance de Galois lorsqu'il affirme :

> Nous allons voir comment, en ≪ montant ≫ de k [corps de base] à K [corps de décomposition d'un polynôme $f(x)$ de $k[x]$ irréductible sur K], on peut considérer des corps intermédiaires k' tels que $k \subset k' \subset K$ et dont l'imperfection diminue à mesure que l'on s'approche de K. Soit en effet k' un pareil sur-corps, tel que K ne soit plus que de degré m par rapport à k', $(m < n)$. Le théorème de Galois associe de façon univoque à ce corps intermédiaire un sous-groupe g' du groupe G, défini de la façon suivante : g' laisse invariants tous les éléments de K qui sont dans k' et ne permutent entre eux que ceux qui restent à intégrer. De plus, l'ordre de ce sous-groupe est égal au degré m de l'extension qui doit encore faire passer de k' à K et mesure bien ainsi ce qui demeure d'imperfection en k'. La ≪ montée ≫ de k à k' est donc accompagnée d'une

> ≪ descente ≫ dans l'ordre des groupes attachés à ces corps, et, au corps final K, en lequel toute imperfection a disparu, puisqu'il contient toutes les racines de $f(x)$, correspond le plus petit sous-groupe de G, le groupe unité 1 qui ne contient que la transformation identique. [90]

Après avoir montré comment la théorie de Galois permet de résoudre le problème de la résolubilité des équations générales par les radicaux, Lautman revient sur les raisons qui justifient en quoi la bijection décroissante entre les corps intermédiaires situés entre k et K et les sous-groupes de $\mathrm{Gal}(K|k)$ satisfait aux caractéristiques de la ≪ montée vers l'absolu ≫ telle qu'elle est exposée par Descartes dans la quatrième partie du *Discours de la méthode*. Lautman évoque tout d'abord ≪ la vision de l'être parfait dont l'existence est impliquée par celle de l'être imparfait ≫. [91] En particulier, l'imperfection d'un corps de base — qui n'est pas algébriquement clos — vient de ce que certains polynômes ne sont pas décomposables en facteurs du premier degré sur lui. D'où la nécessité de rechercher pour chacun de ces polynômes son corps de décomposition. Ensuite, Lautman montre que la montée vers l'absolu, telle qu'elle est décrite par Descartes, se caractérise par ≪ la conscience que la nature des démarches à effectuer pour accéder à l'absolu est, dans une certaine mesure, donnée avec l'être imparfait proposé ≫. [92] Ici se confirme l'inflexion qu'il fait subir aux thèses de Descartes. Alors qu'il existe une incommensurabilité entre les êtres imparfaits et l'être parfait, il n'y a guère qu'une différence de degré entre un corps k et le corps de décomposition d'un polynôme de $k[X]$ qui est irréductible sur k. Dans le fond, Lautman utilise la métaphysique cartésienne pour souligner l'exemplarité de la théorie de Galois. Cette dernière peut servir de paradigme pour penser d'autres théories mathématiques qui satisfont au même schéma logique. Nous ne reviendrons pas sur la théorie du corps de classes à laquelle nous avons déjà consacré quelques lignes dans le présent paragraphe. Intéressons-nous davantage à la classification des revêtements et à la théorie de l'uniformisation des fonctions analytiques d'une variable complexe, puisqu'elles comptent parmi les motivations principales qui président à la rédaction de *Die Idee der Riemannschen Fläche*.

Si d'un côté Lautman s'intéresse à la théorie de Galois pour son exemplarité, de l'autre il insiste sur la portée philosophique que suscite la classification des revêtements à ses yeux. Le paragraphe consacré à ≪ la surface universelle de recouvrement ≫ s'ouvre en effet sur l'affirmation suivante : ≪ La théorie que nous allons exposer maintenant a pour nous une importance philosophique beaucoup plus grande que les théories précédentes, car la montée vers l'absolu y a pour conséquence, non seulement de conférer à un être mathématique la

90. *ibid.*, p. 167.
91. *ibid.*, p. 168.
92. *ibid.*, p. 168.

plus grande simplicité de structure interne possible, mais de le rendre à même de donner naissance sur lui à d'autres êtres que lui ≫.[93] On est d'abord frappé par le caractère abstrait et sans doute trop général de cet argument. En réalité, il semblerait que Lautman veuille dire que le fait de parvenir à un être mathématique doté de la plus grande simplicité possible conditionne *l'existence* de certains objets mathématiques, ce qu'illustre de manière remarquable le théorème d'uniformisation en analyse complexe. En effet, il s'agit d'un théorème d'existence : on doit prouver qu'il y a bien un paramètre global d'uniformisation pour n'importe quelle fonction analytique f d'une variable complexe. Or, pour déterminer l'existence d'un tel paramètre, on ne saurait se fonder sur la surface de Riemann $\mathfrak{F}$ qui est associée à f, mais sur ≪ la ≫ surface de revêtement universelle $\widetilde{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$. Cet exemple montre comment l'être mathématique doté de la *structure* la plus simple — incarné ici par le concept de revêtement universel — conditionne l'*existence* d'une uniformisante globale pour toute fonction analytique d'une variable complexe multi-valuée. Lautman privilégie donc la théorie des revêtements dans la mesure où elle lui permet de confronter les deux notions cardinales de ≪ structure ≫ et d'≪ existence ≫ qui justifient le découpage de sa thèse en deux parties.

Quelles sont les sources sur lesquelles il s'appuie ? On peut en mentionner deux : tout d'abord *Die Idee der Riemannschen Fläche* de Weyl ensuite le *Lehrbuch der Topologie* de Seifert et Threlfall. À l'instar de Weyl, Lautman raisonne sur des surfaces, i.e. des variétés topologiques bidimensionnelles qu'il suppose connexes — et donc connexes par arcs, puisque dans les cas des variétés topologiques, connexité et connexité par arcs s'équivalent. Cela posé, une surface constitue un être imparfait aux yeux de Lautman si elle n'est pas simplement connexe, i.e. s'il existe des classes de lacets qui ne sont pas continûment réductibles à des points. Par exemple, le plan complexe est simplement connexe, ce qui n'est pas le cas d'un tore complexe. Lautman emprunte manifestement l'axiomatisation de la notion de revêtement à Threlfall dans son article intitulé ≪ la notion de recouvrement ≫.[94] Il ne nous semble pas qu'une telle définition diffère réellement de celle que Weyl avait formulée en 1913 dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*. À la lecture de l'article de Threlfall, nous remarquons en revanche qu'il énonce le principe d'une correspondance de Galois entre les sous-groupes du groupe fondamental de la surface de base $\mathfrak{M}$ et les revêtements au-dessus de $\mathfrak{M}$. Une telle bijection fait d'ailleurs l'objet d'une démonstration complète au cours du chapitre VIII du *Lehrbuch*

93. *ibid.*, p. 171.

94. W. Threlfall, ≪ La Notion de Recouvrement ≫, in *L'Enseignement mathématique*, **34**, 1935, p.231. L'article de Threlfall est tiré d'une conférence que ce dernier a donné le 23 janvier 1935 au colloque de l'université et de l'école polytechnique de Zürich.

der Topologie que Seifert et Threlfall publient en 1934. Threlfall affirme en substance :

> La question suivante se pose : Étant donné une variété $\mathfrak{M}$, combien possède-t-elle de variétés de recouvrement différentes ? Il est possible de répondre complètement à cette question, lorsqu'on connaît le groupe fondamental de $\mathfrak{M}$ dans toute sa structure. La réponse est donnée par le théorème suivant : ≪ les variétés de recouvrement correspondent biunivoquement aux sous-groupes du groupe fondamental, ou plutôt aux classes de sous-groupes conjugués. ≫ En ce cas deux variétés de recouvrement de $\mathfrak{M}$ ne seront pas différentes, si elles admettent une représentation topologique l'une sur l'autre, telle que les images des points situés au-dessus d'un même point soient elles-mêmes situées au-dessus de ce point. [95]

Ainsi, Threlfall et Seifert viennent prolonger et affiner la classification des revêtements effectuée par Weyl dans le § 9 de *Die Idee der Riemannschen Fläche* en montrant qu'elle peut se formuler dans les termes d'une correspondance biunivoque entre les sous-groupes du groupe fondamental de $\mathfrak{M}$ (qui est connexe par arcs) et les revêtements ≪ intermédiaires ≫ situés entre $\mathfrak{M}$ et $\widetilde{\mathfrak{M}}$ qui désigne ≪ le ≫ revêtement universel de $\mathfrak{M}$. On ajoutera à grands traits qu'un revêtement de $\mathfrak{M}$ est normal ou galoisien si et seulement s'il correspond à un sous-groupe *distingué* du groupe fondamental de $\mathfrak{M}$. Le chapitre VIII du *Lehrbuch der Topologie* de Seifert et Threlfall traduit sous une forme *structurale* l'analogie entre théorie de Galois et théorie des revêtements que Weyl avait établie en 1916. Revenons à Lautman. Il serait erroné de penser qu'il se contente ici de reproduire des passages tirés de l'article de Threlfall sur les revêtements. Son incursion du côté de la métaphysique cartésienne lui permet d'insister sur le fait que la théorie des revêtements répond au même schéma logique que la théorie de Galois. Autrement dit, on a bien affaire à une ≪ montée vers l'absolu ≫ que Lautman explique en ces termes :

> En considérant alors le plus petit sous-groupe du groupe fondamental, c'est-à-dire le groupe unité qui correspond à la classe des chemins réductibles à un point par déformation continue, on obtient le double résultat escompté ; il existe une surface maximale ou universelle de recouvrement qui recouvre toutes les autres surfaces de recouvrement, et cette surface possède un caractère de simplicité absolue puisque son groupe fondamental étant le groupe unité, tout chemin fermé sur elle est réductible à un point. [96]

Lautman prend appui sur la relation entre êtres imparfaits et être parfait pour énoncer de manière systématique les points de recoupement entre la théorie de Galois et la classification des revêtements. Il a également conscience que le concept de revêtement n'a pas été introduit gratuitement. Notre commentaire des travaux de Poincaré, Koebe et Weyl nous a permis de montrer que la notion de revêtement universel sert de point d'appui pour résoudre le

95. W. Threlfall, *op. cit.*, p. 233.
96. A. Lautman, *op. cit.*, p. 173.

problème de l'uniformisation des fonctions analytiques d'une variable complexe.

Justement, la théorie de l'uniformisation des fonctions analytiques et, plus spécifiquement, des fonctions algébriques sur une surface de Riemann répond exactement au même schéma logique que les théories précédentes : « il s'agit encore d'éliminer les imperfections de certains êtres mathématiques par passage de ce qu'ils sont primitivement à un idéal de simplicité absolue dont l'existence est impliquée dans les enchevêtrements même de leur structure ». [97] En effet, le caractère multivalué d'une « fonction » algébrique $f(p)$ définie sur un domaine du plan complexe constitue aux yeux de Lautman le signe d'une imperfection. On commence donc par construire la surface de Riemann $\mathfrak{F}$ à laquelle cette fonction est attachée. La surface $\mathfrak{F}$ n'est pas *a priori* simplement connexe. Lautman fait alors la remarque suivante : « s'il n'existe pas encore de fonction uniformisante globale, il existe déjà en chaque point de cette surface une « uniformisante locale ». [98] Pour parvenir à cette uniformisante globale, il convient de s'appuyer non plus sur la surface $\mathfrak{F}$, mais sur le revêment universel $\widetilde{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}$: « Lorsque la surface de Riemann de la fonction algébrique considérée n'est pas simplement connexe, l'idée géniale de Poincaré et de Koebe a été de considérer la surface universelle de recouvrement de cette surface : comme cette surface est, elle, simplement connexe, le théorème de la représentation conforme [99] lui est applicable et elle donne naissance à une uniformisante globale de la fonction $f(p)$ attachée à la surface de Riemann primitive, ce qui résout complètement le problème ». [100]

Bien qu'il mentionne le nom de Poincaré, Lautman se réfère explicitement à une seule source, à savoir *Die Idee der Riemannschen Fläche* de Weyl. Lautman s'est donc très vraisemblablement inspiré du § 19 de l'ouvrage de Weyl pour comprendre le théorème d'uniformisation et l'interpréter philosophiquement. Enfin, il a échappé à Lautman qu'il existe un analogue de la théorie de Galois dans le cas des corps de fonctions algébriques d'une variable complexe et de leurs surfaces de Riemann correspondantes. Bref, lorsqu'il se consacre aux surfaces de Riemann, Lautman ne recherche pas une théorie fondée sur une correspondance similaire à celle qui prévaut dans la théorie de Galois, il se contente de montrer que le théorème d'uniformisation peut être décrit dans les terme d'une « montée vers l'absolu ». Ce théorème constitue une réalisation possible du *schéma logique* décrit dans le chapitre III de sa thèse. Ce schéma logique revient à dialectiser les deux notions antithétiques que sont l'*imparfait* et le *parfait*.

Pour synthétiser le paragraphe 1.3.5 de notre thèse, nous pouvons dire que, dans son

97. *ibid.*, p. 174.
98. *ibid.*, p. 175.
99. toute surface de Riemann simplement connexe est conformément équivalente soit à $\mathbb{C}$, soit à $\mathbb{D}$, soit à Σ
100. *ibid.*, p. 177.

article de 1916 intitulé « Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen », Weyl construit une *analogie* entre la théorie des corps de nombres et la théorie des surfaces de Riemann. Cette analogie montre à quel point le *Zahlbericht* de Hilbert (1897) constitue une référence centrale pour produire des mathématiques nouvelles chez Weyl. En outre, il s'agit de parvenir à des résultats inédits en comparant et en croisant ces deux théories mathématiques. Weyl prête donc une vertu heuristique à l'analogie, comme en témoigne donc cet article. Dans sa thèse principale (1937), Lautman n'a pas manqué de reprendre à son compte les parentés entre la théorie du corps de classes de Hilbert et la théorie des surfaces de Riemann. Il systématise ce rapprochement à d'autres théories mathématiques et il montre qu'elles dépendent donc du même schéma logique mettant en jeu la dialectique entre *êtres imparfaits* et *être parfait*.

Alors que l'article de Weyl s'inscrit dans une démarche *intra-mathématique* — comment produire des mathématiques nouvelles en confrontant et en comparant des théories existantes ? —, le chapitre III de la thèse de Lautman appartient au registre de la *philosophie mathématique* ; philosophie et mathématiques étant alors appelées à s'éclairer mutuellement. Le point de vue adopté par Weyl est donc plus immanent et il consiste à passer de proche en proche d'une théorie (la théorie du corps de classes) à une autre théorie (la théorie des surfaces de Riemann). Le point de vue de Lautman est clairement surplombant et il consiste à traiter quatre théories mathématiques (la théorie de Galois, la théorie des revêtements, la théorie du corps de classes et la théorie de l'uniformisation des fonctions analytiques d'une variable complexe) comme autant de réalisations possibles d'un même schéma logique. Cette différence ne vient pas seulement du fait que l'article de Weyl relève des mathématiques, alors que la thèse de Lautman appartient à la philosophie mathématique. En réalité, contrairement à Weyl, Lautman construit son raisonnement à partir d'une référence quasiment exclusive aux mathématiques structurales telles qu'elles se développent à la fin des années 20 et au début des années 30 : les théories mathématiques sont aux schémas logiques de Lautman, ce que les objets mathématiques sont aux structures mathématiques. De même qu'un schéma logique admet plusieurs réalisations possibles en fonction des théories mathématiques décrites et étudiées, de même une structure mathématique admet plusieurs réalisations possibles en fonction des domaines d'objets auxquels elle est susceptible de s'appliquer.

3.6 Conclusion du troisième chapitre

Die Idee der Riemannschen Fläche de Weyl constitue un ouvrage de *synthèse* à plusieurs niveaux. En premier lieu, Weyl dialectise les méthodes de Riemann et de Weierstrass dans la construction même des surfaces de Riemann. Weyl passe d'un point de vue algébrique et local, fondé sur l'utilisation du prolongement analytique, à un point de vue topologique et global qui revient à déterminer les propriétés d'*analysis situs* des surfaces de Riemann. Nous avons suffisamment insisté sur le fait que l'opposition entre une approche riemannienne et une approche weierstrassienne n'est plus de mise au début du XX^{e} siècle à Göttingen. En particulier, le défaut de rigueur que Weierstrass pouvait imputer à Riemann n'a plus de raison d'être puisque le principe de Dirichlet est démontré par Hilbert au tournant du XX^{e} siècle et que les objets géométriques introduits par Riemann sont en passe d'être définis rigoureusement.

En second lieu, dans ses cours sur les fonctions d'une variable complexe et sur les surfaces de Riemann, Weyl s'appuie sur des représentations physico-géométriques héritées de l'ouvrage de Klein sur les fonctions algébriques d'une variable complexe (1882) ; corrélativement, il définit *implicitement* les principaux concepts qui interviennent dans son ouvrage : surfaces topologiques, surfaces de Riemann, revêtements, etc. Cela signifie qu'il envisage ces concepts indépendamment de la nature des objets auxquels ils renvoient et qu'il les définit à l'aide d'une liste d'axiomes conformément aux prescriptions de Hilbert. Autrement dit, Weyl s'approprie les leçons de Klein sur les surfaces de Riemann rassemblées sous le titre *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (1882) d'une part, les suppléments aux *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (1902) d'autre part. De l'ouvrage de Klein, Weyl retient essentiellement l'idée selon laquelle la théorie des surfaces de Riemann est au fondement de l'analyse complexe. En conséquence, les surfaces de Riemann doivent être étudiées de manière intrinsèque au lieu d'être considérées comme des moyens pour saisir des fonctions initialement multivaluées dans le plan complexe. Mais cette idée doit être exprimée de manière rigoureuse et en toute généralité, ce qu'offre justement la méthode axiomatique de Hilbert.

En troisième lieu, Weyl parvient à une remarquable synthèse sur le plan des concepts : les définitions par axiomes qu'il propose permettent d'établir qu'une surface de Riemann est une variété analytique complexe de dimension 1. Autrement dit, le concept de surface de Riemann est assujetti au concept plus général de variété, ce que nul n'avait établi avec autant de précision et de rigueur avant Weyl. Il explicite sur un plan conceptuel le lien entre

la *Dissertation* de Riemann (1851) et son *Habilitationsvortrag* (1854).

En quatrième lieu, l'ouvrage de Weyl rassemble les principaux résultats de la théorie des surfaces de Riemann : le principe de Dirichlet, le théorème de Riemann-Roch et surtout le théorème d'uniformisation qu'il démontre de manière élégante en s'appuyant essentiellement sur les articles de Koebe (1907 à 1912) et de Hilbert (1909). Si *Die Idee der Riemannschen Fläche* constitue un ouvrage novateur sur un plan conceptuel, en revanche les théorèmes énoncés et démontrés par Weyl sont essentiellement ceux qui caractérisent l'analyse complexe et la théorie des surfaces de Riemann au cours de la seconde moitié du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle.

En dernier lieu, l'article de 1916 intitulé « Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen » montre que l'esprit de synthèse de Weyl porte non seulement sur des méthodes, des concepts et des résultats, mais encore sur des *théories*. En effet, il souligne l'étroite parenté entre la théorie du corps de classes et la théorie des surfaces de Riemann. De plus, il adopte le langage de la théorie de Galois lorsqu'il classe les revêtements d'une surface de Riemann. L'analogie entre la théorie de Galois et la théorie des revêtements sera précisée et envisagée dans des situations plus abstraites par Threlfall et Seifert en 1935. En outre, Lautman s'appuiera sur la référence à Weyl, Threlfall et Seifert pour montrer en 1937 que la théorie de Galois, la théorie des revêtements, la théorie du corps de classes et la théorie de l'uniformisation des fonctions analytiques d'une variable complexe sont diverses réalisations d'un même schéma logique.

Si dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Weyl n'innove pas en termes de résultats, en revanche ses contributions demeurent décisives sur un plan conceptuel, méthodologique et théorique. Certes, Weyl insiste dans la préface à cet ouvrage sur l'exigence de rigueur qui sera la sienne dans les définitions de concepts et les raisonnements. Mais dans le même temps, il se montre très réservé à l'idée que cette rigueur puisse devenir à elle-même sa propre fin. Plutôt que d'analyser cet ouvrage en fonction de cette exigence de rigueur, il nous semble plus pertinent d'insister sur le fait que Weyl mobilise d'un seul tenant les références à Riemann, Klein, Hilbert, Brouwer ou encore Koebe. Les apports de ces différents protagonistes sont repris, transformés et modifiés de manière à aboutir à un tout cohérent. L'unité de *Die Idee der Riemannschen Fläche* prend déjà la forme d'une harmonie polyphonique et ce trait caractérisera également d'autres œuvres de Weyl que nous commenterons dans la suite de notre thèse : *Raum, Zeit Materie* (1918 - 1923), l'article sur les groupes de Lie complexes semi-simples (1925-1926) ou encore *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928, 1931).

Conclusion générale de la première partie

Notre étude de la théorie des surfaces de Riemann nous a d'abord conduit à examiner la *Dissertation* de Riemann (1851) ainsi que le § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes* (1857). Nous avons montré comment l'*analysis situs*, qui n'en est alors qu'à ses prémisses, commande l'étude des fonctions d'une variable complexe dans ces deux ouvrages. Riemann explicite certaines propriétés topologiques fondamentales — connexité, simple connexité, etc. — à partir de l'étude de certaines surfaces remarquables : disques, couronnes, sphère, tores à g trous, etc. Ces surfaces ont le statut d'*exemples paradigmatiques* : il ne s'agit pas de cas isolés : ils ont pour fonction de dégager certaines propriétés relevant de l'*analysis situs* dont la portée est en droit générale. Corrélativement, ils montrent que Riemann s'appuie très largement sur des représentations intuitives et géométriques. Ainsi, l'*analysis situs* est appelée à jouer un rôle cardinal en analyse, mais elle n'est pas encore fondée rigoureusement. Pour être plus précis, dans sa *Dissertation*, Riemann se donne pour but de géométriser l'analyse, d'où l'importance qu'il accorde aux objets géométriques que sont les surfaces de Riemann. Ce projet de géométrisation de l'analyse sera également à l'œuvre dans les premières pages du *Habilitationsvortrag* (1854) ; il constitue donc un trait commun à ces deux textes cardinaux de Riemann.

La *Dissertation* de Riemann s'achève sur le théorème de représentation conforme, que Riemann démontre en s'appuyant sur le principe de Dirichlet dont la validité est encore loin d'être garantie, comme en attestent les objections formulées par Weierstrass au début des années 1870. À la suite de cette démonstration, Riemann envisage de classer les surfaces de Riemann à l'image de ce que Gauss avait pu faire dans le cas des surfaces courbes. Une telle classification sera l'objectif principal de Klein dans ses leçons sur les surfaces de Riemann (1882). Celui-ci parviendra également à clarifier le lien entre les surfaces courbes de Gauss et les surfaces de Riemann.

Dans ses cours en analyse complexe (1910 / 1911), Weyl s'approprie plusieurs aspects de la *Dissertation* de Riemann. Il adopte un ordre similaire dans son argumentation : il s'appuie sur certaines représentations géométriques avant d'énoncer des résultats analytiques. En outre, le théorème de Cauchy est pour lui l'occasion de montrer combien les considérations d'*analysis situs* que l'on doit à Riemann déterminent le domaine de validité des principaux énoncés relevant de l'analyse complexe. Quoi qu'il en soit, Weyl lit la *Dissertation* de Riemann à partir des interprétations que Klein en a proposées. À l'instar de ce dernier, Weyl est persuadé que des intuitions physiques commandent l'élaboration de la *Dissertation*. Or,

nous avons suffisamment montré dans ce qui précède qu'il s'agit là d'une reconstruction historique artificielle qui est due à Klein pour rapprocher la théorie des surfaces de Riemann et l'électromagnétisme, comme si les développements des mathématiques et de la physique mathématique se conditionnaient mutuellement.

Cela posé, dans les années 1880, Klein défend les méthodes géométriques de Riemann contre certains de ses détracteurs, en particulier Schwarz ou encore Weierstrass qui estiment cette approche peu rigoureuse. En revanche, au début du XX^{e} siècle, le principe de Dirichlet, qui joue un rôle central dans la *Dissertation* de Riemann, est démontré par Hilbert. L'objectif de Weyl dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* n'est plus d'opposer les méthodes riemanniennes et weierstrassiennes en analyse complexe mais de les *dialectiser*. Tel est d'ailleurs l'objectif accompli dans les premiers paragraphes de cet ouvrage.

Comme nous l'avons indiqué, Weyl lit la *Dissertation* de Riemann à partir du commentaire qu'en a proposé Klein. D'ailleurs, les leçons de Klein sur les surfaces de Riemann, qui sont publiées en 1882, constituent un ouvrage de référence auquel Weyl veut donner une forme rigoureuse, tout en le combinant à d'autres sources : Brouwer, Hilbert, Weierstrass ou encore Koebe. Dans cet ouvrage, qui accorde une large place à des représentations physico-géométriques à des fins heuristiques et pédagogiques, Klein parvient à des résultats d'un remarquable niveau d'abstraction et de généralité : classification des surfaces de Riemann compactes connexes, étude de l'espace des modules introduit par Riemann dans le § 12 de son mémoire de 1857, preuve qu'il y a un nombre fini d'automorphismes pour une surface de genre $g \geqslant 2$, etc. Il n'y a donc aucune incompatibilité entre une *approche intuitive* et une *pensée de l'abstrait* en mathématiques. Loin de se contenter d'une description empirique des courants électriques sur une surface, Klein classe des objets mathématiques : les surfaces de Riemann conformément équivalentes sont autant de réalisations possibles d'une même surface *idéale* — l'expression est de Klein et elle est littéralement reprise dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*. En 1913, Weyl parvient donc à exprimer rigoureusement cette pensée de l'abstrait qui est déjà à l'œuvre dans l'ouvrage de Klein de 1882. Pour ce faire, Weyl se fonde essentiellement sur la méthode axiomatique laquelle permet de formuler des définitions *implicites* de concepts.

Cependant, loin de nous contenter de résumer l'ouvrage de Klein sur les surfaces de Riemann, nous avons décidé de commenter également ses travaux sur l'icosaèdre, sur la quartique « de Klein » et sur les fonctions modulaires (1875 à 1884). Ce choix a d'abord de quoi surprendre, puisque nous ne connaissons pas de contributions de Weyl qui viendraient prolonger les travaux de Klein sur les fonctions modulaires. En réalité, Weyl est marqué par

la conception kleinéenne de l'unité des mathématiques qui ressort des *Vorlesungen über das Ikosaeder* (1884). En outre, Klein a essentiellement pour objectif de faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann. Weyl se montre particulièrement sensible à ce projet qu'il va justement décliner tout au long de sa carrière : en 1916, il utilise le langage de la théorie de Galois pour classer les revêtements d'une *surface* de Riemann ; en 1921-1923, il s'appuie sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie pour caractériser les *variétés* métriques pythagoriciennes dans l'infinitésimal — i.e. dont la métrique est définie par une forme quadratique non dégénérée — ; enfin, en 1925-1926, il transpose la théorie des revêtements aux groupes de Lie pour démontrer notamment que le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(n)$ est simplement connexe pour $n \geqslant 2$. Ainsi, il serait réducteur de penser que la réception de l'œuvre de Klein par Weyl doit être circonscrite aux seuls ouvrages que Weyl aurait directement prolongés. Par exemple, les leçons sur l'icosaèdre de Klein constituent une source d'inspiration pour pratiquer un certain type de mathématiques en confrontant une grande diversité de domaines et de méthodes dans un même texte. Il s'agit là d'un trait commun à Klein et à Weyl.

Réciproquement, il est inexact de croire que seuls des articles et des ouvrages portant sur l'*analysis situs*, les fonctions d'une variable complexe et les surfaces de Riemann servent alors de référence à Weyl. Nous avons montré précédemment qu'en 1916, Weyl construit une étroite analogie entre la théorie du corps de classes et la théorie des surfaces de Riemann. Il établit notamment en théorie des surfaces de Riemann un théorème analogue au *Hauptidealsatz* que Hilbert formule et démontre dans son *Zahlbericht* (1897). Justement, le *Zahlbericht* constitue l'une des références majeures de Weyl au cours de ses années d'études à Göttingen et il sait donc l'exploiter dans d'autres domaines que la théorie des corps de nombres.

Deux textes nous ont permis d'identifier l'épistémologie implicite de Weyl au cours de cette période en tant que *Privatdozent* à Göttingen : son article de 1910 intitulé « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe » et la préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Si Weyl admet alors la pertinence de la théorie des ensembles de Zermelo, y compris pour rendre raison de la propriété de continuité, en revanche il rejette le logicisme et il refuse que la formalisation d'une théorie mathématique soit à elle-même sa propre fin. À l'instar de Klein, il admet l'importance des représentations intuitives pour produire des connaissances nouvelles. Les mathématiques sont donc irréductibles à leur forme logique. En outre, il adopte une conception platonicienne des mathématiques : celles-ci sont fondées en dernière instance sur des Idées qu'il s'agit de contempler par-delà les formalismes nécessaires pour exprimer une théorie mathématique rigoureusement. Pour défendre ce point de vue, Weyl s'appuie ma-

nifestement sur l'argument de la ligne développé par Platon dans le livre VI de la *République*. Aussi ne peut-on pas dire que Weyl est formaliste au sens strict au moment où il publie *Die Idee der Riemannschen Fläche*, quand bien même il s'appuie sur la méthode des définitions implicites de concepts dans le prolongement immédiat de Hilbert.

En 1913, Weyl est recruté en qualité de professeur de mathématiques à l'ETH de Zürich en remplacement du géomètre K. F. Geiser. À partir de 1916, il côtoie le philosophe F. Medicus, spécialiste de l'idéalisme de Fichte à l'ETH. Weyl abandonne tout à fait le platonisme dont le titre même de son ouvrage sur les surfaces de Riemann portait la marque. Il emprunte dorénavant ses sources à deux philosophies de la conscience : avant tout l'idéalisme fichtéen, mais aussi la phénoménologie d'Husserl dont son article de 1910 sur les définitions des concepts mathématiques se faisait déjà l'écho. Nous montrerons précisément cela dans la seconde partie de notre thèse. Nous verrons que ces deux sources sont utilisées par Weyl non pas tant pour se prononcer sur les fondements des mathématiques, que pour éclairer sa pratique des mathématiques et, en particulier, ses deux principales contributions entre 1918 et 1923 : la généralisation de la géométrie riemannienne afin de parvenir à une théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique ; la résolution du problème de l'espace.

Reste à préciser les incidences de *Die Idee der Riemannschen Fläche* sur l'œuvre de Weyl à plus long terme. Cet ouvrage fait l'objet d'une seconde édition en 1919 et d'une troisième édition en 1955. En outre, Weyl donne à plusieurs reprises des cours sur les fonctions d'une variable complexe et les surfaces de Riemann à l'ETH de Zürich entre 1914 et 1930. Ainsi, parmi les documents sténographiés qui sont conservés dans les archives Weyl à l'ETH de Zürich, on trouve trois cours intitulés respectivement « Algebraische Kurven und Flächen » (1914), « Riemannsche Flächen - Infinitesimalgeometrie - Algebraische Kurven - Induktion. Kristalloptik I. » (1926) et « Funktionentheorie - Allgemeine Konstruktion der Riemann'schen Fläche einer algebraischen Funktion - Algebraische Kurven » (non daté, peut-être après 1926). Weyl investit donc ce domaine en qualité de professeur bien après la publication de la première édition de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Afin d'anticiper sur la suite de notre thèse, nous pouvons remarquer que cet ouvrage est absolument essentiel pour comprendre les travaux ultérieurs de Weyl sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples (1925-1926). En effet, de même qu'en analyse complexe Weyl combinait la méthode topologique et intégrale de Riemann et la méthode algébrique et locale de Weierstrass, de même en théorie des groupes de Lie il confronte l'approche algébrique et infinitésimale de Cartan et l'approche topologique et intégrale de Hurwitz. En outre, la théorie des revêtements dont Weyl précise les contours dans *Die Idee der Riemannschen*

Fläche est mobilisée à nouveaux frais en 1925-1926 pour démontrer le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ avant d'être généralisé à tout groupe de Lie complexe semi-simple.

Deuxième partie

Variétés, univers et relativité générale

Introduction : *Raum, Zeit, Materie* et ses diverses ramifications

Grossmann et Weyl

À partir de 1916, Weyl s'intéresse au développement de la relativité générale et sa géométrisation via la notion de variété différentielle quadridimensionnelle munie d'une métrique pseudo-riemannienne. Plusieurs éléments peuvent être invoqués pour expliquer cette nouvelle orientation. Comme le précise T. Hawkins, Weyl est enrôlé dans l'armée allemande entre le printemps 1915 et le printemps 1916. À la demande du gouvernement suisse, il est déchargé de ses obligations militaires et il enseigne donc de nouveau à l'ETH de Zürich à partir de 1916. Le traumatisme lié à la participation de Weyl à la première guerre mondiale explique en partie les changements que l'on peut observer dans sa carrière scientifique et ses références philosophiques. Ainsi, il affirme en 1946 :

> My mathematical mind was as blank as any veteran's, and I did not know what to do. I began to study algebraic surfaces ; but before I had gotten far, Einstein's memoir came into my hand and set me afire. [101]

Comme le précise Hawkins, le ≪ mémoire ≫ d'Einstein auquel Weyl fait allusion ici n'est autre que le fameux article intitulé ≪ Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ≫ qui est publié dans les *Annalen der Physik* en 1916. [102] Notre but n'est pas ici de commenter ce texte fondamental d'Einstein, mais de savoir comment Weyl a pu en prendre connaissance et pourquoi il lui accorde un si vif intérêt. Dans la préface à cet article, Einstein précise qu'une généralisation de la relativité restreinte a été facilitée grâce aux travaux de Minkowski portant sur la géométrisation de la relativité restreinte. Cette première remarque n'a rien d'anodin. Einstein a d'abord accueilli avec perplexité les réflexions de Minkowski sur la géométrie de l'espace-temps en relativité restreinte. Il en reconnaît à présent toute la pertinence. Ensuite, Einstein met en exergue les outils mathématiques nécessaires à la formalisation de la relativité générale, à savoir ≪ le calcul différentiel absolu ≫, c'est-à-dire le calcul tensoriel auquel il attache les noms de Gauss, Riemann, Christoffel et surtout Ricci ainsi que Levi-Civita. Comme il le précise, ces derniers sont parvenus à présenter le calcul tensoriel de manière systématique tout en mettant en valeur ses applications à la physique dès 1900. Enfin, Einstein remercie

101. H. Weyl, ≪ Lecture at the Bicentennial Conference ≫, (Princeton, 1946), cité par S. Sigurdsson, *Hermann Weyl, Mathematics and Physics, 1900-1927*. Thèse de Doctorat, *Harvard University* 1991, p. 62.

102. A. Einstein, ≪ Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ≫, *Annalen der Physik*, **49**, 1916, p. 769 à 822.

tout particulièrement Marcel Grossmann qui lui a justement permis de se familiariser avec le calcul tensoriel.

Ce dernier point mérite d'être précisé. Einstein et Grossmann se lient d'amitié alors qu'ils sont étudiants à l'ETH de Zürich à la toute fin du XIX^{e} siècle. Grossmann devient professeur à l'ETH de Zürich en géométrie à partir de 1907. Il y restera jusqu'en 1927. Einstein est lui-même recruté à l'ETH en 1912. Il quittera l'École polytechnique fédérale de Zürich pour Berlin en 1914. Précisément, en 1913, Grossmann et Einstein publient un article commun intitulé « Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und die Theorie der Gravitation ». Il s'agit du premier article dans lequel le calcul tensoriel est appliqué à la théorie de la relativité générale dont les fondements seront pleinement assurés en 1915. La partie physique de cet article est rédigée par Einstein. La partie mathématique, consacrée au calcul tensoriel, est due à Grossmann qui introduit d'ailleurs le terme de « tenseur » : sous sa plume, le calcul différentiel absolu devient le calcul tensoriel. Non seulement Grossmann indique à Einstein qu'il s'agit là de l'instrument mathématique adapté à la formalisation de la relativité générale, mais il lui montre également que le *Habilitationsvortrag* de Riemann constitue une référence essentielle pour concevoir la géométrie de l'espace-temps en relativité générale. L'invocation des noms de Minkowski et de Grossmann dans l'article fondamental d'Einstein de 1916 n'a rien d'anodin. Souvenons-nous que Minkowski est professeur à Göttingen à partir de 1902 jusqu'à sa mort prématurée en 1909. Il publie ses travaux en relativité restreinte alors que Weyl est doctorant puis *Privatdozent* à Göttingen. À la mort de Minkowski, Weyl et Speiser participent à la publication des œuvres complètes de Minkowski. Même si Weyl ne publie rien en relativité restreinte durant cette période, il a nécessairement dû prendre connaissance de cette théorie et de sa géométrisation par Minkowski, ce qui prépare son intérêt ultérieur pour la relativité générale.

À partir de 1913, Weyl devient le collègue d'Einstein pour une courte période et surtout de Grossmann à l'ETH de Zürich. Or, le 8 août 1916, Grossmann et Weyl participent à la septième réunion ordinaire de la société mathématique suisse dont Grossmann est alors le président. Weyl y présente un exposé intitulé « le problème de l'Analysis situs » qui est essentiellement consacré à la triangulation des surfaces topologiques. L'exposé de Grossmann est entièrement dévolu à la relativité générale. Le résumé de son intervention, qui paraît dans l'*Enseignement mathématique* l'année suivante, indique qu'il met en valeur les derniers travaux d'Einstein en relativité générale et, plus particulièrement, l'article fondamental reçu le 20 mars 1916, à savoir « die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie » :

> M. le professeur D^{r} Marcel Grossmann (Zurich). Remarque concernant la théorie générale de

> la relativité. M. Albert Einstein, qui a établi avec MM. Lorentz et Minkowski la théorie de la relativité, vient de mener à bien, d'une manière absolument satisfaisante, la généralisation complète de cette théorie.
>
> Il en résulte maintenant la covariance générale des équations décrivant la marche des phénomènes physiques ainsi que celle des équations différentielles qui déterminent le domaine de la gravitation. Les coordonnées de l'espace et du temps perdent ainsi le dernier reste de leur signification intuitive ; elles se réduisent entièrement à des paramètres servant à la détermination du point dans l'espace à quatre dimensions dont la géométrie différentielle représente les phénomènes physiques — Le résultat devient encore plus éclatant lorsqu'on le compare aux idées que Riemann développa en 1854 dans son discours inaugural. [103]

Dans cette conférence, Grossmann insiste sur le caractère abouti de la théorie de la gravitation élaborée par Einstein en 1915-1916 ; de plus il rapproche les idées d'Einstein et celles développées par Riemann dans son *Habilitationsvortrag*. Les recherches menées par Weyl à partir de 1916 se situent dans le prolongement des arguments développés par Grossmann dans cette conférence. D'une part, Weyl s'approprie la théorie de la relativité générale et, en particulier, le formalisme mathématique qu'elle suppose (calcul tensoriel, géométrie différentielle et géométrie riemannienne). D'autre part, dès 1919, Weyl publie une édition commentée du *Habilitationsvortrag* de Riemann, confirmant ainsi le rapprochement établi par Grossmann entre la géométrie de la relativité générale et les idées géométriques de Riemann.

L'environnement intellectuel dans lequel Weyl poursuit sa carrière scientifique à l'ETH de Zürich conditionne son intérêt pour la relativité générale. Inversement, il ne faut pas oublier qu'il conserve d'étroits contacts avec l'université de Göttingen. Il connaît les travaux que Hilbert consacre à la relativité générale à partir de fin 1915. Il entretient une correspondance suivie avec F. Klein entre 1918 et 1923. Or, entre 1916 et 1918, Klein, Hilbert et E. Noether parviennent à clarifier le statut des lois de conservation en relativité générale. Inversement, la théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique que Weyl commence à développer en 1918 connaît une fortune certaine à l'université de Göttingen.

Les développements de Weyl sur la relativité générale : stratégies de publication et pratique des mathématiques

À partir de 1917, la plupart des articles de recherche que publie Weyl ont donc pour objet la relativité générale et l'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. Ces articles sont intimement corrélés aux éditions successives de son ouvrage majeur sur la rela-

103. ≪ Chronique ≫ de la revue *L'enseignement mathématique*, **19**, 1917, chapitre consacré à la société mathématique suisse, p. 94-95.

tivité générale, à savoir *Raum, Zeit, Materie* (première et deuxième éditions, 1918 ; troisième édition, 1919 ; quatrième édition, 1921, traduite en français en 1922 sous le titre *Temps, Espace, Matière* et en anglais la même année sous le titre *Space, Time, Matter* ; cinquième édition, 1923). [104] Il s'agit là de l'une des premières grandes monographies sur la relativité générale. Rédigée par un mathématicien de formation, elle est organisée pour s'adresser à un public de mathématiciens et de physiciens : dans les deux premières parties, Weyl aborde le formalisme mathématique nécessaire à la mathématisation des théories relativistes, dans les deux dernières parties il expose respectivement la relativité restreinte et la relativité générale. En 1928, Weyl adopte une stratégie de publication similaire en mécanique quantique : *Gruppentheorie und Quantenmechanik* est l'une des premières monographies sur la mécanique quantique et Weyl s'adresse une nouvelle fois aussi bien à des mathématiciens qu'à des physiciens : *Raum, Zeit, Materie* et *Gruppentheorie und Quantenmechanik* admettent une architecture d'ensemble assez similaire.

Les deux premières éditions de *Raum, Zeit, Materie* ont pour seuls objets la relativité restreinte et la relativité générale ainsi que les outils mathématiques nécessaires à leur formalisation (rudiments d'algèbre linéaire, calcul tensoriel, géométrie différentielle et riemannienne). Dans la troisième édition, Weyl accorde une large place à son projet de théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique qu'il a exposé dans deux articles dès 1918 : « Gravitation und Elektrizität » et « Reine Infinitesimalgeometrie ». [105] Il caresse l'espoir de rendre raison de la structure élémentaire de la matière à partir de cette théorie. Dans la quatrième édition — qui est l'édition de référence en français et en anglais — il reconnaît que son projet initial est trop ambitieux ; il admet que la théorie des quanta est irréductible à une théorie classique des champs et qu'elle est indispensable pour décrire la structure élémentaire de la matière. Il maintient cependant sa théorie unifiée des champs malgré les objections d'Einstein, Eddington, Hilbert, Reichenbach ou encore Pauli. Toujours dans cette quatrième édition, Weyl commence à résoudre le problème de l'espace qui consiste en la caractérisation commune des variétés pythagoriciennes dans l'infinitésimal, i.e. munies

104. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, erste und zweite Auflage (1918), dritte Auflage (1919), vierte Auflage (1921), fünfte Auflage (1923), Berlin éd. Springer ; *Temps, Espace, Matière*, Leçons sur la théorie de la relativité générale, trad. en français de la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie* par Leroy et Juvet, Paris, Librairie scientifique Albert Blanchard, 1922 ; *Space, Time, Matter*, trad. en anglais de la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie* par Henry L. Brose, Londres, Methuen, 1922.

105. H. Weyl, « Gravitation und Elektrizität », *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1918, p. 465-480, « Reine Infinitesimalgeometrie », *Mathematische Zeitschrift*, **2**, p. 384-411.

d'une métrique définie par une forme quadratique non dégénérée. Le problème de l'espace donnera lieu à une importante série de publications entre 1921 et 1923.

Il s'agira pour nous de déterminer les interactions entre les articles de recherche de Weyl et les éditions successives de *Raum, Zeit, Materie*. En outre, nous expliciterons le lien entre les développements physico-mathématiques de Weyl et les philosophies auxquelles il se réfère alors. En particulier, la conception fichtéenne de la connaissance et de l'espace, que Weyl s'approprie via son amitié avec Fritz Medicus, joue un rôle déterminant dans l'élaboration de sa géométrie purement infinitésimale et de sa théorie unifiée des champs (1918-1921). De même le problème de l'espace dont la résolution motive l'essentiel des recherches de Weyl entre 1921 et 1923 est intimement corrélé à la phénoménologie de Husserl. Pour Weyl, le problème de l'espace relève carrément de la phénoménologie en tant que science des essences.

Cela étant, alors même qu'il participe à la mathématisation de la relativité générale, Weyl engage une série de réflexions sur le continu et les fondements des mathématiques. En 1918 paraît *Das Kontinuum*, ouvrage dans lequel Weyl ne se satisfait pas de la conception du continu mathématique telle qu'elle dérive de la théorie des ensembles. [106] Ce texte montre l'attachement de Weyl à une conception constructiviste du continu qui préfigure son adhésion à l'intuitionnisme de Brouwer. De manière plus radicale, Weyl publie un article très polémique en 1921 dans lequel il s'oppose frontalement au formalisme de Hilbert, prenant fait et cause en faveur de Brouwer. [107] Enfin, jusqu'en 1924, Weyl insiste sur la pertinence des procédures constructives en mathématiques avant d'adopter une « voie moyenne » entre le « formalisme » et l'intuitionnisme. Aussi propose-t-il notamment une preuve constructive du théorème fondamental de l'algèbre dans « Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik ». [108] À la fin de cet article, Weyl reconnaît cependant que les points de vue de Brouwer et de Hilbert sur les mathématiques doivent être conjugués.

Notre objectif ne sera pas de revenir en détail sur les réflexions de Weyl à propos du continu et des fondements des mathématiques. Il s'agira davantage pour nous de montrer si et dans quelle mesure les thèses épistémologiques qu'il soutient alors sur le statut des connaissances mathématiques conditionnent sa pratique des mathématiques. Nous verrons en particulier que, dans *Raum, Zeit, Materie*, Weyl demeure attaché à l'usage de définitions

106. H. Weyl, *Das Kontinuum*, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, Leipzig, éd. von Veit et Comp., 1918.

107. H. Weyl, « Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik », *Mathematische Zeitschrift*, **10**, 1921, p. 39-79.

108. H. Weyl, « Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik », *Mathematische Zeitschrift*, **20**, 1924, p. 142 à 146 pour une preuve constructive du théorème fondamental de l'algèbre.

implicites de concepts dans une veine hilbertienne. Il existe donc manifestement un écart entre les prises de position de Weyl en faveur de l'intuitionnisme et sa pratique qui demeure en partie conforme aux prescriptions de Hilbert, en particulier lorsqu'il s'agit de présenter les concepts mathématiques nécessaires pour mathématiser la relativité générale.

Une référence centrale pour Weyl : la *Leçon d'habilitation* de Riemann (1854)

Ainsi, entre 1917 et 1923, Weyl publie une série de travaux sur la relativité générale et sur les fondements des mathématiques. Exactement au même moment, il investit en détail et sous différents angles la *Leçon d'habilitation* de Riemann. L'intérêt que Weyl accorde à ce texte est intimement corrélé à ses recherches en relativité générale et en théorie unifiée des champs.

Nous avons vu dans la partie précédente que, dans la première édition de son ouvrage sur les surfaces de Riemann (1913), Weyl fait apparaître un lien d'ordre conceptuel entre la *Dissertation* (1851) et le *Habilitationsvortrag* (1854) de Riemann qui sera publiée à titre posthume dans les *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* en 1867 : les *surfaces de Riemann* sont des *variétés* analytiques complexes de dimension 1. Weyl en déduit la profonde unité entre ces deux œuvres. Nous avons montré en quoi cette lecture dépend d'une illusion rétrospective. Néanmoins, la *Dissertation* comme la *Leçon d'habilitation* incarnent sous des modalités différentes un même projet de géométrisation de l'analyse. Si unité il y a entre ces deux travaux de Riemann, elle ne se situe donc pas là où Weyl avait cru l'identifier : elle ne se joue pas dans le rapport entre des concepts — celui de variété et celui de surface de Riemann — mais dans le rapport entre des domaines mathématiques, en l'occurrence la géométrie et l'analyse.

Au début de *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913), la référence au *Habilitationsvortrag* de Riemann demeure allusive. L'objet même de l'ouvrage de Weyl l'incite à étudier presque exclusivement la *Dissertation* (1851) et la *Théorie des fonctions abéliennes* (1857). À partir de 1917, le *Habilitationsvortrag* de Riemann devient une référence centrale que Weyl commente dans des textes dont le statut est extrêmement différent. Il situe historiquement les apports de Riemann en géométrie différentielle au cours des §§ 11 et 12 de *Raum, Zeit, Materie*. Il montre que la géométrie « riemannienne » n'est pas une géométrie *purement* infinitésimale dans deux articles fondateurs, à savoir « Gravitation und Elektrizität » et « Reine Infinitesimalgeometrie » (1918). Weyl propose alors une géométrie plus générale que

la géométrie riemannienne. À partir de ce cadre mathématique, il développe une théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique dans le prolongement de la relativité générale.

En 1919, 1921 et 1923, Weyl est en charge d'une édition commentée de la *Leçon d'habilitation* de Riemann aux éditions Springer.[109] Il s'agit alors d'élucider en langage moderne les passages les plus difficiles du *Habilitationsvortrag* et de détailler la réception de ce texte jusqu'à l'avènement de la relativité générale : problème de Helmholtz-Lie — qui consiste en « la caractérisation commune des géométries euclidiennes et non euclidiennes par des propriétés de « libre mobilité » de leurs groupes de mouvements »[110] — ; formalisation rigoureuse du calcul tensoriel par Ricci et Levi-Civita en 1900 ; appropriation par Einstein — via Grossmann — des hypothèses de Riemann sur l'espace physique dans le contexte de la relativité générale à partir de 1912-1913.

Dans son commentaire, Weyl se demande pourquoi Riemann privilégie les variétés différentielles dont la métrique est déterminée par une forme quadratique définie positive. Cette interrogation constitue le point de départ du *problème de l'espace* (das Raumproblem) que Weyl formulera plus clairement et de manière plus générale en 1921 avant de le résoudre complètement en 1922-1923 : il s'agit d'identifier le caractère commun aux variétés *pythagoriciennes dans l'infinitésimal*, c'est-à-dire dont la métrique est définie par une forme quadratique non dégénérée — et non pas seulement définie positive comme c'est le cas en géométrie riemannienne. Pour Weyl, le problème de l'espace est à la fois un problème mathématique *et* un problème philosophique qu'il commence à construire en commentant la *Leçon d'habilitation* de Riemann, avant de le résoudre en s'appuyant sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie linéaires en 1921-1923. Enfin, Weyl synthétise ses réflexions sur ce texte majeur de Riemann dans les §§ 15 et 18 de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927).

Bien que Weyl n'étudie pas le *Habilitationsvortrag* de Riemann en *historien* il en propose aussi une certaine *lecture historienne*[111] : (a) il établit un « lien » de filiation avec le traité des surfaces courbes de Gauss (1828), (b) il décrit la réception de cette œuvre au cours du dernier tiers du XIX^{e} siècle et durant les années 10 avec l'avènement de la relativité générale, (c) à l'instar de Klein, il construit un parallèle avec le développement d'une *physique des actions de contact* incarné par la figure de Faraday. Trois questions méritent ici d'être posées. (i) Quelles

109. B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854), neu herausgegeben und eingeleitet von H. Weyl, erste Auflage 1919, zweite Auflage 1921, dritte Auflage 1923, Berlin éd. Springer.
110. J. Tits, *Notice sur les Travaux scientifiques*, I.2. Résumé des Travaux antérieurs à 1972, p. 9.
111. Nous empruntons cette expression à C. Goldstein. Voir en particulier C. Goldstein, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis, Presses universitaires de Vincennes, 1995.

sont les caractéristiques de cette lecture ? Nous verrons que Weyl raisonne essentiellement à partir de rapports de filiations. (ii) Est-elle particulière à Weyl ou bien ne reprend-elle pas une certaine vision de Riemann et de son œuvre, largement défendue par les plus éminents protagonistes à Göttingen ? Nous montrerons que Weyl reprend à Klein certaines hypothèses historiques à commencer par le parallèle entre Riemann et Faraday. (iii) Pour quelle raison Weyl propose-t-il une telle mise en perspective historique au regard de ses propres travaux de recherche en physique mathématique ? Nous indiquerons en quoi il entend se situer dans une double tradition, celle de la géométrie infinitésimale et de la physique des actions de contact, lorsqu'il développe sa théorie unifiée des champs.

Mais Weyl se réfère également au *Habilitationsvortrag* de Riemann en mathématicien et en physicien mathématicien, soucieux de construire des problèmes inédits et de parvenir à des connaissances nouvelles à partir du commentaire de ce texte. Entre 1918 et 1923, il propose donc une *lecture mathématicienne* du *Habilitationsvortrag* qui se cristallise autour de deux projets : (a) la géométrie purement infinitésimale et la théorie unifiée des champs, (b) le problème de l'espace. Dans le premier cas, il s'agit pour Weyl de supprimer un *résidu* de géométrie à distance incarné par la « possibilité » de comparer les longueurs de deux vecteurs attachés à des points distincts dans variété riemannienne. La géométrie *purement* infinitésimale de Weyl sur laquelle nous reviendrons dans cette partie consiste à supprimer cette possibilité. Dans le second cas, il est question de justifier *mathématiquement* un choix que Riemann n'explicite pas. Pourquoi donc se restreint-il à des variétés dont la métrique est déterminée par une forme quadratique définie positive ? Cela posé, il s'agira pour nous de dégager les rapports entre les lectures *historienne* et *mathématicienne* du *Habilitationsvortrag* de Riemann proposée par Weyl. Nous verrons que Weyl ne reprend pas le parallèle entre la géométrie de Riemann et la physique des actions de contact de Faraday gratuitement. En effet, la géométrie purement infinitésimale de Weyl et sa théorie unifiée des champs constituent à ses propres yeux un aboutissement dans le développement d'une géométrie *et* d'une physique des actions de contact.

Enfin, Weyl montre en quoi les réflexions philosophiques de Gauss et de Riemann sur la géométrie et l'espace physique permettent de dépasser la conception kantienne de l'espace. Dans « Reine Infinitesimalgeometrie » comme dans « Das Raumproblem », Weyl s'approprie la distinction kantienne entre la *forme* et la *matière* des phénomènes. Il examine les propriétés de l'espace physique à la lumière de cette distinction dont il modifie substantiellement le sens et la portée. L'ensemble de ces réflexions sur la nature de l'espace seront

synthétisées dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927).[112] Ainsi, entre 1916 et 1927, Weyl propose des lectures *historienne*, *mathématicienne* et *philosophique* du *Habilitationsvortrag* de Riemann. Pour faciliter l'analyse, nous distinguerons ces différents niveaux de lecture, même s'ils se conditionnent mutuellement. Nous devons préciser ce point. Au moment où il participe à la mathématisation de la relativité générale — essentiellement entre 1917 et 1923 — Weyl ne sépare pas *écriture scientifique* et *écriture philosophique*. Par exemple, au début de « Reine Infinitesimalgeometrie » — qui est un article de mathématiques et de physique mathématique — Weyl critique la conception kantienne de l'espace via Riemann et le développement de la relativité générale. Il élabore ensuite un projet mathématique de géométrie purement infinitésimale — qui est plus générale que la géométrie riemannienne — avant d'exposer les grandes lignes d'une théorie unifiée de la gravitation et de l'électromagnétisme. Lecture philosophique et lecture mathématicienne du *Habilitationsvortrag* sont donc mises en parallèle dans ce texte scientifique.

Comme nous l'avons souligné, Weyl propose une édition critique et commentée de cette leçon chez Springer en 1919, 1921 et 1923. Ces trois publications sont contemporaines (i) des réflexions de Weyl sur la géométrie purement infinitésimale, (ii) de son projet de théorie unifiée des champs, (iii) de sa résolution du problème de l'espace. À l'inverse, il nous semble pertinent d'étudier les apports de Weyl en géometrie différentielle et en physique mathématique jusqu'au milieu des années 20 à la lumière de ses lectures, interprétations et réécritures du *Habilitationsvotrag* de Riemann. Ceci nous servira de clef pour comprendre la théorie philosophique et mathématique de l'espace que Weyl commence à élaborer lorsqu'il introduit sa géométrie purement infinitésimale, qu'il affine avec la résolution du *Raumproblem* et qu'il achève avec la publication de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*.

Problématique et plan de la deuxième partie

Nous nous mesurerons à quatre difficultés dans cette deuxième partie : (a) quels liens Weyl fait-il apparaître entre le traité de Gauss sur les surfaces courbes et la *Leçon d'habilitation* de Riemann ? (b) Comment prolonge-t-il les tentatives de Gauss et Riemann pour dépasser la conception kantienne de l'espace ? (c) Quel statut épistémologique accorder à la géométrie purement infinitésimale de Weyl et à sa théorie unifiée des champs ? (d) Quels sont les changements scientifiques et philosophiques qui accompagnent la réorientation de ses recherches en direction du « problème de l'espace » entre 1921 et 1923 ?

112. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, München, éd. Oldenbourg, 1927.

Nous résoudrons ces quatre problèmes à la lumière des lectures historienne, mathématicienne et philosophique du *Habilitationsvortrag* de Riemann que l'on doit à Weyl. Ces lectures sont très enchevêtrées. Comme nous l'avons souligné, le début de « Reine Infinitesimalgeometrie » que l'on peut classer parmi les articles proprement scientifiques de Weyl s'ouvre sur une lecture philosophique encore embryonnaire de la leçon de Riemann. Inversement, dans le commentaire critique qui accompagne la réédition, par ses propres soins, du *Habilitationsvortrag*, Weyl questionne le texte de Riemann scientifiquement puisqu'il commence à construire le problème de l'espace : lectures historienne et mathématicienne sont alors intriquées. Ceci est en partie lié aux stratégies d'écriture adoptées par Weyl au cours de cette période : il entend brouiller les frontières entre écriture scientifique et écriture historico-philosophique. Ainsi, certains fragments de *Raum, Zeit, Materie*, « Reine Infinitesimalgeometrie » ou encore « Das Raumproblem » dont le contenu est proprement épistémologique sont reproduits quasiment à l'identique dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*.

Dans un premier temps, nous analyserons les rapports que Weyl établit sur un plan mathématique et historique entre le *Traité des surfaces courbes* de Gauss et le *Habilitationsvortrag* de Riemann. En particulier, Weyl considère les réflexions générales de Riemann sur les variétés dans le strict prolongement de la théorie gaussienne des surfaces courbes. Nous aurons à évaluer la pertinence de cette lecture en nous référant à la lettre même de la leçon de Riemann. Il s'agira également pour nous de savoir si le parallèle entre Riemann et Faraday que Weyl reprend à Klein est pertinent.

Dans un deuxième temps, nous reviendrons sur la théorie kantienne de l'espace. Discutée par Gauss et Riemann, elle focalise l'intérêt de Weyl au moment où il participe à la mathématisa-tion de la relativité générale, comme en témoignent ses articles consacrés à la géométrie purement infinitésimale et au problème de l'espace. Nous analyserons donc précisément les objections que Weyl adresse à Kant concernant la nature, le statut et les propriétés de l'espace — qu'il s'agisse de l'espace intuitif, de l'espace mathématique ou de l'espace physique. Weyl résume l'ensemble de ses réflexions dans les §§ 14, 15 et 18 de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*.

Dans un troisième temps, nous montrerons comment Weyl aboutit à une géométrie plus générale que la géométrie riemannienne. Il estime en effet que Riemann n'est pas parvenu à une géométrie *purement* infinitésimale à l'issue de son *Habilitationsvortrag*. À partir d'une telle généralisation, Weyl construit une théorie unifiée des champs en suivant une démarche purement spéculative. Nous indiquerons l'étroite analogie entre la géométrie purement infinitésimale de Weyl et la théorie fichtéenne de l'espace et de la connaissance à laquelle Weyl

s'intéresse tout particulièrement entre 1916 et 1920. Nous reviendrons également sur les critiques scientifiques et épistémologiques formulées par Einstein, Reichenbach et Hilbert contre la théorie unifiée des champs de Weyl.

Dans un dernier temps, nous décrirons comment le problème de l'espace se construit dans l'œuvre de Weyl : une première formulation de ce problème apparaît dans le commentaire du *Habilitationsvortrag* de Riemann par Weyl (1919) ; il parvient à une formulation définitive de ce problème en 1921 et il le résout complètement en 1922-1923. Cartan propose une solution concurrente à celle de Weyl en 1923. Nous verrons que Weyl analyse philosophiquement ce problème en s'appuyant sur la phénoménologie d'Husserl.

Ainsi, au moment où il participe à la mathématisation de la relativité générale, Weyl s'appuie sur deux philosophies de la conscience : l'idéalisme fichtéen et la phénoménologie de Husserl. De manière quasiment contemporaine, Schlick publie la première édition de l'*Allgemeine Erkenntnislehre*, alors que Reichenbach se consacre au statut des connaissances en physique et en mathématiques en se référant à la relativité restreinte et à la relativité générale, comme en témoigne son ouvrage *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*. Schlick et Reichenbach adoptent une posture positiviste en épistémologie dès la fin des années 10 et au début des années 20. Ils légitiment ce parti-pris en se fondant sur les théories relativistes d'Einstein. Au contraire, Weyl s'oppose frontalement au positivisme, alors même qu'il se réfère exactement aux mêmes théories scientifiques que Reichenbach et Schlick.

Chapitre 1

De la théorie des surfaces aux variétés : Gauss et Riemann

Au cours des §§ 11 et 12 de *Raum, Zeit, Materie*, Weyl met en avant un *rapport de filiation* entre Gauss et Riemann ; plus précisément, il considère la *Leçon d'habilitation* de Riemann comme une généralisation du traité de Gauss consacré à l'étude intrinsèque des surfaces courbes (1828) [1] :

> Les idées de Riemann — qui pour la suite de nos développements sont d'une importance capitale — se rattachent aux principes fondamentaux de la géométrie infinitésimale, en particulier à ceux de la théorie des surfaces, tels qu'ils furent posés par Gauss dans ses *Disquisitiones circa superficies curvas.* [2]

Si Weyl insiste sur l'intérêt scientifique de la leçon de Riemann, il entend d'abord reconstruire historiquement le lien qui unit les travaux de Gauss et de Riemann en géométrie infinitésimale. Une telle reconstruction repose sur deux données parfaitement attestées que Weyl connaissait : au cours de la deuxième partie du *Habilitationsvortrag*, Riemann emprunte de nombreux concepts et résultats au traité de Gauss sur les surfaces courbes — nous pensons en particulier à la notion de mesure de courbure qui constitue un critère nécessaire et suffisant pour *classer* les surfaces courbes. Réciproquement, Gauss a choisi le problème que Riemann est amené à résoudre dans sa *Leçon d'habilitation*, à savoir la question des fondements de la géométrie à partir d'une théorie générale des variétés.

La lecture historique proposée par Weyl est linéaire et continue ; elle met en exergue une filiation simple entre Gauss et Riemann. Nous voudrions la complexifier quelque peu, avant

1. C. F. Gauss, *Recherches générales sur les Surfaces courbes*, Trad. du latin par M. A., Paris, Bachelier imprimeur libraire, 1852

2. H. Weyl, *Temps, Espace, Matière*, *op. cit.*, p. 72.

d'expliquer pourquoi Weyl adopte une telle mise en perspective. Nous devons tout d'abord rappeler que Riemann se réfère déjà au traité des surfaces courbes dans sa *Dissertation* (1851) : de même que Gauss est parvenu à une classification des surfaces courbes, de même il s'agit d'aboutir à une classification des surfaces de Riemann. D'après ce rappel, nous pouvons observer qu'un même texte — ici le traité de Gauss — donne lieu à des modes d'appropriation différents chez un même mathématicien — ici Riemann — en fonction des théories qu'il entend développer.

Ensuite, les sources explicitement citées par Riemann au début de sa *Leçon d'habilitation* ne se limitent pas à Gauss : il mentionne Pfaff, Abel ou encore Jacobi. Corrélativement, il ne s'en tient pas à la théorie des surfaces courbes. Il évoque l'étude des « fonctions analytiques à plusieurs variables » et la théorie générale des équations différentielles. Riemann n'envisage donc pas seulement de généraliser les travaux de Gauss, mais aussi de décrire les fonctions analytiques de plusieurs variables en fonction d'un substrat géométrique. On retrouve bien l'idée d'une géométrisation de l'analyse qui est commune à la *Dissertation* et au *Habilitationsvortrag*. Les motivations de Riemann sont donc plus complexes que ne laisse entendre le rapport de filiation Gauss-Riemann.

Enfin la question est de savoir s'il y a une parfaite continuité et une homogénéité entre le traité de Gauss et la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Deux éléments nous permettent de douter de cela. En premier lieu, nous allons montrer que l'approche de Gauss demeure en partie *calculatoire* en 1828, en particulier lorsqu'il s'agit de démontrer le *theorema egregium* selon lequel la mesure de courbure en un point d'une surface constitue une propriété intrinsèque. En revanche, Riemann privilégie une approche *conceptuelle* dans son *Habilitationsvortrag*. Ceci provient non seulement de la nature de l'exercice qui lui est demandé, mais aussi de l'architecture d'ensemble de sa leçon. Celle-ci est construite sur la base d'une spécialisation progressive du concept général de variété : (a) distinction variété discrète / variété « continue » — i.e. différentielle —; (b) détermination métrique sur une variété « continue », Riemann se restreint aux variétés « riemanniennes » dont la métrique est déterminée par une forme quadratique définie positive; (c) variétés riemanniennes à courbure constante; (d) variétés à courbure nulle (géométrie euclidienne). En second lieu, nous devons observer qu'une surface courbe est plongée dans un espace euclidien. En revanche, Riemann envisage les variétés de dimension n en elles-mêmes, sans présupposer qu'elles seraient contenues dans un espace euclidien de dimension plus grande. Riemann fait donc complètement abstraction de tout *espace ambiant* lorsqu'il introduit le concept de variété. Son point de vue est plus *général*, mais aussi plus *abstrait* que celui de Gauss.

Sans doute Weyl croit-il en une filiation simple entre Gauss et Riemann. D'autre part, son exposé ne fait que renforcer une impression de continuité et d'homogénéité entre le traité de Gauss et le *Habilitationsvortrag* de Riemann. En effet, *Raum, Zeit, Materie* constitue l'une des premières grandes monographies en relativité générale. Dans cet ouvrage, Weyl vise aussi bien des physiciens que des mathématiciens. Il s'attarde sur le traité de Gauss parce que la théorie des surfaces courbes permet aisément d'appréhender les résultats fondamentaux de la géométrie différentielle en dimension 2. La mise en perspective historique de Weyl a donc également une finalité pédagogique : la théorie des surfaces courbes constitue une voie d'accès à la théorie des variétés. C'est donc également pour des raisons pédagogiques que Weyl présente le *Habilitationsvortrag* comme une simple généralisation du traité de Gauss sur les surfaces courbes. En réalité, l'approche de Riemann est plus conceptuelle et plus abstraite que celle de Gauss.

Cela posé, Riemann unifie dans son *Habilitationsvortrag* divers travaux et réflexions de Gauss en géométrie ; en particulier il dégage le lien entre la théorie des surfaces courbes et la géométrie hyperbolique — dont Gauss avait esquissé les fondements dans sa correspondance entre 1816 et 1832. Weyl insiste à juste titre sur ce point. En effet, au cours du § 11 de *Raum, Zeit, Materie*, il revient sur l'invention de la géométrie hyperbolique par Gauss. Weyl indique ensuite que la géométrie hyperbolique est un cas particulier à l'intérieur de la théorie riemannienne des variétés puisqu'elle s'incarne dans les variétés à courbure constante négative. Il ajoute la précision suivante : Riemann ne propose pas encore d'exemples de surfaces qui constitueraient un modèle partiel de cette géométrie ; il reviendra à Beltrami d'introduire la tractrice et la pseudosphère. Comme le précise à juste titre Weyl au cours du § 11 de *Raum, Zeit, Materie*, il n'existe cependant pas de surface courbe sans singularités dans $\mathbb{R}^3$ qui puisse représenter complètement le « plan lobatchevskien », c'est-à-dire la géométrie hyperbolique en dimension 2. [3]

Weyl juge la troisième partie de la leçon de Riemann proprement inédite : Riemann y formule des hypothèses sur la nature de l'espace physique qui vont bien au-delà des réflexions de Gauss sur les applications de la géométrie à la physique. Weyl insiste sur ces hypothèses particulièrement novatrices de Riemann au cours des pages 83 et 84 de *Raum, Zeit, Materie*

3. Voir en particulier H. Weyl, *Temps, Espace, Matière*, *op. cit.*, p. 80 : « les deux moitiés de la surface séparées par l'arête qu'engendre le point de rebroussement, ne sont chacune qu'une partie du plan non euclidien. Hilbert a démontré rigoureusement qu'il est impossible de trouver dans l'espace euclidien une surface [dénuée] de singularités, qui réalise un modèle pour tout le plan lobatchevskien ». La preuve de ce résultat se trouve dans la cinquième annexe aux *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert.

(trad. en français) : il y aurait là une rupture dans l'ordre des conception de l'espace physique qui sera rendue pleinement effective avec l'avènement de la relativité générale.

Ainsi, la lecture historienne du *Habilitationsvortrag* proposée par Weyl admet deux aspects qui lui impriment une réelle tension. D'un côté elle est proprement continuiste en géométrie (différentielle) et elle consiste à tracer un fil conducteur qui prend pour point de départ l'invention des géométries non euclidiennes et le traité des surfaces courbes de Gauss pour *aboutir* à la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Rétrospectivement, Weyl relativise d'ailleurs fortement l'impression de discontinuité que peut susciter l'introduction des géométries non euclidiennes durant le premier tiers du XIX^{e} siècle en prenant appui sur la leçon de Riemann :

> La question de la vérité du 5^{e} postulat à laquelle s'est rattaché tout le développement historique que nous avons rapidement esquissé, ne nous apparaît plus maintenant que comme une question en quelque sorte fortuite. [4]

De l'autre, cette lecture est informée par le développement de la relativité générale et par l'effet de rupture qui se cristallise dans la conception inédite de l'espace physique attachée à cette théorie. Weyl décèle une rupture du même ordre dans la dernière partie de la leçon de Riemann qui est presque vue comme une réfutation avant l'heure de la physique newtonienne. Ainsi, Weyl insère ce texte dans une histoire linéaire et continuiste de la géométrie infinitésimale avant d'insister sur la profonde rupture qu'opère Riemann par rapport aux conceptions habituelles de l'espace physique dans la troisième partie de sa *leçon*.

Nous souhaiterions justement montrer que le lien entre le traité des surfaces courbes de Gauss et le *Habilitationsvortrag* de Riemann n'est pas aussi simple, linéaire et continu que ne le laisse entendre Weyl : Gauss n'est pas la seule source utilisée par Riemann, de plus il existe des éléments de discontinuité entre les méthodes de Gauss et celles de Riemann, incarnées par le fait que l'approche de Gauss demeure calculatoire, celle de Riemann étant franchement plus conceptuelle. Inversement, Weyl surdétermine les éléments de rupture qui caractériseraient la troisième partie du *Habilitationsvortrag* consacrée à l'espace physique. Plus précisément, Weyl l'interprète en fonction du développement de la relativité générale, i.e. d'une théorie de la gravitation qui est *incompatible par principe* avec la théorie newtonienne de la gravitation. On peut donc raisonnablement se demander si Weyl n'est pas victime d'une illusion rétrospective lorsqu'il interprète la fin de la *Leçon d'habilitation* de Riemann.

4. *ibid.*, p. 79.

1.1 La géométrie intrinsèque des surfaces courbes

Suivons donc plus en détail la mise en perspective historique du *Habilitationsvortrag* proposée par Weyl et attardons-nous sur le traité que Gauss consacre aux surfaces courbes. Nous ne reviendrons pas sur les étapes successives qui ont présidé à l'élaboration de cet écrit. [5] Celui-ci se situe à l'intersection entre les géométries théorique et pratique comme le rappelle Weyl avec force :

> Ce furent les travaux géodésiques aux environs d'Hannovre qui furent le point de départ des recherches de Gauss. On peut se rendre compte que la terre n'est pas un plan par la mesure d'une étendue de pays suffisamment grande ; si l'on imagine que les triangles qui composent le réseau de triangulation sont assez petits pour qu'on puisse les assimiler à des portions du plan tangent en un de leurs points, il n'en reste pas moins vrai que l'étalement de ce réseau sur un plan, différera de ce qu'il était sur la sphère ; en d'autres termes, les triangles étalés sur le plan ne vérifieront pas les mêmes relations métriques que lorsqu'ils étaient appliqués sur la sphère. [6]

Bien que les mesures empiriques effectuées par Gauss dans le royaume de Hannovre ne soient pas au *fondement* de sa théorie des surfaces, elles constituent l'*occasion* de la développer. La géométrie infinitésimale de Gauss tire donc sa source de données empiriques et elle doit avoir des conséquences pratiques. Ce point n'a pas échappé à Weyl qui ne réduit donc pas le traité de Gauss à un ensemble de problèmes et de résultats théoriques. Cette lecture est commandée par le contenu de l'ouvrage de Gauss. En effet, au cours du § 28 de son traité, ce dernier mentionne certaines mesures empiriques qu'il a obtenues en 1826. Plus profondément, Weyl trouve dans cet écrit de Gauss une tension entre contenu théorique et applications empiriques qui fait écho à la leçon de Riemann : ce dernier ne se contente pas de classer les variétés, il formule des hypothèses sur la nature et les propriétés de l'espace physique.

Le résumé du traité de Gauss proposé par Weyl constitue une série de ≪ préliminaires ≫ qui doivent nous informer sur les motivations, le contenu et les implications physico-géométriques du *Habilitationsvotrag*. Pour le dire autrement, le récit historique continuiste adopté par Weyl est conditionné par des intentions pédagogiques : la théorie des surfaces de Gauss constitue une étape nécessaire pour comprendre le cadre plus général qu'adopte Riemann en 1854. Nous devons également être attentifs à ce que retient Weyl — et donc à ce qu'il laisse de côté — lorsqu'il résume le traité de Gauss. Deux faits attirent notre attention : (i) Weyl met en exergue la définition ≪ intuitive ≫ de la mesure de courbure proposée par Gauss dans le § 6 de son traité, il fait donc abstraction des formulations exclusivement analytiques de la mesure de

5. Pour plus de détails, voir en particulier L. Boi, *Le Problème mathématique de l'Espace*, une quête de l'intelligible, Berlin, Heidelberg, New York, éd. Springer 1995, p. 82 et suiv.

6. H. Weyl, *Temps, Espace, Matière*, *op. cit.*, p. 76.

courbure auxquelles Gauss parvient au cours de son raisonnement [7], (ii) il écarte les calculs complexes qui président à la démonstration du *theorema egregium*. D'après ce théorème, (a) la mesure de courbure *c'est-à-dire la courbure de Gauss* en un point d'une surface courbe est une propriété intrinsèque de cette surface, (b) elle constitue un invariant par isométrie locale. Weyl évite de se perdre dans les méandres calculatoires nécessaires pour établir ce résultat. Ce choix est sans doute conditionné par des exigences de clarté et de simplicité d'autant plus nécessaires que Weyl s'adresse à des lecteurs physiciens et non pas seulement mathématiciens dans *Raum, Zeit, Materie*.

Mais en faisant abstraction des aspects proprement calculatoires du traité de Gauss, Weyl rend ce traité homogène à la leçon de Riemann. Nous verrons dans le paragraphe suivant que, dans son *Habilitationsvortrag*, Riemann adopte une approche bien plus conceptuelle que celle de Gauss et qu'il développe un projet de géométrisation de l'analyse qui lui est spécifique. Inversement, il ne faudrait pas croire que le traité de Gauss se réduit à une série de calculs. La lecture de Weyl est certes très sélective, mais elle montre au moins que la conception est tout aussi importante que le calcul dans cette théorie des surfaces courbes. L'approche de Gauss est donc nettement plus calculatoire que celle de Riemann, mais elle n'est pas *purement* calculatoire, ce qui est conforme avec les arguments défendus par Gauss lui-même au début de cet écrit. En effet, l'obstacle majeur qui, selon Gauss, empêche de parvenir à une théorie adéquate des surfaces courbes correspond moins à des difficultés de calcul qu'à un défaut dans l'ordre de compréhension des concepts mathématiques. C'est pourquoi Gauss invalide préalablement une définition fautive du concept de surface qui ne permet pas de classer adéquatement les surfaces courbes. On retrouve une telle définition dans divers traités de géométrie à la fin du XVIII^{e} siècle et au début du XIX^{e} siècle. [8] En première analyse, une

7. C.F. Gauss, *Recherches générales sur les surfaces courbes*, (1828), *op. cit.*, § 8, p. 20 : Gauss montre que la mesure de courbure, i.e. la courbure de Gauss en un point d'une surface courbe est le produit des deux courbures principales, § 10, p. 24 : Gauss introduit une nouvelle formulation analytique de la mesure de courbure comme quotient du discriminant de la seconde forme fondamentale par le discriminant de la première forme fondamentale.

8. Nous pouvons nous référer à ce propos aux ouvrages suivants que Gauss a manifestement consultés, conformément à ce qu'il indique dans sa correspondance sur les fondements de la géométrie (Tome VIII de ses Œuvres) : S. Chauvelot, *Introduction à la géométrie ou développement de l'idée d'étendue*, Brunswick, 1795 p. 39 : ≪ L'Étendue externe d'un corps, ou celle qui est fermée par cette continuité d'extrémités qui, figurant le corps ou le terminant de toute part, frappe immédiatement nos sens, et sert comme enveloppe au solide, est ce qui constitue la surface : d'où l'on voit que la surface n'est positivement en elle-même qu'une extrémité de solide ≫, J. K. F. Hauff, *Euklids Elemente*, Marburg, 1807, p. 218 : ≪ die Gränze des Körpers ist eine Fläche ≫.

≪ surface ≫ devrait être considérée comme ≪ la limite d'un solide ≫. Les propriétés qui la caractérisent dépendraient de la nature même de ce solide. Tant que l'on adhère à cette conception, qui est communément admise dans les traités de géométrie élémentaire au début du XIX^{e} siècle, des surfaces coniques ou cylindriques semblent différer essentiellement d'un plan. Gauss rejette cette définition pour deux raisons. (1) On doit considérer une surface *abstraction faite* du solide dont elle est supposée être la limite ou la frontière :

> Quand on considère une surface non comme la limite d'un solide mais comme un solide flexible quoique inextensible dont une des dimensions est regardée comme évanouissante, les propriétés de la surface dépendent, en partie de la forme à laquelle on la conçoit réduite, en partie sont absolues et restent invariables suivant quelque forme qu'on la fléchisse. [9]

(2) Les déterminations métriques dont elle est susceptible doivent être établies indépendamment de l'espace ambiant dans lequel elle est plongée et elles demeurent invariantes lorsque l'on fait subir une flexion à cette surface. On parle alors de la *géométrie intrinsèque* d'une surface : pour reprendre une terminologie due à Granger, Gauss traite les surfaces courbes non plus comme des *objets spatiaux*, mais comme des *formes de spatialité* autonomes. [10] Ce changement fondamental de point de vue dans l'étude des surfaces n'a d'ailleurs pas échappé à Weyl :

> La géométrie sur la surface ne dépend en rien de la situation particulière que la surface occupe dans l'espace ; elle consiste en relations qui peuvent être obtenues par des *mesures effectuées sur la surface elle-même.* [11]

Gauss insiste donc moins ici sur les difficultés de *calcul* qui présideront à la démonstration du *theorema egregium* que sur des problèmes de *conception* des surfaces courbes. La classification de tels objets ne peut être envisagée que si l'on met définitivement de côté le préjugé fautif selon lequel les surfaces seraient les ≪ limites ≫ de solides. Comme on le verra, Gauss fonde cette classification sur la détermination de leur mesure de courbure en chaque point. D'où le résultat suivant :

> Dans ce genre de considérations, une surface plane et une surface développable sur un plan, par exemple une surface cylindrique, conique, etc., sont regardées comme essentiellement iden-

9. C. F. Gauss, *op. cit.* p. 28, la distinction entre *flexion* et *extension* est essentielle tant dans le traité de Gauss sur les surfaces courbes et la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Une simple flexion ne modifie pas les déterminations métriques définies sur une surface courbe, contrairement à une extension qui peut être interprétée comme une déformation continue.

10. G.-G. Granger, *La Pensée de l'Espace*, Paris, éd. Odile Jacob, 1999, p. 201 : on ≪ considère la surface elle-même comme une forme autonome de spatialité, sans faire intervenir un espace ambiant, et sur laquelle sont par exemple tracées des courbes ≫.

11. H. Weyl, *op. cit.*, p. 76.

tiques. [12]

Nous proposons de résoudre trois problèmes qui permettront d'éclairer le traité de Gauss : (1) À quelles conditions une surface courbe doit-elle satisfaire pour pouvoir être étudiée ? Par exemple, dans le cas d'une surface conique, il faut mettre de côté un point singulier qui correspond à son sommet. (2) Comment peut-on *exprimer analytiquement* la *géométrie intrinsèque* d'une surface courbe, c'est-à-dire les mesures respectives d'une longueur d'arc, d'un angle formé par l'intersection de deux courbes et d'une portion quarrable sur cette même surface ? (3) Comment *expliciter intuitivement* et *déterminer analytiquement* la mesure de courbure en un point d'une surface ? La solution aux deux derniers problèmes est liée à la mise au jour de la première forme quadratique différentielle fondamentale que nous redéfinirons dans ce qui suit. D'ailleurs une propriété géométrique est *intrinsèque* à une surface lorsqu'elle ne dépend que des coefficients de cette première forme et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. En l'occurrence, le *theorema egregium* prouve que la mesure de courbure (courbure de Gauss) satisfait à cette condition.

1.1.1 Les conditions requises pour étudier les surfaces courbes en elles-mêmes

La théorie de Gauss est « générale », en ce qu'elle traite des surfaces courbes *quelconques* contenues dans $\mathbb{R}^3$. Il ne se restreint pas à certaines surfaces remarquables — plane, sphérique, cylindrique ou conique. Son raisonnement n'a cependant rien d'*arbitraire* : il impose aux surfaces qu'il étudie d'être *régulières*, ce qui signifie qu'il doit pouvoir exister un *unique* plan tangent en chacun de leurs points. Voici comment Gauss formule cette condition :

> Une surface courbe est dite avoir une courbure continue en un point A situé sur elle, si les directions de toutes les droites menées du point A à tous les points de la surface infiniment peu distants de A, ne s'écartent qu'infiniment peu d'un seul et même plan passant par A : ce plan est dit tangent à la surface au point A. Si l'on ne peut satisfaire à cette condition en quelque point, la continuité de la courbure est interrompue en cet endroit, comme il arrive, par exemple, au sommet d'un cône. [13]

Ainsi, le traité de Gauss se restreint aux surfaces *régulières*, i.e. aux variétés métriques bidimensionnelles *contenues* dans $\mathbb{R}^3$; autrement dit, il n'envisage pas directement des variétés bidimensionnelles en elles-mêmes, c'est-à-dire indépendamment de tout espace environnant. Cela posé, Gauss s'intéresse à la *géométrie* des surfaces courbes, c'est-à-dire à leur struc-

12. C. F. Gauss, *op. cit.*, p. 29.
13. *ibid.*, p. 7-8.

ture métrique intrinsèque ; il s'abstrait donc progressivement de la donnée initiale de l'espace euclidien dans lequel elles sont plongées. Pour parvenir à cette fin, il introduit ce que nous appelons des *coordonnées curvilignes* sur une surface régulière. À un premier point de vue, que l'on pourrait qualifier d'usuel, un point P sur une surface régulière S est déterminé par trois coordonnées x, y, z dans l'espace environnant. Gauss leur substitue un jeu de deux coordonnées tracées sur la surface elle-même qui viennent définir maintenant le point P. Il effectue alors un véritable *changement de perspective* : les surfaces courbes deviennent, selon l'expression de Granger, des *formes de spatialité* dont la structure métrique est étudiée pour elle-même. Gauss détermine l'existence de ≪ courbes coordonnées ≫ au cours de l'article V de son mémoire. [14] Weyl n'a pas manqué de souligner le caractère fondamental des *coordonnées curvilignes* pour décrire la géométrie intrinsèque d'une surface courbe :

> [les] points [d'une surface] se distinguent par les valeurs de deux paramètres u_1 et u_2 ; elle possède par suite une représentation paramétrique :
>
> $$x = x(u_1 \ \ u_2), \quad y = y(u_1 \ \ u_2), \quad z = z(u_1 \ \ u_2)$$
>
> De nouveau u_1 et u_2 peuvent être soumis à telle transformation que l'on voudra, sans que la représentation paramétrique cesse de donner la même surface. Nous supposerons que les fonctions [ci-dessus] sont non seulement continues, mais encore dérivables. C'est d'une telle représentation que Gauss part dans sa théorie générale ; les paramètres u_1 et u_2 sont les coordonnées curvilignes (ou de Gauss). [15]

Weyl saisit donc parfaitement le niveau de généralité adopté par Gauss dans ce traité : ce dernier ne se fonde pas sur des variétés bidimensionnelles analytiques conçues abstraitement, mais sur des surfaces courbes contenues dans $\mathbb{R}^3$ dont il étudie la géométrie intrinsèque. À la différence de Gauss, Riemann s'intéresse directement à des variétés de dimension quelconque sans présupposer qu'elles sont plongées dans un espace ambiant de dimension supérieure. Il y a là une discontinuité dans la manière d'appréhender les principaux concepts de la géométrie différentielle qui mérite d'être soulignée : Riemann envisage directement les variétés *abstraitement*, c'est-à-dire *abstraction faite* de tout espace ambiant censé devoir les contenir, ce que ne fait pas Gauss.

D'une manière quelque peu modernisée, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on dit que S est une surface paramétrée régulière de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si S est l'image d'une application $f : U \to \mathbb{R}^3$, f étant de classe $\mathcal{C}^k$. L'application f est une représentation paramétrique de S. La surface S étant munie d'un système de coordonnées curvilignes u et v, faisons les

14. C.-F. Gauss, *op. cit.*, p. 11 : ≪ Nous pouvons concevoir sur la surface courbe deux systèmes de lignes courbes : l'un, pour lequel p est variable et q est constant ; l'autre, pour lequel q est variable, p constant ≫.
15. H. Weyl, *op. cit.*, p. 73-74.

précisions suivantes concernant le plan tangent à S en un point $P = (u, v)$. Le vecteur $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ est tangent à la courbe coordonnée u au point P ; de même, le vecteur $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ est tangent à la courbe coordonnée v au point P. Les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ sont linéairement indépendants. Ils forment donc une base du plan tangent à S au point P que l'on notera $T_P S$. Le plan $T_P S$ est ainsi un sous-espace vectoriel de dimension 2 qui hérite de la structure d'espace euclidien de $\mathbb{R}^3$. Gauss ne dispose pas du cadre conceptuel relevant de l'algèbre linéaire lorsqu'il caractérise les propriétés de l'espace tangent à une surface en un point P. Il utilise donc des arguments exclusivement géométriques et analytiques pour mieux l'appréhender : « La situation d'un plan tangent est connue commodément par la position de la droite qui lui est normale au point A ; cette droite est dite aussi, normale à cette surface courbe ».[16] Pour le dire autrement, la normale à $T_P S$ est la droite perpendiculaire à $T_P S$ passant par le point de contact P.

En résumé, nous pouvons dire que Gauss considère les surfaces régulières contenues dans $\mathbb{R}^3$ en général ; il ne se limite donc pas à des cas particuliers remarquables (le plan, le cylindre, le cône privé de son sommet ou encore la sphère). Il envisage ces surfaces non pas comme des *objets géométriques* mais comme le *support* d'une géométrie. En revanche, Gauss ne conçoit pas de variétés bidimensionnelles abstraitement, i.e. *abstraction faite de tout espace ambiant*. Il appartient donc à Riemann d'élaborer une conception générale *et* abstraite des variétés de dimension finie quelconque. La différence entre Gauss et Riemann se joue moins en termes de *généralisation* à un nombre quelconque de dimensions qu'en termes de *degré d'abstraction* dans la manière de concevoir les variétés.

1.1.2 Caractérisations intuitive et analytique de la courbure de Gauss

Dans son traité, Gauss commence par caractériser intuitivement et géométriquement la mesure de courbure en un point d'une surface courbe quelconque (§ 6), avant d'exprimer cette même mesure analytiquement (§ 8 et § 10). L'intuition géométrique a ici une fonction heuristique : elle permet non seulement d'*appréhender*, mais encore de *construire effectivement* le concept de mesure de courbure. Dans le résumé qu'il propose de la théorie gaussienne des surfaces courbes, Weyl revient en détail sur ce mode d'appréhension intuitif et géométrique du concept de mesure de courbure. Ce constat appelle trois remarques. (a) Weyl montre qu'il est nécessaire d'articuler points de vue géométrique et analytique dans le cas des surfaces courbes, conformément au traité de Gauss, avant de parvenir à une généralisation de la notion

16. *ibid.*, p. 7.

de courbure à des variétés riemanniennes de dimension finie n. (b) Il ne faut pas oublier que *Raum, Zeit Materie* est un ouvrage issu d'un cours que Weyl a donné à l'ETH de Zürich au cours de l'année 1917. Nous avons déjà pu observer que Weyl accorde une certaine importance aux intuitions géométriques et / ou physiques lorsqu'il aborde les fonctions d'une variable complexe dans ses cours en 1910. Il se situe alors très explicitement dans le prolongement de Klein. De même en 1917-1918, l'intuition géométrique lui sert de guide pour introduire des concepts et des formules relevant de la géométrie différentielle. (c) On s'aperçoit que dans un même ouvrage, à savoir *Raum, Zeit, Materie*, Weyl fait coexister plusieurs approches : lorsqu'il reprend le traité des surfaces courbes de Gauss au début du chapitre II, il insiste sur l'interprétation géométrique de concepts qui peuvent ensuite être entièrement reformulés à l'aide des seuls outils de l'analyse. En revanche, au cours du chapitre I, il utilise de manière systématique la méthode axiomatique pour introduire les concepts d'espace vectoriel, d'espace affine, d'espace euclidien, etc.

Weyl n'adopte donc pas un style d'écriture et de présentation des concepts parfaitement homogène et monolithique dans *Raum, Zeit, Materie*. D'un côté, il demeure attaché à l'usage de définitions implicites ou de définitions par axiomes dans une tradition hilbertienne, malgré son adhésion à l'intuitionnisme de Brouwer que l'on situe en 1919, c'est-à-dire au moment où paraît la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie*. De l'autre, il n'hésite pas à effectuer une série de détours par des intuitions géométriques ou physiques pour aborder certains concepts dont la formulation analytique ne fait pas sens en elle-même, c'est particulièrement le cas lorsqu'il aborde les résultats fondamentaux en géométrie diffrentielle et en géométrie riemannienne. Ainsi, dans *Raum, Zeit, Materie*, Weyl utilise des procédures constructives et des procédures axiomatiques pour introduire les principaux concepts nécessaires à la mathématisation de la relativité restreinte et de la relativité générale. On est donc loin du ton très polémique et de la position assez tranchée qu'il adopte parallèlement en faveur de Brouwer et contre Hilbert dans *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik* (1921).

Pour être plus précis, lorsqu'il caractérise la notion de mesure de courbure au sens de Gauss, Weyl fait coexister une procédure constructive qu'il emprunte d'ailleurs à Gauss — dans le cas des surfaces courbes — et une formulation générale et analytique pour des variétés riemanniennes de dimension finie quelconque. Bien que Gauss s'en tienne à des surfaces courbes dans son traité, il pense déjà le concept de mesure de courbure selon deux points de vue distincts mais intimement corrélés : l'un géométrique, l'autre analytique.

Détaillons à la suite de Weyl le procédé utilisé par Gauss pour *appréhender intuitivement* et *construire effectivement* la mesure de courbure en un point arbitrairement choisi sur une

surface courbe. Pour ce faire, appuyons-nous sur le § 6 de son traité et sur le commentaire qu'en propose Weyl au début du § 12 de *Raum, Zeit, Materie*. Soient S une surface courbe régulière et P un point de S, déterminons tout d'abord l'aire — notée A_S — d'une partie de la surface S au voisinage de P. Considérons les vecteurs unitaires orthogonaux à la surface en chacun des points situés dans le voisinage de P. Donnons-nous ensuite une sphère Σ de rayon 1 et déplaçons chacun de ces vecteurs par parallélisme, jusqu'à ce que leur origine coïncide avec le centre de Σ. Ces mêmes vecteurs décrivent une région à la surface de Σ dont on peut également mesurer l'aire que l'on notera A_Σ. La mesure de courbure de la surface S au point P n'est autre que la limite d'un quotient A_Σ/A_S lorsque A_S se « rétrécit » autour de P. Voici comment Gauss énonce cette « définition » plus intuitive : la mesure de courbure « rapportée à un point de la surface (...) indique le rapport des aires infiniment petites qui se correspondent sur la surface courbe et sur la surface sphérique ». [17] Weyl montre que Gauss ne fait que généraliser au cas des surfaces un raisonnement visant à déterminer la mesure de courbure en un point d'une courbe :

> Gauss définit d'une manière analogue la courbure d'une surface comme la mesure de la divergence de ses normales. Au lieu du cercle de rayon 1, il faut considérer la sphère de rayon 1 centrée en un point quelconque O ; par une représentation analogue à la précédente, on fait correspondre par équipollence des normales, un élément de surface do, dw est l'angle solide que les normales à do forment quand on leur donne une même origine. Le rapport $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}o}$ pris bien entendu à la limite est la courbure de Gauss. [18]

Dans le cas d'un plan, tous les vecteurs normaux unitaires à la portion de plan délimitée autour de P sont parallèles entre eux, on en déduit immédiatement que ces mêmes vecteurs ne décrivent qu'un seul point sur la sphère ; par suite A_Σ est nulle de même que la mesure de courbure en tout point du plan. Gauss envisage également l'éventualité que la mesure de courbure en un point d'une surface soit négative. La position de la portion sur la surface sphérique peut être « semblable ou opposée (inverse) à la position de la figure correspondante sur la surface courbe ». Et il ajoute : « Nous distinguerons ces deux cas par le signe positif ou négatif de la mesure de la courbure ». [19]

Cette première caractérisation intuitive de la mesure de courbure en un point d'une surface courbe montre que Gauss n'entend pas réduire la géométrie infinitésimale à des procédés analytiques. Pour le dire autrement, il explicite d'abord le concept de mesure de courbure en se fondant sur des intuitions géométriques avant d'en proposer une formulation analy-

17. *ibid.*, p. 13.
18. H. Weyl, *Espace, Temps, Matière*, *op. cit.*, p. 82.
19. C. F. Gauss *op. cit.*, p. 13-14.

tique rigoureuse. L'intuition ne consiste pas seulement à visualiser la notion de mesure de courbure, elle permet de la construire effectivement au début du traité de Gauss. Ainsi, les représentations intuitives demeurent le point de départ pour appréhender et décrire les propriétés *intrinsèques* des surfaces courbes. L'analyse prend le relais de l'intuition lorsqu'il s'agit de spécifier ces propriétés et de prouver en particulier que la mesure de courbure en un point d'une surface est l'une d'elles.

Voyons maintenant comment Gauss formule analytiquement la notion de « mesure de courbure » au cours du § 10 de son traité : soit S une surface paramétrée régulière de classe $\mathcal{C}^k$, f étant une représentation paramétrique de S. On suppose que S est munie d'un système de coordonnées curvilignes. Le point P de S est défini comme l'intersection des courbes coordonnées u et v. La première *forme différentielle fondamentale* est la restriction du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ au plan tangent à S en P. Ce plan T_PS peut être muni d'une base naturelle associée à la paramétrisation choisie : cette base est composée des vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$. Autrement dit, tout vecteur w de T_PS peut s'écrire :

$$w = \alpha \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) + \beta \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

où α et β sont des scalaires. Nous avons donc l'égalité :

$$\langle w, w \rangle = \|w\|^2 = \alpha^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \right\|^2 + 2\alpha\beta \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) + \beta^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\|^2 .$$

Posons :

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \left\| \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) \right\|^2 \\ F(u,v) &= \tfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) \cdot \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \\ G(u,v) &= \left\| \tfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\|^2 . \end{aligned}$$

La première forme quadratique différentielle fondamentale dépendant du point P et notée (I) s'écrit comme suit :

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$$

Elle est définie positive.

La matrice associée à cette première forme dans la base $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right)$ est :

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

Le discriminant g de (I) correspond au déterminant $g = EG - F^2$ de cette matrice. Nous verrons que g intervient précisément dans l'expression analytique de la mesure de courbure.

Il satisfait à l'égalité :

$$EG - F^2 = \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\|.$$

Gauss n'utilise pas ce mode de raisonnement qui présuppose un usage systématique de concepts relevant du domaine de l'algèbre linéaire ; cela étant, il introduit sans ambiguïté les quantités E, F et G ainsi que le discriminant g au cours du § 11 de son mémoire ; en outre, au début du § 12, il énonce la première forme quadratique fondamentale (I) :

> Comme on a
>
> $$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2$$
>
> On voit que $\sqrt{E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2}$ est l'expression générale de l'élément linéaire sur une surface courbe. [20]

La connaissance de (I) permet de définir formellement la notion de *propriété intrinsèque* d'une surface courbe régulière S : une propriété géométrique est *intrinsèque* à S si elle ne dépend que des coefficients E, F et G de (I) et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Weyl commente cette idée de manière très éclairante :

> Gauss fit voir que cette forme quadratique différentielle, $\mathrm{d}s^2$, détermine la *géométrie sur la surface*. Les longueurs de courbes, les angles, les grandeurs de domaines donnés sur la surface dépendent seulement d'elle. [21]

Pour déterminer la mesure de courbure en un point P d'une surface courbe S, il est nécessaire d'introduire la seconde forme quadratique différentielle fondamentale qui est déterminée grâce à la connaissance du *vecteur normal unitaire* au plan tangent à S au point P. Ce vecteur est défini comme suit :

$$h^+(u,v) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\|}$$

Posons :

$$\begin{aligned} L(u,v) &= \langle h^+(u,v), \tfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u,v) \rangle \\ M(u,v) &= \langle h^+(u,v) \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v) \rangle \\ N(u,v) &= \langle h^+(u,v) \cdot \tfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(u,v) \rangle. \end{aligned}$$

La seconde forme quadratique différentielle fondamentale (II) sur $T_P S$ est :

$$L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2.$$

Elle admet pour matrice dans la base naturelle de $T_P S$:

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

20. *ibid.*, p. 27.
21. H. Weyl, *op. cit.*, p. 75.

Le discriminant de la seconde forme dans cette base correspond donc au déterminant $b = LN - M^2$ de cette matrice. Alors que la première forme fondamentale (I) est définie positive, la deuxième forme fondamentale (II) peut aussi prendre des valeurs nulles ou négatives. Il en va de même pour son discriminant b.

La mesure de courbure ou courbure de Gauss κ peut être déterminée analytiquement comme suit :

$$\kappa = \frac{b}{g} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

autrement dit, il s'agit du quotient du discriminant de la seconde forme fondamentale sur le discriminant de la première forme fondamentale. À des différences de notations près, Gauss établit ce résultat à la fin du § 10 de son mémoire.[22] Précisons intuitivement que, si κ est positive, alors localement, la surface est située d'un même côté du plan tangent ; en revanche si κ est négative, alors localement, la surface est située de part et d'autre du plan tangent. Loin de se contenter de ces résultats, Gauss prouve également que κ ne dépend que de la première forme fondamentale ; pour être plus précis, elle peut s'exprimer en utilisant exclusivement « les quantités E, F, G, et leurs quotients différentiels du premier et du second ordre ».[23] Il s'agit là du *theorema egregium*. Voici comment Weyl résume ce résultat fondamental :

> Gauss découvrit que cette courbure [i.e. la mesure de courbure ou courbure de Gauss] est parfaitement déterminée par des mesures faites sur la surface elle-même, et qu'elle peut être calculée au moyen d'une expression construite avec les coefficients de la forme fondamentale et leurs dérivées jusqu'au deuxième ordre.[24]

Cela signifie très exactement que la mesure de courbure en un point d'une surface est une *propriété intrinsèque* à cette surface, puisque sa valeur dépend exclusivement des coefficients de la première forme différentielle fondamentale et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2. À partir de ce résultat fondamental, connu sous le nom de *theorema egregium*, Gauss montre que la mesure de courbure constitue un *critère nécessaire et suffisant* pour classer des surfaces courbes. Autrement dit, la question de la *classification* des surfaces courbes est absolument centrale dans le traité de Gauss.

1.1.3 Le *theorema egregium* et la classification des surfaces courbes

La démonstration du *theorema egregium* s'ouvre sur la remarque suivante au tout début du § 9 :

22. C. F. Gauss, *op. cit.*, p. 24.
23. *ibid.*, p. 26.
24. H. Weyl, *op. cit.*, p. 82.

> À l'aide de la formule que nous venons de trouver [c'est-à-dire l'expression analytique de la mesure de courbure], nous en établirons une autre, qui doit être rangée parmi les théorèmes les plus féconds dans la doctrine des surfaces courbes. [25]

Nous ne reproduisons pas ici les calculs très techniques qui président à la démonstration de ce théorème et en particulier les formules particulièrement complexes sur lesquelles Gauss s'appuie pour prouver que la mesure de courbure en un point d'une surface ne dépend que *des coefficients de la première forme fondamentale et « de leurs quotients différentiels du premier et du second ordre »*. Seulement, nous devons insister sur le fait que l'approche de Gauss est franchement calculatoire ici. Même si le début de son traité s'ouvre sur une nouvelle manière de *concevoir* les surfaces courbes comme support d'une géométrie à part entière, nous ne pouvons absolument pas dire que Gauss ambitionne de substituer la *conception* ou la *pensée* au *calcul* avec ce mémoire. Nous en voulons pour preuve les techniques de calcul très élaborées qui interviennent dans la preuve du *theorema egregium*. En revanche, la *Leçon d'habilitation* de Riemann reflète de manière remarquable la promotion des mathématiques *conceptuelles* à Göttingen au cours des années 1850. Il y a là un nouvel élément de discontinuité entre Gauss et Riemann qu'il nous faudra donc mettre en exergue pour nuancer les arguments de Weyl. Riemann favorise très nettement la pensée et la conception au détriment du calcul, non seulement dans son *Habilitationsvortrag* (1854) — qui s'adresse certes à des philosophes et à des mathématiciens —, mais également dans d'autres textes majeurs. Nous renvoyons en particulier le lecteur à notre commentaire de la *Dissertation* en première partie : lorsqu'il détermine les propriétés d'*analysis situs* qu'une surface de Riemann est susceptible de recevoir, il privilégie la conception au détriment du calcul.

Intéressons-nous maintenant aux §§ 12 et 13 du traité de Gauss. Il explicite alors en langage commun le sens et la portée de son théorème. Voici tout d'abord comment il le traduit intuitivement :

> L'analyse développée dans l'article précédent nous apprend ainsi que, pour trouver la mesure de la courbure, (...) il suffit de l'expression générale de la grandeur d'un élément linéaire quelconque. [26]

La mesure de courbure en un point d'une surface régulière S est donc une propriété intrinsèque à S. Venons-en aux conséquences de ce théorème. Comme le souligne L. Boi, elles permettent de saisir la signification « essentiellement géométrique » du *theorema egregium* par delà sa « formulation analytique ». [27] Le raisonnement de Gauss est le suivant : sachant que la mesure

25. C. F. Gauss, *op. cit.*, p. 24.
26. *ibid.*, p. 27.
27. L. Boi, *op. cit.*, p. 101.

de courbure est une propriété intrinsèque aux surfaces courbes, elle peut servir de critère en vue de les *comparer* et de les *classer*. Le problème spécifique de la classification des *surfaces courbes* est donc central chez Gauss. Il connaît une grande fortune au cours de la seconde moitié du XIX^{e} siècle puisqu'il est étendu de proche en proche à d'autres types de surfaces. Comme nous l'avons vu dans la première partie, Riemann se réfère en 1851 au traité de Gauss pour esquisser une classification des surfaces à plusieurs feuillets revêtant le plan complexe. De même en 1866, Jordan commence par invoquer le traité de Gauss sur les surfaces courbes — qui sont *flexibles* mais *inextensibles* —, avant de classer les surfaces fermées flexibles *et* extensibles, i.e. les surfaces topologiques compactes, connexes orientables et sans bord : il s'agit là d'un problème d'*analysis situs*. Alors que Gauss considère des surfaces munies d'une structure métrique, Jordan étudie des surfaces dont les propriétés sont purement topologiques. Le traité de Gauss permet donc à Riemann et à Jordan de poser un *problème générique* de classification qui n'est pas restreint aux seules surfaces courbes puisqu'il s'étend aux surfaces de Riemann (Riemann, 1851 et 1857, Klein, 1882) et aux surfaces topologiques (Jordan, 1866).

Au cours du § 12 de son traité, Gauss introduit un rapport de « correspondance » ponctuel entre surfaces courbes auquel il donne le nom de *développement*. Il en déduit le résultat suivant : soient S et S' deux surfaces, supposons que $\sqrt{E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2}$ soit « l'expression générale de l'élément linéaire » associé à S et que $\sqrt{E'\mathrm{d}p^2 + 2F'\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G'\mathrm{d}q^2}$ soit « l'expression générale de l'élément linéaire » associé à S'. La surface S' ne peut être « développée » sur S, que si $E = E'$, $F = F'$ et $G = G'$; il en va de même pour leurs quotients différentiels du premier et du second ordre. La terminologie de Gauss a été conservée. Par surface *développable*, on entend généralement une surface qui a *localement* les mêmes propriétés *métriques* que le plan euclidien. Autrement dit S est une surface développable sur un plan euclidien, si tout point de S admet au moins un voisinage qui est isométrique à un ouvert de ce même plan. Il en va ainsi des surfaces *cylindrique* et *conique*. En revanche, une surface sphérique ne satisfait pas à cette condition : elle n'est pas localement *isométrique* au plan euclidien — elle est seulement localement homéomorphe à celui-ci.

Gauss en déduit en particulier qu'une surface développable sur le plan admet nécessairement une mesure de courbure *nulle* : « Notre théorie apprend spontanément que la mesure de la courbure de telles surfaces en un point quelconque est zéro »[28], celui-ci étant alors réduit à l'identité en tout point de ces mêmes surfaces.

28. C. F. Gauss, *op. cit.*, p. 27.

Grâce à ce critère de classification, Gauss établit que les surfaces coniques, cylindriques et planes sont essentiellement équivalentes, par cela seul qu'elles ont une mesure de courbure nulle en tout point. Pour rendre ce résultat prégnant, il a littéralement affaire à une *expérience de pensée*. Il se donne une surface courbe à laquelle il fait mentalement subir deux types de « modifications » qu'il ne faut pas confondre, à savoir d'une part une *flexion* [dont le correspondant allemand dans la leçon de Riemann est le terme Biegung], de l'autre une *extension* [Dehnung]. [29] Alors qu'une flexion laisse les déterminations métriques au voisinage de chaque point d'une surface *invariantes*, une extension — c'est-à-dire une déformation continue — les modifie. Bref, pour qu'une surface S soit jugée équivalente à une autre S' au sens de Gauss, il faut et il suffit de faire subir une simple flexion à S pour qu'elle coïncide parfaitement avec S'. Voilà pourquoi Gauss impose aux surfaces qu'il étudie la propriété d'être « flexibles » quoique « inextensibles ».

Il s'agit bien là d'une expérience de pensée pour essentiellement quatre raisons : (a) tout d'abord Gauss établit la distinction entre flexion et extension *in mente* ; (b) ensuite — et c'est là l'un des traits essentiels d'une expérience de pensée — il écarte les paramètres non pertinents par rapport à la classification qu'il a en vue ; (c) en outre, il fait *varier* les situations ou les comparaisons possibles entre surfaces ; (d) enfin il ne se contente pas de représenter intuitivement certaines surfaces courbes, il leur fait subir un certain type de modification qu'il appelle flexion. Une telle expérience de pensée a une fonction à la fois heuristique et pédagogique : *heuristique*, en ce sens qu'elle permet de construire effectivement l'*équivalence* entre surfaces courbes, *pédagogique* dans la mesure où elle nous aide également à appréhender une telle relation.

Sans doute est-il étonnant à premier abord d'employer la notion d'expérience de pensée pour caractériser l'argument de Gauss que l'on vient de commenter. On pourrait imaginer qu'il n'y a guère d'expérience de pensée qu'en physique. Si justement on relit plus finement le chapitre que Mach consacre à l'expérience de pensée dans *La connaissance et l'erreur*, on s'aperçoit qu'il propose d'étendre cette notion aux mathématiques :

> L'expérimentation mentale, si importante en physique, l'est aussi dans toutes les branches de la Science, même là où les profanes s'attendraient le moins à la rencontrer, en mathématiques. [30]

29. La propriété de « flexibilité » caractérise une classe de surfaces courbes localement isométriques, en revanche la propriété d'extensibilité caractérise une classe de surfaces équivalentes du point de vue topologique, i.e. homéomorphes.

30. E. Mach, *La connaissance et l'erreur* (1905), trad. Dufour, Paris, éd. Flammarion, 1908, p. 209.

L'image *normative* des mathématiques en tant que science purement déductive empêche selon Mach de *décrire* les démarches souvent tâtonnantes employées par les mathématiciens pour appréhender un concept et parvenir à un résultat. Mach veut dire qu'un raisonnement en mathématiques, aussi formalisé soit-il, est toujours accompagné d'expériences de pensée qui ont une fonction à la fois heuristique et pédagogique. C'est ce que nous pouvons observer ici lorsque Gauss aborde la classification des surfaces courbes.

Toutes les caractéristiques que Mach assigne à l'expérience de pensée sont présentes dans le passage de Gauss que nous avons mentionné : épuration logique et simplification — on ne veut pas que les surfaces sur lesquelles on raisonne soient extensibles — ; *variabilité* et *généralité* des situations traitées ; recours à une imagination schématisante ; usage contrôlé des modifications que l'on fait subir à des surfaces pour savoir si elles sont équivalentes. Sans doute les expériences de pensée sont-elles en mathématiques un moyen terme entre une théorie énoncée sous une forme purement analytique et des objets particuliers, appréhendés intuitivement et susceptibles de satisfaire à ses réquisits : elles permettent de passer en revue ces mêmes objets afin de les classer en général selon des critères pertinents. Ainsi, lorsque l'on fait subir *in mente* une flexion à une surface courbe sans l'étendre, on saisit par là même la grandes diversité des surfaces courbes qui admettent les mêmes déterminations métriques qu'elle.

Pour conclure, nous pouvons faire les remarques suivantes concernant la lecture du traité de Gauss que Weyl propose dans les §§ 10 à 12 de *Raum, Zeit, Materie*. Il n'en retient que les aspects les plus intuitifs, aussi bien lorsqu'il redéfinit le concept de *mesure de courbure* que lorsqu'il formule les deux résultats fondamentaux de Gauss : (1) la mesure de courbure en un point d'une surface courbe est une propriété géométrique intrinsèque à cette même surface ; (2) elle permet de classer systématiquement les surfaces courbes. Cette sélection se justifie tout d'abord à des fins pédagogiques. Mais d'un autre côté, Weyl insiste sur un rapport de filiation entre Gauss et Riemann, de sorte qu'il envisage le *Habilitationsvortrag* (1854) dans le prolongement immédiat du traité de Gauss sur les surfaces courbes (1828). Trois points nous permettent de remettre en question cette lecture historique linéaire et continue : (i) Riemann ne se réfère pas exclusivement à Gauss, (ii) son projet ne consiste pas seulement à généraliser le traité de Gauss mais, plus profondément, à *géométriser l'analyse* et, en particulier, la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables, (iii) la leçon de Riemann se caractérise par une approche conceptuelle et abstraite qui n'est pas seulement due au statut de ce texte, mais à la promotion des mathématiques conceptuelles à Göttingen dans les années 1850 ; en revanche le traité de Gauss est nettement plus calculatoire, même s'il n'est

pas exclusivement calculatoire. Cela étant, dans son *Habilitationsvortrag*, Riemann reprend le vocabulaire imagé introduit par Gauss et, en particulier, la distinction entre surfaces flexibles et surfaces extensibles. Bien qu'il introduise le concept général de variété à n dimensions qui échappe à toute représentation intuitive, Riemann n'hésite pas à revenir au cas particulier des surfaces courbes au cours de sa leçon ; il appréhende l'exemple des surfaces courbes intuitivement. Preuve de son attachement à une « Anschauliche Mathematik » qui était déjà largement à l'œuvre dans sa *Dissertation*.

1.2 La *Leçon d'habilitation* de Riemann, une généralisation de la théorie gaussienne des surfaces courbes ?

Pour son *Habilitationsvortrag*, Riemann propose trois sujets : le premier concerne les séries trigonométriques, le deuxième a pour objet les intersections de courbes planes du second degré, le troisième se rapporte aux fondements de la géométrie. Contrairement à l'usage, Gauss choisit le troisième sujet. Si l'on en croit Laugwitz [31], Gauss aurait procédé par élimination ; le premier sujet étant trop proche de la thèse de Riemann et le second trop évident, il opte pour le troisième sujet : la *Leçon d'habilitation* de Riemann porte donc sur les fondements de la géométrie. [32] Riemann prononce cette leçon en juin 1854 devant un jury composé en grande majorité de professeurs qui n'ont aucune formation en mathématiques. D'où la particularité de son contenu : les résultats et les hypothèses présentés par Riemann ne sont pas rigoureusement formalisés et ils ne sont pas exprimés analytiquement. Au début de la première partie, Riemann rappelle que la difficulté de cet exercice réside plus dans les *concepts* (in den Begriffen) que dans la *construction*. Il distingue en filigrane deux modes de raisonnement : le premier, philosophique, s'effectue *par concepts* ; le second, mathématique, implique conjointement *représentation géométrique* et *formalisation analytique*.

Le statut du texte de Riemann est donc problématique, ce qui rejaillit dans les différentes

31. D. Laugwitz, *Bernhard Riemann 1826-1866, Turning points in the conception of mathematics*, Basel, Boston, Berlin, éd. Birkhäuser, 2008, p. 219 : « the first topic was largely taken care of by the dissertation, and the second, the determination of the points of intersection of two quadratic curves, must have struck Gauss as trivial ».

32. B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854), in *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **13** (1867), in *Gesammelte mathematische Werke*, éd. de 1876, p. 254 à 270 ; pour la traduction en français : *Sur les Hypothèses qui servent de Fondement à la Géométrie*, in *Œuvres* de B. Riemann, *op. cit.*, p. 280 à 299.

lectures que l'on peut en proposer. Doit-on considérer cette leçon comme une nouvelle conception philosophique de l'espace physique ? Ou bien contient-elle une théorie mathématique sous-jacente qu'il faudrait mettre au jour en faisant abstraction de certaines distinctions conceptuelles, d'ordre philosophique, qu'opère pourtant Riemann en toute conscience ? Est-ce, tout simplement, une *généralisation* du mémoire de Gauss sur les surfaces courbes ou l'esquisse d'un grand projet d'*unification* de la géométrie qui repose en dernière instance sur la formalisation du concept de variété différentielle et le développement à venir du calcul tensoriel ?

Parmi les lectures du *Habilitationsvortrag* que nous avons pu consulter, certaines d'entre elles insistent sur ses aspects « métagéométriques » voire purement formels, comme si Riemann était l'initiateur d'une tendance à l'axiomatisation sous sa forme la plus éthérée et la plus abstraite. Cette manière très anachronique d'envisager la *Leçon d'habilitation* de Riemann nous informe moins sur le contenu du texte que sur les motivations de ses lecteurs. On retrouve une telle lecture parmi des philosophes aussi différents sur un plan doctrinal que Russell, Husserl ou encore Vuillemin. Ainsi, dans *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897), Russell affirme :

> Le dessein général de la dissertation de Riemann est de présenter les axiomes comme des étapes successives dans la classification de l'espèce nommée espace. Les axiomes de la Géométrie, semblables aux attributs d'une définition scolastique, apparaissent comme les déterminations successives de concepts de classe, aboutissant à l'espace euclidien. On a ainsi, au point de vue analytique, une formule presque aussi logique et aussi précise qu'on peut le désirer, et qui, par son caractère de classification, semble ne devoir contenir rien de superflu ou de surabondant ; et l'on obtient explicitement les axiomes sous la forme la plus désirable, c'est-à-dire comme des attributs du concept de l'espace. [33]

Tout se passe comme si Riemann déterminait les diverses classes de variétés à l'aide d'axiomes. Russell compare cette manière de procéder aux définitions de la scolastique pour montrer que la géométrie différentielle et riemannienne considérée en elle-même repose exclusivement sur des jugements *analytiques a priori* et non pas sur des jugements *synthétiques a priori*. Dans le second chapitre de cet ouvrage, Russell s'appuie notamment sur Riemann pour rejeter la conception kantienne de l'espace et de la géométrie. Pourtant, à aucun moment dans sa leçon, Riemann ne procède par axiomes, il se contente seulement de relativiser les axiomes de la géométrie euclidienne en tant qu'évidences intuitives. Il ne les remplace pas par une

33. B. Russell, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge University Press, 1897, p. 14-15, traduit en français sous le titre *Essai sur les fondements de la géométrie*, trad. A. Cadenat, relue et corrigée par B. Russell et L. Couturat, Paris, éd. Gauthier-Villars, 1901, p. 19.

axiomatique dont la signification serait purement logique ou formelle. D'ailleurs, une telle pratique des mathématiques, fondée sur l'usage systématique d'axiomes indépendamment de tout contenu intuitif, n'apparaît pas non plus dans ses travaux plus spécifiquement mathématiques — nous pensons en particulier à sa *Dissertation* et à sa *Théorie des fonctions abéliennes*.

Pour sa part, Husserl affirme que la *Leçon d'habilitation* de Riemann relève d'une conception *formaliste* des mathématiques. [34]. Il rapproche alors le *Habilitationsvortrag* de Riemann et les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. Husserl utilise ce rapprochement pour critiquer une marche inexorable des mathématiques vers un formalisme vide de sens. On retrouve pareil rapprochement entre Riemann et Hilbert sous la plume de J. Vuillemin, mais les motivations de Vuillemin sont diamétralement opposées à celle de Husserl :

> Le grand mérite de Riemann, dans sa dissertation, est d'avoir traité analytiquement du problème de l'espace, d'avoir pour la première fois, présenté des réflexions ≪ formelles ≫ sur la géométrie et d'avoir suivi une méthode axiomatique. [35]

Selon Vuillemin, Riemann aurait effectué les progrès décisifs qui serviront de base aux réflexions de Hilbert sur les fondements de la géométrie. Il s'agit là d'une surinterprétation fondée sur une illusion rétrospective. (1) Par axiomes, Riemann entend les propositions intuitivement évidentes sur lesquelles reposent les géométries métriques connues, son but consiste à montrer que les différents systèmes d'axiomes auxquels elles satisfont sont seulement possibles, et non pas logiquement ou ontologiquement nécessaires ; ils doivent *in fine* être confrontés à l'expérience. Riemann ne propose donc pas d'analyser la structure logique du système d'axiomes qui est au fondement de la géométrie euclidienne. Son but est de la relativiser en introduisant le concept général de variété. (3) À aucun moment il ne définit implicitement ou par axiomes les concepts de variétés continue, différentielle et métrique (riemannienne). Certes, l'approche de Riemann est conceptuelle dans son *Habilitationsvortrag*, mais il ne faudrait pas en inférer qu'il serait le ≪ précurseur ≫ de la méthode axiomatique et / ou du ≪ formalisme ≫ en mathématiques. Il appartient à Hilbert — et non à Riemann — d'analyser la structure logique de la géométrie euclidienne, à partir des critères de consistance, de complétude et de catégoricité dans ses *Grundlagen der Geometrie* (1899). En outre, il propose une première axiomatisation des variétés continues bidimensionnelles dans deux annexes à ce même ouvrage en 1902, comme nous l'avons montré dans la partie précédente de notre thèse.

34. Voir en particulier E. Husserl, *Logique formelle et logique transcendantale*, essai d'une critique de la raison logique (1929), trad. S. Bachelard, P.U.F., 1957, p. 127-128.

35. J. Vuillemin, *Philosophie de l'Algèbre*, Paris P.U.F., 1962, p. 407.

Parmi les surinterprétations de la leçon que nous avons mentionnées, celle de Husserl mérite toute notre attention. Comme l'a montré L. Boi, Husserl s'intéresse pour la première fois à la *Leçon d'habilitation* de Riemann dans un cours donné lors du semestre d'hiver 1889-1890 à l'Université de Halle — donc bien avant qu'il ne définisse les bases de la phénoménologie. Nous ne retiendrons pas ici les critiques que Husserl adresse à Riemann sur un plan mathématique, nous renvoyons le lecteur au commentaire que Boi en a proposé. Sur un plan philosophique et épistémologique, Husserl soutient que les travaux de Riemann et Gauss sur les surfaces et les variétés ne constituent qu'une généralisation *logique* de la géométrie euclidienne, elles n'auraient donc pas réellement d'effectivité sur un plan intra- ou extra- mathématique. Et Husserl d'ajouter de manière péremptoire que la « philosophie, pour ainsi dire, des recherches de Riemann est sans valeur ».[36] Pour le dire autrement, Husserl conçoit les géométries non euclidiennes et les variétés n-dimensionnelles comme de pures possibilités logiques ; il passe sous silence la troisième partie du *Habilitationsvortrag* consacrée à l'espace physique. Mais surtout, Husserl dénie toute portée philosophique aux arguments de Riemann. Bref, Husserl propose une lecture partielle et partiale de la *Leçon d'habilitation*, que l'on retrouvera d'ailleurs dans des ouvrages beaucoup plus tardifs. Mentionnons par exemple ce passage, tiré de *Logique formelle et Logique transcendantale* :

> Le grand pas qu'a accompli la mathématique moderne, en particulier depuis Riemann, consiste en ce que non seulement elle s'est rendue claire cette possibilité d'un retour à la forme d'un système déductif (donc à la forme de toute science déductive) à partir de la géométrie et aussi de toutes les autres sciences existantes, mais encore en ce qu'elle est arrivée aussi à regarder de telles formes de systèmes comme des objets mathématiques.[37]

La première partie de cette citation renvoie davantage aux *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert — et aux tentatives ultérieures de généralisation de la méthode axiomatique à toutes les branches des mathématiques et à la physique — qu'à la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Il est inapproprié de penser que ce dernier considérait les axiomatiques comme un objet mathématique à part entière. Il ne s'interroge à aucun moment sur la consistance, la complétude et la catégoricité des systèmes d'axiomes en géométrie et on ne peut même pas dire qu'il développe les prémisses d'une méthode ou d'une pensée axiomatique. De plus, il ne faudrait pas voir dans le projet riemannien une réduction de la mathématique à un vêtement d'idées dépourvu de tout support matériel, comme en témoigne assez l'importance qu'il accorde aux représentations intuitives à des fins heuristiques. Par contre, il est vrai que l'espace euclidien n'est plus qu'un objet très particulier au regard du concept général de

36. Cité par L. Boi, *op. cit.*, p. 242.
37. E. Husserl, *op. cit.*, p. 127-128.

variété dans la leçon de Riemann, celui-ci adoptant donc une approche résolument *conceptuelle* et *abstraite*. Cette remarque ne semble toutefois pas correspondre à ce qu'affirme ici Husserl. Remarquons au passage que, dans le cours dispensé en 1889-1890, comme dans ce passage de *Logique formelle et Logique transcendantale*, Husserl réduit l'esquisse de *théorie* géométrique introduite par Riemann à un pur système logique.

De plus, Husserl oublie la fonction *critique* que Riemann prête au concept de variété : il s'agit en effet de prendre appui sur ce concept général pour remettre en cause l'évidence apparente liée à nos modes d'appréhension communs ou semble-t-il « naturels » de l'espace physique. Pour le dire autrement, en 1929 Husserl interprète Riemann à la lumière d'une conception formaliste des mathématiques, comme si le *Habilitationsvortrag* se situait aux antipodes d'une approche phénoménologique de l'espace.

Contrairement à Russell, Husserl ou encore Vuillemin, Weyl ne propose pas une lecture logiciste ou formaliste du *Habilitationsvotrag* de Riemann. Quatre raisons expliquent cela. En premier lieu, Weyl reprend à son compte l'interprétation kleinéenne de l'œuvre de Riemann. Or, aux yeux de Klein, Riemann est un « géomètre » : dans sa *Dissertation* comme dans son *Habilitationsvortrag*, il se fonde sur des intuitions géométriques, i.e. il demeure attaché à une *anschauliche Mathematik*. En second lieu, Weyl a lui-même œuvré dès 1913 à l'axiomatisation du concept de variété continue bidimensionnelle. Il sait donc qu'une telle définition ne se trouve pas chez Riemann et que ce dernier ne procède pas par axiomes. En troisième lieu, à partir de 1918, Weyl montre que le continu mathématique est irréductible à une conception logiciste ou formaliste des mathématiques. Il répercute cette analyse dans son commentaire du *Habilitationsvortrag* de Riemann en 1919 : pour bien comprendre ce qu'est une variété *continue*, on ne peut pas procéder seulement par axiomes : Weyl tire progressivement Riemann du côté de l'intuitionnisme. Enfin, dans *Raum, Zeit, Materie*, il entend interpréter les apports de Gauss et Riemann en géométrie à l'aune de la phénoménologie de Husserl. L'introduction à cet ouvrage confirment cette hypothèse. Pour le dire autrement, Weyl ne considère à aucun moment la *Leçon d'habilitation* de Riemann comme une manifestation ou une « anticipation » du formalisme en mathématiques ; il l'interprète comme une mise en tension particulièrement féconde entre deux projets qui s'éclairent mutuellement : (1) une tentative de généralisation de la théorie gaussienne des surfaces à des variétés de dimension n ; (2) une conception philosophique inédite de l'espace physique qui est compatible avec la phénoménologie. En effet, de même que la phénoménologie se fonde sur la mise entre parenthèses de notre attitude naturelle, de même la conception riemannienne de la géométrie consiste à mettre entre parenthèses notre conception habituelle de l'espace physique.

Cependant, la lecture que Weyl propose du *Habilitationsvortrag* de Riemann n'est pas exempte de tout anachronisme. En particulier, Weyl interprète les hypothèses de Riemann sur l'espace physique à la lumière des derniers développements en relativité générale.

Dans ce qui suit, nous proposons de lire étape par étape la leçon de Riemann et de montrer si et jusqu'à quel point les éclaircissements qu'en a proposés Weyl sont pertinents. La densité des arguments de Riemann est telle qu'il nous a semblé nécessaire d'en proposer un commentaire suivi qui nous aidera en retour à comprendre ce qui intéresse Weyl dans ce texte. Le *Habilitationsvortrag* est lui-même découpé en trois parties. Dans un premier temps, Riemann introduit le concept de variété de dimension n ; il distingue les variétés discrètes et les variétés continues — c'est-à-dire des variétés lisses, i.e. indéfiniment différentiables. Dans un second temps, il introduit des déterminations métriques sur une variété « continue », ce qui signifie qu'il munit une variété lisse d'une structure métrique. Bien qu'il envisage une grande diversité de déterminations métriques, il se restreint de fait à des variétés dont la structure métrique est déterminée par une forme quadratique définie positive (variétés riemanniennes). Toujours dans cette seconde partie, il généralise la courbure de Gauss aux variétés « riemanniennes » de dimension finie quelconque et il étudie en particulier les variétés dont la mesure de courbure est constante. Dans un troisième temps, il montre comment ce cadre général permet d'envisager à nouveaux frais les hypothèses sur l'espace physique. Ainsi, la leçon de Riemann suit deux fils conducteurs : d'une part il spécifie progressivement le concept général de variété. D'autre part, il montre comment sa conception de l'espace mathématique offre de nouveaux éclaircissements sur les propriétés de l'espace physique.

Pour mener à bien notre commentaire de la *Leçon d'habilitation*, nous avons découpé notre argumentation en sept paragraphes. Les quatre premiers correspondent aux aspects proprement mathématiques du *Habilitationsvortrag* : (1) nous préciserons ce que Riemann entend exactement par géométrie ; (2) nous reviendrons sur le sens qu'il assigne aux notions de variétés discrète, continue et différentielle ; (3) nous verrons comment il introduit des déterminations métriques sur une variété différentielle ; (4) nous montrerons que Riemann propose une classification des variétés homogènes d'une dimension quelconque sur le modèle du traité de Gauss. Le paragraphe (5) sera entièrement dévolu à la troisième partie du *Habilitationsvortrag* dans laquelle Riemann formule une série d'hypothèses au sujet de l'espace physique. Enfin, dans les paragraphes (6) et (7), nous analyserons les rapprochements opérés par Weyl entre Faraday et Riemann d'une part, entre Leibniz et Riemann d'autre part.

1.2.1 Qu'est-ce que Riemann entend par géométrie ?

Dans ses remarques liminaires, Riemann rappelle ce que l'on entend habituellement par géométrie. Il s'agit de la science de l'espace. Elle se fonde sur le « concept d'espace » [Begriff des Raumes] et sur les concepts fondamentaux [Grundbegriffe] qui président aux constructions dans l'espace [Constructionen im Raume]. Cet argument mérite trois commentaires. (a) Riemann considère l'espace comme un « concept » et non comme une forme pure de notre sensibilité. Il est donc possible en droit d'envisager diverses formes de spatialité en fonction du cadre conceptuel employé. Autrement dit, Riemann déplace l'espace du côté de la pensée, son but étant de montrer que la géométrie euclidienne n'est qu'une forme de spatialité *concevable* parmi d'autres. (b) Il souligne immédiatement l'une des limites de la géométrie élémentaire : elle a pour seul objet des multiplicités à trois dimensions. Le raisonnement riemannien est le suivant : étant donné que l'espace est un concept, on peut l'insérer dans un cadre théorique qui s'affranchit du rapport immédiat à l'intuition, à savoir la science qui traite des variétés à n dimensions. (c) Par science de l'espace, il faut entendre non seulement la science qui détermine les propriétés *de* l'espace, mais encore la science qui étudie les *constructions dans* l'espace. Ainsi, la géométrie n'est pas de nature *purement* conceptuelle pour une première raison : elle a pour objet des constructions qui font intervenir un substrat intuitif. Comme l'indique Riemann lui-même à la fin de son introduction, elle n'est pas purement conceptuelle pour une seconde raison : elle dépend partiellement de l'expérience. Le but de Riemann est d'assujettir la géométrie comme science de l'espace à une « science » beaucoup plus générale qui, pour le coup, est purement conceptuelle, puisqu'elle porte sur des variétés à n dimensions.

Dans ce passage, on devine déjà l'attachement de Riemann à une « begriffliche Mathematik », i.e. une mathématique conceptuelle : l'espace est un concept spécifique qui dépend d'un concept plus *général*, à savoir celui de variété. Mais cette begriffliche Mathematik qui est essentiellement motivée par un souci de généralité, n'est pas guidée par des procédures axiomatiques. En effet, Riemann reprend à son compte la distinction canonique entre les « définitions nominales » qui précisent la signification des concepts employés en géométrie et les axiomes en tant que vérités immédiates portant sur les relations entre ces concepts et dont il critique l'évidence.

Que faut-il entendre ici par définition nominale ? En un sens leibnizien, une définition est nominale quand elle sert seulement à différencier un objet d'un autre objet. Elle devient réelle quand on s'assure de la possibilité logique du concept ainsi défini. En un sens kantien, une définition nominale revient à substituer à un terme une expression qui en rende

la signification plus intelligible, alors qu'une définition réelle consiste à garantir une réalité objective à un concept, au sens où celui-ci n'est pas vide d'objets. Il semble que Riemann adopte une terminologie proche du kantisme : il s'interroge sur l'applicabilité des concepts géométriques à l'espace physique. Il ne se satisfait donc pas des définitions purement nominales en géométrie. De plus, il souligne l'arbitraire qui caractérise les notions et propositions de base de la géométrie élémentaire ; on ignore si et dans quelle mesure elles font système : « on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même a priori si elles peuvent l'être ».[38] Ce passage, pris isolément, a sans doute pu servir de prétexte à Husserl, Russell ou encore Vuillemin pour faire de Riemann un champion de la méthode axiomatique avant l'heure. Pourtant, à aucun moment dans sa leçon, Riemann n'examine la structure logique des systèmes d'axiomes qui président à telle ou telle géométrie ; il se contente de relativiser très fortement la géométrie euclidienne ; il remet en cause l'évidence qui caractérise les axiomes sur lesquels elle est fondée. Pour ce faire, il s'appuie sur des concepts très généraux qu'il n'axiomatise pas.

Riemann fait ensuite un constat d'échec qui mérite commentaire : les efforts de clarification effectués par les mathématiciens et les philosophes n'ont guère porté leurs fruits jusque-là : ils n'ont pas su opérer la véritable rupture d'échelle induite par « le concept des grandeurs de dimensions multiples » [der allgemeine Begriff mehrfahr ausgedehnter Grössen]. Riemann se montre particulièrement critique à l'encontre de Legendre qui est encore convaincu que l'on peut démontrer le postulat des parallèles au début du XIX^{e} siècle. Mais lisons plus en détail ce passage :

> Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la Géométrie, personne parmi les mathématiciens ni parmi les philosophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère.[39]

Riemann n'est pas en train de se situer en rupture par rapport à *tous ses prédécesseurs*. Il s'arrête à Legendre, ce qui n'est pas un hasard. Il épargne tacitement Gauss ; d'ailleurs quelques lignes plus loin, il avoue sa dette à l'égard de son maître. Voici comment on peut interpréter ce passage : « personne parmi les mathématiciens (...) n'est parvenu à éclaircir ce mystère », mis à part Gauss auquel Riemann fait deux emprunts majeurs dans cette introduction. (a) À l'instar de Gauss, il estime que la géométrie n'est ni purement conceptuelle, ni purement *a priori*. Seule l'*expérience* nous permet de sélectionner les hypothèses qui doivent servir de fondement à la géométrie. (b) Le concept de variété de dimension n se trouve déjà

38. B. Riemann, *op. cit.*, p. 280.
39. *ibid.*, p. 280.

chez Gauss et, en particulier, dans son *Mémoire de jubilé* que Riemann mentionne d'ailleurs dans son *Habilitationsvortrag*. Rappelons que le jubilé de Gauss a lieu le 16 juillet 1849. Gauss présente à cette occasion ses *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* qui contiennent une nouvelle preuve du théorème fondamental de l'algèbre, objet qui semble totalement étranger aux réflexions de Riemann sur les fondements de la géométrie.

Pourtant, si l'on relit les *Beiträge* de Gauss, un passage en particulier mérite toute notre attention. Il évoque une théorie générale et abstraite des grandeurs [eine allgemeine abstracte Grössenlehre] qui constituerait un domaine « indépendant de la spatialité » et « dont l'objet sont les combinaisons de grandeurs connexes conformément au principe de continuité, un domaine qui jusqu'à maintenant a été très peu travaillé et dans lequel on ne peut pas progresser sans disposer d'une langue empruntée aux images spatiales ». [40] Deux commentaires s'imposent : (1) Gauss conçoit déjà des grandeurs pour une multiplicité de dimension n ; (2) il montre dans le même temps qu'on ne peut pas totalement s'affranchir du langage commun attaché à la notion de spatialité, dans la mesure où il nous permet seul d'avoir une prise sur cette théorie abstraite et générale des grandeurs qu'il appelle de ses vœux. Riemann se conforme à cet argument : non seulement sa leçon porte sur des grandeurs à n dimensions, mais de plus il revient régulièrement au cas des surfaces courbes pour visualiser les éléments de connaissance qu'il énonce.

Riemann poursuit en ces termes : « Il ressortira de là qu'une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier de grandeur de trois dimensions ». [41] La question est alors de savoir quels sont, parmi les rapports métriques possibles, ceux qui permettent de décrire l'espace physique. Or, une telle question ne peut absolument pas être tranchée *a priori*, c'est-à-dire indépendamment de l'expérience. D'un côté, Riemann prouve que l'on peut concevoir *a priori* différents rapports métriques pour mathématiser l'espace physique. Mais de l'autre, il admet explicitement que seule l'expérience nous permet de trancher provisoirement et de manière seulement probable entre ces diverses possibilités, car aucune mesure empirique ne peut être certaine [gewiss] et exacte [genau].

Ainsi, pour Riemann, la géométrie euclidienne n'a rien de *nécessaire* sur un plan intra-mathématique puisqu'elle n'est qu'une possibilité parmi une infinité d'autres dans le cadre de cette science des grandeurs n fois étendues qu'il développe systématiquement conformément aux vœux formulés par Gauss en 1849. Mais la géométrie euclidienne n'a par ailleurs aucune

40. C. F. Gauss, *Werke*, Band III, *Göttingen* 1866, p. 79, trad. L. Boi, *op. cit.*, p. 122.
41. B. Riemann, *op. cit.*, p. 281.

nécessité lorsqu'elle est appliquée à l'espace physique ; elle ne s'impose pas *a priori* pour structurer le monde extérieur. Si l'on suit rigoureusement le raisonnement de Riemann, les connaissances géométriques sont en partie seulement *a priori*. Pour le dire autrement, la géométrie, en tant que science de l'espace, ne peut pas être *régulièrement déduite* à partir de la science générale des grandeurs n fois étendues (des variétés). Il rejoint complètement l'argument de Gauss sur le statut de la géométrie. Souvenons-nous que pour Gauss, la géométrie est comparable à la mécanique. Elle ne comporte ni la nécessité, ni l'universalité qui caractérisent la science pure du nombre, c'est-à-dire l'arithmétique. [42]

Certes, Riemann envisage le concept de variété et les conditions qui permettent de lui assigner une structure métrique indépendamment de l'expérience. En revanche, seules des considérations empiriques nous permettent de choisir, parmi les diverses variétés métriques possibles, celle qui permettra de décrire approximativement l'espace physique. Ces deux remarques nous conduisent à écarter deux surinterprétations : (i) à la différence de Kant, Riemann refuse de penser que la géométrie est exclusivement constituée de connaissances *a priori*. Inversement, il n'est pas non plus empiriste, puisqu'il ne dit à aucun moment que la géométrie est entièrement fondée sur l'expérience.

Ainsi, dans cette introduction, Riemann définit la géométrie comme science de l'espace et des constructions dans l'espace. Elle n'est pas purement *a priori* pour cette raison même. Il entend développer une nouvelle science qui a pour objet les grandeurs n fois étendues. Cette science, qui peut être construite indépendamment de l'expérience, a pour seul but de nous empêcher d'essentialiser la géométrie euclidienne. Mais, d'un autre côté, Riemann est parfaitement conscient que l'on ne peut en aucun cas déduire les propriétés de l'espace physique à partir de cette théorie générale et *a priori*. Or, en dernière instance, la géométrie doit s'appliquer à l'espace physique. Donc, le concept de variété permet de *concevoir* une diversité de géométries métriques, mais non de choisir parmi ces géométries laquelle est la plus pertinente pour décrire la réalité empirique. Par suite, les « hypothèses » qui servent de fondement à la géométrie ne sont pas des possibilités logiques formalisées à l'aide de systèmes d'axiomes, mais bien des énoncés vérifiables expérimentalement, le caractère approximatif des mesures empiriques ne permettant pas de trancher avec certitude entre toutes ces hypothèses.

La dette de Riemann à l'égard de Gauss est considérable, mais elle ne se limite pas au traité sur les surfaces courbes. En effet, Riemann cite explicitement deux œuvres de Gauss : le second mémoire sur les résidus biquadratiques écrit en latin sous le titre *Theoria Residuorum Biquadraticorum, commentatio secunda* (1831), dont le contenu est résumé en

42. voir en particulier C. F. Gauss, lettre à Bessel, 9 avril 1830, in *Werke*, Bd. VIII, *op. cit.*, p. 201.

langue allemande dans les *Göttingiche gelehrte Anzeigen* datant du 23 avril 1831 ; le mémoire de jubilé (1849) intitulé *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*. Or, ces deux textes ne relèvent pas de la géométrie différentielle. Ainsi, le second mémoire sur les résidus biquadratiques appartient au domaine de l'arithmétique. Quant au mémoire de jubilé auquel nous avons déjà fait allusion, il contient une nouvelle preuve du théorème fondamental de l'algèbre. Riemann entend évoquer tous les écrits de Gauss dans lesquels il est question de grandeurs et de variétés, qu'elles soient continues ou discrètes, preuve du caractère transversal de son *Habilitationsvortrag*. D'ailleurs, dans la première partie de sa leçon il évoque les variétés discrètes en sus des variétés continues.

En outre, le vocabulaire employé par Riemann pour caracériser les déterminations métriques établies empiriquement est exactement celui de Gauss lorsqu'il effectue ses mesures de géodésie et qu'il détermine la marge d'erreur qu'elles peuvent comporter. On retrouve de part et d'autre les mêmes termes : « Unsicherheit », « Wahrscheinlichkeit », « Genauigkeit », « empirische Gewissheit », etc. Par exemple, dans les *Göttingiche gelehrte Anzeigen* du 26 février 1821, Gauss écrit :

> Alle Beobachtungen, die sich auf Grössenbestimmungen aus der Sinnenwelt beziehen, können, mit welcher Genauigkeit, und mit wie vortrefflichen Werkzeugen sie auch angestellt werden, nie *absolute* Genauigkeit haben ; sie bleiben immer nur Näherungen, grössern oder kleinern Fehlern ausgesetzt. [43]

À la fin de sa *Leçon d'habilitation*, Riemann applique littéralement cet argument aux « rapports métriques », qui demeurent toujours inexacts [ungenau] lorsqu'ils sont déterminés empiriquement, quelle que soit la précision de nos mesures. Enfin, Riemann et Gauss assignent exactement le même statut à la géométrie : elle n'est ni purement *a priori* ni complètement fondée sur l'expérience.

À s'en tenir aux emprunts de Riemann à Gauss, on prend déjà conscience que cette *Leçon d'habilitation* n'est pas une « simple » généralisation du traité des surfaces courbes. Riemann est plus ambitieux : il veut constituer une théorie générale des grandeurs n fois étendues. Mais, réciproquement, Riemann ne se contente pas d'invoquer Gauss. Il cite Pfaff, Jacobi, Abel ou encore Dirichlet. Il fait allusion à leurs contributions en analyse puisqu'il mentionne tour à tour « l'étude des fonctions analytiques à plusieurs valeurs » et la « théorie générale des équations différentielles ». Riemann introduit le concept de variété continue de dimension finie quelconque parce qu'il constitue un support géométrique pour étudier ces diverses branches de l'analyse. Il est donc inexact de prétendre, à l'image de Weyl, que le *Habilitationsvortrag*

43. C. F. Gauss, *Werke*, Bd. IV, p. 95.

peut être étudié à la lumière d'une filiation *simple* entre Gauss et Riemann : non seulement les emprunts de Riemann à Gauss sont très complexes, mais de plus Riemann ne se réfère pas exclusivement à Gauss. La science des grandeurs n fois étendues n'a pas pour unique fonction d'éclairer les fondements de la géométrie et les propriétés de l'espace physique, elle participe à un projet plus vaste de *géométrisation de l'analyse* qui était déjà à l'œuvre dans la *Dissertation*.

1.2.2 Les variétés [Mannigfaltigkeiten] discrètes et « continues »

La lecture de la première partie de la leçon de Riemann est d'autant plus déroutante que l'on peine à repérer le lien entre ce que lui-même entend par variété et la définition formalisée de ce concept à laquelle nous sommes habitués. Il commence par distinguer les variétés *discrètes* et *continues* :

> Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une variété continue ou une variété discrète ; chacun en particulier de ces modes de détermination s'appelle, dans le premier cas, un point, dans le second cas un élément de cette variété. [44]

Pour l'instant, Riemann ne précise pas ce qu'il entend par continuité. À la suite de R. Chorlay, on peut supposer que la notion de continuité renvoie chez Riemann à une propriété de continuité *et* de connexité par arcs. [45] Nous verrons cependant dans ce qui suit qu'il reste attaché à des représentations intuitives et donc approximatives de la continuité et qu'il ne distingue pas clairement structure topologique et structure différentielle sur une variété. En outre, il n'insiste absolument pas sur la relation d'*appartenance* d'un « mode de détermination » à un *ensemble* appelé *variété*, il s'intéresse exclusivement aux *types de liaison* entre ces modes de détermination, selon qu'il y a continuité ou non. De plus, il circonscrit le concept d'« élément » aux variétés discrètes : pour Riemann, des éléments sont des objets particuliers que l'on peut dénombrer. Ces deux remarques montrent que l'approche de Riemann n'est pas *ensembliste*. En effet, dans une perspective ensembliste, on fait totalement abstraction des relations entre éléments au sein d'un ensemble. De plus, la nature d'un « élément » n'est pas spécifiée. Alors que pour Riemann il n'y a d'éléments que dans des variétés discrètes, dans une perspective ensembliste le concept d'élément s'applique indistinctement à des ensembles continus ou discrets. Pour le dire autrement, Riemann in-

44. B. Riemann, *op. cit.*, p. 282.
45. R. Chorlay, *op. cit.*, p. 71-72.

troduit une ligne de démarcation tranchée entre variétés discrètes et variétés continues en s'appuyant sur deux couples de distinctions : (a) la distinction éléments / points, (b) la distinction dénombrement / mesure. En revanche, la théorie des ensembles occupe une position de surplomb par rapport à ces types spécifiques d'ensembles que sont les variétés continues et les variétés discrètes. [46]

Riemann ne réduit pas le champ d'application du concept de variété à des objets mathématiques. Il montre notamment que les variétés discrètes ont une application fréquente dans la vie ordinaire [in gemeinen Leben], à la différence des variétés continues. Dans ce dernier cas, il se réfère aux objets sensibles ou aux couleurs. On peut tout d'abord supposer que Riemann s'adapte ici à son auditoire, ce qui l'amène à expliciter de manière intuitive l'idée de « passage continu » d'un point à un autre dans une variété. Quoi qu'il en soit, on ne trouve aucune trace d'une formalisation de la propriété de continuité dans cette leçon et cela tient aussi au fait que Riemann demeure attaché à une *anschauliche Mathematik*. Dans son commentaire du *Habilitationsvortrag* (1919), Weyl tire prétexte de ces passages sur les variétés continues pour opposer deux manières d'envisager la continuité : la première, qu'il qualifie d'atomistique, caractérise le continu numérique, c'est-à-dire $\mathbb{R}$; la seconde, qui est fondée sur l'intuition sensible, envisage la continuité spatiale ou temporelle comme un flux dont les parties ne peuvent pas être réduites à des éléments individualisés. Weyl fait ici allusion à une distinction qui se trouve dans *Das Kontinuum*, ouvrage dans lequel il utilise des procédures constructives pour engendrer le continu numérique — dans une perspective « atomistique » — avant de sa rallier à la conception brouwerienne du continu comme « libre devenir ».

Dans la suite de sa leçon, Riemann s'intéresse pour l'essentiel aux variétés « continues » (généralement continues et supposées différentiables). Avant de parvenir à ce point, il importe de savoir ce qui pourrait correspondre mathématiquement à des variétés *discrètes*. Voici l'élément de réponse le plus plausible. Nous avons remarqué qu'au début de la première partie de sa leçon, Riemann mentionne le second mémoire de Gauss sur les résidus biquadratiques (1831). Cette référence a d'abord de quoi surprendre, puisque ce texte ne relève ni de l'analyse, ni de la géométrie différentielle, mais de l'arithmétique. Pour être plus précis,

46. Voir en particulier E. Scholz, *Geschichte der Mannigfaltigkeitsbegriff, von Riemann bis Poincaré*, Basel, Berlin, Boston, Birkhäuser, 1980, p. 31 : « In moderner Sprache abstrahiert Cantor also von jeder Struktur, in der sich Beziehungen zwischen den Elementen einer Menge ausdrücken können ; während für Riemann stets Beziehungen zwischen den Individua existieren, durch die insbesondere die Typen « stetige » und « diskrete » Mannigfaltigkeit unterscheidbar werden ».

Gauss y développe une arithmétique des nombres complexes, bref il étudie les « entiers complexes » — c'est-à-dire les entiers de Gauss — qui correspondent aux nombres de la forme $z = a + bi$, où a et b sont des entiers relatifs. L'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss a une structure d'anneau euclidien ; il possède donc des propriétés arithmétiques similaires à celles de $\mathbb{Z}$. Comme le remarque Gauss, le plan complexe est muni de deux systèmes de droites parallèles, deux droites qui appartiennent respectivement à ces deux systèmes sont orthogonales. Chaque élément de $\mathbb{Z}[i]$ peut être considéré comme un point d'intersection des droites d'équation $x = a$ et $y = bi$ où a et b sont des entiers. Nous pouvons alors nous représenter une variété discrète de dimension 2. Gauss emploie d'ailleurs l'expression « Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen » pour caractériser $\mathbb{Z}[i]$. [47] Il est très vraisemblable que Riemann songe à ce type d'exemples mathématiques lorsqu'il se réfère à des variétés discrètes. Mais il ne nous dit pas si et dans quelle mesure nous pourrions concevoir des variétés discrètes de dimension n. Toujours est-il que la référence au mémoire de Gauss sur les résidus biquadratiques s'éclaire : la science des grandeurs n fois étendues s'applique indistinctement aux variétés continues et aux variétés discrètes. Or, les entiers de Gauss forment une variété discrète bidimensionnelle.

Cela posé, Riemann entend résoudre deux problèmes. (1) Comment déterminer la *position* d'un point dans une variété continue ou d'un élément dans une variété discrète ? Riemann évoque à ce propos les « déterminations de lieu » [Ortsbestimmungen] dans une variété. (2) Quelles sont les conditions auxquelles une variété doit satisfaire pour que l'on puisse comparer deux quelconques de ses parties ? Une telle comparaison [Vergleichung] n'est pas du même ordre selon que l'on a affaire à des variétés discrètes ou continues. Pour les variétés discrètes, on utilise le « dénombrement » [Zählung] : il s'agit d'énumérer ou de dénombrer les éléments contenus dans l'une de ses parties. Dans le cas des variétés continues, il n'est pas question de dénombrement mais de « mesure » [Messung] et il importe de déterminer les conditions qui président à un tel processus. Voilà pourquoi, Riemann ajoute deux remarques : (a) il faut disposer d'un étalon de mesure [Massstab] transportable dans n'importe quelle région d'une variété continue [48] ; (b) les déterminations métriques doivent permettre d'établir des résultats qui sont indépendants de la position de la partie que l'on veut mesurer sur une variété : « les déterminations métriques exigent l'indépendance entre les grandeurs et le lieu ».

47. C. F. Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda*, résumé dans les *Göttingiche gelherte Anzeigen* du 23 avril 1831, in *Werke*, Bd. II, *op. cit.*, p. 176.

48. Au début de « Reine Infinitesimalgeometrie », Weyl montrera qu'il s'agit là d'un résidu de géométrie à distance dont on peut faire l'économie.

Le premier problème ne peut être résolu que si l'on construit rigoureusement des coordonnées locales ou, pour être plus proche du texte de Riemann, un système de quantités numériques qui nous permettent de caractériser la position d'un point p sur une variété. Traduisons cet argument en langage formalisé. Les variétés continues au sens de Riemann correspondent bien à des espaces topologiques dont les « ouverts » sont homéomorphes à ceux de $\mathbb{R}^n$ mais qui, *globalement*, n'ont pas les mêmes propriétés topologiques que $\mathbb{R}^n$. Il étudie donc directement les « variétés continues » de manière intrinsèque, c'est-à-dire sans se référer à un « espace plus grand » dans lequel elles seraient plongées. La science des grandeurs n fois étendues que Riemann développe se caractérise non seulement par sa généralité remarquable, mais également par un degré d'abstraction que l'on ne retrouve pas dans le mémoire de Gauss sur les surfaces courbes. En effet, même s'il parvient à étudier la géométrie intrinsèque d'une surface courbe, Gauss commence par supposer qu'elle est plongée dans $\mathbb{R}^3$. En revanche, Riemann conçoit d'entrée de jeu les variétés *abstraitement*, ce qui montre une nouvelle fois que son *Habilitationsvortrag* relève des mathématiques conceptuelles. Certes, Riemann généralise en un certain sens le traité de Gauss sur les surfaces courbes, mais cette généralisation ne s'effectue pas de manière homogène et parfaitement continue, contrairement à ce que soutient Weyl au début du § 11 de *Raum, Zeit, Materie* : Riemann opère un véritable décrochage en termes de niveau d'abstraction par rapport à Gauss. Cela ne tient pas au fait que Riemann s'intéresse à des variétés continues de dimension finie quelconque. Il nous paraît beaucoup plus significatif de souligner que Riemann s'abstrait d'emblée d'un « espace » dans lequel seraient plongées les variétés qu'il considère.

Ajoutons que dans cette première partie, Riemann conçoit les variétés indépendamment de toute détermination métrique ; il les analyse donc du point de vue de l'*analysis situs*. En revanche, les surfaces courbes de Gauss sont munies d'entrée de jeu d'une structure métrique définie par un $\mathrm{d}s^2$. Pour le dire autrement, Gauss s'intéresse exclusivement aux déterminations métriques sur une surface en 1828, en revanche Riemann distingue deux types de propriétés au cours de sa leçon : les propriétés de situation et les propriétés métriques. Cela signifie qu'il différencie et qu'il hiérarchise les concepts de variété continue et de variété métrique (riemannienne) :

> Les recherches auxquelles un tel cas peut donner lieu forment une branche générale de la théorie des grandeurs, indépendante des déterminations métriques, et dans laquelle elles ne sont pas considérées comme existant indépendamment de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme des régions dans une variété. [49]

49. B. Riemann, *op. cit.*, p. 283.

Il est bien ici question d'une géométrie des situations qui est fondée sur la localisation de certains points à l'aide de coordonnées dans des « régions » d'une variété envisagée abstraction faite de toute détermination métrique. Le terme de région est d'une importance fondamentale dans le passage que nous avons cité : Riemann adopte un point de vue local qu'il maintient jusqu'à la fin de sa leçon. Pour résumer, Riemann s'abstrait de tout espace dans lequel seraient plongées les variétés considérées, mais de plus il dissocie leurs structures topologique et métrique. Comme le montre la suite de son raisonnement, il suppose implicitement que les variétés continues sont différentiables un certain nombre de fois.

Toujours est-il que la théorie générale que Riemann développe dans cette leçon est plus large que ce que nous appelons maintenant la *géométrie riemannienne*. En effet, la géométrie riemannienne a pour objet les variétés riemanniennes, c'est-à-dire une certaine classe de variétés métriques qui sont euclidiennes dans l'infinitésimal, ce qui signifie qu'elles se caractérisent par la donnée d'une structure euclidienne en chacun de leurs espaces tangents. Or, non seulement dans la seconde partie de sa leçon, Riemann envisage en passant d'autres types de variétés métriques, mais de plus dans la première partie de sa leçon, il commence par introduire des variétés qui n'ont pas de structure métrique du tout et dont l'étude relève exclusivement de la géométrie des situations. Les deux premières parties de sa leçon recouvrent d'ailleurs la distinction entre géométrie des situations (première partie) et géométrie métrique (seconde partie). Ainsi, au cours de son raisonnement, Riemann ne procède pas du particulier — la géométrie euclidienne — au général — la géométrie riemannienne —, mais de la situation la plus générale et la plus abstraite — les variétés continues de dimension finie quelconque non plongées dans un espace de dimension plus grande — à la situation la plus spécifique et la plus concrète — les hypothèses concernant la structure métrique de l'espace physique. Cette manière de procéder confirme son attachement aux mathématiques conceptuelles.

Aux yeux de Riemann, les déterminations métriques sur une variété ne sont donc pas données d'avance : il faut préciser les *conditions* requises pour qu'une variété (continue et différentiable un certain nombre de fois) soit dotée d'une structure métrique. Même s'il se limite *in fine* à des variétés « riemanniennes », i.e. euclidiennes dans l'infinitésimal, Riemann est parfaitement conscient qu'il s'agit d'une classe spécifique de variétés métriques.

Avant de clore notre analyse partielle de la première partie du *Habilitationsvortrag*, nous pouvons reprendre à notre compte un argument que nous avions mis en avant dans notre commentaire de la *Dissertation* de Riemann. Nous avions alors montré que sa démarche en analyse complexe est *abstraite* — notamment lorsqu'il introduit abruptement des surfaces à plusieurs feuillets revêtant le plan complexe —, même si elle demeure attachée à des représentations

intuitives. De plus, nous avions indiqué qu'à aucun moment il n'utilise des procédures axiomatiques. Il en va de même ici. Riemann se contente d'expliciter et de décrire les concepts généraux et abstraits de variété discrète et de variété continue, mais il ne les définit pas en se fondant sur une liste d'axiomes. Il met donc en œuvre une mathématique conceptuelle et une pensée de l'abstrait, sans préfigurer la « méthode axiomatique » que Hilbert utilisera d'ailleurs en 1902 pour proposer une première définition rigoureuse des variétés topologiques bidimensionnelles — une telle définition étant fondée sur le concept de voisinage. Les passages obscurs de la première partie de la leçon de Riemann dans lesquels il chercher à engendrer une variété de dimension n avant de la décomposer en sous-variétés montrent son attachement à des procédures constructives profondément distinctes des procédures axiomatiques.

1.2.3 Déterminations métriques sur une variété

Dans la deuxième partie de sa leçon, Riemann étudie les « rapports métriques dont une variété est susceptible et des conditions suffisantes pour la détermination de ces rapports métriques ».[50] Il précise aussitôt le point de vue qu'il adopte pour parvenir à cette fin :

> Ces rapports métriques ne peuvent être étudiés que dans des concepts de grandeur abstraits, et leur dépendance ne peut se représenter que par des formules. Dans certaines hypothèses cependant, ils sont décomposables en rapports qui, pris séparément, sont susceptibles d'une représentation géométrique, et par là il devient possible d'exprimer géométriquement les résultats du calcul.[51]

Riemann ne se restreint donc pas à des objets mathématiques connus — nous pensons en particulier à certaines surfaces courbes —; sa démarche est abstraite et conceptuelle, comme en témoigne l'expression « concepts de grandeur abstraits » : il entend concevoir les rapports métriques dans le cadre des variétés continues (et indéfiniment différentiables) à n dimensions. Mais ce point de vue « abstrait » n'est pas exclusivement formel, analytique et calculatoire. Lorsque cela est envisageable, Riemann n'hésite pas à utiliser des « représentations géométriques ». Ce passage est doublement intéressant : il témoigne en faveur du haut niveau d'abstraction adopté par Riemann dans cette leçon, il montre en même temps que celui-ci refuse de s'en tenir à des « formules » : on doit pouvoir les « exprimer géométriquement » dès que cela est possible. On pourrait penser que Riemann se contente ici de s'adapter à son auditoire. En réalité, notre commentaire de ses travaux en analyse complexe montre la complémentarité entre approches géométrique et analytique dans son

50. *ibid.*, p. 285.
51. *ibid.*, p. 285.

œuvre. Par extension, la démarche et le raisonnement de Riemann relèvent à la fois de la *begriffliche Mathematik* et de l'*anschauliche Mathematik* qu'il combine et qu'il dialectise.

Dans le cas des surfaces courbes, Riemann admet que ces deux difficultés ont été entièrement résolues par Gauss dans son traité des surfaces courbes. [52] Aussi cette deuxième partie est-elle un prolongement et une généralisation des travaux de Gauss sur les surfaces courbes. Weyl insiste d'ailleurs sur ce point dans le § 11 de *Raum, Zeit, Materie*. Cependant, si Riemann s'était contenté de *prolonger* le traité de Gauss, il n'aurait fait qu'étudier la géométrie intrinsèque des sous-variétés métriques contenues dans $\mathbb{R}^n$. En réalité, il pratique une véritable dénivellation par rapport à Gauss puisqu'il considère des variétés métriques à n dimensions qui ne sont pas plongées dans $\mathbb{R}^{n+1}$. De plus, il ne se restreint pas *a priori* à des variétés métriques ≪ riemanniennes ≫.

Pour rendre le raisonnement de Riemann plus compréhensible, exhibons les deux contraintes auxquels il assujettit les déterminations métriques sur une variété. Weyl les résume parfaitement dans le cas d'un espace à trois dimensions au cours du § 11 de *Raum, Zeit, Materie* qui est précisément consacré à la géométrie riemannienne :

> Ce que nous savons et ce à quoi nous nous tenons, c'est que notre espace est une multiplicité à trois dimensions, que les éléments linéaires infiniment petits s'y laissent mesurer et comparer entre eux indépendamment de leur position et de leur direction, et que le carré de leur longueur, c'est-à-dire de la distance de deux points infiniment voisins est donnée par une forme quadratique de différentielles de la forme (...) $[\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k]$ après qu'on y a caractérisé chaque point par des coordonnées x quelconques. [53]

(a) L'idée selon laquelle ≪ les éléments linéaires infiniment petits se laissent mesurer et comparer entre eux indépendamment de leur position et de leur direction ≫ peut se formuler comme suit : Riemann suppose que l'on peut toujours comparer les longueurs de deux vecteurs attachés à des points distincts d'une variété métrique. C'est effectivement vrai dans le cas d'une variété riemannienne : soient M une variété riemannienne, p un point de M et $v_p \in T_pM$ un vecteur tangent. La longueur de v_p n'est pas modifiée par déplacement parallèle — intuitivement, sans glissement ni retournement — le long d'un lacet issu de p. En revanche, son orientation l'est. Riemann formule l'hypothèse (a) en ces termes :

> L'hypothèse qui s'offre d'abord, et que je développerai ici, est celle dans laquelle la longueur des lignes est indépendante de leur position, et où par suite chaque ligne est mesurable au moyen de chaque autre. [54]

52. *ibid.*, p. 286.
53. H. Weyl, *op. cit.*, p. 78.
54. B. Riemann, *op. cit.*, p. 286.

(b) Il envisage d'abord des classes très générales de variétés métriques ; mais il se restreint *in fine* à des *variétés riemanniennes*. Son raisonnement ne consiste donc pas ici à généraliser la théorie des surfaces courbes aux variétés riemanniennes par induction sur le nombre de dimensions. Au contraire, Riemann adopte un point de vue surplombant, au sens où il considère les variétés euclidiennes dans l'infinitésimal comme une classe spécifique parmi des variétés métriques plus générales. En effet, il part de la condition suivante :

> l'élément linéaire pourra être une fonction homogène quelconque du premier degré des quantités $\mathrm{d}x$, qui restera invariable lorsqu'on changera les signes de toutes les quantités $\mathrm{d}x$, et dans laquelle les constantes arbitraires seront des fonctions continues des quantités x. [55]

Ainsi, l'élément linéaire $\mathrm{d}s = f_P(x_1, x_2, ..., x_n; \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n)$ au point P satisfait à la condition :

$$f_P(x_1, x_2, ..., x_n; \varrho\mathrm{d}x_1, \varrho\mathrm{d}x_2, ..., \varrho\mathrm{d}x_n) = |\varrho| f_P(x_1, x_2, ..., x_n; \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n),$$

où ϱ est un facteur réel de proportionnalité. Or, à s'en tenir à cette première condition, Riemann ne circonscrit pas son raisonnement à des variétés riemanniennes ; il conçoit de fait une classe de variétés plus générale qui correspond aux espaces de Finsler. [56] Ce point n'a pas échappé à Weyl dans son commentaire du *Habilitationsvortrag* :

> Si, avec Riemann, on suppose l'élément linéaire mesurable, alors la variété admet une détermination métrique en un point P lorsque, à chaque élément linéaire (de composantes $\mathrm{d}x_i$) correspond une mesure numérique
>
> $$\mathrm{d}s = f_P(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, ..., \mathrm{d}x_n).$$
>
> La fonction f_P est une fonction homogène du premier ordre au sens où, si l'on multiplie les arguments $\mathrm{d}x_i$ par un facteur de proportionnalité réel commun ϱ, alors la fonction f_P est multipliée par $|\varrho|$. On doit naturellement supposer que les divers points de la variété ne se différencient pas du point de vue de la détermination métrique attachée à chacun d'eux ; cela se formule analytiquement comme suit : les fonctions f_P corrrespondant à des points différents P sont toutes issues d'une fonction f par des transformations linéaires des variables. C'est bien le cas lorsque f_P^2 est une forme quadratique définie positive en tout point de la variété :
>
> $$f = \sqrt{(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + ... + (\mathrm{d}x_n)^2}.$$
>
> en revanche ce n'est plus le cas en général, lorsque f_P est la racine quatrième d'une forme du quatrième degré avec des coefficients variables d'un point à un autre. [57]

55. *ibid.*, p. 287.

56. Voir à ce propos J. Merker, *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Helmholtz-Lie*, Paris, éd. Hermann, 2010, p. 40 : ≪ Or cette nouvelle conclusion provisoire ne nécessite absolument pas que les rapports métriques soient euclidiens dans l'infinitésimal. En effet, cette propriété demande seulement que les longueurs se dilatent dans l'infinitésimal de manière purement homothétique, exigence minimale qui laisse encore disponible une très grande généralité ≫.

57. H. Weyl, commentaire au *Habilitationsvortrag* de Riemann, dans B. Riemann, *Über die Hypothesen,*

Dans ce passage, Weyl est parfaitement conscient du niveau remarquable de généralité adopté par Riemann lorsque ce dernier introduit des déterminations métriques sur une variété différentielle. Il fait d'ailleurs le rapprochement entre l'argument de Riemann et la thèse que Finsler vient tout juste de soutenir (1918). Les variétés riemanniennes sont une classe particulière d'espaces de Finsler. En outre, à la fin de cette citation, Weyl reprend le passage de la *Leçon d'habilitation* dans lequel Riemann envisage des variétés telles que « l'élément linéaire serait exprimé par la racine quatrième d'une expression différentielle du quatrième degré »[58]. Riemann ajoute à ce propos : « L'étude de cette classe plus générale n'exigerait pas des principes essentiellement différents, mais elle prendrait un temps assez considérable et elle ne contribuerait pas beaucoup, relativement, à éclaircir la théorie de l'espace, d'autant plus que les résultats ne pourraient s'exprimer géométriquement ».[59]

Il privilégie finalement les variétés euclidiennes dans l'infinitésimal, parce qu'elles représentent le niveau de généralité suffisant pour clarifier les propriétés de l'espace physique. En outre, on peut s'appuyer sur des représentations géométriques pour les décrire — preuve que Riemann est attaché à une *anschauliche Mathematik*. Il justifie cette restriction pour des raisons pragmatiques. Dans son commentaire, Weyl ne se satisfait pas de cet argument et il se demande si les variétés riemanniennes ne jouissent pas de propriétés mathématiques remarquables qui expliqueraient pourquoi elles constituent une classe privilégiée parmi les espaces de Finsler. Weyl commence tout simplement à esquisser le problème de l'espace qu'il reformule de manière légèrement différente en 1921 avant de le résoudre complètement en 1922-1923.

Par extension, les hypothèses (a) et (b) sur lesquelles Riemann s'appuie dans la deuxième partie de sa leçon sont centrales pour comprendre les enjeux des recherches menées par Weyl en géométrie différentielle entre 1918 et 1923. Ainsi, dans *Reine Infinitesimalgeometrie* et au cours du § 16 de *Raum, Zeit, Materie* (troisième édition, 1919 et quatrième édition, 1921),[60] Weyl construit une géométrie *purement* infinitésimale qui ne satisfait plus à l'hypothèse (a). Cette dernière constitue selon lui un résidu de géométrie à distance ; Riemann ne serait donc pas parvenu à réaliser le projet d'une géométrie des actions de contact dans toute sa radicalité. Le but de Weyl est alors triple : (1) proposer une généralisation de la géométrie riemannienne, (2) dessiner les contours d'une première théorie de jauge, (3) parvenir à une

welche der Geometrie zu Grunde liegen, Berlin, éd. Springer, pagination de l'édition de 1921, p. 26.

58. B. Riemann, *op. cit.*, p. 287.

59. *ibid.*, p. 287.

60. Voir en particulier, H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, dritte Auflage, (1919), *op. cit.*, § 16 : « Der metrische Raum », p. 108 et suiv.

théorie unifiée des champs électromagnétique et gravitationnel dans le cadre de la géométrie purement infinitésimale qu'il a nouvellement introduite. [61]

L'hypothèse (b) indique que les variétés riemanniennes constituent une classe particulière d'espaces de Finsler que Riemann privilégie sans expliquer *mathématiquement* pourquoi il les privilégie. Dans son commentaire du *Habilitationsvortrag* (1919), Weyl s'interroge sur ce choix : parmi toutes les variétés métriques envisagées par Riemann, pourquoi se restreindre à celles qui sont dites « riemanniennes » ? Weyl reformule ensuite ce problème de manière un peu plus large : il recherche le caractère commun aux variétés pythagoriciennes dans l'infinitésimal, i.e. dont la structure métrique est définie par une forme quadratique *non dégénérée*. [62] Weyl exploite donc *mathématiquement* le *Habilitationsvortrag* de Riemann en discutant les hypothèses (a) et (b). Il propose bel et bien une lecture *mathématicienne* de cette œuvre. Dans le premier cas, i.e. lorsqu'il élabore sa géométrie purement infinitésimale (1918), il se contente de reprendre une thèse communément admise selon laquelle la *Leçon d'habilitation* de Riemann constitue l'acte de naissance de la géométrie riemannienne. Dans le second cas en revanche, Weyl se montre plus attentif à la lettre même de cette œuvre et il découvre que Riemann adopte d'abord un point de vue très général sur les variétés métriques avant de se restreindre aux variétés « riemanniennes » : il ne s'agit donc plus de critiquer la géométrie riemannienne parce qu'elle ne satisferait pas aux exigences d'une géométrie purement infinitésimale, mais d'expliquer pourquoi Riemann se restreint aux variétés « riemanniennes ». Nous analyserons précisément ce point dans les chapitres 3 et 4 de la présente partie.

Ainsi, Riemann se limite finalement aux variétés munies d'une structure métrique déterminée par une forme quadratique définie positive. [63] En effet, il part de l'élément linéaire ds — qui permet de mesurer la longueur d'arc d'une courbe entre deux points infiniment voisins, respectivement P et P' dont les coordonnées sont respectivement $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et

61. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 de la présente partie qui est entièrement consacré à la géométrie purement infinitésimale au sens de Weyl.

62. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 de la présente partie qui est entièrement consacré au problème de l'espace.

63. En effet, une métrique riemannienne sur une variété indéfiniment différentiable M est la donnée d'une application (différentiable)

$$g : P \in M \to g_P$$

qui, à tout point P de M, associe un produit scalaire $\mathbf{g}_P$ sur $T_P M$. On rappelle qu'un produit scalaire sur $T_P M$ est une forme bilinéaire — c'est-à-dire un tenseur deux fois covariant — $\mathbf{g}_P : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$ qui est symétrique et définie positive. Nous dirons que $\mathbf{g}$ est une métrique riemannienne et que $(M, \mathbf{g})$ est une variété riemannienne.

$(x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, ..., x_n + \mathrm{d}x_n)$ — et il affirme que le $\mathrm{d}s$ est

> la racine carrée d'une fonction entière homogène du second degré, toujours positive, des quantités $\mathrm{d}x$, dans laquelle les coefficients sont des fonctions continues des quantités x. [64]

Cette fonction correspond à l'expression :

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j.$$

Riemann précise que le $\mathrm{d}s^2$ « contient $n\frac{n+1}{2}$ coefficients qui sont des fonctions arbitraires des variables indépendantes ». [65] Autrement dit, il est parfaitement conscient que le $\mathrm{d}s^2$ est symétrique, i.e. $g_{ij} = g_{ji}$. De plus il suppose que la métrique doit être *définie positive*, comme en atteste l'expression « toujours positive ». Nous allons voir que, dans la suite de sa leçon, il s'intéresse plus particulièrement aux variétés riemanniennes homogènes — dont la mesure de courbure est constante — et aux variétés localement isométriques à un espace euclidien de dimension n. Pour ce faire, il généralise aux variétés riemanniennes le concept de mesure de courbure qu'il emprunte à Gauss, mais il ne la formule pas analytiquement dans ce cas plus général, tout du moins si l'on s'en tient à son *Habilitationsvortrag*.

1.2.4 Mesure de courbure sur une variété et classification des variétés homogènes

Comme le montre la fin du paragraphe (II, 1), Riemann propose de classer les variétés métriques (riemanniennes) :

> Pour pouvoir maintenant passer en revue les diversités essentielles de toutes les variétés susceptibles d'être représentées sous la forme considérée, il est nécessaire de laisser de côté les diversités provenant du mode de représentation, et l'on y parvient en choisissant les grandeurs variables d'après un principe déterminé. [66]

Par exemple, si l'on compare des surfaces courbes en fonction de leur « mode de représentation », on est amené à croire que des surfaces coniques et cylindriques diffèrent fondamentalement d'un plan euclidien, alors qu'elles sont localement isométriques à lui. Riemann s'approprie la notion de « mesure de courbure » qu'il emprunte à Gauss et il la généralise aux variétés métriques (riemanniennes) de dimension n — ce qui ne pourra être formalisé analytiquement qu'avec l'introduction du tenseur de courbure qui n'apparaît pas explicitement dans le *Habilitationsvortrag* de Riemann. En revanche, ce dernier le formule dans un

64. B. Riemann, *op. cit.*, p. 287.
65. *ibid.*, p. 288.
66. *ibid.*, p. 288.

écrit plus tardif, à savoir le *Commentatio mathematica* qu'il envoie à l'Académie de Paris en 1861.[67] À partir de (II, 3), il revient sur la classification des surfaces courbes. Comme il le précise, Gauss étudie exclusivement *leurs propriétés géométriques intrinsèques*, i.e. il « fait abstraction des rapports extérieurs »[68], c'est-à-dire de l'espace ambiant dans lequel elles sont initialement plongées. Riemann rappelle brièvement que les seules transformations permises sur une variété métrique sont les flexions [Biegungen] et non pas les extensions [Dehnungen], il reprend explicitement une distinction qui se trouvait déjà chez Gauss. Ceci lui permet de préciser que des surfaces coniques et cylindriques peuvent être « regardées comme équivalentes à un plan », par cela seul qu'elles sont développables, en revanche, une surface sphérique ne peut coïncider avec un plan que si on lui fait subir une extension.[69] Riemann rappelle ensuite que la mesure de courbure en un point P d'une surface S est le produit des deux courbures principales χ_1 et χ_2 en P. Ces dernières correspondent aux valeurs extrémales des courbures normales en P.[70] Gauss établit ce résultat dans sa théorie des surfaces courbes. Il note T et V les deux courbures principales en P et il montre que « la courbure de la surface en un point $[p]$ prend l'expression très simple $\kappa = T \cdot V$ ».[71]

Riemann résume ensuite à grands traits la « formule de Gauss-Bonnet ». Il se donne un triangle géodésique Δ de sommets a, b, c et respectivement d'angles α, β, γ sur une surface courbe S — par exemple, l'angle α est formé par les vecteurs tangents aux lignes ab et ac dans le plan tangent à S au point a. Il affirme que « L'excès de la somme des angles d'un triangle infiniment petit sur deux angles droits est proportionnel à l'aire du triangle ».[72] De manière plus précise, l'intégrale de la courbure de Gauss κ sur l'intérieur du triangle géodésique abc

67. B. Riemann, *Commentatio mathematica* qua respondere tentatur quaestioni ab III$^{\text{ma}}$ Academia Parisiensi Propositae : « trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes », in B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke*, *op. cit.*, p. 370 et suiv.

68. B. Riemann, *op. cit.*, p. 290.

69. *ibid.*, p. 291 : « La sphère « ne peut pas se transformer sans extension en un plan ».

70. De manière plus précise, soient S une surface courbe, f une représentation paramétrique de S, $P = (u, v)$ un point de S, $T_P S$ le plan tangent à S au point P. Les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ sont respectivement les vecteurs tangents aux courbes coordonnées u et v au point P. Notons $h^+(u, v)$ le vecteur normal unitaire à S au point p. L'endomorphisme de Weingarten $\mathcal{W}_P$ de $T_P S$ est défini par :

$$\mathcal{W}_P\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\right) = -\frac{\partial h^+}{\partial u}(u,v) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_P\left(\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right) = -\frac{\partial h^+}{\partial v}(u,v).$$

Les courbures principales χ_1 et χ_2 sont les valeurs propres de cet endomorphisme.

71. C.-F. Gauss, *Recherches générales sur les surfaces courbes*, *op. cit.*, p. 20.

72. B. Riemann, *op. cit.*, p. 291.

vérifie :

$$\int_{\Delta} \kappa \mathrm{d}A = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

ce qui correspond au résultat énoncé par Riemann. Il généralise ensuite la notion de mesure de courbure — c'est-à-dire de courbure de Gauss — à des variétés de dimension finie quelconque. Il précise qu'une variété plane est telle que sa mesure de courbure est partout nulle : il s'agit d'un cas particulier de variétés à courbure constante.

Ainsi, alors que dans les paragraphes I.1. à II.1. Riemann munit les variétés « continues » (topologiques et différentiables un certain nombre de fois) d'une structure métrique, à partir du paragraphe II.2. il identifie des sous-espèces parmi les variétés métriques « riemanniennes » en se fondant sur la notion de mesure de courbure qu'il emprunte à Gauss. Riemann s'intéresse de près aux espaces *homogènes*, c'est-à-dire aux variétés « riemanniennes » dont la mesure de courbure est constante. Trois cas de figure se présentent alors : soit cette mesure de courbure est strictement positive, soit elle est strictement négative, soit elle est partout nulle. Les géométries elliptique, hyperbolique et euclidienne correspondent respectivement à ces trois possibilités. Bref, le concept de variété riemannienne permet d'embrasser dans une même théorie les géométries métriques euclidienne et non-euclidiennes. Il est donc parfaitement erroné de croire que Riemann ne fait qu'ajouter la géométrie elliptique aux géométries euclidienne et hyperbolique au cours de sa *Leçon d'habilitation*. H. Weyl le précise d'ailleurs avec force :

> la géométrie de Bolyai-Lobatschefsky et la géométrie sphérique sont contenues comme cas particuliers dans la géométrie riemannienne aussi bien que la géométrie euclidienne. [73]

Bref, Riemann généralise, unifie et complète les résultats dus à Gauss dans son traité sur les surfaces courbes. Il les *généralise*, puisqu'il raisonne *a priori* et abstraitement sur des variétés métriques « riemanniennes » de dimension finie quelconque ; il les *unifie*, dans la mesure où il fait le lien entre la théorie des surfaces courbes et la géométrie hyperbolique qui caractérise les propriétés des surfaces à mesure de courbure constante négative ; il les *complète* par cela seul qu'il introduit la géométrie « elliptique » à côté des géométries euclidienne et hyperbolique. Une telle généralisation est possible dans la mesure où le point de vue adopté par Riemann dans son *Habilitationsvortrag* est plus conceptuel et plus abstrait que celui de Gauss.

Nous pouvons ainsi rendre raison du parcours suivi par Riemann au cours des deux premières parties de son *Habilitationsvortrag* : il procède par emboîtement de concepts : il part du concept le plus général — celui de variété continue — à un sous-concept très

73. H. Weyl, *Temps, espace, matière*, *op. cit.*, p. 79.

spécifique : celui de variété métrique à mesure de courbure constante. C'est seulement à ce dernier niveau que l'on retrouve la géométrie euclidienne. Bref, les deux premières parties du *Habilitationsvortrag* sont structurées en fonction d'une hiérarchie entre les concepts suivants :

(1) variétés continues (et différentielles) — que Riemann distingue des variétés discrètes ;

(2) variétés riemanniennes — Riemann n'exclut pas au passage la possibilité des classes plus générales de variétés métriques dans sa *Leçon d'habilitation* ;

(3) variétés riemanniennes à mesure de courbure constante ;

(4) variétés riemanniennes à courbure constante nulle (géométrie euclidienne).

Riemann ne se contente pas d'aller du concept le plus général au concept le plus spécifique. Cet ordre est motivé par les hypothèses qu'il formule dans la dernière partie de sa leçon. Plus on descend dans cette hiérarchie, plus les propriétés que l'on assigne à l'espace physique sont incertaines. Pour le dire autrement, l'hypothèse selon laquelle l'espace physique est une variété continue est plus certaine que l'hypothèse selon laquelle il s'agit d'un espace métrique à courbure constante nulle, ce qui revient à relativiser très fortement la pertinence de la géométrie euclidienne pour mathématiser l'espace physique.

Au cours de la deuxième partie de sa leçon, Riemann fait plus : il commence à déterminer « le caractère commun » aux variétés dont la mesure de courbure est constante — on se situe alors au niveau (3) dans la hiérarchie que nous venons d'établir. Pour ce faire, il introduit une propriété que Helmholtz appellera « axiome de libre mobilité » [Axiom der freien Beweglichkeit] [74] :

> Le caractère commun de ces variétés dont la mesure de courbure est constante, peut aussi être exprimé en disant que les figures peuvent se mouvoir sans élargissement [Dehnung] en elles. Car il est évident que les figures en elles ne pourraient pas coulisser [verschiebar sein] et pivoter [drehbar sein] librement, si la mesure de courbure n'était pas la même en chaque point et dans toutes les directions. Mais d'autre part, les rapports métriques de la variété sont complètement déterminés par la mesure de courbure ; donc les rapports métriques autour d'un point et dans toutes les directions sont exactement les mêmes qu'autour dun autre point, et par conséquent, à partir de ce premier point, les mêmes constructions peuvent être transférées, d'où il s'ensuit que, dans les variétés dont la mesure de courbure est constante, on peut donner aux figures chaque position quelconque. [75]

L'extension [Dehnung] que subirait une figure si on la déplaçait sur une surface courbe signifierait que cette dernière n'admet pas les mêmes rapports métriques en tout point et donc qu'elle n'a pas une mesure de courbure constante ; par contraposition, on retrouve l'affir-

74. H. Helmholtz, « Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde Liegen », in *Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.A. Universität zu Göttingen*, (1868), p. 200.

75. B. Riemann, *op. cit.*, p. 292.

mation de Riemann. Cependant, les arguments très lapidaires qu'il utilise soulèvent deux difficultés. (i) Comment caractériser rigoureusement l'idée, très intuitive à premier abord, de mouvement d'une figure dans une variété ? (ii) Sur quelle base peut-on justifier « le caractère commun » ou distinctif des variétés à courbure constante par rapport aux autres, sur la base des propriétés remarquables des mouvements dont sont susceptibles des figures en leur sein ?

Les difficultés (i) et (ii) correspondent au problème de Riemann-Helmholtz que l'on peut également appeler le problème de l'espace dans le cas des variétés riemanniennes à courbure constante. Précisons immédiatement qu'en 1921-1923, Weyl « infinitémalise » le problème de Riemann-Helmholtz, puisqu'il recherche la caractéristique commune aux variétés « pythagoriciennes dans l'*infinitésimal* ». Cela posé, Riemann remarque que les figures ne subissent aucune déformation — littéralement aucune extension — lorsqu'elles se déplacent d'un endroit à un autre dans des variétés à courbure constante. Cet argument est encore très intuitif et le problème de Riemann-Helmholtz mérite d'être reformulé d'une manière plus adéquate. À suivre Engel et Lie,

> le problème de Riemann-Helmholtz demande d'indiquer des propriétés qui sont communes à la famille des mouvements euclidiens et aux deux familles de mouvements non euclidiens grâce auxquelles ces trois familles se distinguent de toutes les autres familles possibles de mouvements. [76]

Ces familles de mouvements jouissent d'une propriété particulière : il s'agit de groupes continus de transformations. Voilà pourquoi, à la suite de Lie et d'Engel, J. Tits précise qu'il s'agit du « problème de la caractérisation commune des géométries euclidiennes et non euclidiennes par des propriétés de « libre mobilité » de leurs groupes de mouvements ». [77] Mais, pour parvenir à une telle reformulation, il est nécessaire (a) de dégager les hypothèses minimales ou axiomes qui caractérisent les mouvements des figures dans des variétés homogènes, (b) d'interpréter ces mouvements en termes de transformations agissant sur ces mêmes variétés, (c) de montrer que l'ensemble de ces transformations forme un groupe continu de transformations. D'ailleurs la solution complète à ce problème fait intervenir des éléments de connaissance en théorie des groupes continus de transformations. Helmholtz commence à accomplir cette tâche en 1868-1870. En particulier, il énonce quatre axiomes qui président à la détermination des mouvements des figures dans des variétés homogènes et il interprète ces mouvements en termes de transformations des variétés elles-mêmes. Cela étant, il appartient à Lie et à Engel d'expliciter et de résoudre ce problème en s'appuyant systématiquement sur la théorie des

76. S. Lie, *Théorie des Groupes de transformations*, Tome III, Division 5, trad. Merker, *op. cit.*, p. 260.
77. J. Tits, *Notice sur les Travaux scientifiques*, I.2. Résumé des Travaux antérieurs à 1972, p. 9.

groupes continus de transformations.

Comme Weyl se situe par rapport aux travaux de Helmholtz et Lie sur les fondements de la géométrie lorsqu'il formule son problème de l'espace (1921-1923), nous nous proposons d'effectuer une brève mise en perspective historique sur le problème de Riemann-Helmholtz. En 1868, Helmholtz publie son fameux article intitulé « Über die Thatsachen, die der Geometrie Zu Grunde liegen », soit un an après la publication du *Habilitationsvortrag* de Riemann qu'il mentionne d'ailleurs à maintes reprises. Les « hypothèses » riemanniennes deviennent « des faits » [Tatsachen] aux yeux de Helmholtz. En voici la raison : ce dernier propose une conception radicalement *empiriste* des connaissances géométriques, ce qui n'était le cas ni chez Gauss, ni chez Riemann. [78] Il commence par formuler un problème d'ordre strictement épistémologique :

> Parmi les propositions de la géométrie, lesquelles ont une signification vraiment objective, lesquelles ne sont que des définitions, ou les conséquences de définitions, lesquelles ne dépendent que du mode de représentation ? [79]

Contrairement à des définitions, qui ne sont que des *conventions*, les axiomes qu'Helmholtz souhaite formuler doivent avoir une signification objective : ils jouent un rôle déterminant pour décrire la réalité empirique. Même si, par exemple, Poincaré reprendra à son compte « l'axiome de libre mobilité » que Helmholtz formule justement dans cet article, il faut être attentif aux différences de statut que ces deux auteurs assignent aux axiomes de la géométrie. Pour Helmholtz, ils ont un contenu objectif emprunté au domaine de la physique. Il instaure donc une ligne de démarcation très forte entre les axiomes (qui ont un sens objectif) et les définitions (qui sont purement « nominales »). Aux yeux de Poincaré, les axiomes de la géométrie constituent en revanche des définitions déguisées qui sont sous-déterminés par l'expérience. [80] *A fortiori*, Helmholtz refuse de considérer qu'un axiome puisse être formulé indépendamment de la nature des objets auxquels il renvoie. Les quatre axiomes qu'il énonce peuvent être considérés comme les faits fondamentaux de la géométrie ; ils n'ont rien de commun avec le système d'axiomes auquel Hilbert aboutit en 1899 dans ses *Grundlagen der Geometrie* pour essentiellement deux raisons : (a) Helmholtz est attentif au contenu physique

78. Précisons que pour Helmholtz, seul l'axiome de libre mobilité est *a priori*, les autres postulats de la géométrie sont tous empiriques. Cela veut dire en particulier que pour Helmholtz, l'espace physique doit être homogène. Voir à ce propos J. Gray, « Geometry, Formalisms and Intuitions », in *The symbolic Universe, Geometry, and Physics 1890-1930*, Oxford University Press (1999), p. 60 : « [Helmholtz] (...) sought to investigate what properties a space could have a priori, and imposed the single limitation that the free mobility of bodies must be allowed ».

79. H. Helmholtz, *op. cit.*, p. 193.

80. Voir en particulier H. Poincaré, *La science et l'hypothèse* (1902), Paris, éd. Flammarion, 1968, p. 76.

de ces propositions de base et donc à la nature des objets auxquels elles renvoient, (b) il ne s'intéresse pas à la structure logique de ces quatre axiomes pris ensemble.

Cela posé, Helmholtz reconnaît sa dette à l'égard de Riemann : leurs réflexions se rejoignent au sujet des propriétés des figures qui se meuvent dans des variétés homogènes. Pourtant, Helmholtz signale d'entrée de jeu qu'il impose une série de restrictions aux variétés qu'il étudie ; corrélativement, il reconnaît la portée bien plus générale des investigations de Riemann. En effet, Helmholtz postule que les variétés considérées doivent être *homogènes*. En 1868, il se limite même aux variétés à courbure constante nulle. Il étendra son raisonnement aux variétés à courbure constante positive et négative en 1870 dans un article intitulé : ≪ Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome ≫. [81]

Le terme ≪ figure ≫, qui est employé par Riemann dans son *Habilitationsvortrag*, admet une signification beaucoup trop floue pour être conservé en l'état. Le vocabulaire utilisé par Riemann n'est donc pas suffisamment rigoureux si l'on veut expliciter convenablement les faits qui servent de fondement à la géométrie — euclidienne. Voilà pourquoi, Helmholtz ne parle pas de figure, il postule l'existence de corps rigides [feste Körper] dont il s'agit d'étudier les déplacements dans une variété à courbure constante. Voici les quatre axiomes qu'il énonce successivement :

> I. L'espace à n dimensions est une variété n fois étendue, c'est-à-dire que l'élément individuel défini en celui-ci, le point, peut être déterminé par la mesure de variables quantitatives continues et indépendantes les unes des autres (coordonnées), dont le nombre est égal à n. Chaque mouvement d'un point est ainsi accompagné par une modification continue d'au moins une des coordonnées. (...)
>
> II. On présuppose l'existence de corps mobiles mais rigides en eux-mêmes, c'est-à-dire de systèmes de points, comme cela est nécessaire pour pouvoir effectuer la comparaison des grandeurs spatiales par congruence. Mais comme nous ne sommes pas encore autorisés à présupposer une méthode spéciale pour la mesure des grandeurs spatiales, la définition d'un corps rigide, ici, ne peut être que la suivante : entre les $2n$ coordonnées de chaque paire de points qui appartient à un corps rigide en lui-même, il existe une équation indépendante du mouvement de ce dernier, qui reste la même pour toutes les paires de points congruentes. (...)
>
> III. On présuppose une mobilité parfaitement libre des corps rigides, c'est-à-dire, on suppose que chaque point en eux peut être déplacé continûment vers le lieu de chaque autre point, tant que son mouvement n'est pas restreint par les équations qui existent entre lui et les autres points restants du système rigide auquel il appartient. (...)
>
> IV. On doit finalement attribuer encore à l'espace une propriété qui est analogue à la monodromie des fonctions d'une variable complexe, et qui exprime en elle-même que deux corps

81. H. Helmholtz, ≪ Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome ≫ (1870), in Vorträge und Reden. - Braunschweig : Vieweg Bd. 2. 4. Aufl. - 1883, p. 3 à 31.

congruents sont encore à nouveau congruents après que l'un d'eux a subi une révolution complète autour d'un axe de rotation arbitraire. [82]

Les corps absolument rigides constituent des ≪ idéalités ≫ dont l'existence est cependant requise pour pratiquer des mesures empiriques. En outre, l'axiome de libre mobilité, que Helmholtz juge nécessaire et universel, implique de se restreindre à des variétés homogènes. Lie, Engel et Poincaré ne contestent pas la validité de cet axiome. Leurs réflexions sur les fondements de la géométrie se restreignent donc pour l'essentiel aux variétés à courbure constante. En revanche, dans son *Habilitationsvortrag*, Riemann accorde un intérêt particulier aux variétés riemanniennes à courbure non constante ; dans la troisième partie de sa leçon il tire d'ailleurs les conséquences physiques d'une telle hypothèse qui s'avèrera absolument fondamentale en relativité générale. En effet, comme le fait remarquer Weyl avec insistance, la variété d'espace-temps de la relativité générale n'est pas supposée homogène. C'est d'ailleurs l'une des raisons qu'il invoque pour reformuler le problème de l'espace d'un point de vue strictement infinitésimal, ce qui n'est pas le cas du problème de Riemann-Helmholtz.

L'article de Helmholtz sur les fondements de la géométrie est discuté en détail par S. Lie dans une série d'articles publiés entre 1886 et 1892 et rassemblés dans le tome II de ses œuvres complètes. [83] Non seulement Lie examine les assertions de Helmholtz en s'appuyant sur la théorie des groupes continus de transformations, mais de plus il s'interroge sur la validité et l'exactitude des quatre axiomes énoncés par celui-ci, le quatrième — à savoir l'axiome de monodromie — faisant particulièrement difficulté parce qu'il est très contraignant. [84] Enfin il identifie une série d'erreurs dans les raisonnements de Helmholtz qu'il résume d'ailleurs dans son court article sur les fondements de la géométrie pour l'Académie de Paris (1892). Les investigations menées ici par Lie sur les fondements de la géométrie sont entièrement reprises dans le chapitre V du tome III de la *Theorie der Transformationsgruppen* (1893)

82. H. Helmholtz, ≪ Über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen ≫, *op. cit.*, p. 197 à 201, nous avons repris la traduction en français proposée par J. Merker, *op. cit.*, p. 221-222.

83. S. Lie, ≪ Bemerkungen zu v. Helmholtzs Arbeit : Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen, Leipz. Ber. (1886), in *Gesammelte Abhandlungen* Bd. II, Leipzig, éd. Teubner et Oslo, éd. H. Aschehoug et co., 1935 p. 374-379. S. Lie, ≪ Über die Grundlagen der Geometrie I ≫, Abhandlung. Leipz. Ber. (1890), in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, p. 380-413. S. Lie, ≪ Über die Grundlagen der Geometrie II ≫, Abhandlung. Leipz. Ber. (1890), in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, p. 414-468. S. Lie, ≪ Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie ≫, Leipz. Ber. (1892), in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, p. 469-476. S. Lie, ≪ Sur les fondements de la géométrie ≫, in *Comptes Rendus de l'Acadmie de Paris* **114** (1892), in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, p. 477-479.

84. Voir à ce propos J. Merker, *op. cit.*, p. 61-62.

corédigée par Engel et Lie.[85] Ce chapitre vient justement d'être traduit en français par J. Merker. Notre but n'est pas de commenter à nouveaux frais le travail monumental de Lie sur les fondements de la géométrie. Nous renvoyons le lecteur au commentaire de J. Merker. Cela étant, il n'est pas anodin de faire la précision suivante : dans son article de 1886 intitulé « Bemerkungen zu v. Helmholtzs Arbeit : Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen » (1886), Lie indique que Klein lui a suggéré d'envisager le problème de Riemann-Helmholtz du point de vue de la théorie des groupes continus de transformations.[86] Ceci mérite éclaircissement. Souvenons-nous que l'un des *credo* de Klein consiste à faire converger la *théorie des groupes* et les idées géométriques de Riemann. Nous avons montré dans notre première partie qu'entre 1875 et 1884, il parvient à cette fin lorsqu'il développe sa théorie des fonctions modulaires : cette théorie suppose d'étudier conjointement certains sous-groupes de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ et les surfaces de Riemann associées aux fonctions d'une variable complexe invariantes par de tels sous-groupes. Dans ce cadre, Klein privilégie donc les groupes *discrets* (qu'ils soient finis ou infinis) et il se réfère essentiellement à la *Dissertation* ainsi qu'à la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann.

Pour sa part, Lie prolonge dans une certaine mesure le *Programme d'Erlangen* de Klein à partir de 1886. Pour être plus précis entre 1872 et 1893, il étudie systématiquement les groupes *continus* de transformations dont il mesure l'effectivité tant en géométrie que dans la théorie des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles. Klein voit dans le problème de Riemann-Helmholtz une nouvelle manière de faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann. Lie parvient d'ailleurs complètement à cette fin avec la publication du tome III de la *Theorie der Transformationsgruppen*. Cette fois, l'œuvre de référence de Riemann n'est autre que son *Habilitationsvortrag* — examinée à la lumière de l'article d'Helmholtz de 1868 — et les groupes en jeu sont continus. En adoptant ce cadre théorique pour examiner les fondements de la géométrie, Lie déplace les réflexions de Helmholtz du côté des mathématiques pures : les mouvements des corps rigides dans des variétés riemanniennes homogènes sont entièrement retraduits en termes de groupes de transformations associés respectivement aux géométries euclidienne et non-euclidiennes.

Mais ni Riemann, ni Helmholtz, ni Lie ne conçoivent leurs réflexions sur les fondements de la géométrie d'un point de vue « ensembliste ». En effet, nous avons montré que Rie-

85. S. Lie, F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, Bd. III, Leipzig, éd. Teubner, 1893, Abtheilung V, « Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie », p. 393-543, pour la traduction en français voir J. Merker, *op. cit.*, p. 159-315.

86. S. Lie, *op. cit.*, p. 374.

mann décrit les variétés en étant toujours attentif à la nature des relations entre les points ou les éléments qu'elles contiennent. En outre, Helmholtz demeure attaché au contenu physique des axiomes qu'il énonce. Enfin, Lie s'intéresse essentiellement à la « structure » des groupes de transformations agissant sur des variétés homogènes, i.e. à courbure constante négative, positive ou nulle. Il appartient en réalité à Hilbert d'envisager les réflexions de Riemann, Helmholtz et Lie sur les fondements de la géométrie d'un point de vue ensembliste. Souvenons-nous que dans la première partie de notre thèse, nous avions analysé deux annexes aux *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert publiées en 1902 dans lesquelles figure une axiomatisation des concepts de plan et de variété topologique bidimensionnelle. En réalité, dans ces deux annexes, Hilbert entend examiner à nouveaux frais le problème de Riemann-Helmholtz.

Pour ce faire, il rappelle que les termes de « points », de « lignes » ou de « plan » ne renvoient plus à des objets dont la nature serait spécifiée, conformément à ce qu'il avait affirmé au tout début des *Grundlagen der Geometrie* (1899). Il se démarque donc de ses prédécesseurs dans la mesure où il envisage des variétés *abstraitement*, comme « ensembles de points ». Il revendique alors son attachement aux conceptions ensemblistes de Cantor. Comme nous l'avons précisé, il propose une définition implicite ou par axiomes des concepts de plan et de variété topologique bidimensionnelle en s'appuyant sur la notion de voisinage. Toujours guidé par la méthode axiomatique, il introduit le concept de déplacement dans le plan euclidien et il en déduit que l'ensemble de telles transformations forme un groupe. [87] Il résout ensuite le problème de Riemann-Helmholtz.

Notre mise en perspective historique du problème de Riemann-Helmholtz permet de mesurer de manière plus précise l'écart qui sépare le *Habilitationsvortrag* de Riemann et les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. Non seulement Riemann ne raisonne pas par axiomes, mais de plus ses successeurs immédiats, qu'il s'agisse de Helmholtz ou de Lie, n'accordent pas aux axiomes qui président à la résolution du problème de Riemann-Helmholtz le même statut que dans les *Grundlagen* de Hilbert. Par ailleurs, l'approche de Riemann n'a rien d'ensembliste. En revanche, lorsque Hilbert accomplit la double tâche d'axiomatiser le concept de variété et de résoudre le problème de Riemann-Helmholtz en 1902, il se fonde très explicitement sur la théorie des ensembles.

Toujours dans notre première partie, nous avons montré qu'en 1913, au moment où Weyl publie *Die Idee der Riemannschen Fläche*, il prolonge explicitement les deux annexes de Hilbert sur les fondements de la géométrie. En revanche lorsqu'en 1919, 1921 et 1923, Weyl

87. D. Hilbert, *Über die Grundlagen der Geometrie*, In *Nachrichten von der G. der Wissenschaften zu Göttingen*, 1902, p. 234.

commente le *Habilitationsvortrag* de Riemann, il ne partage plus la confiance de Hilbert quant à la validité de la théorie des ensembles. Corrélativement, il se montre particulièrement attentif à la genèse du problème de Riemann-Helmholtz et à sa résolution complète par Lie. Justement, en 1921-1923 dans ses articles de recherche, il compare systématiquement le « Raumproblem » — qui consiste en la caractérisation commune des variétés pythagoriciennes dans l'infinitésimal — au problème de Riemann-Helmholtz. De plus, il résout le « Raumproblem » en se fondant sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie linéaires. Il fait de nouveau converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann, conformément aux prescriptions de Klein qu'avaient déjà suivies Lie entre 1886 et 1893 pour résoudre le problème de Riemann-Helmholtz.

Au terme de notre analyse des deux premières parties du *Habilitationsvortrag*, nous souhaiterions indiquer quelques éléments de comparaison entre le *Habilitationsvortrag* de Riemann (1854) et le *Programme d'Erlangen* de Klein (1872). Ces deux approches, aussi différentes soient-elles, partagent plusieurs points communs.

(i) Les propriétés qui caractérisent la géométrie euclidienne dans le plan cessent d'être traitées comme un absolu ; dans le cas de Klein, elles sont déterminées par leur invariance *relativement* au groupe des déplacements — qui est un sous-groupe continu du groupe des homographies $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$; dans le cas de Riemann, elles correspondent aux propriétés intrinsèques d'une variété riemannienne bidimensionnelle à courbure constante nulle.

(ii) Il s'agit d'insérer les géométries métriques euclidienne et non euclidiennes dans deux théories dont la fonction est *unificatrice*. Pour ce faire, Klein établit une classification des sous-groupes continus de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ et des propriétés géométriques qu'ils laissent respectivement invariantes. En revanche, Riemann part du concept général de variété continue (i.e. topologique et différentielle) qu'il munit d'une structure métrique, sans se restreindre *a priori* aux variétés « riemanniennes » ; les géométries hyperbolique, elliptique et euclidienne caractérisent des variétés riemanniennes dont la mesure de courbure est constante.

(iii) Dans les deux cas, il s'agit de prendre pour point de départ des variétés sur lesquelles les distances entre deux points quelconques ne sont pas encore définies — plan projectif complexe dans le cas de Klein, variétés continues dans le cas de Riemann ; ils précisent ensuite les *conditions* qui rendent possibles des déterminations métriques sur ces mêmes variétés. Par exemple, Klein se donne une conique C sur le plan projectif complexe qu'il appelle « l'absolu » à la suite de Cayley. Soient quatre points alignés a, b, c et d, tels que a et b soient situés

sur C, c et d à l'intérieur de C. Grâce à l'équation de C et au birapport entre a, b, c et d, Klein définit une distance entre c et d ; celle-ci est laissée invariante par toutes les transformations homographiques qui préservent l'absolu. Par ce procédé, que Cayley utilisait déjà pour déduire la géométrie métrique euclidienne, Klein montre que l'on peut également parvenir aux déterminations métriques qui correspondent respectivement à la géométrie elliptique et à la géométrie hyperbolique.

Ainsi s'opèrent deux unifications possibles de la géométrie au XIX^{e} siècle : celle de Klein est fondée sur la géométrie projective et sur le concept de groupe continu de transformations ; celle de Riemann s'appuie sur les développements de la géométrie différentielle et, en particulier, sur les concepts de variété — métrique — et de mesure de courbure en un point de cette variété. Les travaux menés par Cartan et Weyl dans les années 20 auront essentiellement pour but de dialectiser ces deux perspectives qui ne sont pas équivalentes : l'approche de Klein est d'emblée plus restrictive, puisqu'il n'envisage que des espaces homogènes — i.e. des espaces sur lesquels un groupe de transformations agit transitivement —, ce qui n'est pas le cas de Riemann.

Donnons plusieurs exemples pour expliciter la dialectique qui se noue entre la théorie des groupes et la géométrie différentielle au cours des années 20. Lorsque Weyl résout le problème de l'espace, il se fonde sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie linéaires pour caractériser des variétés « pythagoriciennes dans l'infinitésimal », i.e. dont la métrique est définie par une forme quadratique non dégénérée. Les variétés riemanniennes sont une classe particulière de ce type de variétés. Pour sa part, Cartan introduit en 1924 le concept de groupe d'holonomie (restreint) qui, attaché à un point d'une variété riemannienne, permet de savoir si celle-ci admet une mesure de courbure nulle ou non en ce point. En particulier, si ce groupe est trivial en tout point de cette variété, alors elle ne diffère pas essentiellement d'un espace euclidien. [88] De plus, dans le prolongement des travaux de Weyl consacrés à la mathématisation de la relativité générale, Cartan développe tout un programme de recherche visant à dialectiser le point de vue de Klein et le point de vue de Riemann en géométrie

88. Voir en particulier, É. Cartan, « Sur les variétés à connexion affine », (suite), *Annales scientifiques de l' ÉNS*, **41** (1924), p. 1-25, « La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle », *L'enseignement mathématique*, **24**, 1925, p. 11 : « En définitive, à l'espace de Riemann donné est associé un sous-groupe g déterminé du groupe G des déplacements euclidiens, sous-groupe qui peut se confondre avec le groupe G lui-même, mais qui peut aussi se réduire à la transformation identique ; dans ce dernier cas il est bien évident que l'espace de Riemann est complètement holonome et ne diffère qu'en apparence de l'espace euclidien proprement dit. Il est naturel de donner au groupe g le nom de « groupe d'holonomie » de l'espace de Riemann.

pour aboutir à une théorie des espaces généralisés. Cartan souligne à ce propos l'importance de la théorie des groupes en géométrie différentielle. Les espaces généralisés qu'il construit dépassent de loin le cadre restrictif dans lequel Riemann raisonnait :

> À la suite d'un mouvement d'idées qui a suivi la théorie de la relativité générale, j'ai été conduit à introduire la notion de nouveaux espaces plus généraux que les espaces riemanniens et jouissant par rapport aux différents espaces à groupe fondamental [principal] le même rôle que les espaces riemanniens jouissent par rapport à l'espace euclidien. La vaste synthèse que j'ai réalisée se rattache sans doute aux idées de Klein formulées dans le célèbre Programme d'Erlangen, tout en les dépassant de beaucoup, puisqu'elles font rentrer la géométrie riemannienne, qui formait un rameau tout à fait isolé de la géométrie, dans le cadre d'un schéma très général dans lequel la notion de groupe joue encore un rôle fondamental. [89]

Toujours est-il que Weyl et Cartan proposent deux lectures différentes de la leçon de Riemann. Weyl discute avant tout les hypothèses sur lesquelles Riemann se fonde pour introduire des déterminations métriques sur des variétés continues. Cette discussion mathématique *et* philosophique lui permet d'élaborer une géométrie purement infinitésimale (1918) et de résoudre le ≪ problème de l'espace ≫ (1921-1923). Pour sa part, Cartan prend acte des différences fondamentales d'approches qui séparent Klein et Riemann en géométrie. Il introduit ensuite un cadre théorique suffisamment souple et général pour dialectiser les héritages respectifs du *Programme d'Erlangen* et du *Habilitationsvortrag* qu'il oppose d'abord frontalement. Son article intitulé ≪ La théorie des groupes et la géométrie ≫ (1927) en atteste. [90] Toujours est-il que Cartan entend se situer dans le prolongement de Weyl lorsqu'il développe sa théorie des espaces généralisés. Corrélativement, il prend connaissance du problème de l'espace de Weyl en 1922 et il le résout presque immédiatement.

1.2.5 Les hypothèses riemanniennes sur la nature de l'espace physique

Dans la troisième partie de sa leçon, Riemann repère l'ensemble des hypothèses qui nous permettent de caractériser l'espace physique. Ces hypothèses doivent être *concevables* tant d'un point de vue mathématique que physique. Pour Riemann, une hypothèse est mathématiquement concevable si elle est conforme aux deux présupposés auxquels il se restreint : (i) les longueurs de deux éléments linéaires peuvent être comparées quelle que soit la

89. E. Cartan, ≪ Notice sur les travaux scientifiques ≫ (1931), in *Œuvres complètes*, I. 1., Paris, éditions du CNRS, 1984, p. 58.

90. E. Cartan, ≪ La théorie des groupes et la géométrie ≫, *L'enseignement mathématique*, **26**, 1927, p. 200-225.

position qu'ils occupent dans l'espace physique ; (ii) ce dernier vérifie le théorème de Pythagore dans l'infinitésimal :

> On admet comme hypothèses que les lignes sont indépendantes de leur position, et que l'élément linéaire est exprimable par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré, c'est-à-dire que l'espace est une grandeur plane dans ses parties infinitésimales ≫. [91]

Une hypothèse sera jugée physiquement concevable si elle est en accord avec les conditions de l'expérience en général. Précisons qu'en 1918, Weyl construit une généralisation de la géométrie riemannienne en mettant de côté le présupposé (i). Il élargit ainsi le champ des espaces métriques mathématiquement concevables. Par contre, la théorie unifiée des champs qu'il déduit à partir de sa géométrie purement infinitésimale n'est pas physiquement concevable, comme le montreront Einstein en 1918 et Pauli en 1920. Nous en inférons que toute hypothèse physiquement concevable doit être mathématiquement concevable, la réciproque étant fausse.

Le but de Riemann est double dans la dernière partie de sa *Leçon d'habilitation*. (1) On peut assigner deux types de propriétés à l'espace, à savoir des propriétés *d'étendue* — c'est-à-dire d'*analysis situs* — et des propriétés *métriques*. Elles ne sauraient être confondues et elles n'ont pas le même degré de certitude empirique. (2) Les assertions touchant à la *structure métrique* de l'espace physique ne sont nécessaires ni logiquement, ni ontologiquement. Dans l'infiniment grand, rien n'empêche de supposer que l'espace soit une variété *finie* au sens où sa mesure de courbure est positive, bien qu'elle soit *illimitée*. Dans l'infiniment petit, rien ne nous assure que l'espace soit *homogène* — i.e. que sa mesure de courbure est constante.

Les *rapports d'étendue* [Ausdehnungsverhätlnisse] correspondent à des propriétés d'*analysis situs*. L'espace est alors réduit à un *continuum amorphe* [92], que Riemann étudie abstraction faite de toute détermination métrique. Les hypothèses relatives aux propriétés ≪ d'étendue ≫ ne peuvent guère être infirmées par l'expérience. On pourrait présumer qu'elles sont *a priori* au sens où elles seraient universelles et nécessaires. Riemann ne va pas jusqu'à défendre un tel argument ; il affirme seulement qu'elles sont caractérisées par le plus haut degré de *certitude empirique*. En voici la raison : Riemann ne prétend à aucun moment que l'espace doit nécessairement être un *continuum*. Il se pourrait que ≪ la réalité sur laquelle est fondé l'es-

91. B. Riemann, *op. cit.*, p. 294.

92. Cette expression est abondamment employée Weyl, voir par exemple ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, *Mathematische Zeitschrift*, **2**, (1918), p. 385, Weyl emploie notamment l'expression de ≪ völlig gestaltloses vierdimensionales Kontinuum ≫, c'est-à-dire de continuum quadridimensionnel complètement amorphe pour caractériser les variétés continues au sens de l'*analysis situs*.

pace forme une variété discrète ≫ [93]. Bref, Riemann n'exclut pas que l'on puisse concevoir l'espace physique comme une variété discrète. Weyl montre qu'au regard des développement de la physique des *quanta*, cette hypothèse est loin d'être absurde : ≪ la théorie des quanta nous empêche d'ailleurs de renoncer à cette manière de voir ≫. [94] Il n'en reste pas moins que Riemann privilégie l'hypothèse selon laquelle l'espace physique se comporterait *comme* une variété continue.

Qu'en est-il des rapports métriques [Massverhältnisse] ? Leur détermination est entièrement assujettie à l'expérience ; autant dire qu'ils ne sont pas susceptibles du même degré de certitude empirique que les rapports d'étendue. Nous pouvons en déduire les deux conséquences suivantes : (a) les rapports métriques de l'espace physique doivent être établis *a posteriori* ; (b) il devient impossible de concevoir la structure métrique de l'espace physique indépendamment de son contenu matériel ou du divers phénoménal auquel il se rapporte ; l'espace comme ≪ forme des phénomènes ≫ n'est qu'un continuum amorphe. Weyl commente d'ailleurs l'argument de Riemann en ce sens :

> Riemann (...) nie que la métrique de l'espace soit indépendante des phénomènes physiques qui se déroulent en son sein et qu'elle soit fixée dès l'abord, de telle sorte qu'alors le réel entre dans l'espace comme en une maison locative ; *il affirme plutôt*, contrairement à la croyance habituelle, *que l'espace en soi n'est pas autre chose qu'une multiplicité tridimensionnelle amorphe et que c'est le contenu matériel qui le remplit qui lui donne sa forme et détermine ses rapports de mesure.* [95]

Pour le dire autrement, la structure métrique de l'espace physique ne peut pas être déterminée *a priori*, elle dépend de la matière des phénomènes. L'espace physique n'est donc ni un ≪ contenant ≫ ni une ≪ forme ≫ indépendante des phénomènes. De plus rien ne nous autorise *a priori* à privilégier une métrique euclidienne pour mathématiser l'espace physique. Bref, on ignore si celui-ci admet une mesure de courbure partout nulle.

Allons plus loin. Riemann introduit une distinction assez subtile entre *l'exactitude* [Ungenauheit] et *la certitude* [Gewißheit]. Les hypothèses touchant aux rapports d'étendue sont empiriquement plus certaines que celles qui concernent la structure métrique de l'espace physique. Dans les deux cas, il n'est toutefois pas possible de parler de *certitude absolue* dans la mesure où aucun procédé empirique de corroboration d'hypothèses ne permet de parvenir à une vérité définitive. L'inexactitude correspond à la marge d'erreur que peuvent admettre les valeurs numériques de nos observations et de nos prédictions. Globalement, lorsque l'on

93. H. Weyl, *Temps, Espace, Matière*, *op. cit.*, p. 84, voir également B. Riemann, *op. cit.*, p. 297.
94. H. Weyl, *op. cit.*, p. 84.
95. *ibid.*, p. 84.

considère l'espace comme un continuum amorphe, nos hypothèses ont le même degré d'exactitude, que l'on se situe dans l'infiniment petit ou dans l'infiniment grand. En revanche, nos hypothèses relatives à la structure métrique de l'espace physique sont d'autant plus *inexactes* que l'on parcourt l'un de ces deux extrêmes.

Imaginons que nous en restions à notre échelle, alors nous pourrions présumer que l'espace est homogène et qu'il est pratiquement euclidien, au sens où sa mesure de courbure serait nulle. Mais cela demeure-t-il vrai lorsque l'on pratique un *changement radical d'échelle* et que l'on tend vers *l'immensurablement grand* et, respectivement, vers *l'immensurablement petit* ? Rien n'est moins sûr nous dit Riemann. D'où *l'inexactitude* de nos hypothèses lorsqu'elles concernent la structure métrique du monde physique. Riemann prévient donc une extrapolation totalement infondée : de ce que l'espace physique nous *semble* homogène et pratiquement euclidien à notre échelle, il est faux d'en déduire qu'il est également tel dans l'inmensurablement grand et dans l'immensurablement petit, sous peine de commettre une extrapolation, i.e. une généralisation abusive. Nous devons donc prendre garde à ne pas projeter sur l'espace physique dans son intégralité des propriétés qui nous semblent intuitivement vraies parce qu'elles se conforment au monde environnant. Ainsi, Riemann relativise le caractère euclidien de l'espace physique.

Qu'en est-il de l'espace physique dans « l'immensurablement grand » ? Riemann montre que l'on est enclin à confondre deux propriétés qui ne sont absolument pas du même ordre, à savoir l'*illimité* [Unbegrenztheit] et l'*infini* [Unendlichkeit], tant que l'on ne distingue pas les rapports *d'étendue* et les rapports *métriques*. Alors que l'infini est une propriété métrique — la distance entre deux points d'une variété peut être arbitrairement grande —, l'*illimité* est une propriété d'étendue, elle relève de l'*analysis situs* ; elle revient tout simplement à dire que l'espace physique n'admet pas de frontière ou, pour être plus précis, qu'il s'identifie à une *variété sans bord*. Cette caractéristique est dotée de la plus grande certitude empirique qui soit, au sens où il n'est guère possible de concevoir un espace physique qui ne la vérifierait pas. De plus, elle permet de comprendre pourquoi l'espace est plus que la somme de perceptions isolées, elle « nous sert à compléter à chaque instant le domaine de nos perceptions effectives ». [96]

Riemann relève en fait deux erreurs chez ses prédécesseurs, (i) ou bien ils ont confondu *l'illimité* et *l'infini*, ou bien (ii) ils ont cru que la seconde propriété pouvait être régulièrement déduite à partir de la première. Riemann montre que l'implication « si l'espace est illimité, alors il est infini » est fausse. Imaginons une variété tridimensionnelle dont la mesure de

96. B. Riemann, *op. cit.*, p. 295.

courbure est constante et positive. Cette variété est un espace illimité : elle est sans bord, puisqu'elle correspond à une variété sphérique de dimension trois. En revanche, elle est finie en un sens très précis : la distance entre deux points sur elle ne saurait être arbitrairement grande. La confusion entre *l'infini* et *l'illimité* provient de représentations intuitives grossières. Sous prétexte que l'espace n'aurait pas de bornes, nous imaginons que deux points sur ce même espace pourraient être infiniment éloignés l'un de l'autre. Bref, à partir d'une propriété qui vaut exclusivement pour l'espace envisagé comme un *continuum amorphe*, nous en déduisons une propriété qui caractérise la structure métrique de l'espace physique.

L'exemple *contre-intuitif* d'une variété *tridimensionnelle* à mesure de courbure constante positive montre bien que l'on peut *concevoir* d'un point de vue tant mathématique que physique un *espace* qui serait *fini*, quoique *illimité*. Après tout, Riemann aurait pu se contenter de se référer à une *surface* sphérique pour clarifier la distinction entre l'*Unendlichkeit* et l'*Unbegrenztheit*. Seulement, il veut montrer ici que l'espace physique (tridimensionnel) peut ne pas être infini. Voilà pourquoi, il raisonne en dimension trois. Si l'on nous permet une comparaison quelque peu hardie, ce contre-exemple joue un rôle aussi puissant en géométrie que celui des fonctions d'une variable réelle partout continues, nulle part dérivables en analyse. L'hypothèse selon laquelle l'espace serait une variété à mesure de courbure positive est logiquement, mathématiquement et physiquement concevable : elle n'est pas impossible, elle satisfait à la condition d'être pythagoricienne dans l'infinitésimal et elle ne semble pas s'opposer aux conditions de l'expérience. L'assertion : « l'espace est infini » devient une simple possibilité parmi d'autres sur un plan logique, elle n'a rien de nécessaire ; elle caractérise une classe particulière de variétés parmi toutes les variétés mathématiquement concevables ; qui plus est, elle est purement contingente, rien ne nous empêche de supposer que l'espace physique ne satisfait pas à cette hypothèse.

D'autres évidences apparentes sont battues en brèche lorsque Riemann envisage les hypothèses envisageables à propos de l'espace physique dans l'« immensurablement petit ». Au cours du paragraphe III.3., Riemann considère d'un seul tenant (i) les rapports de causalité entre les phénomènes (ii) les rapports métriques dans l'infiniment petit (iii) et les « forces de liaison » qui agissent dans et *sur* l'espace, à supposer que l'on ait affaire à une variété continue. Comment Riemann conçoit-il la causalité ? Il admet explicitement qu'une telle relation ne peut se faire que par contact, ce qui signifie qu'il rejette l'idée de causalité à distance. Bref, il ne peut rendre raison de la relation de causalité que dans le cadre d'une géométrie infinitésimale : « on cherche à reconnaître le rapport de causalité en suivant les phénomènes

dans l'étendue très petite, aussi loin que le permet le microscope ≫.[97] Autrement dit, la contiguïté est une caractéristique essentielle de la causalité, que l'on peut vérifier à l'aide d'instruments d'observation qui nous conduisent toujours plus loin dans l'infiniment petit.

Si, dans ≪ l'immensurablement grand ≫, rien ne nous dit que l'espace ait une mesure de courbure nulle, dans ≪ l'immensurablement petit ≫, il n'est pas même sûr qu'elle soit constante. Une seconde évidence apparente s'effondre : ≪ les corps ≫ ne sont peut-être pas indépendants ≪ du lieu ≫ et, réciproquement, l'espace physique ne saurait être séparé de la matière qu'il ≪ contient ≫. Plus encore, les modèles du corps rigide et du rayon lumineux en ligne droite, qui sont fondamentaux en mécanique et en optique classiques, ne sont pas nécessairement vérifiés par l'expérience lorsque l'on travaille à très petite échelle : ≪ le concept du corps solide et du rayon lumineux cessent de subsister dans l'infiniment petit ≫.[98] Donc le cadre géométrique euclidien peut être révoqué en doute aussi bien dans l'≪ immensurablement grand ≫ que dans l'≪ immensurablement petit ≫. Plus encore, selon Riemann on ne saurait prétendre que la géométrie d'Euclide soit plus simple que les autres géométries dans l'absolu : elle peut compliquer la tâche du physicien lorsqu'il investit le domaine de l'infiniment petit, comme l'indique le passage suivant :

> Il est très légitime de supposer que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux hypothèses de la Géométrie, et c'est ce qu'il faudrait effectivement admettre, du moment où l'on obtiendrait par là une explication plus simple des phénomènes.[99]

Bref, on peut parvenir à une explication plus simple des phénomènes en se fondant sur un cadre géométrique qui n'est pas euclidien. Riemann n'hésite pas à révoquer en doute l'existence de corps rigides, ce qui donnera l'axiome II dans l'article de Helmholtz de 1868. L'hypothèse d'une mesure de courbure variable d'un point à un autre d'une variété contredit également l'axiome III, c'est-à-dire l'axiome de libre mobilité. Alors que les propriétés que Helmholtz assigne à l'espace physique sont très restrictives — l'espace doit être une variété homogène — les hypothèses formulées ici par Riemann sont très ouvertes. Les différences entre le *Habilitationsvortrag* de Riemann et l'article de Helmholtz se situent non seulement en termes de niveau de généralité, mais également dans la manière de concevoir les propriétés de l'espace physique.

Une nouvelle question se pose : si la mesure de courbure n'est pas la même en tout point de l'espace, qu'est-ce qui permet d'expliquer les rapports métriques dont il est susceptible ? Pour répondre à cette question, Riemann ne se fonde pas sur des considérations purement

97. *ibid.*, p. 296.
98. *ibid.*, p. 297.
99. *ibid.*, p. 297.

mathématiques. En effet, à supposer que l'espace soit une variété continue — question qui, pour Riemann, n'est pas même tranchée — alors les rapports métriques en son sein trouvent leur fondement « dans les forces de liaison qui agissent en lui ». [100] Rétrospectivement, cette assertion est très significative, puisque la relativité générale montre que la structure métrique de l'univers et le champ gravitationnel sont le recto et le verso d'un même processus. D'un côté le tenseur de courbure décrit complètement le champ gravitationnel, de l'autre le champ gravitationnel rend physiquement raison de la mesure de courbure — non constante — en tout point de la variété d'espace-temps. Weyl établit ce rapprochement — dont il reconnaît lui-même le caractère rétrospectif — à la fin du § 12 de *Temps, Espace, Matière* :

> Le champ de gravitation exerce sur les rayons lumineux et les corps « solides » que nous prenons comme étalons de mesure, une action telle que si nous utilisons les rayons lumineux et les étalons pour mesurer des objets à la manière habituelle, il en résulte une métrique qui ne s'écarte que très peu de la métrique euclidienne. Mais les rapports métriques ne proviennent pas d'un espace considéré comme forme des phénomènes, mais ils naissent du calcul de modifications physiques des étalons et des rayons lumineux déterminés par le champ de gravitation. [101]

Autrement dit, l'espace-temps de la relativité générale ne peut être conçu ni comme un contenant existant par soi sans relation avec son contenu, ni comme une forme indépendante de la matière des phénomènes.

Riemann indique le cheminement qu'il faut suivre pour déterminer les « forces » physiques qui conditionnent les rapports métriques de l'espace. Partant de la mécanique newtonienne, il convient d'identifier les phénomènes qu'elle ne parvient pas à expliquer pour la corriger. Riemann est parfaitement conscient que la mécanique newtonienne n'énonce en rien des vérités définitives :

> La réponse à ces questions ne peut s'obtenir qu'en partant de la conception des phénomènes, vérifiée jusqu'ici par l'expérience, et que Newton a prise pour base, et en apportant à cette conception les modifications succcessives, exigées par les faits qu'elle ne peut pas expliquer. Des recherches partant de concepts généraux, comme l'étude que nous venons de faire, ne peuvent avoir d'autre utilité que d'empêcher que ce travail ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès dans la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels [überlieferte Vorurteile]. [102]

Ce passage nous invite à corriger une illusion rétrospective à laquelle Weyl demeure attaché. En effet, il croit que Riemann envisage de rompre avec le newtonisme, dans la mesure où il lit la fin du *Habilitationsvortrag* à la lumière d'une théorie de la gravitation dont les fondements

100. *ibid.*, p. 297.
101. H. Weyl, *op. cit.*, p. 87-88.
102. B. Riemann, *op. cit.*, p. 297.

sont incompatibles avec la conception newtonienne de la gravitation. Pourtant, Riemann se montre très prudent dans son argumentation. Il estime que certaines hypothèses formulées dans le cadre du newtonisme mériteraient d'être corrigées mais il ne remet certainement pas en cause radicalement la physique newtonienne. En outre, il indique clairement à son auditoire qu'il n'a pas recherché la généralité pour la généralité dans les deux premières parties de sa leçons. La *begriffliche Mathematik* a une fonction bien précise : elle permet d'*ouvrir* les hypothèses envisageables pour comprendre les propriétés de l'espace physique.

De plus, il affirme sans ambiguïté que les problèmes soulevés à la fin de son mémoire ne sauraient être résolus par le mathématicien, puisqu'ils relèvent de la physique. Donc (i) la géométrie exige un traitement théorique qui relève aussi bien de la mathématique que de la physique. Sur ce point, Riemann rejoint Gauss dont la théorie des surfaces courbes tirait son origine de mesures géodésiques effectuées dans le royaume de Hannovre. (ii) Nulle théorie physique ne peut être régulièrement déduite à partir du concept général de variété, Riemann suppose qu'il n'y a pas hiérarchie, mais complémentarité entre les recherches menées respectivement par les mathématiciens et les physiciens. Voilà pourquoi le *Habilitationsvortrag* s'achève sur l'ouverture suivante : « ceci nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la Physique, où l'objet auquel est destiné ce travail ne nous permet pas de pénétrer aujourd'hui ».[103]

Cela étant, qu'est-ce que le mathématicien peut apporter au physicien ? La réponse de Riemann est double. (i) La mathématique doit nous permettre d'envisager le panel le plus large d'hypothèses concevables sur la nature de l'espace physique, elle nous aide à dépasser les « préjugés traditionnels ». Elle a donc une fonction critique, au sens où elle nous incite à remettre en questions nos croyances habituelles sur la nature de l'espace physique. Là encore, Riemann est très attaché à certaines prescriptions de méthode héritées de Gauss : il importe de critiquer au préalable nos idées familières ou habituelles qui nous empêchent d'admettre l'existence de certains objets ou de concevoir certaines hypothèses. Souvenons-nous en effet que sur un tout autre terrain, à savoir celui de l'arithmétique, Gauss entendait rejeter les « préjugés traditionnels » ou les représentations erronées qui empêchent d'admettre la nécessité de recourir aux entiers complexes (les entiers de Gauss) dans la théorie des résidus biquadratiques. (ii) La mathématique fait appel à un cadre conceptuel très général — celui des variétés — qui permet d'unifier différentes branches de la physique. Toutefois, à aucun moment dans sa leçon, Riemann ne prétend que la physique et la géométrie sont une seule et même chose et il insiste sur le fait que ses hypothèses doivent être soumises au tribunal

103. *ibid.*, p. 297.

de l'expérience. Dans « Reine Infinitesimalgeometrie » (1918) Weyl se réclame de Riemann et il entend réaliser une fois pour toutes le projet d'une géométrie *purement* infinitésimale. Pourtant, à la différence de Riemann, Weyl assujettit totalement la physique à la géométrie et il ne s'assure pas même que les hypothèses qu'il formule sont physiquement concevables. Riemann et Weyl ne partagent donc pas la même épistémologie implicite, tout du moins si l'on se réfère aux travaux que Weyl consacre à la théorie unifiée des champs entre 1918 et 1920.

1.2.6 La géométrie infinitésimale de Riemann et la physique des actions de contact de Faraday

Dans sa lecture du *Habilitationsvortrag*, Weyl insiste avant tout sur le lien entre les idées géométriques de Riemann, ses hypothèses à propos de l'espace physique et les très récents développements de la relativité générale. D'un côté, la théorie einsteinienne de la gravitation implique de raisonner sur des variétés pseudo-riemanniennes. De l'autre, elle permet d'expliciter dans le cadre d'un univers quadridimensionnel l'hypothèse de Riemann selon laquelle il pourrait y avoir une interdépendance entre la structure métrique de l'espace physique et la répartition de la matière en son sein. Lorsqu'en 1919, Weyl publie une première édition commentée du *Habilitationsvortrag* de Riemann, son intention est claire : cette œuvre constitue une voie d'accès nécessaire pour comprendre la géométrie de la relativité générale.

> En réalité, il me paraît souhaitable que cet écrit (...) soit accessible au plus grand nombre ; tous ceux qui s'intéressent actuellement à la théorie de la relativité doivent le lire. [104]

Cela étant, en plus de cette lecture rétrospective qu'il partage avec Grossmann, Weyl propose de construire un parallèle entre la géométrie « infinitésimale » de Riemann et la « physique des actions de contact » de Faraday. Weyl n'est ni le premier, ni le seul à faire ce rapprochement. On le retrouve déjà sous la plume de Klein, que ce soit dans ses leçons sur les surfaces de Riemann (1882) ou encore dans son discours prononcé à Vienne en hommage à Riemann (1894). Entre 1918 et 1923, Weyl insiste dans de nombreuses publications sur cette « analogie » entre la géométrie infinitésimale et la physique des actions de contact, comme si les développements respectifs de la géométrie et de la physique étaient parfaitement homologues depuis le milieu du XIX^{e} siècle. Ainsi, au cours du § 11 de *Raum, Zeit, Materie*, on peut lire :

104. H. Weyl, préface au *Habilitationsvortrag* de Riemann, *op. cit.*, p. V.

> Le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie de Riemann repose sur les mêmes principes que la physique des actions de contact. Par l'observation, nous apprenons par exemple, que dans un fil conducteur, l'intensité du courant est proportionnelle à la différence de potentiel à l'origine et à l'extrémité du fil (loi d'Ohm). Mais nous savons que les résultats des mesures faites sur un long conducteur quelconque ne vérifient pas exactement cette loi ; pourtant ces mesures nous montrent que la loi d'Ohm est vraie pour un fil *infiniment petit.* (...) De la loi différentielle, on remonte à la loi intégrale, en faisant l'hypothèse que le fil est *homogène* dans toutes ses parties. On procède de même pour la géométrie : le fait essentiel de la géométrie euclidienne est que le carré de la distance de 2 points est une forme quadratique des coordonnées relatives des 2 points. *(Théorème de Pythagore.) Si nous regardons ce théorème comme rigoureusement vrai quand les deux points sont infiniments voisins, nous posons ainsi les prémisses de la géométrie riemannienne.* [105]

Weyl est encore plus explicite dans la préface à l'édition de 1919 du *Habilitationsvortrag* :

> [Avec la *Leçon d'habilitation* de Riemann], il s'est produit en géométrie un progrès qui est du même ordre que celui accompli par Faraday et Maxwell en physique et plus particulièrement en théorie de l'électricité, à savoir le passage d'une théorie des actions à distance à une théorie des actions de contact ; le principe qui consiste à comprendre l'univers à partir de son comportement dans l'infiniment petit est parvenu à maturité. Les contributions grandioses de Riemann dans le domaine de la théorie des fonctions analytiques et ses spéculations en physique sont issues du même motif épistémologique. Il est au fondement de l'unité de son Œuvre aussi divers que soient les domaines traités par Riemann. [106]

Dans ce passage, Weyl ne se contente pas de faire converger la géométrie infinitésimale et la physique des actions de contact. Il formule une hypothèse concernant l'*unité* même de l'œuvre de Riemann. Cette unité tiendrait au fait que Riemann adopterait systématiquement un point de vue *infinitésimal*, tant en mathématiques qu'en physique. Ceci vaudrait également dans sa *Dissertation* (1851). Weyl évoque à ce propos la théorie des fonctions analytiques. [107] Sans doute cette lecture est-elle trop simpliste. [108] Elle tient au fait qu'à partir de 1917-1918 Weyl comprend l'œuvre de Riemann à partir de ses propres investigations en relativité générale.

Cela posé, on peut expliciter l'analogie proposée par Weyl comme suit : sur un plan mathématique, la notion de *variété riemannienne* serait *l'analogon* du concept de champ introduit quasiment au même moment par Faraday pour rendre raison des phénomènes

105. H. Weyl, *Temps, Espace, Matière*, *op. cit.*, p. 78.

106. H. Weyl, préface au *Habilitationsvortrag* de Riemann, *op. cit.*, p. III.

107. Voir également H. Weyl, *Temps, Espace, Matière*, *op. cit.*, p. 79 : ≪ L'idée de comprendre l'univers par son aspect dans l'infiniment petit, est la raison épistémologique qui anime la physique des actions de contact et la géométrie riemannienne, mais c'est aussi l'âme des autres parties de l'œuvre grandiose que Riemann a conçue, principalement de sa théorie des fonctions d'une variable complexe ≫.

108. Dans sa *Dissertation*, comme dans sa *Théorie des fonctions abélienne*, Riemann adopte un point de vue topologique et global qui est essentiel en théorie des surfaces de Riemann.

électromagnétiques. De même que dans une variété riemannienne M, la géométrie euclidienne n'est vérifiée que dans l'infiniment petit, i.e. sur l'espace tangent en un point p de M, de même le concept de champ constitue le support des actions de contact chez Faraday. Pour justifier son propos, Weyl ne s'appuie pas sur l'idée selon laquelle la théorie électromagnétique peut *in fine* être mathématisée à l'aide du concept de variété. De plus, il reconnaît que ce rapprochement n'est qu'une analogie. Certes, Riemann est attaché à une physique des actions de contact, comme en attestent ses fragments de philosophie naturelle, ses recherches en physique mathématique, mais aussi certains passages à la toute fin de sa *Leçon d'habilitation*. Toujours est-il qu'il développe ses réflexions indépendamment de Faraday et ce, quasiment en même temps que lui.

En effet, les *Experimental Researches on Electricity* de Faraday sont publiées entre 1839 et 1855. À suivre F. Balibar, c'est dans les années 50 que Faraday transforme considérablement l'étude des phénomènes électriques et magnétiques. [109] Précisons notre propos. Jusqu'à Faraday, les interactions électrique et magnétique étaient communément conçues sur le modèle de la théorie newtonienne de la gravitation, c'est-à-dire à partir de forces « d'attraction/répulsion, à distance et instantanée », [110] ce qui correspond donc, selon la terminologie employée par Weyl, à une physique des actions à distance. Faraday s'inscrit en faux contre le dogme selon lequel le modèle de l'attraction gravitationnelle défini par Newton doit être appliqué à n'importe quel phénomène physique. Faraday s'appuie sur deux hypothèses dont la formulation doit beaucoup à son travail d'expérimentateur : (1) les interactions électriques et magnétiques dépendent de forces qui se propagent de proche en proche à une vitesse finie — donc elles ne peuvent pas être instantanées ; (2) il est nécessaire d'expliquer rationnellement leur propagation, ce qui suppose d'introduire le concept de champ à côté de celui de point matériel en mouvement dans un espace vide. Prenons l'exemple d'un aimant isolé entouré de limaille de fer. Le mode d'explication habituel fondé sur le rapport attraction / répulsion n'entre pas ici en jeu, puisque l'on ne présuppose pas la présence d'un second aimant. Pourtant, la limaille de fer se structure d'une certaine manière : ses aiguilles prennent une orientation bien particulière qui permet à Faraday de concevoir des lignes de force et un champ magnétique. D'une manière générale, un champ « transporte de l'énergie et de la quantité de mouvement : un corps qui émet un champ (...) perd de l'énergie mais aussi de la

109. F. Balibar, *Einstein 1905, de l'Ether aux Quanta*, Paris, P.U.F., 1992, p. 20 : « Ce fut — mais peut-être n'en pouvait-il pas en être autrement — un outsider, un autodidacte — en l'occurrence Michael Faraday — qui vint éveiller la physique de son sommeil dogmatique dans les années 1850 ».
110. *ibid.*, p. 29.

quantité de mouvement ≫.[111]

Malgré une certaine contemporanéité entre Riemann et Faraday, F. Balibar relativise l'hypothèse de Weyl : (a) Riemann et Faraday n'entendent pas la même chose par ≪ espace ≫ : les investigations de Faraday portent sur l'espace comme ≪ milieu ≫ et non sur l'espace comme variété munie d'une certaine structure métrique ; (b) si Faraday nie l'existence d'interactions à distance, il ne suppose à aucun moment que la métrique de l'espace serait conditionnée par des forces agissantes en son sein ; (c) il n'y a pas de lien historiquement attesté entre Faraday et Maxwell d'une part, Riemann d'autre part :

> Les conceptions de Riemann représentent une sorte de bifurcation, une voie de traverse que le cours de la physique n'a tout d'abord pas emprunté.[112]

Le terme même de bifurcation indique que les développements de la physique et de la géométrie ne sont ni aussi linéaires, ni aussi homologues que ne le suppose Weyl lorsqu'il insiste sur l'analogie entre la géométrie infinitésimale de Riemann et la physique des actions de contact de Faraday.

Nous avons vu que Weyl ne crée pas ce parallèle de toute pièce, il l'emprunte à Klein. Par exemple, dans son discours en hommage à Riemann, Klein affirme notamment :

> Je dirais que Riemann dans le domaine des mathématiques, et Faraday dans celui de la physique, marchent en avant parallèlement.[113]

Cette analogie a d'abord une fonction hagiographique : elle permet à Klein d'élever Riemann au rang de figure tutélaire tant en mathématique qu'en physique mathématique. Corrélativement, Klein entend légitimer le domaine de la physique mathématique et justifier sa propre approche en analyse complexe, d'où ce parallèle. Mais une telle analogie prend une coloration légèrement différente sous la plume de Weyl. En effet, il ne peut pas ignorer qu'Einstein se réclame de Faraday, en particulier au moment où il développe la théorie de la relativité générale. L'analogie entre Riemann et Faraday est donc d'autant plus séduisante en 1918/1919 qu'ils sont considérés à titre purement rétrospectif comme des ≪ précurseurs ≫ de la théorie einsteinienne de la gravitation.

En outre, Weyl ne compare pas la physique des actions de contact de Faraday et la géométrie infinitésimale de Riemann de manière désintéressée : elle lui sert de moyen pour justifier et légitimer ses propres recherches en physique mathématique. En effet, rappelons

111. F. Balibar, article ≪ Champ ≫, In *Dictionnaire d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, Paris, P.U.F., 1999, p. 164.

112. F. Balibar, *Einstein 1905, de l'éther aux quanta*, *op. cit.*, p. 49.

113. F. Klein, ≪ B. Riemann et son influence sur les mathématiques modernes ≫, 1894, in B. Riemann *Œuvres complètes*, *op. cit.*, p. XVI.

qu'en 1918, Weyl introduit une géométrie *purement* infinitésimale qui généralise la géométrie riemannienne. À partir de ce cadre géométrique construit *a priori*, il aboutit à une théorie unifiée des *champs* gravitationnel et électromagnétique. D'un côté, il radicalise le point de vue infinitésimal de Riemann en géométrie, de l'autre il unifie les travaux respectifs de Faraday / Maxwell et d'Einstein en physique des actions de contact. De manière quelque peu téméraire, Weyl considère la théorie physico-mathématique qu'il met en œuvre en 1918 comme en aboutissement au regard des développements conjugués de la *physique des actions de contact* et de la *géométrie infinitésimale*.

1.2.7 Riemann et Leibniz

Dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927),[114] Weyl montre également que Gauss (1827) et Riemann (1854) prolongent aux *surfaces courbes* et aux variétés de dimension finie n l'idée d'une « géométrie infinitésimale » que développe Leibniz lorsqu'il définit la tangente en un point d'une courbe du plan. Sans entrer dans le détail des thèses défendues par Leibniz, il nous semble opportun de nous référer à ses articles fondateurs en calcul différentiel, notamment la « Nouvelle Méthode pour chercher les Maxima et les Minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique ».[115] Ces articles contiennent, nous semble-t-il, des hypothèses fondamentales afin de développer un point de vue infinitésimal en géométrie. Voici, par exemple, comment Leibniz définit la tangente en un point d'une courbe du plan :

> trouver la tangente consiste à tracer une droite joignant deux points infiniment proches de la courbe, c'est-à-dire tracer le côté d'un polygone infinitangulaire qui, à mes yeux, équivaut à la courbe. Or, on peut toujours représenter cette distance infiniment petite par une différentielle connue dv, ou par une relation qui la fait intervenir, c'est-à-dire par une tangente connue.[116]

Burbage et Chouchan font deux remarques qui éclairent ce passage : (a) pour Leibniz, on ne peut pas s'en tenir au constat selon lequel la tangente au point x d'une courbe C donnée

114. voir en particulier H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), München, éd. Oldenbourg, 2000 : « Der Riemannsche Standpunkt, Topologie », p. 113 et suiv. et § 18, « Das Raumproblem », p. 161 et suiv.

115. G. W. Leibniz, « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales, quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus », in *Naissance du Calcul différentiel*, recueil d'articles traduits annotés et commentés par M. Parmentier, Paris, éd. Vrin, 1995, p. 96-117.

116. G. W. Leibniz, « Réflexions originales sur les notions d'angle de contact et d'oscultation et sur leur emploi en mathématique pratique, pour remplacer des figures compliquées par d'autres plus simples qui en tiennent lieu » (Juin 1686), *op. cit.*, p. 122.

n'admet qu'un point commun avec C, en l'occurrence x, au voisinage de la tangence. Il convient d'expliquer clairement la fonction d'une telle droite qui, selon lui, ne diffère pas par nature de la courbe dont elle est la tangente en x. (b) Voilà pourquoi, Leibniz affirme que cette droite passe par x et un point dx de C qui est *infiniment proche* de x. Cet argument est contre-intuitif, il a néanmoins deux avantages : (i) il nous aide à comprendre en quoi la tangente en un point x de C permet de dégager les propriétés *intrinsèques* de C au point x, en particulier sa direction qui équivaut à sa pente, et sa courbure c'est-à-dire « les variations de la direction ». De plus, une telle idée peut être retraduite analytiquement :

> Deux points infiniment proches peuvent être représentés par une différentielle dv. Le passage à l'infini conditionne la généralité de la méthode ; c'est en effet ce qui rend possible un traitement identique de toutes les courbes. De l'équation de la courbe qui permet d'exprimer y en fonction de x, on peut donc, en utilisant les règles de calcul différentiel, inférer une équation « différentielle » qui donne l'équation de la tangente (...). [117]

Qu'il nous suffise maintenant de revenir sur la définition gaussienne du plan tangent à une surface courbe S en l'un de ses points A pour montrer en quoi le lien établi par Weyl dans *Philosophie der Mathematik* n'a rien d'arbitraire, bien qu'il soit hardi :

> Une surface courbe est dite avoir une courbure continue en un point A situé sur elle, si les directions de toutes les droites menées du point A à tous les points de la surface *infiniment peu distants* de A, ne s'écartent qu'*infiniment peu* d'un seul et même plan passant par A : ce plan est dit tangent à la surface au point A. [nous soulignons] [118]

Autrement dit, Gauss envisage tout d'abord les tangentes à toutes les courbes passant par A et il les définit conformément aux idées développées par Leibniz dans ses articles de 1684 et 1686. L'ensemble de ces droites joignant des points infiniment voisins sur les courbes en question permet à Gauss de définir sur un mode « leibnizien » le plan tangent à la surface S au point A. Précisément, la notion de plan tangent en un point quelconque de S sert de support pour dégager et exprimer analytiquement les propriétés intrinsèques de cette même surface.

D'un côté, la géométrie « infinitésimale » développée par Gauss et Riemann constitue l'analogue d'une physique des actions de contact ; de l'autre, elle prolonge et généralise le point de vue infinitésimal développé par Leibniz dans l'étude des courbes du plan. De plus, à l'instar de Leibniz, Riemann suppose que l'espace physique n'est pas homogène, ce qui nécessite d'appréhender son comportement, non pas globalement, mais dans l'infiniment petit. En effet, dans la troisième lettre à Clarke, Leibniz suppose que l'espace est « purement

117. F. Burbage, N. Chouchan, *Leibniz et l'Infini*, Paris, P.U.F., 1993, p. 86.
118. C. F. Gauss, *Recherches générales sur les Surfaces courbes*, *op. cit.*, p. 7-8.

relatif ≫ : il s'agit d'un rapport entre les choses en tant qu'elles coexistent. Autrement dit, l'espace ne saurait être conçu indépendamment des corps. En outre, l'idée d'espace ne peut être formée que par abstraction. Lorsqu'on lui prête le statut d'un réceptacle absolu, on construit alors une chimère ou une idole. Pour justifier son propos, Leibniz commence par invoquer le principe de raison suffisante : ≪ rien n'arrive sans qu'il y ait une raison suffisante pourquoi il en soit plutôt ainsi qu'autrement ≫.[119] Supposons maintenant que l'espace soit absolu. Cela entraîne son homogénéité, puisqu'il ne dépend pas des choses. Bref, ≪ un point de l'espace ne diffère absolument en rien d'un autre point de l'espace ≫. Cette indifférenciation se heurte au principe de raison suffisante : en effet, rien ne justifie que Dieu ait disposé les corps dans un ordre plutôt que dans un autre. Plus encore, l'indifférenciation des régions de l'espace telle qu'elle apparaît chez les newtoniens contredit le principe des indiscernables. De manière synthétique, on peut dire que l'espace au sens de Leibniz admet quatre caractéristiques qui dérivent des ≪ axiomes ≫ empruntés à la métaphysique : il est relatif, il ne constitue pas une réalité indépendante des choses, il n'est pas homogène, il doit être envisagé localement comme un rapport de situation entre les corps.

Riemann formule ces quatre propriétés dans sa leçon mais il ne les fonde pas sur des principes métaphysiques. Dans le § 18 de *Philosophie der Mathematik* intitulé ≪ das Raum-problem ≫, Weyl prend justement le soin de résumer la conception leibnizienne de l'espace avant de développer le point de vue riemannien. Il ajoute que la conception riemannienne de la géométrie et de l'espace physique satisfait au principe leibnizien de continuité :

> De même que, en vertu du principe leibnizien de continuité, la vraie légalité de la nature trouve son expression dans les lois relatives aux actions de contact, pour lesquelles les valeurs des grandeurs physiques sont reliées les unes aux autres au voisinage immédiat des points d'espace-temps, de même, les relations fondamentales de la géométrie se rapportent seulement à des points infiniment voisins les uns des autres ([on parle de] ≪ géométrie ≫ de contact par opposition à une géométrie à distance).[120]

Notre but n'est pas ici d'étudier en détail la genèse du principe de continuité dans l'œuvre de Leibniz, cela nous conduirait trop loin ; il s'agit davantage d'en comprendre le sens, et de montrer en quoi la conception riemannienne de la géométrie et de la physique satisfait à ce principe, à condition de modifier quelque peu le statut que lui prête Leibniz. Pour ce faire, nous nous appuierons sur un passage tiré d'une lettre de Leibniz à Varignon datant du 16

119. G. W. Leibniz, 3^{e} Ecrit à Clarke, 25 février 1716, in *Correspondance Leibniz-Clarke*, présentée par A. Robinet, Paris, P.U.F., 1957, p. 52.
120. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, *op. cit.*, p. 115.

octobre 1707. [121]

Dans cette lettre, Leibniz suppose que le principe de continuité est universel et qu'il est vrai *a priori*. On verra d'ailleurs que la « raison » dernière de ce principe est d'ordre métaphysique. Il insiste tout particulièrement sur son application dans les domaines de la géométrie et de la physique. Le lien entre le principe de continuité et la géométrie dérive de la définition que Leibniz assigne à cette science : « La géométrie [n'est] que la science des limites et de la grandeur du continu ». La géométrie est envisagée d'un point de vue infinitésimal et elle doit être appliquée à un extensum ou à un continuum. Leibniz ajoute qu'il existe toujours des « passages intermédiaires » d'une propriété géométrique à une autre ; autant dire que le principe de continuité proscrit tout « saut » lorsque l'on passe d'une propriété à une autre. Leibniz prend notamment l'exemple de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole. À premier abord, ces « courbes » semblent par nature distinctes, elles n'en demeurent pas moins « liées intimement ». Même si Leibniz ne précise pas son argument, on peut rétrospectivement lui donner raison sur cet exemple. Songeons notamment à l'usage que Poncelet fera du principe de projection pour expliquer le lien entre paraboles, ellipses et hyperboles dont parle Leibniz. D'ailleurs, Poncelet énoncera explicitement un principe de continuité en géométrie projective, qui consiste à faire varier la figure primitive par degrés insensibles pour dégager les propriétés qui demeurent inaltérées lorsque celle-ci subit une telle variation sous l'effet d'une projection. [122] Si l'on suit les arguments développés par Leibniz, le principe de continuité s'applique tant aux objets qu'aux propriétés géométriques. Puisqu'il est valable dans cette science, on peut spontanément en déduire « qu'il ne saurait manquer d'avoir lieu aussi dans la physique ». Leibniz invoque trois arguments pour expliquer une telle extension au principe de continuité.

(i) Il postule « une harmonie » entre la géométrie et la physique. Avant de préciser le sens du terme harmonie, résumons le raisonnement suivi par Leibniz. Si l'on suppose que le principe de continuité ne s'applique pas à la physique, alors qu'il est valable en géométrie, on remet justement en cause l'harmonie entre ces deux sciences. Il ne semble pas que Leibniz parle ici d'une « harmonie préétablie » qui joue par ailleurs un rôle fondamental dans son système puisqu'elle permet de rendre raison de la relation mutuelle entre les substances et du lien entre l'âme et le corps. Dans cette lettre à Varignon, Leibniz indique seulement que la physique doit s'accorder avec la géométrie, sans quoi il n'y aurait plus de « règle » ni « d'ordre » dans la

121. Des extraits de cette lettre sont reproduits dans F. Burbage, N. Chouchan, *op. cit.*, p. 122-124.
122. Voir à ce propos A. Dahan et J. Peiffer, *Une histoire des mathématiques* Paris, éd. du Seuil, 1986, p. 142-143.

nature. On peut se demander si, de manière sous-jacente, Leibniz n'accorde pas une primauté logique à la géométrie par rapport à la physique. Ce passage laisse penser que la seconde doit satisfaire aux principes qui caractérisent de prime abord la première.

(ii) Les lois de la mécanique et de la dynamique exigent de prendre en compte une variable temporelle à côté des variables spatiales auxquelles la géométrie est attachée. Il faut donc s'assurer que le temps lui-même satisfait au principe de continuité avant de l'étendre à la physique. Leibniz précise que « le présent est toujours gros de l'avenir et qu'aucun état donné n'est explicable naturellement qu'au moyen de celui dont il a été précédé immédiatement ». [123] D'après le principe de continuité, on ne saurait guère envisager l'idée d'actions instantanées à distance. De plus, à supposer qu'il existe une relation de causalité entre deux « états », celle-ci ne peut valoir que de proche en proche et suivant un certain ordre temporel, comme l'indique assez l'expression « dont il a été précédé immédiatement ». On peut se demander si le principe de continuité ne préfigure pas l'idée d'une physique des actions de contact. C'est d'ailleurs l'hypothèse d'interprétation que propose Weyl dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Plus exactement, seule une physique des actions de contact peut satisfaire à un tel principe.

(iii) Le principe de continuité dépend du « principe de raison suffisante » dans une perspective leibnizienne. Rappelons que Leibniz fonde nos raisonnements sur trois principes dont dépendent tous les autres : *le principe de non-contradiction* qui implique le rejet de tout énoncé contradictoire ; *le principe de bivalence*, selon lequel tout énoncé est soit vrai soit faux ; *le principe de raison suffisante* — qui s'applique tant aux faits qu'aux énoncés — selon lequel il y a toujours une raison qui explique pourquoi un fait ou un énoncé ne sauraient être autrement qu'ils ne sont. Supposons maintenant que le principe de continuité ne soit pas satisfait dans le domaine de la physique, alors il existerait des hiatus ou des sauts qui demeureraient inexplicables : on invoquerait abusivement le « hasard » ou les « miracles » pour justifier leur survenance. Ceci contredit le principe de raison suffisante, jugé universellement valable. Donc la nature n'admet pas de sauts et le principe de continuité est ainsi déduit *a priori*. Selon Leibniz, le « principe de continuité » vaut dans « l'ordre des successifs », comme en attestent les réflexions précédentes sur la temporalité, mais de plus il s'étend à « l'ordre des simultanés », c'est-à-dire à l'espace physique qui, en conséquence, ne saurait être vide. L'idée d'un espace vide et homogène, dans lequel chaque point ne diffèrerait d'un autre que par sa position déroge simultanément au principe de continuité — s'il y a un espace vide, comment expliquer de proche en proche la causalité entre des phénomènes ? — et au

123. G. W. Leibniz lettre à Varignon, in F. Burbage, N. Chouchan *op. cit.*, p. 123.

principe de raison suffisante — si l'espace est homogène, comment invoquer une raison qui expliquerait qu'un objet occupe une position dans l'espace plutôt qu'une autre ? Ce n'est sans doute pas pour des raisons métaphysiques que la pensée physique et mathématique de Riemann s'accorde avec les arguments développés ici par Leibniz. Pour autant, dans son *Habilitationsvortrag*, Riemann développe une géométrie infinitésimale sur des variétés continues qui s'accorde parfaitement avec la définition leibnizienne de la géométrie comme « science des limites et de la grandeur du continu » et, par extension, avec le principe de continuité. D'un point de vue physique, deux présupposés rendent la pensée riemannienne conforme à ce principe. (i) Il postule l'existence d'un espace continu non vide [continuirlich erfüllten Raum] ; il adhère donc à l'hypothèse de l'éther. Si l'on reprend les expressions de Leibniz, la physique riemannienne est continue dans l'ordre des simultanés. (ii) La relation de causalité ne peut valoir que de proche en proche, ce qui entraîne le rejet d'une physique des actions à distance. Cela étant, ces deux hypothèses ne sont pas suspendues à un principe métaphysique — à savoir le principe leibnizien de raison suffisante — et elles ne sont pas déduites *a priori*, puisque Riemann les fonde sur l'expérience. Voilà pourquoi, Riemann n'exclut pas la possibilité que l'espace physique se comporte comme une variété discrète, même s'il privilégie clairement l'hypothèse d'un espace continu. L'analogie établie par Weyl entre le *Habilitationsvortrag* et le principe leibnizien de continuité ne peut valoir en toute rigueur que si l'on modifie le statut de ce dernier.

1.3 Conclusion du premier chapitre

D'un côté, Weyl situe la *Leçon d'habilitation* de Riemann dans le prolongement strict du traité des surfaces courbes de Gauss. De l'autre, il interprète la dernière partie du *Habilitationsvortrag* de Riemann à la lumière des récents développements en relativité générale. Il est donc tentant de situer Riemann en rupture radicale avec la physique newtonienne. Ainsi, la lecture historienne de cette œuvre qui est proposée par Weyl est *continuiste* d'un point de vue mathématique, nettement *discontinuiste* d'un point de vue physique.

Pour nuancer cette lecture, nous avons montré que les emprunts de Riemann à Gauss sont très complexes, qu'il se réfère également aux diverses contributions d'Abel, Jacobi, Pfaff ou encore Dirichlet en analyse, parce qu'il a en vue un projet ambitieux de géométrisation de l'analyse qui est déjà à l'œuvre dans la *Dissertation* (1851). On ne peut donc pas se contenter d'un rapport de filiation simple Gauss / Riemann pour expliquer les motivations qui président à la *Leçon d'habilitation* de Riemann. En outre, malgré la spécificité de cette

leçon — qui s'adresse aussi bien à des philosophes qu'à des mathématiciens —, Riemann opte pour une approche résolument conceptuelle — largement promue par Dirichlet à Göttingen au début des années 1850 et suivie par Dedekind, alors ami et collègue de Riemann dans cette même université [124] — et il adopte d'emblée un niveau de généralité remarquable. Bref, il généralise les travaux de Gauss sur les surfaces courbes par ≪ dénivellation ≫ et non par simple induction sur le nombre de dimensions d'une variété donnée. Pour le dire autrement, il y a un véritable *décrochage* en termes de généralité et d'abstraction lorsque l'on compare le traité de Gauss et la leçon de Riemann. En effet, ce dernier considère d'emblée des variétés en elles-mêmes, i.e. non plongées dans un espace de dimension plus grande ; de plus, il conçoit *a priori* des classes très générales de variétés métriques pour ensuite se restreindre aux variétés ≪ riemanniennes ≫.

Toutefois, cette *begriffliche Mathematik* n'est pas fondée sur la méthode axiomatique et l'on ne peut pas voir le *Habilitationsvortrag* de Riemann comme une préfiguration des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. En effet, Riemann demeure également attaché à une *anschauliche Mathematik* et il reprend à son compte les réflexions de Gauss sur le statut de la géométrie : celle-ci n'est pas purement *a priori*, à la différence de la mécanique. Riemann ne s'intéresse pas à la structure logique des axiomes qui sont au fondement de la géométrie euclidienne et il n'adopte pas de procédures axiomatiques pour préciser ce qu'il entend par variété.

Inversement, si Riemann étend considérablement le champ des hypothèses envisageables pour déterminer les rapports métriques dans l'espace physique, il se contente d'inviter les physiciens à corriger certaines hypothèses héritées du newtonisme qu'il ne remet donc pas radicalement en question. Ainsi, la lecture historienne du *Habilitationsvortrag* proposée par Weyl est trop cumulative d'un point de vue intra-mathématique ; inversement, elle est complètement rétrospective lorsqu'il analyse les applications à l'espace physique, c'est-à-dire la troisième partie de la leçon de Riemann. Certes, Weyl n'affirme pas que Riemann aurait ≪ anticipé ≫ sur la relativité générale :

124. Signalons que Dedekind participe à l'édition des œuvres complètes de Riemann (1876 pour la première édition) et qu'en 1875, il rédige un texte sous le titre ≪ Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemann's Abhandlungen uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen ≫ qui témoigne de son intérêt pour la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Cette lecture confirme l'inscription de la leçon de Riemann dans une tradition marquée par la promotion des mathématiques conceptuelles. Voir à ce propos M. A. Sinaceur, ≪ Dedekind et le programme de Riemann. Suivi de la traduction de Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemann's Abhandlungen uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde Liegen par R. Dedekind ≫, *Revue d'histoire des sciences*, 1990, Tome 43 n° 2-3. p. 221-296.

> une théorie valide ne pouvait confirmer ces idées qu'après que le temps fut rattaché comme quatrième coordonnée aux trois coordonnées spatiales, comme le montre la théorie de la relativité restreinte. [125]

Il admet que la géométrisation de la relativité restreinte — que l'on doit à Minkowski — est une étape absolument essentielle pour déterminer ensuite le cadre géométrique nécessaire à la formalisation de la relativité générale. Il reprend ici un argument avancé par Einstein dans son article de 1916 sur les fondements de la relativité générale. Toujours est-il que Weyl voit en Einstein le grand continuateur malgré lui de Riemann. Dans *Raum, Zeit, Materie*, il soutient d'ailleurs cet argument sur un ton très emphatique et en ayant recours à une justification quelque peu irrationnaliste, puisque les hypothèses de Riemann se muent en prophéties :

> Mais le vrai continuateur de Riemann, celui dont le génie mathématique et physique est du même ordre que le génie de l'illustre géomètre, celui qui accomplit, soixante-dix ans après, les prophéties que Riemann avait énoncées avec les précisions que nous venons de rappeler, c'est Einstein. [126]

Comme nous l'avons souligné dans notre introduction générale à la seconde partie, Weyl partage cette illusion rétrospective avec Grossmann. Weyl complète cette lecture « historienne » par deux analogies fortes. La première est synchronique et elle consiste à rapprocher la physique des actions de contact de Faraday et la géométrie infinitésimale de Riemann. Nous avons montré qu'il reprend ce parallèle, essentiellement dû à Klein, pour des raisons bien précises : sa théorie unifiée des champs radicalise cette approche infinitésimale, tant en physique qu'en géométrie. La seconde est diachronique et elle revient à situer Riemann dans le prolongement de la conception leibnizienne de l'espace et de la géométrie.

Lorsqu'il se réfère à Gauss et Riemann dans les articles et ouvrages qu'il publie entre 1918 et 1926, Weyl ambitionne plus profondément de dépasser la conception kantienne de l'espace. Il s'agit là d'une motivation récurrente dont on trouve déjà la trace au début de son article intitulé « Reine Infinitesimalgeometrie » (1918). Nous entendons donc étudier avec rigueur cette lecture philosophique de la leçon de Riemann que Weyl prolonge lorsqu'il propose un examen critique de « l'Esthétique transcendantale » de Kant dans les §§ 12, 16 et 18 de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Plus largement, nous essaierons de retracer le fil conducteur qui nous permettra de saisir d'un seul tenant la réception de la théorie kantienne de l'espace par Gauss, Riemann et Weyl.

125. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, *op. cit.*, p. 87.
126. *ibid.*, p. 88.

Chapitre 2

Vers un dépassement de la conception kantienne de l'espace

Notre but n'est pas de revenir sur une évidence : Gauss, Riemann ou encore Weyl ont lu de manière détaillée la *Critique de la raison pure* de Kant. Qu'il nous suffise de mentionner la correspondance de Gauss sur les fondements de la géométrie, les fragments philosophiques laissés par Riemann, l'article de Weyl intitulé *Reine Infinitesimalgeometrie* et surtout son ouvrage majeur en philosophie des sciences à savoir *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Nous nous proposons davantage de répondre aux questions suivantes : qu'est-ce que ces mathématiciens, liés de près à l'université de Göttingen, ont retenu de la conception de l'espace et de la géométrie défendue par Kant ? Dans quelle mesure peut-on parler d'une réception critique des thèses kantiennes ? Comment situer les points de vue d'un Gauss, d'un Riemann ou d'un Weyl par rapport à d'autres contradicteurs du kantisme, en particulier Schlick ou encore Carnap ?

Force est tout d'abord de constater que Gauss, Riemann et Weyl n'ont pas réutilisé passivement les distinctions conceptuelles et le cadre de pensée hérités du kantisme. En voici la raison. Le principal but de l'*Analytique transcendantale* consiste à résoudre le problème suivant : comment des connaissances synthétiques *a priori* sont-elles possibles ? On sait que, dans le cas de la géométrie, cette difficulté est *en partie* résolue — et en partie seulement — au cours de l'*Esthétique transcendantale* et, plus précisément, dans *l'exposition transcendantale du concept d'espace*. Si l'espace n'était pas une intuition pure, alors soit les connaissances géométriques seraient *a priori*, mais analytiques, soit elles seraient *synthétiques*, mais *a posteriori*. Bref, le statut que Kant assigne à la géométrie *élémentaire* est conditionné par sa théorie de l'espace. Cela posé, les raisonnements menés par Gauss, Riemann et Weyl sont

régressifs : partant du constat selon lequel il existe non pas une mais des géométries, ils se demandent si la conception kantienne de l'espace est suffisamment large pour pouvoir les embrasser toutes.

Bref, ils sont conscients que l'on ne saurait dissocier les présupposés de Kant au sujet de l'espace et le statut que celui-ci accorde à la géométrie. Pour le dire autrement, bien qu'ils n'effectuent pas un travail de commentaire ou d'exégèse de la pensée kantienne, ils ont parfaitement saisi son caractère *systématique*. Faisons les précisions suivantes pour confirmer nos interprétations : c'est au moment même où Gauss détermine les premiers contours de la géométrie hyperbolique dès 1816 qu'il s'interroge sur le bien-fondé des thèses de Kant sur la géométrie et l'espace en général. Les réflexions de Gauss sur les fondements de la géométrie sont rassemblées dans le tome VIII de ses *Œuvres complètes*.[1] Certes, les textes de Gauss sur la géométrie hyperbolique, qui sont notamment issus de sa correspondance, ne sont pas publiés avant les années 1860.[2] Mais, à suivre Scholz, ses thèses sur la validité d'une telle géométrie sont clairement rendues publiques dans les années 1840 à Göttingen et elles devaient être connues de Riemann.[3] D'ailleurs, ce dernier ne pouvait pas ignorer le statut que Gauss prête en conséquence à la géométrie, puisqu'il reprend certains des arguments de Gauss dans son *Habilitationsvortrag*. Cette leçon peut d'ailleurs être envisagée partiellement comme un dépassement de la conception kantienne de l'espace. Pour parvenir à cette fin, Riemann s'appuie donc sur Gauss, mais également sur la philosophie de Herbart. Enfin, lors de ses investigations sur la géométrisation de la *relativité générale*, Weyl examine à nouveaux frais l'*Esthétique transcendantale*. Pour ce faire, il ne manque pas de s'appuyer aussi bien sur Gauss que sur Riemann.

Que faut-il entendre par *examen critique* de la philosophie kantienne des mathématiques chez Gauss, Riemann ou encore Weyl ? À vrai dire, ces trois mathématiciens ne se demandent absolument pas si les arguments exposés par Kant, notamment dans son *Esthétique transcendantale*, sont *incomplets* voire même *contradictoires*. Par exemple, Gauss est parfaitement conscient de la cohérence logique du système kantien. Par contre plusieurs, présupposés auxquels Kant demeure attaché sont très problématiques aux yeux de Gauss, à commencer par la thèse selon laquelle les connaissances géométriques sont toutes *a priori*.

Dans le vocabulaire kantien, une connaissance *a priori* — c'est-à-dire indépendante de

1. C. F. Gauss, *Werke*, Bd. VIII, *op. cit.*, p. 159 à 267.

2. Par exemple, la correspondance entre Gauss et Schumacher est publiée entre 1860 et 1865. Voir à ce propos B. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie*, Leipzig, éd. L. Voss, 1877, p. 21.

3. E. Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs*, *op. cit.*, p. 28.

l'expérience — admet deux caractéristiques essentielles : elle est *rigoureusement universelle* [streng allgemein] au sens où aucune exception ne peut la contredire, et elle est *nécessaire* [notwendig]. Cette précision nous conduit déjà à mesurer des difficultés de taille dans le système kantien. En effet, dans le cas d'une connaissance *analytique* — qui est forcément *a priori* pour Kant — la *nécessité* correspond très exactement à la nécessité *logique* : est nécessaire ce dont le contraire est impossible. Qu'en est-il des connaissances géométriques qui ne sont pas analytiques mais synthétiques ? Pour qu'elles soient nécessaires, il faut au moins que la forme de l'intuition qui les conditionne, c'est-à-dire ici l'espace, soit elle-même nécessaire. Mais cela ne suffit pas. La géométrie est constituée de *jugements* [Urteile] ou de *propositions* [Sätze]. Or, la nécessité d'une intuition ne fait pas à elle seule la nécessité d'un jugement de connaissance. On peut donc poser trois problèmes à la suite de Gauss : (1) la géométrie a-t-elle vraiment le caractère de nécessité que lui assigne Kant ? (2) consiste-t-elle exclusivement en connaissances *a priori*, ou bien n'est-elle pas davantage comparable à la mécanique ? (3) L'espace comme intuition a-t-il le caractère de nécessité que lui prête Kant ?

D'après ce qui précède, nous devinons assez que, dans une perspective kantienne, la géométrie élémentaire — i.e. euclidienne — n'est pas envisagée comme un *système formel logiquement possible*. Elle doit être possible au regard de l'expérience. Kant parle à ce propos de « Möglichkeit der Erfahrung ». Celle-ci « donne une réalité objective à toutes nos connaissances *a priori* ». [4] Ainsi, la physique ne peut être mathématisée *que* dans un cadre euclidien, comme le prouvent assez les *axiomes de l'intuition* que nous aurons à résumer dans ce qui suit. La distinction entre *possibilité logique* et *possibilité de l'expérience* nous incite immédiatement à faire les deux remarques suivantes. En premier lieu, la possibilité logique ne renvoie pas chez Kant à des systèmes d'axiomes consistants, mais à des jugements non contradictoires. Comme le précise M. Friedman

> Kant's conception of logic is not that of modern quantification theory, and he can have no notion like ours of all logically possible structures — all models of consistent first-order (or second order) theories, say. [5]

Dans un cadre kantien, la possibilité logique peut porter sur des *figures* non euclidiennes, mais non sur les *systèmes* d'axiomes qui sont au fondement des géométries non euclidiennes. En second lieu, une figure non euclidienne n'est justement qu'une possibilité logique dans le système kantien, elle n'est aucunement possible *au regard de l'expérience*. Ce point n'a pas

4. E. Kant, *Critique de la Raison pure*, *op. cit.*, [A 156, B 195].

5. M. Friedman, *Kant and the exact sciences*, Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press, 1992, p. 93.

échappé à Gauss. Dans sa correspondance, il ne se contente pas de reconnaître que la négation du postulat ne débouche sur aucune contradiction, il se demande si la géométrie hyperbolique est susceptible d'avoir une application extra-mathématique, ce qui laisse supposer qu'elle pourrait avoir une *réalité objective*.

Enfin, rappelons que, dans une perspective kantienne, il convient de distinguer au moins deux espaces : (i) l'espace comme forme des phénomènes du sens externe et (ii) l'espace objectif ou physique qui est doté d'une structure métrique euclidienne. Dans *l'Esthétique transcendantale*, il n'est question que de l'espace comme forme des phénomènes et non pas des propriétés métriques de l'espace objectif. Ces mêmes propriétés, qui sont indispensables afin de mathématiser la physique, apparaîtront en toute clarté avec les *axiomes de l'intuition* qui sont des principes de l'entendement. Il n'en reste pas moins que Kant impose des conditions à l'espace comme forme des phénomènes du sens externe — par exemple l'homogénéité et l'infinité — qui le rendent totalement incompatible avec l'hypothèse d'un univers physique dont la mesure de courbure serait positive. Bref, dans l'*Esthétique transcendantale*, Kant ne conçoit absolument pas l'espace comme un continuum amorphe qui pourrait recevoir n'importe quel type de structure métrique.

En effet, pour montrer que l'espace est originairement une intuition pure et non pas un concept, Kant précise (a) qu'il est un *tout* antérieur à ses parties, il doit donc être saisi *globalement*, de plus (b) qu'on ne peut le *représenter* que « comme une grandeur infinie donnée »[A 25 - B 39]. Nous verrons dans ce qui suit pourquoi un concept ne saurait satisfaire à ces deux réquisits. Pour l'instant, il importe d'identifier les conséquences nécessaires que Kant tire de (a) et (b) concernant l'espace physique. Celui-ci est homogène — conformément au cadre newtonien auquel Kant adhère — et il est infini, au sens où la distance entre deux points dans l'espace peut être arbitrairement grande. Or, rien n'implique *a priori* que l'espace physique soit homogène et qu'il puisse donc être séparé de la matière des phénomènes. De plus, rien ne nous indique que « l'illimitation » dans le progrès de l'intuition qui caractérise l'espace comme forme des phénomènes entraîne que l'espace objectif soit infini. La question est donc de savoir à la suite de Riemann si Kant ne confond pas l'*illimité* [Unbegrenztheit] — comme notion topologique qui signifie « de frontière vide » — et *l'infini* [Unendlichkeit] — comme notion métrique — ou, tout du moins, s'il ne conçoit pas l'infini comme une conséquence nécessaire de l'illimité. Par extension, tout porte à croire que Kant assigne un caractère de nécessité à certaines propriétés de l'espace objectif, alors qu'elles sont purement contingentes. L'un des objectifs de la troisième partie de l'*Habilitationsvotrag* de Riemann consiste à mettre en pleine lumière ce point et donc à relativiser ces mêmes propriétés tenues

pour essentielles.

Ainsi, nous voudrions retracer le fil conducteur suivi successivement par Gauss, Riemann et Weyl afin de dépasser la conception kantienne de l'espace et de la géométrie. Les problèmes soulevés par ces trois mathématiciens au cours de leur examen critique de l'*Esthétique transcendantale* nous paraissent d'autant plus pertinents qu'ils nous tiennent à distance d'un antagonisme bien connu à propos des connaissances géométriques : la première thèse, héritée du kantisme, affirme que la géométrie est constituée exclusivement de jugements synthétiques *a priori* ; la seconde, que l'on associe de manière simplificatrice aux tenants du positivisme logique, se cristallise dans l'hypothèse selon laquelle seules des propositions analytiques peuvent être *a priori*, d'où une démarcation entre la géométrie comme système purement formel et la géométrie appliquée. Gauss, Riemann et Weyl ne discutent pas la différenciation entre jugements « analytiques » et « synthétiques » ; ils ne cherchent absolument pas à la faire coïncider avec la distinction entre connaissances *a priori* et connaissances *a posteriori*, qu'ils jugent beaucoup plus cruciale. En fait, tous trois défendent les deux arguments suivants : (a) il n'y a aucune raison de privilégier la géométrie euclidienne dans la mathématisation de l'espace physique ; (b) parmi les propriétés qu'on peut assigner à cet espace, certaines sont déterminables indépendamment de l'expérience — par exemple il est quasiment certain que l'espace soit une variété sans bord —, d'autres dépendent en revanche de l'expérience. Ainsi, il n'est pas du tout certain que l'espace soit infini, étant précisé que l'infinité est une propriété métrique et non une propriété d'étendue.

2.1 Rappels sur la conception kantienne de l'espace et de la géométrie

2.1.1 L'espace comme intuition pure

Nous ne prétendons pas ici commenter en détail les passages de l'*Esthétique transcendantale* consacrés à l'espace. Nous nous limiterons à quelques rappels sans lesquels les objections de Gauss, Riemann et Weyl contre Kant seraient inintelligibles. Dans *l'exposition métaphysique du concept d'espace*, Kant montre (i) que l'espace est une représentation *nécessaire a priori* et (ii) que l'on a affaire à une *intuition* et non pas à un *concept*. La conjonction des thèses (i) et (ii) permet d'en inférer que l'espace est une intuition pure ou encore une forme des phénomènes du sens externe. Pour prouver l'assertion (i), Kant se fonde sur deux arguments. Tout d'abord, il exclut la définition leibnizienne de l'espace en tant qu'idéalité

abstraite des relations entre phénomènes. En effet, la représentation de l'espace ne saurait *dériver* du rapport entre les choses ; au contraire, elle doit être supposée au moins à titre implicite pour que nous puissions nous figurer de tels rapports. Dans une perspective kantienne, la représentation de l'espace ne s'obtient jamais par *abstraction*. Ensuite, Kant montre que l'on peut toujours se représenter l'espace sans les objets qu'il est censé contenir, la réciproque étant fausse : nous ne saurions nous figurer un objet du sens externe indépendamment de sa situation spatiale. Par suite, l'espace est une « représentation nécessaire, *a priori* » [A 24 - B 38]. Ici, il n'est question ni de nécessité psychologique, ni de nécessité logique. La nécessité psychologique demeure tributaire de l'expérience, elle n'est pas rigoureusement universalisable. Maintenant, si l'espace était logiquement nécessaire, alors il ne s'identifierait pas à une *représentation*, mais à une proposition. En réalité la nécessité de l'espace doit ici être qualifiée de transcendantale : l'espace est une condition sans laquelle nulle représentation des objets du sens externe ne serait possible.

Reste à prouver que l'espace n'est pas *originairement* un concept mais bien une intuition. Pour ce faire, Kant s'appuie une nouvelle fois sur deux arguments. Voici comment il formule le premier :

> On ne peut se représenter qu'un unique espace ; et, quand on parle de plusieurs espaces, on n'entend par là que les parties d'un même espace. Ces parties ne sauraient non plus être antérieures à cet espace unique qui comprend tout, comme si elles en étaient les éléments (et qu'à partir d'elles puisse se faire son assemblage) ; elles ne peuvent, au contraire, être pensées qu'*en lui* [A 25 - B 39]. [6]

Kant adopte un point de vue global et non pas local pour appréhender la représentation de l'espace : celui-ci est un *tout* sans lequel nous ne pourrions pas nous représenter les parties qu'il contient. En quoi un tel argument prouve-t-il que l'espace n'est pas originairement un concept mais une intuition ? La clé de ce problème réside dans la remarque suivante : le rapport de *partie* à *tout* n'est pas identique dans le cas d'un concept et dans le cas d'une intuition. Supposons que l'espace soit une représentation conceptuelle et raisonnons par l'absurde : une partie de l'espace est alors un *sous-concept*, on est donc dans un rapport de genre à espèce qui entraînerait une hiérarchie entre l'espace et ses parties. En effet, un concept spécifique peut être subsumé *sous* un concept général. Par exemple, le concept d'homme est spécifique par rapport à celui de mammifère. Mais, le concept d'homme admet des caractères propres

6. « [Man kann] sich nur einen einigen Raum vorstellen, und wenn man von vielen Räumen redet, so versteht man darunter nur Teile eines und desselben alleinigen Raumes. Diese Teile können auch nicht vor dem einigen allbefassenden Raume gleichsam als dessen Bestandteile (daraus seine Zusammensetzung möglich sei) vorgehen, sondern nur in ihm gedacht werden ».

qui empêchent de le situer sur le même plan que celui de mammifère. Or, Kant montre que les parties de l'espace sont exactement du même ordre que le tout qui les contient, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Fichant affirme à ce propos :

> La division d'un concept n'a rien à voir avec une division en parties comme celle de l'espace, ce qui fait dire que le concept général contient sous lui les concepts spécifiques (ils lui sont subsumés), et non en lui (ou dans lui), comme les partie de l'espace sont dans l'espace. [7]

Le second argument en faveur du caractère originairement intuitif de l'espace se réduit à la formule lapidaire suivante : ≪ l'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée ≫ [B 40 - A 25]. [8] Il ne dit pas que l'espace *est* une grandeur infinie donnée. En voici la raison : une grandeur extensive au sens où Kant l'entend dans *les axiomes de l'intuition* est ≪ celle dans laquelle la représentation des parties rend possible la représentation du tout ≫ [B 203 - A 162]. Or l'espace se caractérise par la propriété inverse. Donc l'espace n'est pas lui-même une grandeur, il peut seulement être *représenté* comme une grandeur infinie donnée. Cette nuance montre que Kant ne se contredit en rien d'un bout à l'autre de la théorie transcendantale des éléments.

Posons-nous maintenant la même question que précédemment : en quoi cet argument prouve-t-il que l'espace n'est pas originairement un concept ? Pour répondre à cette question, distinguons *l'intension* d'un concept et son *extension*. Dans une perspective kantienne, l'extension d'un concept désigne l'ensemble des objets qui peuvent être subsumés sous lui. En revanche, son intension correspond à ses *caractères*. Paul et Pierre appartiennent à l'extension du concept d'homme ; ≪ bipède ≫ et ≪ sans plumes ≫ relèvent de son intension. Il se trouve que tout concept est *fini* en *intension*, même s'il peut en droit être infini en *extension*. Par exemple, des caractères en nombre fini président à la définition du concept d'entier naturel ; par contre, nous savons qu'il existe une infinité d'entiers naturels. Pour que l'espace soit représenté *conceptuellement* comme une grandeur infinie donnée, il faudrait que nous ayons à notre disposition un concept qui aurait un nombre infini de caractères, ce qui est impossible. Donc l'espace est originairement une intuition et non pas un concept.

Ainsi, l'espace n'est ni une idéalité qui serait extraite du rapport entre les choses, ni une chose qui existerait par elle-même, ni un pur concept. Il s'agit d'une représentation intuitive et nécessaire du sujet sans laquelle nul objet indéterminé de l'expérience ne pourrait être appréhendé. De plus, il constitue une condition de possibilité des connaissances géométriques.

7. M. Fichant, ≪ L'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée ≫, la radicalité de l'Esthétique, in *Philosophie*, n° 56, Paris, éd. de Minuit, 1er déc. 2007, p. 30-31.

8. ≪ Der Raum wird als eine unendliche gegebene Grösse vorgestellt ≫.

Si une telle intuition n'existait pas, ou bien celles-ci seraient *a priori*, mais analytiques, ou bien elles seraient synthétiques, mais *a posteriori*. Toujours est-il que la représentation de l'espace ne suffit pas pour construire les propositions de la géométrie élémentaire. En effet, toute connaissance, y compris mathématique, admet deux sources dans une perspective kantienne : la *sensibilité* par laquelle les objets indéterminés d'une expérience nous sont donnés et *l'entendement* qui permet précisément de donner un sens déterminé à ces mêmes objets. Il ne faudrait pas croire que Kant considère la géométrie et, partant, la mathématique dans son ensemble comme un système de « connaissances purement intuitives », cette dernière expression est une contradiction dans les termes.

2.1.2 La « nécessité » de la géométrie euclidienne

Reste à expliquer en quoi la géométrie euclidienne est constituée de connaissances *nécessaires*. Il s'agit également de savoir pourquoi les figures euclidiennes sont les seules possibles au regard de l'expérience selon Kant. Étant donné que les jugements tirés de la géométrie sont tous *synthétiques* et *a priori*, leur nécessité ne saurait être purement logique. Elle repose tout d'abord sur le fait que l'espace est lui-même une représentation nécessaire — et non pas contingente — du sujet. Mais ce premier argument ne suffit pas. En réalité, le caractère nécessaire des propositions géométriques est à rechercher dans la définition des mathématiques comme connaissances par la construction de concepts.

> La connaissance mathématique [considère] le général dans le particulier, même dans le singulier, mais *a priori* et au moyen de la raison, de telle sorte que, comme ce singulier est déterminé sous certaines conditions universelles de la construction, de même l'objet du concept auquel ce singulier ne correspond que comme son schème doit être pensé comme universellement déterminé [A 714 - B 742]. [9]

Notre but n'est pas ici de revenir sur la théorie de l'imagination schématisante à laquelle ce passage renvoie ; cela nous conduirait trop loin dans la compréhension du criticisme. Kant montre ici que la figure sur laquelle s'appuie le géomètre, aussi singulière soit-elle, n'est absolument pas saisie en fonction de ses particularités. En réalité, elle dépend de « conditions universelles de construction ». Autrement dit, lorsque l'on trace un triangle quelconque sur le papier, on ne s'en tient pas à ses caractéristiques sensibles, on le soumet aux propriétés

9. « die mathematische [Erkenntnis betrachtet] das Allgemeine im Besonderen, ja gar im Einzelnen, gleichwohl doch a priori und vermittelst der Vernunft, so dass, wie dieses Einzelne unter gewissen allgemeinen Bedingungen der Konstruktion bestimmt ist, eben so der Gegenstand des Begriffs, dem dieses Einzelne nur als sein Schema korrespondiert, allgemein bestimmt gedacht werden muss.

générales du *concept* de triangle. Ceci est rendu possible en vertu du moyen terme qui se situe entre la sensibilité et l'entendement, à savoir l'imagination schématisante. Raisonnons maintenant par l'absurde et imaginons que nous en restions aux particularités de telle ou telle figure géométrique. En conséquence les jugements que nous tirerions à partir de ces données n'auraient plus rien d'universel et ils seraient contingents. Donc, la définition des mathématiques comme connaissances par la construction de concepts achève d'expliquer en quoi la géométrie est constituée de jugements rigoureusement nécessaires et universels. En effet, Kant explique très bien comment nous remontons de la donnée d'une figure particulière aux « conditions universelles » qui permettent de la construire.

Cela posé, on peut réfuter la *nécessité* de la géométrie de deux manières : (i) en montrant que l'espace n'est pas une représentation nécessaire du sujet ; (ii) en affirmant que les connaissances géométriques ne sont ni *purement*, ni *absolument a priori*. Dans le vocabulaire kantien, une connaissance *a priori* est pure, lorsqu'elle fait intervenir des concepts qui ne dépendent pas de l'expérience ou qui ne se rapportent pas directement à l'expérience : « Mais parmi les connaissances *a priori*, on appelle pures celles auxquelles rien d'empirique n'est mélangé. Ainsi, par exemple, la proposition : Tout changement a sa cause, est une proposition *a priori*, mais non pure, parce que le changement est un concept qui ne peut être tiré que de l'expérience » [B 3]. [10] Cela posé, une proposition est *absolument a priori* lorsque toutes ses prémisses sont aussi nécessaires qu'elle : « si en outre [une proposition *a priori*] n'est dérivée d'aucune autre, que de celle qui est à son tour elle-même valable comme proposition nécessaire, elle est absolument *a priori* » [B 3]. [11]

Pour Kant, la géométrie euclidienne est purement et absolument *a priori*. Or, cette affirmation fait problème : (a) Les concepts de corps rigide ou de géodésique en ligne droite sont-ils vraiment sans rapport avec l'*expérience* ? (b) les axiomes de la géométrie sont-ils évidents, c'est-à-dire immédiatement nécessaires, ou bien ne sont-ils que des hypothèses possibles ? Nous verrons précisément qu'à la différence de Kant, Gauss estime que la géométrie est également constituée de connaissances *a priori impures*. Voilà pourquoi elle est comparable à la mécanique. Mais surtout, il doute du caractère nécessaire de nos axiomes et de notre représentation de l'espace.

10. « Von den Erkenntnissen a priori heissen aber diejenigen rein, denen gar nichts Empirisches beigemischt ist. So ist z. B. der Satz : eine jede Veränderung hat ihre Ursache, ein Satz a priori, allein nicht rein, weil Veränderung ein Begriff ist, der nur aus der Erfahrung gezogen werden kann ».

11. « ist [ein Satz a priori] überdem auch von keinem abgeleitet, alos der selbst wiederum als ein notwendiger Satz gültig ist, so ist er schlechterdings a priori ».

2.1.3 Géométrie euclidienne et mathématisation de l'espace physique

Dernier point à aborder concernant la conception kantienne de la géométrie : celle-ci n'est pas seulement constituée de connaissances rigoureusement nécessaires et universelles, elle préside à la mathématisation de la physique, comme le montrent en particulier les *axiomes de l'intuition*. Kant ne considère pas la géométrie euclidienne comme un simple système formel. À supposer que tel soit le cas, alors les connaissances géométriques ne seraient plus synthétiques, mais analytiques, ce qui entre en contradiction patente avec les thèses de Kant. En outre, celui-ci montre que la géométrie euclidienne est possible au regard de l'expérience, ce qui lui confère de la *réalité objective*.

D'après cette remarque, Kant ne regarde pas l'axiomatique sur laquelle se fonde Euclide comme une simple possibilité logique *parmi d'autres*. Si tel était le cas, elle serait uniquement soumise au principe de non contradiction [Satz des Widerspruchs]. Le passage suivant montre bien la différence entre *possibilité logique* et *possibilité d'expérience*. On repère en filigrane que la philosophie kantienne n'est pas incompatible avec la découverte de figures géométriques ≪ non euclidiennes ≫ au sens où elles ne satisfont pas au cinquième postulat d'Euclide :

> Que dans un tel concept il ne doive se trouver aucune contradiction, c'est assurément une condition logique nécessaire ; mais il s'en faut que cela suffise à la réalité objective du concept, c'est-à-dire à la possibilité d'un objet tel qu'il est pensé par le concept. Ainsi, dans le concept d'une figure renfermée entre deux lignes droites, il n'y a point de contradiction, car les concepts de deux lignes droites et de leur rencontre ne contiennent la négation d'aucune figure ; l'impossibilité ne repose pas sur le concept en lui-même, mais bien sur la construction de ce concept dans l'espace, c'est-à dire sur les conditions de l'espace et de sa détermination, conditions qui, à leur tour, ont leur réalité objective, c'est-à-dire se rapportent à des choses possibles, parce qu'elles contiennent *a priori* la forme de l'expérience en général [B 268 - A 20]. [12]

(1) Kant prend ici un exemple de figure qui aurait un sens en géométrie elliptique ; il montre qu'elle est logiquement possible, mais qu'elle ne saurait recevoir de réalité objective. Autrement dit, nul objet ne pourrait satisfaire aux caractères du concept de figure délimitée par deux lignes droites. (2) On voit bien d'après cette première remarque que la possibilité *logique*

12. ≪ Dass in einem solchen Begriffe kein widerspruch sein müsse, ist zwar eine notwendige logische Bedingung ; aber zur objektiven Realität des Begriffs, d. i. der Möglichkeit eines solchen Gegenstandes, als durch den Begriff gedacht wird, bei weitem nicht genug. So ist in dem Begriffe einer Figur, die in zwei geraden Linien und deren Zusammenstossung enthalten keine Verneinung einer Figur ; sondern die Unmöglichkeit beruht nicht auf dem Begriffe an sich selbst, sondern der Konstruktion desselben im Raume, d. i. den Bedingungen des Raumes und der Bestimmung desselben, diese haben aber wierderum ihre Realität, d. i. sie gehen auf mögliche Dinge, weil sie die Form der Erfahrung überhaupt a priori in sich enthalten ≫.

de figures non euclidiennes n'ébranle pas le système kantien. (3) Mais surtout, on se rend compte du caractère contraignant de l'intuition de l'espace et de l'espace objectif afin qu'une figure géométrique reçoive une quelconque effectivité au sens où elle aurait de la réalité objective. Certes, on peut bien *concevoir* une figure délimitée par deux lignes droites, mais on ne saurait pourtant la « construire ». Étant donné que les mathématiques sont définies comme les connaissances par la construction de concepts, une figure de cet ordre n'aurait pas même de sens sur un plan intra-mathématique.

On en déduit deux types d'impossibilité que l'on ne saurait confondre : l'impossibilité logique (sanctionnée par la présence d'une contradiction) et l'impossibilité dans la construction d'un concept. Un carré rond est logiquement impossible. En revanche, une figure enfermée dans deux lignes droites est bien concevable, mais elle n'est pas *constructible*. Bref, pour être possible au regard de l'expérience, un concept doit au moins être logiquement possible. La réciproque est fausse.

Montrons maintenant que pour Kant seule la géométrie euclidienne peut avoir une réalité objective. Notre hypothèse se fonde sur le sens que Kant assigne aux *axiomes de l'intuition*. À première lecture, cette expression fait doublement difficulté. Nous pourrions d'abord croire qu'il s'agit d'axiomes tirés de l'intuition ou qui se rapportent directement à l'intuition, ce qui n'a pas de sens, puisqu'un axiome est une *proposition*. Nous serions également tentés de penser que les *axiomes* de l'intuition sont du même ordre que les axiomes de la géométrie. Pour lever ces deux contresens, nous devons faire les deux remarques suivantes. Tout d'abord, nous avons ici affaire à des principes de l'entendement ; ils ont pour origine notre faculté de connaître et non pas notre sensibilité. Ensuite, Kant distingue (1) *les lois de la nature* — qui sont des principes empiriques —, (2) *les principes des mathématiques* — qui ne dépendent pas de l'expérience — et (3) *les principes de l'entendement*, parmi lesquels les axiomes de l'intuition :

> On n'est donc véritablement pas exposé ici à prendre des principes empiriques pour des principes de l'entendement pur, ou inversement ; car la nécessité selon des concepts, qui caractérise les principes de l'entendement pur, et dont on perçoit aisément le manque dans toute proposition empirique, si universelle qu'en soit la valeur, peut aisément prévenir cette confusion. Mais il y a des principes purs *a priori* que je ne saurais pourtant attribuer proprement à l'entendement pur, parce qu'ils ne sont pas tirés de concepts purs mais d'intuitions pures (quoique par l'intermédiaire de l'entendement) ; or, l'entendement est le pouvoir des concepts. La mathématique possède de tels principes mais leur application à l'expérience, par conséquent leur validité objective, et même la possibilité d'une telle connaissance *a priori* (leur déduction), repose toujours sur l'entendement pur [B 198 - A 159]. [13]

13. « Dass man bloss empirische Grundsätze des reinen Verstandes, oder auch umgekehrt ansehe, deshalb

Les lois de la nature ou ≪ principes empiriques ≫ dépendent au moins *en partie* de l'expérience. C'est notamment vrai de la loi de gravitation newtonienne qui a un statut mixte pour Kant. Elle ne dérive pas purement et simplement de principes *a priori* — en l'occurrence les analogies de l'expérience et les axiomes de la géométrie euclidienne —, elle est donc également fondée sur des données de l'expérience. [14] Cela posé, les principes mathématiques et les principes de l'entendement ont au moins un point en commun. Il s'agit dans les deux cas de connaissances *a priori*, donc universelles et nécessaires. Quels critères peut-on alors utiliser pour ne pas les confondre ? Kant en mentionne deux : (1) comme toute connaissance mathématique, un axiome tiré de la géométrie élémentaire s'obtient par la *construction* de concepts via une intuition pure, ce qui n'est pas le cas des *axiomes de l'intuition* qui dépendent exclusivement de l'entendement. (2) Les principes de l'entendement ne sont pas seulement des connaissances *a priori*, mais encore des connaissances *transcendantales*. Autrement dit, il s'agit de *conditions* qui rendent possible la constitution ou la construction d'autres connaissances. Pour Kant, il appartient à la philosophie critique, et non pas aux mathématiciens eux-mêmes, de déterminer les conditions qui rendent possible la géométrie et ses applications à la physique. Selon lui, les mathématiques ne contiennent aucune connaissance transcendantale.

Nous pouvons maintenant saisir *la fonction* des axiomes de l'intuition : on a là affaire à des principes de l'entendement qui conditionnent l'effectivité de la géométrie en physique. Kant le dit en toute lettre dans le passage suivant :

> Ce principe transcendantal de la mathématique des phénomènes donne à notre connaissance *a*

kann wohl eigentlich keine Gefahr sein ; denn die Notwendigkeit nach Begriffen, welche die letzere auszeichnet, und deren Mangel in jedem empirischen Satze, so allgemein er auch gelten mag, leicht wahrgenommen wird, kann diese Verwechselung leicht verhüten. Es gibt aber reine Grundsätze a priori, die ich gleichwohl doch nicht dem reinen Verstande eigentümlich beimessen möchte, darum, weil, sie nicht aus reinen Begriffen, sondern aus reinen Anschauungen (obgleich vermittelst des Verstandes) gezogen sind ; Verstand ist aber das Vermögen der Begriffe. Die Mathematik hat dergleichen, aber ihre Anwendung auf Erfahrung, mithin ihre objektive Gültigkeit, ja die Möglichkeit solcher synthetischen Erkenntnis a priori (die Deduktion derselben) beruht doch immer auf dem reinen Verstande ≫.

14. M. Friedman, *op. cit.*, p. 167 : ≪ the law of gravitation has a particular kind of mixed status : it is derived form a combination of a priori laws of the understanding (the analogies of experience), a priori laws of sensibility (Euclidean geometry), *and* a posteriori given data of experience. Because of its essential dependence on the latter, the law of gravitation is an empirical law and hence, strictly speaking, is neither a priori nor necessary. Nevertheless, because of its equally essential depndence on the above-mentioned a priori laws, the law of gravitation still enjoys a particular kind of "empirical" or "material" necessity in virtue of which it is more firmly established and secure relative to the a posteriori given data than any mere inductive generalization or hypothesis ≫.

> *priori* une grande extension. C'est lui seul, en effet, qui rend la mathématique pure applicable dans toute sa précision aux objets de l'expérience, ce qui, sans ce principe, ne serait pas de soi si évident [B 206 - A 165]. [15]

Reste à montrer que ces axiomes de l'intuition ne valent *que* pour la géométrie euclidienne et donc qu'ils confèrent une structure euclidienne à l'espace objectif. Kant les définit comme suit :

> En voici le principe : toutes les intuitions sont des grandeurs extensives [B 202 - A 162]. [16]

Ce principe vaut pour les intuitions spatiales et temporelles. Par *grandeur extensive*, Kant entend ≪ celle dans laquelle la représentation des parties rend possible la représentation du tout ≫. Autrement dit, l'espace lui-même comme forme des phénomènes du sens externe n'est pas une grandeur extensive. Cela posé, nous voudrions revenir sur l'interprétation des axiomes de l'intuition proposée par M. Wolff. [17] Ils constituent en fait une généralisation du principe de similitude sur lequel se fondait J. Wallis à la fin du XVII^{e} siècle afin de prouver le cinquième postulat d'Euclide.

Pour confirmer l'interprétation de Wolff, revenons sur le statut de la géométrie que précise Kant lorsqu'il commente les axiomes de l'intuition. Il affirme que la géométrie est la science de l'étendue (Mathematik der Ausdehnung). Rétrospectivement, nous savons que nous devons faire la différence entre les rapports d'étendue — qui relèvent exclusivement de *l'analysis situs* — et les propriétés métriques. L'expression ≪ mathématique de l'étendue ≫ pourrait donc recevoir le sens suivant parmi les mathématiciens : elle désignerait l'étude des propriétés qui demeurent inaltérées lorsque l'on fait subir une déformation continue à une figure géométrique. Par exemple, toute courbe fermée est obtenue par déformation continue du cercle unité dans le plan numérique. Pour être plus précis, nous dirions qu'une courbe simple fermée quelconque est homéomorphe au cercle unité. Il est alors question non pas de géométrie métrique, mais de géométrie des situations (Geometrie der Lage).

Dans une perspective kantienne en revanche, la mathématique de l'étendue n'enveloppe que des propriétés métriques. N'oublions pas en effet que les axiomes de l'intuition portent

15. ≪ Dieser transzendentale Grundsatz der Mathematik der Erscheinungen gibt unserem Erkenntnis a priori grosse Erweiterung. Denn er ist es allein, welcher die reine Mathematik in ihrer ganzen Präzision auf Gegenstände der Erfahrung anwendbar macht, welches ohne diesen Grundsatz nicht so von selbst erhellen möchte ≫.

16. ≪ Das Prinzip ist : Alle Anschauungen sind extensive Grössen ≫.

17. Voir en particulier M. Wolff, ≪ Geometrie und Erfahrung — Kant und das Problem der objektiven Geltung der Euklidischen Geometrie ≫, In *Kant und die Berliner Aufklärung*, Akten des IX. internationalen Kant Kongresses, Band 1. éd. de Gruyter, (2001), p. 216.

sur des grandeurs (Grössen), c'est-à-dire des *quantités*, ce qui n'a rien de commun avec une géométrie purement *qualitative*. Quand nous faisons subir une extension (au sens de Kant) à un cercle, nous obtenons un cercle de diamètre plus important. De même, lorsque nous faisons subir une extension à un triangle, nous construisons alors un autre triangle qui doit être *semblable* au premier, ce qui signifie que leurs angles respectifs sont deux à deux égaux. On retrouve le principe de similitude de Wallis qui vaut pour une, et une seule géométrie : celle d'Euclide. Donc prouver le postulat des parallèles à partir d'un tel principe, c'est ne rien prouver du tout. À suivre Kant, un tel principe de similitude est généralisable à toute intuition — y compris empirique. Bref, la structure euclidienne de l'espace « géométrique » se transmet à l'espace physique : ce dernier *doit* se comporter conformément à la géométrie d'Euclide. Enfin, en vertu des axiomes de l'intuition, on peut clairement distinguer les figures qui sont seulement concevables (i.e. logiquement possibles) et celles qui, en outre, sont constructibles. Kant affirme sans ambiguïté que le principe selon lequel deux lignes droites n'enferment aucun espace est une conséquence des axiomes de l'intuition.

Nos brefs rappels sur la conception kantienne de la géométrie et de l'espace nous amènent à tirer les conséquences suivantes : (i) Les connaissances géométriques ont deux sources chez Kant, l'espace qui relève de la sensibilité et les axiomes de l'intuition qui sont des principes de l'entendement. (ii) Seule la géométrie euclidienne satisfait aux axiomes de l'intuition. (iii) L'espace objectif est lui-même doté d'une structure euclidienne. (iv) On peut bien concevoir des figures non euclidiennes dans une perspective kantienne, elles sont cependant privées de réalité objective. La question est de savoir si les axiomes de l'intuition sont autre chose que des pétitions de principe. Gauss parvient sans doute à cette conclusion au moment où il développe son projet d'une géométrie *et* d'une physique non-euclidiennes.

2.2 Les critiques de Gauss contre la théorie kantienne de l'espace

Exhibons les présupposés de Kant qui, aux yeux de Gauss et de Riemann, sont discutables :

(a) L'espace est une représentation *nécessaire* du sujet ;

(b) Les espaces intuitif et physique doivent être conçus globalement ;

(c) L'espace physique est *infini*, il s'agirait là d'une conséquence nécessaire du caractère

illimité de notre appréhension de l'espace en tant que forme des phénomènes ;

(d) La géométrie est constituée de connaissances *strictement* universelles et nécessaires ;

(e) Seule la géométrie euclidienne est possible *au regard de l'expérience* ;

(f) La structure métrique de l'espace physique *est* euclidienne.

La correspondance de Gauss qui est relative aux fondements de la géométrie débute en 1799 ; rassemblée dans le tome VIII de ses *Œuvres*, elle fait intervenir une grande diversité de protagonistes qui sollicitent Gauss sur la théorie des parallèles ou auxquels ce dernier confie ses réflexions et ses premières idées à propos d'une géométrie non euclidienne — il s'agit en l'occurrence de la géométrie hyperbolique. Ainsi, Gauss s'entretient avec Bolyai père, Gerling, Taurinus, Bessel, etc., sur le statut du postulat des parallèles. Ces échanges épistolaires nous donnent de précieuses indications sur les sources de Gauss. Il mentionne tout d'abord le nom de Chauvelot, élève de Monge à l'école de Mézières et réfugié à Brunswick au milieu des années 1790. Gauss côtoie manifestement Chauvelot au cours de cette période. En 1795, ce dernier publie un ouvrage à destination des enseignants et des élèves en géométrie intitulé *Introduction à la géométrie ou développement de l'idée d'étendue*, traduit en allemand en 1797. [18] L'université de Göttingen possède d'ailleurs un exemplaire de cet ouvrage et de sa traduction en allemand. À partir de la fin du XVIII^{e} siècle, Chauvelot s'intéresse de près à la théorie des parallèles ; il prétend avoir trouvé une preuve du postulat des parallèles, comme le rapporte d'ailleurs Gauss dans une lettre à Bolyai père datant du 16 décembre 1799. [19] Cependant aucun ouvrage de Chauvelot ne sera publié sur cette question. Autre référence citée par Gauss : la théorie des parallèles développée par Johann Karl Friedrich Hauff. Elle paraît sous une forme aboutie dans la seconde édition par Hauff lui-même des *Éléments d'Euclide* en 1807. [20] En outre, Gerling invite Gauss à examiner la preuve proposée par Legendre du théorème selon lequel la somme des angles d'un triangle doit être égale à deux droits. Gerling et Gauss se réfèrent alors à la sixième édition des *Éléments de géométrie* de Legendre (1806). [21] Enfin, dernier ouvrage examiné par Gauss : il s'agit du *Commentatio in primum elementorum Euclidis librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti*

18. Sylvestre Chauvelot, *Introduction à la géométrie ou développement de l'idée d'étendue*, imprimerie de la maison des orphelins, Brunswick, 1795, trad. en allemand sous le titre *Einleitung in die Geometrie, oder Entwicklung des Begriffs Raum*, Göttingen, Dieterich, 1797.

19. C. F. Gauss, *Werke*, Bd. VIII, *op. cit.*, p. 160.

20. J. K. F. Hauff, *Euklids Elemente*, Marburg, erste Auflage 1799, zweite Auflage 1807. L'annexe consacrée à la théorie des parallèles se trouve p. 345 et suiv. de la seconde édition.

21. A. M. Legendre, *Éléments de géométrie*, sixième édition, Paris, Firmin Didot, 1806. À la demande de Gerling, Gauss examine la proposition XX (p. 20) : ≪ dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux droits ≫, ainsi que la note 2 relative à cette même proposition, p. 280 à 287.

evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae demonstrantur de Schwab (1814) qui contient également une preuve de l'axiome des parallèles.

Gauss ne s'avoue convaincu ni par les arguments de Hauff, ni par la démonstration de Legendre, ni par la thèse de Schwab. Corrélativement, il examine la théorie kantienne de l'espace et de la géométrie qui est tout à fait singulière si on la compare notamment aux conceptions que Chauvelot développe sur l'étendue et que Gauss devait également connaître. En effet, pour Chauvelot, l'étendue peut être définie soit comme une sensation, soit comme une idée abstraite conçue par notre entendement abstraction faite des données issues de nos sens. Il emploie alors l'expression d'« espace absolu » pour qualifier l'étendue considérée en elle-même.[22] Or, pour Kant, l'espace n'est ni la résultante de sensations, ni une idée abstraite produite par notre entendement, mais une forme de notre sensibilité. Donc, même si Gauss ne partage pas les vues de Kant sur l'espace et la géométrie, il en reconnaît la profonde originalité. Pour être plus précis, nous verrons qu'il admet avec Kant le caractère synthétique des connaissances géométriques. En revanche, il remet en cause les assertions (a) et (d) que nous avons énoncées au début de ce paragraphe. Son projet de physique non euclidienne montre qu'il doute également de la pertinence des propositions (e) et (f). De son côté, Riemann remet en cause les hypothèses (b) et (c) dans son *Habilitationsvortrag*.

Insistons immédiatement sur le fait que Gauss ne trace aucune ligne de démarcation entre une géométrie purement formelle, qui serait analytique et *a priori*, et une géométrie appliquée qui, pour sa part, serait synthétique mais *a posteriori*. Il ne faudrait donc pas projeter sur les écrits de Gauss une distinction qu'on trouvera explicitement chez Russell et qui sera ensuite reprise par certains « positivistes logiques », en l'occurrence Reichenbach, Schlick ou encore Carnap. Pour Gauss, la géométrie est à la fois théorique et pratique, ce qui explique pourquoi elle ne saurait être indépendante de la physique et, en particulier, de la mécanique. En outre, Gauss partage au moins un présupposé commun avec Kant : les principes d'identité et de contradiction ne sont pas suffisants pour fonder la géométrie. À ce propos, il est en désaccord avec le mathématicien allemand J. C. Schwab (1743-1821) qui, en 1814, propose une pseudo-démonstration du cinquième postulat d'Euclide, accompagnée d'une réfutation de la conception kantienne de la géométrie. Gauss écrit à ce propos :

> Une grande partie de l'écrit [de Schwab] est centrée sur l'assertion antikantienne selon laquelle

22. S. Chauvelot, *op. cit.*, p. 10-11 : « Or, comme sensation, l'Étendue n'est que l'effet d'une certaine action des corps sur quelques uns de nos organes ; et comme idée abstraite, elle est l'ouvrage de l'entendement qui a généralisé cette sensation, et qui en a fait un être métaphysique purement intellectuel, en écartant toutes les qualités sensibles et actives qui accompagnent l'Étendue dans les êtres matériels ».

> la certitude de la géométrie ne se fonde pas sur l'intuition, mais sur des définitions, le ≪ principium identitatis ≫ et le ≪ principium contradictionis ≫. Kant n'a jamais voulu nier qu'il faille utiliser de proche en proche ces moyens logiques dans l'habillage et l'enchaînement de vérités géométriques ; mais, tout individu qui s'est familiarisé avec l'essence de la géométrie doit reconnaître qu'ils n'apportent rien par eux-mêmes, qu'ils demeurent stériles tant que n'intervient pas partout l'intuition vivante et féconde de l'objet. [23]

Gauss montre que les principes d'identité et de contradiction ne fondent pas à eux seuls la géométrie élémentaire. Seules des représentations intuitives nous permettent d'accéder à des objets sans lesquels nos concepts géométriques seraient vides. Bref, la géométrie n'est pas réductible à la logique ; pour le dire autrement, elle ne se caractérise pas uniquement par un ensemble de raisonnements formellement valides. C'est là l'un des rares points communs que Gauss partage avec Kant. Par contre, il ne semble pas que Gauss considère la géométrie comme un ensemble de connaissances purement et absolument *a priori*. En effet, dans sa correspondance, il montre qu'à la différence de l'arithmétique, qui est analytique et *a priori*, la géométrie doit recevoir le même statut que la mécanique.

Rappelons que, durant sa carrière, Gauss n'a jamais publié d'ouvrages sur la ≪ géométrie non euclidienne ≫ — c'est-à-dire la géométrie hyperbolique. Cependant ses lettres à Gerling, Taurinus, Schumacher, Bessel, etc., montrent qu'il est parvenu très tôt à dégager les principales propriétés de la géométrie hyperbolique. Dès 1799, il est convaincu qu'il n'existe aucune démonstration probante du postulat des parallèles. Dans une note du 27 avril 1813, il écrit d'ailleurs : ≪ dans le domaine de la théorie des parallèles, depuis Euclide, nous n'avons pas accompli à ce jour l'ombre d'un progrès. C'est la partie honteuse [en français dans le texte] des mathématiques qui, tôt ou tard, devra recevoir une forme totalement différente ≫. [24] Autrement dit, Gauss estime qu'en l'état, la théorie des parallèles ne nous permet pas de nous assurer du bien fondé du 5^{e} postulat d'Euclide. Il prédit qu'une théorie d'un nouvel ordre doit voir le jour. À partir de 1816, il montre justement qu'une géométrie fondée sur la négation du cinquième postulat d'Euclide ne conduit à aucune contradiction patente. À mesure qu'il

23. C. F. Gauss, note sur la thèse de Schwab, dans les *Göttingische gelehrte Anzeigen*, (20 Avril 1816), *op. cit.*, p. 172 : ≪ Ein Grosser Teil der Schrift [von Schwab] dreht sich um die Behauptung gegen Kant, dass die Gewissheit der Geometrie sich nicht auf der Anschauung, sondern auf Definitionen und auf das ≪ Principium identitatis ≫ und das ≪ Principium contradictionis ≫ gründe. Dass von diesen logischen Hilfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl Kant nicht leugnen wollen ; aber dass diesselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur tauben Blüten treiben, wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes Selbst überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen de Geometrie vertraut ist ≫.

24. *ibid.*, p. 166.

réalise ce premier projet de géométrie non euclidienne, il résout les problèmes suivants d'un point de vue épistémologique : quel statut doit-on accorder aux connaissances géométriques ? Quelles sont les propriétés que l'on peut assigner à l'espace physique ?

Gauss commence par critiquer les mathématiciens qui ont *cru* que le postulat d'Euclide était démontrable. Il montre en particulier que les *pseudo* démonstrations proposées par Schwab et Legendre sont circulaires. Par exemple, Legendre prétend avoir prouvé que la somme des trois angles d'un triangle doit faire 180 degrés dans ses *Éléments de géométrie* (édition de 1806), il en déduit alors le postulat des parallèles. Le 11 mars 1816, Gerling demande à Gauss ce qu'il pense du raisonnement de Legendre. La réponse de Gauss, datée du 11 avril 1816, s'ouvre sur cette remarque cinglante :

> Vous voulez connaître mon avis sur la preuve de Legendre au sujet des parallèles. J'avoue qu'il n'y a à mes yeux rien de probant dans ses raisonnements. [25]

Et il conclut sa lettre en ces termes : « Il est facile de démontrer que si la géométrie euclidienne n'était pas la vraie géométrie, il n'y aurait pas de figures semblables : les angles d'un triangle équilatéral varieraient alors suivant la grandeur des côtés de ce même triangle, ce que je ne trouve aucunement absurde. Il y aurait alors une relation fonctionnelle entre les côtés et les angles du triangle, et naturellement, une telle fonction contiendrait en même temps une ligne constante [constante Linie]. Il peut sembler un peu paradoxal qu'une ligne constante puisse, en quelque sorte, être possible *a priori*, mais je ne trouve rien de contradictoire à cela. Il serait même (à la limite) souhaitable que la géométrie d'Euclide ne soit pas vraie, puisque dans une telle circonstance nous disposerions *a priori* d'une grandeur générale, on pourrait par exemple prendre comme unité spatiale le côté d'un triangle équilatéral dont l'angle est égal à 59^0 59'59", 999 99... ». [26]

Gauss établit ainsi que les transformations appelées similitudes s'appliquent exclusivement à la géométrie métrique euclidienne. Dans ce cadre, deux triangles similaires ont les mêmes mesures d'angles, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. Par contraposition, si l'on se fonde sur une géométrie « non euclidienne », alors l'impossibilité des transformations par similitude permet d'en déduire que la mesure des angles d'un triangle est fonction de la longueur de ses côtés. Ceci ne conduit à aucune contradiction. Pour le dire autrement, on ne peut pas prouver par l'absurde la *nécessité* de la géométrie euclidienne. En outre, la preuve de Wallis tombe également : à suivre Wallis, on peut déduire le postulat des parallèles (PP) à partir du principe de similitude (PS) ; en réalité, PS est une conséquence de PP, que Wallis

25. C. F. Gauss, Brief an Gerling (11 avril 1816), *op. cit.*, p. 168.
26. *ibid.*, p. 169.

présuppose sans s'en rendre compte. Son raisonnement est donc circulaire. Inversement, Gauss en déduit qu'une géométrie fondée sur la négation du 5^{e} postulat d'Euclide — en l'occurrence ici la géométrie hyperbolique — n'est pas logiquement impossible.

Ensuite, il insiste sur le fait que les mathématiciens se trompent lorsqu'ils érigent leurs *habitudes de pensée* au rang de *nécessités logiques*. Les hypothèses qui nous sont inhabituelles peuvent très bien être logiquement possibles. Bref, on ne saurait prendre des *convictions* — par définition purement subjectives — pour des *certitudes apodictiques*. Dans une lettre à Taurinus datant du 8 novembre 1824, il affirme à ce propos :

> L'hypothèse selon laquelle la somme des trois angles d'un triangle serait moins grande que 180 degrés conduit à une géométrie spécifique, complètement différente de la nôtre (i.e. de celle d'Euclide) et en elle-même parfaitement conséquente ; je l'ai développée pour moi-même de façon pleinement satisfaisante, de sorte que je peux décomposer chaque problème, à l'exception de la détermination d'une constante que l'on ne peut pas définir *a priori*. Plus cette constante est supposée grande, plus on s'approche de la géométrie euclidienne et une grandeur infiniment plus grande les rend commensurables. Les propositions d'une telle géométrie semblent en partie paradoxales et absurdes [ungereimt] pour un esprit non entraîné ; mais, lorsque l'on y réfléchit à tête reposée, on trouve qu'elle ne contient absolument rien d'impossible. [27]

Gauss est donc convaincu que la géométrie hyperbolique est logiquement possible ; cependant il ne prouve pas une telle assertion. Pour parvenir à ce point, il aurait fallu qu'il dispose de modèles satisfaisant aux axiomes de la géométrie hyperbolique ; ces modèles ne verront guère le jour avant les travaux de Beltrami (1868), Klein (1871) et Poincaré (1882). En outre, Gauss s'attaque aux métaphysiciens, dont la prétendue sagesse n'est qu'une question de mots [Wort-Weisheit]. Ceux-ci prétendent pouvoir se prononcer *a priori* sur la nature de l'espace ; ils élaborent une connaissance apparente au lieu de reconnaître leur ignorance. Gauss admet donc que nous en savons en fait très peu sur la nature de l'espace ; cette attitude prudente, qui relève du scepticisme mitigé, doit s'interpréter comme suit : rien ne nous permet de dire *a priori* si la géométrie euclidienne constitue le cadre formel le plus pertinent pour mathématiser l'espace physique.

27. C. F. Gauss, lettre à Taurinus, (8 novembre 1824), *op. cit.*, p. 187 : ≪ Die Annahme, dass die Summe der drei Winkel kleiner sei als 180°, führt auf eine eigene, von der unsrigen (Euklidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst ganz consequent ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so dass ich jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt. Je grösser man diese Constante annimmt, desto mehr nähert man sich der Euklidischen Geometrie und ein unendlich grosser Wert macht beide zusammenfallen. Die Sätze jener Geometrie scheinen zum Teil paradox, und dem Ungeübten ungereimt ; bei genauerer ruhiger Überlegung findet man aber, dass sie an sich durchaus nichts unmögliches enthalten ≫.

Nous avons remarqué à juste titre dans ce qui précède que Gauss ne réduit pas le domaine de la géométrie à un ensemble logiquement cohérent de propositions. Il s'intéresse avant tout à son application dans le domaine de la physique. Cette précision nous aide à comprendre pourquoi il est à la recherche de la *vraie* géométrie. Manifestement, il établit une distinction entre vérité — au regard de l'expérience — et validité logique. Une proposition issue de la géométrie peut bien être exempte de contradictions sans pour autant être vraie. Pour le dire dans les termes de Gauss, nous avons affaire à deux géométries logiquement possibles. Pour autant il n'existe à ses yeux qu'une et une seule vraie géométrie qui correspond ou bien à celle d'Euclide ou bien à celle qu'il a nouvellement introduite. Puisque le cinquième postulat est indémontrable, on ne saurait résoudre cette difficulté *a priori*. On en déduit que la vraie géométrie au sens de Gauss doit entrer en conformité avec les conditions de l'expérience. Autrement dit, seule l'expérience peut servir de clé de voûte pour déterminer la « vraie » géométrie.[28] Gauss va même plus loin : rien n'empêche que l'on puisse parvenir à une physique non euclidienne. Mais une telle éventualité n'a de sens que si l'on s'écarte de la conception kantienne de l'espace qui, précisément, confère de la réalité objective exclusivement à la géométrie d'Euclide.

Avant de parvenir à ce point, insistons sur le fait que l'épistémologie implicite de Gauss n'a ici rien à voir avec le « conventionnalisme » de Poincaré. Dans le chapitre III de *La science et l'hypothèse*, Poincaré affirme que les axiomes sur lesquels sont fondées les géométries euclidienne, hyperbolique et elliptique sont des *conventions* c'est-à-dire des hypothèses librement construites par notre entendement indépendamment de données empiriques ou d'un espace entendu comme forme constitutive de notre sensibilité. Poincaré ajoute qu'il ne revient absolument pas à l'expérience de trancher entre ces trois géométries. Elles sont parfaitement valides logiquement et toutes peuvent être utilisées pour mathématiser les phénomènes. C'est seulement en raison de sa « simplicité » et de sa commodité que la géométrie euclidienne doit être préférée aux géométries non-euclidiennes.[29] Poincaré n'affirme aucunement que

28. Voir en particulier R. Carnap, *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft*, München, Nymphenburger Verlagshandlung, 1969, p. 135 : « Gauss fut clairement le premier à remarquer que seule une investigation empirique de l'espace nous permet de déterminer la géométrie qui le décrit au mieux. Une fois que nous avons reconnu que les géométries non euclidiennes n'ont rien de contradictoire, il est impossible de faire l'économie de recherches empiriques pour dire quelle est la géométrie qui est valable dans la nature ». [« Gauss war der erste, der klar sah, dass wir nur durch eine empirische Untersuchung des Raumes feststellen können, welche Geometrie ihn am besten beschreibt. Wenn wir einmal erkannt haben, dass nicht Euklidische Geometrien nicht widerspruchsvoll zu sein brauchen, können wir nicht mehr, ohne empirische Untersuchungen anzustellen, sagen, welche Geometrie in der Natur gilt ».]

29. H. Poincaré, *La science et l'hypothèse* (1902), Paris, éd. Flammarion, 1968, p. 75-76.

la géométrie euclidienne serait la ≪ vraie ≫ géométrie au regard de l'expérience. G. Crocco commente ce passage tiré de *La science et l'hypothèse* en ces termes :

> Aucune observation, aucune expérience ne pourra jamais démontrer que l'espace physique a ou n'a pas une structure euclidienne, aucune théorie mécanique ne pourra jamais nous imposer une description géométrique de l'espace, aucune expérience ne pourra jamais trancher la question cosmologique de la forme de l'univers. (...) La notion de convention que Poincaré évoque à propos de la géométrie sert à décrire ce rapport de sous-détermination entre théories géométriques et expérience. [30]

Contrairement à Poincaré, Gauss ne défend absolument pas la thèse d'une sous-détermination des théories géométriques par l'expérience. Il croit que certaines données observationnelles permettront de trancher en faveur de la géométrie hyperbolique.

Nous l'avons remarqué au cours du paragraphe précédent : dans une perspective kantienne, l'espace comme forme des phénomènes du sens externe est une représentation nécessaire du sujet. En outre, Kant confère à l'espace physique des propriétés qui ne sauraient être autrement qu'elles ne sont. Par exemple, les axiomes de l'intuition nous montrent que les rapports spatiaux entre les objets du sens externe sont régis par une métrique euclidienne. Gauss conteste ce point ; il montre que notre connaissance de l'espace *physique* est incertaine — nous ne savons pas s'il est euclidien, nous *croyons* seulement qu'il l'est — ; rien ne nous dit que la géométrie euclidienne soit conforme aux conditions de l'expérience. Qu'il nous suffise de mentionner le passage suivant, tiré de la lettre à Olbers du 28 avril 1817 :

> Je suis de plus en plus convaincu que la nécessité de notre géométrie ne saurait être prouvée, non seulement par, mais encore pour l'entendement humain. Peut-être parviendrons-nous dans une autre vie à des conceptions différentes concernant l'essence de l'espace, qui demeurent pour l'heure inatteignables. En attendant, on devrait situer la géométrie sur le plan de la mécanique et non de l'arithmétique, qui reste purement *a priori*. [31]

Nous souhaiterions rapidement faire un parallèle entre l'assertion de Gauss selon laquelle on ne saurait démontrer la nécessité de la géométrie et la thèse bien connue de Kant selon laquelle il est impossible de prouver l'existence de dieu. Gauss déplace la réfutation kantienne de l'argument ontologique dans le contexte de la théorie de l'espace pour mieux critiquer Kant

30. G. Crocco, ≪ Intuition, construction et convention dans la théorie de la connaissance de Poincaré ≫, in *Philosophiques*, vol. 31, n°1, 2004, p. 157-158.

31. C. F. Gauss, Lettre à Olbers, 28 avril 1817, *op. cit.*, p. 177 : ≪ Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Notwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom menschlichen Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern mit der Mechanik in gleichen Rang setzen ≫.

lui-même.

Lorsque la raison dans son usage théorique tente de prouver l'existence d'un être [Wesen] absolument nécessaire, elle manipule des idées dont l'objectivité n'est qu'apparente. Souvenons-nous qu'au début de la section consacrée à « l'impossibilité d'une preuve ontologique de l'existence de dieu », Kant distingue *nécessité logique* et *nécessité des choses*. Pour ce faire, il se fonde sur une proposition qui fait intervenir des concepts issus de la géométrie : « tout triangle a trois angles ». Nous avons ici affaire à un jugement logiquement nécessaire — i.e. dont le contraire est impossible — et *analytique* : le prédicat « avoir trois angles » est inhérent à la figure du triangle. Kant montre ensuite qu'il n'est pas permis de dire que les trois angles en question *existent absolument* ou de manière inconditionnée : leur existence dépend des conditions qui président à la construction d'un triangle. Autrement dit, dans l'ordre de nos connaissances, il n'y a pas de nécessité inconditionnée ou absolue des choses. Qu'il nous suffise de mentionner le passage suivant :

> La nécessité absolue du jugement n'est qu'une nécessité conditionnée de la chose, ou du prédicat dans le jugement. La proposition citée tout à l'heure ne disait pas que trois angles sont absolument nécessaires, mais que, sous la condition qu'un triangle existe (soit donné), il existe aussi (en lui) nécessairement trois angles [A 593 - B. 621 ; A 594 - B. 622]. [32]

Kant montre non seulement qu'il est incorrect de déduire l'existence absolue d'une chose à partir de la nécessité logique du jugement qui fait intervenir le concept auquel elle renvoie, mais de plus que la proposition « dieu existe » n'a rien de logiquement nécessaire : son contraire n'est pas impossible. En effet, lorsque l'on affirme : « dieu n'existe pas », la négation porte sur le sujet — l'existence n'étant jamais pour Kant un prédicat du sujet étant donné la distinction précédente entre nécessité logique et nécessité des choses — et il ne s'ensuit aucune contradiction. Ni un raisonnement direct, ni un raisonnement indirect ne peuvent prouver l'existence de dieu. Il n'en va pas de même lorsque nous disons : « dieu est tout puissant », dans la mesure où la toute puissance est un prédicat du concept « dieu ». Nous aurons reconnu que les propositions : « le triangle a trois angles » et « dieu est tout-puissant » sont des jugements identiques régis par la stricte nécessité logique. En revanche, aux yeux de Kant, la formule « la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits » n'est pas analytique mais bien synthétique. Il suppose sans ambiguïté qu'un tel jugement est *nécessaire*, quand bien même cette nécessité n'est pas purement logique. C'est là qu'intervient l'objection à

32. « die absolute Notwendigkeit des Urteils ist nur eine bedingte Notwendigkeit der Sache, oder des Prädikats im Urteile. Der vorrige Satz sagt nicht, dass drei Winkel schlechterdings notwendig seien, sondern, unter der Bedingung, dass ein Triangel da ist, (gegeben ist), sind auch drei Winkel (in ihm) notwendiger Weise da ».

double détente de Gauss : non seulement il est logiquement possible de concevoir des triangles qui ne satisfassent pas à cette propriété, mais de plus rien dans nos représentations intuitives ou dans la structure métrique de l'espace physique ne nous impose une telle conclusion.

Lorsque l'on croit pouvoir démontrer que dieu est un être absolument nécessaire, on surévalue les aptitudes de notre propre raison ; inversement, lorsque Kant croit en la nécessité des connaissances géométriques, il surévalue également les capacités de notre entendement. C'est là le sens de l'argument avancé par Gauss dans l'extrait de la lettre à Olbers que nous avons précédemment cité : l'entendement humain n'est pas en mesure de prouver la nécessité de la géométrie. S'il n'avait fait qu'invoquer l'existence d'une géométrie non euclidienne pour contrer les arguments de Kant, Gauss aurait seulement montré que la géométrie d'Euclide n'est qu'une possibilité logique parmi d'autres. Mais, dans ce passage, il sait que la nécessité dont parle Kant à propos des connaissances géométriques n'est pas purement logique dans la mesure où nous avons affaire à des jugements synthétiques qui reposent par définition sur un support intuitif. Voilà pourquoi Gauss s'interroge immédiatement sur la nature de l'espace physique. Il adopte ici une attitude sceptique. Notre ignorance est telle que les assertions suivantes sont incertaines : (a) la géométrie d'Euclide est conforme aux conditions de l'expérience ; (b) les axiomes de l'intuition imposent que les géométries non euclidiennes soient de simples constructions logiques dépourvues de toute effectivité.

Mais surtout, Gauss montre que la structure métrique de l'espace *physique* ne dérive pas d'un principe *a priori* de l'entendement — dans le vocabulaire kantien, il s'agit des axiomes de l'intuition —, elle dépend des lois de la nature et donc de principes empiriques. Par suite, les propriétés de l'espace physique ou objectif ne sont pas toutes nécessaires ; elles sont en partie contingentes. C'est ce qui apparaît très clairement dans le passage suivant de la lettre à Bessel :

> Je suis intimement convaincu que la théorie de l'espace occupe une tout autre position par rapport à la théorie pure des quantités à l'intérieur de notre savoir *a priori* ; il manque à notre connaissance de la première la pleine conviction de nécessité (et d'absolue vérité) qui est propre à la seconde ; nous devons humblement reconnaître que, à la différence du nombre, qui est un pur produit de notre esprit, l'espace admet également en dehors de notre esprit une réalité, dont nous ne sommes pas capables de prédire les lois complètement *a priori*.[33]

33. C. F. Gauss, lettre à Bessel, 9 avril 1830, *op. cit.*, p. 201 : ≪ Nach meiner innigsten Überzeugung hat die Raumlehre in unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung, wie die reine Grössenlehre ; es geht unserer Kenntnis von jener durchaus diejenige vollständige Überzeugung von ihrer Notwendigkeit (als auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letztern eigen ist ; wir müssen in Demut zugeben dass, wenn die Zahl bloss unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch ausser unserm Geiste eine Realität hat, der wir ihre Gesetze nicht vollständig a priori vorschreiben können ≫.

Ainsi, aux yeux de Gauss, seule l'arithmétique — entendue comme science des nombres — produit des connaissances purement et absolument *a priori*. En revanche, la géométrie n'admet pas de telles caractéristiques, dans la mesure où (1) ses fondements sont incertains ; (2) en tant que science de l'espace, elle fait intervenir des concepts *impurs*, c'est-à-dire qui dépendent de l'expérience. Ceci est particulièrement vrai des notions de corps rigide et de géodésique en ligne droite. Enfin, l'argument de Gauss selon lequel notre connaissance de l'espace dépend au moins en partie de principes empiriques — c'est-à-dire de lois empruntées à la physique — connaîtra une grande fortune. On sait par exemple qu'en relativité générale, le champ gravitationnel détermine la structure métrique de l'univers.

Avant de montrer en quoi le *Habilitationsvortrag* de Riemann permet de dépasser une fois pour toutes la théorie kantienne de l'espace, nous voudrions écarter un éventuel contresens à propos de Gauss. S'il affirme sans ambiguïté que la géométrie est comparable à la mécanique, il ne dit pourtant pas que les connaissances géométriques sont entièrement fondées sur l'expérience. Bref, il ne faudrait pas en inférer que Gauss est empiriste. Il se contente de remarquer que, parmi les principes qui régissent la théorie de l'espace, certains sont manifestement empiriques — c'est le cas des lois qui caractérisent sa structure métrique. Ce point de vue sera largement repris et approfondi par Riemann dans son *Habilitationsvortrag*.

Comme nous l'avons précisé au début de ce paragraphe, Gauss n'a jamais publié aucun ouvrage sur les géométries non euclidiennes. Toujours est-il qu'il a accueilli avec enthousiasme le papier de J. Bolyai consacré à la géométrie non euclidienne publié en appendice à l'ouvrage de son père intitulé *Tentanem Juventutem studiosam in elementa Matheseos purae, elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria, introducendi ; cum appendice triplici.* [34] Un rappel historique s'impose : en janvier 1832, Farkas Bolyai, ami d'enfance de Gauss et père de Janos Bolyai, envoie une copie du texte de son fils sur la théorie des parallèles à Gauss. Dans une lettre datée du 6 mars 1832, ce dernier fait savoir à F. Bolyai que les travaux de son fils confirment les résultats qu'il avait établis au sujet de la géométrie non euclidienne dès l'année 1816 ; plus encore, Bolyai construit un cadre théorique fondé sur le concept de géométrie absolue. Les géométries métriques euclidienne et hyperbolique s'obtiennent par adjonction du cinquième postulat d'Euclide ou de sa négation à l'axiomatique qui caractérise la géométrie absolue. Gauss reprend les notations de Bolyai : S désigne la géométrie hyperbolique, Σ la géométrie euclidienne. Puisqu'il est impossible de trancher *a priori* entre S et Σ, Gauss en déduit qu'on dispose maintenant de « la preuve la plus claire » contre la thèse de Kant selon laquelle « l'espace n'est qu'une forme de notre

34. Voir à ce propos L. Boi, *op. cit.*, p. 68-69.

sensibilité ≫. [35]

À la différence de Bolyai et de Lobatchevski, Gauss n'a pas proposé une conception systématique de la géométrie hyperbolique. Néanmoins, il a admis très tôt sa validité logique et il n'a pas non plus écarté l'éventualité qu'elle soit ≪ vraie ≫ i.e. confirmée par l'expérience. Plus encore, il a envisagé le projet d'une théorie dans laquelle les différentes géométries métriques pourraient être regardées comme autant de cas particuliers, nous pensons ici à son traité sur les surfaces courbes. Cependant, Gauss n'explicite pas le lien entre ses réflexions sur la géométrie hyperbolique et ses travaux sur les surfaces courbes. Il faut attendre Beltrami (1868) pour que soient introduites les premières surfaces courbes pouvant servir de modèle (incomplet) à la géométrie hyperbolique. Nous pensons en particulier à la pseudo-sphère et à la tractrice.

Il semble donc très restrictif de penser l'histoire des géométries non euclidiennes en fonction de problématiques exclusivement centrées sur une remise en question du statut des axiomes en géométrie qui serait due à Gauss, Lobatchevski, Bolyai ou encore Riemann : conçus comme des évidences à la fin du XVIII^{e} siècle, ils deviendraient subitement de simples hypothèses avec l'avènement des géométries non euclidiennes. La mathématique deviendrait par contagion une science hypothético-déductive. En réalité, les réflexions de Gauss portent moins sur les axiomes de la géométrie que sur le statut de la géométrie qu'il situe sur le même plan que la mécanique. De plus, il envisage très tôt d'appliquer la géométrie non euclidienne à la réalité empirique. Autrement dit, il n'analyse pas la structure logique des géométries euclidienne et hyperbolique. Il se contente de vérifier ≪ empiriquement ≫ qu'elles n'engendrent pas de contradictions. Enfin, Gauss et Riemann ne se sont pas contentés de constater la possibilité logique de géométries non euclidiennes — sans pour autant prouver qu'elles sont aussi consistantes que la géométrie euclidienne — ; ils ont surtout créé des cadres théoriques généraux qui les contiennent toutes.

De manière schématique, le domaine de la géométrie est le lieu de deux unifications qui ne sont pas équivalentes au cours des deux premiers tiers du XIX^{e} siècle. La première se fonde sur le développement de la géométrie différentielle, comme en atteste le mémoire de Gauss sur les surfaces courbes, que Riemann ≪ généralise ≫ aux variétés dans son *Habilitationsvortrag* en adoptant un point de vue bien plus abstrait et conceptuel que Gauss. La seconde s'appuie sur le domaine de la géométrie projective complexe. Qu'il nous suffise de nous référer aux travaux de Cayley (1858) et de Klein (1871). Si l'on veut forcer l'analogie, on peut dire que le *Habilitationsvortrag* de Riemann est aux écrits de Gauss sur les surfaces courbes, ce

35. C. F. Gauss, lettre à F. Bolyai du 6 mars 1832, *op. cit.*, p. 224.

que les travaux de Klein (1871-1872) sont à ceux de Cayley en géométrie projective. Deux problématiques épistémologiques doivent donc être mises en avant : (1) comment parvenir à des théories unificatrices susceptibles d'embrasser les géométries métriques euclidienne et non euclidiennes ? (2) Sont-elles équivalentes ?

Résolvons la première difficulté. On peut dire que Gauss et Riemann adoptent un point de vue infinitésimal, fondé sur la notion de mesure de courbure en un point d'une surface courbe ou d'une variété riemannienne. Si l'on suit le *Habilitationsvortrag*, les géométries métriques euclidienne, hyperbolique et elliptique sont définies sur des variétés riemanniennes dont la mesure de courbure est constante. En revanche, Cayley et Klein adoptent un point de vue global ; ils raisonnent sur le plan projectif complexe. Ils font intervenir l'ensemble des transformations homographiques qui laissent invariante une certaine conique prise comme absolu sur ce même plan. Comme le montre *in fine* Klein dans son *Programme d'Erlangen*, à chaque géométrie métrique, on peut associer un sous-groupe continu de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ — $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ correspond au groupe des homographies agissant sur le plan projectif complexe. L'approche de Cayley et Klein est restrictive ; rien n'impose *a priori* de raisonner sur des espaces homogènes, ce qui constitue une réponse au moins partielle à (2). Néanmoins, il existe des passerelles entre les deux voies tracées respectivement par Gauss-Riemann et Cayley-Klein. Par exemple, au cours du chapitre XIV de son article intitulé « Sur la géométrie dite non euclidienne », Klein montre que les déterminations métriques auxquelles il est parvenu pour caractériser les géométries euclidienne et non euclidiennes sont équivalentes à celles qui dérivent des travaux de Gauss sur les surfaces courbes. [36]

Lorsque l'on envisage les géométries non euclidiennes sous un angle strictement logique, on risque de proposer une vision très fragmentée voire inversée de l'histoire de la géométrie au XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle. En effet, pour prouver que la géométrie hyperbolique est aussi consistante que la géométrie euclidienne, il est nécessaire de s'appuyer sur des modèles partiels — par exemple la pseudo-sphère de Beltrami — ou complets — le modèle conforme de Klein, les modèles du disque et du demi-plan de Poincaré. Or, ces premiers modèles n'ont pas été trouvés subitement ; il fallait un cadre mathématique général pour pouvoir les découvrir. Ainsi Beltrami introduit la pseudo-sphère dans le prolongement de la théorie gaussienne des surfaces courbes en 1868 ; de même le modèle de Klein se déduit à partir de l'usage systématique de la notion de métrique projective générale due à Cayley. Enfin, Poincaré raisonne sur le demi-plan et le disque alors qu'il s'intéresse aux équations différentielles à

36. F. Klein, « Sur la Géométrie dite non euclidienne » (1871), trad. L. Laugel, *ann. de la faculté de Toulouse*, 1897, tome 11, n. 4, p. G. 50 à G. 55.

coefficients algébriques et aux fonctions automorphes.

Précisons le lien entre les deux problèmes épistémologiques suivants : (1) comment prouver la consistance relative des géométries non euclidiennes ? (2) comment insérer les différentes géométries métriques dans une même théorie — celle de Gauss-Riemann ou celle de Cayley-Klein ? Au regard de l'histoire, la résolution de (2) conditionne la résolution de (1). Donc, les difficultés logiques suscitées par l'avènement des géométries non euclidiennes ne donnent lieu à une solution probante qu'avec le développement de concepts et de théories mathématiques englobantes.

Cette parenthèse étant refermée, résumons les arguments développés par Gauss sur la géométrie en général, les géométries métriques en particulier et les connaissances géométriques. (a) En tant que branche des mathématiques, la géométrie n'est ni purement ni absolument *a priori*, ce qui la démarque de l'arithmétique. Inversement, Gauss n'affirme pas que la géométrie se fonde sur l'expérience. Donc, il n'est pas purement empiriste. (b) La géométrisation de l'espace physique ne repose pas nécessairement sur des présupposés euclidiens. Gauss ne prétend à aucun moment que la géométrie d'Euclide serait plus « commode » que la géométrie hyperbolique. Il est convaincu que cette dernière pourrait servir de pierre de touche pour mathématiser le réel physique. Il estime *in fine* que l'expérience doit permettre de trancher entre ces deux géométries. La conception gaussienne de la géométrie est donc étrangère à la thèse de Poincaré selon laquelle il y aurait une sous-détermination des géométries par l'expérience. (c) Le développement des connaissances géométriques est conditionné par le dépassement de certaines prénotions ou habitudes de pensée dont le fondement objectif est purement apparent. Parmi les prénotions réfutées par Gauss, on peut citer la définition fautive des surfaces comme « limite » — i.e. bord — des solides. Il s'agit là du point de départ de son traité des surfaces courbes : pour parvenir à décrire la géométrie intrinsèque à une surface courbe, il faut d'abord renoncer à l'idée selon laquelle une surface serait la limite d'un solide. Une fois ce préalable effectué, on peut concevoir une surface courbe comme une forme de spatialité à part entière. En outre, puisqu'il est habituel de raisonner dans un cadre de pensée euclidien, on finit par croire que l'espace physique est *naturellement* euclidien ou que le postulat des parallèles s'impose nécessairement et qu'il doit être démontré coûte que coûte. C'est ce que rejette Gauss dans sa lettre à Taurinus du 8 novembre 1824.

Rappelons pour finir en quoi les thèses épistémologiques développées par Gauss se distinguent nettement de celles de Kant. (i) Non seulement la géométrie hyperbolique est logiquement possible, mais elle pourrait même s'appliquer à l'expérience, ce qui entre en contradiction avec les « axiomes de l'intuition » de Kant. (ii) L'espace n'est pas réductible à une

représentation du sujet, selon Gauss il admet une réalité empirique en un sens très précis : ses propriétés sont assujetties à des principes qui ne sont pas tous *a priori*. Dans un article tiré des *Göttingiche gelehrte Anzeigen* et consacré à sa théorie des résidus biquadratiques (1831), Gauss conteste la preuve kantienne en faveur du caractère intuitif de l'espace (§ 13 des *Prolégomènes*).[37] Selon Kant, les différences entre la droite et la gauche, le haut et le bas, etc., qui déterminent une orientation dans l'espace sont de nature purement *intuitive*, et non pas *objective* ou *conceptuelle*. Kant en déduit que l'espace est une forme de notre sensibilité et qu'il est une condition sans laquelle la géométrie serait impossible. Gauss conteste ce raisonnement : il estime que nous ne pouvons en aucune mesure nous orienter dans l'espace abstraction faite des choses matérielles réellement présentes en dehors de nous. Il attribue à l'orientation dans l'espace une signification réelle [eine reelle Bedeutung] indépendamment de notre sensibilité. L'espace doit donc être plus qu'une représentation intuitive du sujet. (iii) L'intuition joue un rôle heuristique indéniable dans le développement des théories géométriques, mais les mathématiciens peuvent en droit s'en affranchir. Dans son mémoire de Jubilé (1849), Gauss n'hésite pas à concevoir des grandeurs de dimension finie n qui connaîtront une grande fortune dans l'*Habilitationsvotrag* de Riemann. Contrairement à ce que croyait Kant, la mathématique n'est donc pas une connaissance par la construction de concepts. Une telle définition rendrait cette science systématiquement tributaire d'une représentation intuitive de l'espace. Gauss reprend un argument similaire dans le cas des entiers complexes, que nous appelons actuellement entiers de Gauss. Si ces derniers peuvent paraître non naturels [unnatürlich] en raison de nos habitudes de pensée, il est néanmoins possible de les rendre intuitivement appréhendables, notamment lorsqu'on les représente sur le plan complexe. L'intuition a pour seule fonction de nous donner une prise sur les objets qui correspondent au concept d'entier de Gauss. En revanche, elle ne participe pas à la construction de ce même concept. En dernière instance, ≪ le mathématicien s'abstrait totalement de la nature des objets et du contenu de leurs relations ≫[38].

37. C. F. Gauss, *Theoria residuorum biquadraticorum*, commentatio secunda, *Göttingiche gelehrte Anzeigen* 23 avril 1831, in *Werke*, Band II, *op. cit.*, p. 177.

38. *ibid.*, p. 176, ≪ Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen ≫.

2.3 Le *Habilitationsvortrag* de Riemann : quel dépassement de la conception kantienne de l'espace ?

Pour Kant, l'espace est originairement une intuition pure et il constitue une condition de possibilité de la géométrie. Au début de sa *Leçon d'habilitation*, Riemann ne parle pas d'une *intuition* spatiale, mais du *concept* d'espace. Ceci n'a rien de fortuit : pour Riemann, le champ de la géométrie outrepasse les étroites limites imposées par notre sensibilité. Par exemple, rien ne nous empêche de concevoir des variétés de dimension finie quelconque, mais à condition que les concepts de la géométrie cessent d'être entièrement assujettis à des représentations intuitives. Ainsi, dans l'ordre des connaissances géométriques, Riemann accorde un primat à la conception au détriment de l'intuition, en sorte que ses hypothèses sur l'espace physique dérivent entièrement du concept général de variété « continue », qu'il munit *in fine* d'une structure métrique déterminée par une forme quadratique définie positive. Selon le mot de Bachelard, Riemann commence à « faire remonter les deux formes de l'intuition sensible jusque dans l'entendement ». [39] En outre, Kant considère les axiomes de la géométrie comme des vérités immédiatement certaines. En revanche, Riemann doute de l'évidence des axiomes de la géométrie euclidienne de manière beaucoup plus radicale que Gauss lui-même : l'espace euclidien constitue une éventualité à l'intérieur d'un vaste panel d'hypothèses qui demeurent ouvertes concernant la nature de l'espace physique.

À l'instar de Gauss, Riemann relativise la géométrie d'Euclide tant sur un plan intra-mathématique qu'au niveau de ses applications à la physique. Mais une telle relativisation prend des proportions considérables au cours du *Habilitationsvortrag*. En effet, la géométrie euclidienne est associée à un espace dont la mesure de courbure est constante et nulle. Il s'agit là d'un cas très particulier de variétés « riemanniennes ». De plus, rien ne nous dit qu'il faille privilégier les présupposés d'Euclide afin de mathématiser la physique, ce qui entre en contradiction avec les thèses de Kant. En effet, si l'on suit le raisonnement mené par ce dernier dans *Les axiomes de l'intuition*, l'espace physique est *a priori* muni d'une structure métrique euclidienne. Riemann montre justement que les rapports métriques hérités de la géométrie d'Euclide constituent une possibilité parmi d'autres. De plus, contrairement à ce que croit Kant, ce cadre dépend indûment du choix d'un certain « système de faits simples » [System der einfacher Thatsachen] correspondant par exemple aux notions de corps rigide ou de géodésique en ligne droite. Or ce choix indique tout l'arbitraire et la contingence qui entourent le privilège que Kant accorde à la géométrie euclidienne au regard de l'expérience :

39. G. Bachelard, *La Philosophie du Non*, Paris, P.U.F., 1940, p. 110.

≪ Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires ; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses ≫. [40]

Avant de penser de manière précipitée que le *Habilitationsvortrag* de Riemann serait explicitement et exclusivement un plaidoyer contre la théorie kantienne de l'espace et de la géométrie, il convient de rappeler que Riemann s'inspire de sources mathématiques et philosophiques qui ne se situent pas dans le prolongement du kantisme. Dans le chapitre précédent, nous avons souligné la complexité des emprunts de Riemann à Gauss. En particulier, Riemann se réfère manifestement au résumé du second mémoire sur les résidus biquadratiques que Gauss publie dans les *Göttingiche gelehrte Anzeigen* en 1831. Or, dans ce texte, Gauss s'oppose frontalement aux arguments développés par Kant dans ses *Prolégomènes* pour démontrer que l'espace est originairement une intuition pure. Riemann ne peut donc pas ignorer l'hostilité de Gauss contre la théorie kantienne de l'espace. En outre, au début de son *Habilitationsvortrag*, Riemann précise que d'un point de vue philosophique, il emprunte l'essentiel de ses sources à Herbart. Celui-ci succède à Kant à l'université de Königsberg en 1809. Herbart devient ensuite professeur à l'université de Göttingen en 1834 jusqu'à sa mort en 1841. Il convient d'identifier les aspects de l'œuvre d'Herbart que Riemann s'approprie avant de montrer les incidences qu'ils ont eues ou non sur la conception mathématique et philosophique de l'espace développée dans le *Habilitationsvortrag* de Riemann. Nous verrons en particulier que la philosophie d'Herbart ne peut qu'éloigner Riemann du criticisme kantien. Comme il existe déjà une vaste littérature secondaire sur ce point, nous serons concis. En effet, l'influence d'Herbart sur Riemann a donné lieu à divers commentaires de la part d'Erdmann (1877) et Russell (1897). Elle a été examinée à nouveaux frais ces dernières années par Scholz, Boi ou encore Merker.

Le fait que Riemann se réfère à Herbart au début de son *Habilitationsvortrag* a d'abord de quoi surprendre. Ainsi, Erdmann commence par remarquer qu'il y a une incompatibilité de fonds entre les avancées de Gauss en géométrie — en particulier ses réflexions sur la théorie des parallèles — et la philosophie de Herbart. [41] Sur ce point, la remarque d'Erdmann est parfaitement fondée : comme le prouvent certains passages tirés du Tome II de l'*Allgemeine Metaphysik*, Herbart estime que des propositions telles que ≪ la somme des angles d'un triangle est nécessairement égale à deux droits ≫ vont de soi. [42] Précisément Gauss rejette une

40. B. Riemann, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, *op. cit.*, p. 281.

41. B. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie, Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie*, *op. cit.*, p. 29 : ≪ la doctrine d'[Herbart] est même en opposition manifeste avec les idées fondamentales qui caracérisent les nouveaux développements de la science géométrique ≫.

42. J. F. Herbart, *Allgemeine Metaphysik*, Zweiter Teil, Königsberg, 1829, p. 241 et suiv.

à une toutes les pseudo-démonstrations de ce théorème au cours de sa correspondance. Cette remarque nous incite à penser que Riemann s'approprie moins le contenu doctrinal de la philosophie de Herbart qu'une manière générale de penser le rapport entre concepts et données de l'expérience qu'il transpose du côté des mathématiques et de leur rapport aux sciences de la nature.

D'après la littérature secondaire que nous avons consultée ainsi que les fragments de philosophie laissés par Riemann et publiés dans ses Œuvres, celui-ci a essentiellement parcouru les ouvrages suivants de Herbart : *Über philosophisches Studium* (1807), *Psychologie als Wissenschaft* (premier tome 1824, second tome 1825) et l'*Allgemeine Metaphysik* (premier tome 1828, second tome 1829). Dans la préface au premier ouvrage cité, Herbart insiste sur la complémentarité entre le rationalisme et l'empirisme :

> Le rationalisme est vide sans l'empirisme — non seulement vide, mais également sans fondement (...) — l'empirisme demeure incompréhensible sans le rationalisme — non seulement incompréhensible mais encore contradictoire et en conflit avec lui-même. [43]

Cet argument reflète parfaitement le statut complexe que Riemann confère à la géométrie. D'un côté, elle doit être analysée à partir d'une science générale des variétés de dimension n, de l'autre on ne peut choisir parmi les géométries mathématiquement concevables qu'en se fondant sur l'expérience. Bref, une théorie des variétés demeurerait vide si elle n'était pas rapportée à l'expérience. Réciproquement, les données de l'expérience nous sembleraient aboutir à des hypothèses contradictoires si elles n'étaient pas éclairées par une science générale des variétés de dimension n.

La question est maintenant de savoir plus précisément ce que Riemann emprunte à la métaphysique herbartienne au sens large. Pour Herbart, la métaphysique englobe toute la philosophie spéculative. Elle est divisée en deux branches : la *métaphysique générale* et la *métaphysique appliquée*. La métaphysique appliquée est consituée de trois domaines : la *cosmologie*, la *psychologie* et la *théologie naturelle*. Donc l'ouvrage que Herbart publie en 1824-1825, relève de la métaphysique appliquée. Pour sa part, la métaphysique générale se répartie en quatre sciences : la *méthodologie*, l'*ontologie*, la *synechologie* et l'*eidolologie*. La méthodologie s'occupe des principes et des méthodes de la métaphysique. L'ontologie porte sur l'être, l'étant, la substance et l'idée de cause. La synechologie est ≪ la doctrine du continu [vom Continuum] ; elle enveloppe l'espace, le temps, le mouvement ainsi que les applications les plus générales de ces concepts à l'univers ≫. Enfin l'eidolologie a pour objet les phénomènes en tant que tels et elle a pour fonction de déterminer dans quelle mesure nos représentations

43. J. F. Herbart, *Über philosophisches Studium*, Göttingen, 1807, p. 12.

constituent d'authentiques connaissances. [44]

Au vu de cette quadripartition de la métaphysique générale, on peut s'attendre à ce que Riemann s'approprie la synechologie de Herbart qui contient justement sa conception de l'espace et, par extension, sa théorie du continu. En effet, même si les vues développées alors par Herbart sur la géométrie sont diamétralement opposées à celles de Gauss, on peut observer qu'Herbart remet frontalement en cause la conception kantienne de l'espace dans sa synechologie. En particulier, il refuse de considérer l'espace et le temps comme des formes vides, i.e. indépendantes de toute matière. Pourtant, d'après le témoignage de Dedekind et les hypothèses de Russell, on aurait tort de croire que la théorie herbartienne du continu aurait eu une incidence directe sur l'*Œuvre* de Riemann et, en particulier, sur son *Habilitationsvortrag*. Dans son introduction aux *Fragmente philosophischen Inhalts* de Riemann, Dedekind affirme en effet :

> L'auteur est herbartien en psychologie et en théorie de la connaissance (méthodologie et eidolologie), il ne s'accorde en général pas avec la philosophie de la nature développée par Herbart et avec les disciplines métaphysiques qui lui sont associées (l'ontologie et la synechologie). [45]

Autrement dit, Riemann s'approprie moins la théorie herbartienne du continu que la méthode promue par celui-ci en métaphysique. [46] Merker la résume parfaitement lorsqu'il affirme que pour Herbart ≪ le savoir doit procéder de l'expérience donnée vers une explication pensée des phénomènes, *via* des clarifications conceptuelles adéquates ≫. [47] Les premières lignes du second fragment philosophique de Riemann confirment cet argument :

> La science de la nature consiste à tenter de saisir la nature à l'aide de concepts exacts.

44. J. F. Herbart, *Allgemeine Metaphysik*, Erster Teil, Königsberg, 1828, p. 71.

45. R. Dedekind, notice de présentation des *Fragmente Philosophischen Inhalts* de Riemann, in B. Riemann, *Gesammelte mathematische Werke*, éd. de 1876, *op. cit.*, p. 476.

46. B. Russell s'approprie l'argument de Dedekind à des fins bien précises dans ses *Essais sur les fondements de la géométrie*, 1897 et 1901 pour la traduction en français, *op. cit.*, p. 79-80 : ≪ Les idées propres de Herbart sur la Géométrie, qui se trouvent principalement dans la première section de sa Synechologie, ne sont pas d'une grande valeur, et n'ont pas porté beaucoup de fruits dans le développement du sujet. Mais sa théorie psychologique de l'espace, sa construction de l'étendue avec des séries de points, sa comparaison de l'espace avec les séries de sons et de couleurs, sa tendance générale à préférer le discontinu au continu, enfin son opinion qu'il importait beaucoup de classer l'espace avec d'autres formes sériaires (Reihenformen), ont donné naissance à plusieurs des spéculations magistrales de Riemann, et ont encouragé la tentative de définir la nature de l'espace par sa seule face analytique et quantitative ≫. Russell ne formule pas cette hypothèse de manière désintéressée puisqu'il entend réduire la géométrie pure à un ensemble de connaissances analytiques *a priori*.

47. J. Merker, *op. cit.*, p. 17. Pour plus de précision sur la méthode de Herbart et ses incidences sur Riemann, on peut se reporter au même ouvrage, p. 17 et suiv.

> D'après les concepts qui nous permettent de penser la nature, non seulement nos perceptions présentes se trouvent complétées à chaque instant, mais de plus, nos perceptions à venir sont déterminées de manière nécessaire, ou du moins de manière probable lorsque notre système conceptuel n'est pas pleinement suffisant ; grâce à eux, on peut déterminer mathématiquement ce qui est ≪ possible ≫ (donc également ce qui est ≪ nécessaire ≫, c'est-à-dire ce dont le contraire est impossible) ainsi que le degré de possibilité (de probabilité) de chaque événement concevable. [48]

Ce passage montre que le rapport que Riemann envisage entre les concepts et les perceptions ne relève ni de l'empirisme, ni du kantisme. Le statut et les fonctions qu'il assigne aux concepts en mathématiques et dans les sciences de la nature sont largement inspirés de la philosophie de Herbart. On peut même supposer raisonnablement que la *begriffliche Mathematik* de Riemann — i.e. son approche conceptuelle tant en mathématiques qu'en physique mathématique — tire sa source de Dirichlet *et* de Herbart. En revanche, la théorie riemannienne de l'espace et de la géométrie se situe davantage dans le prolongement de Gauss que d'Herbart. Bref, il est hautement probable que le *Habilitationsvortrag* accentue et complète les objections que Gauss avait déjà formulées contre les arguments développés par Kant dans l'*Esthétique transcendantale*, les *axiomes de l'intuition* et le § 13 des *Prolégomènes*.

Précisons cela. Bien qu'il ne s'adresse pas directement à Kant dans son *Habilitationsvortrag*, Riemann dépasse deux thèses héritées du kantisme à propos des connaissances géométriques. (1) Celles-ci ne sont pas toutes synthétiques *a priori* pour deux raisons : (a) on peut concevoir l'espace à partir du concept général de variété de dimension n qui n'est pas intuitivement appréhendable ; (b) la structure métrique de l'espace physique est déterminée *a posteriori*. Il ne faudrait pas en inférer que Riemann est anti-kantien : les distinctions conceptuelles opérées par Kant demeurent pertinentes. Cependant, il est nécessaire de reconsidérer la frontière entre jugements *a priori* et *a posteriori* à la lumière du statut problématique de la géométrie. (2) Inversement, les connaissances géométriques ne sont pas toutes empiriques. Par exemple le concept de variété permet de décrire *a priori* toutes les déterminations métriques que l'espace physique est virtuellement susceptible de recevoir. Comme le précise à juste titre Granger : ≪ la construction d'une théorie de la mesure comme fondant une géométrie possible oblige à dépasser le domaine de l'expérience, en particulier par des hypothèses dans le domaine de l'infiniment petit. Le géomètre fondateur devra donc raisonner a priori, mais aussi évaluer la probabilité empirique de telles hypothèses ≫. [49] Le *Habilitationsvortrag* de Riemann repose donc sur une mise en tension entre une conception abstraite des variétés et une réflexion sur l'applicabilité d'un tel concept dans le domaine de

48. B. Riemann, *Fragmente philosophischen Inhalts*, *op. cit.*, p. 489.
49. G.-G. Granger, *La pensée de l'espace*, *op. cit.*, p. 210.

l'expérience.

Pour l'instant, la *Leçon d'habilitation* de Riemann ne fait qu'accentuer les critiques que Gauss avait déjà pu formuler dans sa correspondance contre la théorie kantienne de l'espace. Riemann ajoute cependant deux éléments de réfutation inédits pour contrer les arguments utilisés par Kant dans l'*Esthétique transcendantale* afin de prouver que l'espace est originairement une intuition — et non un concept. Kant est amené à penser que l'espace physique ou objectif est nécessairement homogène et infini. D'ailleurs, il affirme sans ambiguïté au cours de *L'Esthétique transcendantale* que l'espace est une *forme* indépendante de la matière des phénomènes et qu'il faut le considérer comme un tout antérieur à ses parties. Ces deux prémisses ne laissent subsister aucun doute : Kant érige indûment l'homogénéité au rang de propriété nécessaire de l'espace physique. Pour le dire en des termes anachroniques, celui-ci aurait forcément une mesure de courbure constante. Riemann montre suffisamment à la fin de son ouvrage que cette homogénéité n'est pas nécessairement vérifiée si nous mettons entre parenthèses le monde à notre échelle pour voir ce qui se produit dans l'immensurablement petit.

Mais surtout, il semble que Kant confonde l'infini [Unendlichkeit] et l'illimité [Unbegrenztheit]. Tout du moins perçoit-il l'infini comme une conséquence nécessaire de l'illimité. Pour que notre argument soit convaincant, nous devons admettre au préalable que Kant assigne plusieurs sens au concept d'infini. Revenons sur la première antinomie de la raison pure pour préciser ce point. Celle-ci se rapporte à l'idée cosmologique que Kant définit en tant qu'≪ intégralité absolue de l'assemblage du tout donné de tous les phénomènes ≫. Voici les deux thèses contradictoires auxquelles il se confronte :

> ≪ Thèse : Le monde a un commencement dans le temps et il est aussi, quant à l'espace, renfermé dans des limites ;
>
> Antithèse : Le monde n'a ni commencement ni limites dans l'espace, mais il est infini aussi bien par rapport au temps que par rapport à l'espace ≫ [A 426 - B 454]

La question est donc de savoir si le *monde* est fini ou infini. Or, cette antinomie ne peut être levée que si l'on s'entend très exactement sur ce que signifie *l'infini*. Pour éviter toute confusion, commençons par préciser que Kant ne développe à aucun moment une conception pré-ensembliste de l'infini. Bref, il ne parle jamais d'ensembles infinis, c'est-à-dire d'ensembles qui seraient constitués d'une infinité d'éléments. Cela posé, l'infini au sens *métaphysique* du terme correspond selon Kant à une *grandeur maximale*, au-delà de laquelle on ne pourrait pas aller. Il affirme en substance : ≪ Une grandeur est *infinie* quand il ne peut y en avoir de plus grande au-dessus d'elle ≫ [A 430 - B 458]. Il montre qu'une telle définition de l'infini

est *viciée*, puisqu'elle repose sur une confusion entre *infini* et *maximum*. Par extension, l'infinité ne doit jamais être entendue au sens d'une totalité achevée ; il s'agit là d'une idée qui n'a aucune signification dans le cas du monde sensible et qui ne vaut donc que pour un prétendu monde intelligible. À cette conception fautive de l'infini, Kant oppose « le concept mathématique de l'infini » qu'il définit comme suit : « Le vrai concept (transcendantal) de l'infinité, c'est que la synthèse successive de l'unité dans la mesure d'un quantum ne peut jamais être achevée ». Géométriquement parlant, cela signifie que la distance entre deux points peut être arbitrairement grande. C'est précisément ce que l'on observe dans le cas d'un espace métrique euclidien. Enfin, l'espace comme forme des phénomènes est illimité : notre appréhension intuitive de l'espace ne rencontre aucune limite. D'ailleurs, Kant parle d'illimitation dans le progrès de l'intuition dans *L'Esthétique transcendantale* (version de 1781).

À partir de ces distinctions, nous pouvons tirer les deux enseignements suivants : (1) Kant distingue sans ambiguïté l'infini mathématique — au sens où une grandeur donnée peut être arbitrairement grande — et l'idée de totalité achevée qui outrepasse les conditions de l'expérience ; (2) par contre il associe constamment l'illimité à l'infini mathématique. C'est pourquoi nous présumons qu'il ne distingue pas les deux propriétés suivantes : (a) l'espace n'a pas de limites ; (b) la distance entre deux points dans l'espace peut être arbitrairement grande. Kant considère originairement l'espace comme une intuition et il l'annexe donc à notre sensibilité, ce qui induit une confusion entre l'illimité et l'infini. Pour le dire autrement, nos représentations intuitives nous font croire que l'illimitation de l'espace implique que la distance entre deux points dans l'espace peut être arbitrairement grande. Mais, si nous supposons avec Riemann que l'espace physique pourrait admettre une mesure de courbure constante positive, alors il demeure certes illimité, mais il n'est plus infini.

Ainsi, les deux arguments utilisés par Kant pour prouver que l'espace est originairement une intuition et non un concept sont très contraignants ; il en résulte que l'espace physique doit être homogène et infini. On ne peut pas non plus omettre de mentionner les motivations qui étaient celles de Kant dans son *Esthétique transcendantale* : identifier les conditions de possibilité des connaissances géométriques en général. On ne saurait donc se contenter de proposer une analyse purement interne du système kantien pour en mesurer toute la cohérence. En effet, Kant défend une certaine conception de la géométrie et des conditions auxquelles elle est assujettie. Il s'agit de savoir si ses arguments peuvent être maintenus en l'état au vu des transformations importantes que le domaine de la géométrie subit à partir de la fin du XVIII^{e} siècle. Dans l'*Esthétique transcendantale* et les *axiomes de l'intuition*

Kant assigne des bornes trop étroites au domaine de la géométrie. De plus, il fait passer pour nécessaires des hypothèses sur la nature de l'espace physique qui, en réalité, sont purement contingentes.

Bien que Gauss et Riemann ne se soient jamais livrés à un travail d'exégèse sur le kantisme, on peut souligner leur rigueur lorsqu'ils reprennent les arguments de Kant au sujet de l'espace et de la géométrie. En outre, il est parfaitement légitime qu'en qualité de mathématiciens, ils aient tenté de rediscuter *L'Esthétique transcendantale* à la lumière des innovations qu'on leur doit en géométrie. Le cadre mathématique adopté par Gauss pour dépasser la conception kantienne de l'espace est plus restrictif que celui de Riemann. En effet, Gauss se demande exclusivement si la géométrie hyperbolique pourrait être la « vraie » géométrie au regard de l'expérience. Il estime donc que certaines observations nous permettront de trancher entre la géométrie hyperbolique et la géométrie euclidienne. Dans son *Habilitationsvortrag*, Riemann conçoit une infinité de variétés métriques possibles. Il exhibe ensuite une série d'hypothèses sur l'espace physique — sa mesure de courbure peut être positive ; elle n'est pas nécessairement constante — dont le degré de certitude empirique est plus ou moins élevé. Riemann emprunte à Gauss son attitude sceptique sur la nature de l'espace, mais il ne croit pas que l'expérience nous permettra de trancher une fois pour toutes parmi toutes les variétés mathématiquement concevables. En effet, toute vérification empirique est incertaine et provisoire ; par suite, les hypothèses géométriques que l'on peut formuler à propos de l'espace physique sont seulement probables.

Toujours est-il que Riemann n'est pas plus conventionnaliste que Gauss. Les hypothèses géométriques qu'il formule ne sont pas indifférentes à une mise à l'épreuve expérimentale ; en outre Riemann ne privilégie *a priori* aucun cadre géométrique au nom d'un critère de commodité ou de simplicité ; enfin, il reconnaît un lien d'interdépendance entre ses hypothèses géométriques et certaines lois physiques. Ainsi, lorsqu'il suppose que l'espace physique peut admettre une mesure de courbure variable, il admet corrélativement que sa structure métrique dépend de forces agissantes dans l'univers. Le conventionnalisme de Poincaré — à savoir la thèse selon laquelle les théories géométriques sont sous-déterminées par l'expérience — se développe dans un cadre précis, à savoir la résolution du problème de Helmholtz-Lie qui consiste à exhiber la caractéristique commune aux variétés homogènes, i.e. à mesure de courbure constante. Dans ce contexte, l'espace métrique peut encore être conçu comme une forme mathématique indépendante de la matière des phénomènes.

Ce n'est plus le cas lorsque l'on met de côté la condition d'homogénéité : la variabilité de la mesure de courbure doit s'expliquer en fonction d'interactions physiques — il s'agira en

l'occurrence des interactions gravitationnelles en relativité générale. Pour le dire autrement, à la fin de sa leçon, Riemann se place dans un contexte physico-mathématique qui ne correspond pas au problème de Helmholtz-Lie. C'est, nous semble-t-il, pour cette raison que son épistémologie implicite n'est pas et ne peut pas être conventionnaliste. Comme le souligne G. Crocco, pour Poincaré « aucune théorie mécanique ne pourra jamais nous imposer une description géométrique de l'espace ».[50] La fin du *Habilitationsvortrag* nous dit exactement le contraire : Riemann passe le relais aux physiciens ; ces derniers ont pour tâche de dégager les lois empiriques qui conditionnent la structure métrique de l'univers.

À partir des réflexions conjointes de Gauss et de Riemann, Weyl élabore une conception épistémologique de l'espace qu'il synthétise dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Dans cet ouvrage, Weyl consacre tout un paragraphe au point de vue riemannien en géométrie. De plus, au cours du § 18 intitulé « Das Raumproblem », il mentionne explicitement certains passages de la correspondance de Gauss qui concernent les fondements de la géométrie. Les éléments de réflexions que développe Weyl autour de la théorie kantienne de l'espace sont donc informés par la réception critique de « l'Esthtétique transcendantale » que l'on doit à Gauss et Riemann. Weyl s'approprie également les arguments que formulent Helmholtz (1870, 1878) et Schlick (1918, 1925) contre la théorie kantienne de l'espace.

2.4 Les objections de Weyl contre Kant

Weyl s'intéresse à la conception kantienne de l'espace pour deux raisons. Il se demande tout d'abord si *l'orientation* dans l'espace peut servir d'argument pour prouver que l'espace est originairement une intuition et non pas un concept ou un objet. C'est là tout le sens du § 14 de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, intitulé « Kongruenz und Ähnlichkeit. Links und Rechts » et que l'on peut traduire comme suit : « Congruence et similitude. Gauche et droite ». Weyl montre que l'orientation dans l'espace peut se traduire de manière conceptuelle grâce au développement de la théorie des groupes.

Ensuite, il se demande s'il est pertinent de considérer l'espace comme une *forme* des phénomènes du sens externe, si notre connaissance de l'espace physique est purement *a priori* et s'il ne faut pas distinguer une fois pour toutes les espaces mathématique, physique et intuitif. Ce second volet dans les réflexions de Weyl est à mettre en relation avec ses investigations en relativité générale. Nous savons que chez Kant, l'espace de la géométrie euclidienne et l'es-

50. G. Crocco, *op. cit.*, p. 158.

pace physique sont assujettis aux axiomes de l'intuition et à l'espace « intuitif » tel qu'il est introduit dans *L'Esthétique transcendantale*.

Résumons les thèses défendues par Weyl. (1) L'espace comme « forme » des phénomènes n'est jamais qu'un *continuum amorphe* — c'est-à-dire une variété topologique — ; c'est en tout cas l'hypothèse qu'il défend dans « Reine Infinitesimalgeometrie », il la fera évoluer lorsqu'il résoudra le problème de l'espace entre 1921 et 1923. (2) La structure métrique de l'univers doit être déterminée en fonction de la répartition de la matière en son sein, bref elle ne saurait être déduite *a priori*. (3) Il n'y a pas un, mais des espaces mathématiques possibles qui ne sont pas assujettis à notre sensibilité ; qui plus est, l'espace *intuitif* est nécessairement hétérogène et fini. Ainsi, notre connaissance de l'espace physique cesse d'être pensée entièrement *a priori* ; parallèlement, l'espace intuitif n'occupe plus la place centrale que lui assignait Kant dans la *Critique de la raison pure*.

À l'instar de Riemann, Weyl fait remonter l'espace « jusque dans notre entendement ». Nous empruntons une nouvelle fois cette expression à Bachelard. En effet, l'orientation dans l'espace, que Kant tenait pour intuitive, peut être assujettie à des concepts mathématiques — par exemple, on distingue les mouvements euclidiens qui préservent ou non l'orientation dans l'espace en fonction de leur déterminant. Plus généralement, l'introduction des notions de variété topologique, différentielle et riemannienne conduit à relativiser très fortement notre intuition de l'espace, ce qu'avait déjà établi Riemann dans son *Habilitationsvortrag*.

2.4.1 L'orientation dans l'espace est-elle de nature intuitive ?

Dès le texte de 1768, intitulé *Le premier principe de la différence des objets dans l'espace*, Kant introduit le paradoxe des figures *semblables*, *identiques* et pourtant *non congruentes*. Donnons un exemple pour comprendre ce paradoxe : soit un triangle T dans un plan euclidien et son image T' par une réflexion d'axe arbitrairement choisi. T et T' sont des triangles semblables — leurs angles sont deux à deux égaux — et identiques — la distance entre les sommets de T est conservée par réflexion —, pourtant on ne peut pas les superposer. Kant en infère qu'ils sont incongruents. C'est ce que l'on appelle le paradoxe des objets semblables, identiques, mais incongruents [Paradox der gleichen, ähnlichen aber inkongruenten Gegenstücke].

Par prudence, signalons que Kant fait des usages très divers de ce paradoxe dans le texte de 1768, la *Dissertation* de 1770 et les *Prolégomènes* (1783). Pour schématiser, dans *Le premier Principe de la Différence des Objets dans l'Espace*, il tente de donner raison à la

conception newtonienne de l'espace contre les leibniziens. Souvenons-nous que, pour Leibniz, l'espace est une idéalisation obtenue à partir du rapport entre les objets. Or, si l'on compare terme à terme deux figures identiques mais incongruentes, il est impossible de repérer ce qui les distingue, puisqu'elles ont exactement les mêmes prédicats. Par contre, si l'on présuppose un espace qui leur préexisterait *réellement* — Kant adhère encore à l'hypothèse d'un espace absolu en 1768 —, alors seulement on se rend compte qu'ils ne sont pas orientés de la même manière. [51]

À partir de 1770, Kant montre au surplus que l'acte de s'orienter dans l'espace relève de l'intuition. Par suite, le paradoxe des figures incongruentes prouve que l'espace est une intuition ou, pour le dire plus clairement, une forme *a priori* des phénomènes du sens externe. Notre but n'est pas de revenir de manière exhaustive sur les différents usages que Kant a pu faire de l'argument des objets similaires, identiques et pourtant non congruents. Insistons néanmoins sur le fait suivant : Kant met en lumière sur des exemples élémentaires des problèmes de symétrie et d'orientation *globales* dans l'espace. Il montre par là même que la géométrie ne saurait se réduire à une étude intrinsèque des figures. En effet, une telle méthode ne nous permettrait jamais de différencier un triangle quelconque et son image par une réflexion dans le plan. Ainsi, les connaissances géométriques n'ont de sens que si l'on considère à nouveaux frais l'espace environnant dans lequel nous traçons nos figures. Une telle innovation sur un plan philosophique n'a pas échappé à Lautman et Weyl qui ont conscience que les problèmes de symétrie, de congruence et d'orientation dans l'espace-temps sont centraux en physique moderne. Lautman affirme par exemple :

> La différence d'orientation des figures symétriques par rapport à un plan dans l'espace ordinaire est apparue à Kant comme une intuition sensible, irréductible à toute détermination conceptuelle, et cette intervention, nécessaire de la sensibilité dans la connaissance de la gauche et de la droite est à l'origine de la distinction kantienne entre la sensibilité et l'entendement. La spécificité du sensible se marque donc par l'incongruence des figures symétriques et c'est véritablement un objet d'admiration que Kant ait dès 1770 caractérisé le sensible par une propriété que la science contemporaine a trouvée au centre de toutes les recherches sur la structure des phénomènes. [52]

La question est de savoir si l'orientation dans l'espace n'est vraiment susceptible d'aucune

51. E. Kant, *Le premier principe de la différence des objets dans l'espace*, in *Quelques opuscules précritiques*, trad. S. Zac, Paris, éd. Vrin, 1970, p. 93 : ≪ Il est clair que les déterminations de l'espace ne sont pas des conséquences des dispositions des parties de la matière les unes par rapport aux autres, mais que ces dernières sont les conséquences de celles-ci et par conséquent, il se trouve dans la constitution des corps des différences et même de vraies différences qui se rapportent uniquement à l'espace *absolu* et *originaire*, parce que c'est par lui seul que le rapport des choses corporelles est possible ≫.

52. A. Lautman, ≪ Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique ≫, *op. cit.*, p. 265.

détermination conceptuelle. Dans le § 14 de *Philosophie der Mathematik*, Weyl conteste ce point. Il montre que l'orientation n'est pas la résultante de notre seule intuition de l'espace, elle constitue un invariant sous l'action du groupe des isométries directes dans un espace euclidien — ou affine euclidien — de dimension finie n. Bref, on croit que l'orientation dans l'espace est intuitive et qu'elle relève de notre sensibilité tant que l'on n'a pas les moyens conceptuels de la formaliser. La théorie des groupes de transformations permet justement de pallier ce manque.

Pour saisir les arguments de Weyl, nous devons faire quelques rappels d'algèbre linéaire et de géométrie affine. Donnons-nous un espace vectoriel euclidien E de dimension finie n. Cela veut dire que E est muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire $\beta : E \times E \to \mathbb{R}$, symétrique et définie positive. On note généralement le produit scalaire $\langle u, v\rangle$, où u et v sont des vecteurs de E. Par définition, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ et, pour tout $u \neq 0, \langle u, u\rangle > 0$. Une isométrie de E est un automorphisme, i.e. une application linéaire bijective de E dans E, qui conserve le produit scalaire. Autrement dit, une application linéaire f est une isométrie de E, si et seulement si $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. L'ensemble des isométries de E forme un groupe, à savoir le *groupe orthogonal* de E que l'on note $\mathrm{O}(E)$; $\mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$. On distingue les isométries directes, qui sont de déterminant 1 et les isométries indirectes, de déterminant -1. L'ensemble des isométries directes forme un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$; on l'appelle le *groupe spécial orthogonal* et on le note $\mathrm{SO}(E)$. Enfin, on peut introduire le groupe des similitudes de E, que l'on désignera par $\mathrm{GO}(E)$. Pour rappel, f est une similitude de multiplicateur $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ si $\langle f(u), f(v)\rangle = \mu\langle u, v\rangle$. On a en particulier

$$\mathrm{GO}(E) \simeq \mathrm{O}(E) \times \mathbb{R}_+^*$$

et

$$\mathrm{SO}(E) \subset \mathrm{O}(E) \subset \mathrm{GO}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$$

Soient maintenant X un ensemble non vide d'éléments que nous appellerons des *points* et une application $\varphi : X \times X \to E$, telle que $\varphi(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$. Une telle application satisfait aux deux conditions suivantes :

(1) lorsque l'on fixe un point A dans X, $\varphi_P : X \to E$ est une bijection qui, à tout point M de X, fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans E,

(2) pour tous points A, B, C de X, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Si E est euclidien, on dit que X est un espace affine euclidien de direction E.

Soient X un espace affine de direction E et X' un espace affine de direction F, une application $f : X \to X'$ est dite *affine*, s'il existe une application linéaire g de E dans F telle

que

$$\forall P, Q \in X \ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = g(\overrightarrow{PQ})$$

g est appelée l'application linéaire associée à f. L'ensemble des transformations affines de X dans lui-même forme un groupe que l'on appelle le *groupe affine* et que l'on note $\mathrm{GA}(X)$.

Supposons maintenant que X soit un espace affine euclidien de direction E. Soient P et Q deux points de X, leur distance correspond au nombre $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$. Une isométrie affine est une application affine de X dans lui-même qui conserve les distances. Autrement dit, si f est une isométrie affine, alors pour tous $P, Q \in X, d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$. Une application affine f est une isométrie affine si et seulement si l'application linéaire qui lui est associée est une isométrie de E. L'ensemble des isométries affines forme un groupe que l'on note $\mathrm{Is}(X)$. Il s'agit d'un sous-groupe de $\mathrm{GA}(X)$. Le groupe $\mathrm{Is}(X)$ est l'image réciproque de $\mathrm{O}(E)$ par l'homomorphisme de groupes $\phi : \mathrm{GA}(X) \to \mathrm{GL}(E)$ qui, à toute application affine f, fait correspondre l'application linéaire g qui est associée à f. Le groupe des translations $\mathrm{T}(X)$ correspond au noyau de ϕ. Il s'agit donc d'un sous-groupe distingué de $\mathrm{GA}(X)$. Enfin, soit f une isométrie affine, elle est directe si g est de déterminant 1, indirecte si g est de déterminant -1. L'ensemble des isométries affines directes constitue un sous-groupe de $\mathrm{Is}(X)$ que nous noterons $\mathrm{Is}^+(X)$. Nous obtenons la suite d'inclusions suivante :

$$\mathrm{T}(X) \subset \mathrm{Is}^+(X) \subset \mathrm{Is}(X) \subset \mathrm{Sim}(X) \subset \mathrm{GA}(X)$$

où $\mathrm{Sim}(X)$ désigne le groupe des similitudes affines. Ces préalables sont nécessaires pour clarifier le texte de Weyl. Le groupe Δ^+ des mouvements euclidiens (Gruppe der euklidischen Bewegungen) qu'il évoque au cours du § 14 de *Philosophie der Mathematik* correspond très exactement au groupe $\mathrm{Is}^+(X)$ des isométries affines directes. Cela posé, Weyl utilise le concept de *normalisateur* d'un sous-groupe H inclus dans un groupe G. En langage formalisé, le normalisateur de H que l'on note $N_G(H)$ vérifie :

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Pour le dire autrement, $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué. Nous avons donc $H \subseteq N_G(H) \subseteq G$. Si H est distingué dans G, alors $N_G(H) = G$. Nous ne faisons que retraduire l'affirmation de Weyl selon laquelle « les transformations qui sont permutables à Δ forment un groupe, le *Normalisateur* de Δ ».[53] Weyl affirme donc que $\mathrm{Sim}(X)$ — c'est-à-dire le groupe des similitudes affines — est le normalisateur du groupe des

53. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, *op. cit.*, p. 106 : « Die mit Δ vertauschbaren Transformationen bilden eine Gruppe, den *Normalisator* von Δ ».

mouvements euclidiens. Il en déduit les résultats de géométrie élémentaire suivants : toutes les figures congruentes sont semblables. La réciproque est fausse : il existe des figures semblables dans un espace euclidien qui ne sont pas congruentes. Par exemple un corps et son image par une réflexion ou encore un bâtiment et le modèle réduit qui lui correspond ne sont pas des figures deux à deux congruentes.

Il ajoute que le normalisateur du groupe des translations $\mathrm{T}(X)$ — qu'il nomme groupe des déplacements parallèles [Gruppe der Parallelverschiebungen] — n'est autre que le groupe affine lui-même. En effet, $\mathrm{T}(X)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GA}(X)$, donc « le normalisateur du groupe des déplacements parallèles est constitué de l'ensemble des transformations affines ».[54] Il en déduit la relation suivante : « si Δ' est un sous-groupe de Δ, alors le normalisateur Γ' de Δ' contient le normalisateur Γ de Δ ».[55] Effectivement, si l'on reprend l'exemple de Weyl, $\mathrm{T}(X)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Is}^+(X)$; par suite, $\mathrm{GA}(X)$ qui est le normalisateur de $\mathrm{T}(X)$ contient $\mathrm{Sim}(X)$ qui est le normalisateur de $\mathrm{Is}^+(X)$.

Loin de se restreindre à des espaces affines euclidiens, Weyl cherche ensuite à étendre ses arguments à un espace considéré purement et simplement comme un *continuum*. Notons $\mathcal{E}$ un tel espace et Ω le groupe des « transformations continues » qui lui est associé. Il s'agit en fait du groupe des homéomorphismes de $\mathcal{E}$ dans lui-même. Soit Δ un sous-groupe de Ω, le normalisateur Γ de Δ est constitué de l'ensemble des transformations de Ω permutables à Δ. Le raisonnement de Weyl est donc simple : il prend appui sur des groupes de transformations bien connus pour montrer que le concept de normalisateur a encore un sens dans le cas de groupes abstraits tels que Ω.

Après ces longs préalables, Weyl rappelle brièvement le paradoxe des objets similaires, identiques et pourtant non congruents de Kant. Si l'on suit l'argument kantien, la différence entre la gauche et la droite et, par extension, toutes les questions d'orientation dans l'espace dépendent directement d'une intuition *a priori*. Plus radicalement, dans la dissertation de 1770 comme dans les *Prolégomènes*, Kant utilise le paradoxe des objets égaux mais non congruents pour prouver que l'espace est originairement une forme *a priori* de notre sensibilité. Bref, aux yeux de Kant, « seul l'idéalisme transcendantal offre une solution à cette énigme ».[56] Contre Kant, Weyl montre que la théorie des groupes, appliquée à la géométrie, permet de traduire conceptuellement la distinction entre la gauche et la droite. Voici son objection :

54. *ibid.*, p. 107.
55. *ibid.*, p. 107.
56. *ibid.*, p. 108 : « Nach seiner Einsicht bietet nur der transzendentale Idealismus eine Lösung für dieses Rätsel an ».

> Nul ne doute que la signification de la congruence dépend de l'intuition de l'espace, mais il en va de même pour la similitude. Kant croit être parvenu à une conclusion étonnante, pourtant une telle conclusion peut entièrement être expliquée par voie analytique, en s'appuyant sur un groupe Γ et ses sous-groupes invariants Δ ou plutôt sur un groupe Δ et son normalisateur Γ. Lorsque Δ est un sous-groupe distingué propre de Γ, les concepts de congruence (= Δ-équivalence) et de similitude (= Γ-équivalence) ne coïncident pas, bien que la première ait une signification objective (= Γ-invariante). Le phénomène qui surprend Kant peut se formuler de manière parfaitement satisfaisante à l'aide de concepts généraux et abstraits. [57]

Weyl est ici très mesuré dans son argumentation. Il n'affirme pas que l'on pourrait se passer de tout support intuitif pour savoir ce qu'est une congruence. Par contre, il estime que la théorie des groupes permet *d'objectiver* les questions d'orientation dans l'espace et de les traduire *conceptuellement*. Tentons de clarifier son propos. Prenons d'abord le soin de justifier sa terminologie. Deux figures géométriques F et F' sont Δ- (resp. Γ-) équivalentes, s'il existe une application de Δ (resp. de Γ) qui transforme F en F'. Par exemple, si Δ désigne le groupe des isométries affines directes et Γ le groupe des similitudes dans le plan, alors deux triangles semblables sont Γ-équivalents, mais non pas nécessairement Δ-équivalents. Weyl ajoute que la Δ-équivalence décrit une *relation objective*, si Δ est un sous-groupe distingué de Γ. Or, nous avons vu dans ce qui précède que le groupe des similitudes affines — à savoir $\mathrm{Sim}(E)$ est le normalisateur du groupe des isométries affines directes $\mathrm{Is}^+(E)$. Précisément, l'orientation dans un espace affine euclidien est laissée invariante par $\mathrm{Is}^+(E)$ qui est lui-même distingué dans $\mathrm{Sim}(E)$. Nous avons donc affaire à une propriété ou à une *relation objective* au sens de Weyl.

Or, celle-ci a été entièrement traduite à l'aide de concepts tirés de la théorie des groupes. Donc, l'orientation dans l'espace, que Kant jugeait *subjective* et *intuitive*, est en fait une relation *objective* qui peut être exprimée sous une forme *conceptuelle*. *L'objectivité* ne se rapporte pas ici à des entités ou des objets considérés isolément, mais à des *relations* qui doivent demeurer inaltérées sous l'action d'un certain groupe de transformations convenablement choisi. Pour le dire autrement, Weyl défend une *conception relationnelle de l'objectivité*, qui nous renvoie aux thèses fondamentales défendues par Poincaré à la fin du chapitre XI de *La Valeur de la Science*. [58]

Précisons notre propos. Poincaré commence par formuler les « conditions de l'objectivité » : le monde objectif est *commun* aux individus ; pour qu'il en soit ainsi, il faut pouvoir communiquer les mêmes informations. Il n'y a donc pas d'objectivité sans communicabilité.

57. *ibid.*, p. 108.
58. H. Poincaré, *La Valeur de la Science* 1905, Paris, éd. Flammarion, 1970, chapitre XI.

Bref, le monde n'est pas objectif en tant que tel aux yeux de Poincaré : l'objectivité repose sur le fait que nous partageons les mêmes discours à propos du réel : « pas de discours, pas d'objectivité ». N'est objectif que ce qui est communicable. Or, étant donné que les « sensations sont intransmissibles », elles n'ont pas de valeur objective. Par cet argument nous avons déterminé une condition nécessaire, mais non pas suffisante pour caractériser l'objectivité. En effet, Poincaré ne soutient pas que l'objectivité serait affaire de pure convention langagière. Sinon, on ne reconnaîtrait plus aucune spécificité au discours scientifique par rapport aux autres types de discours. Voilà pourquoi Poincaré ajoute que la valeur objective de la science vient de ce qu'elle détermine des *rapports constants* entre des objets. Il dit même plus : aucun « objet » ne nous est immédiatement donné ; des entités ou des groupes de sensations ne deviennent des objets que s'ils sont assujettis à des relations constantes :

> Les objets extérieurs, par exemple, pour lesquels le mot objet a été inventé, sont justement des objets et non des apparences fuyantes et insaisissables parce que ce ne sont pas seulement des groupes de sensations, mais des groupes cimentés par un lien constant. C'est ce lien, et ce lien seul, qui est objet en eux, et ce lien c'est un rapport. [59]

Justement, l'orientation des figures dans un espace affine euclidien constitue un rapport constant entre des figures, puisqu'elle est invariante par un groupe de transformations, à savoir le groupe des isométries affines directes. Kant a pu croire qu'une telle orientation est purement subjective étant donné qu'au cours de son raisonnement, il propose une conception restrictive de l'objectivité : à ses yeux, elle se rapporte exclusivement aux *prédicats* qui caractérisent des objets. Nous l'avons déjà dit précédemment : deux triangles semblables, identiques mais non congruents ont les mêmes prédicats. Pourtant, ils admettent une différence essentielle : ils ne sont pas superposables. Kant en déduit que cette différence n'est pas objective, puisqu'elle ne se trouve pas *dans* les objets à comparer. Elle serait à situer au niveau de l'espace ambiant qui ne peut être qu'une forme *a priori* de notre sensibilité.

Mais si l'on admet avec Poincaré et Weyl que l'objectivité correspond moins aux prédicats des objets qu'aux rapports constants qui les unissent, alors l'orientation dans l'espace est bel et bien objective, parce qu'elle est un *invariant* par le groupes des isométries affines directes. Seul un cadre conceptuel adapté, en l'occurrence la théorie des groupes de transformations associés à la géométrie élémentaire, permet de montrer que l'orientation dans l'espace n'est pas subjective mais objective. Par extension, le développement de la théorie des groupes en géométrie et dans les sciences physiques permet de jeter les bases d'une conception purement *relationnelle de l'objectivité* qui est défendue tant par Poincaré que par Weyl. Les critiques que

59. *ibid.*, p. 181.

ce dernier formule à l'encontre de la conception kantienne de l'orientation spatiale sont plus profondes qu'il n'y paraît à premier abord. De manière sous-jacente, Weyl souscrit à la thèse de Poincaré selon laquelle l'objectivité dans les sciences se rapporte moins aux prédicats des « objets » qu'aux *rapports constants* entre des entités, des figures ou des groupes de sensations.

Les réflexions menées par Weyl sur la mécanique classique dans *Raum, Zeit, Materie* confirme nos interprétations :

> La géométrie de l'univers quadridimensionnel est établie précisément de la même manière que la géométrie euclidienne, celle-ci étant déterminée dès qu'on connaît le groupe de transformations qui permet de passer d'un système cartésien à un autre système cartésien. Une relation entre deux points d'univers a un sens objectif dès qu'elle s'exprime par des équations entre les coordonnées des points qui restent invariantes par les transformations [de Galilée]. [60]

Ce ne sont pas les points d'univers, mais bien les *relations* entre ces mêmes points qui ont une objectivité. Précisément, pour qu'elles soient telles, elles doivent être exprimées par des lois ou des équations formellement *invariantes* par changement de référentiel inertiel. Autrement dit, une relation d'ordre géométrique ou physique est objective pour autant qu'elle est laissée inchangée sous l'action d'un groupe de transformations convenablement choisi. Une telle objectivité n'est pas définie dans l'absolu, elle est relative au groupe de transformations pris en considération. Par exemple, les équations et les lois de la mécanique classique — qui sont des relations entre des quantités physiques — ont un sens objectif relativement au groupe de Galilée. Donc, l'objectivité au sens de Weyl s'applique à des rapports entre les choses et elle ne peut être que *relative*. C'est ce que dira Weyl avec force dans un passage essentiel de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* : « [l']univers objectif est nécessairement relatif ». [61] Écartons immédiatement un contresens possible à la lecture de cette affirmation laconique : Weyl ne souscrit pas à une forme de relativisme sur un plan philosophique. Il ne défend à aucun moment l'idée selon laquelle les lois de la nature varieraient en fonction des temps et des lieux. En réalité, il rappelle que les lois de la nature sont assujetties à un principe de *relativité*, qui n'est rien moins qu'un principe d'invariance. C'est pour cette raison qu'il corrèle les adjectifs « objectif » et « relatif ». Ainsi, en mécanique classique, les lois de la *mécanique* doivent demeurer formellement invariantes par le groupe de Galilée. En relativité restreinte, les lois de la *mécanique* et de l'*électromagnétisme* demeurent formellement inaltérées par le groupe de Poincaré. Enfin, en relativité générale, les lois de la nature sont covariantes sous le groupe des difféomorphismes d'espace-temps.

60. H. Weyl, *Espace, Temps, Matière*, *op. cit.*, p. 134.
61. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, *op. cit.*, p. 150.

Revenons au paragraphe que consacre Weyl à la question de l'orientation dans l'espace dans *Philosophie der Mathematik*. Il ajoute la critique suivante à l'encontre de Kant :

> Si je devais caractériser les faits mathématiques fondamentaux, alors je commencerais vraisemblablement par le fait (F_1) : le dénombrement d'un ensemble d'éléments nous conduit toujours au même nombre, quel que soit l'ordre dans lequel on les dispose ; ensuite, je mentionnerais le fait (F_2) : on peut distinguer les permutations de n choses $(n \geqslant 2)$ selon qu'elles sont paires ou impaires. Les permutations paires forment un sous-groupe d'indice 2 à l'intérieur du groupe de toutes les permutations. Le premier fait est au fondement du concept géométrique de dimension, le second est au fondement du concept de ≪ sens ≫. Considérons la géométrie vectorielle affine [die affine Vektorgeometrie]. Une base pour ses vecteurs est constituée de n vecteurs $e_1, ..., e_n$, de telle sorte que chaque vecteur arbitrairement choisi s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire $x_1e_1 + ... + x_ne_n$. Le théorème de la dimension (litt. de l'invariance de la dimension) affirme que toute base est nécessairement constituée du même nombre n de vecteurs. (...) Tout arrangement de n vecteurs linéairement indépendants donnés détermine un certain ≪ sens ≫ [ein Sinn], et deux arrangements (de n vecteurs linéairement indépendants) ont le même ≪ sens ≫ lorsqu'ils proviennent l'un de l'autre par une permutation paire (définition par abstraction). Une permutation impaire inverse le sens [d'un arrangement de vecteurs]. Il s'agit clairement de la racine combinatoire de la différence entre la gauche et la droite. De plus, si l'on fait le lien avec les opérations fondamentales de la géométrie élémentaire affine (addition de vecteurs, multiplication d'un vecteur avec un nombre), alors on est amené à pouvoir comparer le ≪ sens ≫ de deux bases $e_1, ..., e_n$ et $e_1^*, ..., e_n^*$. Si l'on exprime les vecteurs e^* par les vecteurs e, alors
>
> $$e_i^* = a_{1i}e_1 + ... + a_{ni}e_n$$
>
> par suite les coefficients a_{ik} possèdent un déterminant non nul. Les sens des deux bases sont ou bien identiques, ou bien contraires, selon que le déterminant est positif ou négatif. Or, la définition du déterminant est justement fondée sur la distinction entre les permutations paires et impaires !
>
> Kant trouve la clé [pour résoudre] l'énigme de la gauche et de la droite dans l'idéalisme transcendantal. Le mathématicien voit derrière tout cela le fait combinatoire correspondant à la différence entre permutations paires et impaires. La divergence entre les investigations du philosophe et du mathématicien concernant les racines de la réalité phénoménale que nous présente la nature ne peut guère être mise en lumière d'une manière plus frappante. [62]

Le but de Weyl dans ce passage est clair : il montre que la différence entre la gauche et la droite peut être établie sur un mode analytique et combinatoire, et non pas seulement de manière intuitive et synthétique. Il se donne un espace vectoriel V de dimension n, une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et une seconde base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ de V. Il considère la matrice M de changement de base dont les coefficients sont les coordonnées des vecteurs e'_i de la

62. *ibid.*, p. 112-113.

nouvelle base $\mathcal{B}'$ dans l'ancienne base $\mathcal{B}$. Ces deux bases ont le même sens — ou la même orientation — si le déterminant de cette matrice est positif. Or, Weyl précise que le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ et surtout la signature d'une permutation interviennent de manière essentielle dans la définition du déterminant d'une matrice carrée. En effet, le déterminant d'une matrice carrée $M = [m_{ij}]$ est défini par :

$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} m_{1,\sigma(1)},$$

où la signature $\varepsilon_\sigma = +1$ si σ est paire — i.e. si σ se décompose en un produit de transpositions en nombre pair — et $\varepsilon_\sigma = -1$ si σ est impaire — i.e. si σ se décompose en un produit de transpositions en nombre impair. Weyl fonde de proche en proche la différence entre la gauche et la droite sur le fait mathématique fondamental selon lequel il existe deux types de permutations : les permutations paires et impaires.[63] Sa démarche est donc analytique et combinatoire à la différence de Kant qui distingue la gauche et la droite sur un mode synthétique et intuitif. Weyl en déduit qu'il existe un écart irréductible entre « le philosophe » et le « mathématicien ». On peut s'interroger sur la portée d'un tel argument. En effet, Weyl n'examine ici que certains traits de l'idéalisme transcendantal. Il s'agit là d'un argument de circonstance qui ne doit pas être interprété comme la marque d'une adhésion au positivisme. En effet, dans une série de textes plus tardifs, Weyl insistera sur la complémentarité entre mathématiques et philosophie. Aussi ne faudrait-il pas penser trop hâtivement que Weyl adopte un point de vue scientiste. Il se contente de montrer que l'idée de Kant selon laquelle l'orientation dans l'espace ne peut être appréhendée qu'intuitivement est discutable. Par ce biais, Weyl fait remonter l'intuition de l'espace jusque dans notre entendement.

2.4.2 Continuum amorphe et variétés métriques

Parallèlement, il s'appuie sur la *Leçon d'habilitation* de Riemann pour contester la thèse de Kant selon laquelle l'espace serait une forme indépendante de la matière des phénomènes. Pour Weyl, il est nécessaire de distinguer l'espace comme continuum amorphe, c'est-à-dire comme variété topologique à trois dimensions, et l'espace en tant que variété différentielle munie d'une *structure métrique*. Nous avons vu que, dans l'« Esthétique transcendantale »,

63. La distinction entre les permutations paires et impaires intervient de manière essentielle en mécanique quantique pour caractériser les particules de spin demi-entier, à savoir les fermions. Nous renvoyons le lecteur à la sous-section 3.2.5 (troisième partie) de la présente thèse ainsi qu'à l'annexe D de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (éd. de 1949) intitulée « Die chemische Valenz und die Hierarchie der Strukturen », *op. cit.*, p. 341-342.

Kant n'assigne pas encore de propriété métrique bien définie à l'espace. Il suppose seulement que l'espace doit être envisagé *globalement* et qu'il doit être représenté *comme* une grandeur *infinie* donnée. Kant précise la structure métrique qu'il entend assigner à l'espace objectif dans *les axiomes de l'intuition*, qui constituent des principes *a priori* de l'entendement. Cette structure est clairement euclidienne.

Dans une série d'articles — à commencer par *Reine Infinitesimalgeometrie* (1918) — Weyl met en défaut trois arguments de Kant : (1) Dans une perspective kantienne, l'espace est d'emblée envisagé *globalement* ; il est supposé homogène. Or, par *continuum amorphe*, Weyl entend une variété topologique qui est précisément définie *localement*. (2) Bien que Kant ne définisse la structure métrique de l'espace que dans les *axiomes de l'intuition*, ses textes ne reflètent pas une claire distinction entre propriétés topologiques et métriques. Par exemple, lorsque, dans « l'Esthétique transcendantale », il suppose que l'espace est homogène et qu'il doit être représenté comme une grandeur infinie donnée, il écarte d'emblée certaines possibilités : dans ces conditions l'espace doit avoir une mesure de courbure constante. De plus, à la différence de Riemann, Kant ne distingue pas clairement l'illimité en tant que propriété d'étendue et l'infini en tant propriété métrique. (3) Weyl montre qu'il est impossible de fonder entièrement la structure métrique de l'espace sur des *principes a priori*. En effet, les déterminations métriques dont l'espace est susceptible sont conditionnées par la répartition de la matière. Or, une telle répartition ne peut pas être connue *a priori*.

Weyl défend donc la thèse suivante — qu'il nuancera entre 1921 et 1923 — : seules les propriétés topologiques de l'espace — envisagé comme un *continuum amorphe* — sont *a priori*. En revanche, ses propriétés métriques ne peuvent pas être établies indépendamment de l'expérience, dans la mesure où elles sont conditionnées par la répartition de la matière en son sein. Dans une perspective kantienne, toutes les propriétés que l'on peut assigner à l'espace physique peuvent être déterminées *a priori*. Pour Weyl en revanche, tout du moins dans « Reine Infinitesimalgeometrie », il existe une ligne de démarcation très claire entre propriétés *topologiques* et propriétés *métriques* qui recouvre la distinction entre *a priori* et *a posteriori*. Il corrige cependant cette thèse dans les articles qu'il consacre à la résolution du problème de l'espace. Il montre en effet que l'espace doit être *a priori* pythagoricien dans l'infinitésimal, sa structure métrique étant alors définie par une forme quadratique non dégénérée. Il différencie la *nature* de la métrique — que l'on peut établir indépendamment de l'expérience — et son *orientation* qui est variable d'un point à un autre de la variété d'espace-temps. Weyl reprend explicitement cette nuance dans *Philosophie der Mathematik*

und Naturwissenschaft. [64]

Revenons sur le début de ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫. Weyl rappelle qu'en relativité, il est impossible de séparer la variable temporelle et les variables spatiales. Voilà pourquoi il est ici question d'espace-temps. Ensuite, il indique qu'en relativité générale, l'univers est considéré comme une variété pseudo-riemannienne. Il en déduit l'argument suivant :

> La métrique n'est pas une propriété de l'univers en soi ; l'espace-temps en tant que forme des phénomènes est davantage un continuum quadridimensionnel complètement amorphe au sens de l'*analysis situs*, en revanche la métrique exprime quelque chose de réel, qui existe dans l'univers, qui exerce des effets physiques sur la matière via les forces centrifuge et gravitationnelle ; inversement, l'état [de l'univers] est assujetti à des lois de la nature et il est conditionné par la répartition [Verteilung] et la constitution [Beschaffenheit] de la matière. [65]

On pourrait reprocher à Weyl de proposer une lecture approximative de Kant. Par exemple, ce dernier ne parle jamais d'espace ou d'univers en soi. En outre, Kant affirme simultanément l'idéalité et la réalité de l'espace à la fin de son ≪ Esthétique transcendantale ≫. Cet extrait a au moins le mérite de montrer que Weyl est parfaitement conscient des déplacements qu'il fait subir à la théorie kantienne de l'espace. (i) L'univers comme forme des phénomènes est réduit à un continuum amorphe. (ii) Pour Weyl, la structure métrique de l'univers n'est pas assujettie à des principes *a priori* de l'entendement mais à des *lois de la nature*. Or, une loi de la nature ne peut jamais être établie indépendamment de l'expérience. En d'autres termes, *les axiomes de l'intuition* de Kant sont totalement incompatibles avec le cadre théorique hérité de la relativité générale. (iii) Univers métrique et matière cessent d'être dans un rapport de contenant à contenu : ils interagissent et se conditionnent mutuellement.

L'argument tiré de ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫ que nous venons de commenter est déjà présent dans la première édition de *Raum, Zeit, Materie*. Weyl s'appuie tantôt sur le *Habilitationsvortrag* de Riemann, tantôt sur la théorie de la relativité générale pour montrer que l'espace physique (resp. l'univers quadridimensionnel) ne peut pas être considéré comme une forme indépendante de la matière des phénomènes, dès lors que l'on s'intéresse à sa structure métrique :

> [Riemann] affirme plutôt, contrairement à la croyance habituelle, que l'espace en soi n'est pas autre chose qu'une multiplicité tridimensionnelle amorphe et que c'est le contenu matériel qui le remplit qui lui donne sa forme et détermine ses rapports de mesure (...) Le champ de gravitation exerce sur les rayons lumineux et sur les corps ≪ solides ≫ que nous prenons comme étalons de mesure, une action telle que si nous utilisons les rayons lumineux et les étalons pour mesurer des objets à la manière habituelle, il en résulte une métrique qui ne s'écarte que très peu de

64. *ibid.*, p. 172.
65. H. Weyl, ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, *Mathematische Zeitschrift*, **2**, 1918, p. 385.

> la métrique euclidienne. Mais les rapports métriques ne proviennent pas d'un espace considéré comme forme des phénomènes, ils sont issus du calcul des modifications physiques des étalons et des rayons lumineux déterminées par le champ de gravitation. [66]

Malgré la grande proximité qu'il croit entrevoir entre le *Habilitationsvortrag* de Riemann et la théorie de la relativité générale sur la nature de l'espace, Weyl écarte quelques non-sens historiques grossiers : il ne dit pas que la *Leçon d'habilitation* de Riemann constitue une anticipation de la relativité générale ; réciproquement, il insiste sur le fait qu'il n'existe pas d'influence directe des idées de Riemann sur Einstein, ce qui est exact : Einstein mesure l'importance du *Habilitationsvortrag* de Riemann par l'entremise de Grossmann.

Sans doute Weyl commet-il un faux-sens dans ce passage tiré de *Raum, Zeit, Materie*, lorsqu'il affirme que, dans une perspective kantienne, la structure métrique du monde physique dérive de l'espace entendu comme forme des phénomènes du sens externe. En effet, une telle structure dépend des principes de l'entendement — en l'occurrence les axiomes de l'intuition — et non pas seulement de l'espace entendu comme intuition pure. Par contre, il est certain que Kant croit pouvoir déterminer la structure métrique du monde physique entièrement *a priori*. En effet, les axiomes de l'intuition sont, pour Kant, des principes *a priori* de l'entendement. Justement, Weyl conteste ce point ; il insiste sur le fait que la structure métrique de l'univers est conditionnée par la répartition de la matière en son sein.

Dans « Reine Infinitesimalgeometrie », *Raum, Zeit, Materie*, ou encore *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Weyl revient sur les objections que Gauss et Riemann formulent à l'encontre de Kant ; il s'approprie également les arguments développés par Helmholtz dans deux articles : « Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome » [Sur l'origine et la signification des axiomes de la géométrie] (1870) et « Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze » [Sur l'origine et le sens des propositions de la géométrie] (1878). À l'instar de Gauss qui prétendait pouvoir construire une physique sur la base de la géométrie hyperbolique, Helmholtz est convaincu que les géométries non-euclidiennes sont possibles *au regard de l'expérience*. Weyl souligne la grande proximité entre les thèses de Gauss et de Helmholtz à la page 170 de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Il cite tout d'abord les arguments développés par Gauss dans sa correspondance avec Taurinus et Bessel, avant de résumer les arguments de Helmholtz sans solution de continuité.

Quelles sont les motivations de Helmholtz dans ces deux articles ? Il ne rejette pas la thèse

66. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie* (première édition) *op. cit.*, p. 88 et p. 91 ; p. 84 et p. 87 pour la traduction française.

de Kant selon laquelle l'espace serait une forme *a priori* de notre sensibilité. Par contre, il estime que Kant ajoute subrepticement une série de restrictions au point que seule la géométrie euclidienne aurait une effectivité en physique, à l'exclusion de toute autre géométrie.

> [Kant] ne semble pas considérer cette forme donnée *a priori* comme un schéma purement formel et en soi totalement vide qui s'appliquerait à n'importe quel contenu empirique ; au contraire, il inclut dans ce schéma des particularités telles que seul un contenu restrictif peut légitimement se produire en lui et devenir intuitivement appréhendable. [67]

Helmholtz entend développer une conception plus *souple* de l'espace comme forme des phénomènes ; corrélativement, il montre que la géométrie appliquée au monde physique trouve son fondement dans l'expérience. L'intuition de l'espace et les principes *a priori* de l'entendement ne nous permettent pas à eux seuls de connaître la structure métrique du monde physique. L'expérience pourrait même plaider en faveur de l'effectivité des géométries non-euclidiennes : « Si l'on pouvait se représenter d'autres espaces [à côté de celui qui est hérité de la géométrie euclidienne], alors il faudrait réfuter l'idée selon laquelle les axiomes de la géométrie seraient des conséquences nécessaires d'une forme transcendantale de nos intuitions donnée *a priori*, au sens où l'entend Kant ». [68] Pour Helmholtz, les axiomes de la géométrie ne se rapportent pas exclusivement à des relations spatiales établies indépendamment de l'expérience, ils dérivent du comportement mécanique des corps rigides.

Autrement dit, Helmholtz repère une contradiction essentielle dans les thèses de Kant : ce dernier plaide en faveur de l'effectivité de la géométrie euclidienne en physique mais, dans le même temps, il estime que les axiomes sur lesquels elle reposent sont *a priori*. Comment savoir alors que seule la géométrie euclidienne peut être appliquée au domaine de l'expérience ? Helmholtz poursuit sa réfutation en ces termes : supposons que les concepts de la géométrie sont indépendants de toute expérience effective, alors les propositions qui dérivent d'eux ne pourraient être ni confirmées ni infirmées expérimentalement. Il faudrait admettre que les axiomes de la géométrie ne sont pas des jugements synthétiques mais des jugements purement analytiques. Au vu de ce raisonnement, Helmholtz doute manifestement de la possibilité des *jugements synthétiques a priori*. Cet argument connaîtra une grande fortune au cours des années 20. En effet, certains représentants du positivisme logique, en l'occurrence Schlick, Carnap et Reichenbach chercheront à prouver que tous les jugements *a priori* sont analytiques et, réciproquement, que tous les jugements *a posteriori* sont synthétiques : ou bien les axiomes de la géométrie sont des définitions implicites de concepts, auquel cas ils sont analytiques ;

67. H. von Helmholtz, « Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome », in *Vorträge und Reden*, Braunschweig : Vieweg, Bd. 2, 4. Auf. 1883, p. 4.
68. *ibid.*, p. 22.

ou bien ils se rapportent à l'expérience, ils sont alors assujettis à certaines lois de la nature et ils cessent donc de valoir *a priori*.

À aucun moment Weyl ne réfute l'existence des jugements synthétiques *a priori* dans *Philosophie der Mathematik*. Il s'appuie sur l'article de Helmholtz pour instaurer une ligne de démarcation entre l'espace comme forme des phénomènes et l'espace métrique. Il lève au passage l'une des restrictions à laquelle Helmholtz reste attaché. En effet, ce dernier assujettit l'espace physique à l'axiome de libre mobilité : lorsqu'un corps rigide accomplit un déplacement dans l'espace, il ne subit aucune déformation. Helmholtz considère donc l'homogénéité comme une propriété nécessaire de l'espace physique. Cet argument n'a pas échappé à Weyl qui en profite pour repérer un point de distinction essentiel entre l'*Habilitationsvotrag* de Riemann et l'article de Helmholtz intitulé « Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen » :

> À vrai dire, si l'on exige que l'espace soit homogène sur un plan métrique — et l'espace comme forme des phénomènes est nécessairement homogène —, alors on va immédiatement du concept riemannien au concept classique d'espace, auquel conduisent les postulats d'Helmholtz sur le groupe de mouvements. Riemann suppose en revanche que le champ métrique n'est pas donné une fois pour toutes de manière permanente, mais qu'il dépend causalement de la matière et qu'il se modifie avec elle ; il ne correspond plus à une forme des phénomènes homogène et stable, mais à un devenir matériel changeant. [69]

Comme nous l'avons déjà souligné, l'espace comme forme des phénomènes est un continuum amorphe selon Weyl — tout du moins dans « Reine Infinitesimalgeometrie » ; ses propriétés sont alors exclusivement topologiques et elles peuvent être établies indépendamment de l'expérience. Weyl propose en conséquence une analyse purement *conceptuelle* de l'espace comme « forme des phénomènes ». S'il emprunte cette expression à Kant, il en déplace singulièrement le sens puisqu'il n'évoque à aucun moment l'existence d'une intuition pure. Ainsi, Weyl assujettit certaines distinctions philosophiques héritées du criticisme — forme / matière des phénomènes — à des distinctions relevant des mathématiques — structure topologique / structure métrique. Corrélativement, Weyl différencie très clairement l'espace mathématique, l'espace physique et l'espace intuitif, ce dernier perdant tout rôle fondateur dans l'ordre des connaissances physico-géométriques puisqu'il dépend de nos sensations et perceptions.

Pour clarifier la distinction entre espaces physique, mathématique et intuitif, Weyl reprend à son compte une assertion tirée de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* de Schlick (première édition 1918, seconde édition 1925). Il ne revient pas sur les motivations réelles de Schlick et il laisse dans l'ombre le fait de savoir si les références philosophiques qu'il convoque sont parfaitement

69. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, *op. cit.*, p. 116.

compatibles entre elles. [70] Son objectif n'est donc pas de produire un système de pensée ou de s'inscrire dans une tradition philosophique parfaitement définie. Par exemple, ce n'est pas parce qu'il s'approprie certains arguments de Schlick dans *Philosophie der Mathematik* qu'il faut voir là une éventuelle adhésion au positivisme logique.

Quelques précisions s'imposent à propos de l'*Allgemeine Erkenntnislehre*. Schlick se donne pour but de réfuter les arguments fondamentaux hérités du kantisme en théorie de la connaissance, à savoir l'existence d'une intuition pure — de l'espace et du temps — et de jugements synthétiques *a priori*, étant entendu que dans une perspective kantienne, toutes les connaissances mathématiques sont synthétiques *a priori*. Ainsi, au cours du § 11 intitulé ≪ Definitions, Conventions and Empirical Judgements ≫, Schlick affirme qu'aucune connaissance relevant des sciences exactes ne peut *à la fois* être synthétique et indépendante de l'expérience :

> Once we demonstrate, as we shall do later, that the judgements held to be synthetic and *a priori* are in fact either not synthetic or not *a priori*, there is no reason whatever to suppose that judgements of this strange sort might yet exist in some obscure corner of the sciences. And this is sufficient ground for us to try in what follows to explain all knowledge of reality as a system built up exclusively of judgements belonging to the two classes described above. [71]

Parallèlement, Schlick met en question l'existence de l'espace comme intuition pure, comme en atteste le § 38 intitulé ≪ Is there a pure Intuition ? ≫. Il montre qu'il existe non pas un, mais *des* espaces intuitifs qui sont fonctions des données sensori-motrices convoquées. [72] A contrario, l'espace de la géométrie n'a rien d'intuitif, il est de nature purement conceptuelle. Enfin, aucun principe *a priori* ne nous permet d'affirmer que seule la géométrie euclidienne est possible au regard de l'expérience. Schlick s'appuie justement sur la théorie de la relativité générale pour montrer qu'il n'en est pas ainsi. Pour Schlick, il n'existe donc pas un espace originaire entendu comme forme *a priori* des phénomènes du sens externe, mais *des* espaces (géométrique, physique, intuitif) dont le sens et les propriétés ne se recouvrent pas :

> Kant continually speaks of ≪ the ≫ space, declares it to be intuitive, and contrasts it only with the unknown ordering of the things-in-themselves. We, on the other hand, are directly

70. Dans la première édition de l'*Allgemeine Erkenntnislehre*, Schlick critique frontalement la phénoménologie de Husserl à laquelle Weyl demeure attaché, y compris dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*.

71. M. Schlick, *General theory of knowledge* (deuxième édition, 1925), Chicago et La Salle, éd. Open Court, 2002, p. 75.

72. *ibid.*, p. 353 : ≪ There is not just one intuitive space, but as many as there are spatial senses. Thus there is an optical space (actually two of them, since man is a two-eyed creature), a haptic space, a space of kinesthesic sensations ≫.

> acquainted with several intuitive spaces and these we contrast with the ordering of physical bodies, an ordering that is precisely the space of geometry. [73]

Weyl s'approprie la distinction établie par Schlick entre espaces géométrique, physique et intuitif. Il affirme notamment : « Sous l'influence des recherches axiomatiques modernes en mathématiques, on distingue l'espace mathématique, dont les lois sont des conséquences logiques d'axiomes arbitrairement admis et l'espace physique, c'est-à-dire le schéma visant à ordonner les choses réelles [wirkliche Dinge], schéma qui fait partie intégrante de la construction théorique de l'univers. Certains auteurs le différencient encore de l'espace intuitif ». [74] En revanche, il ne se donne pas pour but de réfuter directement et *systématiquement* les fondements du kantisme et plus particulièrement l'existence de jugements synthétiques *a priori*. C'est là sans doute ce qui le singularise par rapport à Carnap, Reichenbach ou encore Schlick. Inversement, Weyl demeure silencieux à propos de Cassirer qui, dans *La Théorie de la relativité d'Einstein*, tente de réformer la philosophie de Kant de manière à ce qu'elle s'accorde non seulement avec la relativité restreinte, mais encore avec la relativité générale.

Scientifiques et philosophes font donc au moins deux usages très différents de la relativité générale lorsqu'ils se confrontent au kantisme au cours des années 20. Weyl, Schlick ou encore Reichenbach entendent dépasser la philosophie de Kant. Il convient ici d'être plus précis : Weyl se contente de tracer la ligne de partage entre propriétés *a priori* et *a posteriori* de l'univers physique. Il montre à cet effet que l'espace comme forme des phénomènes est un continuum amorphe (1918) et il prouve que la métrique d'univers est *a priori* pythagoricienne dans l'infinitésimal (1921-1923). Il distingue donc deux questions. (1) Quelle est la *nature* de la métrique d'univers ? Un tel problème peut être résolu indépendamment de l'expérience : cette métrique est pythagoricienne dans l'infinitésimal. (2) Quelles sont les incidences de la répartition de la matière sur la *structure* métrique de l'univers ? Weyl montre très précisément qu'une telle difficulté ne peut être surmontée que si l'on s'appuie sur des lois physiques et non pas simplement sur des principes mathématiques. Weyl transforme donc de manière significative la théorie kantienne de l'espace ; il ne se contente pas de la réformer à la marge.

De manière beaucoup plus radicale, Reichenbach et Schlick s'appuient sur la méthode axiomatique héritée de Hilbert et sur la relativité générale pour (a) instaurer une ligne de démarcation très nette entre mathématiques et physique, (b) réfuter point par point le kantisme. Aux yeux des positivistes logiques, la théorie kantienne de la connaissance est une chose du passé, totalement inadaptée pour penser la relativité générale. Remarquons au pas-

73. *ibid.*, p. 353.
74. H. Weyl, *op. cit.*, p. 171.

sage que pour parvenir à leurs fins, les positivistes logiques imposent une lecture purement formaliste des travaux de Hilbert en géométrie : ils montrent qu'il n'existe pas de jugements synthétiques *a priori*, ce qui présuppose une conception réductrice des mathématiques entendues comme manipulation aveugle de symboles à partir d'un petit nombre d'axiomes. A contrario, Cassirer se contente d'ajuster la philosophie de Kant afin qu'elle se conforme à la nouvelle théorie de la gravitation d'Einstein. Cassirer prête même une fonction critique — au sens kantien du terme — aux fondements de la relativité générale.

2.5 Conclusion du deuxième chapitre

Ainsi, la conception kantienne de l'espace et de la géométrie fait l'objet d'une discussion serrée lorsque Gauss découvre la géométrie hyperbolique, qu'il estime logiquement non contradictoire *et* possible au regard de l'expérience. Riemann prolonge et radicalise les réflexions de Gauss : dans la troisième partie de son *Habilitationsvortrag*, il montre que la plupart des propriétés que Kant tenait pour des évidences concernant l'espace physique ne sont que des hypothèses parmi d'autres. Enfin, Weyl reprend à son compte les pensées de Gauss et de Riemann sur la nature de l'espace à la lumière des développements de la relativité générale.

Arrivés au terme de notre analyse, nous voudrions écarter un malentendu. Il serait erroné de penser que le statut hybride de la *Leçon d'habilitation* de Riemann expliquerait à lui seul pourquoi Weyl l'investit philosophiquement. En réalité, entre 1918 et 1926, Weyl adosse systématiquement ses propres travaux mathématiques à certaines réflexions philosophiques. Ainsi, son article fondateur sur la géométrie purement infinitésimale justement intitulé « Reine Infinitesimalgeometrie » s'ouvre sur une réfutation des présupposés kantiens concernant les propriétés de l'espace physique. De même sa conférence de septembre 1921 consacrée au problème de l'espace aboutit à une réévalution de la distinction entre la forme et la matière des phénomènes. De là résulte une lecture philosophique approfondie du *Habilitationsvortrag* de Riemann que Weyl synthétise au cours des §§ 15 et 18 de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*.

En outre, Weyl investit la leçon de Riemann au moment où la relativité générale acquiert une pleine légitimité parmi les physiciens théoriciens, les physiciens mathématiciens, et alors qu'elle intéresse vivement les philosophes des sciences dans le même temps. Nous pensons en particulier à Schlick, Reichenbach et Cassirer auxquels on doit respectivement les trois ouvrages suivants : *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik. Zur Einführung in das Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie* (1917), *Relativitätstheorie und Erkenntnis a*

priori (1920), *Zur Einsteinschen Relativitätstheorie. Erkenntnistheoretische Betrachtungen* (1921). Il n'a pas échappé à Weyl que la théorie de la gravitation d'Einstein sert de point d'appui à Schlick et Reichenbach pour remettre profondément en question les néokantismes au cours des années 20. Cassirer leur répond en montrant qu'il n'y a pas d'incompatibilité de fond entre la théorie kantienne de la connaissance et la démarche suivie par Einstein pour aboutir aux principes de la relativité restreinte et de la relativité générale.

Il n'est donc pas étonnant de constater que Weyl se réfère à la leçon de Riemann pour dépasser la théorie kantienne de l'espace. Cependant, les critiques de Weyl contre Kant sont mesurées. Weyl conserve certaines grandes distinctions kantiennes tout en déplaçant les frontières qui les sépare, nous pensons à la distinction forme des phénomènes / matière des phénomènes ou encore à la distinction *a priori* / *a posteriori*, etc. Nous confirmerons d'ailleurs cela dans les prochains chapitres. Toujours est-il que Weyl laisse dans l'ombre les incidences de la philosophie de Herbart sur Riemann. Preuve que la lecture philosophique du *Habilitationsvortrag* proposée par Weyl doit elle-même être située historiquement : elle apparaît dans le contexte d'une refonte plus ou moins radicale de la théorie kantienne de la connaissance avec l'essor de la relativité générale. Cette refonte se manifeste notamment dans l'*Allgemeine Erkenntnislehre* de Schlick (1918 / 1925) ou encore dans *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori* de Reichenbach (1920).

Chapitre 3

Généralisation de la géométrie riemannienne et théorie unifiée des champs

C'est avant tout en qualité de mathématicien que Weyl lit, étudie et critique la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Son objectif est alors double : (a) proposer une *généralisation* de la géométrie riemannienne qui puisse servir de cadre mathématique pour construire une théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique ; (b) résoudre le problème de l'espace et donc *démontrer* la nature pythagoricienne de l'espace dans l'infinitésimal. Ces lectures *mathématiciennes* du *Habilitationsvortrag* doivent être rapportées aux recherches que Weyl consacre essentiellement à la relativité générale entre 1916 et 1923.

Comme nous l'avons signalé en introduction, Grossmann a joué un rôle déterminant à l'ETH de Zürich dans la réorientation des recherches de Weyl du côté de la relativité générale en 1916. En effet, Grossmann met en exergue l'article d'Einstein intitulé « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie » qui constitue très vite le texte de référence sur lequel Weyl s'appuie pour commencer ses investigations. Einstein y présente le cadre géométrique de la relativité générale — il s'agit d'une variété quadridimensionnelle pseudo-riemannienne —, ainsi que les éléments de calcul tensoriel nécessaires à la formulation des *équations d'Einstein* qui permettent de déterminer le tenseur métrique $\mathbf{g}$ en fonction du contenu en énergie-impulsion de la variété d'espace-temps. Mathématiquement, il s'agit d'équations aux dérivées partielles non linéaires qu'Einstein énonce déjà fin 1915 dans un article intitulé justement *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Hilbert parvient aux équations d'Einstein par un raisonnement différent fondé sur des techniques de calcul variationnel quasiment au même moment, comme en atteste la première conférence ayant pour titre « Die Grundlagen der Physik ». Les recherches menées par Stachel et Corry ont clairement établi que la priorité devait être attribuée

à Einstein dans la découverte de ces équations.

Les articles publiés par Hilbert entre fin 1915 et 1917 sur l'axiomatisation de la relativité générale constituent également une source importante pour Weyl. Ainsi, dans *Raum, Zeit, Materie*, Weyl déduit les équations de champ d'Einstein en se fondant sur un principe variationnel à l'image de ce que Hilbert avait pu faire fin 1915. Nous verrons en outre que Weyl utilise systématiquement les techniques hilbertiennes de calcul variationnel dans le cadre de sa théorie unifiée des champs. Une dernière référence est absolument cruciale pour situer les travaux de Weyl en relativité générale, il s'agit bien sûr de Levi-Civita qui, en 1917, parvient à définir rigoureusement la notion de transport parallèle sur une sous-variété quelconque de $\mathbb{R}^n$. [1] D'après Sigurdsson et Scholz [2], Weyl s'approprie les innovations conceptuelles de Levi-Civita dès 1917, puisqu'il les discute dans les leçons qu'il consacre aux théories relativistes au cours du semestre d'été 1917 à l'ETH de Zürich. En outre, dès la première édition de *Raum, Zeit, Materie*, Weyl définit le transport parallèle sur une variété riemannienne non plongée dans un espace euclidien de dimension plus grande. De plus, dans ses textes consacrés à la géométrie purement infinitésimale, Weyl prolonge les apports de Levi-Civita sur le transport parallèle. En particulier, il parvient à définir ce concept sur une variété différentielle munie d'une connexion affine. Contrairement à Levi-Civita, il ne se restreint plus à des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Il peut ensuite envisager des espaces plus généraux que ceux de la géométrie riemannienne :

> La découverte par Levi-Civita en 1917 du transport par parallélisme dans un espace de Riemann orienta les esprits vers une nouvelle direction. C'est en généralisant la notion de parallélisme de Levi-Civita d'une part, en poussant d'autre part à ses dernières conséquences l'idée directrice de Riemann par l'affirmation de la relativité de la longueur, que Weyl arriva à la conception d'espaces métriques plus généraux que ceux de Riemann. [3]

Weyl publie son premier article sur la « théorie de la gravitation » dans les *Annalen der Physik* en 1917. La même année, parmi ses enseignements à l'ETH de Zürich, il propose un cours consacré aux théories relativistes qui lui sert de support pour préparer sa grande monographie sur la relativité restreinte et la relativité générale, à savoir *Raum, Zeit, Materie*. Cet ouvrage, qui est destiné à un public de mathématiciens et de physiciens, contient une série de réflexions de nature épistémologique qui montrent l'attachement de Weyl aux philosophies

1. T. Levi-Civita, « Nozione di parallelismo in una varietá qualunque e conseguente specificacione geometrica della curvatura Riemanniana », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **42** 1917, p. 173-205.

2. E. Scholz, « Weyls Infinitesimalgeometrie », in *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie, a general introduction to his scientific work*, *op. cit.*, p. 63.

3. E. Cartan, « La théorie des groupes et la géométrie », (1927), *op. cit.*, p. 204.

de la conscience et en particulier à la phénoménologie de Husserl ainsi qu'à l'idéalisme de Fichte. Les deux premières éditions s'achèvent sur un exposé complet des principes, résultats et prédictions qui caractérisent la théorie de la relativité générale. Weyl n'y expose donc pas encore son projet d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme.

En effet, il formule pour la première fois sa théorie unifiée des champs dans deux articles fondamentaux publiés en 1918, à savoir « Gravitation und Elektrizität » et « Reine Infinitesimalgeometrie ». Dans le premier de ces deux articles, qui est directement adressé à Einstein, Weyl brosse à grands traits le projet d'une géométrie plus générale que la géométrie riemannienne et il insiste sur la signification physique de la théorie qu'il déduit d'une telle géométrie. Le second article vise davantage un public de mathématiciens et de physiciens mathématiciens. Weyl prend le soin de préciser longuement ce qu'il entend par *variété continue*, par *variété différentielle* — munie d'une *connexion affine* — et par *variété métrique*, avant d'exposer les grandes lignes de sa théorie unifiée des champs. Il détaille à nouveaux frais le cadre mathématique et le contenu physique de cette théorie respectivement dans les deuxième et quatrième chapitres de la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie* (1919). Corrélativement, il publie une série d'articles entre 1919 et 1921 pour justifier le bien-fondé de son projet d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme, malgré les objections d'Einstein, Pauli, Reichenbach, Eddington ou encore Hilbert.

Toujours est-il qu'il ne faut pas voir cette théorie comme l'initiative d'un personnage isolé, elle peut être étudiée à partir de processus collectifs. C'est ce que montrent avec force C. Goldstein et J. Ritter dans leur article intitulé « The Varieties of Unity : Sounding Unified Theories 1920-1930 ». Voici les résultats fondamentaux auxquels ils parviennent après examen des publications répertoriées dans les *Physikalische Berichte*[4] et dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*[5] durant l'année 1920 : (a) il n'existe pas une, mais des théories unitaires qui frappent par leur hétérogénéité[6], elles ne sont pas quantité négligeable rapportées aux publications consacrées à la relativité générale, elles ne jouent donc pas un rôle marginal, bien qu'elles ne constituent pas un domaine autonome parfaitement identifié et circonscrit, pour être plus précis, elles ne définissent pas une discipline[7] ; (b) les articles

4. (fondés en 1920)

5. (fondé en 1868)

6. J. Ritter, C. Goldstein, « The Varieties of Unity : Sounding Unified Theories 1920-1930 », in Abhay Ashtekar et al. (éds.), *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics*, Dordrecht, éd. Kluwer (2003), p. 100 : « The most striking feature of the 1920 unification theories is their heterogeneity ; a heterogeneity which concerns equally the nature of the unification, the choice of phenomena to unify, and the technical means mobilized to this end ».

7. *ibid.*, p. 138. Cela est vérifié en général pour les trois années retenues par Ritter et Goldstein afin

originaux ou les comptes-rendus qui ont pour objet ces théories ont été majoritairement rédigés par des scientifiques de langue allemande ; (c) à une exception près, ces derniers entretiennent un lien direct ou indirect avec l'université de Göttingen [8] ; (d) la théorie de Weyl occupe indéniablement une place importante dans la littérature scientifique allemande consacrée aux théories unitaires. [9]

Bien que Weyl exerce depuis 1913 à l'ETH de Zürich, il développe sa théorie unifiée des champs en étroite relation avec l'école de physique mathématique de Göttingen. Par exemple, certains passages de l'article intitulé ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫ font directement écho aux célèbres remarques de conclusion que l'on doit à Hilbert dans les ≪ Grundlagen der Physik ≫ (conférence de novembre 1915). Que faut-il entendre par *unification* dans le projet de Weyl ? Cette question mérite elle-même d'être divisée en trois problèmes : (a) quelle est la nature d'une telle unification ? (b) quels sont les phénomènes à unifier ? (c) quels sont les moyens techniques pour y parvenir ?

Cette unification est avant tout de nature mathématique : Weyl ne se réfère jamais à des données expérimentales dans les articles publiés en 1918. Il entend penser les phénomènes gravitationnels et électromagnétiques dans un même cadre théorique. Pour parvenir à cette fin, il introduit une géométrie purement infinitésimale qui est plus générale que la géométrie riemannienne. Toutes les interactions physiques connues jusque-là doivent être considérées comme une manifestation de la métrique d'univers associée à une telle géométrie. En outre, il parvient à déduire les équations de la gravitation et de l'électromagnétisme à partir de l'unique fonction d'action adaptée à sa théorie.

Il s'agit donc de fondre les interactions gravitationnelles et électromagnétiques dans un même *cadre* géométrique ; Weyl les assujettit à un même objet, à savoir une *unique* fonction d'action. Une telle *unification* est inextricablement liée à un projet de *généralisation* de la géométrie riemannienne. En outre, Weyl adosse sa théorie à une série de réflexions philosophiques sur la nature de l'espace qui, dans une certaine mesure, font écho à l'idéalisme fichtéen et, plus tardivement, à la phénoménologie de Husserl.

La réception critique de la théorie unifiée des champs présentée par Weyl dans ≪ Reine In-

d'étudier les théories unitaires : 1920, 1925, 1930.

8. *ibid.*, p. 102 : ≪ Let us then examine first the German-speaking landscape. The circle of authors, it should be pointed out, is surprisingly narrow. All have some close connection with Göttingen, with the exception of Reichenbächer — and, to some extent, of Mie and Einstein, whose works however were adopted and promoted by the Göttingen mathematicians ≫.

9. *ibid.*, p. 102 : ≪ A closer look at the articles suggests however a finer delineation. A first set of papers, to which we have already alluded, cluster around the exploration of Weyl's theory ≫.

finitesimalgeometrie », « Gravitation und Elektrizität » mais aussi dans les troisième et quatrième éditions de *Raum, Zeit, Materie* (1919-1921) s'avère très complexe : elle intéresse des physiciens théoriciens (Einstein, Pauli), des physiciens mathématiciens (Hilbert, Klein, Haas, etc.) et des philosophes (en particulier Reichenbach). Il existe de nombreux commentaires historiques et / ou épistémologiques sur la théorie unifiée des champs de Weyl. Cinq d'entre eux apportent un éclairage neuf sur les textes de Weyl que nous venons de citer : (a) Katherin Brading « Which Symmetry ? Noether, Weyl and Conservation of Electric Charge » (2002), (b) Thomas Ryckman *The Reign of Relativity*, chapitres IV à VI (2005), (c) E. Scholz « Weyls Infinitesimalgeometrie » (2000), (d) E. Scholz « Hermann Weyls analysis of the "Problem of Space" and the origins of Gauge Structures » (2004), (e) E. Scholz « Philosophy as a cultural Resource and Medium of Reflection for Hermann Weyl » (2005).

Dans un premier temps, nous ferons quelques rappels très schématiques sur la relativité générale, puisque la théorie de Weyl en constitue un prolongement. Dans un deuxième temps, nous reviendrons sur la conférence de Hilbert de 1915 qui est indéniablement une source d'inspiration pour Weyl, en particulier pour repenser le lien entre la géométrie et la physique. Dans un troisième temps, nous préciserons les principales caractéristiques de la géométrie purement infinitésimale de Weyl, en lien avec la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Nous examinerons également les conséquences physiques qu'il tire de cette géométrie. Dans un quatrième temps, nous identifierons ses sources philosophiques — essentiellement Fichte, secondairement Husserl — et nous déterminerons l'usage qu'il en fait. Dans un cinquième temps, nous reviendrons sur la réception critique des travaux de Weyl par Einstein, Reichenbach et Hilbert, i.e. par un physicien théoricien, un épistémologue et un physicien mathématicien. Enfin, dans un dernier temps, nous confronterons « Reine Infinitesimalgeometrie » et « Gravitation und Elektrizität » à l'article fondamental d'E. Noether intitulé « Invariante Variationsprobleme » (1918).

3.1 Quelques rappels sur la relativité générale

Les travaux que consacre Einstein aux fondements de la relativité générale s'étendent sur une période qui va de 1907 à 1915. Dès 1907, il propose une généralisation du principe de relativité de manière à pouvoir embrasser les effets gravitationnels dans un même cadre théorique. Rappelons que la relativité restreinte est fondée sur les deux principes suivants : (a) le principe de relativité qui affirme que tous les référentiels galiléens sont équivalents pour la formulation des lois de la nature — autrement dit, les lois de la nature sont formellement

invariantes par changement de référentiel galiléen, (b) il existe une vitesse limite qui, en vertu du principe de relativité, est la même pour tous les référentiels galiléens. La relativité restreinte ne prend donc en compte que les référentiels en mouvement de translation uniforme. Elle exclut les référentiels en rotation ou les référentiels en mouvement accéléré. Elle suppose corrélativement que les effets gravitationnels sont négligeables. Toujours est-il qu'elle permet d'assujettir les lois de la mécanique et les lois de l'électromagnétisme aux mêmes principes. De plus, l'existence d'une vitesse limite rend physiquement inconcevable l'idée d'interactions à distance. Donc, même si la relativité restreinte ne porte absolument pas sur les effets gravitationnels, puisqu'elle les suppose négligeables, elle interdit cependant de penser que ces mêmes effets pourraient se propager instantanément. Ajoutons que les prédictions de la mécanique relativiste sont confirmées pour des mobiles dont la vitesse est proche de celle de la lumière, les lois de la mécanique classique étant seulement vérifiées pour des mobiles dont la vitesse est très inférieure à celle de la lumière. Nous ne reviendrons pas ici sur les résultats contre-intuitifs qu'implique la théorie de la relativité restreinte : contraction des longueurs, dilatation des temps et relativité de la simultanéité entre deux événements. Si, mathématiquement, la relativité restreinte se formalise de manière assez élémentaire, il n'en demeure pas moins qu'elle rompt de manière radicale avec des préjugés dont la mécanique classique est encore porteuse.

En première approximation, l'expression « relativité générale » vient de ce qu'Einstein envisage dès 1907 de ne plus se « restreindre » à une classe particulière de référentiels, à savoir les référentiels galiléens. Ainsi, dans son article intitulé « Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen », il propose une *généralisation du principe de relativité* à des référentiels « quelconques » : les lois de la nature devront donc être exprimées de manière à pouvoir satisfaire à ce principe généralisé. [10] Pour autant, la « généralisation » du principe de relativité ne doit pas nous laisser croire que la *théorie* de la relativité générale ne constitue qu'une *généralisation* de la *théorie* de la relativité restreinte. Tout d'abord, le cadre mathématique nécessaire pour aboutir aux équations de champ d'Einstein est d'une rare technicité et il ne peut absolument pas être *induit* à partir de la relativité restreinte. Ensuite, la relativité générale exige de lever un certain nombre d'hypothèses qui caractérisent la variété d'espace-temps en relativité restreinte. En particulier, l'univers n'est pas supposé *homogène* en relativité générale, ce qui était encore le cas en relativité restreinte. É. Cartan

10. A. Einstein, « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie », *op. cit.*, p. 776 : « Les lois générales de la nature doivent être exprimées par des équations qui sont valables pour tous les systèmes de coordonnées, c'est-à-dire qui sont covariantes à des substitutions quelconques — généralement covariantes ».

affirme à ce propos que l'espace-temps de la relativité restreinte est un espace de type Klein : il s'agit d'une variété homogène au sens où le groupe des transformations de Poincaré agit transitivement sur elle. En revanche, l'espace-temps de la relativité générale est un espace de type Riemann : il s'agit d'une variété pseudo-riemannienne dont la mesure de courbure n'est pas constante.

> La relativité généralisée jeta dans la Physique et la Philosophie l'antagonisme qui existait entre les deux principes directeurs de la Géométrie, celui de Riemann et celui de Klein. Les espaces-temps de la mécanique classique et de la relativité restreinte sont de type Klein, celui de la Relativité généralisée est du type Riemann. [11]

À cela s'ajoute que le principe de la relativité restreinte selon lequel la vitesse de la lumière est constante, doit être corrigé en relativité générale. [12] Mais il ne faudrait bien évidemment pas en inférer que la relativité générale ≪ réfuterait ≫ la relativité restreinte. Cette assertion n'a pas de sens, dans la mesure où la relativité restreinte demeure parfaitement vérifiée *à la limite*, c'est-à-dire sur l'espace tangent $T_P M$ en un point P de la variété d'espace-temps M de la relativité générale. [13] Aussi Einstein fait-il la précision suivante :

> Avant l'édification de l'électrodynamique, les lois de l'électrostatique étaient tout simplement considérées comme les lois de l'électricité. Nous savons aujourd'hui que l'électrostatique ne représente correctement les actions électriques que dans le cas où les masses électriques sont au repos par rapport au système d'inertie. L'électrostatique a-t-elle été pour cela renversée par les équations du champ de Maxwell dans l'électrodynamique ? Point du tout. L'électrostatique est contenue dans l'électrodynamique comme cas limite ; les lois de cette dernière conduisent directement à celles de la première dans le cas où les champs sont invariables dans le temps. C'est le plus beau sort d'une théorie physique que d'ouvrir la voie à une théorie plus vaste dans laquelle elle continue à vivre comme cas limite. [14]

Si la géométrisation de la relativité générale constitue un aspect tout à fait fondamental de cette théorie, il ne faut néanmoins pas oublier que la généralisation du principe de relativité permet d'expliciter de manière cohérente le *principe d'équivalence* entre masse gravitationnelle et masse inertielle. D'ailleurs, Einstein commence par reformuler le principe d'équivalence — qui peut être considéré comme le fait physique fondamental de la relativité générale — comme suit : localement, il est impossible de différencier un référentiel uniformément accéléré et un champ de gravitation. Une fois ce fait physique clarifié, Einstein

11. E. Cartan, ≪ La théorie des groupes et la géométrie ≫, *op. cit.*, p. 204.
12. A. Einstein, ≪ Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ≫, *op. cit.*, p. 773.
13. *ibid.*, p. 777 : ≪ la relativité au sens restreint est valable pour des domaines infiniment petits en choisissant des coordonnées qui conviennent ≫.
14. A. Einstein, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* (1916), Berlin, éd. Springer, 2009, p. 50.

procède à la mathématisation de la relativité générale avec l'aide de Grossmann entre 1912 et 1915 avant de parvenir aux équations de champ qui constituent les équations fondamentales de la relativité générale. Dans *Raum, Zeit, Materie*, Weyl se focalise presque exclusivement sur des considérations d'ordre géométrique pour expliquer le passage de la relativité restreinte à la relativité générale. Cette manière de procéder est approximative d'un point de vue historique et théorique. En effet, alors même qu'il commence à généraliser le principe de relativité entre 1907 et 1909, Einstein se montre très critique à l'encontre de la géométrisation de la relativité restreinte proposée par Minkowski. Einstein reconnaît seulement après coup la pertinence des travaux de Minkowski, puisqu'ils aident à la formalisation de la relativité générale : la géométrie de Minkowksi est valable à la limite en relativité générale, i.e. sur l'espace tangent en un point de la variété d'espace-temps. De plus, en insistant sur les aspects géométriques de la relativité générale, Weyl ne prend pas pleinement la mesure du sens physique qu'admet le principe d'équivalence. Dans le fond, Weyl croit qu'une théorie physique peut régulièrement être déduite à partir d'un cadre géométrique construit *a priori*. Il procède d'ailleurs de cette manière pour aboutir à sa théorie unifiée des champs en 1918. Il se verra reprocher qu'à la différence de la relativité générale, qui repose sur le principe d'équivalence, sa théorie unifiée des champs n'est fondée sur aucun fait physique fondamental.

Cela posé, nous nous proposons de faire quelques rappels sur le cadre géométrique à l'œuvre en relativité générale et sur l'équation de champ d'Einstein — ou les équations d'Einstein si l'on raisonne en termes de composantes. Pour ce faire, nous suivrons le début du chapitre IV de *Raum, Zeit, Materie*, tout en commentant les choix effectués par Weyl pour présenter cette théorie. Contrairement à Hilbert, il n'utilise pas la méthode axiomatique pour présenter la relativité générale. Sur ce point, il est possible qu'il ait été sensible à l'argument d'Einstein qui rejette frontalement cette méthode au début du § 4 de « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ». Einstein écrit en effet :

> Dans cet article, il ne m'est pas venu à l'esprit de présenter la théorie de la relativité générale sous la forme d'un système logique le plus simple possible avec un miminum d'axiomes. Au contraire, mon but principal est de développer cette théorie, de telle sorte que le lecteur ressente la naturalité psychologique du chemin suivi et que les hypothèses fondamentales paraissent au mieux confirmées par l'expérience. [15]

Pour faire valoir la nécessité de la relativité générale, Weyl s'appuie pour sa part sur une analogie entre la géométrie euclidienne et la géométrie riemannienne d'une part, la relativité restreinte et la relativité générale d'autre part. De même que la géométrie riemannienne « in-

15. A. Einstein, « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie », *op. cit.*, p. 777.

finitésimalise » la géométrie euclidienne, de même la relativité générale « infinitésimalise » la relativité restreinte. Dans la première édition de *Raum, Zeit, Materie*, Weyl n'aborde pas le cas des variétés métriques qui généralisent la géométrie riemannienne. En revanche dans la troisième et la quatrième édition, il précise qu'il s'en tient *provisoirement* à un cadre riemannien, qui est suffisant en relativité générale, mais qu'il faut dépasser pour parvenir à une unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. Ainsi, aux géométries (pseudo)-*euclidienne*, (pseudo)-*riemannienne* et *purement infinitésimale* correspondent les trois théories physiques suivantes : relativité *restreinte*, relativité *générale*, *théorie unifiée des champs*. Voici comment il précise son propos au sujet de la relativité générale :

> Les points d'univers forment une multiplicité à quatre dimensions, qui possède une détermination métrique grâce à une forme différentielle quadratique Q, à trois dimensions négatives et à une dimension positive. En utilisant un système de coordonnées quelconque $x_i (i = 0, 1, 2, 3)$, nous avons au sens général de Riemann :
>
> $$(I) \quad Q = \sum_{ik} g_{ik} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k.$$
>
> Les lois naturelles s'expriment maintenant au moyen de relations entre tenseurs, qui doivent être invariantes pour tout changement continu des coordonnées x_i ; à côté des grandeurs d'état physique, les g_{ik} de la forme (I) entrent dans l'expression de ces lois. [16]

Autrement dit, la variété M d'espace-temps de la relativité générale est une variété pseudo-riemannienne. Cela signifie qu'en tout point P de M on munit l'espace tangent $T_P M$ d'une forme $\mathbf{g}$ bilinéaire [17], symétrique [18], non dégénérée [19] et de signature $(-,+,+,+)$ [20]. On retrouve donc la métrique de Minkowski sur l'espace tangent en un point quelconque P de M ; contrairement au produit scalaire euclidien, elle n'est pas définie positive. À la suite de Minkowski, on peut classer les vecteurs de $T_P M$ en trois genres : un vecteur $v \in T_P M$ est du genre *temps* si et seulement si $\mathbf{g}(v, v) < 0$, il est du genre *espace* si et seulement si $\mathbf{g}(v, v) > 0$, enfin il est du genre *lumière* si et seulement s'il est non nul et s'il vérifie $\mathbf{g}(v, v) = 0$. Par exemple, une courbe sur M décrivant un photon est telle que tout vecteur tangent à elle

16. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, première édition, *op. cit.*, p. 174, non modifié dans la quatrième édition, *op. cit.*, p. 192 pour la traduction en français.

17. L'application $\mathbf{g} : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, ce qui signifie qu'elle est linéaire en chacun de ses arguments : d'une part, $\mathbf{g}(u, x + y) = \mathbf{g}(u, x) + \mathbf{g}(u, y)$ et $\mathbf{g}(u, \lambda x) = \lambda \mathbf{g}(u, x)$ pour tous u, x, y de $T_P M$ et pour tout λ de $\mathbb{R}$, d'autre part $\mathbf{g}(x + y, v) = \mathbf{g}(x, v) + \mathbf{g}(y, v)$ et $\mathbf{g}(\lambda x, v) = \lambda \mathbf{g}(x, v)$ pour tous v, x, y de $T_P M$ et pour tout λ de $\mathbb{R}$.

18. Autrement dit, $\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{g}(y, x)$, pour tous x, y de $T_P M$.

19. Rappelons que le noyau d'une forme bilinéaire $b : E \times E \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des vecteurs v de E tels que $b(v, y) = 0$, pour tout $y \in E$. Dire que $\mathbf{g}$ est non dégénérée revient à affirmer que le noyau de $\mathbf{g}$ se réduit au vecteur nul.

20. il existe une base de $T_P M$ telle que $\mathbf{g}(x, y) = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$.

soit du genre lumière. Une courbe sur M décrivant une particule massive est telle que tout vecteur tangent à elle soit du genre temps. La géométrie de Minkowski est donc bien valable dans l'infinitésimal en relativité générale. Cet argument permet de comprendre pourquoi Einstein reconnaît la pertinence des travaux de Minkowski sur la géométrisation de la relativité restreinte au début de son article fondateur de 1916.

Cela posé, à la fin de la citation, Weyl précise que les lois de la nature sont maintenant des « relations entre tenseurs », c'est-à-dire entre des grandeurs qui généralisent les notions de vecteur, de forme linéaire, de forme bilinéaire, etc. Par exemple, l'équation d'Einstein, qui remplace en relativité générale l'équation de Poisson [21], relie le tenseur d'Einstein, le tenseur métrique $\mathbf{g}$ et le tenseur d'énergie-impulsion. D'une manière générale, soient T_PM l'espace tangent à M en P, T_PM^* l'espace dual de T_PM, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires sur T_PM, un tenseur k fois *contravariant* et ℓ fois *covariant* (ou de type $\binom{k}{\ell}$) au point P de M est une application

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{T} : \underbrace{T_PM^* \times ... \times T_PM^*}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{T_PM \times ... \times T_PM}_{\ell \text{ fois}} & \rightarrow & \mathbb{R} & \\ (\omega_1, ..., \omega_k, v_1, ..., v_\ell) & \mapsto & \mathbf{T}(\omega_1, ..., \omega_k, v_1, ..., v_\ell) & \end{array},$$

qui est linéaire en chacun de ses arguments. Ainsi, une forme linéaire sur T_PM est un tenseur de type $\binom{0}{1}$, une forme bilinéaire est un tenseur de type $\binom{0}{2}$, un vecteur est un tenseur de type $\binom{1}{0}$, etc. Voilà pourquoi on peut dire que le concept de tenseur généralise les concepts de vecteur, de forme linéaire, de forme bilinéaire, etc. Par suite, le tenseur métrique $\mathbf{g}$ est un tenseur deux fois covariant.

L'une des difficultés fondamentales en géométrie différentielle et en géométrie riemannienne vient de ce qu'à chaque point P d'une variété différentielle M (resp. riemannienne) est associé un espace tangent T_PM : on ne peut donc pas directement comparer des vecteurs appartenant à des espaces tangents différents. Pour parvenir à cette fin, il est nécessaire d'introduire une *dérivation covariante* ou *connexion* ∇ d'un vecteur (ou, plus généralement, d'un tenseur) qui assure une cohésion à une variété : intuitivement, elle permet de connecter des espaces tangents infiniment voisins les uns des autres. Soient M une variété différentielle TM l'ensemble des champs vectoriels sur M, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux champs vectoriels, une dérivation covariante est une application

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & TM \times TM & \rightarrow & TM \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \nabla_{\vec{u}}\vec{v} \end{array},$$

21. L'équation de Poisson s'écrit $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$, où Φ désigne le potentiel gravitationnel, G la constante de gravitation et ρ la densité de matière.

qui satisfait aux propriétés d'un opérateur de dérivation. Soient P et P' deux points infiniment voisins de M, $\overrightarrow{dP}$ le vecteur déplacement infinitésimal de P vers P', la variation d'un champ vectoriel $\vec{v}$ lorsque l'on va de P à P' est définie par $\delta\vec{v} = \nabla_{\overrightarrow{\mathrm{d}P}}\vec{v}$. Cette variation est nulle si et seulement si $\vec{v}$ est déplacé parallèlement à lui-même. Pour une variété différentielle quelconque, il existe une infinité de connexions possibles.

Dans le cas d'une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne M, on peut naturellement construire une connexion à partir de la métrique $\mathbf{g}$ de M. Pour parvenir à cette fin, on se donne une géodésique de M et l'on se propose de parvenir à une connexion ∇ vérifiant la propriété suivante : le transport parallèle donné par ∇ est tel que le champ de vecteurs tangent à cette géodésique soit transporté parallèlement à lui-même. Munissons M d'un système de coordonnées (x^α). Les coefficients qui déterminent ∇ sont les symboles de Christoffel

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right),$$

ce qui se traduit par le fait que l'action de la connexion dérivée covariante sur un vecteur X^μ est

$$\nabla_\alpha X^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\mu_{\alpha\nu}X^\nu.$$

L'une des propriétés fondamentales de ∇ — qui est appelée connexion de Levi-Civita — vient de ce que la dérivée covariante de la métrique $\mathbf{g}$ est nulle, ce qui revient à dire qu'une telle connexion est compatible avec la métrique. Il s'agit même de l'*unique* connexion sans torsion [22] compatible avec la métrique $\mathbf{g}$ de M. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Levi-Civita. Précisons que ce dernier introduit la notion de transport parallèle dans le cas d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et non pas pour une variété riemannienne quelconque et encore moins pour une variété différentielle munie d'une connexion affine. Une telle généralisation est due à Weyl dès 1918.

La connaissance de la connexion de Levi-Civita et des symboles de Christoffel permet d'introduire les composantes du tenseur de courbure ou tenseur de Riemann :

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}.$$

Pour mesurer la signification géométrique que l'on peut associer de ce tenseur, déplaçons un vecteur de T_PM par parallélisme le long d'un lacet issu de P, si ce vecteur ne coïncide pas avec lui-même lorsqu'il retourne en P, cela signifie que la variété riemannienne M a de la courbure, i.e. que le tenseur de Riemann ne s'annule pas identiquement. Inversement, une variété riemannienne est dite plate si et seulement si le tenseur de Riemann s'annule

22. C'est-à-dire avec la condition de symétrie sur les symboles de Christoffel : $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

identiquement. Cette propriété peut s'étendre aux variétés pseudo-riemanniennes, l'espace-temps de la relativité restreinte pouvant alors être qualifiée de variété plate dans ce cadre. Le tenseur de Ricci $\mathbf{R}$, qui est obtenu en contractant le premier et le troisième indice du tenseur de Riemann, est une forme bilinéaire symétrique dont les composantes sont notées $R_{\alpha\beta}$. Enfin, la courbure scalaire ou scalaire de Ricci est définie par $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$. La connaissance de la métrique, du tenseur de Ricci et du scalaire de Ricci permet d'en déduire le tenseur d'Einstein $\mathbf{G}$ qui intervient de manière essentielle dans l'équation fondamentale de la relativité générale :

$$\mathbf{G} = \mathbf{R} - \frac{1}{2}R\mathbf{g}.$$

Il s'agit également d'une forme bilinéaire symétrique qui contient donc les informations essentielles sur la *géométrie* de la variété d'espace-temps. Il reste enfin à introduire le tenseur d'énergie-impulsion $\mathbf{T}$ qui contient pour sa part les informations essentielles sur le « contenu *physique* » de la théorie de la relativité générale. Il décrit en effet le contenu en matière de l'espace-temps ou, plus exactement, l'énergie et l'impulsion associées non seulement à la matière mais également à tout autre champ autre que le champ gravitationnel. Il s'agit là d'un héritage fondamental de la relativité restreinte qui établit l'équivalence entre matière et énergie. En revanche, ce tenseur ne nous dit rien sur la structure élémentaire de la matière, i.e. sur ses composants à une échelle atomique ou subatomique. Mathématiquement, le tenseur $\mathbf{T}$ est une forme bilinéaire symétrique de divergence nulle — i.e. qui annule la dérivée covariante ∇ —, au même titre que le tenseur métrique $\mathbf{g}$ et le tenseur d'Einstein $\mathbf{G}$.

Comme nous l'avons déjà souligné à la suite de Weyl, en relativité générale les lois de la nature sont des relations entre tenseurs qui doivent satisfaire au principe de relativité générale, i.e. il est nécessaire que ces relations soient généralement covariantes sous l'action du groupe des difféomorphismes d'espace-temps. L'équation d'Einstein satisfait à cette condition : il s'agit d'une relation entre tenseurs qui est généralement covariante. Elle consiste à relier le tenseur d'Einstein au tenseur d'énergie impulsion via la formule

$$\mathbf{G} + \Lambda\mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathbf{T},$$

Λ et G représentant respectivement la constante cosmologique et la constante de Newton. Einstein parvient à cette équation en s'appuyant essentiellement sur un raisonnement par analogie à partir de l'équation de Poisson en théorie newtonienne de la gravitation :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\varrho,$$

où Φ désigne le potentiel gravitationnel et ϱ la densité de matière. D'après l'équation de Poisson, le champ de gravitation est exprimé par la distribution de la matière. En relativité

générale, la gravitation est caractérisée par le champ métrique et la densité de matière doit être remplacée par le tenseur d'énergie-impulsion comme l'affirme Einstein :

> Nous devons rechercher les équations auxquelles correspond l'équation de Poisson
>
> $$\Delta\varphi = 4\pi\kappa\varrho,$$
>
> où ϱ désigne la densité de matière. La théorie de la relativité restreinte débouche sur le résultat selon lequel la masse inertielle n'est rien d'autre que l'énergie, qui trouve son expression mathématique aboutie dans un tenseur symétrique du second ordre. Par suite, en relativité générale, nous aurons à introduire un tenseur d'énergie de la matière T_σ^α qui, à l'instar des composantes d'énergie t_σ^α du champ gravitationnel, devra être mixte, mais qui peut se ramener à un tenseur covariant symétrique [23]. [24]

Ce raisonnement par analogie permet non seulement de *construire* les équations d'Einstein, mais également de s'assurer en retour que l'équation de Poisson demeure vérifiée en première approximation. Cette loi de la nature permet de représenter et lier la structure métrique et le contenu en matière de l'univers physique. Mais elle a également une fonction prédictive tout à fait essentielle qu'Einstein met en avant dès la fin de l'année 1915 : elle rend raison de l'avance du périhélie de Mercure, phénomène qui demeurait inexpliqué dans le cadre de la théorie classique de la gravitation. [25] Weyl propose trois commentaires d'ordre épistémologique au sujet des équations d'Einstein. (a) La *géométrie* de la variété d'espace-temps — incarnée par le tenseur d'Einstein — et le *contenu physique* de cette variété — représenté par le tenseur d'énergie-impulsion — sont indissolublement liés. C'est ce qui fait dire à Weyl qu'avec la relativité générale, il est rigoureusement impossible de séparer les domaines de la physique et de la géométrie. (b) La structure métrique de l'univers est conditionnée par la répartition de la matière en son sein. Le terme ≪ matière ≫ est un peu vague. En effet, le tenseur d'énergie-impulsion ne décrit pas la structure élémentaire de la matière mais l'énergie et l'impulsion associées à la matière ou à tout champ non gravitationnel. (c) En conséquence, l'espace-temps comme forme des phénomènes n'est guère qu'une variété amorphe (au sens de l'*analysis situs*) munie d'un système de coordonnées. Étant donné que la structure métrique de l'univers dépend de son contenu en matière, elle ne peut en aucun cas être séparée de la ≪ matière des phénomènes ≫.

À la différence d'Einstein, Weyl ne construit pas l'équation relativiste de la gravitation en s'appuyant sur un raisonnement par analogie dont le point de départ serait l'équation

23. i.e. une forme bilinéaire symétrique
24. A. Einstein, *op. cit.*, p. 807.
25. Voir à ce propos A. Einstein, ≪ Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie ≫, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, **33**, 1915, p. 831-839 et ≪ die allgemeine Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ≫, *op. cit.*, § 22, p. 818 et suiv.

de Poisson. En réalité, Weyl utilise des méthodes de calcul variationnel et il reprend donc à son compte le raisonnement mené par Hilbert pour parvenir aux équations d'Einstein. On peut maintenant clarifier les emprunts de Weyl à Einstein et à Hilbert au début de la quatrième partie de *Raum, Zeit, Materie*. D'un côté, l'ordre de présentation des idées est du même ordre chez Einstein et chez Weyl : ce dernier ne cherche aucunement à axiomatiser la relativité générale, contrairement à Hilbert. De plus, Weyl s'approprie notamment les expériences de pensée qui permettent à Einstein de clarifier le sens du principe d'équivalence dans un cadre relativiste et de faire ressentir la « nécessité psychologique » de la relativité générale à ses lecteurs. De l'autre, Weyl déduit l'équation d'Einstein en se calquant sur le raisonnement de Hilbert. D'ailleurs, dans sa théorie unifiée des champs, Weyl utilise également des techniques de calcul variationnel pour déduire les équations de la gravitation et celles de l'électromagnétisme.

Weyl synthétise donc les apports d'Einstein et de Hilbert formulés dans leurs articles respectifs intitulés « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie » et « Die Grundlagen der Physik ». En outre, Weyl est parfaitement conscient que la géométrisation de la relativité générale ne peut être pleinement accomplie que si l'on s'appuie sur la notion de transport parallèle introduite par Levi-Civita en 1917. Toujours est-il qu'aux yeux d'Einstein en 1916, l'unification de la géométrie et de la physique se *limite* aux interactions gravitationnelles. Il souligne ainsi les spécificités des effets gravitationnels par rapport à d'autres effets physiques, comme le montre le passage suivant :

> D'après la théorie de la relativité générale, la gravitation tient lieu d'exception par rapport aux autres forces, en particulier les forces électromagnétiques, dans la mesure où les dix fonctions $g_{\sigma\tau}$ représentant le champ de gravitation déterminent en même temps les propriétés métriques de l'espace métrique. [26]

Il ne semble pas possible *a priori* de déduire les interactions électromagnétiques à partir de la structure métrique de l'univers, celui-ci devant être considéré mathématiquement comme une variété pseudo-riemannienne quadridimensionnelle. Mais cette restriction peut être levée si l'univers est conçue comme une variété métrique plus générale qu'une variété pseudo-riemannienne. Tel est bien l'objectif auquel parvient Weyl lorsqu'il propose sa théorie unifiée des champs. Il conçoit des variétés métriques qui contiennent les variétés riemanniennes et pseudo-riemanniennes comme cas particuliers. Il cherche ensuite à montrer que la connaissance de cette nouvelle métrique d'univers permet de déduire les deux interactions fondamentales alors connues : la gravitation et l'électromagnétisme. Nous nous proposons tout d'abord

26. A. Einstein, *op. cit.*, p. 779.

de montrer que le projet d'une telle unification est déjà largement mis en avant par Hilbert dès la fin de l'année 1915. Nous verrons cependant que la solution proposée par Weyl est spécifique.

3.2 L'héritage de Hilbert

Comme nous l'avons vu, les publications d'Einstein entre fin 1915 et début 1916 sont exclusivement centrées sur la relativité générale en tant que théorie de la gravitation. Son but principal consiste donc essentiellement à formuler les équations de champ généralement covariantes et de s'assurer que l'on retrouve bien l'équation de Poisson en première approximation. Einstein critique l'usage que Hilbert fait de la méthode axiomatique en relativité générale, ce qui permet déjà de mesurer l'écart qui sépare leurs deux textes fondateurs. Pourtant, d'autres arguments doivent être invoqués pour montrer que leurs motivations et leurs méthodes diffèrent, bien qu'ils parviennent aux mêmes équations. Tout d'abord, les deux conférences de Hilbert du 16 et du 20 novembre 1915 ont pour titre « die Grundlagen der Physik » ; *a contrario*, l'article postérieur d'Einstein qui donne une forme cohérente à ses découvertes s'intitule « die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ». Ainsi, Hilbert se donne pour but d'établir *les* fondements de la physique. L'usage du pluriel a pour fonction de renvoyer à la méthode axiomatique que Hilbert a déjà mise en œuvre en géométrie en 1899. En outre, Hilbert envisage un vaste projet d'axiomatisation de *la* physique dès 1900, comme en témoigne son sixième problème. Entre 1906 et 1912, il applique d'ailleurs la méthode axiomatique à une diversité de théories physiques, à commencer par la relativité restreinte. Par ailleurs, on peut se demander pourquoi, dans ses conférences de 1915, Hilbert parle des fondements *de la physique* et non des fondements *de la relativité générale*. En voici la raison. Il entend parvenir à une théorie *unitaire* qui englobe toutes les interactions alors connues : la gravitation d'une part, l'électromagnétisme d'autre part. La méthode axiomatique constitue l'un des moyens pour réaliser une telle unification. Elle n'est toutefois pas suffisante : il faut lui ajouter les techniques du calcul variationnel.

Einstein choisit d'intituler son article fondateur « die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie » en opposition marquée à Hilbert. Le fondement de la relativité générale n'est autre que le principe de covariance générale. De plus, l'objectif d'Einstein n'est pas ici d'unifier la physique mais d'établir la loi généralement covariante qui décrit les effets gravitationnels avant de mesurer sa force prédictive par rapport à la loi de Poisson. Ainsi se clarifient les différences en termes de méthodes et de motivations qui séparent Einstein et Hilbert. En

effet, Hilbert s'appuie sur la méthode axiomatique et il utilise systématiquement les techniques du calcul variationnel. En revanche, Einstein rejette l'usage d'axiomes pour fonder la relativité générale tout en reconnaissant que l'on peut déduire les équations de champ à partir d'un principe variationnel. En outre, pour Hilbert, la formulation d'une loi de la gravitation généralement covariante n'est qu'un moyen en vue de parvenir à une théorie unitaire de la physique. Pour Einstein en revanche, cette loi ainsi que ses conséquences physiques constituent une fin en soi, tout du moins jusqu'à la fin des années 10.

Pour être plus précis, le projet de Hilbert est d'unifier l'électromagnétisme et la théorie einsteinienne de la gravitation en poursuivant le programme initié par Mie en 1912. À l'instar de Mie, Hilbert postule que l'on peut décrire intégralement la *structure de la matière* en termes de champs. Si, par exemple, on parcourt le début de l'article de Mie intitulé ≪ Grundlagen einer Theorie der Materie ≫ (erste Mitteilung), on peut lire en effet :

> Pour progresser de manière significative, il me semble vraiment nécessaire de créer un nouveau fondement pour la théorie de la matière. (...) L'autre but que je me suis fixé est d'expliquer l'existence de l'électron indivisible et de saisir le lien nécessaire entre le phénomène de la gravitation et l'existence de la matière. Je crois qu'il faut commencer par là, car les effets électriques et gravitationnels sont certainement les expressions les plus immédiates des forces sur lesquelles la matière est fondée. Ce serait un non-sens que d'envisager la matière sans gravitation ou telle que les plus petites particules qui la composent seraient dépourvues de charge électrique (...).
>
> La principale hypothèse de ma théorie est que *les champs magnétiques et électriques agissent à l'intérieur des électrons*. D'après cette conception, les électron et, par suite, les plus petits constituants de la matière, ne diffèrent pas essentiellement de l'éther, contrairement à ce que l'on pensait depuis vingt ans, ils ne sont pas des corps étrangers à l'éther, *au contraire* ils ne sont que des endroits où l'éther admet un état très particulier que nous désignons par l'expression ≪ charge électrique ≫. [27]

Pour Mie, un électron ne diffère pas de l'éther considéré comme le support des interactions électromagnétiques. Autrement dit, la structure de la matière peut être entièrement expliquée à partir d'une théorie des champs. Pour parvenir à cette fin, il projette de réformer les lois de Maxwell et d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme, puisqu'il s'agit des seules interactions (connues) auxquelles la matière est soumise. Hilbert est convaincu que la conception de la matière développée par Mie est pertinente. Il est nécessaire de l'adapter au contexte de la théorie einsteinienne de la gravitation. Ajoutons par anticipation que la théorie unifiée des champs de Weyl se situe également dans le prolongement du programme de Mie-Hilbert selon lequel la structure élémentaire de la matière peut être entièrement traduite en termes de champs. Weyl renonce à cette dernière hypothèse en 1921 en raison des avancées que connaît

27. G. Mie, ≪ Grundlagen einer Theorie der Materie ≫, *Annalen der Physik*, **37**, 1912, p. 511-512.

la théorie des quanta, comme en attestent sa correspondance avec Klein, ainsi que certaines remarques qui figurent dans la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie*.

Nous pouvons maintenant résumer la démarche suivie par Hilbert dans ses « Grundlagen der Physik » (1915). Il précise tout d'abord que le devenir physique en un point de la variété d'espace-temps est entièrement caractérisé par les 10 potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$ d'Einstein et les quatre potentiels électromagnétriques q_s. Ceci posé, il utilise un système d'axiomes pour s'assurer que le devenir physique n'a rien d'arbitraire. Il énonce son premier axiome de la manière suivante :

> Axiome I (Axiome de Mie pour la fonction d'univers) : la loi du devenir physique est déterminée par une fonction d'univers H, qui contient les arguments suivant
>
> $$g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu\ell} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w_\ell}, \quad g_{\mu\nu\ell k} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial w_\ell \partial w_k},$$
>
> $$q_s, \quad q_{s\ell} = \frac{\partial q_s}{\partial w_\ell}, \qquad (\ell, k = 1, 2, 3, 4)$$
>
> et l'intégrale de la variation
>
> $$\int H\sqrt{g}\mathrm{d}\omega$$
>
> $$(g = |g_{\mu\nu}|, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}w_1, \mathrm{d}w_2, \mathrm{d}w_3, \mathrm{d}w_4)$$
>
> doit s'annuler pour chacun des 14 potentiels $g_{\mu\nu}, q_s$.[28]

Autrement dit, tous les phénomènes physiques, qu'ils soient gravitationnels et électromagnétiques, doivent être assujettis à une unique fonction hamiltonienne H construite de telle sorte que l'on puisse en déduire les lois de la gravitation et les lois de l'électromagnétisme. Ce premier axiome montre que Hilbert entend expliquer le « devenir physique » dans sa globalité : il souhaite bel et bien développer une théorie qui unifie la gravitation et l'électromagnétisme. Concrètement il parvient effectivement aux lois relativistes de la gravitation et aux lois de l'électromagnétisme sous une forme généralisée que l'on doit à Mie. Le second axiome correspond au principe de relativité, entendu comme *principe général d'invariance* : la fonction H doit demeurer invariante par changement arbitraire de coordonnées d'espace-temps, c'est-à-dire sous l'action du groupe des difféomorphismes d'espace-temps.

Avant d'expliciter les lois fondamentales de la gravitation et de l'électromagnétisme, Hilbert soutient l'argument suivant qui, rétrospectivement, a de quoi surprendre. Il estime que les lois de l'électromagnétisme peuvent être déduites des lois de la gravitation. Il traduit immédiatement ce rapport logique de principe à conséquence en termes physique. Il estime que les phénomènes électromagnétiques constituent des *effets* [Wirkungen] de la gravitation. Il entend se situer dans le prolongement de Riemann qui serait le premier à avoir recherché

28. D. Hilbert « Die Grundlagen der Physik », *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Mathematisch-physikalische Klasse, (1916), p. 396.

le lien entre la lumière et la gravitation. D'un côté, Hilbert s'approprie et il prolonge le programme de Mie. De l'autre il s'appuie sur la figure tutélaire de Riemann pour légitimer ses investigations.

Nous laissons de côté les calculs fastidieux qui permettent à Hilbert de parvenir aux équations fondamentales de la gravitation et de l'électromagnétisme. Nous pouvons néanmoins remarquer que, pour unifier la gravitation et l'électromagnétisme, Hilbert n'estime pas nécessaire de modifier le cadre géométrique utilisée par Einstein en relativité générale. Pour le dire autrement, Hilbert raisonne sur des variétés pseudo-riemanniennes. L'objectif de Weyl consiste justement à montrer que l'on ne peut aboutir à pareille unification qu'en s'appuyant sur une classe plus générale de variétés. À la fin de sa conférence, Hilbert précise cependant le lien qu'il entend établir entre la géométrie et la physique :

> Comme nous le voyons, les hypothèses formulées dans les axiomes I et II suffisent pour construire la théorie : Comme l'a expliqué Einstein, cette théorie modifie en profondeur nos représentations de l'espace, du temps et du mouvement ; mais de plus, je suis convaincu que, grâce aux équations fondamentales formulées ici, nous parviendrons à mettre en lumière les états internes de l'atome qui étaient demeurés cachés jusque-là ; plus précisément, il doit être en général possible de ramener les constantes physiques à des constantes mathématiques — de manière équivalente il est possible de transformer par principe la physique en une science de type géométrique — ceci, conformément à la grande fortune de la méthode axiomatique à laquelle sont adossés, comme nous le voyons, les puissants instruments de l'analyse que sont le calcul des variations et la théorie des invariants. [29]

Lorsque l'on parcourt le début de ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫ de Weyl, on observe que tous deux partagent une même conception du rapport entre géométrie et physique. En outre, Hilbert entend fonder la physique — et non pas seulement la théorie de la gravitation — sur la géométrie ; le projet d'une conception unitaire des phénomènes physiques est déjà présente dans la conférence de Hilbert (novembre 1915), mais il n'est pas adossé à la ≪ bonne ≫ géométrie. Il est donc inexact de supposer que Weyl développe sa théorie unifiée des champs isolément à l'ETH de Zürich. En réalité, les liens qu'il entretient avec l'université de Göttingen demeurent effectifs et ils ont une incidence *directe* sur la méthode et le mode d'exposition adoptés dans ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫ et ≪ Gravitation und Elektrizität ≫. [30] En particulier, on ne peut pas nier qu'il prolonge le programme de Mie-Hilbert.

Un examen rapide de la thèse de Hilbert pourrait nous laisser croire qu'il se contredit lorsqu'il applique indifféremment la méthode axiomatique à la géométrie et à la physique.

29. *ibid.*, p. 407.

30. Voir à ce propos E. Scholz, ≪ Weyls Infinitesimalgeometrie ≫, *op. cit.*, p. 70 : ≪ Weyl blieb auch in Zürich gewissermassen ein externer Vertreter der Göttinger Mathematik und mathematische Physik ≫.

D'un côté, la géométrie, telle qu'elle est définie dans les *Grundlagen der Geometrie* fait intervenir des concepts indifférents à la nature des objets auxquels ils renvoient ; de l'autre, l'axiomatisation de la physique doit nous permettre de la réduire à une « science de type géométrique ». Or une connaissance physique ne peut avoir de sens que si l'on spécifie la nature des objets empiriques qui lui correspondent, sans quoi elle est vide.

Pour lever cette contradiction apparente, il convient de répondre aux deux questions suivantes : (1) l'axiomatisation de la physique est-elle réellement du même ordre que l'axiomatisation de la géométrie euclidienne telle qu'elle intervient dans les *Grundlagen der Geometrie* ? (2) Hilbert entend-il exactement la même chose par « géométrie » en 1899 et en 1915 ?

Résolvons le premier problème. En 1899, Hilbert a pour but de classer de manière exhaustive les axiomes de la géométrie euclidienne ; il cherche également à savoir s'ils sont indépendants les uns des autres grâce à la construction de modèles ; enfin il tente de s'assurer que l'axiomatique obtenue n'entraîne pas de contradictions. En revanche, l'axiomatisation de la physique consiste à identifier les quelques présupposés fondamentaux à partir desquels on peut engendrer une théorie, par exemple la relativité restreinte ou la relativité générale. Il s'agit donc d'organiser ces cadres théoriques de manière simple et cohérente, sur la base « d'axiomes » en nombre réduit. Hilbert ne s'interroge pas sur la structure logique des axiomatiques qui servent de support aux théories physiques qu'il investit. Il ne fait donc pas le même usage de la méthode axiomatique suivant qu'il se confronte aux fondements de la géométrie ou aux fondements de la physique.

Venons-en au second problème. Supposons que, dans son article de 1915, Hilbert entende par géométrie un ensemble de relations entre concepts indépendamment de la nature des objets auxquels ils renvoient — nous pensons notamment à la relation d'incidence. Alors on ne voit pas du tout comment il pourrait prétendre à une réduction de la physique à un type particulier de géométrie. Pour le dire autrement, dans ses articles consacrés à une théorie physique unitaire, Hilbert ne considère pas la géométrie comme un pur système logique, mais bien comme une science dont l'objet est l'espace-temps physique. Ce faisant, bien qu'elle demeure au moins en partie *a priori*, elle ne relève pas de la mathématique pure, mais bien de la mathématique appliquée. Bref, elle préside à la détermination de la structure métrique effective de l'univers.

C'est seulement en ce sens que l'on peut comprendre pourquoi Hilbert et Weyl sont amenés à identifier la physique et la géométrie. La réduction des connaissances physiques à des connaissances géométriques telle qu'elle est voulue par Hilbert vient de ce que la gravitation relativiste est caractérisée par un champ métrique. L'argument de Hilbert et de Weyl selon

lequel la physique et la géométrie sont quasiment identifiables doit d'abord être interprété comme suit : « l'espace-temps » n'est pas une pure forme indépendante de la matière des phénomènes, par suite, la géométrie — en tant que science de l'espace-temps — et la physique sont intimement corrélées. Leur thèse n'est alors pas contestable : elle s'appuie sur l'un des traits fondamentaux de la théorie de la relativité générale.

Pourtant, à la fin de son article de 1915, Hilbert fait deux extrapolations : (i) il affirme sans ambiguïté que l'on pourrait connaître la structure dernière de la matière à l'échelle atomique en se fondant exclusivement sur le concept de champ. Il s'agit là d'un parti-pris réductionniste qui se retrouvera dans les travaux de Weyl de 1918 ; (ii) il prétend ramener les constantes physiques à des constantes mathématiques. Une chose est de souligner l'interpénétration de la géométrie et de la physique en relativité générale, une autre de dire que la physique n'est *qu'une* géométrie appliquée. Or, cette dernière hypothèse apparaît aussi bien à la fin de la conférence de Hilbert que dans le § 1 de « Reine Infinitesimalgeometrie » intitulé justement : « Introduction : le rapport entre physique et géométrie ». En effet, à l'instar de Hilbert qui, dans les dernières lignes des « Grundlagen der Physik », identifie constantes physiques et constantes mathématiques, Weyl soutient l'idée selon laquelle « les concepts physiques ne sont rien d'autre que ceux de la géométrie ». Il ajoute cependant :

> La seule différence qui subsiste entre la géométrie et la physique vient de ce que la géométrie pénètre l'essence des concepts métriques, alors que la physique a pour tâche de trouver la loi, en vertu de laquelle on distingue le monde réel, parmi tous les univers quadridimensionnels que la géométrie permet de construire, et de tirer les conséquences de cette loi. [31]

Ainsi, parmi tous les univers possibles — c'est-à-dire mathématiquement concevables — de la géométrie, la physique s'occupe exclusivement de l'univers actuel. Weyl parle alors du réel effectif [das Wirkliche]. Il n'identifie pas purement et simplement géométrie et physique. En revanche, il subordonne clairement les connaissances physiques aux connaissances géométriques. Weyl est donc persuadé qu'il suffit de généraliser la géométrie riemannienne pour parvenir à une théorie qui englobe les phénomènes gravitationnels et électromagnétiques. De même, il croit qu'il suffit de modifier substantiellement le cadre géométrique de la relativité restreinte pour parvenir à la relativité générale. Au début du § 35 de *Raum, Zeit, Materie*, il affirme que « l'extension de la relativité restreinte à la relativité générale (...) concerne d'abord les fondements géométriques de la physique ». [32] Comme la relativité générale semble faire ses preuves sur un plan empirique, il en irait de même pour la théorie unifiée des champs de

31. Weyl, « Reine Infinitesimalgeometrie », *op. cit.*, p. 385.
32. H. Weyl, *Temps, espace, matière*, *op. cit.*, p. 248.

Weyl, qui est fondée sur une géométrie purement infinitésimale, i.e. une généralisation de la géométrie riemannienne.

Weyl se fonde donc sur une certaine interprétation du passage de la relativité restreinte à la relativité générale pour en inférer que sa théorie aura une effectivité en physique. Dans le fond, il adhère au credo de Minkowski — qui est devenu emblématique au sein de l'école de physique mathématique de Göttingen — selon lequel il existe une harmonie préétablie entre physique et géométrie. Pourtant, il ne faut pas oublier que la relativité restreinte est une unification des domaines de la mécanique et de l'électromagnétisme, abstraction faite des effets gravitationnels. Une telle unification repose sur une refonte des principes de la physique ; la géométrisation de la relativité restreinte vient, pour ainsi dire, après coup. De même, la relativité générale repose sur un fait physique fondamental : le principe d'équivalence. Einstein ne l'a pas régulièrement déduite à partir d'un cadre géométrique posé *a priori*. Weyl surdétermine donc la place de la géométrie en relativité restreinte et en relativité générale pour mieux justifier la démarche qui lui permet d'aboutir à sa théorie unifiée des champs.

Nous pouvons maintenant synthétiser ce que Weyl rejette et ce qu'il reprend à son compte dans les ≪ Grundlagen der Physik ≫ de Hilbert. Tout d'abord, il n'estime pas que la méthode axiomatique puisse s'étendre aux théories physiques. Dans *Raum, Zeit, Materie*, il l'utilise donc exclusivement pour définir implicitement des concepts *mathématiques*.[33] En revanche, il n'assujettit ni la relativité générale, ni sa théorie des champs à des systèmes d'axiomes. Sur ce point, Weyl s'accorde avec Einstein contre Hilbert. Ensuite, Weyl estime que Hilbert n'est pas parvenu à la bonne fonction hamiltonienne pour déduire *à la fois* les équations de la gravitation et les équations de l'électromagnétisme. Malgré ces réserves, entre 1918 et 1921 Weyl reprend complètement à son compte la conception de la matière défendue par Mie et Hilbert. De plus, il est convaincu que les méthodes variationnelles utilisées par Hilbert constituent le bon instrument pour déduire les relations généralement covariantes qui permettent de décrire les interactions gravitationnelles et électromagnétiques. Enfin, sa théorie unifiée des champs ne fait que confirmer le *credo* de Hilbert selon lequel la physique et la géométrie seraient une seule et même chose.

33. Voir également H. Weyl, ≪ David Hilbert and his mathematical work ≫, *op. cit.*, p. 653 : ≪ The maze of experimental facts which the physicist has to take into account is too manifold, their expansion too fast, and their aspect and relative weight too changeable for the axiomatic method to find a firm enough foothold, except in the thoroughly consolidated parts of our physical knowledge ≫.

3.3 La géométrie purement infinitésimale de Weyl et *sa* théorie unifiée des champs

Nous avons insisté dans le paragraphe précédent sur le fait que Weyl conserve des liens étroits avec l'école de physique mathématique de Göttingen à partir de 1916. Il connaît assez tôt les travaux de Hilbert visant à unifier la gravitation et l'électromagnétisme. De plus, il présente la théorie de Mie — exclusivement dans le cadre de la relativité restreinte — dès la première édition de *Raum, Zeit, Materie*, donc avant de publier ses propres contributions à une théorie unifiée des champs. [34] Néanmoins, dans cette même édition il accueille avec une certaine distance le projet d'une théorie unitaire qui pourrait être prolongée à la relativité générale. [35] Ainsi, avant de construire sa géométrie purement infinitésimale, Weyl fait preuve d'un intérêt mêlé d'une certaine distance à l'égard des initiatives téméraires prises par Hilbert dans ses ≪ Grundlagen der Physik ≫.

Plusieurs témoignages de Weyl lui-même laissent penser qu'il commence par résoudre un problème de mathématique pure qui consiste à construire une classe de variétés métriques généralisant les variétés riemanniennes. Il réalise *après coup* que ce nouveau cadre géométrique est pertinent pour élaborer une théorie unifiée des champs. [36] Si nous admettons ce point, nous nous inscrivons cependant en faux contre l'hypothèse selon laquelle Weyl serait parvenu *par hasard* à une telle unification. En effet, il connaît le programme de Mie-Hilbert *avant* d'élaborer sa géométrie purement infinitésimale, il est donc *préparé* à interpréter ce cadre géométrique dans le prolongement de Mie et Hilbert. En outre, nous ne connaissons pas de textes de Weyl dans lesquels il décrirait ses avancées en géométrie différentielle indépendamment de toute interprétation physique.

Comme nous l'avons signalé, les articles inauguraux de Weyl en théorie unifiée des champs sont : ≪ Gravitation und Elektrizität ≫ et ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫. Ces deux textes sont publiés en 1918, mais ils s'adressent à des publics différents : le premier article vise des physiciens théoriciens, parmi lesquels Einstein, le second article s'adresse davantage à des mathématiciens et des physiciens mathématiciens. Pour résumer ce que Weyl entend par géométrie purement infinitésimale, nous allons nous appuyer sur le second article qui est donc plus détaillé sur le plan du formalisme mathématique. À la fin du § 1 de ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, Weyl présente l'organisation d'ensemble de ses réflexions. Chaque

34. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, erste Auflage, *op. cit.*, § 25 : ≪ , Die Miesche Theorie ≫, p. 165 et suiv.
35. *ibid.*, p. 170.
36. Voir à ce propos H. Weyl, ≪ Gravitation und Elektrizität ≫, *op. cit.*, p. 465, ou encore sa lettre à Einstein datant du 10 décembre 1918.

étape de son raisonnement géométrique est associée à une interprétation physique déterminée. Cette manière de procéder montre à quel point il adhère à l'idée d'une harmonie préétablie entre géométrie et physique :

> Dans cet article, je souhaiterais développer une géométrie purement infinitésimale, qui contient l'univers physique [die physikalische Welt] comme cas particulier. La construction d'une géométrie des actions de contact [Nahegeometrie] s'effectue adéquatement en trois étapes. Dans la premier temps, on a le continuum dépourvu de toute détermination métrique au sens de l'*Analysis Situs* — physiquement parlant l'univers vide ; dans un second temps le continuum muni d'une connexion affine — j'entends par là une variété dans laquelle le concept de transport parallèle infinitésimal de vecteurs a un sens — en physique, la connexion affine se manifeste par le champ gravitationnel ; dans un dernier temps, le continuum métrique — physiquement parlant l'éther dont les états correspondent aux phénomènes liés à la matière et à l'électricité. [37]

Weyl élabore donc un dictionnaire ou une correspondance stricte entre concepts géométriques et concepts physiques. La hiérarchie qu'il établit entre continuum amorphe, variété à connexion affine et variété métrique n'est pas conditionnée par une pensée ou une démarche de type structural ; elle dépend du sens physique que l'on peut prêter à ces notions géométriques.

Nous ne reviendrons pas sur la notion de continuum amorphe au sens de l'*analysis situs* que Weyl aborde au cours du § 2 de son article. Signalons seulement qu'il ne reprend pas la définition axiomatisée des variétés topologiques à laquelle il était parvenu dans la première partie de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Cela vient du fait qu'il estime la théorie des ensembles incapable de rendre raison de la notion de continu. Attardons-nous davantage sur le concept de variété différentielle à connexion affine. L'une des motivations de Weyl est de définir le transport parallèle sur cette classe très générale de variétés.

Explicitons cet argument : en 1917, Levi-Civita définit le transport parallèle sur des sous-variétés contenues dans un espace euclidien ambiant. Intuitivement, le transport parallèle le long d'une courbe tracée sur une sous-variété d'un espace euclidien munie de la métrique induite équivaut au roulement d'un vecteur tangent sans glissement ni retournement le long de cette courbe. La connexion de Levi-Civita est déduite à partir de la métrique $\mathbf{g}$ sur cette variété. En 1918, Weyl ne procède pas de la sorte. Il raisonne sur une variété différentielle M de dimension n en elle-même. Il formalise l'idée de transport parallèle en définissant la notion de connexion affine. Pour le dire autrement, la notion de transport parallèle n'est plus assujettie à une métrique — riemannienne — et elle peut ainsi servir de pierre de touche pour fonder tout un pan de la géométrie différentielle.

Voici comment Weyl définit la notion de connexion affine au début du § 3 de son article

37. H. Weyl, ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, *op. cit.*, p. 386.

— étant précisé qu'intuitivement, la connexion affine décrit comment un vecteur peut être déplacé le long d'une courbe tracée sur une variété en demeurant parallèle à lui-même :

> Soit P' un point infiniment voisin d'un point P fixé, P' est en connexion affine avec P si l'on sait dans quel vecteur en P' un vecteur en P s'est transformé quand on l'a déplacé parallèlement à lui-même de P au point infiniment voisin P'. En outre, le transport parallèle de l'ensemble des vecteurs en P dans P' doit bien entendu satisfaire aux conditions [Forderungen] suivantes :
>
> A. La propagation de l'ensemble des vecteurs en P par parallélisme jusqu'au point infiniment voisin P' nous donne une application affine de l'ensemble des vecteurs en P aux vecteurs en P' (...)
>
> B. [axiome de commutativité] soient P_1 et P_2 deux points infiniment voisins de P, si le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{PP_1}$ arrive en $\overrightarrow{P_2P_{21}}$ par transport parallèle de P à P_2 et en $\overrightarrow{P_1P_{12}}$ par transport parallèle vers P_1, alors P_{12} et P_{21} coïncident (on obtient un parallélogramme infinitésimal). [38]

Weyl se fonde sur la méthode axiomatique pour parvenir à une définition intrinsèque de la notion de transport parallèle. Si, d'un côté, il s'accorde avec Einstein pour reconnaître le caractère simplificateur d'une pensée par axiomes lorsqu'elle est appliquée à la physique, de l'autre il admet avec Hilbert la pertinence des procédures axiomatiques pour définir et formaliser des concepts mathématiques. Preuve qu'il n'est pas possible de proposer une vision monolithique du rapport que Weyl entretient avec l'héritage hilbertien à la fin des années 10 et au début des années 20. En particulier, la polémique très vive qui oppose Weyl à Hilbert en 1921 sur les fondements des mathématiques ne constitue pas une donnée suffisante pour situer les travaux de Weyl par rapport à ceux de Hilbert en mathématiques et en physique mathématique.

Attardons-nous davantage sur le § 4 de « Reine Infinitesimalgeometrie », intitulé « variété métrique (l'éther) ». Dans ce paragraphe, Weyl commence par montrer que la géométrie riemannienne n'est pas une géométrie *purement* infinitésimale : elle conserve un résidu de « géométrie à distance » qu'il entend mettre de côté. Précisons la nature de ce « résidu ». Une variété riemannienne M est une variété lisse munie d'une métrique déterminée localement par une forme différentielle quadratique (définie positive) :

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

En géométrie riemannienne, il existe une notion de déplacement parallèle intrinsèque correspondant à la connexion dite de Levi-Civita. Si l'on déplace par parallélisme — intuitivement sans glissement ni retournement — un vecteur $v_p \in T_p(M)$ le long d'un lacet d'origine p, alors sa *longueur* n'est pas modifiée lorsqu'il revient en p. En revanche, son *orientation* l'est.

38. *ibid.*, p. 389-390.

De même, soient p et p' deux points quelconques de M, le transport parallèle des longueurs est indépendant du chemin reliant p à p' que l'on a choisi ; il est possible de comparer directement la longueur entre deux vecteurs même lorsqu'ils sont localisés en des points distincts. Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1 de la présente partie, Riemann estime que cette hypothèse est un préalable nécessaire avant de décrire les éventuelles propriétés que comporte l'espace physique.

Pour Weyl, il s'agit là du résidu de géométrie à distance qu'il convient de rejeter si l'on veut construire une géométrie purement infinitésimale ou géométrie des actions de contact [Nahegeometrie]. Celle-ci est d'autant plus justifiée qu'elle constitue l'équivalent de la physique des actions de contact héritée de Faraday. Pour Weyl, les ≪ lois d'action de contact [Nahewirkungsgesetze] doivent être considérées comme la vraie expression des dépendances entre les actions qui s'exercent dans la nature ≫ [39]. Par analogie, une géométrie purement infinitésimale doit avoir la plus grande effectivité possible en physique puisqu'elle met définitivement fin à toute forme d'action à distance.

Pour parvenir à une telle géométrie, Weyl considère une structure conforme sur une variété lisse M, c'est-à-dire une classe d'équivalence conforme $[g]$ de métriques riemanniennes ou lorentziennes : deux métriques (g_{ij}) et (g'_{ij}) sont équivalentes s'il existe une fonction à valeurs strictement positives λ appelée fonction d'échelle — ou de jauge — telle que

$$g'_{ij}(x) = \lambda(x) g_{ij}(x),$$

pour tout point x dans M. Weyl rappelle à ce propos que la ≪ géométrie conforme ≫ s'est développée dans le domaine des variétés bidimensionnelles (surfaces de Riemann) en raison de son importance [Wichtigkeit] en théorie des fonctions d'une variable complexe. Il renvoie le lecteur à son ouvrage fondamental sur les surfaces de Riemann (1913).

Pour l'instant, les points de M sont ≪ isolés les uns des autres ≫ d'un point de vue métrique. Pour pallier ce manque, il convient donc de munir M d'une *connexion métrique*. Intuitivement cela signifie qu'il doit être possible de transporter une unité de longueur ou jauge d'un point $p \in M$ à tout point qui est infiniment voisin de p. De même qu'une connexion affine permet de comparer les orientations de deux vecteurs attachés à des points infiniment voisins l'un de l'autre, de même une connexion métrique permet de comparer les longueurs de deux tels vecteurs.

Explicitons ce point de manière intuitive. Donnons-nous un vecteur $v_p \in T_p(M)$ de longueur ℓ ; lorsque l'on déplace p vers un point p' infiniment voisin, la longueur $\ell + \mathrm{d}\ell$ du vecteur

39. H. Weyl, *Temps, espace, matière*, *op. cit.*, p. 55.

déplacé doit être de la forme

$$\ell + \mathrm{d}\ell = (1 + \varphi)\ell,$$

où φ est une forme différentielle linéaire. En effet, le changement de longueur est décrit par une similitude infinitésimale puisque la classe conforme de la métrique est fixée. On obtient ainsi l'identité : $\mathrm{d}\ell = \varphi \cdot \ell$. Opérons maintenant un changement d'échelle ou de jauge : la métrique initiale est multipliée par une fonction λ à valeurs strictement positives. Comme précédemment, la variation de la nouvelle longueur ℓ' du vecteur v_p est de la forme : $\mathrm{d}\ell' = \varphi' \cdot \ell'$, où φ' est une forme différentielle linéaire.

Un calcul élémentaire montre que les formes différentielles φ' et φ satisfont à la relation :

$$\varphi' = \varphi - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

Ainsi, selon Weyl ≪ *une métrique sur une variété consiste en une forme différentielle quadratique et une forme différentielle linéaire*

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \qquad et \qquad \varphi = \varphi_i \mathrm{d}x^i \gg^{40}$$

modulo la relation d'équivalence :

$$\mathrm{d}s'^2 = \lambda \cdot \mathrm{d}s^2, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.^{41}$$

Une variété métrique au sens de Weyl est une variété lisse définie par la donnée d'une classe conforme $[g]$ de métriques riemanniennes (resp. pseudo-riemanniennes) et d'une classe $[\varphi]$ de formes différentielles assujetties aux relations que nous venons d'introduire. Weyl formalise ainsi rigoureusement les réquisits d'une géométrie purement infinitésimale.

Weyl établit ensuite le résultat suivant, qui constitue rien moins qu'une généralisation du théorème de Levi-Civita selon lequel la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion compatible avec la métrique $\mathbf{g}$ d'une variété riemannienne : soit M une variété lisse munie d'une métrique $([g], [\varphi])$, il existe une et une seule connexion affine compatible avec la métrique $([g], [\varphi])$. Ainsi, les apports de Weyl en géométrie différentielle et métrique sont de trois ordres : (1) il conçoit la notion de transport parallèle de manière purement intrinsèque, (2) il définit une classe très générale de variétés métriques, (3) une telle généralisation n'est pas

40. H. Weyl, ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, *op. cit.*, p. 398.

41. En termes modernes, une structure métrique au sens de Weyl sur une variété différentielle M est la donnée d'une classe conforme de métriques sur M — que l'on peut représenter par un fibré principal P de groupe $\mathbb{R}^\times$ — et d'une *connexion* sur P. Comme dans la définition de Weyl, une telle connexion est décrite par une forme différentielle si l'on spécifie une métrique dans la classe conforme.

gratuite d'un point de vue mathématique et philosophique, puisqu'elle permet de supprimer le résidu de géométrie à distance que contenait encore la *Leçon d'habilitation* de Riemann.

Enfin, Weyl introduit un tenseur $F = \mathrm{d}\varphi$ (metrischer Wirbel, litt. tourbillon métrique) qui s'annule si et seulement si M est une variété riemannienne, munie de sa connexion de Levi-Civita. [42] Les variétés riemanniennes constituent donc une classe particulière parmi les variétés « weyliennes ». Le tenseur F est un invariant de jauge, et donc un invariant métrique au sens de Weyl.

On peut se demander comment les recherches menées ici par Weyl peuvent avoir une signification physique. Pour l'instant, nous avons une classe de variétés métriques qui généralise les variétés riemanniennes et une analogie entre la géométrie *purement* infinitésimale et la physique des actions de contact. Pourtant, Weyl écrit :

> Dans le langage de la physique, on peut considérer une variété métrique comme un monde rempli d'éther. La métrique déterminée qui gouverne la variété en question renvoie à un état déterminé de l'éther contenu dans l'univers. La donnée des fonctions g_{ij}, φ_i nous permet de décrire cet état par rapport à un certain système de référence. [43]

La notion d'éther ne renvoie pas ici à un référentiel privilégié. Weyl utilise ce concept pour montrer qu'une variété munie d'une structure métrique n'est pas une forme indépendante de la matière des phénomènes. Autrement dit, il insiste sur le fait suivant : la géométrie purement infinitésimale qu'il a élaborée a un sens physique qui est entièrement contenu dans le type de métrique qu'il a nouvellement introduit.

En outre, le terme éther n'est pas sans évoquer la théorie de l'électromagnétisme. L'argument suivant confirme cette hypothèse d'interprétation. En effet, Weyl identifie purement et simplement le tenseur $F = \mathrm{d}\varphi$ au tenseur de champ électromagnétique, également appelé tenseur de Faraday. Cette assertion est d'une importance capitale pour deux raisons : (1) Weyl construit bel et bien une théorie unifiée des champs, susceptible de rendre raison des interactions gravitationnelles et électromagnétiques ; (2) il explique mathématiquement pourquoi la théorie d'Einstein a exclusivement pour objet le champ gravitationnel. En effet, sur un plan géométrique, Einstein se fonde sur des variétés pseudo-riemanniennes. Dans

42. De même que l'annulation du tenseur de courbure caractérise les variétés plates en géométrie riemannienne, de même l'annulation du tenseur F caractérise les variétés riemanniennes en géométrie purement infinitésimale au sens de Weyl.

43. H. Weyl, *ibid.*, p. 398 : « Eine metrische Mannigfaltigkeit bezeichnen wir in physikalischer Ausdrucksweise als eine vom Äther erfüllte Welt. Die bestimmte, in der Mannigfaltigkeit herrschende Metrik zeigt einen bestimmten Zustand des die Welt erfüllenden Äthers an. Dieser Zustand ist also relativ zu einem Bezugssystem durch Angabe (...) der Funktionen g_{ik}, φ_i zu beschreiben ».

ce cas, le tenseur F s'annule. Or, physiquement parlant, celui-ci s'identifie au tenseur de Faraday. Voilà pourquoi la géométrie d'univers proposée par Einstein ne peut pas englober les phénomènes électromagnétiques. Maintenant, si l'on raisonne sur une variété au sens de Weyl, on peut rendre raison de la gravitation et de l'électromagnétisme à partir de la métrique définie sur une telle variété. Weyl lève une restriction qu'Einstein formule en toute lettre dans « die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ». En effet, Einstein estime alors que le champ gravitationnel admet un statut particulier par rapport aux autres types d'interactions puisque les 10 fonctions qui le représentent déterminent en même temps les propriétés métriques de l'univers. Pour Weyl, les interactions électromagnétiques constituent également une émanation de la métrique de l'univers, à condition d'envisager ce dernier non pas comme une variété pseudo-riemannienne mais comme une variété « weylienne ».

À partir des pages 408 et suivantes de son article, Weyl introduit l'action $\mathfrak{W}$ — littéralement, la fonction d'action (Wirkungsfunktion) — adaptée à sa théorie unifiée des champs. Celle-ci est censée décrire « l'état de l'éther ». L'intégrale d'action est tout simplement notée $\int \mathfrak{W} \mathrm{d}x$. Il impose à cette intégrale d'être invariante par changement de jauge. Autrement dit, elle doit rester inaltérée lorsque l'on remplace les g_{ik} par λg_{ik} et les φ_i par $\varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$. Ainsi, $\int \mathfrak{W} \mathrm{d}x$ est invariante sous l'action du groupe des transformations d'échelle — qui est un groupe de Lie de dimension infinie dépendant d'une fonction arbitraire. Elle doit également demeurer inchangée sous l'action du groupe des difféomorphismes d'espace-temps — qui est un groupe de Lie à un nombre infini de paramètres dépendant de quatre fonctions arbitraires. Weyl considère cette double invariance comme l'argument le plus fort en faveur de sa théorie. Il le met en avant dans l'article de 1919 intitulé « eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie » pour répondre aux premières objections qu'Einstein formule à l'encontre de cette théorie unifiée des champs. [44]

Weyl se fonde ensuite sur un principe de Hamilton : l'état réel de l'univers correspond au fait que $\int \mathfrak{M} \mathrm{d}x$ soit extrémale. Il retrouve les équations de Maxwell et les équations de la gravitation en utilisant des techniques de calcul variationnel dans une veine hilbertienne. En outre, il établit une correspondance entre (a) la conservation des composantes du tenseur d'énergie-impulsion et l'invariance de $\int \mathfrak{M} \mathrm{d}x$ par le groupe des difféomorphismes d'espace-temps et (b) la conservation de la charge électrique et l'invariance de $\int \mathfrak{M} \mathrm{d}x$ par le groupe des transformations d'échelle. [45] Dans son article intitulé « Gravitation und Elektrizität » Weyl

44. H. Weyl, « eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie », *Annalen der Physik*, **59**, in Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, *op. cit.*, p. 68.

45. Ce résultat nous laisse en droit de penser que le raisonnement mené ici par Weyl constitue une ap-

affirme d'ailleurs de manière très synthétique :

> Les quatre lois de conservation de la matière (le tenseur d'énergie-impulsion) sont liées à l'invariance de l'action par rapport aux transformations des coordonnées (dépendant de quatre fonctions arbitraires), la loi de conservation électromagnétique est liée à la nouvelle invariance par transformation d'échelle, exprimée à l'aide d'une cinquième fonction arbitraire. [46]

Ainsi, les phénomènes gravitationnels et électromagnétiques dérivent d'une même métrique d'univers, ils s'inscrivent dans un cadre géométrique surplombant auquel Weyl donne le nom de « géométrie purement infinitésimale ». Weyl introduit une unique fonction d'action qui lui permet de déduire aussi bien les équations de la gravitation que les équations de l'électromagnétisme. Il parvient donc à une théorie unifiée des phénomènes physiques, étant entendu qu'il croit pouvoir les réduire à deux types d'interactions : les interactions gravitationnelles et les interactions électromagnétiques. Qu'en est-il vraiment des conséquences empiriques d'une telle théorie ? Cette dernière n'outrepasse-t-elle pas les bornes de ce qui est physiquement concevable ? Dès 1918, Einstein formule un certain nombre d'objections qui mettent en cause la viabilité de la théorie de Weyl. Avant d'en venir à ce point, nous souhaitons revenir sur les présupposés philosophiques qui sous-tendent un article tel que « Reine Infinitesimalgeometrie ». Nous montrerons à la suite d'E. Scholz que Weyl est très attaché à l'idéalisme fichtéen au moment où il publie cet article. Cette indication montre qu'il ne faut pas survaloriser l'importance de la phénoménologie de Husserl pour lire et interpréter la philosophie que Weyl construit à partir de sa pratique des mathématiques.

3.4 Lien avec l'idéalisme fichtéen

Plusieurs données pourraient tout d'abord nous amener à penser que la phénoménologie de Husserl joue un rôle primordial au moment où Weyl participe à la formalisation de la relativité générale qu'il veut compléter par une théorie unifiée des champs. Pour éviter toute ambiguïté, précisons que Weyl s'intéresse déjà à la phénoménologie de Husserl alors qu'il est étudiant puis *Privatdozent* à Göttingen. Plusieurs documents, rapportés par T. Ryckman, indiquent qu'il a suivi des cours de Husserl à Göttingen. [47] En outre, il se marie avec Hella juste avant de partir à l'ETH de Zürich. Or, celle-ci est une élève de Husserl. Elle initie Weyl à la phénoménologie. De plus, il existe une correspondance entre Weyl et Husserl à la fin des

plication du second théorème de Noether, nous évaluerons la pertinence de cette hypothèse à la fin de ce chapitre.

46. H. Weyl, « Gravitation und Elektrizität », in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, *op. cit.*, p. 37-38.

47. T. Ryckman, *The reign of relativity*, New York, Oxford university press, 2005, p. 111.

années 10 et au début des années 20. Seules quatre lettres ont été conservées ; elles ont été rédigées entre 1918 et 1921, soit très exactement au moment où Weyl s'investit pleinement dans sa théorie unifiée des champs. Ces lettres montrent que Husserl a consulté l'ouvrage de Weyl sur le continu (1918), ainsi que la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie* dans laquelle figure le projet d'une géométrie purement infinitésimale couplée à une théorie unitaire. Le problème de l'espace est également abordé dans cette correspondance. Enfin, dans sa préface à *Raum, Zeit, Materie*, Weyl reprend à son compte le vocabulaire conceptuel hérité de la phénoménologie de Husserl.

Pourtant, nous ne partageons pas la thèse de Ryckman selon laquelle la phénoménologie de Husserl permettrait de rendre raison du projet d'une géométrie purement infinitésimale accompli par Weyl. Trois raisons expliquent nos réserves. (1) La référence à des sources mathématiques ou physiques — Riemann, Hilbert, Mie, etc. — nous paraît bien plus cruciale pour comprendre la genèse d'un tel cadre géométrique. En effet, Weyl veut lever un résidu de géométrie à distance chez Riemann pour parvenir à une géométrie purement infinitésimale et réaliser complètement le projet d'une physique des actions de contact. (2) Il n'est pas exact de supposer que la phénoménologie de Husserl constituerait la source philosophique que privilégierait Weyl durant cette période. En effet, dès 1916, il entre en contact avec F. Medicus, professeur de pédagogie et de philosophie à l'ETH de Zürich, qui est spécialisé dans l'idéalisme allemand et, plus particulièrement, dans la philosophie de Fichte. (3) Si, indéniablement, la préface à *Raum, Zeit, Materie* est d'inspiration phénoménologique, ce n'est pas le cas du début de « Reine Infinitesimalgeometrie » (1918) qui est pourtant l'article fondateur de Weyl sur la géométrie purement infinitésimale.

Par extension, il adopte une démarche *spéculative* dans les travaux qu'il consacre à la théorie unifiée des champs. Il emploie d'ailleurs le mot de spéculation pour qualifier son projet dans « Gravitation und Elektrizität ». Justement, ce terme nous semble parfaitement adéquat pour rendre compte des réflexions philosophiques qu'il mène au début de son article intitulé « Reine Infinitesimalgeometrie ». Explicitons notre propos. Weyl commence par présenter une thèse de style kantien, qu'il adosse à la mécanique classique :

> Le monde réel, que nous investissons grâce à notre conscience, n'est pas là d'un seul coup, disons plutôt qu'il advient : annihilé et recréé à chaque instant, il parcourt une succession continue et unidimensionnelle d'états dans le temps. Le théâtre de ce devenir temporel est un espace euclidien tridimensionnel. La géométrie examine les propriétés de ce dernier ; il appartient en revanche à la physique de saisir conceptuellement le réel existant dans l'espace et d'établir les lois permanentes parmi ses apparences fuyantes. Par suite, la physique est une science fondée sur la géométrie ; mais les concepts par lesquels elle représente le réel - matière, électricité,

> force, énergie, champ électromagnétique, champ gravitationnel, etc. - relèvent d'une sphère complètement différente de la géométrie. [48]

La physique aurait pour objet ≪ le réel existant dans l'espace ≫ (Das im Raume existierende Reale), elle consisterait à soumettre des apparences sensibles ou phénomènes (Erscheinungen) à certaines régularités élaborées par notre entendement et appelées lois de la nature. De son côté, la géométrie métrique seraient construite *a priori* et elle caractériserait l'espace indépendamment de tout contenu matériel. Weyl emprunte donc jusque-là son vocabulaire à Kant : la physique reviendrait tout simplement à ordonner la réalité empirique. Quant à la géométrie, elle structurerait *a priori* l'espace physique. Weyl rappelle que dans une perspective kantienne, il existe une ligne de démarcation nette entre géométrie et physique. Précisons cette hypothèse d'interprétation : (1) pour Kant les connaissances ne sont pas de la même nature dans ces deux sciences — en géométrie on a exclusivement affaire à des jugements synthétiques *a priori* et *purs*, étant donné qu'aucun concept géométrique n'est construit à partir de l'expérience, en revanche la physique est constituée soit de jugements *a priori impurs*, soit de jugements synthétiques *a posteriori* — ; (2) la géométrie est essentiellement une science des figures construites dans l'espace, alors que la physique examine les régularités auxquelles les phénomènes peuvent être assujettis dans l'espace *et* le temps.

À partir du second paragraphe, Weyl tient un tout autre discours. Traduisons *in extenso* son argument :

> Cette vieille intuition concernant la relation entre forme et matière, entre géométrie et physique, a été complètement bouleversée par la théorie de la relativité einsteinienne. La théorie de la relativité restreinte est parvenue au résultat selon lequel l'espace et le temps doivent être fondus en une unité indissoluble appelée univers ; d'après cette théorie, l'univers en question est une variété quadridimensionnelle euclidienne — à ceci près que la forme quadratique qui est au fondement de la métrique d'univers n'est pas définie positive, mais d'indice 1, 3. Dans l'esprit de la physique moderne des actions de contact, la théorie de la relativité générale n'admet cela que dans l'infiniment petit et, pour la métrique d'univers, elle s'appuie sur le concept plus général de détermination métrique fondée sur une forme quadratique différentielle tel qu'il a été érigé par Riemann dans sa *Leçon d'habilitation*. Mais la principale nouveauté de cette théorie consiste en l'idée suivante : la métrique n'est pas une propriété de l'univers en soi, l'espace-temps en tant que forme des phénomènes n'est qu'un continuum amorphe quadridimensionnel au sens de l'Analysis Situs ; la métrique exprime en revanche quelque chose de réel, d'existant dans l'univers, qui exerce des effets physiques sur la matière par le biais des forces centrifuge et gravitationnelle, et dont l'état est conditionné réciproquement par la répartition et la constitution de la matière en vertu des lois de la nature. Alors que je libérais la géométrie riemannienne — qui prétend pourtant être une pure ≪ géométrie de contact ≫ — de l'une de ses inconséquences tenaces, en rejetant un

48. H. Weyl, ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, *op. cit.*, p. 384.

> dernier élément de ≪ géométrie à distance ≫ qu'elle comportait du fait de son passé euclidien, je parvins à une métrique d'univers d'où dérivent non seulement les effets gravitationnels, mais encore les effets électromagnétiques, bref une métrique qui, comme on peut le supposer à bon droit, rend raison de tous les processus physiques. D'après cette théorie, tout le réel effectif qui se présente dans l'univers est une manifestation de cette métrique d'univers ; les concepts physiques ne sont rien d'autre que ceux de la géométrie. La seule différence qui subsiste entre la géométrie et la physique vient de ce que la géométrie pénètre l'essence des concepts métriques, alors que la physique a pour tâche de trouver la loi, en vertu de laquelle on distingue le monde réel, parmi tous les univers quadridimensionnels que la géométrie permet de construire, et de tirer les conséquences de cette loi. [49]

La physique nouvelle — en l'occurrence la relativité générale — vise non pas le réel existant (das existierende Reale), mais bien le réel effectif (das Wirkliche). Ce dernier n'est pas décrit comme un ensemble de données issues de l'expérience, il est une *manifestation* de la métrique de l'univers. C'est bien le cas du champ gravitationnel : les composantes qui le décrivent caractérisent en même temps la structure métrique de la variété d'espace-temps. Mais Weyl veut aller plus loin : l'univers doit satisfaire aux réquisits d'une géométrie purement infinitésimale, ce qui n'est pas le cas en géométrie riemannienne — il est toujours possible de comparer les longueurs de deux vecteurs attachés à des points distincts dans une variété riemannienne.

Les termes ≪ das Wirkliche ≫ ou ≪ die Wirklichkeit ≫ admettent la même racine que le verbe ≪ wirken ≫ que l'on peut traduire par ≪ agir ≫, ≪ opérer ≫, ≪ produire un effet ≫. Ces termes montrent que Weyl défend une conception *dynamique* de la réalité qu'il n'emprunte pas à Husserl et qu'il justifie par deux arguments. (1) La métrique de l'univers n'est pas un pur outil formel, elle est conditionnée par la répartition de la matière en son sein. (2) L'univers réel [die wirkliche Welt] est assujetti à un principe de Hamilton, c'est-à-dire à un principe de moindre action [Prinzip der kleinsten *Wirkung*] :

> À l'image de la mécanique, la physique débouche sur un principe de Hamilton : l'univers réel est tel que l'éther qu'il contient se trouve dans un état déterminé par une action extrémale. [50]

Il exploite donc très consciemment la distinction entre *Realität* et *Wirklichkeit* qui n'a pas d'équivalent en français. Il préfère utiliser le terme *Wirklichkeit* pour des raisons philosophiques et physiques. En effet, il développe une conception dynamique de la matière et de l'espace-temps dont il trouve une justification en relativité générale, mais aussi dans l'idéalisme fichtéen.

49. *ibid.*, p. 384-385.
50. *ibid.*, p. 410.

En effet, Weyl s'intéresse à la théorie fichtéenne de la connaissance à partir de 1916 à l'ETH de Zürich par l'entremise du professeur F. Medicus, qui est alors responsable de l'édition des œuvres complètes de Fichte. Ce point est parfaitement documenté dans un texte de Weyl récemment traduit en anglais et intitulé ≪ Insight and Reflection ≫ (1955) :

> There [at the Federal Institute of Technology in Zurich], through the assistance of Medicus, whose seminar my wife visited, she and I were led to Fichte's philosophy of science. Metaphysical idealism, toward which Husserl's phenomenology was then shyly groping, here received its most candid and strongest expression. It captured my imagination, even though I had to concede to my wife, who was more at home with Husserl's careful methodology than with Fichte's dash, that Fichte could not help being swept to ever more abstruse constructions by his stubbornness, which made him blind to facts and reality in the pursuit of an idea. [51]

Ce souvenir montre que Weyl s'est peu à peu distancié de Fichte : il est clairement dit que l'idéalisme fichtéen est aveugle devant les faits. Peut-être un aveuglement du même ordre caractérise-t-il les travaux que Weyl consacre à sa théorie unifiée des champs en 1918 : il suit une démarche hautement spéculative, sans s'assurer que les conséquences empiriques de sa théorie sont conformes aux conditions de l'expérience.

Comme le montre Scholz, [52] Weyl a surtout été marqué par la conception dynamique de l'espace défendue par Fichte dans les *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1795). Au préalable, nous voudrions rejeter deux surinterprétations possibles concernant le rapport que Weyl entretient avec la philosophie de Fichte. Le fait qu'il s'approprie certains éléments de l'idéalisme fichtéen ne suffit absolument pas pour expliquer comment il aboutit à une géométrie purement infinitésimale et à une théorie unifiée des champs. Les motivations de Weyl sont à fois philosophiques, physiques et géométriques au moment où il publie ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫. Inversement, il ne faudrait pas croire que son attachement à l'idéalisme fichtéen constitue un détail superflu que l'on pourrait tenir sous silence pour saisir sa théorie unifiée des champs. Weyl a sans doute trouvé dans la philosophie de Fichte un moyen de justifier philosophiquement sa démarche et sa conception dynamique de l'univers.

Pour accréditer cette hypothèse, revenons sur le § 4 des *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* de Fichte. Ce dernier prend pour point de départ une ≪ composition synthétique d'intuitions opposées ≫. Il raisonne donc à rebours de Kant qui, au cours de

51. H. Weyl ≪ Insight and Reflection ≫, in *Mind and Nature*, Selected Writings on Philosophy, Mathematics, and Physics, Princeton university press, 2009, p. 209.

52. E. Scholz ≪ Philosophy as a cultural Resource and Medium of Reflection for Hermann Weyl ≫, *Revue de synthèse*, **126** 2005, p. 331-351.

≪ l'Esthétique transcendantale ≫, montre que la représentation de l'espace ne dépend pas des phénomènes contenus dans l'espace. Pour Fichte, il est inadéquat de définir l'espace comme une forme indépendante de la matière des phénomènes ou comme un contenant vide. Cela posé, Fichte assigne trois propriétés à l'espace : (a) il est *étendu*, (b) il doit être considéré *d'un seul tenant* (zusammenhängend) et (c) il est *divisible à l'infini*. Mais surtout, Fichte refuse de considérer l'espace comme un ensemble de points que l'on pourrait nettement distinguer les uns des autres. Si l'on veut traduire cet argument en termes mathématiques, seuls des points accompagnés de leurs voisinages immédiats ont un sens spatial aux yeux de Fichte. On peut aisément comprendre en quoi Weyl utilise cette source philosophique pour critiquer une vision ensembliste et formaliste de la continuité dans *das Kontinuum*. Qu'il nous suffise en effet de mentionner ce passage, issu des *Premiers principes* :

> La plus petite partie de l'espace jusqu'à l'infiniment petit est toujours un espace, quelque chose qui complète la continuité et non pas un simple point ou la limite entre des lieux déterminés de l'espace. [53]

Contrairement à Kant, qui envisage l'espace *globalement*, Fichte adopte ici un point de vue infinitésimal. Weyl trouve là un écho philosophique à son projet de géométrie purement infinitésimale. Mais il y a plus : Fichte défend une conception dynamique de la matière et de l'espace. Il corrèle grandeurs extensives (i.e. spatiales) et grandeurs intensives (forces). En effet, Fichte poursuit en ces termes :

> Pour cette raison, cet [espace], parce qu'il est possible de poser en lui et dans la mesure où il est effectivement posé par l'imagination, [est] une force, qui se manifeste nécessairement et qui ne peut être posée sans être posée comme s'extériorisant. [54]

L'idée selon laquelle l'espace serait une force montre que Fichte rejette tous les présupposés qui se trouvent dans ≪ l'Esthétique transcendantale ≫ de Kant. En effet, pour Fichte, il est inconcevable de décrire l'espace comme une forme ou une intuition pure que l'on pourrait évider de tout contenu phénoménal. Fichte radicalise d'ailleurs sa thèse lorsqu'il ajoute : ≪ Par conséquent, intensité et extension sont nécessairement synthétiquement composées et l'on ne doit pas vouloir déduire l'une sans l'autre. Toute force remplit nécessairement une place de l'espace (eine Stelle im Raume) par son produit nécessaire qui est le lien synthétique de l'intensité et de l'extension. (La force ainsi ne remplit pas l'espace elle-même, elle n'est pas dans l'espace, et est en soi (mais), sans une manifestation elle n'est rien). L'espace n'est rien

53. J.-G. Fichte, *Premiers Principes métaphysiques de la science de la nature*, in *Œuvres choisies de philosophie première*, 1795, trad. Philonenko, éd. Vrin, 1964, p. 231.
54. *ibid.*, p. 231.

d'autre que ce qui est rempli ou qui doit l'être par ce produit ». [55] Le raisonnement de Fichte est quelque peu heurté ; toujours est-il qu'il défend une conception dynamique de l'espace, comme en atteste l'idée de « lien synthétique de l'intensité et de l'extension ». De plus, il montre que le couple contenant / contenu n'est pas opératoire pour penser le rapport entre l'espace et la matière : ces deux polarités s'interpénètrent et se conditionnent mutuellement. Enfin, Fichte refuse de penser que l'espace pourrait préexister réellement ou idéellement aux forces qui le remplissent. Pour le dire autrement, la matière vient structurer l'espace qui n'est *rien* sans elle.

Fichte radicalise ici un argument que l'on rencontre non pas dans l'« Esthétique transcendantale » de Kant, mais dans les *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature*. Dans cet ouvrage, publié en 1786, Kant développe une conception dynamique de la matière, comme en témoigne ne serait-ce que la définition 1 :

> La matière est le mobile en tant qu'il remplit un espace. Remplir un espace, c'est résister à tout mobile qui s'efforce par son mouvement de pénétrer en un certain espace. Un espace qui n'est pas rempli est un espace vide. [56]

Fichte étend ce raisonnement à l'espace qui est structuré par la matière — et donc par les forces — qui le remplissent. Il s'oppose donc « au » Kant de l'« Esthétique transcendantale », en revanche il se situe dans le prolongement « du » Kant des *premiers principes*.

On peut aisément comprendre pourquoi Weyl s'intéresse aux thèses de Fichte sur l'espace. En effet, dans « Reine Infinitesimalgeometrie », Weyl défend très précisément une conception dynamique de l'univers métrique dans le prolongement de la relativité générale. Il montre également que des grandeurs intensives — à savoir la force gravitationnelle ou la charge électrique — sont en étroite relation avec des grandeurs extensives — en l'occurrence les déterminations métriques de l'univers. Enfin, à l'instar de Fichte, Weyl décrit l'univers en adoptant un point de vue infinitésimal. Ici se confirme l'analogie établie par Scholz entre la conception fichtéenne de l'espace et la géométrie purement infinitésimale de Weyl :

> We find here [i.e. chez Fichte] a clear and beautiful affinity to three essential topics in Weyl's « purely infinitesimal geometry » and his first unified gauge field-and-matter theory of 1918 :
>
> — construction of a spacelike continuum from infinitesimal parts (...)
>
> — characterization of the space-filling entities as forces, the actions of which were initially specified only in the infinitesimal parts (...)

55. *ibid.*, p. 232.

56. E. Kant, *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1786), trad. Philonenko, Paris, éd. Vrin, 1982, p. 51.

> — formation of matter as a form of appearance of space-filling forces (dynamical theory of matter, going back to Kant and mathematically rejuvenated by Mie and Hilbert). [57]

Le lien étroit entre la conception fichtéenne de l'espace et la théorie unifiée des champs de Weyl montre qu'il serait simplificateur voire fautif de survaloriser l'incidence de la phénoménologie de Husserl sur Weyl. Entre 1918 et 1922, ce dernier n'utilise pas une mais plusieurs sources philosophiques qui ne sont d'ailleurs pas nécessairement compatibles entre elles. [58] Scholz ajoute que les réflexions philosophiques de Weyl sont conditionnées à la fois par ses travaux scientifiques et par son environnement culturel. La première guerre mondiale est un facteur indéniable pour expliquer l'adhésion de Weyl à des philosophies de la conscience. Weyl entend se démarquer du ≪ positivisme ≫ de Mach, alors dominant en philosophie des sciences. Par ≪ positivisme ≫, il faut comprendre ici une doctrine qui assujettit la philosophie aux sciences positives et en particulier aux sciences expérimentales. À partir de 1917, Weyl se positionne clairement contre le positivisme, mais aussi contre le formalisme en mathématiques. Pour ce faire, il invoque parfois simultanément les noms de Fichte — dont la philosophie s'apparente à un subjectivisme absolu — et de Husserl dont la phénoménologie se distingue très nettement du positivisme. [59] Ainsi, dans une lettre à Hölder de 1919, Weyl affirme :

> Sans doute quiconque en logique veut seulement formaliser, non pas voir, et formaliser est la maladie des mathématiques — négligera Fichte et Husserl. [60]

Il ne se demande pas si les philosophies de Fichte et de Husserl sont vraiment compatibles ; il se réfère à elles pour contrer non seulement le positivisme, mais aussi une conception formaliste des mathématiques qu'il croit voir à l'œuvre chez Hilbert. Weyl ne cherche donc pas à s'imprégner d'une doctrine en particulier et il ne se donne pas non plus pour but de construire un système philosophique pleinement consistant. Justement, il faut savoir qu'en 1917 — soit deux ans avant que Weyl ne rédige cette lettre à Hölder — Husserl professe un cours sur Fichte à l'université de Göttingen. Comme le montre O. Lahbib, Husserl s'intéresse alors aux ouvrages ≪ les plus populaires ≫ de Fichte, à savoir la *Destination de l'homme* et l'*Initiation à la vie bienheureuse*. En revanche il n'accorde aucun crédit aux ≪ productions spéculatives des

57. E. Scholz, ≪ Philosophy as a Cultural Resource and Medium of Reflection for Hermann Weyl ≫, *op. cit.*, p. 340.

58. *ibid.*, p. 331 : ≪ Among philosophies to which Weyl referred, Husserl's phenomenology is the best known. Weyl's relationship to phenomenology has been investigated and documented in several publications, but Weyl never became a devoted adherent of any single philosophy.

59. Voir en particulier E. Husserl, *Idées directrices pour une Phénoménologie* (1913), trad. Ricœur, Paris, éd. Gallimard, 1950, § 20, p. 67 et suiv.

60. H. Weyl, ≪ lettre à Hölder ≫, in *Le Continu et autres écrits philosophiques*, trad. Largeault, Paris, éd. Vrin, 1992.

Wissenschaftslehre ≫ dont il souligne l'opacité.[61] Or, en 1918, Weyl se réfère indirectement à des textes de Fichte qui sont issus de la *Doctrine de la science*. Weyl croit donc pouvoir faire coexister les noms de Fichte et de Husserl parce qu'il s'agit là de deux philosophies de la conscience qu'il oppose au formalisme et au positivisme. Mais Weyl oublie de préciser en 1918 qu'il y a une incompatibilité de fond entre Fichte et Husserl. En effet, Fichte part du moi qu'il érige au rang de principe absolu sur un plan tant pratique que théorique. En revanche, Husserl fonde sa philosophie sur le processus de réduction phénoménologique par lequel nos évidences naturelles sont mises en suspens.[62]

Si l'on analyse plus finement les sources philosophiques utilisées par Weyl entre 1918 et 1922, on observe un glissement de l'idéalisme fichtéen vers la phénoménologie de Husserl. Notre hypothèse ne doit pas donner lieu ici à surinterprétations : dès la première édition de *Raum, Zeit, Materie* (1918), Weyl mentionne la conception husserlienne de la conscience comme en atteste la préface à cet ouvrage. Cependant, les premiers développements de la théorie unifiée des champs de Weyl (1918-1920) sont étroitement liés à une conception dynamique du réel hérité de la philosophie fichtéenne. En effet, dans ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, la démarche spéculative de Weyl fait directement écho à la *Doctrine de la science* de Fichte. La référence à l'idéalisme fichtéen se dissipe peu à peu à mesure que Weyl prend conscience de la pertinence des critiques à l'encontre de sa théorie unifiée des champs. En outre, les années 1921-1923 sont marquées par la résolution du problème de l'espace qui, comme l'indique Weyl dans sa correspondance avec Husserl, est un problème de nature phénoménologique. Nous ne voulons donc pas dire qu'entre 1918 et 1920, Weyl cesse de se référer à la phénoménologie de Husserl pour s'intéresser exclusivement à l'idéalisme fichtéen. Il nous semble plus approprié d'affirmer que l'idéalisme fichtéen constitue la référence philosophique principale que convoque Weyl lorsqu'il aborde la théorie unifiée des champs. En revanche, le problème de l'espace tire sa raison d'être philosophique de la phénoménologie de Husserl.

Avant de revenir sur les réfutations qu'Einstein, Reichenbach ou encore Hilbert formuleront à l'encontre du projet weylien d'une unification de la gravitation et de l'électromagnétisme, nous devons périodiser plus finement le développement de cette théorie unitaire dans l'œuvre

61. O. Lahbib, ≪ Husserl lecteur de Fichte ≫, in *Archives de Philosophie*, 2004 / 3, Tome 67, p. 421.

62. Il ne faudrait pas croire que Weyl ignore les divergences fondamentales entre l'idéalisme fichtéen et la phénoménologie de Husserl. Voir en particulier H. Weyl, ≪ Insight and Reflection ≫ (1955), *op. cit.*, p. 214 : ≪ Fichte states the basic position of epistemological idealism even more radically than Husserl. He is everything but a phenomenologist ; he is a constructivist of the purest form who, without looking left or right, follows his stubborn path of construction ≫.

de Weyl. Comme nous l'avons vu, elle commence à être élaborée en 1918 avec la publication de « Gravitation und Elektrizität » et de « Reine Infinitesimalgeometrie ». Dans le premier article, qui s'adresse davantage à un public de physiciens, Weyl ne détaille pas les fondements mathématiques de sa théorie et il reconnaît que sa théorie résulte de considérations purement spéculatives qui mériteraient d'être vérifiées empiriquement. En revanche, dans le second article, Weyl distingue et hiérarchise avec soin variétés topologiques, variétés différentielles munies d'une connexion affine (transport parallèle) et variétés métriques. Il se montre très affirmatif quant à la possibilité d'embrasser tout le réel physique à partir de sa théorie.

Qu'en est-il des publications ultérieures de Weyl consacrées à l'unification de l'électromagnétisme et de la gravitation ? Il s'agit tout d'abord de répondre aux expériences de pensée que lui oppose Einstein pour le contredire, comme en attestent deux passages, quasiment identiques, tirés respectivement de « Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie » et de la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie*. Les objections d'Einstein portent sur le fonctionnement des instruments de mesure (plus précisément des horloges) et donc sur un fait physique qui dépend des lois de la nature. En revanche, la métrique introduite par Weyl est d'ordre purement idéal : elle ne caractérise pas tant des processus physiques que la géométrie d'univers abstraction faite de ses implications empiriques. Dans ces deux textes, Weyl estime que la déduction de la loi de conservation de l'électricité à partir de l'invariance d'échelle constitue l'argument le plus fort en faveur de sa théorie. [63]

Il s'agit ensuite de savoir si et jusqu'à quel point la théorie de Weyl réalise le programme de Mie selon lequel la matière peut être décrite entièrement en termes de champs. Entre 1918 et 1920, Weyl reste fidèle à ce programme : sa théorie unifie la gravitation et l'électricité, mais elle doit également permettre de saisir d'un seul tenant la structure métrique de l'univers et la structure élémentaire de la matière. Déjà dans « Reine Infinitesimalgeometrie », Weyl affirmait que la métrique d'univers qu'il a nouvellement introduite est susceptible de rendre compte de tout le réel physique. Il reprend au mot près cet argument dans la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie* :

> Puisque, d'après la théorie de Mie, nous sommes en mesure d'espérer comprendre la matière comme des nœuds d'énergie [Energieknoten] dans le champ électromagnétique, nous parvenons donc à cette conséquence : *l'univers est une variété métrique de dimension* $(3+1)$ *; tous les phénomènes physiques sont des manifestations [Äußerungen] de la métrique d'univers.* [64]

63. Voir à ce propos H. Weyl, « Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie », *op. cit.*, p. 67 et *Raum, Zeit, Materie*, dritte Auflage, p. 260.
64. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, dritte Auflage, *op. cit.*, p. 242.

Comme le souligne Scholz [65], les premiers doutes de Weyl portent d'abord sur le programme de Mie et ensuite sur son projet d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. En raison des développements de la théorie des quanta, Pauli critique frontalement la réduction de la matière à une théorie classique des champs dans l'article qu'il rédige sur la relativité en 1920 pour l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Weyl prend cette objection très au sérieux. Ainsi, dans une lettre à Klein datant du 28 décembre 1920, il estime que la matière ne peut pas se traduire en termes de champs :

> La physique des champs n'apparaît plus du tout à mes yeux comme la clé de la réalité ; au contraire, le champ, l'éther, n'est qu'un *moyen de transmission* des effets, la matière constitue en revanche une réalité qui se situe à côté de l'éther et elle est la cause des états de l'éther. Avec la ≪ loi d'univers ≫ (principe de Hamilton) qui régit la transmission des effets dans l'éther, nous n'obtenons pas grand'chose dans la compréhension des phénomènes naturels. [66]

Weyl contredit très exactement l'argument tiré de la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie* que nous venons de citer. Il admet donc que sa théorie des champs ne rend pas compte de la matière et qu'il ne peut pas lui prêter les vertus englobantes qu'il lui assignait dès 1918. Le réel physique ne saurait être déduit régulièrement à partir de la donnée d'une métrique d'univers telle qu'elle est définie dans le cadre de la géométrie purement infinitésimale de Weyl. Ainsi, dès 1920, il commence à remettre en question certains des arguments qu'il avait défendus dans ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫ ou encore dans la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie* à propos du réel physique et de la matière. Cette évolution est d'ailleurs répercutée à la fin de la quatrième édition du même ouvrage, comme en témoigne le passage suivant :

> Si l'idée de Mie était réalisée, nous reconnaîtrions dans le champ seul, la réalité objective, et la physique ne serait plus très loin du but qu'elle se propose ; elle nous donnerait sur l'essence du monde physique, de la matière et des forces naturelles, un ensemble de théories où les lois qui règlent les phénomènes s'enchaîneraient d'une façon nécessaire et intelligible. Malheureusement de telles espérances s'envolent actuellement. Les lois du champ métrique nous renseignent moins sur la réalité que sur ce milieu qui permet le transport de l'action et qui engendre les relations dans le réel. La physique statistique et la théorie des quanta ont déjà entamé une couche profonde de la réalité et les résultats obtenus sont en accord avec la physique du champ ; mais le problème de la matière est encore tout à fait dans l'ombre. Cependant la connaissance de la signification restreinte du champ ne doit pas nous empêcher de reconnaître les résultats importants que nous avons obtenus. [67]

Ainsi, la théorie des quanta conduit à rejeter les thèses réductionnistes de Mie et Hilbert sur

65. E. Scholz, ≪ Weyls Infinitesimalgeometrie, 1917-1925 ≫, *op. cit.*, p. 82-83.

66. Weyl à Klein, 28. 12. 1920, cité par Scholz, *op. cit.*, p. 83.

67. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, Vierte Auflage, *op. cit.*, p. 283-284 et p. 274-275 pour la traduction française.

la structure de la matière. La fin de ce passage montre que Weyl ne renonce toutefois pas encore à sa théorie unifiée des champs. Il se situe dans une position « d'entre deux » avec la publication de la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie* : d'un côté, il fait remonter les objections de Pauli à l'encontre du programme de Mie-Hilbert ; de l'autre, il semble encore tenir à son projet d'une unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. [68] Il admet progressivement que sa théorie unitaire n'a aucune effectivité physique au milieu de l'année 1921.

3.5 La réception critique de la théorie unifiée des champs de Weyl par Einstein, Reichenbach et Hilbert

Entre 1918 et 1921, plusieurs protagonistes doutent de la pertinence de la théorie unifiée des champs de Weyl ; nous pensons en particulier à Einstein, Hilbert ou encore Reichenbach auxquels nous allons nous restreindre dans ce qui suit, mais nous pourrions ajouter les noms de Pauli et d'Eddington à cette liste. Einstein, Hilbert et Reichenbach formulent des critiques de deux ordres à l'encontre de Weyl : sa théorie est-elle vraiment conséquente en physique ? L'épistémologie ou la philosophie sous-jacente à « Reine Infinitesimalgeometrie » est-elle justifiée ? Dès mars / avril 1918, Einstein montre dans sa correspondance avec Weyl que cette théorie unitaire est contraire aux conditions de l'expérience : elle admet des conséquences empiriques qui ne sont pas vérifiées. Elle peut bien être logiquement possible et mathématiquement concevable ; elle n'est pas physiquement concevable. Parallèlement, dans *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*, Reichenbach s'attaque plus particulièrement aux présupposés philosophiques qui orientent les recherches de Weyl en physique mathématique ; pour Reichenbach, il n'est jamais question que de spéculation prékantienne. Enfin, dans *Natur und mathematisches Erkennen*, Hilbert considère la théorie unifiée des champs de Weyl comme de la *physique hégélienne* [Hegelsche Physik]. La critique de Hilbert à l'encontre de Weyl est d'ordre scientifique et épistémologique ; d'un côté, Hilbert est parfaitement conscient des inconséquences empiriques de la théorie proposée par Weyl, de l'autre il montre qu'il est contradictoire de prétendre pouvoir rendre raison de l'ensemble des phénomènes à partir d'un

68. E. Scholz, « Weyls Infinitesimalgeometrie 1917-1925 », *op. cit.*, p. 82 : « Tatsächlich brachte Weyl jedoch bei seiner Überarbeitung von RZM für die 4. Auflage eine merkliche — und für ihn völlig neue — Distanz bei der Diskussion des Realitätsgehaltes seiner Feld- und Materietheorie zum Ausdruck. Von der Vorstellung einer rein feldtheoretischen Erklärung der Materiekonstitution nahm er non sichtlich Abschied. Die Aussagekraft seiner Theorie wollte er nur noch auf den reinen Feldverlauf beschränken ».

unique cadre théorique. Il est paradoxal que Hilbert se montre aussi sévère à l'encontre de Weyl, puisque ce dernier se situe dans le prolongement du programme de Mie-Hilbert. Nous aurons à expliquer ce paradoxe.

3.5.1 Einstein et Weyl

Revenons brièvement sur les objections d'Einstein contre la théorie de Weyl au cours de l'année 1918. Pour ce faire, nous nous appuierons notamment sur l'article d'E. Scholz intitulé « A. Einstein and H. Weyl, intertwining paths and mutual influences ».[69] Les différends épistémologiques qui séparent Weyl d'Einstein sont essentiels pour comprendre les discussions philosophiques menées ensuite par Reichenbach sur la relativité générale et la théorie unitaire de Weyl. Avant cela, quelques données historiques doivent être rappelées. Weyl rencontre Einstein à Berlin en mars 1918 pour lui évoquer son projet d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. Dès cette entrevue, Einstein émet une série de réserves concernant la viabilité des hypothèses de Weyl. Début avril 1918, Einstein reçoit le manuscrit de *Gravitation und Elektrizität* qui sera publié quelques mois plus tard dans les *Sitzungsberichte* (Berlin). Dans une lettre à Weyl datée du 4 avril 1918, Einstein reconnaît qu'il s'agit là d'un « coup de génie de premier ordre » ; dans le même temps, il tempère fortement ce jugement : les objections qu'il a émises lors de leur rencontre ne sont toujours pas levées.

Einstein s'appuie sur une série d'expériences de pensée pour montrer que les conséquences empiriques de la théorie de Weyl ne sont pas tenables. Par extension, Weyl n'aurait pas vérifié la conformité de ses hypothèses avec la réalité empirique. Einstein doute donc fortement que la théorie de Weyl soit en accord avec les conditions de l'expérience. Parallèlement, il met en exergue les divergences d'ordre épistémologique qui les séparent : tous deux n'envisagent pas le rapport entre théorie et expérience de la même manière. Pour Weyl, il suffit de modifier le cadre géométrique sous-jacent à la relativité générale pour parvenir à une théorie unifiée des champs ; pour Einstein au contraire, les conditions de l'expérience doivent servir de guide dans la formulation de nos hypothèses ; il s'agit là d'une exigence que le physicien ne doit jamais perdre de vue. Au surplus, il existe des différences d'approche fondamentales entre Weyl et Einstein : dans ses articles consacrés à la théorie unifiée des champs, Weyl raisonne exclusivement en *physicien mathématicien*, voire même en *mathématicien*. En revanche, Einstein lit et interprète les travaux de Weyl en *physicien théoricien*, voilà pourquoi il insiste sur

69. E. Scholz, « A. Einstein and H. Weyl, intertwining paths and mutual influences », in C. Alunni, M. Castellana, D. Ria, A. Rossi (éd.), *Albert Einstein et Hermann Weyl, 1955-2005. Questions épistémologiques ouvertes*, 2009, Mandurai, Barbieri, p. 215-230.

le fait qu'elles ne sont pas tenables empiriquement, sans reconnaître pleinement la fécondité des idées de Weyl. Enfin, il ne faut pas perdre de vue que Weyl et Einstein ne partagent pas les mêmes intérêts : Einstein entend explorer les nouvelles perspectives offertes par sa théorie de la gravitation, en revanche Weyl envisage cette dernière comme l'un des volets d'une théorie plus ambitieuse censée rendre raison de la structure élémentaire de la matière en termes de champs.

On ne peut rendre convenablement raison des points de vue respectifs d'Einstein et de Weyl dans cet échange de lettres que si l'on combine histoire internaliste et externaliste. D'un côté, ils n'ont pas les mêmes motivations et leurs travaux n'appartiennent pas exactement au même champ disciplinaire : Weyl demeure attaché à l'école de physique mathématique de Göttingen qui s'est développée sous l'impulsion de Klein et de Hilbert à la suite des travaux de Minkowski en relativité restreinte ; en revanche, Einstein se réclame de la physique théorique. Les divergences entre Weyl et Einstein reflètent les antagonismes en termes de légitimité qui opposent deux disciplines : la physique mathématique dont les principaux représentants sont mathématiciens de formation et la physique théorique qui renvoie à un public de physiciens. Mais, d'un autre côté, ces questions de champs disciplinaires n'expliquent pas complètement les difficultés de fond que suscite la théorie unifiée des champs de Weyl. Pour le dire autrement, ce n'est pas seulement en qualité de physicien théoricien qu'Einstein critique les hypothèses de Weyl, mais parce qu'elles posent effectivement problème lorsqu'on les confronte à l'empirie.

Pour expliciter ses doutes, Einstein utilise deux expériences de pensée. Il entend montrer par ce biais que la théorie de Weyl, qui est parfaitement cohérente mathématiquement, n'est pas physiquement concevable. Rappelons qu'une expérience de pensée — qu'elle soit réalisable ou non — a généralement pour fonction d'anticiper sur une mise à l'épreuve expérimentale et de mesurer en première approximation la viabilité d'une théorie. Réciproquement l'usage systématique d'expériences de pensée nous montre bien qu'Einstein raisonne en physicien théoricien. En revanche, dans les articles de Weyl consacrés à la théorie unifiée des champs, nous ne retrouvons pas la moindre trace d'une expérimentation mentale.[70] Voici comment nous pouvons énoncer la première expérience de pensée qu'Einstein oppose à Weyl :

> Si le transport d'instruments de mesure dépendait du chemin qu'on leur fait parcourir, alors les fréquences des horloges seraient modifiées au cours de leur vie et elles dépendraient de leur histoire. On ne pourrait plus obtenir de stabilité et d'équivalence bien définie entre des horloges atomiques de même type spectral.

70. Au début du chapitre IV de *Raum, Zeit, Materie*, Weyl utilise les expériences de pensée d'Einstein pour expliciter le principe d'équivalence : il reconnaît leurs vertus pédagogiques. Pour Einstein, elles ont également une fonction heuristique.

Einstein ne pense pas le concept de mesure d'intervalles d'espace-temps abstraitement, i.e. en prenant pour seule référence des points à l'intérieur d'une variété métrique (weylienne ou pseudo-riemannienne), au contraire il assujettit cette notion à des processus physiques fondés sur l'usage d'instruments de mesure. Il assigne donc immédiatement un sens physique au concept de mesure. Einstein formule cette première objection dès son entrevue avec Weyl en mars 1918 ; il la détaille dans une lettre à Weyl datée du 15 avril 1918. Ce dernier ne la juge pas pertinente. Einstein s'étonne de l'entêtement de son interlocuteur ; il déplace donc ses arguments sur des questions de méthode : à ses yeux, l'élément linéaire ds qui définit la métrique en relativité générale doit être directement confronté à l'expérience. Le contre-argument de Weyl peut être formulé comme suit : il entend d'abord développer les conséquences de sa théorie sur les processus de mesure, avant de comparer ses résultats avec les données de l'expérience. En ce sens, cette première objection d'Einstein lui paraît précipitée. En 1919, Weyl ira même jusqu'à supposer que l'on peut distinguer complètement le processus effectif de mesure par des règles et des horloges et le processus idéal de mesure fondé sur le transport parallèle qui se trouve être au fondement de sa géométrie. Cette séparation s'apparente à une fuite en avant : en 1918, on avait affaire à une théorie physique dont les conséquences empiriques sont discutables, on se retrouve maintenant avec une théorie qui ne peut même plus être testée empiriquement, ce qu'Einstein ne manque pas de souligner. [71]

La deuxième expérience de pensée proposée par Einstein le 3 juillet 1918 pour réfuter la théorie unifiée des champs de Weyl peut être formulée comme suit :

> Si l'on interprète la connexion métrique φ de Weyl comme le potentiel de champ de Maxwell, alors des particules sans charge ne se déplaceraient pas le long de géodésiques ; au surplus la déviation subie par les particules sans charge par rapport à des lignes géodésiques dépendrait du potentiel de champ électromagnétique, ce qui est contradictoire.

Autrement dit, l'unification entre les théories de la gravitation et de l'électromagnétisme peut bien sembler cohérente formellement, elle génère une série d'hypothèses incompatibles entre elles en physique. Pour le dire autrement, la théorie unifiée des champs de Weyl est une construction parfaitement consistante tant qu'on la regarde du point de vue des seules mathématiques, en revanche Weyl oublie que l'unification de deux théories physiques ne peut pas reposer exclusivement sur un nouveau cadre mathématique ou géométrique ; il faut au surplus harmoniser leur contenu et leurs principes physiques. Par exemple, la théorie de la

71. A. Einstein *apud Weyl*, in ≪ Elektrizität und Gravitation ≫, *Phys. Z.*, **21** (1920), p. 651 : ≪ En abandonnant cette catégorie empiriquement fondée, la théorie de Weyl se trouve amputée de l'un de ses fondements empiriques les plus solides et des possibilités de tests ≫.

relativité restreinte consiste à unifier la cinématique et l'électromagnétisme — les effets gravitationnels étant supposés négligeables — ; pour ce faire, Einstein élève la loi de propagation de la lumière, issue de l'électrodynamique, au rang de principe ; réciproquement, il étend le principe de relativité à toutes les lois de la nature. Autrement dit, les lois de la mécanique et les équations de Maxwell doivent être soumises au même principe d'invariance, ce qui suppose de réformer complètement les lois de la cinématique. L'unification de ces deux théories est donc d'abord une affaire de *principes physiques* avant de concerner le cadre géométrique qui leur est sous-jacent.

Weyl procède de manière rigoureusement inverse : ses travaux sont guidés par l'implication fausse suivante : si l'on assujettit les théories de la gravitation et de l'électromagnétisme à un même cadre géométrique sans les modifier, alors on aboutira à une théorie unifiée des champs physiquement consistante. Cette implication repose sur le *credo*, communément admis à Göttingen, selon lequel il existerait une harmonie préétablie entre la géométrie et la physique. Les objections qu'Einstein adresse à Weyl permettent justement de mesurer toute la distance qui sépare la géométrie de la physique. Il ne suffit certainement pas de réformer la géométrie — riemannienne — pour élaborer spontanément une théorie physique d'une manière qui soit empiriquement satisfaisante.

Une chose est cependant de réfuter la théorie de Weyl, i.e. de *démontrer* qu'elle est fausse, une autre de le *convaincre* qu'il est dans l'erreur. En effet, à l'issue de la seconde expérimentation mentale visant à prouver que cette théorie unitaire ne résiste pas au tribunal de l'expérience, Weyl n'accepte toujours pas les objections d'Einstein. Il adhère pleinement à une méthode, une idée et un projet qui ne lui permettent pas de mesurer avec objectivité la pertinence des arguments de son contradicteur. Ce dernier sait qu'il a définitivement réfuté la théorie de Weyl, mais il est aussi parfaitement conscient qu'il ne parviendra pas à le convaincre dans l'immédiat, comme en atteste ce passage tiré de la lettre qu'il adresse à Besso le 4 décembre 1918 :

> Je suis totalement convaincu que l'invariance de jauge de Weyl ne tient pas [lorsqu'elle est confrontée] à la nature et je lui ai donné récemment les motifs de mes doutes. Mais je sais aussi que quiconque demeure passionné par une idée plus d'une demi année ne peut pas se libérer de son charme, tout du moins par l'entremise des autres. [72]

Il ne suffit donc pas de réfuter une idée erronée pour qu'elle cesse d'exercer son empire sur les esprits ; c'est, nous semble-t-il, très exactement ce que dit Einstein dans ce passage. Il s'adresse ici à une tierce personne, à savoir Besso. Il caresse l'espoir que Weyl se rendra

72. cité par E. Scholz, *op. cit.*, p. 223.

compte de lui-même que sa théorie n'est pas empiriquement tenable. De 1919 à 1921, Weyl demeure encore attaché à son projet de théorie unifiée des champs, comme en attestent les articles intitulés « Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie » (1919) et « Elektrizität und Gravitation » (1920), ainsi que les troisième et quatrième éditions de *Raum, Zeit, Materie*. Nous avons montré dans ce qui précède que dès 1920, à la suite des objections de Pauli, Weyl admet que la théorie des quanta met en échec le programme de Mie-Hilbert. À l'été 1921, il renonce à son projet d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme.

3.5.2 Reichenbach et Weyl

La réception de la théorie unitaire de Weyl ne se restreint pas à la communauté des physiciens théoriciens et / ou mathématiciens. Ainsi, le philosophe H. Reichenbach, qui s'intéresse de près à la relativité générale dès 1918, mentionne Weyl mais aussi Haas — c'est-à-dire deux protagonistes qui participent au développement des théories unifiées des champs — dans son ouvrage intitulé *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*. Reichenbach jouit d'une formation scientifique de premier plan : il soutient sa thèse en théorie des probabilités en 1915 à l'université d'Erlangen sous la direction de P. Hensel ; son travail est également supervisé par Max Noether. Après avoir servi en tant que soldat sur le front, il s'installe à Berlin durant l'hiver 1917 / 1918, il poursuit sa formation scientifique en assistant notamment aux cours d'Einstein en relativité. Grâce au soutien de ce dernier, il obtient un poste de *Privatdozent* à l'université de Stuttgart en 1920. En outre, Reichenbach s'est formé en philosophie auprès de Cassirer qui exerce de 1906 à 1919 à l'université de Berlin. Reichenbach publie donc *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori* en 1920, soit un an avant que ne paraisse l'ouvrage que Cassirer consacre aux théories de la relativité restreinte et générale, à savoir *Zur Einstein'schen Relativitätstheorie, Erkenntnistheoretische Betrachtungen*. Alors que Cassirer entend adapter le kantisme aux nouvelles théories de la relativité, Reichenbach se fonde sur les travaux d'Einstein pour affaiblir la notion de connaissance d'*a priori* ; il réforme donc la théorie kantienne de la connaissance en profondeur. Son adhésion ultérieure au positivisme logique le conduira par la suite à rejeter carrément le kantisme.

Prenant acte des objections d'Einstein contre Weyl, Reichenbach critique sur un ton véhément la philosophie sous-jacente au projet défendu par Weyl. Pour comprendre la teneur des arguments de Reichenbach, nous devons préalablement situer son ouvrage sur un plan philosophique. Le motif principal de Reichenbach consiste à modifier le concept de connaissance *a priori* pour qu'il puisse se conformer à la théorie de la relativité. Selon Rei-

chenbach, le concept d'*a priori* aurait deux acceptions chez Kant. En un sens fort, il désigne des connaissances rigoureusement universelles et nécessaires ; en un sens affaibli, il désignerait également ce qui permet de constituer le concept d'un objet. [73] Reichenbach précise que nos perceptions ne nous donnent jamais que la matière de nos jugements. Nous avons besoin des catégories de l'entendement pour que nos jugements se rapportent à des objets *déterminés*. Ainsi, l'objet de notre connaissance n'est pas simplement donné, il est construit dans une perspective kantienne. Pour Reichenbach, il s'agit de l'apport le plus significatif de Kant en théorie de la connaissance. Reichenbach entend maintenir l'existence de principes *a priori* au sens où ils permettent de constituer les objets auxquels se rapporte une théorie physique. En revanche, il veut montrer que ces mêmes principes ne sont pas vrais *de tout temps*, ils ne sont pas rigoureusement universels et nécessaires ; ils sont révisables. Reichenbach conteste donc la validité de la première définition du concept d'*a priori*. Pour ce faire, il s'appuie sur les théories de la relativité restreinte et générale. Il mesure donc la pertinence d'une thèse philosophique — en l'occurrence celle de Kant sur les connaissances *a priori* — à la lumière de sa conformité à des théories physiques ; sa démarche est clairement positiviste.

Plus profondément, Reichenbach introduit une ligne de démarcation entre les mathématiques et la physique ; en outre, il réduit les connaissances *synthétiques a priori* à une portion congrue : elles sont exclues du domaine des mathématiques — qui ne sont donc constituées que de connaissances analytiques *a priori* — et elles correspondent exclusivement à des *principes de coordination* auxquels sont soumises les *lois de la nature*.

Reichenbach insiste sur le fait qu'un *objet physique* ne saurait être déterminé exclusivement à partir d'axiomes et de définitions. En effet, un objet physique appartient au *monde réel* et non pas au *monde logique* des mathématiques. Ces dernières ne seraient qu'une promotion de la logique, elles consisteraient exclusivement en des chaînes d'inférences rapportées à de pures idéalités. Une théorie physique doit être vraie pour le monde réel ; autrement dit, la vérité d'une théorie physique est irréductible à des questions de cohérence logique. Reichenbach examine la théorie unifiée des champs de Weyl en fonction de cette ligne de démarcation entre physique et mathématiques. Pour le dire autrement, Reichenbach part de la prémisse suivante : les propositions mathématiques sont indifférentes aux interprétations dont elles sont susceptibles en physique. Reichenbach adopte une conception à la fois *logiciste* et *formaliste* des mathématiques : *logiciste* en ce sens que les propositions mathématiques seraient réductibles à la logique ; *formaliste* dans la mesure où la nature des objets manipulés par le mathématicien ne serait jamais spécifiée, conformément aux prescriptions de Hilbert.

73. H. Reichenbach, *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*, Berlin, éd. Springer, 1920, p. 46.

Dans *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*, Reichenbach mentionne explicitement la théorie unifiée des champs de Weyl qu'il critique avec rigueur. D'après les notes 21 et 22, nous savons que Reichenbach a consulté l'édition de 1918 de *Raum, Zeit, Materie* ainsi que l'article « Gravitation und Elektrizität » publié dans les Sitz.-Ber. der Berliner Akademie. Dans la première édition de *Raum, Zeit, Materie*, Weyl défend déjà la thèse selon laquelle la géométrie et la physique seraient une seule et même chose. Pour autant, la théorie unifiée des champs ne figure pas encore dans cette première édition. À la page 77 de *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*, Reichenbach reprend la principale objection d'Einstein contre la théorie unifiée des champs de Weyl. Cette objection est fondée sur la référence à des horloges atomiques de même type spectral. Reichenbach connaît donc les fondements de la théorie de Weyl et les arguments d'Einstein qui la mettent en cause.

Venons-en aux éléments de réfutation spécifiques à Reichenbach. il commence par critiquer la thèse de Weyl selon laquelle la physique et la géométrie seraient une seule et même chose. Reichenbach rappelle que le contenu d'une théorie physique est irréductible à sa mathématisation :

> En réalité il est incorrect d'en conclure à l'instar de Weyl et Haas, que les mathématiques et la physique ne forment qu'une seule discipline. La question concernant la validité des axiomes au regard de la réalité doit être absolument distinguée de celle qui concerne les axiomes [logiquement] possibles. [74]

Il est donc rigoureusement impossible de déduire régulièrement une théorie physique exclusivement à partir d'un cadre géométrique construit *a priori*. Il faut encore s'assurer que les conséquences empiriques tirées de cette théorie résistent au tribunal de l'expérience :

> Si maintenant, à partir d'une géométrie générale, on croit pouvoir en déduire des théorèmes censés constituer un fondement nécessaire de la physique, on ne fait que répéter une vieille erreur. Cette objection doit être adressée à la généralisation de la théorie de la relativité proposée par Weyl. Une telle généralisation abandonne complètement le concept de longueur définie pour un instrument de mesure infinitésimal. Une telle généralisation est possible, mais le fait de savoir si elle est compatible avec la réalité ne dépend pas de sa signification en tant que géométrie générale des actions de contact. Voilà pourquoi la généralisation de Weyl doit être considérée du point de vue d'une théorie physique et elle ne peut être évaluée de manière critique qu'au moyen de l'expérience. [75]

Reichenbach reconnaît donc que la géométrie purement infinitésimale de Weyl est logiquement possible. Parallèlement, il énonce une critique d'ordre épistémologique qui va dans le sens des objections d'Einstein : Weyl croit qu'une géométrie purement infinitésimale est forcément

74. *ibid.*, p. 73.
75. *ibid.*, p. 73.

effective sur un plan empirique, en vertu des parentés qu'elle aurait avec une physique des actions de contact. Le ton adopté par Reichenbach est ici véhément : il n'hésite pas à qualifier la philosophie de Weyl de *prékantienne*. Il ne faudrait pas mécomprendre le sens de ce qualificatif : il ne désigne pas les philosophies chronologiquement antérieures au kantisme, mais bien un ensemble de doctrines qui outrepassent les conditions de l'expérience et les bornes étroites dans lesquelles Kant avait enfermé notre faculté de connaître. Lorsqu'il le qualifie de prékantien, Reichenbach critique donc sévèrement Weyl. En effet, le projet de Reichenbach consiste à modifier substantiellement les concepts hérités du kantisme de manière à obtenir une théorie de la connaissance conforme aux hypothèses relativistes en physique. L'attitude très spéculative de Weyl est donc jugée pire que la philosophie de Kant que Reichenbach cherche justement à réformer en profondeur.

Expliquons pourquoi Reichenbach estime que l'épistémologie de Weyl est encore moins souhaitable que la théorie kantienne de la connaissance. Rappelons que dans « Reine Infinitesimalgeometrie », Weyl croit que sa théorie peut englober tous les phénomènes physiques ; elle serait « totalisante ». Cette croyance montre à elle seule que la démarche de Weyl est spéculative. On peut immédiatement formuler ce contre-argument de style kantien : Weyl fait passer pour réelle une simple construction rationnelle. Relisons en effet le passage suivant, qui est issu de la *Dialectique transcendantale* :

> Une connaissance théorique est *spéculative*, quand elle porte sur un objet ou sur des concepts d'un objet, tels qu'on ne peut y arriver dans aucune expérience. Elle est opposée à la *connaissance de la nature*, laquelle ne s'étend pas à d'autres objets ou à d'autres prédicats de ces objets que ceux qui peuvent être donnés dans une expérience possible ».[76]

Une connaissance spéculative se fait passer pour le réel même ; en fait, elle n'est pas conforme aux conditions de l'expérience. Encore faut-il préciser à quel type de connaissance spéculative nous avons affaire dans l'article de Weyl. Sur un plan épistémologique, ses arguments relèvent de l'*apriorisme*. Weyl croit pouvoir déduire régulièrement une théorie physique censée embrasser les interactions gravitationnelles et électromagnétiques à partir d'un cadre géométrique construit entièrement *a priori*. La démarche suivie par Weyl est spéculative à une deuxième puissance, étant donné qu'il se fonde sur le postulat selon lequel la structure élémentaire de la matière pourrait être complètement traduite en termes de champs. Bref, une certaine forme de *réductionnisme* s'ajoute à l'*apriorisme* qui traverse de part en part les raisonnements menés par Weyl dans « Reine Infinitesimalgeometrie ».

L'*apriorisme* de Weyl constitue la cible principale de Reichenbach :

76. E. Kant, *Critique de la raison pure*, [A 634-B 662, A 635-B663].

> Une axiomatisation d'ordre purement mathématique ne conduit jamais aux principes d'une théorie physique (...) Il est donc totalement faux de conclure à l'instar de Weyl et Haas que les mathématiques et la physique fusionnent en une unique discipline. [77]

Il fait donc ici une remarque qui ne peut guère être contestée : on ne saurait déduire régulièrement des principes physiques à partir d'axiomes mathématiques, nous pensons à ceux qui régissent la géométrie purement infinitésimale au sens de Weyl. Par exemple, ce dernier remarque l'identité formelle entre le tenseur $F = \mathrm{d}\varphi$ en géométrie purement infinitésimale et le tenseur de Faraday. Cette identité formelle lui sert de prétexte pour conférer une effectivité physique au cadre géométrique qu'il a initialement construit pour généraliser la géométrie riemannienne. Aux yeux de Reichenbach, cette démarche est artificielle et elle est bien loin de suffire pour élaborer une théorie physique conforme aux conditions de l'expérience.

Reichenbach affine sa réfutation de la théorie unifiée des champs de Weyl dans un ouvrage plus tardif intitulé *Philosophie der Raum-Zeit Lehre* (1928). Il réexamine en détail les articles fondateurs de Weyl, à savoir « Reine Infinitesimalgeometrie » et « Gravitation und Elektrizität ». Il commence par reconnaître l'importance des travaux de Weyl en mathématiques : ils ouvrent la voie à la théorie des espaces généralisés de Cartan au cours des années 20. Reichenbach rappelle qu'à l'instar d'Einstein, qui est donc parvenu à interpréter géométriquement les phénomènes gravitationnels, Weyl entend interpréter géométriquement les phénomènes électromagnétiques. Mais une telle analogie montre très vite ses limites : la relativité générale est assujettie à un fait physique fondamental, à savoir le « principe d'équivalence ». Dans la théorie unitaire de Weyl, il n'y a nul « fait fondamental » comparable au principe d'équivalence [78]. Elle est fondée sur un postulat ou, plus exactement, une *pétition de principe* — il serait possible de rendre compte de la structure élémentaire de la matière entièrement en termes de champs — adossé à un cadre géométrique construit *a priori*. Parallèlement, Reichenbach identifie avec clairvoyance la surinterprétation que commet Weyl lorsqu'il décrit le passage de la relativité restreinte à la relativité générale. Pour Weyl, ce passage s'effectuerait sur des bases purement géométriques. Il s'agit là d'une extrapolation, car la relativité générale repose sur des principes physiques et non pas seulement géométriques :

77. H. Reichenbach, *op. cit.*, p. 73. Voir également T. Ryckman, *op. cit.*, p. 84. Ryckman fait le commentaire suivant à propos de Haas : « Insipired by Hilberts axiomatic method and by Weyls theory, the Leipzig physicist Arthur Haas had written in 1920 a provocative paper entitled Physics as Geometrical Necessity ».

78. C'est ce que souligne justement Pauli dans l'article qu'il rédige pour l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Voir à ce propos W. Pauli, « Relativitätstheorie » (1920), in *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, V.2., Leipzig, éd. Teubner, 1904-1922, p. 763.

> Mais l'interprétation géométrique de la gravitation n'a-t-elle pas contribué à un progrès physique ? Elle a sans doute contribué à un tel progrès mais elle n'est pas identique à lui. Elle a eu pour effet des découvertes physiques, mais elle n'est pas ces découvertes mêmes. [79]

Sans nier l'importance de la mathématisation de la relativité générale, Reichenbach insiste sur le fait que la signification physique d'une telle théorie n'est pas réductible au cadre géométrique dans lequel elle doit être pensée. Autrement dit, Weyl survalorise la place de la géométrie en relativité générale, au point de croire qu'il suffit d'avoir la bonne géométrie pour en déduire la bonne théorie physique.

Cependant, il nous semble que les critiques de Reichenbach et d'Einstein ne sont pas assez nuancées. Si la première théorie de jauge développée par Weyl en 1918 ne satisfait pas aux conditions de l'expérience, les idées qu'il développe alors ne resteront pas lettre morte. En effet, entre 1926 et 1928, Fock, London et Weyl lui-même modifient cette théorie de manière à ce qu'elle s'applique au contexte de la mécanique quantique relativiste. Pour ce faire, Weyl remplace notamment le facteur d'échelle par un facteur de phase et les fonctions à valeurs dans les nombres réels positifs par les fonctions à valeurs dans le groupe U(1) des nombres complexes de module 1. Autant il est impossible de déduire régulièrement des principes physiques à partir d'un cadre mathématique — puisqu'il faut d'abord s'assurer que les conséquences tirées de ces principes sont vérifiées empiriquement —; autant il n'est pas justifié d'en inférer trop hâtivement que les idées développées par Weyl en 1918 ne peuvent pas trouver d'application en physique. Preuve s'il en est qu'une connaissance spéculative n'est pas *stérile*, même lorsqu'elle ne se conforme pas d'emblée aux conditions de l'expérience.

La quasi identité entre géométrie et physique que défend Weyl à la fin des années 10 est sans doute discutable sur le plan de la méthode. Inversement, la ligne de partage entre mathématiques et physique opérée par Reichenbach dès 1920 n'est pas non plus satisfaisante car elle ne permet pas de savoir pourquoi la géométrie et la physique se conditionnent mutuellement en relativité générale. Lautman critique avec pertinence la ligne de démarcation entre énoncés physiques et mathématiques qui est déjà présente chez Reichenbach en 1920 et qui sera même radicalisée par les principaux représentants du « positivisme logique » à la fin des années 20 et au début des années 30. Ainsi, dans sa communication au congrès international de philosophie scientifique, intitulée « Mathématiques et réalité », Lautman s'oppose à deux aspects du positivisme logique : (a) le logicisme, (b) l'instauration d'une ligne de démarcation entre physique et mathématiques. Seul le second point nous intéresse ici. Contre Carnap, Lautman remarque que « Le véritable problème philosophique serait plutôt de sa-

79. H. Reichenbach, *Philosophie der Raum-Zeit Lehre*, Berlin et Leipzig, éd. De Gruyter, 1928, p. 368.

voir comment une géométrie différentielle peut devenir théorie de la gravitation. Cet accord entre géométrie et physique est la preuve de l'intelligibilité de l'univers ≫.[80] Bref, lorsque l'on sépare nettement ≪ énoncés mathématiques ≫ et ≪ lois physiques ≫ on est immédiatement conduit à vider la théorie de la relativité générale de son sens. Lautman ajoute : ≪ la physique moderne, loin de maintenir la distinction d'une forme géométrique et d'une matière physique, unit au contraire données spatio-temporelles et données matérielles dans l'armature commune d'un mode de représentation synthétique des phénomènes ; que ce soit par la représentation tensorielle de la théorie de la relativité ou par les équations hamiltoniennes de la mécanique ≫.[81] Autant, il n'est pas possible d'identifier mathématiques et physique au risque de construire des théories dont les conséquences empiriques ne sont pas vérifiées, autant il est vain de vouloir les séparer puisque l'on s'empêche alors d'examiner l'essentiel, à savoir la manière dont elles se conditionnent mutuellement.

3.5.3 Hilbert contre Weyl

Dans ce qui précède, nous avons vu combien la théorie unifiée des champs de Weyl devait être située dans le prolongement des fameuses conférences de Hilbert consacrées aux fondements de la physique. On reconnaît de part et d'autre une même volonté d'annexer la physique à la géométrie et de mesurer l'effectivité des méthodes variationnelles. On pourrait donc s'attendre à ce que Hilbert accueille avec enthousiasme la théorie unitaire de Weyl. Il n'en est rien, pour des raisons à la fois philosophiques et scientifiques. Ainsi, à la fin de son ouvrage intitulé *Natur und mathematisches Erkennen* — qui reproduit une série de conférences sur les mathématiques et la physique prononcées à Göttingen en 1919 et en 1920 —, Hilbert se montre particulièrement sévère à l'encontre de Weyl. Il s'agirait là d'une idéalisation poussée à sa dernière extrémité — et donc déconnectée de tout rapport au réel — et surtout d'une ≪ physique hégélienne ≫, i.e. totalisante. Hilbert commet ici une erreur d'appréciation : Weyl n'a pas été marqué par les thèses de Hegel mais par celles de Fichte entre 1916 et 1918. Il n'en reste pas moins que Hilbert critique le caractère hautement spéculatif de la démarche suivie par Weyl en 1918. En outre, l'épistémologie sous-jacente aux travaux de Hilbert sur les fondements de la relativité générale s'apparente à une réforme du kantisme : Hilbert s'approprie la notion d'idée régulatrice que Kant introduit dans la ≪ Dialectique transcendantale ≫ ; en revanche, il laisse totalement de côté ≪ l'Esthétique transcendantale ≫ qui ne semble plus

80. A. Lautman, ≪ Mathématiques et réalité ≫ (1935), in *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, *op. cit.*, p. 49.
81. *ibid.*, p. 49.

guère opératoire pour penser l'espace-temps de la relativité générale. Nous nous proposons donc de repérer les modifications que Hilbert fait subir à la philosophie kantienne dans le cadre de la formalisation de la relativité générale avant de décrire la teneur de ses arguments à l'encontre de Weyl.

Pour situer convenablement Hilbert par rapport à la théorie kantienne de la connaissance, nous pouvons notamment nous appuyer sur la prépublication de K. Brading et de T. Ryckman intitulée « Hilbert's "foundation of physics" : Gravitation and Electromagnetism within the axiomatic method ». À la différence de Reichenbach, Schlick ou encore Carnap, Hilbert refuse de réduire les mathématiques à la logique et il n'entend pas remplacer le kantisme par une philosophie de style empiriste. Pour certains représentants du positivisme logique, il n'existe que deux sources de connaissance : l'expérience et la déduction ; ils nient donc qu'il puisse y avoir des intuitions pures. Ce présupposé n'est pas satisfaisant aux yeux de Hilbert parce qu'il ne permet pas de comprendre pourquoi les mathématiques — qui seraient fondées sur la déduction — sont nécessaires pour parvenir à une détermination exacte de la nature. Voilà pourquoi, à côté de la déduction et de l'expérience, Hilbert introduit une troisième source de connaissance qu'il qualifie de « point de vue intuitif *a priori* » [anschauliche Einstellung *a priori*]. Ainsi, dans un article de 1930 intitulé « Naturerkennen und Logik », Hilbert présente les arguments suivants :

> Qui veut malgré tout nier que les lois de l'univers proviennent de l'expérience, doit affirmer qu'outre la déduction et l'expérience, il existe une troisième source de connaissance. À la vérité, plusieurs philosophes — et Kant est le défenseur classique de ce point de vue — ont soutenu qu'en dehors de la logique et de l'expérience, nous possédons certaines connaissances *a priori* au sujet de la réalité. J'admets donc que certains actes d'intellection *a priori* sont nécessaires pour construire des ouvrages théoriques et qu'ils président toujours à la réalisation de nos connaissances. Je crois qu'en dernière instance, le savoir mathématique repose également sur une forme d'intellection intuitive de cette nature, et que nous avons également besoin d'un certain point de vue intuitif et *a priori* pour construire la théorie des nombres. De la sorte, la pensée fondamentale la plus générale de la théorie kantienne de la connaissance conserve toute sa pertinence : à savoir le problème philosophique qui consiste à déterminer un tel point de vue intuitif *a priori* mais aussi à rechercher la condition de possibilité de toute connaissance conceptuelle et, en même temps, de toute expérience. [82]

Hilbert admet donc avec Kant que la déduction et l'expérience ne sont pas les seules sources de nos connaissances. En particulier, Hilbert estime qu'il existe une intuition *a priori* qui conditionne nos connaissances. Mais, à la différence de Kant, il n'identifie pas cette intuition

82. D. Hilbert, « Naturerkennen und Logik » (1930), in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, Berlin, éd. Springer, 1935, p. 382-383.

aux deux formes de notre sensibilité que sont l'espace et le temps ; il semble d'ailleurs que cette « Anschauung » soit plus intellectuelle que sensible aux yeux de Hilbert. Toujours est-il que pour ce dernier, il doit y avoir des représentations intuitives sous-jacentes à la constitution de nos connaissances en mathématiques — théorie des nombres comprise — et en physique. Hilbert entend donc résoudre le problème de style kantien qui consiste à déterminer les conditions de possibilité de nos connaissances, qu'elles soient purement conceptuelles ou empiriques. Cependant, il estime que Kant assigne un rôle beaucoup trop contraignant à l'intuition et aux principes *a priori* dans sa théorie de la connaissance : « Kant a largement surévalué le rôle et l'étendue de l'*a priori* ».[83] Parallèlement, l'« Esthétique transcendantale » de Kant repose sur une vision subjective et anthropomorphe de la nature. Hilbert opère en conséquence une distinction entre les *conditions de l'expérience*, qui demeurent soumises à notre sensibilité, et les *conditions de la physique* qui dépendent en dernière instance du principe de relativité, ce dernier constituant donc un élément tout à fait essentiel pour parvenir à une connaissance objective de la nature complètement décentrée de notre subjectivité. Hilbert s'approprie une nouvelle fois Kant, lorsqu'il affirme que le principe de relativité est une *idée régulatrice* de la raison qui nous permet d'aboutir à une conception unifiée et systématique de la nature.

À vrai dire, l'ancrage de l'épistémologie implicite de Hilbert dans la philosophie de Kant n'a rien de neuf. Il ne faut pas oublier que les *Grundlagen der Geometrie* s'ouvrent sur la référence au fameux passage qui vient clore la « Dialectique transcendantale » : « Ainsi toute connaissance commence par des intuitions, va de là à des concepts et finit par des idées » [A 702 - B 730]. Cette hiérarchie entre intuitions, concepts et idées traverse justement les travaux que Hilbert consacre aux fondements de la relativité générale fin 1915. Ainsi, le principe général d'invariance des lois de la nature est érigé au rang d'axiome fondamental de la relativité générale à côté d'un principe de moindre action. Pour Hilbert, cet axiome est donc une idée régulatrice au sens de Kant, i.e. un énoncé *a priori* engendré par notre raison qui permet de penser d'un seul tenant les diverses lois de la nature au sein d'une théorie unifiée et systématique. Hilbert demeure donc très attaché à l'héritage conceptuel kantien. Philosophiquement, il ne se situe donc pas sur le même plan que les positivistes logiques. Schlick, Reichenbach et Carnap rejettent catégoriquement l'existence d'une intuition *a priori* et, à bien des égards, ils réduisent les mathématiques à n'être qu'une promotion de la logique. Comble du paradoxe, pour justifier la réduction des mathématiques à des connaissances analytiques, Schlick se réclame de Hilbert dans son *Allgemeine Erkenntnislehre* (première édition 1918, seconde édition 1925).

83. *ibid.*, p. 383.

D'un autre côté, Hilbert rejette vigoureusement ce qu'il appelle la physique hégélienne ou la conception hégélienne de la réalité. Il définit la *physique hégélienne* de la sorte : elle repose sur le postulat selon lequel le devenir physique est une manifestation de nos concepts ou de nos constructions intellectuelles. Hilbert introduit cette terminologie dans les conférences qu'il prononce à Göttingen en 1919-1920. [84] Il critique à nouveaux frais la conception hégélienne de la réalité dans l'article de 1930 que nous avons déjà partiellement commenté. L'idée selon laquelle tout le devenir naturel [Naturgeschehen] dérive de simples concepts est une pétition de principe contraire à la théorie de la connaissance de style kantien que Hilbert entend développer.

Il peut sembler inapproprié de dire que la théorie unifiée des champs de Weyl s'apparente à de la physique hégélienne puisque Weyl s'appuie exclusivement sur Fichte et non sur Hegel à partir de 1916. Le problème n'est pas là. Le vocable « physique hégélienne » n'appartient dans le fond qu'à Hilbert : il utilise cette expression pour qualifier — mais aussi pour discréditer — certaines théories dans lesquelles le devenir physique est complètement assujetti à de simples concepts. Or, c'est exactement cette ligne que franchit Weyl au début de « Reine Infinitesimalgeometrie ». Sans même mentionner les inconséquences de ce projet sur un plan empirique, Hilbert s'étonne de l'assurance avec laquelle Weyl affirme être parvenu à une théorie qui rend raison de « tous les processus physiques ». La prétention à une unification dernière de la physique n'incite-t-elle pas à la prudence ? Ne peut-on pas soupçonner Weyl d'être dogmatique ? De manière sous-jacente, celui-ci est convaincu que la réalité physique est réduite à deux types d'interactions — à savoir les interactions gravitationnelles et les interactions électromagnétiques — qui ne sont jamais que la manifestation de la même métrique d'univers. Qu'il nous suffise de mentionner une nouvelle fois ce passage, tiré de « Reine Infinitesimalgeometrie » :

> Je parvins à une métrique d'univers d'où dérivent non seulement les effets gravitationnels, mais encore les effets électromagnétiques, bref une métrique qui, comme on peut le supposer à bon droit, rend raison de tous les processus physiques. D'après cette théorie, tout le réel effectif qui se présente dans l'univers est une manifestation de cette métrique d'univers ; les concepts physiques ne sont rien d'autre que ceux de la géométrie. [85]

On a bien là un assujettissement complet du devenir physique à de simples concepts. C'est pourquoi Hilbert affirme avec véhémence que la théorie unitaire de Weyl est de la physique hégélienne. Il s'agit d'une idéalisation extrême [eine extreme Idealisierung] qui outrepasse

84. D. Hilbert, *Natur und mathematisches Erkennen* (1919-1920), Basel, Boston, Berlin, éd. Birkhäuser, 1990, p. 100.

85. H. Weyl, « Reine Infinitesimalgeometrie », *op. cit.*, p. 385.

les conditions de l'expérience. Si Hilbert admet que toute théorie physique décrit des situations idéales que les données de l'expérience ne font jamais qu'approcher, il n'en reste pas moins qu'il existe un seuil à ne pas dépasser dans le processus d'idéalisation. Au-delà de ce seuil, une théorie physique perd tout contact avec le réel. Enfin, l'idée selon laquelle on pourrait mathématiser la réalité dans son intégralité relève du non-sens : le réel est certes mathématisable — à condition que le physicien prenne conscience qu'il manipule des épures, c'est-à-dire des idéalités qui lui permettent de formuler des hypothèses empiriquement testables —; mais il n'est pas *entièrement* mathématisable. Hilbert rejoint une nouvelle fois Kant : les concepts mathématiques sont comme des idées régulatrices au regard de la physique; ils permettent de l'unifier de proche en proche. Par contre, notre connaissance de la nature ne saurait parvenir à une unité achevée. Cette dernière n'est jamais qu'un horizon régulateur qui oriente nos recherches tout en demeurant inatteignable.

3.6 La théorie de Weyl et le second théorème de Noether

Dans un article intitulé ≪ Which Symmetry ? Noether, Weyl and conservation of electric charge ≫, K. Brading montre que le raisonnement mené par Weyl en 1918 pour parvenir aux lois de conservation de l'énergie-impulsion et de la charge électrique constitue *formellement* une application du second théorème de Noether dont nous expliquerons le sens dans ce qui suit. Sur un plan mathématique, nous verrons que cette assertion est parfaitement exacte. [86] Il semblerait que ce rapprochement soit également justifié historiquement puisque Noether publie également ses deux théorèmes au cours de l'année 1918. En outre, Weyl et Noether participent tous deux à la mathématisation de la relativité générale dans le prolongement des travaux effectués par Hilbert et Klein de la fin de l'année 1915 à l'année 1918 au sein de l'université de Göttingen. Bien que Weyl soit recruté à l'ETH de Zürich en 1913, il demeure très attaché à l'école de physique mathématique de Göttingen. On ne peut donc pas dire qu'il élabore sa théorie unifiée des champs dans l'isolement. Pour sa part, Noether s'installe définitivement à Göttingen en 1916 : ses compétences en théorie des invariants différentiels lui permettent de clarifier définitivement le statut des lois de conservation de l'énergie en relativité générale notamment.

Malgré cela, nous voudrions fortement tempérer le rapprochement établi par K. Brading. En réalité, Noether et Weyl ne partagent pas les mêmes motivations, mais surtout nous

86. K. Brading, ≪ Which Symmetry ? Noether, Weyl and Conservation of Electric Charge ≫, in *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* **33**, 2002, p. 3-22.

allons établir qu'ils parviennent à leurs résultats respectifs indépendamment l'un de l'autre. On peut donc seulement affirmer à titre *rétrospectif* que la théorie unifiée des champs de Weyl entre dans le cadre du second théorème de Noether. Nous nous proposons tout d'abord de revenir brièvement sur le contexte historique dans lequel s'inscrit l'article de Noether intitulé ≪ Invariante Variationsprobleme ≫ avant de déterminer sur quelles bases on peut le rapprocher des travaux de Weyl consacrés à la théorie unifiée des champs.

La contextualisation interne des travaux de Noether sur les symétries et les lois de conservation a été résumée avec rigueur par K. Brading dans son article intitulé ≪ A Note on General Relativity, Energy Conservation and Noether's Theorems ≫. Dans sa réponse à Hilbert de 1917 qui est consacrée à la première note sur les fondements de la physique, Klein repère que les lois de conservation de l'énergie sont des identités mathématiques en relativité générale ; or, cette singularité n'apparaît pas dans le cas des lois de conservation de l'énergie qui nous sont familières — par exemple en mécanique classique ou en relativité restreinte. [87] Hilbert donne immédiatement raison à Klein et il formule le postulat suivant, qu'il conviendrait de démontrer : le fait que les lois de conservation de l'énergie soient des identités constitue une propriété caractéristique de la relativité générale. [88] Parallèlement, Klein entame une correspondance avec Einstein au cours de l'année 1917. Dans sa lettre à Klein datée du 13 mars 1918, Einstein refuse de penser (a) que les lois de conservation de l'énergie sont des identités en relativité générale et (b) qu'elles auraient un statut différent par rapport à celles qui prévalent en mécanique classique et en relativité restreinte. Les motivations d'E. Noether dans ≪ Invariante Variationsprobleme ≫ — qui est reçu en septembre 1918 — sont de trois ordres : (a) elle donne raison à Klein et à Hilbert contre Einstein concernant le statut des lois de conservation en relativité générale ; (b) elle prouve le postulat d'Hilbert ; (c) elle parvient même à le généraliser en s'appuyant sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Les deux théorèmes de Noether permettent de mesurer avec exactitude en quoi les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion n'ont pas le même statut en mécanique classique et en relativité restreinte d'une part, en relativité générale d'autre part.

Cependant, il serait erroné de réduire le sens et la portée des deux théorèmes de Noether à cette motivation première. Le point de vue qu'elle adopte est d'une très grande généralité d'un point de vue formel. En effet, elle s'appuie sur des lagrangiens généralisés. Elle ne se réfère

87. F. Klein an D. Hilbert, in ≪ Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik ≫, (1917) in F. Klein, *Werke*, Bd. III, *op. cit.*, p. 553 et suiv.

88. D. Hilbert an F. Klein, *op. cit.*, p. 561 : ≪ ja ich möchte diesen Umstand sogar als ein charakteristisches Merkmal der allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnen. Für meine Behauptung wäre der mathematische Beweis erbringbar ≫.

donc pas spécifiquement aux lagrangiens adaptés à la mécanique classique, à la relativité restreinte ou à la relativité générale. De même, elle ne spécifie à aucun moment la nature des groupes de Lie — à un nombre fini (resp. infini) de paramètres — qui interviennent dans ses deux théorèmes. Les résultats auxquels elle parvient peuvent en droit trouver une application dans d'autres théories physiques à côté de celles que nous venons de mentionner. Bref, si les motivations premières qui président à la rédaction de cet article sont bien circonscrites, les principes auxquels Noether aboutit connaîtront en réalité une très grande fortune en physique mathématique, d'ailleurs bien au-delà de la relativité générale. Sans doute cela est-il dû au niveau remarquable de généralité qu'elle adopte.

Voici comment nous pouvons présenter le premier théorème de Noether, qui constitue peu ou prou une généralisation des théorèmes de conservation de la mécanique (classique et relativiste). C'est d'ailleurs ce qu'affirme Noether elle-même : « le théorème I contient tous les théorèmes connus en mécanique etc. au sujet des intégrales premières ».[89] Rappelons tout d'abord qu'un lagrangien généralisé L est une fonction lisse de n variables indépendantes, $(x_1, x_2, ..., x_n)$, p variables dépendantes $(u_1, u_2, ..., u_p)$ ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m. On le note de manière contractée $L(x, u^{(m)})$. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, de frontière lisse. Un *problème variationnel généralisé* consiste à trouver un extremum à une fonctionnelle :

$$I = \int_\Omega L(x, u^{(m)})dx.$$

Dans son premier théorème, Noether s'intéresse à des groupes de Lie de dimension finie. De manière schématique, précisons qu'un groupe de Lie est une structure mixte : un groupe de Lie réel $\mathfrak{G}$ (resp. complexe) de dimension finie ρ (ou à ρ paramètres) est une variété différentiable (resp. analytique) de dimension finie ρ munie d'une structure de groupe telle que les opérations produit et inverse soient lisses (resp. analytiques). Précisons qu'un groupe de Lie $\mathfrak{G}$ à ρ paramètres admet ρ générateurs infinitésimaux qui forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$[90] associée à $\mathfrak{G}$. Géométriquement parlant, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie $\mathfrak{G}$ est l'espace tangent en l'identité de $\mathfrak{G}$.[91] Voici comment elle formule ce premier théorème :

89. E. Noether, « Problèmes variationnels invariants », trad. Meersseman et Kosmann-Schwarzbach, in. Y. Kosmann-Schwarzbach, *Les théorèmes de Noether, invariance et lois de conservation au XX*e *siècle*, Palaiseau, éd. de l'École Polytechnique, 2004, p. 8.

90. Selon la terminologie encore en vigueur à la fin des années 10 et au cours des années 20, Noether ne parle pas d'algèbre de Lie, mais de groupe infinitésimal.

91. Nous verrons qu'en 1923, Weyl axiomatise le concept de groupe infinitésimal, i.e. d'algèbre de Lie réelle ou complexe : il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) muni d'un crochet $[\cdot, \cdot]$, i.e. d'une forme bilinéaire antisymétrique et satisfaisant à l'identité de Jacobi $[[x; y]; z] + [[y; z]; x] + [[z; x]; y] = 0$.

> Si l'intégrale I est invariante par rapport à un groupe $\mathfrak{G}_\rho$, alors il y a ρ combinaisons linéairement indépendantes entre les expressions lagrangiennes qui deviennent des divergences — et réciproquement, il résulte de cela l'invariance de I par $\mathfrak{G}_\rho$. [92]

Appliquons le premier théorème de Noether à la mécanique classique, le groupe $\mathfrak{G}$ correspond au *groupe des transformations galiléennes* définies par

$$\begin{cases} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{cases}$$

— en mécanique classique, une transformation de Galilée détermine le passage d'un référentiel inertiel T à un référentiel inertiel T' en mouvement de translation uniforme à la vitesse v par rapport à T le long de l'axe des x, celui-ci n'étant pas privilégié. Le groupe de Galilée est à dix paramètres et l'on peut faire correspondre exactement dix lois de conservation aux dix générateurs infinitésimaux de ce groupe. Plus spécifiquement, à l'invariance par translation dans l'espace est associée la conservation de l'impulsion totale du système dynamique étudié, à l'invariance par translation dans le temps est associée la conservation de l'énergie et à l'invariance par rotation dans l'espace correspond la conservation du moment cinétique. Dans le cas de la relativité restreinte, on remplace le groupe de Galilée par le *groupe de Poincaré*, c'est-à-dire le produit semi-direct de $\mathrm{O}(3,1)$ par le groupe des translations dans $\mathbb{R}^{3+1}$. Il s'agit également d'un groupe de Lie à dix paramètres auxquels sont donc associées dix lois de conservation en vertu du premier théorème de Noether.

Le second théorème de Noether s'applique à une situation différente. L'intégrale I est alors supposée invariante par un groupe $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ à un nombre *infini* de paramètres et dépendant de ρ fonctions arbitraires et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ. Voici comment E. Noether le formule :

> Si l'intégrale I est invariante par rapport à un groupe $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ dépendant de ρ fonctions arbitraires et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ, alors il y a ρ identités entre les expressions lagrangiennes et leurs dérivées jusqu'à l'ordre σ ; ici aussi la réciproque est valable. [93]

Il en est bien ainsi en relativité générale : dans ce cas, l'intégrale d'action est invariante par le *groupe des difféomorphismes* d'espace-temps, qui est un groupe de Lie de dimension infinie dépendant de quatre fonctions arbitraires. On trouve donc quatre identités, que Noether appelle des « lois de conservation impropres » afin de les distinguer des lois de

92. *ibid.*, p. 7.
93. *ibid.*, p. 7.

conservation propres que l'on trouve en mécanique classique et en relativité restreinte. [94] De même que le premier théorème peut se réaliser dans diverses théories physiques — en particulier la mécanique classique et la relativité restreinte —; de même le second théorème n'est pas circonscrit *a priori* à la relativité générale. Elle s'applique à toutes les théories généralement covariantes, i.e. qui satisfont au principe de covariance généralisé. E. Noether souligne d'ailleurs ce point dans son article : ≪ le théorème II peut être décrit comme la généralisation maximale, en théorie des groupes, de la "relativité générale" ≫. [95] Le second théorème de Noether s'applique donc à des théories qui se situent dans le prolongement de la relativité générale : c'est exactement le cas de la théorie unifiée des champs de Weyl.

Le premier théorème de Noether permet de caractériser le statut des lois de conservation en mécanique classique et en relativité restreinte. Par contre, en relativité générale, c'est le second théorème qui prévaut. Noether rend ainsi raison du caractère très spécifique des lois de conservation dans les théories généralement covariantes et elle démontre ainsi le postulat de Hilbert. [96]

Noether se fonde sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie pour obtenir deux théorèmes dont le niveau de généralité est remarquable. Ainsi, le second théorème de Noether s'applique à des théories généralement covariantes. Il s'étend en droit à la théorie unifiée des champs de Weyl. Rappelons justement qu'à la fin de ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, Weyl introduit la fonction d'action $\mathfrak{W}$ et l'intégrale d'action $\int \mathfrak{W} \mathrm{d}x$ adaptées à sa théorie. Il impose à cette intégrale d'être invariante par changement arbitraire des coordonnées d'espace-temps — i.e. par le groupe des difféomorphismes d'espace-temps qui dépend de quatre fonctions arbitraires — et par le groupe des transformations d'échelle qui dépend d'une fonction arbitraire. Les quatre lois de conservation de l'énergie-impulsion sont liées à la première invariance, la loi de conservation de la charge électrique à la seconde invariance. Une telle assertion, qui constitue aux yeux de Weyl l'argument le plus fort en faveur de sa théorie, entre parfaitement dans le cadre du second théorème de Noether. La profonde similitude entre les énoncés de Noether et de Weyl ne doit pourtant pas tromper. Nous allons prouver que Noether et Weyl

94. *ibid.*, p. 25.

95. *ibid.*, p. 8-9.

96. K. Brading, ≪ A Note on General Relativity, Energy Conservation and Noether's Theorems ≫, in *Einstein Studies*, **11** 2005, p. 131 : ≪ Hilbert's conjecture was that the difference between generally covariant theories such as General Relativity, and earlier theories such as classical mechanics, can be characterised by the differing status of energy conservation : in generally covariant theories, the energy conservation can be rewritten, using Euler-Lagrange equations, such that it holds "identically". The final section of Noether's paper concerns this Hilbertian assertion quoted above ≫.

parviennent à leurs résultats respectifs indépendamment l'un de l'autre.

L'article de Weyl intitulé « Reine Infinitesimalgeometrie » est reçu en juin 1918. Il est donc peu probable que Weyl ait eu connaissance des travaux de Noether consacrés aux lois de conservations pour des théories généralement covariantes. En effet, Klein présente les résultats de Noether le 26 juillet 1918 seulement. Comme le soulignent les traducteurs, la version définitive de l'article est envoyée en septembre 1918. Voilà qui explique pourquoi Weyl ne mentionne ce texte ni dans « Gravitation und Elektrizität », ni dans « Reine Infinitesimalgeometrie », mais seulement à partir de la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie*. Si on lit avec attention le début de l'article de Noether, on s'aperçoit qu'elle cite ouvertement Weyl. Elle affirme en substance :

> Ce qui suit repose ainsi sur une combinaison des méthodes du calcul variationnel formel et de la théorie des groupes de Lie. Pour des groupes particuliers et les problèmes variationnels, cette combinaison n'est pas nouvelle ; je citerai simplement Hamel et Herglotz pour certains groupes finis, Lorentz et ses élèves (par exemple Fokker), Weyl et Klein pour certains groupes infinis. [97]

Elle ne dit pas à quel texte de Weyl elle se réfère. Elle renvoie le lecteur à une note de Klein présentée le 19 juillet 1918. Ce dernier cite exclusivement la première édition de *Raum, Zeit, Materie* dans laquelle le projet de théorie unifiée des champs ne figure pas encore. Il est donc peu probable que Noether ait eu connaissance de la correspondance établie par Weyl entre la conservation de la charge électrique et « l'invariance de l'action par transformation d'échelle » qu'il juge fondamentale pour justifier sa théorie unitaire. On peut donc présumer qu'au cours de l'année 1918, Weyl et Noether établissent leurs résultats indépendamment l'un de l'autre. Mais cela ne signifie pas que leurs travaux sont sans rapport. En effet, nous avons vu l'attachement de Weyl aux méthodes qui caractérisent l'école de physique mathématique de Göttingen dont E. Noether est un membre prometteur entre 1916 et 1918. Tous deux utilisent des instruments de calcul variationnel dans une veine hilbertienne. On ne peut toutefois pas dire que Weyl applique le second théorème de Noether lorsqu'il élabore sa théorie unifiée des champs. Il est plus pertinent d'affirmer qu'il reconnaît après coup en 1919 que la double condition d'invariance qu'il impose à l'intégrale d'action adaptée à sa théorie entre dans le cadre du second théorème de Noether.

Toujours est-il que dans l'édition de 1919 de *Raum, Zeit, Materie*, Weyl mentionne avant tout l'article de Klein daté du 19 juillet, dans lequel ce dernier montre en quoi les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion sont liées à l'invariance de l'action par changements arbitraires de coordonnées d'espace-temps en relativité générale. En revanche, Weyl sous-

97. E. Noether, *op. cit.*, p. 3.

évalue l'article de Noether. En effet, il se contente de le mentionner très brièvement en note. De plus, les deux théorèmes de Noether ne sont guère que des « formules générales » aux yeux de Weyl. Dans son article du 19 juillet 1918, Klein reconnaît qu'il doit beaucoup aux idées d'E. Noether, ce qu'omet de rappeler Weyl.

Le lien entre les travaux de Weyl et de Noether de 1918 demeure rétrospectif. On peut d'ailleurs aisément comprendre les motifs d'un tel rapprochement. Bien que la théorie unifiée des champs élaborée par Weyl en 1918 ne soit pas effective sur un plan physique, elle n'est rien moins qu'une première théorie de jauge. Les idées séminales que développe Weyl à la fin des années 10 connaîtront d'ailleurs une très grande fortune dès la fin des années 20 en mécanique quantique. Parallèlement, le second théorème de Noether intervient de manière essentielle dans les théories de jauge. Il peut donc sembler naturel de montrer à titre rétrospectif que les dernières pages de « Infinitesimalgeometrie » et « Gravitation und Elektrizität » constituent une application du second théorème de Noether, d'autant qu'ils utilisent des méthodes variationnelles dans le prolongement de Hilbert. Il existe cependant trois écarts important entre les travaux de Noether et ceux de Weyl en 1918. Tout d'abord leurs *motivations* sont très différentes : Weyl prolonge le programme de Mie-Hilbert et il s'agit pour lui de parvenir à une théorie qui puisse rendre raison des interactions gravitationnelles et électromagnétiques. En revanche, Noether cherche à clarifier le statut des lois de conservation dans les théories généralement covariantes. Ensuite, ils ne se réfèrent pas exactement au même cadre conceptuel sur un plan mathématique, malgré leur référence commmune au calcul variationnel. Weyl privilégie les domaines de la géométrie différentielle et du calcul tensoriel en 1918, il n'est question de groupes de Lie que de manière implicite ; en revanche Noether s'intéresse à la théorie des invariants différentiels et à la théorie des groupes et algèbres de Lie. Enfin, ils n'ont pas du tout le même point de vue sur un plan épistémologique : Weyl adopte une posture très spéculative ; en particulier, il entend soumettre le réel physique dans son intégralité à un cadre géométrique construit *a priori*. En revanche, une généralité remarquable et une abstraction portée à son comble caractérisent en propre l'article de Noether sur les symétries et les lois de conservation. Elle parvient en effet à deux théorèmes qui font intervenir des lagrangiens généralisés et des groupes de Lie dont la nature n'est pas spécifiée. De plus, ces mêmes théorèmes admettent une diversité de réalisations en fonction des théories physiques auxquelles ils s'appliquent. Plutôt que de montrer que le procédé utilisé par Weyl pour parvenir à la conservation de la charge électrique entre dans le cadre du second théorème de Noether, il nous semble plus significatif sur un plan historique et épistémologique de souligner les écarts qui les séparent. De tels écarts iront d'ailleurs en s'accentuant dans le domaine des

mathématiques pures, comme nous le verrons dans la dernière partie de notre thèse.

3.7 Conclusion du troisième chapitre

Au terme de notre analyse de la géométrie purement infinitésimale de Weyl, nous devons d'abord souligner qu'elle est étroitement liée à une lecture mathématicienne de l'*Habilitationsvortrag* de Riemann : Weyl critique en effet le résidu de géométrie à distance qui subsiste en géométrie riemannienne. D'un autre côté, Weyl souhaite parvenir à une théorie unifiée des champs physiquement pertinente ; il entend prolonger la théorie de la relativité générale en se conformant au programme de Mie-Hilbert.

Il n'y a pas un mais plusieurs contextes superposables pour situer et comprendre le projet de Weyl. C'est déjà le cas lorsqu'on se limite aux écrits produits par Weyl durant cette période. Quels publics souhaite-t-il convaincre de la validité et de la viabilité de sa théorie en 1918 ? Non pas seulement des mathématiciens, mais aussi des physiciens. Voilà pourquoi il publie presque simultanément deux articles — à savoir « Reine Infinitesimalgeometrie » et « Gravitation und Elektrizität » — respectivement dans la *mathematische Zeitschrift* et les *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin.* Le premier article s'adresse manifestement à des lecteurs mathématiciens dans un style qui mêle réflexions philosophiques et formalisation géométrique ; le second article, qui est reçu par Einstein en mars 1918, est plus concis, plus direct, comme s'il fallait parvenir sans détours aux résultats physiques attachés à la théorie unifiée des champs. Pour autant, une comparaison terme à terme entre ces deux textes ne permettrait pas de comprendre les diverses sources utilisées par Weyl. Nous nous sommes davantage attachés à l'étude de « Reine Infinitesimalgeometrie » dans la mesure où le raisonnement et l'écriture de Weyl sont alors moins *transparents* et plus hétérogènes. L'introduction à cet article nous laisse deviner que Weyl adhère pleinement aux thèses de Hilbert sur le rapport entre géométrie et physique. En outre, les concepts philosophiques qu'il utilise montrent à quel point il s'est imprégné de l'idéalisme fichtéen au moment où il élabore sa théorie unifiée des champs.

Sans être exhaustifs, nous avons souligné l'extrême complexité de la réception critique de cette théorie en privilégiant trois protagonistes : Einstein, Reichenbach et Hilbert. La confrontation Einstein / Weyl permet de mesurer tout l'écart qui sépare un physicien théoricien d'un physicien mathématicien. La référence à Reichenbach nous a permis de rappeler que la relativité générale fait l'objet de réflexions épistémologiques et philosophiques intenses au cours des années 20. La théorie unifiée des champs de Weyl est de fait lue et interprétée dans ce

contexte qui oppose les « positivistes » aux néokantiens. Rappelons que Reichenbach s'est formé aux théories relativistes auprès d'Einstein et que son ouvrage sur la relativité (1920) est justement dédié à Einstein. D'où la proximité de leurs analyses et de leurs objections à l'encontre de la théorie unitaire de Weyl.

De son côté, Hilbert accueille avec sévérité la théorie de Weyl : elle appartient au registre de la physique hégélienne, elle n'est que spéculation gratuite. Pourtant, Weyl se situe dans le prolongement du programme de Mie-Hilbert entre 1918 et 1920. Avec cette seule donnée, nous aurions pu construire une filiation simple entre Hilbert et Weyl. Mais la référence à d'autres textes de Hilbert et de Weyl montre justement des divergences importantes d'un point de vue épistémologique et en termes de méthode, malgré leur adhésion commune au programme initié par Mie en 1912.

Enfin, notre comparaison entre « Reine Infinitesimalgeometrie » de Weyl et « Invariante Variationsprobleme » de Noether nous a permis de dégager les singularités de ces deux protagonistes dont les travaux sont représentatifs des méthodes préconisées par l'école de physique mathématique de Göttingen. Ainsi, la théorie unitaire de Weyl peut recevoir une diversité d'éclairages et de statuts en fonction des éléments de comparaison que nous avons utilisés. Ces différents points de vue sur un même projet théorique ne s'annulent pas, ils se complètent. La théorie de Weyl est (1) une extension de la relativité générale aux phénomènes électromagnétiques, (2) une réalisation possible du programme de Mie-Hilbert, (3) une généralisation de la géométrie riemannienne qui ouvre la voie à la théorie des espaces généralisés de Cartan, (4) un exemple qui illustre après coup le second théorème de Noether, (5) une spéculation philosophique et mathématique sur le réel physique qui outrepasse les conditions de l'expérience, (6) une première théorie de jauge à partir de laquelle pourront être construites par analogie d'autres théories de jauge.

Nous aurons à revenir une nouvelle fois sur cette théorie unitaire dans la dernière partie de notre thèse pour la comparer à la seconde théorie de jauge que Weyl élabore en 1928-1929 à la suite de Schrödinger, Fock et London. Ainsi, le projet d'une généralisation de la géométrie riemannienne que propose Weyl a une effectivité quasiment immédiate en mathématiques, comme en témoignent les travaux de Cartan sur les espaces généralisés. L'idée de jauge a également une effectivité à plus long terme en physique dans le contexte de la mécanique quantique relativiste.

Toujours est-il que la lecture mathématicienne du *Habilitationsvortrag* de Riemann proposée par Weyl n'aboutit pas seulement à une géométrie purement infinitésimale qui généralise la géométrie riemannienne en rejetant l'hypothèse d'une comparaison directe des longueurs

de deux vecteurs attachés à des points distincts d'une variété (riemannienne). Il discute un autre présupposé de Riemann, à savoir le privilège que ce dernier accorde aux variétés pythagoriciennes dans l'infinitésimal. Il s'agit là du problème de l'espace que Weyl énonce pour la première fois en 1919 avant de le reformuler et de le résoudre entre 1921 et 1923.

Chapitre 4

Le problème de l'espace : une première incursion dans la théorie des groupes et des algèbres de Lie

Le ≪ problème de l'espace ≫ prolonge et généralise le problème de Helmholtz-Lie dans le contexte de la géométrie différentielle et de la relativité générale. Rappelons à la suite de J. Tits que le problème de Helmholtz-Lie n'est autre que ≪ la caractérisation commune des géométries euclidiennes et non euclidiennes par des propriétés de ≪ libre mobilité ≫ de leurs groupes de mouvements ≫. [1] Le problème de Helmholtz-Lie s'applique exclusivement à des variétés métriques *homogènes*, i.e. dont la mesure de courbure est constante. Cette restriction est due à l'axiome de libre mobilité dont on trouve déjà la trace dans le *Habilitationsvortrag* de Riemann. Helmholtz le formule explicitement dans son article intitulé ≪ Über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen ≫ (1868) : ≪ On présuppose une mobilité parfaitement libre des corps rigides, c'est-à-dire, on suppose que chaque point en eux peut être déplacé continûment vers le lieu de chaque autre point, tant que son mouvement n'est pas restreint par les équations qui existent entre lui et les autres points restants du système rigide auquel il appartient ≫. [2]

En relativité générale, l'espace-temps est une variété dont la structure métrique est conditionnée par la répartition de la matière ; elle n'est pas homogène. Le problème de l'espace ne peut donc plus être formulé dans le cadre restrictif hérité de Helmholtz et Lie : il doit s'étendre à des variétés dont la mesure de courbure n'est pas constante. Le but de Weyl

1. J. Tits, *Notice sur les Travaux scientifiques*, I.2. Résumé des Travaux antérieurs à 1972, p. 9.

2. H. Helmholtz, ≪ Über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen ≫, *op. cit.*, p. 199, nous avons repris la traduction en français proposée par J. Merker, *op. cit.*, p. 221.

consiste à montrer le caractère remarquable de certaines classes de métriques qu'il qualifie de pythagoriciennes. Une métrique sur une variété lisse est pythagoricienne au sens de Weyl si elle est définie par une forme quadratique *non dégénérée*. Les métriques riemannienne ou lorentzienne satisfont à ce réquisit. En quoi les classes de métriques pythagoriciennes au sens de Weyl méritent-elles d'être privilégiées ? En fait, les variétés munies d'une métrique « pythagoricienne » possèdent la propriété remarquable suivante : ce sont les seules variétés métriques admettant une unique connexion affine compatible avec leur structure métrique. Le problème de l'espace consiste à prouver cette assertion.

Parmi les publications que Weyl consacre à cette difficulté, nous pouvons mentionner le commentaire qui accompagne la publication par ses propres soins du *Habilitationsvotrag* de Riemann (première édition 1919, seconde édition 1921, troisième édition 1923), deux articles intitulés « Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung » (1922) et « das Raumproblem » (1922), la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie* (1921) et, enfin, son ouvrage de référence sur le problème de l'espace issu d'une série de conférences données à Barcelone, à savoir *Die mathematische Analyse des Raumproblems*. Certes, Weyl propose une première formulation du problème de l'espace en 1919. Mais c'est seulement en 1921 qu'il consacre l'essentiel de ses recherches à la résolution de cette difficulté, c'est-à-dire au moment où il réalise que sa théorie unifiée des champs ne permet pas de rendre raison de la structure élémentaire de la matière. Dès mars 1918, Einstein mettait en cause la viabilité de cette théorie, puisqu'elle recèle une série d'inconséquences empiriques. En 1920, Reichenbach et Hilbert critiquaient pour leur part la posture spéculative de Weyl. La même année, Pauli convainc Weyl que les phénomènes à l'échelle atomique ne peuvent pas être représentés et expliqués dans le cadre d'une théorie classique des champs. [3]

Les réflexions de Weyl sur la nature pythagoricienne de l'espace dans l'infinitésimal sont de nature *métagéométrique*. Nous empruntons cette dénomination à E. Scholz. Weyl ne s'intéresse pas ici aux conséquences qui dérivent d'une certaine classe de géométries mais aux principes fondamentaux auxquels elles sont assujetties. Nous avons vu dans ce qui précède que Weyl adopte une posture *aprioriste* lorsqu'il déduit sa théorie unitaire à partir de sa géométrie purement infinitésimale. Lorsqu'il résout le problème de l'espace, cette posture est globalement maintenue : il s'agit en effet de montrer *a priori*, c'est-à-dire indépendamment de l'expérience, que l'espace-temps doit être pythagoricien dans l'infinitésimal. Lorsque nous comparons les réflexions de Weyl sur la nature de l'espace issues de « Reine Infinitesimalgeo-

3. Voir à ce propos E. Scholz, « Hermann Weyl's analysis « the problem of space » and the origin of gauge structures », *science in context*, **17**, 2004, p. 175.

metrie » et de « Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung », nous observons une série de déplacements et de transformations qui méritent d'être explicitées. Pour ne donner qu'un seul exemple, la ligne de démarcation entre les propriétés *a priori* et les propriétés *a posteriori* de l'univers physique se déplace sensiblement. Ainsi, dans « Reine Infinitesimalgeometrie », la notion de continuum amorphe au sens de l'*analysis situs* caractérise à elle seule l'espace-temps comme forme *a priori* indépendante de la matière des phénomènes. Avec le problème de l'espace, Weyl enrichit notablement la structure *a priori* de l'espace-temps. Celle-ci n'est plus restreinte à ses propriétés topologiques, elle s'étend à la *nature* de la métrique de l'espace-temps qui doit donc être pythagoricienne infinitésimalement. Dans un langage très imagé, Weyl affirme que seule l'« orientation mutuelle » des métriques en différents points est *a posteriori*. C'est par exemple le cas de la variété d'espace-temps en relativité générale. Il s'agit *a priori* d'une variété pythagoricienne dans l'infinitésimal au sens de Weyl, puisque la métrique de Minkowski est une forme bilinéaire, symétrique et non dégénérée. En revanche, « l'orientation mutuelle des métriques en différents points » dépend de la répartition de la matière. Mathématiquement parlant, dans une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne M, lorsque l'on déplace un vecteur tangent $v_p \in T_P M$ le long d'un lacet issu de $P \in M$, son orientation n'est généralement pas conservée lorsqu'il revient en P.

Dans un premier temps, nous nous proposons d'identifier les différentes sources qui permettent à Weyl de *construire* le problème de l'espace. Dans un second temps, nous verrons que Weyl examine à nouveaux frais la théorie kantienne de l'espace ainsi que la distinction entre principes analytiques et synthétiques *a priori*. Dans un troisième temps, nous montrerons en quoi la résolution de ce problème constitue un prolongement de l'analyse phénoménologique en tant que science des essences. Dans un dernier temps, nous expliciterons la solution que propose Weyl au problème de l'espace. Il se fonde alors sur des rudiments en théorie des groupes de Lie linéaires.

4.1 La construction du problème de l'espace

Le « problème de l'espace » tire d'abord sa source d'un travail de lecture, d'interprétation et de réécriture du *Habilitationsvortrag* de Riemann. Comme nous l'avons déjà précisé, Weyl entreprend d'éditer la *Leçon d'habilitation* de Riemann pour elle-même chez Springer. Il s'adonne alors à un véritable commentaire critique et historique, doublé d'une réécriture du texte de Riemann dans un langage rigoureusement formalisé. Un passage de cette *Leçon d'habilitation* en particulier attire l'attention de Weyl. Citons-le *in extenso* :

> L'élément linéaire pourra être une fonction homogène quelconque du premier degré des quantités dx qui restera invariable lorsqu'on changera les signes de toutes les quantités dx, et dans laquelle les constantes arbitraires sont des fonctions continues des quantités x. Pour trouver les cas les plus simples, je chercherai d'abord une expression pour les variétés de $n-1$ dimensions qui sont partout équidistantes de l'origine de l'élément linéaire ; c'est-à-dire que je chercherai une fonction continue du lieu qui les distingue les unes des autres. Cette fonction devra ou croître ou décroître dans toutes les directions à partir de l'origine ; j'admettrai qu'elle croisse dans toutes les directions, et qu'ainsi elle ait un minimum à l'origine. Il faut alors, si ses quotients différentiels du premier ordre et du second ordre sont finis, que la différentielle du premier ordre s'annule et que celle du second ordre ne devienne jamais négative ; j'admettrai qu'elle reste toujours positive. Cette expression différentielle du second ordre reste donc constante, lorsque ds reste constant, et croît dans le rapport des carrés, lorsque les quantités dx et par suite aussi ds varient toutes ensemble dans un même rapport ; elle est donc = const. $\times$ ds^2 et par conséquent ds = la racine carrée d'une fonction entière homogène du second ordre, toujours positive, des quantités dx, dans laquelle les coefficients sont des fonctions des quantités x. [4]

À la fin de ce passage Riemann se restreint à des variétés dont la structure métrique est déterminée par une forme quadratique définie positive. Mais, si l'on prête attention aux arguments qui précèdent, on se rend compte qu'il envisage déjà les variétés ≪ riemanniennes ≫ à l'intérieur d'une classe plus générale de variétés métriques. Weyl réécrit le raisonnement de Riemann en ces termes : pour doter une variété différentielle d'une structure métrique, il n'est pas nécessaire de se donner d'emblée la racine carrée d'une forme différentielle quadratique, on peut se contenter d'introduire une fonction f ≪ homogène et toujours positive ≫, c'est-à-dire une fonction des coordonnées différentielles dx_i telle que :

$$f(\lambda \mathrm{d}x_1, ..., \lambda \mathrm{d}x_n) = |\lambda| f(\mathrm{d}x_1, ..., \mathrm{d}x_n), \quad f \geqslant 0$$

Les métriques définies de la sorte sont mieux connues sous le nom de ≪ métriques de Finsler ≫ : Finsler les étudie de manière systématique dans sa thèse en 1918, ce que ne manque pas de préciser Weyl dès 1919. Toutefois, ni en 1921, ni en 1923 Weyl ne donne plus de précision sur le contenu des travaux de Finsler : il se contente donc de les mentionner, mais il n'en tire pas explicitement parti, contrairement à É. Cartan qui consacre deux exposés aux espaces de Finsler en 1933. Dès le *Habilitationsvortrag*, Riemann introduit donc une classe très générale de variétés métriques ; mais il se restreint presque aussitôt aux variétés dites riemanniennes — donc à une classe très particulière de variétés finslériennes — pour des raisons essentiellement pragmatiques. Il estime qu'elles sont les seules à avoir un sens géométrique bien déterminé, mais il ne démontre pas cette assertion :

4. B. Riemann, ≪ Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie ≫, *op. cit.*, p. 287.

> Pour l'espace, si l'on exprime la position du point en coordonnées rectangulaires, on a $\mathrm{d}s = \sqrt{\sum(\mathrm{d}x^2)}$; l'espace est donc compris dans ce cas le plus simple de tous. Le cas le plus simple après celui-là comprendrait les variétés dans lesquelles l'élément linéaire serait exprimé par la racine quatrième d'une expression différentielle du quatrième degré. L'étude de cette classe plus générale n'exigerait pas des principes essentiellement différents, mais elle prendrait un temps assez considérable et ne contribuerait pas beaucoup, relativement, à éclaircir la théorie de l'espace, d'autant plus que les résultats ne pourraient s'exprimer géométriquement. [5]

En réalité, les variétés riemanniennes jouissent d'une propriété mathématique remarquable : elles sont les seules variétés finslériennes qui admettent une *unique* connexion affine compatible avec leur structure métrique, cette connexion étant celle de Levi-Civita. Riemann ne possédait pas les concepts nécessaires pour sélectionner les variétés « riemanniennes » sur des bases rigoureusement mathématiques. En revanche, Weyl a en sa possession une définition explicite de la connexion affine — dans le cas des variétés différentielles quelconques — qu'il formule en toutes lettres en 1918 ; de plus, il généralise le théorème de Levi-Civita [6] au variétés « weyliennes ». Le problème de l'espace dans sa version de 1919 consiste donc à *identifier* la propriété remarquable que possèdent les variétés riemanniennes parmi les variétés finslériennes. La résolution de ce problème revient à démontrer que les variétés riemanniennes sont les *seules* variétés finslériennes possédant une *unique* connexion affine compatible avec leur structure métrique.

D'après notre analyse, il ne faudrait pas croire que le problème de l'espace tel qu'il est formulé par Weyl se trouve déjà en toutes lettres dans la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Ce dernier se contente d'attribuer aux variétés « riemanniennes » un statut privilégié parmi toutes les variétés métriques qu'il conçoit pour des raisons pragmatiques, mais il ne rend pas raison de ce choix. À notre sens, la construction du problème de l'espace tire sa source du mode de lecture adopté par Weyl lorsqu'il parcourt le *Habilitationsvortrag* en 1918-1925. Loin de considérer ce texte comme l'origine absolue de la géométrie différentielle et riemannienne dans le cas des variétés de dimension finie quelconque, Weyl en exhibe les présupposés implicites dont il évalue le bien-fondé. Nous avons déjà pu le constater lorsque il élabore sa géométrie purement infinitésimale : il part du principe qu'il existe un élément résiduel de géométrie à distance chez Riemann qu'il convient de mettre de côté. Weyl n'a donc nullement l'intention de sacraliser la *Leçon d'habilitation* de Riemann, comme si elle était constituée de vérités définitives. Il s'agit, tout au contraire, d'évaluer les hypothèses implicites et explicites que

5. *ibid.*, p. 287.

6. selon lequel la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion affine compatible avec la métrique $\mathbf{g}$ dans une variété riemannienne.

formule Riemann dans ce texte, de manière à pouvoir ouvrir des champs d'investigation inédits. Nous pensons à la géométrie purement infinitésimale et au problème de l'espace. De tels champs d'investigation ne sont pas contenus en tant que tels dans le *Habilitationsvotrag* de Riemann ; ils dérivent de l'activité lectorale et interprétative menée par Weyl autour de ce texte entre 1918 et 1925.

La formulation du problème de l'espace dépend donc en partie de cette lecture très particulière du *Habilitationsvortrag* que l'on doit à Weyl et que l'on peut expliciter comme suit : interroger de manière systématique les présupposés de Riemann pour savoir s'ils ne sont pas restrictifs ou s'ils ne peuvent pas faire l'objet d'une démonstration rigoureuse. Nous pourrions presque dire que la *construction* du problème de l'espace dépend d'une *déconstruction* systématique de la *Leçon d'habilitation* et d'une *analyse critique* des hypothèses mathématiques qui conduisent Riemann à se restreindre *in fine* aux variétés ≪ riemanniennes ≫. À partir de 1921, Weyl formule le problème de l'espace d'une manière plus abstraite : à quelles conditions une variété (métrique) doit-elle satisfaire pour qu'il existe une *unique* connexion affine compatible avec sa structure métrique ? De manière plus intuitive, il s'agit de dégager les propriétés mathématiques qui caractérisent *a priori* la *nature* de la métrique $\mathbf{g}$ de l'univers quadridimensionnel de la relativité générale, les *coefficients* g_{ij} de la métrique étant en revanche déterminés *a posteriori* en fonction de la répartition de la matière dans l'univers. Nous allons voir que Weyl ne peut énoncer et résoudre cette difficulté qu'en s'appuyant sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Weyl réalise donc ici pour la première fois l'effectivité d'une telle théorie en géométrie différentielle.

Une autre source intervient dans la construction du problème de l'espace : il s'agit en l'occurrence du problème de Helmholtz-Lie, — également appelé problème *classique* de l'espace — auxquels se mesurent Helmholtz, Klein, Lie, Hilbert et Poincaré durant le dernier tiers du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle. La caractérisation commune des géométries métriques euclidienne et non euclidiennes repose *in fine* sur l'étude des groupes de mouvements que l'on peut associer à elles. Poincaré développe à ce propos une conception conventionnaliste de la géométrie que certains empiristes logiques, en l'occurrence Carnap, Schlick et Reichenbach, croiront pouvoir étendre au cadre de la relativité générale. La question est de savoir s'il est possible de maintenir en l'état le *conventionnalisme* de Poincaré lorsque l'on passe du problème *classique* de l'espace au problème de l'espace au sens de Weyl. Dans le premier cas de figure, la structure de l'espace est assujettie à l'axiome de libre mobilité selon lequel les grandeurs peuvent être déplacées d'un lieu à un autre de l'espace sans distorsion. Seules trois géométries satisfont à ce réquisit : la géométrie euclidienne, la géométrie hyperbolique

et la géométrie elliptique. Les axiomes qui président à ces trois géométries ne sont ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des faits qui dériveraient de l'expérience, i.e. des jugements synthétiques *a posteriori*, mais des conventions. Pour Poincaré aucune de ces trois géométries n'est vraie au sens où elle s'imposerait *nécessairement* pour structurer l'espace physique. Voilà pourquoi, il affirme que les axiomes qui les fondent ne peuvent pas être des jugements synthétiques *a priori*. Inversement, ils ne sont pas des faits expérimentaux, sans quoi la géométrie perdrait son statut de science exacte. Nous avons donc affaire à des hypothèses librement construites par notre entendement que nous choisissons en fonction d'une exigence de commodité. Nous pouvons très bien utiliser la géométrie hyperbolique ou la géométrie euclidienne afin de mathématiser l'espace dans lequel nous vivons. Il n'en demeure pas moins que la géométrie euclidienne est la plus commode pour parvenir à cette fin. [7]

M. Friedman a très justement montré que le conventionnalisme de Poincaré en géométrie est tributaire du problème classique de l'espace. Pour le dire autrement, les thèses de Poincaré ne peuvent pas s'étendre en droit au contexte de la relativité générale. Friedman commence par faire le rappel suivant :

> Et c'est précisément là, dans le contexte du théorème de Helmholtz-Lie, qu'apparaît une situation conceptuelle remarquable : il s'avère qu'il y a trois et seulement trois géométries possibles qui sont compatibles avec le principe de libre mobilité — et donc compatibles, comme nous l'avons vu, avec notre principe de coordination fondamental qui lie les géométries pure et appliquée. Notre principe de coordination fondamental laisse entièrement le choix d'une géométrie euclidienne ou non euclidienne, et il est donc tout à fait sensé pour Poincaré, dans cette situation conceptuelle très particulière, d'affirmer que le choix de la géométrie euclidienne est alors déterminé par une convention ou une stipulation fondée sur la plus grande simplicité mathématique de la géométrie spécifiquement euclidienne. [8]

Au moins deux données empêchent d'appliquer en l'état le conventionnalisme de Poincaré à la théorie einsteinienne de la gravitation. Tout d'abord, l'axiome de libre mobilité perd toute validité dans ce cadre théorique : la structure métrique de l'univers dépend de la répartition de la matière en son sein de telle sorte que, d'un point de vue mathématique, nous n'avons pas affaire à une variété homogène. En outre, il n'y a qu'une façon de coordonner géométrie et contenu physique en relativité générale, il s'agit en l'occurrence du principe d'équivalence :

7. Voir en particulier H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, *op. cit.*, p. 76.

8. M. Friedman, ≪ Philosophie, physique et fondements de la géométrie ≫, in J. Bouveresse et P. Wagner (sous la dir. de) *Mathématiques et expérience*, l'empirisme logique à l'épreuve, Paris, éd. Odile Jacob, 2008, pp. 318-319.

> Ici [i.e. en relativité générale], à la différence de la situation tout à fait spéciale à laquelle Poincaré avait affaire, nous ne sommes pas confrontés à ce que nous pourrions appeler un principe de coordination générique ou commun, qui laisse toujours ouvert le choix spécifique de la structure géométrique de l'espace physique, mais plutôt à un principe de coordination unique ou singulier (le principe d'équivalence), compatible avec une et une seule structure géométrique — la structure géométrique de l'espace-temps physique donnée par la formulation par Einstein de la relativité générale. Ici, l'idée d'un *choix* conventionnel ou arbitraire pour la géométrie physique a perdu toute signification et toute application réelle — à la fois d'un point de vue mathématique et d'un point de vue empirique. [9]

Weyl retire à l'axiome de libre mobilité toute validité lorsqu'il formule son problème de l'espace. Corrélativement, le rapport qu'il établit entre géométrie et espace physique n'est pas de style conventionnaliste ce qui, à en croire M. Friedman, est parfaitement cohérent d'un point de vue épistémologique. Weyl ne partage donc pas les thèses avancées par Schlick, ce dernier étant convaincu que le conventionnalisme de Poincaré peut s'étendre à la relativité générale. [10] La construction du problème de l'espace au sens de Weyl repose sur la prise de conscience de l'écart historique, conceptuel et théorique qui sépare la relativité générale du problème de Helmholtz-Lie. On peut observer un tel écart au début de l'article de Weyl intitulé ≪ Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung ≫ :

> Depuis les recherches de Helmholtz et Lie sur les fondements de la géométrie, nos vues sur la nature de l'espace ou, plus généralement, concernant le médium extensif du monde extérieur, ont subi un changement profond en raison de la théorie de la relativité. Nous n'avons plus affaire à un continuum tridimensionnel, mais à un continuum quadridimensionnel, dont la métrique est fondée sur une forme quadratique qui, au lieu d'être définie positive, est indéfinie ; en outre, nous ne croyons plus en l'homogénéité métrique de ce médium — cette homogénéité étant au fondement de l'axiomatique helmholtzienne — parce que le champ métrique ne nous est pas donné une fois pour toutes, au contraire, il dépend causalement de la matière. Ainsi nous devons formuler à nouveaux frais le problème de l'espace qui consiste à saisir la nature métrique de l'espace à partir de raisons qui soient principielles et les plus simples possibles. [11]

Au début de ce passage, Weyl renvoie implicitement le lecteur à l'article de Helmholtz intitulé ≪ Über die Thatsachen, welche die der Geometrie zu Grunde liegen ≫ (1868) et au tome III de la *Theorie der Transformationsgruppen* de Lie (1893). Weyl propose une vision proprement discontinuiste des divers travaux qui ont pour objet les principes sur lesquels repose la structure métrique de l'espace physique : la théorie de la relativité générale exige une refonte

9. *ibid.*, p. 319.
10. M. Schlick, *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik*, Berlin, éd. Springer, zweite Auflage, 1919, p. 28.
11. H. Weyl, ≪ Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung ≫, *Mathematische Zeitschrift*, **12**, 1922, p. 114.

complète du problème de l'espace. Deux arguments expliquent cela : tout d'abord, nous ne nous intéressons plus à l'espace usuel dans lequel nous vivons mais à une variété quadridimensionnelle dont la structure métrique est définie par une forme quadratique indéfinie ; ensuite, l'axiome de libre mobilité que l'on doit à Helmholtz est équivalent à l'idée selon laquelle l'espace serait homogène, or ce présupposé est invalidé en relativité générale. Le problème de l'espace ne peut donc plus être traité globalement ; il est nécessaire de lui substituer un point de vue infinitésimal.

Pour résumer, le problème de Helmholtz-Lie consistait à étudier les groupes de mouvements des corps rigides — qui sont censés ne pas être déformés lorsqu'ils subissent un déplacement. Dans cette perspective, l'espace métrique, qu'il soit euclidien ou non-euclidien, est une forme parfaitement homogène et indépendante de la matière et des corps qu'elle contient. Tel n'est pas le cas en relativité générale : il n'existe pas de corps absolument rigide : tout corps subit une déformation lorsqu'il se déplace à l'intérieur de la variété d'espace-temps. L'axiome de libre mobilité ne peut donc plus être considéré comme un principe constitutif de la nature de l'espace. Il convient donc de lui substituer d'autres principes qui entrent en conformité avec les réquisits de la relativité générale. La recherche de tels principes est l'une des conditions pour résoudre le problème de l'espace au sens de Weyl. Corrélativement, ce dernier détermine le statut épistémologique de ces nouveaux principes : s'agit-il de pures *conventions* librement choisies par notre entendement ou bien ont-ils un rôle constitutif dans notre appréhension de l'espace physique ? C'est ce que nous entendons élucider.

4.2 Analyse du problème de l'espace et formulation des principes qui orientent sa résolution

Weyl dégage progressivement les concepts mathématiques et les principes nécessaires à une formulation adéquate du problème de l'espace. Nous devons être attentifs ici à la chronologie des publications et au statut des textes auxquels nous nous référons. Weyl commence à *analyser* et à résoudre le problème de l'espace dans le § 18 de *Raum, Zeit, Materie* (quatrième édition, 1921), mais il n'explicite pas encore clairement les étapes de son raisonnement. La conférence qu'il donne ensuite sous le titre « Das Raumproblem » dans le cadre de la Jenenser Tagung en septembre 1921 s'adresse à un public de non-initiés : Weyl compare tout d'abord le point de vue des philosophes et celui des mathématiciens sur la nature de l'espace (I) ; il revient ensuite sur la méthode axiomatique utilisée par Hilbert dans ses *Grundlagen der*

Geometrie et qu'il applique à la géométrie de Minkowski (II) ; il propose de redéfinir les concepts essentiels qui interviennent en géométrie riemannienne (connexion de Levi-Civita, tenseur de courbure, etc.) et il caractérise les variétés à courbure constante (III) ; il synthétise le problème de Helmholtz-Lie et sa résolution par Lie et Engel en 1893 (IV) ; il formule enfin le problème de l'espace dans le cadre de la relativité générale et il le résout schématiquement (V). Si cette conférence ne permet pas d'élucider complètement le « Raumproblem », elle a au moins le mérite de résumer les diverses ramifications d'ordre philosophique et mathématique qui président à sa construction. Enfin, l'article « Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung » contient l'analyse et la résolution définitives de cette difficulté. Dans *Die mathematische Analyse des Raumproblems* (1923) qui constitue la source la plus complète sur le Raumproblem, Weyl suit le plan suivant : (a) *analyse* conceptuelle du problème de l'espace, (b) formulation des *principes synthétiques* qui président à sa résolution, (c) traduction de ces principes dans le langage de la théorie des groupes et des algèbres de Lie, (d) résolution du problème de l'espace, (e) implications géométriques qui dérivent de cette solution. Les étapes (a), (b) et (c) sont traitées intégralement, quoique de manière très ramassée, dans le § 1 de « Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung ».

Weyl distingue deux types de principes *a priori* qui permettent de clarifier le problème de l'espace : des principes *analytiques* qui, comme le laisse entendre ce qualificatif, dérivent d'une analyse conceptuelle des notions de métrique, de connexion métrique et de transport parallèle : il s'agit de l'étape (a) dans le plan que nous venons de présenter ; des principes *synthétiques* « au sens kantien du terme » [im Kantischen Sinne] [12] qui viennent *structurer* et *constituer* l'espace-temps de la physique — leur formulation constitue l'objectif principal de l'étape (b). Cette seconde catégorie de principes relie donc des concepts qui ne sont pas contenus les uns dans les autres. [13] Les jugements analytiques au sens kantien du terme sont également appelés jugements *explicatifs* ; en effet, ils consistent à analyser les composantes des concepts. C'est exactement ce que fait Weyl lorsqu'il revient sur les notions de métrique en un point, de connexion métrique et de déplacement parallèle. En revanche, les jugements synthétiques sont des jugements *extensifs* : selon Kant, ils engendrent à eux seuls des connaissances vraiment nouvelles parce qu'ils mettent en relation des concepts qui ne sont pas contenus les uns dans les autres.

12. H. Weyl, « Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung », *op. cit.*, p. 116.

13. E. Kant, *Critique de la raison pure*, [A 6 - B 10] : « Dans tous les jugements où est pensé le rapport d'un sujet au prédicat (...) ce rapport est possible de deux façons. Ou bien le prédicat B appartient au sujet A comme quelque chose qui est contenu (de manière cachée) dans ce concept A ; ou bien B est entièrement en dehors de A, quoique en rapport avec lui ».

Il ne faudrait pas croire que Weyl reprend cette distinction kantienne à la lettre. Pour Kant seule une intuition sensible peut servir de support pour engendrer des jugements synthétiques. Dans le cas de la géométrie, cette intuition correspond à l'espace que Kant envisage globalement et auquel il assigne la propriété d'être homogène. Pour Weyl en revanche, les réflexions sur la nature de l'espace-temps de la physique exigent de rompre avec ce cadre restrictif. Les principes synthétiques *a priori* qu'il introduit n'ont donc pas pour support une intuition spatiale au sens de Kant. Cependant Weyl ne nous dit pas sur quoi il fonde la possibilité de tels principes. Toujours est-il qu'il refuse d'assujettir ses réflexions métagéométriques sur la nature de l'espace à une démarche purement analytique ; il se singularise donc par rapport à une tradition héritée de la philosophie analytique et prolongée par les empiristes logiques. Weyl s'inscrit manifestement en faux contre l'idée selon laquelle la géométrie pure serait constituée exclusivement de jugements analytiques.

Détaillons les principes *analytiques* qu'utilise Weyl pour résoudre le problème de l'espace. Soient M une variété lisse de dimension n dont la structure métrique n'est pas encore spécifiée et p un point de M. Weyl commence par caractériser ce qu'il appelle une congruence dans le voisinage immédiat de p, c'est-à-dire sur le « corps des vecteurs » [Vektorkörper] au point p, i.e. l'espace tangent T_pM, qui admet naturellement une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Weyl affirme qu'on connaît une métrique au point p, lorsque l'on parvient à identifier les congruences parmi les automorphismes de T_pM laissant p fixe. L'ensemble de ces congruences au point p forme un groupe G_p. De plus, ces congruences, que Weyl appelle des « rotations », doivent préserver les volumes. Cela implique qu'elles sont de déterminant 1. Deux groupes de congruences G_{p_0} et G_{p_1} attachés à des points distincts p_0 et p_1 de M sont isomorphes entre eux et isomorphes à un groupe $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. [14] En outre, si p_0 et p_1 sont suffisamment proches, un système de coordonnées locales centré en p_0 permet de définir un isomorphisme h entre l'espace tangent en p_1 et l'espace tangent en p_0. On impose la condition suivante pour un certain choix de coordonnées locales : $G_{p_1} = h^{-1} G_{p_0} h$. Le groupe G caractérise la *nature* de la métrique qui doit être choisie une fois pour toutes sur M. Pour l'instant, le raisonnement analytique de Weyl consiste exclusivement à préciser ce qu'il entend par congruence *en* un point p de M.

Il indique ensuite comment concevoir une congruence *entre* des points infiniment voisins p et p' de M. Pour ce faire, il est nécessaire de munir M d'un « transport congruent » $\Lambda = (\Lambda^i_{jk})$ dont nous ne spécifierons pas la nature. [15] Deux transports congruents Λ et $\widetilde{\Lambda}$ sont équivalents,

14. H. Weyl, *op. cit.*, p. 115.

15. D'un point de vue moderne, on veut une connexion compatible à l'action de G et sans torsion.

i.e. ils caractérisent essentiellement la même connexion métrique si et seulement si la différence $\Lambda - \widetilde{\Lambda}$ est une forme différentielle à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. En termes de coordonnées, on a donc

$$\widetilde{\Lambda}^i_{jk}(p) = \Lambda^i_{jk}(p) + A^i_{jk}(p),$$

avec $(A^i_{jk}(p))_{ik}$ dans $\mathfrak{g}$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Une connexion métrique abstraite $[\Lambda]$ n'est rien d'autre qu'une classe d'équivalence de transports congruents Λ modulo la relation d'équivalence que nous venons d'introduire. Après avoir défini les concepts de congruence en un point d'une variété et de connexion métrique (abstraite) Weyl achève son analyse conceptuelle du problème de l'espace en revenant sur la notion de connexion affine qu'il avait déjà introduite en toute généralité dans « Reine Infinitesimalgeometrie ». [16]

Venons-en aux deux principes *synthétiques a priori* auxquels l'espace doit être assujetti. Le premier principe également appelé « postulat de liberté » est formulé comme suit : « la nature de l'espace est compatible avec toute connexion métrique possible ». [17] Weyl ne se restreint donc pas aux variétés riemanniennes. Ce premier principe est analogue à l'axiome de libre mobilité dans le contexte de la relativité générale. Rappelons que les géométries non euclidiennes et la géométrie euclidienne sont compatibles avec l'axiome de libre mobilité. Par analogie, le postulat de liberté de Weyl ne privilégie aucune connexion métrique en particulier. L'arbitraire qui se dégage de ce premier principe est contrebalancé par la contrainte résultant du second principe, également appelé postulat de *cohésion* : il existe une seule connexion affine compatible avec la structure métrique de M. Autrement dit, chaque connexion métrique abstraite $[\Lambda]$ contient exactement une connexion affine Γ [18] ; ou encore, il existe une unique connexion affine Γ telle que l'on ait en tout point p de M :

$$\Gamma^i_{jk}(p) = \Lambda^i_{jk}(p) + A^i_{jk}(p).$$

Ce second principe impose par voie de conséquence des contraintes sur les propriétés de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Ainsi, la résolution du problème de l'espace au sens de Weyl est guidée par deux types de principes, des principes analytiques qui permettent de caractériser et d'approfondir les notions de métrique en un point, de connexion métrique et de déplacement parallèle ; des

16. Nous renvoyons donc le lecteur à la section 3.3 de la présente partie pour une définition de ce concept.

17. H. Weyl, *Temps, espace, matière*, *op. cit.*, p. 122.

18. Chez Weyl, une connexion affine est nécessairement sans torsion, ce qui se traduit par la condition de symétrie sur les symboles de Christoffel $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Le second principe peut donc s'énoncer comme suit : étant donné une connexion métrique Λ, il existe une unique forme différentielle A à valeurs dans $\mathfrak{g}$ telle que la connexion $\Lambda + A$ soit sans torsion.

principes synthétiques qui déterminent des libertés et des contraintes sur la nature de la métrique à laquelle l'espace-temps de la physique doit être assujetti. La recherche et la formulation de ces deux types de principes confirme l'interprétation de Scholz selon laquelle la résolution du problème de l'espace relève de la métagéométrie. En effet, loin de s'intéresser aux conséquences d'un certain cadre géométrique arbitrairement donné, Weyl étudie les principes qui commandent la structure métrique de l'espace-temps en relativité générale. Lors de ces investigations, Weyl combine analyse conceptuelle et *synthèse*. D'un point de vue philosophique, il privilégie la phénoménologie au détriment du conventionnalisme de Poincaré.

4.3 La résolution du problème de l'espace

Dès la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie*, Weyl traduit les deux principes synthétiques *a priori* qui orientent la résolution du problème de l'espace dans le langage de la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Il s'agit de l'étape (c) dans son ouvrage intitulé *Die mathematische Analyse des Raumproblems*. Voyons comment il procède : selon le point de vue de Helmholtz-Lie, M est supposée homogène en vertu de l'axiome de libre mobilité, il y a alors une stricte identité entre les groupes de « rotations » définis en différents points de M. Weyl met justement de côté cette condition d'homogénéité. Les groupes de congruence ou de « rotations » attachés à des points distincts de M diffèrent alors quant à leur *orientation*, mais ils partagent la même algèbre de Lie abstraite $\mathfrak{g}$. Weyl traduit donc les deux principes synthétiques *a priori* — en l'occurrence le principe de liberté et le principe de cohésion — en termes de conditions sur le « groupe infinitésimal » $\mathfrak{g}$ qui, comme nous l'avons souligné précédemment, intervient de manière essentielle pour caractériser une connexion métrique abstraite $[\Lambda]$ sur M. Pour résoudre le problème de l'espace, il suffit donc d'identifier les algèbres de Lie qui réalisent ces conditions.

Avant de parvenir à ce point, Weyl effectue une série de rappels sur les groupes de Lie linéaires et les groupes infinitésimaux auxquels ils sont associés. Ce *niveau* de généralité est commandé par le problème de l'espace : en effet, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui intéresse Weyl est contenue dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, c'est-à dire dans l'algèbre de Lie constituée de l'ensemble des matrices $n \times n$ de trace nulle. Il est donc inutile de s'appuyer sur la définition abstraite d'une algèbre de Lie que Weyl propose cependant dans l'annexe 8 à la *mathematische Analyse des Raumproblems*.[19] Il la reprend dans ses articles de 1925-1926 consacrés aux représentations des groupes de Lie complexes semi-simples et il en tire alors pleinement profit. Ce niveau

19. H. Weyl, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin, éd. Springer, 1923, p. 83.

supérieur de généralité est de nouveau commandé par le type de problème que Weyl souhaite résoudre. En effet, il démontre *in fine* le théorème de complète réductibilité pour tous les groupes de Lie complexes semi-simples et non pas seulement pour certains groupes de Lie « classiques ».

Voici les éléments de connaissance que Weyl présente sur les groupes de Lie linéaires et qu'il tire sans doute de l'ouvrage de Lie et Scheffers intitulé *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen.*[20] Il se donne un groupe de Lie linéaire $\mathfrak{G} \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ de dimension r. Les éléments de $\mathfrak{G}$ sont tout simplement des matrices. Il considère ensuite l'ensemble des « matrices infiniment voisines de l'identité E » de G, c'est-à-dire l'espace tangent à $\mathfrak{G}$ en l'identité E de G. Il démontre que cet espace tangent, noté $\mathfrak{g}$, est une multiplicité r-dimensionnelle — nous dirions que $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel de dimension r. Cela posé, Weyl introduit l'exponentielle de matrice

$$\exp A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + ...$$

et il indique que l'image de $\mathfrak{g}$ par l'application exp n'est pas nécessairement $\mathfrak{G}$ tout entier :

> On obtient ainsi chaque matrice du groupe (ou au moins toutes celles qui se laissent atteindre continûment à l'intérieur du groupe à partir de l'identité) en faisant parcourir à A tout l'ensemble $\mathfrak{g}$.[21]

Pour le dire autrement, soit $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ le groupe infinitésimal — i.e. l'algèbre de Lie qui lui est associée —, le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est la composante connexe de l'identité. Pour illustrer le propos de Weyl, prenons l'exemple du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$. Ce n'est pas un groupe connexe, i.e. il ne peut pas être considéré d'un seul tenant. Il admet deux composantes connexes, à savoir le groupe $\mathrm{SO}(n)$ des matrices orthogonales de déterminant 1 et l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant -1. Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est la composante connexe de l'identité de $\mathrm{O}(n)$; en conséquence le sous-groupe engendré par $\exp(\mathfrak{o}(n))$ n'est pas $\mathrm{O}(n)$ tout entier, mais bien $\mathrm{SO}(n)$.

Weyl remarque ensuite que le groupe infinitésimal $\mathfrak{g}$ est stable par l'application $(A, B) \mapsto AB - BA$: « si A et B sont deux opérations infinitésimales du groupe, $AB - BA$ en est

20. S. Lie, G. Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*, Leipzig, éd. Teubner, 1893. Weyl ne découvre pas subitement cet ouvrage en 1921-1923 au moment où il résout le problème de l'espace. En réalité, dans son cours en analyse complexe (1910), Weyl consacre un paragraphe aux « Gruppentheoretische[n] Grundlagen der Lieschen Theorie ». Plus concrètement, il applique la théorie des groupes continus de Lie à l'etude du groupe des fractions rationnelles agissant sur la sphère de Riemann. Voir H. Weyl, *Einführung in die Funktionentheorie*, *op. cit.*, p. 41.

21. H. Weyl, *Temps, espace matière*, *op. cit.*, p. 124.

aussi une ≫.[22] La démarche que suit Weyl pour saisir le concept de groupe infinitésimal est heuristique et non pas axiomatique. En effet, il définit *de proche en proche* la notion d'algèbre de Lie d'un groupe de Lie linéaire, comme en témoigne le passage suivant qui est plus la conclusion que le point de départ de son raisonnement : ≪ une famille linéaire à r dimensions de matrices est dite un groupe infinitésimal à r paramètres si $AB - BA$ est une matrice du groupe quand A et B en sont deux quelconques ≫.[23]

Après ces quelques rappels sur les propriétés des algèbres de Lie des groupes de Lie linéaires, Weyl montre que le principe de liberté — la nature de l'espace n'impose aucune restriction sur la connexion métrique de la variété M — et le principe de cohésion — il existe une unique connexion affine compatible avec la structure métrique de M — sont équivalents aux trois conditions suivantes qui caractérisent l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G :

(a) La trace de chaque matrice est nulle ;

(b) en dehors de zéro, il n'y a dans $\mathfrak{g}$ aucune matrice double symétrique[24] ;

(c) le nombre maximum des dimensions de $\mathfrak{g}$ qui soit compatible avec (b) est $N = \frac{n(n-1)}{2}$.[25]

Son problème peut se traduire par la résolution d'un système linéaire. La condition (c) garantit l'existence d'une solution et la condition (b) son unicité. Les seules algèbres de Lie qui réalisent concrètement ces trois conditions sont de la forme $\mathfrak{so}(p,q) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid XJ_{pq} + J_{pq}^t X = 0\}$, où $p+q = n$ et J_{pq} est la matrice diagonale comportant p fois 1 suivi de q fois -1. Corrélativement, les groupes de congruences introduits par Weyl sont de la forme $\mathrm{SO}(p,q)$. Weyl démontre complètement ce résultat dans ≪ Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung ≫. Au cours du § 2 de cet article, il prouve ce théorème pour $n = 3$; à partir du § 3, il le démontre pour n quelconque en se fondant sur la théorie des diviseurs élémentaires. Ce résultat explicite l'assertion de Weyl selon laquelle les variétés satisfaisant aux postulats de liberté et de cohésion sont dites pythagoriciennes dans l'infinitésimal. Il s'agit là d'une propriété qui conditionne *a priori* la structure métrique de l'espace-temps de la physique. Les variétés riemanniennes, pseudo-riemanniennes et weyliennes font partie de cette classe. En effet, le théorème de Levi-Civita affirme qu'il existe une unique connexion affine sans torsion compatible avec la structure métrique d'une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne (la connexion de Levi-Civita). Dans ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, Weyl étend ce théorème

22. *ibid.*, p. 124.
23. *ibid.*, p. 125.
24. Pour une formulation modernisée de cette condition, cf. T. Hawkins, *op. cit.*, p. 436 : ≪ For any X_1, ..., X_n in $\mathfrak{g}$ with matrix form $X_k = (a_{ij}^{(k)}$ with regard to some basis, if Col i of X_j = Col j of X_i for all $i, j = 1, ..., n$, then $X_i = 0$ for all $i = 1, ..., n$ ≫.
25. *ibid.*, p. 127.

aux variétés ≪ weyliennes ≫ qui réalisent l'idéal d'une géométrie purement infinitésimale et qui, parallèlement, satisfont aux principes énoncés par Weyl lorsqu'il aborde le problème de l'espace. Ainsi, alors qu'en 1920-1921, la théorie unifiée des champs de Weyl est soumise à rude épreuve, en revanche la géométrie purement infinitésimale qui la sous-tend gagnerait en légitimité d'un point de vue théorique avec la formulation et la résolution du problème de l'espace. Weyl met en évidence ce point à la fin de sa conférence de septembre 1921 :

> Un espace qui satisfait à nos conditions n'est pas nécessairement une variété riemannienne, quand bien même une métrique pythagoricienne est donnée en chacun de ses points. Il peut s'apparenter à une extension de la géométrie riemannienne, qui a été érigée par mes soins en tant que géométrie purement infinitésimale ; cette extension est telle que des éléments linéaires ne peuvent être comparés en son sein que s'ils se trouvent au même point, ou en des points infiniment voisins. (...) La résolution [du problème de l'espace] en termes de théorie des groupes renforce ma conviction selon laquelle, contrairement à ce que fait Einstein, il ne faut pas s'appuyer sur la géométrie plus restrictive de Riemann mais sur cette géométrie [purement infinitésimale] comme géométrie d'univers pour interpréter les phénomènes physiques de champs [Felderscheinungen]. [26]

Ce passage appelle trois commentaires : (i) le problème de l'espace peut être résolu dans le cadre de la géométrie purement infinitésimale de Weyl ; (ii) en retour, Weyl utilise la résolution de ce problème comme un moyen de se convaincre qu'il peut continuer à utiliser ce cadre géométrique pour mathématiser certains phénomènes physiques ; (iii) il se restreint en connaissance de cause aux physikalischen Felderscheinungen, il prend tacitement acte des objections de Pauli. Sa théorie unitaire s'applique exclusivement à une physique des champs classiques, elle ne peut en aucune façon décrire la structure élémentaire de la matière. Weyl admet donc implicitement l'existence de phénomènes physiques irréductiblement quantiques. [27] Cette conférence de septembre 1921 est l'un des derniers textes dans lesquels Weyl s'enthousiasme encore pour sa théorie unitaire.

Sur un plan mathématique, la résolution du problème de l'espace permet également à Weyl de mesurer l'effectivité de la théorie des groupes et des algèbres de Lie qu'il n'envisage cependant pas encore pour elle-même. Il serait donc tentant de considérer la série de publications qu'il consacre au problème de l'espace comme une transition entre ses travaux en relativité générale et ses articles à venir sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Cette hypothèse aurait au moins un avantage : elle permettrait de rejeter l'idée

26. H. Weyl, ≪ Das Raumproblem ≫, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **31**, 1922, p. 221.

27. Voir à ce propos la fin de la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie* qui est contemporaine à cette conférence.

selon laquelle Weyl basculerait subitement en 1924 de la géométrie différentielle à la théorie des groupes et des représentations de groupes (finis ou continus au sens de Lie). Seulement, cette hypothèse mérite d'être affinée et d'être corrigée à la lumière de trois données. (i) Il est nécessaire de prendre en compte les autres publications que Weyl consacre au problème de l'espace. Nous pensons en particulier à son ouvrage de 1923 intitulé *Die mathematische Analyse des Raumproblems* dans lequel il reprend l'essentiel du contenu des leçons qu'il avait tenues à Madrid et à Barcelone sur le problème de l'espace en 1922. (ii) En 1922, Cartan propose une démonstration concurrente pour résoudre le problème de l'espace. Weyl et Cartan entretiennent une correspondance à ce sujet. La question est de savoir si et jusqu'à quel point Weyl s'approprie alors les méthodes de Cartan. (iii) Le fait est que le problème de l'espace n'est pas le seul point de contact entre la théorie de la relativité générale et la théorie des groupes et des algèbres de Lie dans l'œuvre de Weyl. En effet, dès 1923-1924, Weyl s'appuie sur la théorie des groupes pour reformuler les « fondements » du calcul tensoriel.

En 1922-1923, Weyl revient sur sa tentative de résolution du problème de l'espace qu'il juge quelque peu laborieuse. Dans les leçons qu'il donne à Madrid et à Barcelone, il renonce à présenter sa démonstration dans le cas général. Dans la version allemande de ces leçons, il adjoint une preuve rigoureuse et nettement simplifiée de son résultat comme en témoigne l'annexe 12. Pour ce faire, il utilise les mêmes méthodes, issues de la théorie des diviseurs élémentaires. On peut donc observer qu'entre 1921 et 1923, Weyl demeure attaché au même schéma de démonstration pour résoudre le problème de l'espace. Il s'avère qu'en 1922, Cartan propose une autre solution au problème de l'espace dont il prend connaissance via la traduction en français de la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie*. En 1922 et en 1923, on doit deux textes à Cartan, tous deux intitulés « sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique », le premier est publié dans les *Comptes-rendus de l'Académie des sciences*, le second dans *Le Journal de mathématiques pures et appliquées*.[28] Le but de Cartan est de montrer directement la validité du « théorème » de Weyl pour n quelconque. Pour ce faire, il s'appuie sur sa thèse (1894) et son article de 1913 intitulé « Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane ». Il déduit très simplement le résultat de Weyl. Au vu de la nature du problème formulé par ce dernier, Cartan montre d'abord qu'il faut se restreindre aux algèbres de Lie simples et semi-simples.

28. É. Cartan, « Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1922, **175**, p. 82-85, « Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, neuvième série, **2**, 1923, p. 167-192.

Comme il dispose d'une classification exhaustive des algèbres de Lie simples, il peut procéder par élimination et il montre que seules les algèbres de Lie simples de type **B** et **D** — qui « donnent les groupes de rotations » — conviennent. Il examine ensuite rapidement le cas des algèbres de Lie semi-simples et il en déduit presque immédiatement la validité du théorème de Weyl pour n quelconque. [29]

Cartan dispose donc d'emblée d'une théorie *générale* des algèbres de Lie qui lui permet de prouver directement et avec une simplicité remarquable les assertions de Weyl sans en passer par un processus assez laborieux de *généralisation* à partir de $n = 2$ et $n = 3$. La démonstration de Cartan attire immédiatement l'attention de Weyl. En effet, comme le souligne Hawkins, Weyl et Cartan entretiennent une correspondance sur le problème de l'espace et sa résolution à l'automne 1922. Dans une lettre à Cartan datée du 5 octobre, Weyl admet que la démonstration proposée par celui-ci est plus « naturelle » même si elle repose également sur la considération de plusieurs cas puisqu'elle procède par élimination. Cette correspondance tendrait à nous laisser penser que Weyl adhère au procédé utilisé par Cartan. De plus, Weyl cite la note publiée par Cartan dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* au cours de son ouvrage de 1923 consacré au problème de l'espace. [30] Il est indubitable que Weyl prend alors conscience de la puissance de la théorie élaborée par Cartan sur les algèbres de Lie simples et semi-simples. Il reporte d'ailleurs minutieusement les références de la thèse de Cartan et de son article de 1913. Or, Weyl exploitera ces deux textes de manière remarquable dans son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples.

Nous pouvons donc en déduire qu'à l'occasion de la résolution du problème de l'espace, Weyl prend connaissance des principaux travaux de Cartan sur les groupes de Lie. Mais cela ne signifie pas qu'il se les approprie spontanément. En réalité, il ne renonce pas à ses propres méthodes pour résoudre le problème de l'espace et il refuse d'effectuer des détours qu'il juge inutiles en direction de la théorie générale des groupes de Lie élaborée par Cartan dès 1894 à la suite de Killing. En réalité, Weyl exploitera pleinement les travaux de Cartan sur les groupes de Lie en 1924, au moment où il examine à nouveaux frais les fondements du calcul tensoriel. Nous voyons donc qu'il est séduisant, mais trop simple, de penser que le problème de l'espace constitue *la* transition de la relativité générale à la théorie des groupes de Lie dans l'œuvre de Weyl. Deux raisons expliquent nos réserves : (1) Weyl ne s'approprie pas directement en

29. Pour une définition d'une algèbre de Lie simple, d'une algèbre de Lie semi-simple et des types d'algèbres de Lie simples, nous renvoyons le lecteur au premier chapitre de la troisième partie.

30. H. Weyl, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin, éd. Springer, 1923, p. 82.

1922 les travaux de Cartan sur les groupes de Lie ; (2) la jonction entre la relativité générale et la série d'articles de 1925-1926 sur les groupes de Lie se situe essentiellement au niveau du calcul tensoriel. Hawkins souligne d'ailleurs que Weyl mesure vraiment l'effectivité des travaux de Cartan sur les groupes de Lie au moment où il aborde les fondements du calcul tensoriel. [31]

4.4 L'héritage de la phénoménologie de Husserl

Dans *La science et l'hypothèse*, Poincaré distingue les conventions qui sont des libres constructions de notre esprit et les principes synthétiques *a priori* qui sont constitutifs de notre appréhension de l'espace. Pour Poincaré, les axiomes de la géométrie sont exclusivement de nature conventionnelle. Weyl ne partage pas ce point de vue : il admet l'existence de deux principes synthétiques *a priori* qui permettent de spécifier la nature de la métrique dans le contexte de la relativité générale. En vertu de ces deux principes, l'espace-temps doit être pythagoricien dans l'infinitésimal, i.e. la métrique en un point quelconque de l'espace-temps est définie par une forme quadratique non dégénérée. Weyl se distancie par rapport au conventionnalisme de Poincaré pour deux raisons. (1) tout d'abord, ils n'ont pas pour objet le même cadre théorique, d'un point de vue tant mathématique que physique. Le problème de l'espace au sens de Weyl n'est pas du même ordre que le problème de Helmholtz-Lie sur lequel Poincaré s'appuyait lorsqu'il affirmait que les axiomes de la géométrie sont des conventions. En outre, nous avons vu que le développement de la relativité générale ne permet pas de maintenir la thèse d'une sous-détermination de la géométrie par les théories physiques, puisque les composantes du champ gravitationnel sont celles qui caractérisent la métrique de l'univers. (2) Ensuite, Weyl demeure attaché à une tradition phénoménologique qui ne s'accorde pas avec le conventionnalisme de Poincaré.

Certes, lorsque nous avons analysé la géométrie purement infinitésimale de Weyl, nous avons montré que la philosophie de Husserl ne devait pas être survalorisée au détriment de l'idéalisme fichtéen si l'on veut comprendre pourquoi Weyl adopte une posture très spéculative dans la déduction de sa théorie unitaire. Toujours est-il qu'avec la résolution du problème de l'espace, Weyl se réfère explicitement à des concepts qui relèvent de la phénoménologie.

Qu'il nous suffise de commenter la fin du § 18 de *Raum, Zeit, Materie* pour éclaircir cela. Weyl précise que seule une métrique pythagoricienne dans l'infinitésimal peut décrire l'univers

31. T. Hawkins, *Emergence of the theory of Lie groups*, Berlin, Heidelberg, New York, éd. Springer, 2000, p. 439.

physique. Il n'est donc pas question ici d'une convention arbitrairement choisie. Il précise ensuite que ses recherches sur l'espace constituent « un bon exemple pour l'analyse critique telle que la conçoit la philosophie phénoménologique (Husserl) ; c'est un exemple typique pour les cas où l'on considère une existence non immanente ». [32] Cette formule lapidaire ne peut être bien comprise que si nous résolvons au moins partiellement deux problèmes : (1) Quels liens factuels existe-t-il entre Weyl et Husserl au moment où paraît la quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie* ? (2) Quels sont les aspects de la phénoménologie de Husserl que Weyl s'approprie ici ?

Entre 1918 et 1923 — c'est-à-dire au moment où il élabore sa théorie unifiée des champs avant de s'intéresser au problème de l'espace —, Weyl entretient une correspondance avec E. Husserl. Cette donnée ne doit pas être survalorisée : nous avons vu dans ce qui précède que la phénoménologie de Husserl n'est pas la seule source philosophique utilisée par Weyl durant cette période. Toujours est-il qu'à partir de 1920-1921, c'est-à-dire au moment où il réalise progressivement que cette théorie n'a pas d'effectivité pour expliquer les phénomènes physiques de manière cohérente, Weyl semble se défaire de la référence à l'idéalisme fichtéen pour s'orienter de manière quasiment exclusive en direction de la phénoménologie de Husserl. La quatrième édition de *Raum, Zeit, Materie* en atteste.

Certains passages tirés de la correspondance Weyl / Husserl confortent nos hypothèses. Une lettre de Weyl à Husserl datée du 26 mars 1921 doit retenir toute notre attention. [33] Husserl vient d'offrir à Weyl la seconde édition du volume deux, (seconde partie) de ses *Recherches logiques*. Weyl lui envoie donc une lettre de remerciements ; il fait alors l'éloge de la conception de l'intuition que développe Husserl dans cet ouvrage. Pour Husserl, l'intuition ne se réduit pas à nos seules perceptions et sensations. À côté de l'intuition sensible, il introduit la notion d'intuition *catégoriale* qui doit pouvoir accueillir les objets formels spécifiques aux mathématiques et à la logique. Pour Weyl, cet argument entre en résonance avec ses convictions intuitionnistes dans le domaine des fondements des mathématiques. Il fait ensuite savoir à Husserl qu'il est en train de résoudre une difficulté qui est analogue au problème de Helmholtz-Lie dans le contexte de la relativité générale. Weyl évoque donc explicitement le problème de l'espace qu'il traduit immédiatement dans le vocabulaire de la phénoménologie : il s'agit de saisir l'*essence* de l'espace.

La phénoménologie peut justement être définie comme science des essences. Par essence, il faut alors entendre un noyau invariant de *sens* qui doit pouvoir caractériser tout existant.

32. H. Weyl, *Temps, espace, matière*, *op. cit.*, p. 128.
33. Des extraits de cette lettre sont reproduits dans T. Ryckman, *The reign of relativity*, *op. cit.*, p. 113.

Dans une perspective phénoménologique, une *essence* n'existe pas en soi, il ne s'agit pas d'une idée platonicienne, elle dépend nécessairement d'une visée intentionnelle, donc d'une conscience. Weyl entend identifier le noyau invariant de sens qui est attaché à l'espace-temps en relativité générale. Ce noyau correspond à l'idée selon laquelle l'espace doit être pythagoricien dans l'infinitésimal : la nature de la métrique de l'univers est caractérisée par une forme quadratique non dégénérée. Nous avons vu qu'il a besoin d'outils formels très sophistiqués, à savoir les notions de métrique en un point, de connexion métrique et de transport parallèle. On pourrait donc penser que la nature de la métrique à laquelle est assujetti l'espace-temps échappe à toute visée intuitive, i.e. qu'elle est purement formelle. Weyl emprunte à Husserl la notion d'intuition catégoriale pour retirer toute pertinence à cette objection. Pour le dire autrement, l'essence de l'espace fait bien l'objet d'une intuition qui n'est pas sensible.

L'introduction à *Raum, Zeit, Materie* (édition de 1918 et suivantes) ainsi que le § 18 (édition de 1921) donnent la mesure des emprunts de Weyl à la phénoménologie de Husserl. Dans son introduction, Weyl récuse deux préjugés : d'une part le réalisme naïf qui consiste à assigner spontanément une réalité indépendante aux objets que nous percevons ou dont nous nous souvenons ; d'autre part le sensualisme qui réduit le monde à n'être qu'un jeu de sensations tributaire d'un moi, envisagé sous les traits du psychologisme. [34] Il montre tout d'abord qu'aucun objet n'existe en lui-même ; réciproquement, la conscience n'est pas non plus une réalité en soi, elle s'identifie à des actes intentionnels, elle n'est pas une substance ou une chose pensante. Il reprend à son compte l'un des arguments majeurs défendus par Husserl dans les *Ideen*, en l'occurrence il n'y a de conscience que de quelque chose : « d'une façon générale l'essence de tout cogito actuel implique qu'il soit la conscience de quelque chose ». [35] De même, un objet visé par une perception, un souvenir, une réflexion ou notre imagination n'a qu'une existence relative et il reçoit en conséquence le nom « d'objet intentionnel ». Par extension, le monde extérieur ne saurait être qualifié d'absolu et il ne peut pas être saisi de manière immédiate et directe. Weyl entrevoit ici un point de recoupement entre la phénoménologie de Husserl et les sciences de la nature en ce sens qu'elles permettent, par des voies différentes, de rompre avec « l'attitude naturelle » et le « réalisme naïf ». Weyl s'oppose également à la seconde opinion, teintée de sensualisme et de psychologisme, dans la mesure où elle porte exclusivement sur des sensations isolées et des états de conscience, elle laisse donc de côté le noyau invariant de sens qui accompagne toute visée intentionnelle.

34. H. Weyl, *Temps, Espace, Matière*, *op. cit.*, p. 2-3.

35. E. Husserl, *Idées directrices pour une phénoménologie* (1913), trad. Ricœur, Paris, éd. Gallimard, 1950, p. 115.

Weyl utilise ensuite l'analyse phénoménologique pour justifier philosophiquement ses investigations sur la nature de l'espace. Celui-ci est, quant à son essence, pythagoricien dans l'infinitésimal. Cette propriété qui est donc saisie de manière intuitive selon Weyl, a le caractère d'une *évidence.*[36] Weyl n'emploie pas le concept d'évidence au hasard : celui-ci joue un rôle central dans la philosophie de Husserl. Les §§ 20 et 21 des *Ideen* le montrent assez. Husserl insiste tout d'abord sur le fait que l'évidence concerne non pas seulement des faits d'expérience, mais également des jugements portant sur des objets purement formels. En outre, il prend le soin de distinguer l'évidence, en tant que ≪ vue intellectuelle ≫ [Einsicht][37] suspendue à la visée d'une essence et le sentiment d'évidence dont le ressort est purement psychologique. L'évidence n'a donc rien de spontané pour Husserl, car nous ne pouvons pas déterminer immédiatement le noyau invariant de sens qui est corrélé aux objets que nous visons. C'est exactement à cette difficulté que se heurtent les physiciens qui ont tenté de saisir la nature de l'espace. Ils ont d'abord cru que l'homogénéité et l'isotropie étaient constitutifs de son essence. Les travaux d'Einstein en relativité générale montrent qu'il n'en est rien. Pour Weyl comme pour Husserl, ce n'est pas en fonction d'une révélation quasi-mystique[38] que l'on accède à l'essence de l'espace, celle-ci fait l'objet d'une découverte par approximations successives, corrections et variations de notre point de vue jusqu'à ce que nous parvenions à saisir, *au moins partiellement*, le noyau invariant de sens qui le fonde. Il est remarquable d'observer que Weyl situe ses emprunts à la phénoménologie de Husserl dans une perspective historique sur le long terme ; il replace donc les problèmes physico-philosophiques sur la nature de l'espace à l'intérieur d'une historicité au lieu de s'en tenir aux visées intentionnelles d'une conscience solipsiste :

> Nous voyons par le développement historique du problème de l'espace, combien il nous est difficile d'atteindre des résultats définitifs. Une longue évolution mathématique, la grande extension des études géométriques depuis Euclide à Riemann, la pénétration des lois de la nature depuis Galilée et toutes les impulsions que cette étude a reçues de l'expérience, enfin le génie de quelques grands esprits — Newton, Gauss, Riemann, Einstein — tout a concouru (et tout était nécessaire) pour nous libérer des notions superficielles auxquelles nous serions sans cela encore attachés.[39]

Weyl demeure suspendu à une compréhension naïve de l'histoire des sciences, fondée sur les

36. *ibid.*, p. 128.
37. *ibid.*, p. 71.
38. Husserl s'oppose farouchement au sentiment mystique de l'évidence qui, à ses yeux, constitue l'antithèse de toute démarche rigoureusement scientifique, *ibid.*, p. 71 : ≪ [le sentiment d'évidence], traité comme un ≪ index veri ≫ doté de propriétés mystiques, conférerait au jugement une sorte de coloration affective ≫.
39. H. Weyl, *op. cit.*, p. 128.

catégories de progrès continu et de génie. Toujours est-il qu'il ne se satisfait pas entièrement de la phénoménologie de Husserl : difficile en effet pour une philosophie de la conscience teintée d'idéalisme, de rendre compte du développement historique des théories scientifiques. Weyl ne fait ici que formuler implicitement une réserve à l'encontre de Husserl. À la fin du § 18 de *Temps, Espace, Matière*, il vise plus radicalement « les philosophes qui croient que l'être peut être atteint par une seule démarche et un seul acte de représentation ». [40] Ce passage, extrêmement lapidaire, recèle plusieurs difficultés d'interprétation. Weyl oppose-t-il ici massivement les philosophes et les scientifiques ? Rien n'est moins sûr. Il semblerait que l'on doive comprendre cette assertion comme suit : parmi les philosophes, certains « croient que l'être peut être atteint par une seule démarche et un seul acte de représentation ». C'est notamment le cas de Fichte, mais ce reproche ne peut pas s'étendre à Husserl. En effet, dans une perspective phénoménologique, l'essence d'un objet ne saurait être mise au jour que par approximations successives. Nous émettons donc deux réserves à l'encontre de l'interprétation d'E. Scholz selon laquelle « This reproach was probably directed at least as much at the address of Fichte's philosophy which Weyl had been addicted to few years before, as at Husserl's » [41] : (1) tout porte à croire que Weyl vise exclusivement Fichte dont l'attitude hautement spéculative paraît bien moins séduisante en 1920-1921 puisqu'elle lui a partiellement inspiré une théorie unifiée des champs qui n'est pas vérifiée ; (2) à plusieurs reprises dans *Raum, Zeit, Materie*, Weyl adhère à quelques réserves près à la phénoménologie de Husserl. En 1920-1923, Weyl abandonne la référence à l'idéalisme fichtéen au profit de la phénoménologie de Husserl qui lui semble plus satisfaisante sur un plan méthodologique et scientifique.

La fin du § 18 de *Temps, Espace, Matière* doit également être clarifiée :

> L'exemple de l'espace est très instructif pour éclaircir cette question qui nous paraît décisive au point de vue phénoménologique : jusqu'à quel point la démarcation des entités qui surgissent dans la conscience, exprime-t-elle une structure intrinsèque du donné lui-même et jusqu'à quel point n'est-elle qu'une simple convention ». [42]

Selon Scholz, Weyl tente de concilier dès 1921 deux traditions philosophiques, en l'occurrence la phénoménologie de Husserl et le conventionnalisme de Poincaré. À notre sens, cela sera vraiment le cas plus tardivement, en l'occurrence dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927). Weyl assujettit clairement ici le conventionnalisme de Poincaré

40. *ibid.*, p. 128.
41. E. Scholz, « Hermann Weyl's analysis of the "problem of space" and the origin of gauge structures », *op. cit.*, p. 182.
42. H. Weyl, *op. cit.*, p. 128.

à la phénoménologie de Husserl. Il revient en effet à l'analyse phénoménologique de nous dire quelles sont, parmi les propriétés de l'espace, celles qui sont constitutives de son essence et celles qui dépendent de pures conventions librement construites par notre entendement. Pour Poincaré, tous les axiomes de la géométrie sont des conventions, ce que récuse justement Weyl. À une pétition de principe — tout est convention — Weyl préfère « l'analyse critique telle que la conçoit la philosophie phénoménologique (Husserl) » dans la mesure où elle permet de faire la part des choses entre des propriétés d'essence et des conventions. Il s'agit là du versant philosophique du problème de l'espace. Il est donc indéniable que la phénoménologie de Husserl constitue la principale source philosophique de Weyl dans les années 1920-1923. Ceci explique également pourquoi Weyl se montre très virulent à l'encontre de Schlick dans sa recension de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* [édition de 1918] en 1923. En effet, la première édition de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* contient de nombreuses attaques contre la phénoménologie de Husserl. Dans sa recension, Weyl prend justement la défense de Husserl et il rejette frontalement l'empirisme teinté de conventionnalisme qui caractérise l'épistémologie de Schlick.

Si Weyl analyse philosophiquement le problème de l'espace, ce ne sont toutefois pas les concepts de la phénoménologie qui lui permettent de le résoudre. C'est pourquoi, il insiste sur la complémentarité des points de vue philosophique et mathématique pour éclairer cette difficulté. D'ailleurs, dans l'ensemble des articles et ouvrage qu'il publie sur le Raumproblem, Weyl confronte systématiquement écriture philosophique et écriture mathématique. À la fin de sa *mathematische Analyse des Raumproblems*, Weyl estime que l'équilibre qui caractérise les points de vue philosophique et mathématique n'est pas généralisable. Il constate en effet qu'il existe généralement une asymétrie entre philosophie et mathématiques lorsqu'elles portent sur un même objet. D'un côté, des théories très élaborées d'un point de vue mathématique n'offrent aucune prise au philosophe, de l'autre certains systèmes philosophiques se développent à partir d'exemples et d'objets mathématiques jugés trop élémentaires par les mathématiciens.

> Alors que quasiment toutes les théories mathématiques profondes, — comme par exemple l'extraordinaire théorie des corps algébriques — ne sont guère significatives à l'intérieur des grands systèmes épistémologiques, alors que, d'un autre côté, les apports des mathématiques pour éclairer des problèmes épistémologiques proviennent la plupart du temps de la partie la plus superficielle des mathématiques, nous avons affaire ici avec le problème de l'espace à l'un des rares cas où un problème épistémologique fondamental donnne lieu à des questionnements mathématiques d'une grande profondeur. [43]

43. H. Weyl, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, *op. cit.*, p. 61.

La thèse principale de Lautman (1937) vient assurément contredire le premier argument de Weyl, puisque la théorie du corps de classes fait l'objet d'une réflexion philosophique d'une rare finesse au cours du troisième chapitre intitulé « La montée vers l'absolu ». Le second argument de Weyl ne peut guère être contesté. Ainsi, dans son introduction à la *Critique de la raison pure*, Kant élabore la distinction fondamentale entre jugements analytiques *a priori* et synthétiques *a priori* à partir du jugement $7 + 5 = 12$ qui relève de la « partie la plus superficielle des mathématiques », pour reprendre l'expression de Weyl. Enfin, il est parfaitement clair que le problème de l'espace jouit d'une situation remarquable puisqu'il exige des réflexions d'ordre philosophique et mathématique d'une rare complexité que Weyl parvient non seulement à mener de front, mais également à combiner. Points de vue philosophique et mathématique s'éclairent de manière remarquable dans les textes qu'il nous a laissés sur le problème de l'espace.

4.5 Conclusion du quatrième chapitre

Entre 1920 et 1922, Weyl prend graduellement conscience que sa géométrie purement infinitésimale donne lieu à une théorie unifiée des champs qui n'est pas *physiquement concevable*. Dès l'été 1920, il sait qu'elle ne peut pas expliquer la structure élémentaire de la matière et que le programme de Mie-Hilbert est en train d'échouer face aux avancées de la théorie des quanta. À partir de la fin de l'année 1921, il reconnaît même la pertinence des objections d'Einstein. D'où la réorientation de ses recherches en direction du problème de l'espace. Le lien entre la « géométrie purement infinitésimale » et le « problème de l'espace » est toutefois un peu plus complexe sur un plan chronologique. En effet, Weyl propose une première formulation du Raumproblem dès 1919 dans son commentaire du *Habilitationsvortrag* de Riemann, c'est-à-dire au moment où il est le plus convaincu de la pertinence de sa théorie unitaire. Il ne faut donc pas tracer une césure entre ces deux projets de recherche comme s'ils se succédaient parfaitement dans le temps. Inversement, la géométrie purement infinitésimale s'intègre à la solution du problème de l'espace, ce que ne manque pas de souligner Weyl à la fin de sa conférence intitulée « das Raumproblem ».

Cela posé, les résultats auxquels il aboutit en résolvant ce problème le conduisent à une redistribution des propriétés qui caractérisent la « forme » et la « matière » des phénomènes. En 1918, Weyl était convaincu que seule la structure topologique de la variété d'espace-temps était indépendante de la matière des phénomènes, en revanche il estimait que sa structure métrique était complètement conditionnée par la répartition de la matière et de

l'énergie. Nous renvoyons le lecteur au premier § de ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫. En 1921-1922, il montre que ce second argument n'est pas assez nuancé : la *nature* de la métrique d'espace-temps est déterminée *a priori*, elle doit être pythagoricienne dans l'infinitésimal ; seule ≪ l'*orientation* mutuelle des métriques ≫ dépend d'un substrat empirique :

> Il n'est pas vrai de dire que l'espace ou l'univers considéré en soi indépendamment de tout contenu matériel est purement et simplement une variété continue amorphe au sens de l'*Analysis situs* ; la *nature* de la métrique le caractérise en propre ; seule l'orientation mutuelle des métriques en différents points est contingente, *a posteriori* et dépendante d'un contenu matériel. [44]

De 1918 à 1922, Weyl discute de manière très serrée l'≪ Esthétique transcendantale ≫ de Kant. Il ne cesse en effet de réajuster la ligne de démarcation entre la forme (*a priori*) et la matière (*a posteriori*) des phénomènes qui font partie du monde extérieur. Ainsi, la résolution du problème de l'espace s'accompagne d'un triple bénéfice : le premier est d'ordre physico-mathématique, Weyl commence à mesurer toute l'effectivité de la théorie des groupes et des algèbres de Lie pour résoudre une difficulté théorique relevant de la géométrie différentielle ; le second est proprement philosophique, Weyl s'approprie complètement la démarche phénoménologique de Husserl, il dégage en conséquence le noyau invariant de sens attaché à la structure métrique de l'espace, i.e. sa nature pythagoricienne dans l'infinitésimal ; le troisième est d'ordre épistémologique, Weyl propose une nouvelle distribution des propriétés formelles et matérielles de l'espace. En deçà de ses emprunts à Fichte et Husserl, Weyl ne cesse donc d'examiner et de réévaluer la théorie kantienne de la connaissance dans le contexte de la relativité générale. Il ne se situe manifestement pas dans une tradition néokantienne ; inversement, il n'ambitionne pas de réfuter une fois pour toutes le criticisme. En résumé, il se démarque donc nettement de Schlick et Reichenbach, qui seront deux des plus éminents représentants du positivisme logique à la fin des années 20. En effet, Weyl répond aux objections très lourdes que Schlick formule contre Husserl dans la première édition de son *Allgemeine Erkenntnislehre*. De plus, contrairement à Schlick, Weyl n'étend pas le conventionnalisme de Poincaré au contexte théorique de la relativité générale. Enfin, à la différence de Reichenbach (1920), il refuse de passer les philosophies de Fichte ou de Kant au crible de la relativité restreinte et de la relativité générale.

44. H. Weyl, ≪ Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung ≫, *op. cit.*, p. 117.

Conclusion générale de la deuxième partie

Un impact limité de l'« intuitionnisme » de Weyl sur sa pratique des mathématiques

Dans la première partie de notre thèse, nous avons montré qu'en 1910-1913, Weyl adopte une position sur les connaissances mathématiques que l'on pourrait qualifier de « formalisme mitigé » : d'un côté, il estime que l'axiomatisation du concept de voisinage en topologie ensembliste permet de clarifier formellement le continu — grâce à cette notion, Weyl parvient d'ailleurs à définir implicitement une surface topologique et une surface de Riemann —, de l'autre, il admet avec Klein l'importance de l'intuition à des fins heuristiques, i.e. pour produire des connaissances mathématiques nouvelles. Avec la publication de *Das Kontinuum* (1918), Weyl accorde une place centrale à des procédures constructives pour *fonder* le continu en analyse. La définition implicite d'une variété continue qu'il avait formulée dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* n'est plus de mise. Weyl enrichit considérablement le statut de l'intuition en mathématiques ; celle-ci n'intervient pas seulement à titre subsidiaire pour compléter la méthode axiomatique, elle se situe au fondement des sciences mathématiques puisqu'elle est antérieure à la logique et qu'elle est donatrice des « catégories » primitives qui permettent d'engendrer les connaissances mathématiques.

Rappelons qu'une catégorie primitive au sens de Weyl est constituée d'objets de base auxquels on assigne des propriétés et des relations primitives. Il en va ainsi de « l'arithmétique des nombres naturels ; sa seule relation primitive est la relation $f(n, n')$, réalisée quand n' est le nombre successeur de n. Alors 1 est caractérisé par la propriété I : il n'y a aucun nombre dont 1 est le successeur (1 est l'origine de la suite des nombres) ».[45] Weyl se fonde ensuite sur les processus d'*itération* et de *substitution* pour former des entités idéales à partir de ses catégories primitives. Sa démarche est donc *constructive*. Par ailleurs, il refuse de considérer les mathématiques comme une science hypothético-déductive fondée en dernière instance sur des axiomes en tant que pures conventions : « attendu que le raisonnement logique consiste en l'itération de quelques inférences logiques élémentaires, nous ne serons parvenus à ce savoir que sur la base de l'intuition de l'itération, ou de l'intuition de la progression infinie en une suite. Or c'est justement de cette intuition que nous tirons nos connaissances arithmétiques fondamentales sur les nombres naturels, tandis que c'est sur ceux-ci à leur tour que s'édifie logiquement tout l'édifice de la mathématique pure ».[46]

45. H. Weyl, *Le continu*, in *le continu et autres écrits*, trad. J. Largeault, Paris, éd. Vrin, 1994, p. 57.
46. *ibid.*, p. 60.

En un sens, on peut dire que Weyl est ≪ intuitionniste ≫ dès 1918 à condition de préciser qu'il situe effectivement l'≪ intuition ≫ au fondement des mathématiques et qu'il privilégie des procédures constructives pour engendrer le continu. Toutefois, avec *Das Kontinuum*, il n'est pas ≪ intuitionniste ≫ au sens de Brouwer, pour au moins trois raisons : (i) Le vocabulaire qu'il utilise pour caractériser cette intuition renvoie, à n'en pas douter, à la phénoménologie de Husserl et non à la conception brouwerienne de l'intuition, (ii) il maintient l'usage du principe du tiers-exclu et donc il ne projette pas d'élaborer une *logique intuitionniste* qui viendrait se substituer à la logique classique, (iii) il conçoit encore le continu mathématique d'un point de vue atomistique, i.e. comme ensemble d'éléments individualisés, il reconnaît dans le même temps l'écart qui sépare le continu spatial et temporel d'une part, le continu mathématique d'autre part. [47] Cet écart est la source des difficultés auxquelles se heurte Weyl en 1918-1921 pour définir une variété continue. D'un côté en effet, une variété continue ne peut pas être considérée comme un ensemble de points parfaitement individualisés puisqu'elle est censée représenter le *continuum spatio-temporel*, de l'autre il est nécessaire de repérer ces points par des coordonnées pour pouvoir le mathématiser. Ainsi, les réflexions que Weyl mène sur le continu se répercutent sur sa conception des variétés topologiques.

D'un point de vue purement factuel, Weyl rencontre Brouwer durant l'été 1919 et il se persuade alors que le programme intuitionniste défendu par ce dernier permet de concevoir le continu mathématique de manière satisfaisante. Cette nouvelle orientation exige une profonde révision des thèses qu'avançait Weyl dans *Das Kontinuum* pour deux raisons. (1) Il renonce à sa conception atomistique du continu mathématique et il adhère à la vision brouwerienne du continu comme ≪ milieu de libre devenir ≫. Le concept de nombre réel est alors entendu ≪ comme un nombre qui n'est donné qu'approximativement, et pour lequel le degré de l'approximation peut être poussé au-delà de toute limite ≫. [48] Weyl poursuit en ces termes : ≪ là apparaît un ≪ continu ≫ dans lequel tombent, certes, les nombres réels isolés, sans qu'il se résolve en un ensemble de nombres réels dont l'existence serait achevée ; bien plutôt s'agit-il d'un *milieu de libre devenir* ≫. [49]

47. *ibid.*, p. 114 : ≪ Montrer un point individuel est impossible. Les points ne sont pas non plus des individus caractérisables par leurs propriétés. (Le "continu" des nombres réels consiste rien qu'en points, mais le continu des instants temporels et des points spatiaux est homogène.) Aussi les points et les ensembles de points ne se laissent-ils jamais repérer d'une manière absolue, mais seulement dans la dépendance d'un système de coordonnées ≫.

48. H. Weyl, ≪ Sur la crise contemporaine des fondements des mathématiques ≫, in *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, textes rassemblés et traduits par J. Largeault, Paris, éd. Vrin, 1992, p. 76.

49. *ibid.*, p. 77.

Plus radicalement, Weyl oppose la relation d'élément à ensemble, qui prévaut en théorie des ensembles, et le rapport de partie à tout impliqué dans la conception non atomistique du continu développée par Brouwer : « Un ensemble aussi a des parties, il est vrai. Mais ce qui distingue les ensembles quant à la divisibilité en parties est l'existence des éléments au sens ensembliste, c'est-à-dire de *parties qui elles-mêmes ne contiennent plus de parties* (quoique chaque partie contienne au moins un élément). Au contraire, il appartient à l'essence du continu que *chacune de ses parties se laisse diviser indéfiniment* ; le concept de la *limite* d'une division qui se poursuit à l'infini ». [50] Weyl s'en prend ensuite directement à la notion de voisinage sur laquelle il s'était fondé pour définir le concept de surface topologique en 1913. Et il ajoute que la triangulation des surfaces topologiques est la procédure constructive adaptée à l'intuitionnisme de Brouwer.

(2) Conformément aux prescriptions de Brouwer, Weyl refuse d'appliquer le principe du tiers-exclu aux jugements d'existence sur les entiers naturels. Cette restriction drastique n'est pas satisfaite dans les raisonnements menés dans *Das Kontinuum*. Ainsi, l'adhésion de Weyl au programme intuitionniste de Brouwer ne se fait pas sans heurt entre 1919 et 1921. À quelques réserves près qu'il formule dans son article sur la crises des fondements des mathématiques, il accepte provisoirement les contraintes imposées par le projet d'une logique intuitionniste. Ces contraintes se répercutent-elles vraiment dans sa pratique des mathématiques ? Rien n'est moins sûr, et Weyl n'a certainement pas rompu radicalement avec l'héritage de Hilbert malgré le ton très polémique qu'il adopte contre le formalisme, comme en atteste le passage suivant « quiconque au milieu du formalisme abstrait des mathématiques, conserve un sentiment des données concrètes, éprouvera l'impression de se délivrer d'un cauchemar ». [51] Nous allons voir dans ce qui suit qu'il ne faut pas survaloriser ce propos pour saisir la pratique des mathématiques chez Weyl entre 1918 (première édition de *Raum, Zeit, Materie* et 1923 (cinquième édition de *Raum, Zeit, Materie*).

Un rapport complexe à l'héritage de Hilbert entre 1917 et 1923

En effet, notre étude de *Raum, Zeit, Materie* de Weyl nous a permis de mesurer la complexité des rapports entre Hilbert et Weyl à la fin des années 10 et au début des années 20 en mathématiques comme en physique mathématique. Nous devons donc fortement relativiser l'impact de la polémique qui oppose Weyl à Hilbert en 1921 sur les fondements des mathématiques pour saisir de tels rapports. Dans sa célèbre conférence intitulée « In-

50. *ibid.*, p. 103.
51. *ibid.*, p. 105.

tuitionnisme et formalisme » (1912), Brouwer réduisait la méthode axiomatique de Hilbert à un formalisme, c'est-à-dire un jeu sur des symboles dépourvus de signification, réglé par les lois de la logique classique. En 1919, Hilbert se défend d'être « formaliste » au sens où l'entend Brouwer, car cela impliquerait que sa pratique des mathématiques serait totalement arbitraire. Au contraire, Hilbert estime que les théories mathématiques sont comme des organismes dont les parties sont nécessairement solidaires entre elles et cette « nécessité » se manifeste essentiellement dans la production des concepts mathématiques. Hilbert se réclame d'une *begriffliche Mathematik* qui n'a rien de commun avec le point de vue réducteur de Brouwer sur le « formalisme ». Aussi peut-on lire chez Hilbert que « les mathématiques ne sont pas comme un jeu dont les résultats sont déterminés par des règles conçues arbitrairement, mais un système conceptuel [ein begriffliches System] intrinsèquement nécessaire qui ne peut être qu'ainsi et non autrement ».[52] Ainsi, il envisage le développement des mathématiques via l'engendrement de concepts qui ne sont pas introduits arbitrairement mais qui, au contraire, dérivent de la nature des problèmes posés et du niveau de généralité adopté.

Or, les cinq éditions de *Raum, Zeit, Materie* montrent avec éclat que Weyl est l'héritier de cette mathématique conceptuelle, comme en témoigne son usage de la méthode axiomatique pour définir tous les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire, mais aussi pour parvenir à une conception intrinsèque du transport parallèle sur une variété différentielle quelconque. Les procédures axiomatiques qui caractérisent en propre la mathématique conceptuelle de Hilbert ne peuvent néanmoins pas s'étendre au continu. Par suite, les procédures constructives reprennent leurs droits chez Weyl lorsqu'il s'agit d'expliciter ce qu'est une variété *continue*. Il est donc parfaitement conséquent avec lui-même. Toujours est-il que Weyl reste profondément attaché à la *begriffliche Mathematik* de Hilbert lorsqu'il présente les principaux concepts nécessaires à la mathématisation de la relativité générale : son adhésion à l'intuitionnisme de Brouwer ne se traduit pas par un renoncement aux méthodes préconisées par Hilbert dans sa pratique des mathématiques.

Qu'en est-il en physique mathématique ? On peut tout d'abord observer d'importantes divergences méthodologiques et épistémologiques entre Weyl et Hilbert. Weyl n'est pas convaincu par le programme d'axiomatisation de la physique de Hilbert parce qu'on perd alors de vue la richesse et la complexité des théories physiques qui ne peuvent pas être traitées *comme* des théories mathématiques. Sur ce point, Weyl rejoint Einstein contre Hilbert. Nous avons cependant trouvé deux occurrences qui indiquent que Weyl admet à la rigueur que l'on puisse

52. D. Hilbert, *Natur und mathematisches Erkennen* (1919-1920), Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser, 1992, p. 14.

axiomatiser certaines théories physiques à des fins pédagogiques. Ainsi, en 1929, alors qu'il effectue un séjour à Princeton et à Berkeley pour faire état de ses innovations en mécanique quantique, Weyl publie un article élémentaire sur la symétrie sphérique des atomes dans lequel il énonce les quatre « postulats » de la mécanique quantique. [53] Deux ans plus tard, dans un cours donné à Göttingen en 1930-1931 et intitulé « Axiomatik », Weyl présente la théorie de la relativité restreinte à partir d'une série d'axiomes. Il estime alors que les procédures axiomatiques permettent non seulement de clarifier les fondements de la géométrie de Minkowski, mais également de dégager explicitement les faits fondamentaux sur lesquels repose la relativité restreinte. [54] Il reconnaît donc des vertus didactiques à la méthode axiomatique pour aborder les fondements de certaines théories physiques. Mais, il admet corrélativement qu'une pensée par axiomes est artificiellement simplificatrice en physique et qu'elle peut provoquer un sentiment d'arbitraire.

En outre, nous avons vu que Hilbert accueille la théorie unitaire de Weyl avec sévérité, malgré leur adhésion commune au programme de Mie. Pour Hilbert, il est téméraire de croire qu'une théorie est susceptible d'unifier spontanément l'ensemble des interactions physiques. En réalité, l'unité de la physique n'est guère pour Hilbert qu'un horizon régulateur dont on peut s'approcher, sans jamais l'atteindre. Malgré ces divergences, Weyl et Hilbert se rejoignent sur trois points : (a) tous deux estiment que la physique mathématique doit occuper une position de surplomb par rapport à la physique théorique ; (b) ils ont systématiquement recours aux techniques variationnelles pour aborder les théories généralement covariantes — ainsi Weyl les utilise aussi bien pour déduire l'équation d'Einstein au début du chapitre IV de *Raum, Zeit, Materie* que pour montrer l'effectivité de sa théorie unifiée des champs ; ils sont *holistes* au sens où ils estiment que l'on ne peut pas tester une théorie physique hypothèse par hypothèse, i.e. seule une théorie envisagée comme un tout peut être confrontée à l'expérience. Weyl adopte ce point de vue holiste dès la première édition de *Raum, Zeit, Materie*. On peut lire en effet :

> Les lois forment un cycle fermé ; la répartition des particules d'électricité, munies une fois pour toutes de charges fixes et leurs vitesses (car nous devons aussi envisager le cas non-stationnaire) déterminent le champ ; le champ exerce sur la matière chargée une force pondéromotrice (...), cette force détermine, d'après la loi fondamentale de la mécanique, l'accélération et par suite la répartition et les vitesses des masses à chaque instant. C'est toute cette dépendance théorique qui est susceptible d'une vérification expérimentale. Si nous admettons que le mouvement de

53. H. Weyl, « The spherical symmetry of atoms », *The Rice Institute Pamphlet*, **16** 1929, p. 266-279.

54. H. Weyl, *Axiomatik, Kap. II, Die Raum-Zeit-Lehre der speziellen Relativitätstheorie*, *ETH-Bibliothek*, Hs 91 a : 45, 1930-1931, fascicule tapuscrit.

> la matière est ce que nous pouvons observer directement (ce qui du reste peut être donné) — ce n'est pas une loi particulière arrachée à cet ensemble que l'on vérifie. La dépendance entre l'expérience immédiate et celle que la raison cherche à saisir conceptuellement dans une théorie, comme étant la chose objective, cachée derrière elle, n'est pas aussi simple que l'on puisse croire que chaque hypothèse particulière de la théorie possède un sens intuitif immédiat. Nous verrons plus tard, plus distinctement encore, que la géométrie, la mécanique et la physique forment de cette manière une unité théorique indissoluble, que l'on doit avoir en bloc devant les yeux, quand on se demande si ces sciences-là expriment rationnellement la réalité transcendante à la conscience, mais dont on a connaissance par les états de conscience : la vérité forme un système. [55]

Hilbert défend exactement le même point de vue dans *Natur und mathematisches Erkennen*, (1919-1920). [56] Weyl et Hilbert maintiennent leurs positions holistes à plus long terme, comme en témoignent deux textes de Weyl, d'une part *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), d'autre part un compte-rendu de 1927 sur la théorie de la démonstration de Hilbert. [57]

Bilan sur les lectures du *Habilitationsvortrag* de Riemann par Weyl

Nous venons d'établir très schématiquement que (1) l'adhésion de Weyl à l'intuitionnisme de Brouwer ne modifie pas substantiellement sa pratique des mathématiques, (2) le rapport à Hilbert ne se laisse pas réduire à une opposition convenue entre intuitionnisme et formalisme. Il est surtout apparu au cours de nos développements que Weyl investit tous les aspects du *Habilitationsvortrag* de Riemann entre 1917 et 1927 et qu'il propose des lectures historienne, mathématicienne et philosophique de cette œuvre. Nous avons montré dans le premier chapitre que Weyl propose une vision continuiste du développement de la géométrie différentielle en s'appuyant essentiellement sur la filiation Gauss / Riemann ; en revanche, il envisage la fin du *Habilitationsvortrag* en rupture avec les conceptions habituelles de l'espace physique, il adopte alors un point de vue rétrospectif, fondé sur les récents développements de la relativité générale. En outre, Weyl n'établit pas le parallèle entre le développement

55. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, erste Auflage, *op. cit.*, p. 60-61, ce passage est maintenu en l'état dans la quatrième édition. Nous renvoyons donc le lecteur à la traduction française, *op. cit.*, p. 57.

56. D. Hilbert, *op. cit.*, p. 60.

57. H. Weyl, ≪ Remarques et discussion à propos du second exposé de Hilbert sur les fondements des mathématiques ≫ (1927), in J. Largeault, *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, *op. cit.*, p. 168 : ≪ Mais Hilbert renvoie expressément à la discipline scientifique voisine, la *physique théorique*. Ses hypothèses et ses lois n'ont pas en propre de sens susceptible d'être rempli immédiatement dans l'intuition lorsqu'elles sont prises isolément, ce ne sont pas les propositions de la physique considérées à l'état isolé qu'on doit en principe confronter à l'expérience, mais seulement la structure théorique en tant que totalité ≫.

de la géométrie infinitésimale (Riemann) et la physique des actions de contact (Faraday - Maxwell) de manière désintéressée. En effet, nous avons insisté sur le fait qu'il considère sa théorie unitaire comme un point d'aboutissement au regard des développements conjugués de la géométrie différentielle et de la physique des actions de contact.

Dans le deuxième chapitre, nous avons résumé les critiques que Gauss et Riemann adressent à l'encontre de la théorie kantienne de l'espace avant de nous intéresser aux arguments que Weyl développe pour la dépasser. Il investit alors philosophiquement la dernière partie du *Habilitationsvortrag* de Riemann. En particulier Weyl reprend à son compte la distinction entre ≪ rapports d'étendue ≫ et ≪ rapports métriques ≫ qu'il superpose à la distinction kantienne entre la forme et la matière des phénomènes : l'espace-temps comme forme des phénomènes ne serait qu'un *continuum amorphe* au sens de l'*analysis situs*, sa structure métrique dépendrait en revanche entièrement des forces matérielles agissant en son sein. Notre commentaire du problème de l'espace nous a permis de prendre conscience que Weyl nuance cet argument en 1920-1923 : la nature de la métrique de la variété d'espace-temps peut être établie indépendamment de l'expérience, i.e. *a priori* : l'univers doit être pythagoricien dans l'infinitésimal.

Dans les troisième et quatrième chapitres, nous sommes revenus sur les connaissances mathématiques et physico-mathématiques que Weyl produit lorqu'il discute deux hypothèses formulées par Riemann : (a) il est toujours possible de comparer les longueurs de deux vecteurs attachés à des points distincts d'une variété (riemannienne), (b) la structure métrique d'une variété est définie au bout du compte par la donnée d'une forme différentielle quadratique définie positive. La levée de l'hypothèse (a) permet à Weyl de construire une géométrie purement infinitésimale, i.e. une classe plus générale de variétés métriques. Cette extension non triviale de la géométrie riemannienne débouche sur une théorie unifiée des champs. (b) La justification mathématique du privilège accordé par Riemann aux variétés ≪ riemanniennes ≫ s'énonce comme suit : les variétés riemanniennes sont les seuls espaces de Finsler qui admettent une *unique* connexion compatible avec leur structure métrique. Généralisé adéquatement, ce théorème est le fondement du problème de l'espace.

Nous aurions pu nous contenter d'écrire une histoire des résultats obtenus par Weyl en géométrie différentielle et en relativité générale entre 1918 et 1923 : axiomatisation des variétés différentielles à connexion affine, définition intrinsèque du transport parallèle, généralisation de la géométrie riemannienne, projet avorté d'une théorie unifiée des champs, résolution du problème de l'espace. Cette manière de concevoir l'histoire des sciences repose sur le présupposé implicite suivant : il existerait un contenu scientifique indépendant des formes

textuelles, des procédés d'écriture et des activités lectorales de ses auteurs. Une histoire des résultats scientifiques sanctionnés par la vérification, la démonstration ou la réfutation s'avère réductrice lorsque l'on tente de saisir les travaux de Weyl en fonction du développement de la relativité générale. Les articles et ouvrages qu'il publie à la fin des années 10 et au début des années 20 sont polyphoniques : ils font coexister considérations philosophiques, mises en perspective historiques, définitions et raisonnements mathématiques. Cette polyphonie dans l'écriture même des textes de Weyl est corrélée à une grande polysémie et donc à des difficultés interprétatives auxquelles nous avons voulu nous confronter systématiquement au lieu de nous contenter de résumer quelques résultats isolés dans un langage modernisé. Nous faisons nôtre l'argument de K. Chemla et S. Pahaut selon lequel

> l'objectif qui consisterait à déterminer avec une certitude positive le contenu d'un document s'avère (...) relever de l'illusion ; or, il est difficile de ne pas rester captif de cet horizon partiel là où un domaine de l'histoire des pratiques intellectuelles comme l'histoire des sciences est considéré comme une histoire des seuls résultats. [58]

Les ≪ contributions ≫ de Weyl en géométrie différentielle et en relativité générale méritent surtout d'être étudiées en fonction des lectures mathématicienne, historienne et philosophique du *Habilitationsvortrag* de Riemann que l'on trouve notamment dans ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫, *Raum, Zeit, Materie*, ≪ Das Raumproblem ≫ ou encore *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Nous empruntons la distinction entre lectures mathématicienne et historienne à C. Goldstein :

> Les lectures mathématiciennes auront pour but de trouver des problèmes à résoudre, des méthodes à utiliser, bref un source d'inspiration pour produire de nouvelles mathématiques ; les lectures historiennes cherchent dans les textes des informations sur l'activité mathématique du passé et son développement, afin de produire des réflexions et des commentaires historiques. Les mêmes personnes peuvent en particulier apparaître tour à tour comme auteurs dans les deux catégories. [59]

Nous n'avons pas recensé et comparé l'ensemble des lectures mathématiciennes, historiennes et philosophiques de la *Leçon d'habilitation* de Riemann. Ce travail constituerait un sujet de recherche à part entière. Nous avons davantage voulu montrer comment une même personne, en l'occurrence Weyl, met en œuvre et croise ces deux types de lecture dans les diverses publications qu'on lui doit entre 1917 et 1927. Si donc nous en étions restés à une histoire

58. K. Chemla, S. Pahaut, ≪ Histoire et préhistoire de la dualité, Relecture des triangles sphériques avec et après Euler ≫, *Cahiers du centre de logique*, vol. **12**, 2002, p. 22.

59. C. Goldstein, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis, Presses universitaires de Vincennes, 1995, p. 7.

des résultats scientifiques de Weyl en géométrie différentielle et en relativité générale, nous aurions mis de côté les diverses lectures du *Habilitationsvotrag* qu'on lui doit. Ceci aurait eu une conséquence fâcheuse : les motivations qui président aux recherches de Weyl en relativité générale nous auraient échappé ; en effet, elles sont intimement liées aux lectures, interprétations et réécritures de la *Leçon d'habilitation* qui traversent justement ses recherches en géométrie différentielle et en relativité générale.

Transition vers la troisième partie

À partir de 1924, Weyl n'exprime plus le même enthousiasme à propos du programme intuitionniste de Brouwer. Les contraintes qu'entraîne la logique intuitionniste impliquent de renoncer à des pans entiers des mathématiques. Ainsi, dans « Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik », Weyl propose notamment une preuve constructiviste du théorème fondamental de l'algèbre. Mais les réflexions philosophiques qui accompagnent sa démonstration montrent qu'il adopte une voie moyenne entre l'intuitionnisme de Brouwer et le « formalisme » de Hilbert. Pour faire ressortir ce point, comparons les conclusions respectives de l'article polémique de 1921 et ce texte de 1924 :

Conclusion de l'article de 1921 :

> La théorie de Brouwer réunit *clarté* intuitive maximale et *liberté*. Quiconque, au milieu du formalisme abstrait des mathématiques, conserve un sentiment des données concrètes, éprouvera l'impression de se délivrer d'un cauchemar. [60]

Conclusion de l'article de 1924 :

> Aussi est-il d'un grand profit que Brouwer ait renforcé à nouveau le sens du donné intuitif en mathématique. Son analyse exprime le contenu de l'intuition mathématique originelle en sa pureté, aussi est-elle illuminée d'une clarté sans énigme. Mais en concurrence avec le chemin de Brouwer, nous devons suivre celui de Hilbert, car il n'est pas niable que nous avons en nous un besoin théorique, incompréhensible du simple point de vue phénoménal, dont l'élan créateur, orienté vers la représentation symbolique du transcendant, demande à être satisfait. [61]

Nous voudrions savoir si, et dans quelle mesure, cette voie moyenne adoptée par Weyl se retrouve dans sa pratique des mathématiques. En particulier, nous allons montrer dans la prochaine partie qu'il combine procédures axiomatiques et procédures constructives lorsqu'il publie sa grande série d'articles sur les représentations linéaires des groupes de Lie complexes semi-simples en 1925-1926. Nous nous intéresserons également à la conférence que

60. H. Weyl, « sur la crise contemporaine des fondements des mathématiques », *op. cit.*, p. 105.

61. H. Weyl, « remarques marginales à des problèmes fondamentaux des mathématiques » (1924), in *Le continu et autres écrits*, *op. cit.*, p. 286-287.

Weyl prononce en 1931 sous le titre « Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege des mathematischen Verständnisses » pour préciser la distinction entre procédures constructives et procédures axiomatiques.

Au tout début de la présente partie, nous avons indiqué qu'en 1916, Weyl s'approprie les fondements de la relativité générale en consultant « die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie » d'Einstein. De manière similaire, en 1925-1926, il s'intéresse aux fondements de la *mécanique matricielle* puisqu'il entretient une correspondance avec Born et Jordan ; parallèlement, il prend connaissance du projet concurrent — et, in fine équivalent — de *mécanique ondulatoire*, dans la mesure où il côtoie Schrödinger à Zürich. Il s'engage à partir de 1927 dans la mathématisation de la mécanique quantique dont les deux principaux versants — mécanique des matrices et mécanique ondulatoire — sont unifiés la même année par von Neumann. Les cours et les recherches de Weyl aboutiront à la publication de sa deuxième grande monographie en physique mathématique : *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (première édition 1928, seconde édition 1931). Nous verrons que Weyl envisage alors la relation entre physique mathématique et physique théorique d'une manière fort différente par rapport à ce qu'il en était à la fin des années 10 et au début des années 20 : il n'est plus question de produire témérairement une théorie qui unifierait toutes les interactions physiques tout en étant inconséquente empiriquement. De plus, on observe un tournant empirique dans son épistémologie qui est donc très éloignée de la philosophie d'inspiration fichtéenne qui conditionnait ses recherches consacrées à une théorie unifiée des champs en 1918. Nous analyserons donc avec précision ce tournant empirique en confrontant à nouveaux frais Weyl aux positivistes logiques.

Troisième partie

Représentations de groupes, symétries et mécanique quantique

Introduction : les groupes, entre mathématiques pures et physique mathématique

À première vue, l'œuvre de Weyl se caractérise par une série de *discontinuités* si l'on compare les deux périodes suivantes : 1917-1923 d'une part, 1924-1931 d'autre part. Entre 1917 et 1923, la relativité générale et sa mathématisation occupent une place absolument centrale dans ses réflexions. Weyl généralise la géométrie riemannienne, il participe au développement du calcul tensoriel et il résout le problème de l'espace. Parallèlement, il entend unifier les théorie de la gravitation et de l'électromagnétisme en se fondant sur des variétés munies d'une classe conforme de métriques pseudo-riemanniennes. En revanche, à partir de 1924, Weyl s'intéresse moins aux géométries différentielle et riemannienne qu'à la théorie des représentations de groupes. Il étudie les représentations des groupes de Lie, tout en les corrélant aux représentations du groupe symétrique. En outre, dès 1927, il publie une série de textes sur la mécanique quantique et, en particulier, son ouvrage fondamental *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928 pour la première édition, 1931 pour la seconde édition) ; il met alors en avant l'ensemble des applications connues de la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique. Il y aurait donc, très schématiquement, un double basculement : de la géométrie différentielle à la théorie des représentations de groupes d'une part, de la relativité générale à la mécanique quantique d'autre part. Nous serions alors tentés de croire que l'intérêt de Weyl pour les représentations de groupes serait la cause qui explique pourquoi il s'investit en mécanique quantique.

Bien que séduisante, cette lecture historique nous paraît simplificatrice pour deux raisons. (1) Elle prend l'œuvre de Weyl pour seul cadre de référence. Or, celui-ci entretient une correspondance avec Cartan, Schur, Jordan, Born, Pauli, von Neumann, etc., et il côtoie Schrödinger à Zürich jusqu'en 1927. Ces échanges manifestent ce qu'Elias appelle une configuration, c'est-à-dire un ensemble complexe de liens d'interdépendance qui expliquent au moins en partie les réorientations successives que subissent les recherches de Weyl au cours des années 20. (2) Elle met trop vite l'accent sur des discontinuités voire des ruptures massives dans le parcours scientifique de Weyl, sans prendre la mesure de ce qui est conservé lorsque l'on compare ces deux périodes. Pour illustrer très sommairement le premier point, nous pouvons évoquer brièvement le lien d'interdépendance qui unit Cartan à Weyl au cours des années 20. La définition intrinsèque du transport parallèle proposée par Weyl dès 1918 pour des variétés différentielles quelconques et sa géométrie purement infinitésimale ouvrent la voie à la théorie des espaces généralisés de Cartan. Corrélativement, ce dernier prend connaissance

du problème de l'espace de Weyl en 1922, i.e. après parution de la traduction en français de *Raum, Zeit, Materie* (quatrième édition). Cartan propose une solution concurrente à ce problème en s'appuyant sur sa thèse (1894) et sur des articles qu'il a publiés en 1913-1914. Weyl mentionne cette solution dans sa *mathematische Analyse des Raumproblems* ; il commence donc à mesurer l'effectivité de la théorie des algèbres de Lie de Cartan. Weyl s'approprie partiellement cette théorie dès 1924. Elle constitue l'un des volets de son article majeur de 1925-1926 sur les représentations linéaires des groupes de Lie complexes semi-simples. Mais, dans le même temps, Weyl insiste sur l'importance d'une approche globale dans l'étude des groupes de Lie qui est fondée sur la description de leurs propriétés topologiques. Cartan accueille d'abord ce projet avec prudence, avant de le faire complètement sien à la fin des années 20. Dans ce qui suit, nous ne nous en tiendrons pas à la correspondance Weyl / Cartan, nous montrerons également que la correspondance Weyl / Schur détermine très fortement la forme que prendra finalement l'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie. Cependant, le rapport Weyl / Cartan nous paraît déjà suffisamment significatif pour comprendre que le programme de recherche suivi par Weyl ne dépend pas du seul développement interne de son œuvre, mais des liens d'interdépendance qu'il noue avec d'autres mathématiciens.

Abordons maintenant le second point. Tout d'abord, Weyl commence à s'approprier le calcul tensoriel dès qu'il s'intéresse à la mathématisation de la relativité générale en 1916-1917. Or, le calcul tensoriel constitue un objet d'investigation dans son œuvre au moins jusqu'en 1931, date de parution de la seconde édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. De plus, il ne découvre pas subitement la théorie des groupes et des algèbres de Lie en 1923-1924. Nous avons vu en deuxième partie qu'elle intervient de manière essentielle dans la résolution du problème de l'espace (1921-1923). Il est vrai qu'alors la référence principale de Weyl demeure l'ouvrage de Lie et Scheffers intitulé *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen* (1893). Entre 1923 et 1924, la donne change : la thèse de Cartan devient l'ouvrage de référence de Weyl en théorie des groupes et des algèbres de Lie. Enfin, en 1925, Weyl rédige un texte d'une quarantaine de pages qui sera seulement publié en 1988 : *Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie*. Nous avons déjà mentionné cet ouvrage dans les parties précédentes de notre thèse. En voici la raison : dans ce texte, Weyl met en exergue son article de 1916 sur les surfaces de Riemann — qui consiste à traduire la classification des revêtements d'une surface de Riemann dans le langage de la théorie de Galois — et ses travaux sur le problème de l'espace. Il faut bien prendre conscience qu'il rédige cet ouvrage exactement au moment où il publie son article sur les groupes de Lie. Il porte un regard rétrospectif sur ses travaux en

analyse complexe et en géométrie différentielle en insistant sur leur lien avéré avec la théorie des groupes. Il n'est donc pas possible de séparer l'œuvre de Weyl en deux grands blocs : d'une part « les idées géométriques de Riemann » (1913, 1918-1923), d'autre part « la théorie des groupes » (1924-1931), puisque l'objectif de Weyl consiste préciser à dialectiser ces deux pôles tout au long de sa carrière de chercheur. Seulement, il ne s'y prend pas exactement de la même manière avant et après 1924. Pour dire les choses très schématiquement, dans ses travaux sur les surfaces de Riemann ou en géométrie différentielle, il s'appuie sur la théorie des groupes pour éclairer les idées géométriques de Riemann. L'exemple le plus spectaculaire est le problème de l'espace que Weyl commence à construire en commentant le *Habilitationsvortrag* de Riemann et qu'il finit par résoudre en utilisant des techniques relevant de la théorie des groupes et des algèbres de Lie. En revanche, à partir de 1924, Weyl utilise les idées géométriques de Riemann — en particulier les éléments d'*analysis situs* issus de la théorie des surfaces de Riemann — pour étudier les groupes de Lie ainsi que leurs représentations.

Notre argument se confirme lorsque nous l'étendons à la physique mathématique. La monographie de Weyl sur la relativité générale et celle qu'il consacre à la mécanique quantique admettent également certaines similitudes : dans les deux cas, Weyl entend s'adresser aussi bien à des mathématiciens qu'à des physiciens. En outre, la question de l'unité de la physique demeure un invariant. En 1918, il s'agissait d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme à partir d'un cadre géométrique défini *a priori* — la géométrie purement infinitésimale de Weyl — : la géométrisation de la physique constituait donc le moyen essentiel pour parvenir à une théorie unitaire. À partir de 1927-1928, Weyl étudie la mécanique quantique non relativiste et la mécanique quantique relativiste de Dirac, avant de se demander s'il ne serait pas possible de construire une unique théorie qui embrasserait d'un seul tenant la matière, l'électricité et la gravitation, comme en témoigne son article de 1929 intitulé « Elektron und Gravitation ». La prise en compte de ces « invariants » nous permet en retour d'analyser plus finement les variations et les discontinuités à l'œuvre lorsque l'on aborde les travaux qu'il publie dans la seconde moitié des années 20. Ainsi, en 1927-1928, il ne s'agit plus d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme, mais avant tout l'électricité et la « matière » telle qu'elle est conçue dans le cadre de la mécanique ondulatoire ; de plus, Weyl ne croit plus qu'une telle unification puisse s'opérer par voie de géométrisation. Enfin, alors qu'en 1918 Weyl partait de la théorie de la gravitation pour tenter d'expliquer la structure de la matière en s'appuyant exclusivement sur une théorie classique des champs conformément au programme de Mie-Hilbert, il parcourt le chemin en sens inverse à partir de 1927 : la mécanique quantique doit servir de point de départ pour embrasser de proche en proche les interactions électromagnétiques et, si

possible — mais ce ne sera de fait pas le cas — les interactions gravitationnelles. Pour le dire autrement, entre 1918 et 1923, la relativité générale est au centre des investigations de Weyl, la théorie des quanta est rejetée en périphérie. Cette dernière n'a qu'un rôle négatif : elle vient compromettre le programme de Mie-Hilbert, ce dont Weyl prend conscience à la fin de l'année 1920. Il devient rigoureusement impossible de décrire et d'expliquer la structure de la matière exclusivement en se fondant sur une théorie classique des champs. Inversement, en 1927-1928, la mécanique quantique non relativiste et relativiste est au cœur des préoccupations de Weyl et il s'agit de savoir si l'on peut parvenir à un projet d'unification des interactions physiques connues — gravitation comprise — en s'appuyant d'abord sur ce cadre.

Les deux cheminements suivis par Weyl respectivement en 1918 et en 1927-1928 ne sont pas seulement inverses, ils reposent sur des principes épistémologiques radicalement différents. Comme nous l'avons souligné dans la partie précédente, entre 1916 et 1920, Weyl s'approprie certains traits de la théorie fichtéenne de la connaissance et il adhère à une forme d'*apriorisme* pour parvenir à sa théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique. En 1927-1928 au contraire, son épistémologie implicite est de style empiriste. Il nous faudra cependant en cerner les singularités lorsque nous comparerons sa première théorie de jauge (1918) à sa seconde théorie de jauge (1927-1928), largement anticipée par Schrödinger (1922), Fock et London (1926). Nous montrerons également que ce tournant empirique n'a rien de commun avec le positivisme logique, représenté sous des modalités différentes par Reichenbach, Schlick et Carnap. Si donc discontinuités il y a dans l'œuvre de Weyl, celles-ci ne se situent pas seulement du côté des mathématiques et de la physique mathématique, elle concernent également son épistémologie.

Les deux problèmes qu'il convient de résoudre au cours de cette troisième partie sont donc les suivants :

(i) Comment localiser, déterminer et expliquer les réorientations qui sont à l'œuvre chez Weyl à partir du milieu des années 20 en mathématiques, en physique mathématique et en épistémologie ? Nous montrerons en particulier qu'il n'est pas question d'un basculement aussi massif que brutal de la géométrie différentielle à la théorie des représentations de groupes d'une part, de la relativité générale à la mécanique quantique d'autre part.

(ii) Comment situer et spécifier ses travaux en théorie des représentations de groupes et en mécanique quantique par rapport à ses prédécesseurs et ses contemporains ? Nous montrerons que son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie et sa monographie sur la mécanique quantique constituent deux très vastes synthèses qui rassemblent des connaissances et des méthodes très variées. Nous mesurerons ainsi la diversité des sources utilisées par Weyl

ainsi que les procédés qu'il utilise pour les combiner. En outre, l'étude de sa correspondance permettra de montrer concrètement l'impact de ses liens d'interdépendance avec d'autres chercheurs dans la constitution de ces deux textes fondamentaux. Elle servira également de pierre de touche afin de mesurer la complexité de la réception de sa monographie en mécanique quantique parmi les physiciens.

Dans le premier chapitre, nous reviendrons sur les travaux de Cartan, Frobenius-Schur et Hurwitz que Weyl s'approprie pour parvenir à son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples et leurs représentations. Il s'agit pour l'essentiel de rappels nécessaires à l'intelligibilité du texte de Weyl. Dans le deuxième chapitre, nous analyserons cet article en insistant sur la conception sous-jacente de la généralité et de l'unité des mathématiques qui singularise d'ailleurs Weyl par rapport à certains tenants de l'école algébrique allemande — nous pensons à Artin ou encore à E. Noether. Nous verrons comment Weyl *unifie* deux méthodes : la méthode algébrique et locale de Cartan d'une part, la méthode intégrale et topologique de Hurwitz-Schur d'autre part. De plus, Weyl dialectise le particulier — via l'étude des représentations de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ — et le général — comme en témoigne la théorie des groupes de Lie complexes semi-simples et de leurs représentations à laquelle il souhaite aboutir. Nous pouvons même dire plus : l'*unification* des méthodes de Cartan et de Hurwitz-Schur lui permet de *généraliser* ses principaux résultats à tout groupe de Lie complexe semi-simple. Une *généralisation par unification* est donc à l'œuvre dans l'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples. Dans le troisième chapitre, nous décrirons comment von Neumann, Wigner et Weyl appliquent la théorie des groupes et des représentations de groupes à la mécanique quantique. Nous serons particulièrement attentifs aux arguments qu'ils invoquent pour justifier l'usage de ce cadre mathématique en mécanique quantique. En particulier, nous serons amenés à spécifier leur projet par rapport aux très nombreux travaux consacrés à la formalisation de la mécanique quantique entre 1925 et 1931. En effet, il n'y a pas un, mais des projets de *mathématisation* de la mécanique quantique ; ils sont tantôt concurrents, tantôt complémentaires, tantôt équivalents. De plus, ils n'éclairent pas exactement de la même manière les données empiriques issues de la spectroscopie dont il s'agit de rendre raison. Toujours dans ce troisième chapitre, nous aborderons la seconde théorie de jauge de Weyl, car elle manifeste de manière très explicite le tournant empirique que subit son épistémologie dans la seconde moitié des années 20. Enfin, dans un dernier chapitre, nous comparerons de manière systématique les réflexions épistémologiques de Weyl et de Wigner consacrées au statut et aux fonctions des principes d'invariance dans une diversité de théories physiques. Pour ce faire, nous nous appuierons notamment sur deux

ouvrages de vulgarisation de Weyl et Wigner, à savoir respectivement *Symmetry* (1952) et *Symmetries and Reflections* (1979).

Chapitre 1

Les emprunts de Weyl à Cartan, Frobenius et Hurwitz

L'article que publie Weyl en théorie des représentations de groupes en 1925-1926 doit sa « notoriété » à un résultat en particulier : le théorème de complète réductibilité pour tous les groupes de Lie complexes semi-simples.[1] À s'en tenir à cet énoncé, il serait tentant de considérer les travaux de Weyl dans une perspective linéaire : il ne ferait que prolonger la théorie des représentations de groupes aux groupes et aux algèbres de Lie. Tout se passe comme si un cadre théorique était fixé une fois pour toutes, constituant ainsi un préalable aux recherches menées par Weyl à partir du milieu des années 20. Cette manière de situer historiquement les travaux de Weyl est fondée sur une illusion rétrospective. Habitués par la lecture de certains ouvrages de mathématiques qui synthétisent la théorie des représentations de groupes dans le cas des groupes finis et des groupes topologiques compacts avant d'aborder les représentations des groupes de Lie, nous faisons comme si cet ordre logique, guidé par une classification des groupes en fonction de leur structure, coïncidait avec un quelconque ordre historique. Rien n'est moins sûr. La théorie des groupes et des algèbres de Lie se développe de manière spectaculaire entre 1873-1874 et 1894. Cette périodisation, trop schématique et sans doute discutable, est bornée par deux événements précis. L'hiver 1873-1874 marque communément le point de départ de l'étude des groupes continus de transformations pour eux-mêmes initiée par Lie, avant d'être poursuivie notamment par Engel et Killing, conjointement avec Lie. En 1894, Cartan soutient sa thèse qui est en partie consacrée à la classification des

1. En théorie des représentations de groupes, le théorème de complète réductibilité signifie que toute représentation de dimension finie d'un groupe se décompose en une somme directe de représentations irréductibles.

algèbres de Lie simples proposée par Killing. Cette périodisation est arbitraire pour les raisons suivantes : elle ne tient pas compte des travaux antérieurs développés par Lie et Klein en 1869-1872 sur les groupes continus de transformations et la géométrie ; le *Programme d'Erlangen* de Klein vient parachever ces recherches consacrées à la classification des géométries définies sur des espaces homogènes. Ajoutons qu'entre 1872 et 1874, les motivations de Lie sont différentes et elles l'amènent à se distancier de Klein : Lie entend prolonger les travaux de Jacobi sur les équations aux dérivées partielles et montrer l'effectivité de la théorie des groupes continus de transformations en analyse. [2] De plus, il ne faudrait pas croire que la thèse de Cartan représente la théorie des groupes continus de transformations à sa ≪ maturité ≫. Certes, Cartan donne ses contours définitifs à la classification des algèbres de Lie complexes simples opérée par Killing. Mais la question de la classification des algèbres de Lie réelles simples reste ouverte [3] et de nombreuses innovations formelles, conceptuelles et théoriques sont encore à venir. Aussi discutable soit-il d'enfermer les premiers développements de la théorie des groupes continus de transformations dans des bornes aussi étroites, nous pouvons néanmoins confirmer qu'ils voient le jour avant que Frobenius n'introduise les premiers concepts et les premiers résultats en ≪ théorie des caractères ≫ [4] exclusivement dans le cas des groupes finis quelconques — abéliens *et* non abéliens.

En outre, les travaux en théorie des représentations des groupes et des algèbres de Lie, initiés par Schur en 1924 dans le cas du groupe spécial orthogonal et du groupe orthogonal, avant d'être prolongés et systématisés par Weyl entre 1924 et 1926, sont bien antérieurs aux écrits consacrés aux représentations des groupes topologiques localement compacts et compacts que l'on doit à Haar (1933), von Neumann (1934 / 1936) et Weil (1940). [5] Plus

2. Pour plus de précisions, voir T. Hawkins, *Emergence of the theory of Lie groups*, *op. cit.*, p. 1-2. On pourra également consulter les chapitres 1 et 2 de cet ouvrage qui accordent toute la place qu'elles méritent aux recherches menées par Lie entre 1869 et 1873 avant qu'il ne projette de développer une théorie systématique des groupes continus de transformations.

3. É. Cartan résoudra complètement ce problème dans un article de 1914 intitulé ≪ Les groupes réels simples, finis et continus ≫, *Annales scientifiques de l'ÉNS*, 3e série, tome 31, 1914, p. 263-355.

4. La notion de caractère est centrale en théorie des représentations de groupes : précisons que le caractère d'une représentation ρ de G est une fonction χ_ρ sur G à valeurs complexes telle que $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$, pour tous g de G. Cette définition est due à Frobenius en 1897.

5. A. Haar, ≪ der Maasbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen ≫, *Ann. of Math.*, t. XXXIV, 1933, p. 147-169, J. von Neumann, ≪ Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen ≫, *Compos. Math.*, t. 1, (1934), p. 106-114 et ≪ The uniqueness of Haar's measure ≫, *Math. Sbornik*, t. 1, (1936), p. 721-736 et A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (1940), Paris, éd. Hermann, 1953, p. 5 : ≪ En 1933, A. Haar a démontré que l'existence d'une mesure invariante dans un espace de groupe est liée à des conditions topologiques très simples et très générales, à savoir la compacité locale du groupe ≫.

radicalement, il est réducteur de résumer l'article publié par Weyl entre 1925 et 1926 à un seul résultat envisagé d'ailleurs en dehors de tout contexte historique, à savoir le théorème de complète réductibilité pour les groupes de Lie complexes semi-simples. Malgré leurs similitudes de contenu, les théorèmes de complète réductibilité, pour les groupes finis, les groupes de Lie complexes semi-simples et les groupes compacts ne peuvent pas être situés sur le même plan et ils appartiennent à des contextes différents sans lien avec un ordre logique marqué par la triade : groupes finis / groupes compacts / groupes de Lie. Il n'est pas anodin de préciser que la preuve de Weyl repose sur des méthodes spécifiques — la restriction au cas unitaire développée par Hurwitz en théorie des invariants — et qu'elles engagent des éléments de connaissance en *analysis situs*. Des preuves purement algébriques du théorème de Weyl seront proposées plus tardivement par van der Waerden et Casimir d'une part, Brauer d'autre part [6]. Tout d'abord, l'ordre logique et l'ordre historique d'une théorie peuvent être rigoureusement contraires. Ensuite, on ne saurait réduire l'article de Weyl de 1925-1926 à la démonstration d'un théorème, à moins de considérer implicitement que l'histoire des sciences serait une simple affaire de *résultats* scientifiques. Il est justement essentiel de tenir compte des méthodes utilisées, des procédés d'écriture, des modes d'appropriation des sources qui président à la construction d'un texte scientifique et de décrire la réception souvent complexe et contrastée dont il peut faire l'objet. Tel est notre objectif dans l'étude de l'article de Weyl de 1925-1926 : ces données nous permettent non seulement de situer rigoureusement ses contributions, mais également de mesurer la spécificité de sa démarche.

Plusieurs problèmes méritent donc d'être posés qui montrent que cette approche historique en termes de « résultats scientifiques » n'est pas tenable. Tout d'abord, la série d'articles que Weyl publie en 1925-1926 relève-t-elle exclusivement de la théorie des représentations de groupes ? Nous pouvons en douter. En réalité, Weyl croise plusieurs cadres théoriques : calcul tensoriel, théorie des groupes et des algèbres de Lie, *analysis situs*, théorie des représentations de groupes. Ensuite, ses travaux frappent par la complexité et la diversité de leurs emprunts : Weyl s'approprie la méthode de la restriction au cas unitaire que l'on doit à Hurwitz (1897) ; parallèlement, il reprend à son compte les méthodes et les résultats de Cartan en théorie des groupes et des algèbres de Lie simples et semi-simples (1894 et 1913) ; il insiste également sur sa dette à l'égard de Frobenius et Schur. Bref, il combine diverses méthodes et il s'appuie sur

6. H. B. G. Casimir et B. L. van der Waerden, « Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen », *Math. Ann.*, **111** 1935, p. 1-12, R. Brauer, « Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen », *Mathematische Zeitschrift*, **41**, 1936, 330-339.

différents cadres théoriques et outils conceptuels, de sorte qu'il est impossible de ranger ses travaux à l'intérieur d'une discipline bien constituée. En particulier, ce n'est pas parce qu'il investit des théories qui relèvent peu ou prou de l'*algèbre* qu'il raisonne en *algébriste*. Qu'il nous suffise de revenir brièvement sur son résultat fondamental pour confirmer ce point : considéré en lui-même, le théorème de complète réductibilité est de nature algébrique. Or, la méthode de la restriction au cas unitaire utilisée par Weyl pour le prouver fait intervenir des concepts et des éléments de connaissance hérités de l'*analysis situs*. Lorsque nous voulons situer un théorème dans un champ disciplinaire, il nous semble insuffisant de nous en tenir à son énoncé même qui ne nous apporte que des informations partielles. Il s'agit davantage d'identifier les problèmes qui motivent sa formulation, mais aussi les méthodes utilisées pour le démontrer. Par extension, il est rigoureusement impossible de dire que l'article de Weyl en 1925-1926 marque un basculement tranché du domaine de l'analyse ou de la géométrie différentielle à l'algèbre. On ne peut d'ailleurs pas faire comme si certaines disciplines mathématiques étaient fixées une fois pour toutes et comme si elles étaient totalement cloisonnées. De plus, il n'est pas adéquat de penser que l'on peut toujours insérer un écrit scientifique dans une discipline bien circonscrite. Les disciplines mathématiques admettent elles-mêmes une histoire marquée par tout un jeu de dépendances et de distribution des savoirs complexe et différent de celui que nous connaissons. Les contours et les objets de telles disciplines peuvent nous paraître clairs une fois qu'elles se sont autonomisées. Ce n'est par exemple pas le cas de l'*analysis situs* dont Weyl se réclame aussi bien en analyse complexe qu'en théorie des représentations de groupes.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de revenir sur les travaux de Cartan, Hurwitz et Frobenius que Weyl parcourt et qu'il discute dans l'article qu'il publie en 1925-1926. La diversité de ses emprunts montre que l'on ne saurait situer les contributions de Weyl sur les représentations des groupes de Lie dans une histoire linéaire. Il convient davantage d'adopter ici un modèle arborescent : cet article se situe à l'intersection entre diverses traditions disciplinaires et elle combine au moins deux méthodes [7] : la méthode intégrale et transcendante de Hurwitz et la méthode algébrique et infinitésimale de Cartan pour reprendre les expressions employées par Weyl lui-même. Nous pouvons identifier en retour un type de procédé que Weyl mettait déjà en œuvre en 1913 dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Il dialectisait alors deux méthodes à premier abord distinctes, voire opposées : la méthode intégrale de Riemann et la méthode algébrique et locale de Weierstrass. Weyl fait d'ailleurs ce rapproche-

7. De fait, elle en combine trois si l'on se réfère à la théorie des caractères de Frobenius que Weyl étend aux groupes de Lie.

ment dans sa conférence de 1931 intitulée « Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege des mathematischen Verständnisses ». [8] Dans un premier temps, nous résumerons l'essentiel des éléments de connaissance que l'on doit à Cartan sur les algèbres de Lie simples et semi-simples. Dans un deuxième temps, nous ferons quelques rappels nécessaires sur l'histoire de la théorie des représentations de groupes finis au tournant du XX^{e} siècle. Enfin, dans un dernier temps, nous décrirons la méthode de restriction au cas unitaire telle qu'elle est introduite par Hurwitz dans un article de 1897.

1.1 Cartan et les groupes de Lie semi-simples

Les travaux de Cartan sur les groupes de Lie semi-simples et sur leurs représentations irréductibles ont été étudiés de manière systématique par Hawkins dans son ouvrage intitulé *Emergence of the theory of Lie groups*. Notre motivation n'est pas de revenir en détail sur les emprunts de Cartan à Lie, Engel ou encore Killing. Nous ne présenterons pas non plus de manière exhaustive les raisonnements et les résultats de Cartan dans sa thèse (1894) et dans la série d'articles qu'il publie en 1913-1914. Notre but est plus modeste : nous synthétiserons la démarche et les innovations de Cartan à trois niveaux : caractérisation des algèbres de Lie semi-simples (1894), classification des groupes de Lie simples complexes (1894), étude des représentations irréductibles des algèbres de Lie complexes semi-simples (1913). Pour parvenir à cette fin, nous nous référerons pour l'essentiel à trois textes de Cartan : sa *Notice sur les travaux scientifiques* (1931), sa thèse (1894) et son article intitulé « les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane » (1913). Ces deux derniers écrits constituent d'ailleurs la référence principale que Weyl s'approprie dans son article de 1925-1926.

En 1893-1894, Cartan publie un premier article en langue allemande intitulé « Über die einfachen Transformationsgruppen » qui est intimement corrélé à son travail de thèse. Dans ces deux écrits, comme d'ailleurs dans le paragraphe de sa notice consacré à la « théorie des groupes de transformations finis et continus », Cartan insiste sur le fait que ses travaux se situent dans le prolongement des résultats obtenus par Killing concernant la « structure » et la classification des groupes de Lie simples complexes. Évoquant la série d'articles publiés par Killing entre 1888 et 1890 sous le titre « Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen », Cartan rappelle dans sa notice que

8. En 1913 comme en 1925-1926, Weyl accorde une importance centrale à la théorie des revêtements. Dans le chapitre suivant, nous montrerons que Weyl utilise un vocabulaire et des procédés hérités de la théorie des surfaces de Riemann pour démontrer que le groupe SU_n est simplement connexe pour $n \geqslant 2$.

> Les résultats les plus saillants [de Killing] sont relatifs à la détermination de toutes les structures possibles de groupes simples : *en dehors des quatre grandes classes de groupes simples trouvées par S. Lie, il n'y a que cinq structures possibles de groupes simples, qui ont respectivement 14, 52, 78, 133 et 248 paramètres.* [9]

Pour le dire autrement, à côté des quatre classes d'algèbres de Lie simples « classiques », [10] Killing met au jour les cinq classes d'algèbres de Lie simples de type exceptionnel. De ce point de vue, Cartan ne fait que simplifier, rectifier et compléter les raisonnements de Killing, comme il le précise d'ailleurs dans sa notice ainsi que dans sa thèse. [11] Si maintenant on considère plus globalement les contributions de Cartan en théorie des algèbres de Lie complexes de dimension finie, on peut observer qu'en réalité, il ne se contente pas de prolonger et de corriger les travaux de Killing. On doit en particulier à Cartan des critères pour caractériser les algèbres de Lie *résolubles* et les algèbres de Lie *semi-simples* ; ces critères sont issus de « l'équation caractéristique » associée à une algèbre de Lie donnée. Il met en exergue une telle caractérisation dans l'introduction à sa thèse. [12] Cette dernière ne se réduit donc pas à une simple reformulation de résultats déjà obtenus par Killing. Cartan prend d'ailleurs systématiquement le soin de préciser ce qu'il emprunte à Killing et ce qui est « nouveau » dans ses propres travaux. Cette « nouveauté » n'est pas qu'une affaire de résultats, elle concerne également les réseaux de concepts utilisés par Cartan. Il n'en reste pas moins qu'il situe sa thèse dans une perspective cumulative par rapport à son principal prédécesseur, en l'occurrence Killing.

---

9. É. Cartan, *Notice sur les travaux scientifiques*, in *Œuvres complètes* I.1., Paris, éd. du CNRS, 1984, p. 12.

10. Il s'agit en l'occurrence des quatre algèbres de Lie suivantes : $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 1$, $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$, $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 3$ et $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 4$. Comme le précise J. Dieudonné dans son ouvrage *Sur les groupes classiques* (p. 1), l'expression « groupe classique » est employée par Weyl pour la première fois en 1939 pour désigner « le groupe linéaire général à n variables et les sous-groupes de $\mathrm{GL}(n)$ laissant invariante une forme quadratique (groupe orthogonal), une forme hermitienne (groupe unitaire) ou une forme alternée (groupe symplectique) ».

11. *ibid.*, p. 12 : « En ce qui concerne les groupes simples, [Killing] avait énoncé les résultats exacts et indiqué les grandes lignes de la démonstration. Je n'avais donc en somme à faire qu'un travail de mise au point ; je me suis attaché à mettre de l'ordre et de la précision un peu partout, à combler les lacunes qui pouvaient exister dans les démonstrations et à établir sur des bases solides celles qui reposaient sur des théorèmes inexacts ». Voir également la première thèse de Cartan intitulée *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* in œuvres, Tome I.1., *op. cit.*, p. 139 : « Le présent travail a pour but d'exposer et de compléter en certains points les recherches de M. Killing, en y introduisant toute la rigueur désirable ».

12. É. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, *op. cit.*, p. 140.

1.1.1 La « structure » des algèbres de Lie

Dès sa thèse (1894), Cartan insiste sur le fait qu'il s'intéresse à la « structure » des groupes continus de transformations complexes, i.e. des groupes de Lie complexes. À première lecture, une telle remarque peut surprendre : influencés par le développement des mathématiques structurales, nous parlons de la structure *de* groupe, *d*'algèbre, etc. Nous entendons par là un ensemble d'éléments muni d'une ou de plusieurs lois de composition qui sont elles-mêmes assujetties à certaines propriétés — commutativité, associativité etc. La structure algébrique *de* groupe correspond au concept de groupe abstrait qui est considéré indépendamment de la nature des objets auxquels il renvoie. Au cours de sa *Notice sur les travaux scientifiques* (1931), Cartan tend vers cette approche structurale sans jamais l'embrasser pleinement. Il prend alors pour point de départ le groupe des déplacements de la géométrie élémentaire pour s'élever explicitement à un niveau d'abstraction supérieur, fondé sur la seule étude de la « structure logique » d'un tel groupe :

> c'est toute la *structure logique* de la Géométrie élémentaire qui est contenue dans le groupe des déplacements et même, d'une manière plus précise, dans la loi suivant laquelle se composent entre elles les opérations de ce groupe, *abstraction faite de la nature des objets sur lesquels s'exercent ces opérations*. Cette loi constitue ce qu'on appelle la *structure* du groupe. [13]

Cartan s'approche donc de la méthode structurale par le bas ; pour ce faire, il se fonde au préalable sur des groupes connus et il dégage les propriétés des lois qui les gouvernent ; il s'abstrait en conséquence des éléments qu'ils contiennent. Toutefois, à aucun moment Cartan ne commence par définir des structures abstraites pour ensuite étudier leurs diverses réalisations.

A fortiori, dans sa thèse de 1894 comme dans les articles de 1913-1914 sur lesquels nous nous proposons de revenir, Cartan ne considère jamais des groupes *abstraits*, mais bien des groupes de *transformations* continus. Il emploie systématiquement le terme de *structure* en rapport avec certains *types* de groupes dont la nature est spécifiée. Les mots ne doivent donc pas prêter à confusion : lorsqu'il évoque une « théorie de structure », Cartan ne se fait pas le promoteur des mathématiques structurales avant l'heure. Ce serait là commettre un anachronisme et surtout oublier qu'en théorie des groupes et des algèbres de Lie, les méthodes utilisées par Cartan ne sont ni structurales ni fondées sur l'usage d'axiomes. Il est redevable d'une tradition liée aux figures de Klein, Lie, Engel ou encore Killing. Ces derniers travaillent sur des groupes continus de transformations. Nous avons donc dit ce que « la théorie de la structure » au sens de Cartan n'est pas : le terme « structure » ne correspond pas ici aux

13. É. Cartan, *Notice sur les travaux scientifiques*, *op. cit.*, p. 3.

mathématiques structurales. Pour négative qu'elle soit, cette remarque n'en laisse pas moins d'avoir une pertinence d'un point de vue historique. En effet, il existe nous semble-t-il un point commun saisissant entre Cartan et Weyl — dont les liens seront très étroits sur un plan scientifique au cours des années 20, aussi bien en relativité générale qu'en théorie des groupes et des algèbres de Lie — : tous deux s'inscrivent dans des traditions qui interdisent d'annexer leurs travaux au développement des mathématiques structurales. Il faut néanmoins moduler ce rapprochement à deux niveaux : (1) contrairement à Weyl, Cartan privilégie les méthodes « algébriques » en théorie des groupes et des algèbres de Lie et il accueille d'abord avec circonspection l'usage de méthodes transcendantes par intégration et fondées sur l'*analysis situs* qui interviennent dans l'article de Weyl de 1925-1926 ; (2) à la différence de Cartan, Weyl utilise la méthode des définitions par axiomes dans une veine hilbertienne tant dans *Raum, Zeit, Materie* que dans son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie.

Reste maintenant à préciser ce que Cartan entend par « structure ». Pour ce faire, appuyons-nous sur un passage fondamental tiré de sa *Notice sur les travaux scientifiques* :

> C'est à la théorie, si importante d'après ce qui précède, de la *structure* en général, et à la détermination des groupes simples en particulier, que sont consacrées mes premières recherches sur les groupes. Mais la théorie de la structure revêt des formes mathématiques bien différentes suivant la nature des groupes étudiés (groupes *discontinus*, *finis* comme le groupe d'une équation algébrique, ou *infinis* comme les groupes fuchsiens ; groupes *continus et finis* comme le groupe de la Géométrie élémentaire ; groupes *continus et infinis*). [14]

Il ne s'agit pas pour Cartan d'étudier la structure *de* groupe, mais la structure *d'un* groupe en fonction du type auquel il appartient. Il évoque tour à tour les groupes finis — par exemple les groupes de permutations —, les groupes infinis discrets, les groupes de Lie à un nombre fini de paramètres et les groupes de Lie à un nombre infini de paramètres. À aucun moment il n'évoque une « structure » qui transcenderait ces différents types de groupes. Il dit exactement l'inverse : la « théorie de la structure » est *relative* au type de groupe sur lequel on travaille. Cartan insiste sur le fait que deux groupes (discontinus finis ou infinis, continus à un nombre fini ou infini de paramètres) ont la même structure lorsqu'ils sont *isomorphes*. La théorie de la structure consiste donc à identifier des éléments de structure c'est-à-dire des critères universels afin de déterminer si deux groupes de même type sont isomorphes ou non. Dans le cas des algèbres de Lie, ce rôle est joué par certaines constantes que l'on appelle maintenant *constantes de structure*, conformément à la terminologie de Cartan lorsqu'il dit vouloir proposer une théorie de la structure des groupes et des algèbres de Lie.

14. *ibid.*, p. 18-19.

Précisons sa démarche en nous appuyant sur le début du chapitre 1 de sa thèse. Cartan commence par définir un groupe G de transformations continu à un nombre fini de paramètres en précisant que la composée de deux quelconques de ses transformations doit encore être contenue en lui. Le nombre r désigne le nombre de paramètres de G, i.e. sa dimension. Cartan introduit ensuite une application $f : \mathbb{R} \to G$ telle que pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, on ait $f(t+s) = f(t)f(s)$. L'application f désigne un sous-groupe à un paramètre de G. Il remarque qu'il existe une unique transformation infinitésimale X de G qui engendre ce groupe à un paramètre. La transformation X est définie comme la limite du rapport $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. Par exemple, le groupe infinitésimal — i.e. l'algèbre de Lie — d'un groupe de Lie linéaire est l'ensemble engendré par les générateurs infinitésimaux des sous-groupes à un paramètre, cet ensemble étant muni du commutateur $[XY] = XY - YX$. Cartan considère r transformations infinitésimales linéairement indépendantes X_1, X_2, ..., X_r. Celles-ci forment une base de l'algèbre de Lie de G. Il introduit les constantes qui sont des nombres réels ou complexes c_{iks} tels que

$$[X_i, X_k] = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s$$

La structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est entièrement déterminée par de telles constantes, également appelées *constantes de structure*, comme le précise d'ailleurs Cartan avec force : « Les constantes c_{iks} (...) définissent ce qu'on appelle la *structure* du groupe engendré par les transformations infinitésimales $X_1 f, ..., X_r f$, ou plus brièvement du groupe $X_1 f, ..., X_r f$ ». [15] Les premières pages de sa thèse que nous venons de résumer indiquent que la démarche qu'il adopte n'est pas structurale : il ne propose pas de définition implicite du concept d'algèbre de Lie, définition qui serait fondée sur des axiomes en nombre très réduit. Rappelons à ce propos qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ conçue abstraitement est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire $(x, y) \mapsto [x, y]$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ vérifiant les identités :

$$[x, x] = 0 \tag{1.1}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \tag{1.2}$$

pour tous x, y, z de $\mathfrak{g}$; $[x, y]$ s'appelle le crochet de x et y et l'égalité (2) correspond à l'*identité de Jacobi*. Cette définition axiomatisée n'intervient pas dans les travaux de Lie, Engel, Killing ou encore Cartan. En revanche, Weyl la formule explicitement dès 1923 dans sa *Mathematische Analyse des Raumproblems*. [16] Il commence par envisager un groupe infinitésimal à n paramètres — c'est-à-dire une algèbre de Lie de dimension n — comme un ensemble

15. É. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, *op. cit.*, p. 144.
16. H. Weyl, *Mathematische Analyse des Raumproblems*, *op. cit.*, p. 83.

d'éléments dont la nature n'est plus spécifiée et il munit cet ensemble de trois opérations : l'addition, la multiplication par un scalaire et la « composition » [Zusammensetzung]. Il montre que les deux premières opérations satisfont aux propriétés du calcul vectoriel. Il en déduit qu'un groupe infinitésimal, défini abstraitement, est une variété linéaire à n dimensions [eine n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit], i.e. un espace vectoriel de dimension n. Pour parvenir à une telle identification, il s'appuie sur l'axiomatisation des espaces vectoriels qu'il avait proposée dès la première édition de *Raum, Zeit, Materie* (1918). Il montre ensuite que la « composition » est une forme de multiplication entre deux éléments quelconques de cette variété linéaire, les lois de commutativité et d'associativité devant être remplacées respectivement par $[x, y] = -[x, y]$ et par l'identité de Jacobi. Weyl obtient de la sorte un groupe infinitésimal *abstrait* qui peut donc recevoir diverses interprétations en fonction de ses réalisations. Il reprendra à l'identique cette définition dans la première partie de l'article qu'il consacre à l'étude des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples en 1925-1926.

Ces deux références montrent qu'à la différence de Cartan, il n'hésite pas à avoir recours à la méthode axiomatique dans sa pratique des mathématiques, même s'il ne lui prête pas de vertus heuristiques à proprement parler. [17] Aux yeux de Weyl, l'axiomatisation a essentiellement pour but de clarifier certains concepts — notamment celui d'algèbre de Lie — et de les envisager dans « toute » leur généralité, i.e. en faisant *abstraction* de leurs diverses réalisations, mais il ne la considère pas comme un art d'inventer des nouveaux théorèmes. Or, une mathématique des structures se caractérise justement par le fait que la méthode axiomatique devient un instrument de découverte à proprement parler. La démarche suivie par Cartan dans sa thèse n'est *a fortiori* pas « structurale » au sens où nous l'entendons, par cela seul qu'il n'a pour ainsi dire jamais recours à la méthode axiomatique. En effet, plutôt que de proposer une définition implicite du concept d'algèbre de Lie, il construit effectivement les éléments de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G donné au préalable ; pour ce faire, il s'appuie sur les sous-groupes à un paramètre de G.

Au début de sa thèse, il résume également les diverses fonctions que l'on peut assigner aux constantes qu'il vient de mettre en évidence. Tout d'abord, la structure qu'elles déterminent « joue un rôle fondamental dans un grand nombre de questions, notamment dans la théorie de l'intégration des équations différentielles qui admettent un groupe fini et

17. En 1923, comme en 1925-1926, Weyl ne parle pas encore d'algèbre de Lie, mais de groupe infinitésimal d'un groupe de Lie.

continu donné ≫.[18] Ici Cartan fait allusion à la principale motivation de Lie lorsque celui-ci développe sa théorie des groupes de transformations continus : proposer un analogue de la théorie de Galois algébrique pour certains systèmes d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Cartan mentionne un second problème que l'on doit à Lie et qui est presque entièrement résolu par Killing : établir une classification des algèbres de Lie, selon qu'elles soient *simples*, *semi-simples* ou *résolubles*.[19] Là encore, les constantes de structure jouent un rôle essentiel puisqu'elles permettent de savoir si deux algèbres de Lie sont équivalentes ou, plus exactement, si elles sont isomorphes. En effet, si pour deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ de même dimension finie r, il existe des bases (e_i) et (f_i) telles que les constantes de structures soient identiques, alors $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont isomorphes. Les constantes de structure constituent donc le critère fondamental de classification des algèbres de Lie, ce qui n'a échappé ni à Killing, ni à Cartan. Ainsi, dans la première partie de son article intitulé ≪ Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen ≫, Killing remarque que

> De nombreuses propriétés du groupe [infinitésimal] ne dépendent pas des transformations $X_1 f$, $X_2 f$, ..., $X_r f$ elles-mêmes, mais elles résultent justement des coefficients c_{iks}. En conséquence, si deux groupes possèdent les mêmes coefficients c_{iks}, on dit qu'ils sont structurés de la même manière.[20]

Cartan reprend explicitement à son compte cet argument au cours du § 4 du premier chapitre de sa thèse. La théorie de la structure des groupes de Lie à un nombre fini de paramètres consiste à en proposer une classification systématique, fondée sur les constantes c_{iks}. Pour parvenir à cette fin, Cartan s'appuie sur l'équation caractéristique d'une algèbre de Lie à l'instar de Killing.

1.1.2 Caractérisation des algèbres de Lie résolubles et des algèbres de Lie semi-simples

Au cours du chapitre 2 de sa thèse, Cartan introduit les notions de déterminant caractéristique et d'équation caractéristique associée à une algèbre de Lie. Ces concepts lui

18. É. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, *op. cit.*, p. 144.

19. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *simple* si elle est non abélienne et si elle n'admet pas d'autres idéaux mis à part (0) et $\mathfrak{g}$; elle est dite *semi-simple* lorsqu'elle n'admet pas d'idéal résoluble non nul ; enfin elle est dite *résoluble* lorsqu'il est possible de la dévisser par itération de prise de crochet jusqu'à ce qu'elle se réduise à l'identité à partir d'un certain rang n. Nous verrons dans ce qui suit que Cartan utilise la notion de série dérivée pour définir les algèbres de Lie résolubles.

20. W. Killing, ≪ Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen ≫, Erster Theil, *Math. Ann.*, **31**, 1888, p. 253.

permettent d'identifier des critères pour caractériser deux types d'algèbres de Lie : les algèbres de Lie semi-simples et les algèbres de Lie résolubles. Ces critères dits « de Cartan » seront exposés à nouveau frais par Weyl dans son article de 1925-1926 (troisième partie, § 3). Voilà pourquoi, il est nécessaire d'en préciser le sens malgré leur relative complexité. Adoptons une terminologie légèrement modernisée pour expliciter les arguments de Cartan. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe et $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ l'application définie par $\mathrm{ad}_X(Y) = [X, Y]$ pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$. Les concepts de déterminant et d'équation caractéristique sont introduits par Killing en 1884, lorsqu'il se propose de résoudre l'équation

$$[X, Y] = \omega Y$$

où ω est un scalaire, X étant fixé.[21] Les solutions $Y \in \mathfrak{g}$ de cette équation ne sont autres que les vecteurs propres de $\mathrm{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ pour la valeur propre ω. La question est de savoir à quelles conditions le scalaire ω est valeur propre de ad_X. Killing démontre la proposition suivante : pour que ω soit valeur propre de ad_X, il faut et il suffit que ω soit racine du polynôme caractéristique de ad_X, i.e. $\Delta(\omega) = \det[\mathrm{ad}_X - \omega \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}] = 0$. Écrivons de manière explicite le polynôme ou déterminant caractéristique : soient X_1, X_2, ..., X_r une base de $\mathfrak{g}$ avec

$$[X_i, X_j] = \Sigma_{k=1}^{r} c_{ijk} X_k.$$

Dans cette base, X s'écrit : $X = \Sigma_{i=1}^{r} e_i X_i$. Le déterminant caractéristique n'est autre que :

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \sum e_i c_{i11} - \omega & \sum e_i c_{i21} & \cdots & \sum e_i c_{ir1} \\ \sum e_i c_{i12} & \sum e_i c_{i22} - \omega & \cdots & \sum e_i c_{ir2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum e_i c_{i1r} & \sum e_i c_{i2r} & \cdots & \sum e_i c_{irr} - \omega \end{vmatrix}$$

On peut réécrire $\Delta(\omega)$ comme suit : $\Delta(\omega) = (-1)^r[\omega^r - \psi_1(e)\omega^{r-1} + \psi_2(e)\omega^{r-2} - \cdots]$, les coefficients $\psi_i(e)$ étant des polynômes homogènes en e_1, ..., e_r de degré i. L'un de ces coefficients intéresse tout particulièrement Cartan : il s'agit de $\psi_2(e)$. La forme de « Killing » :

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \quad K(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \circ \mathrm{ad}_X),$$

qui est introduite explicitement par Weyl dans son article de 1925-1926, est reliée à $\psi_2(e)$ par : $K = [\psi_1(e)]^2 - 2\psi_2(e)$. Cartan s'appuie sur $\psi_2(e)$ — et non directement sur la forme de Killing K — pour caractériser les algèbres de Lie *résolubles* et les algèbres de Lie *semi-simples*. Pour parvenir à ce point, il commence par reprendre à son compte le résultat fondamental d'Engel

21. Voir en particulier T. Hawkins, *op. cit.*, p. 139 et suiv.

et Killing selon lequel les $\psi_1(e)$, $\psi_2(e)$, ..., $\psi_{r-1}(e)$ sont des invariants du *groupe adjoint*.[22] De manière modernisée, le groupe adjoint peut être défini comme suit : soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On considère l'action par conjugaison de G sur lui-même, i.e. pour chaque élément g de G,

$$\mathcal{C}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$$

est un automorphisme de G qui laisse fixe l'identité de G. La différentielle de $\mathcal{C}_g$ en l'identité de G est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ appelé adjonction de g et notée Ad_g. L'application

$$\mathrm{Ad} : g \in G \mapsto \mathrm{Ad}_g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$$

est un homomorphisme de groupes appelé maintenant représentation adjointe. Le groupe adjoint $\overline{G}$ correspond à l'image de G par cet homomorphisme. Nous avons donc $\overline{G} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. La propriété selon laquelle $\psi_2(e)$ est un invariant de $\overline{G}$ est fondamentale.

En effet, dans l'article de 1893 intitulé « Über die einfachen Transformationsgruppen », Cartan établit le résultat suivant : si $F(e)$ est un invariant homogène du second ordre du groupe adjoint d'un groupe de Lie G, alors l'ensemble des transformations $X \in \mathfrak{g}$ avec $X = \sum e_i X_i$, telles que $\partial F/\partial e_i = 0$, pour tous $i = 1, ..., r$ forme un « sous-groupe » du groupe infinitésimal $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ce résultat s'applique justement à $\psi_2(e)$. Autrement dit, l'ensemble

$$\mathfrak{h} = \{X = \sum e_i X_i \in \mathfrak{g} \mid \partial\psi_2/\partial e_i = 0, i = 1, ..., r\}$$

forme un idéal de $\mathfrak{g}$. Dans ce même article, Cartan parvient à une caractérisation des algèbres de Lie *simples* en s'appuyant justement sur cette propriété de $\psi_2(e)$. Rappelons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *simple* si elle est non abélienne et si elle n'admet pas d'idéaux autres que (0) et $\mathfrak{g}$. Dans ce cas, $\mathfrak{h} = (0)$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Donc, soit $\psi_2(e)$ s'annule identiquement, soit $\psi_2(e)$ est non dégénérée. Pour résoudre cette difficulté, Cartan emprunte à Lie le concept de « groupe infinitésimal parfait ». Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *parfaite* au sens de Lie si sa sous-algèbre dérivée $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ — c'est-à-dire la sous-algèbre engendrée par les crochets $[X, Y]$, où $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{g}$ — vérifie $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Cartan démontre la proposition suivante :

> Dans le cas d'un groupe parfait, le coefficient $\psi_2(e)$ ne peut pas s'annuler identiquement.[23]

Justement, si une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *simple*, alors elle est *parfaite*, i.e. $\mathcal{D}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, donc le coefficient $\psi_2(e)$ de son équation caractéristique est une forme quadratique non dégénérée.

22. É. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, *op. cit.*, p. 157.
23. É. Cartan, « Über die einfachen Transformationsgruppen », *op. cit.*, p. 112-113.

La réciproque à cette proposition est fausse : ce n'est pas parce que $\psi_2(e)$ est non dégénérée que $\mathfrak{g}$ est simple. En réalité, cette propriété de $\psi_2(e)$ permet de caractériser complètement une classe plus étendue d'algèbres de Lie, à savoir les algèbres de Lie *semi-simples*. Tel est justement l'objectif du chapitre IV de la thèse de Cartan. Avant cela, Cartan montre au cours du chapitre III que l'on peut s'appuyer sur $\psi_2(e)$ pour caractériser les « groupes intégrables », c'est-à-dire les algèbres de Lie *résolubles*. Voici comment il les définit à la suite de Lie :

> On dit qu'un groupe est *intégrable* lorsque l'ordre de ses groupes dérivés successifs va constamment en diminuant jusqu'à ce que l'un d'eux se réduise à la transformation identique. Un groupe est *non intégrable* lorsqu'à partir d'un certain rang, tous ses groupes dérivés sont identiques, tout en étant d'un ordre plus grand que zéro. [24]

Cartan construit ici *la série dérivée* de $\mathfrak{g}$. [25] Il affirme très exactement que $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathcal{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = 0$ pour un certain n. Le résultat central de ce chapitre III consiste à identifier les algèbres de Lie résolubles en se fondant sur les propriétés du coefficient $\psi_2(e)$ de leur équation caractéristique. Cartan commence par remarquer qu'« on peut donner un critérium extrêmement simple pour reconnaître si un groupe est intégrable ou non. *Il suffit*, en effet, *que le groupe dérivé d'un groupe G d'ordre r annule identiquement le coefficient $\psi_2(e)$ de l'équation caractéristique de G pour que G soit intégrable* ». [26] En réalité, il s'agit là d'une condition nécessaire et suffisante, comme il l'affirme avec le théorème V (chapitre III de sa thèse) : une algèbre de Lie est *résoluble* si et seulement si les transformations de sa sous-algèbre dérivée annulent $\psi_2(e)$. [27] Nous avons là le *critère de résolubilité* de Cartan.

Ce dernier introduit le concept d'algèbre de Lie *semi-simple* au début du chapitre IV de sa thèse. Cette terminologie est due à Killing qui définit les algèbres de Lie semi-simples [halbeinfach] comme suit : une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si elle peut être décomposée en une somme directe d'idéaux simples. [28] Cartan propose une autre définition de ce concept qui nous est plus familière :

> Parmi les groupes non intégrables, une classe très importante est formée par les groupes d'ordre $r > 1$ qui n'admettent pas de sous-groupe invariant intégrable. Nous appellerons ces groupes

24. É. Cartan, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, *op. cit.*, p. 174.

25. De manière modernisée, cette série se formule comme suit : $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ et pour tout $i \geqslant 1$, $\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})]$.

26. *ibid.*, p. 177.

27. Pour une formulation modernisée du critère de Cartan pour les algèbres de Lie résolubles, voir en particulier J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, New York, Amsterdam, éd. W. A. Benjamin, 1966, I-6 et I-7.

28. Voir en particulier W. Killing, « Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen dritter Theil », *math. Ann.* **34**, 1889, p. 74 et T. Hawkins, *op. cit.*, p. 205.

semi-simples. Parmi les groupes semi-simples, ceux d'ordre $r > 1$ qui n'admettent pas de sous-groupe invariant sont dits *simples*. Il résulte de là qu'un groupe simple est son propre groupe dérivé et par suite n'est pas intégrable. [29]

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension $r > 1$ est donc semi-simple si elle n'admet pas d'idéal résoluble non nul. [30] Cartan précise que les algèbres de Lie *semi-simples* ne sont pas « intégrables » — c'est-à-dire résolubles — et que les algèbres de Lie *simples* constituent une classe particulière d'algèbres de Lie semi-simples. Il hiérarchise ainsi de manière très synthétique les concepts d'algèbre de Lie non résoluble, semi-simple et simple. Mais surtout, il caractérise complètement les algèbres de Lie semi-simples en s'appuyant une nouvelle fois sur la forme quadratique $\psi_2(e)$. Il démontre en effet le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe soit semi-simple est que le discriminant de la forme quadratique $\psi_2(e)$ soit différent de 0. [31]

Il s'agit du *critère de semi-simplicité* de Cartan : une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si $\psi_2(e)$ est non dégénérée, ce qui revient à dire que sa forme de Killing $K_{\mathfrak{g}} = [\psi_1(e)]^2 - 2\psi_2(e)$ est non dégénérée. [32] Cartan démontre ensuite que la définition des algèbres de Lie semi-simples qu'il a proposée est équivalente à celle donnée par Killing, comme en atteste le théorème IV (quatrième partie) : « Tout groupe semi-simple se décompose en un certain nombre de sous-groupes invariants simples échangeables entre eux, et réciproquement ». [33] Cette proposition signifie très exactement : une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple si et seulement si elle est somme directe d'idéaux simples.

Le résumé des chapitres III et IV de la thèse de Cartan appelle deux remarques. Tout d'abord, ce qui pour Killing était une définition — une algèbre de Lie semi-simple est telle qu'elle peut être décomposée en une somme directe d'idéaux simples — devient un théorème chez Cartan. Cela signifie qu'il n'existe généralement pas une mais plusieurs définitions possible d'un même concept mathématique. Ce constat, qui est trivial, en appelle un second qui ne l'est pas : un énoncé n'est pas *en lui-même* un théorème ou une définition. On ne peut décider du statut d'un énoncé mathématique qu'en fonction des présupposés adoptés

29. É. Cartan, *op. cit.*, p. 181.

30. Weyl reprend à son compte ce résultat dans la troisième partie de son article consacrée aux représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Voir H. Weyl, « Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen II », *Mathematische Zeitschrift*, **24**, (1926), p. 354.

31. É. Cartan, *op. cit.*, p. 182.

32. En effet, une algèbre de Lie semi-simple est parfaite, i.e. $\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, ce qui implique que $\psi_1(e) = 0$. Donc la forme de Killing $K_{\mathfrak{g}}$ ne diffère de $\psi_2(e)$ que d'un facteur constant.

33. *ibid.*, p. 183.

par son auteur et des autres propositions dont il dépend ou qui dépendent de lui. La distinction entre définitions, théorèmes, corollaires, etc. n'a donc de sens qu'en fonction d'un cadre théorique considéré dans sa globalité. Il ne faudrait cependant pas commettre une généralisation abusive à partir d'un tel constat : cela ne signifie absolument pas que n'importe quel théorème pourrait devenir une définition ou réciproquement. Si cette opinion était vraie, alors les connaissances mathématiques reposeraient sur de simples stipulations. Notre argument est plus modeste : le statut d'une même proposition mathématique n'est pas déterminé une fois pour toutes, il peut subir une série de modifications lorsqu'elle intervient dans un cadre théorique légèrement ou fondamentalement différent. Ici, nous prenons pour référence la thèse de Cartan, par comparaison avec les travaux de l'un de ses prédécesseurs immédiats, à savoir Killing. Les productions de ces deux auteurs sont homogènes puisqu'ils traitent des mêmes objets théoriques en des temps très rapprochés ; pourtant, la distribution des propositions mathématiques n'est pas la même dans les deux cas. Ces différences, qui méritent d'être soulignées si l'on veut avoir une bonne intelligibilité du texte de Cartan, nous échapperaient si nous concevions l'histoire des mathématiques sur le registre d'une histoire de résultats scientifiques que l'on ajouterait les uns aux autres de manière purement cumulative. Les apports de Cartan en théorie des algèbres de Lie ne se mesurent donc pas seulement aux critères qu'il introduit pour caractériser les algèbres de Lie résolubles et les algèbres de Lie semi-simples. Il convient également d'être sensible à la manière dont il organise et hiérarchise les concepts et les propositions en théorie des groupes et des algèbres de Lie. Nous pouvons ainsi repérer des vraies différences entre Killing et Cartan qui ne se réduisent pas à des questions d'attributions de résultats à l'un ou l'autre de ces deux protagonistes.

Notre seconde remarque concerne plus spécifiquement les théorèmes de caractérisation des algèbres de Lie *résolubles* et *semi-simples* que nous devons à Cartan. Ces deux théorèmes constituent, nous semble-t-il, de bons exemples de jugements synthétiques *a priori* au sens kantien du terme : ils font intervenir le coefficient $\psi_2(e)$ qui n'est pas contenu à titre de prédicat dans les concepts d'algèbre de Lie résoluble ou d'algèbre de Lie semi-simple. Cartan nous offre ainsi un moyen de savoir si une algèbre de Lie est résoluble ou semi-simple sans avoir à *vérifier* qu'elle répond bien à la définition de l'une ou l'autre de ces deux propriétés. Notre remarque montre qu'il n'est pas possible d'affirmer dogmatiquement que les mathématiques s'apparenteraient à une série d'inférences qui dériveraient mécaniquement et analytiquement d'un petit nombre d'axiomes pris pour base. En réalité, il est bien question de relier synthétiquement des concepts afin de parvenir à des connaissances inédites, comme en atteste notre bref commentaire des chapitres III et IV de la thèse de Cartan.

1.1.3 Sous-algèbres de Cartan, systèmes de racines et classification des algèbres de Lie simples

Au cours du chapitre II de sa thèse, Cartan introduit à la suite de Killing le concept de transformation infinitésimale générale :

> Appelons avec M. Killing k le nombre des racines identiquement nulles de l'équation caractéristique, et supposons $k > 1$. Prenons une transformation infinitésimale générale, c'est-à-dire pour laquelle $\psi_{r-k}(e) \neq 0$. [34]

Il s'agit très exactement d'un élément régulier X de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En effet, le rang k d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie r est le plus petit entier tel que le coefficient $\psi_{r-k}(e)$ ne soit pas le polynôme nul. Un élément $X \in \mathfrak{g}$ est dit régulier s'il n'annule pas $\psi_{r-k}(e)$. Conformément au raisonnement de Killing, Cartan construit ensuite un « sous-groupe à k paramètres », qu'il note γ, à partir d'un élément régulier X de $\mathfrak{g}$. Le « sous-groupe » γ est constitué de l'ensemble des éléments Y de $\mathfrak{g}$ tels que $(\text{ad } X)^p Y = 0$, pour p assez grand. [35] Puisque X est régulier, γ est en fait une « sous-algèbre de Cartan » de $\mathfrak{g}$. On ne trouve aucune définition par axiomes d'un tel concept chez Killing ou Cartan. [36] Ils adoptent donc une approche résolument constructive dans leurs travaux puisqu'ils engendrent une « sous-algèbre de Cartan » de $\mathfrak{g}$ à partir d'un élément régulier X de $\mathfrak{g}$. [37]

Nous observons sur cet exemple qu'il est nécessaire de manier avec une grande prudence les conventions utilisées pour attribuer un concept ou un théorème à un mathématicien pour deux raisons : (a) d'une part, elles sont adoptées en fonction de critères institutionnels et parfois même nationaux dont il faut savoir rendre compte, (b) d'autre part, elles reposent sur la croyance selon laquelle on peut toujours identifier une origine unique et bien déterminée à

34. *ibid.*, p. 162.

35. Le « sous-groupe » γ est donc le sous-espace caractéristique $\mathfrak{g}_X^0$ de ad X pour la valeur propre 0.

36. Voir en particulier W. Killing, « Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, Zweiter Theil », *math. Ann.* **33**, 1888, § 10, p. 4 et suiv. et É. Cartan, *op. cit.*, p. 163. Pour définir convenablement une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il faut d'abord préciser ce que l'on entend par algèbre de Lie nilpotente. Pour ce faire, on introduit la notion de *série centrale descendante* de $\mathfrak{g}$ comme suit : $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et, pour tout $i \geqslant 2$, $\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})]$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est *nilpotente* si à partir d'un certain n, $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g}) = 0$.

Le *normalisateur* d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est l'ensemble

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

L'ensemble $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan si elle est nilpotente et si $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

37. Ce mode de raisonnement n'induit aucune perte de généralité puisque toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ est de la forme $\mathfrak{g}_X^0$, X étant un élément régulier de $\mathfrak{g}$. Voir à ce propos J.-P. Serre, *op. cit.*, p. III-6.

un théorème ou à un concept ce qui, au regard des liens d'interdépendance entre chercheurs et à cause du risque d'une illusion rétrospective, ne va pas de soi. Spontanément, nous serions donc tentés de dire que Cartan est le premier à avoir introduit les sous-algèbres qui portent son nom. Tout d'abord, cette assertion est fausse — Killing manipule déjà ce que nous appelons des sous-algèbres de Cartan. Ensuite, il faut comprendre pourquoi une telle attribution est adoptée. Les enjeux ne sont pas ici nationaux. En réalité, la thèse de Cartan supplante la référence aux articles de Killing, que ce soit en France ou en Allemagne au cours du premier tiers du XX^{e} siècle. Par exemple, en 1900, Maurer et Burckhardt ont en charge la rédaction de l'article sur les groupes continus de transformations dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Ils se réfèrent alors systématiquement à la thèse de Cartan en contrepoint des articles de Killing. Ils précisent que certaines hypothèses de Killing ont été soit invalidées, soit démontrées en toute rigueur par Cartan. Ils n'abordent cependant pas le critère de résolubilité et de semi-simplicité que l'on doit en propre à Cartan. [38] Weyl radicalise cette tendance en 1925-1926, mentionnant tout juste le nom de Killing en passant : sa référence centrale est la thèse de Cartan. Voilà pourquoi, des concepts et résultats, pourtant déjà présents chez Killing, sont finalement attribués à Cartan. En outre, plutôt que de se demander à qui revient la paternité du concept de sous-algèbre de Cartan, il convient davantage de savoir comment Cartan et Killing le construisent, quels usages ils en font et quelles propositions ils associent à une telle notion. C'est ici qu'apparaissent des divergences significatives entre les deux mathématiciens. Dans la troisième partie de son article intitulé « Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen » Killing souhaite prouver que toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ peut se décomposer en une sous-algèbre simple ou semi-simple et en un idéal invariant de rang 0. Sa démonstration repose sur le présupposé suivant : si $\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, alors pour tout X qui est régulier dans $\mathfrak{g}$, la sous-algèbre γ est abélienne. [39] Cartan réfute une telle hypothèse dans sa thèse comme l'indique le passage suivant :

> [M. Killing] suppose toujours démontré que le sous-groupe γ a toutes ses transformations échangeables entre elles lorsque le groupe est son propre groupe dérivé. [40]

Cartan montre que l'hypothèse de Killing n'est vérifiée que dans le cas des algèbres de Lie semi-simples. [41] En revanche, elle admet des exceptions lorsqu'elle est étendue aux algèbres

38. L. Maurer, H. Burkhardt, « Kontinuierliche Transformationsgruppen » (1900), in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* Bd. II, Leipzig, éd. Teubner, 1899-1916, § 17, p. 426 et suiv.

39. W. Killing, « Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, dritter Teil », *math. Ann.*, **34**, p. 87-107.

40. É. Cartan, *op. cit.*, p. 197.

41. *ibid.*, p. 184.

de Lie telles que $\mathfrak{g} = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, i.e. les algèbres de Lie parfaites. [42]

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la thèse de Cartan comporte de véritables *innovations* par rapport aux travaux de Killing : les algèbres de Lie résolubles et semi-simples peuvent être entièrement caractérisées à l'aide de la forme $\psi_2(e)$. Nous avons également indiqué que Cartan ne *hiérarchise* pas les concepts et les propositions de la même manière que Killing. Au surplus, les démonstrations de Killing ne sont pas exemptes d'erreurs que Cartan *corrige* systématiquement. Ce dernier se donne également pour but de *clarifier* les raisonnements de Killing qui aboutissent à une classification exhaustive des algèbres de Lie *simples*. Tel est l'objectif du chapitre V de la thèse. Cartan a une perception tout à fait singulière des résultats établis par Killing à propos des algèbres de Lie simples. Nous pourrions croire que les contributions de Killing consiste en la découverte de nouvelles algèbres de Lie simples, à savoir les cinq algèbres de type *exceptionnel* $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, à côté des quatre algèbres de Lie « classiques » — $\mathfrak{sl}(\ell+1), \ell \geqslant 1$, $\mathfrak{so}(2\ell+1), \ell \geqslant 2$, $\mathfrak{sp}(2\ell), \ell \geqslant 3$ et $\mathfrak{so}(2\ell), \ell \geqslant 4$. Cartan n'évalue pas les travaux de Killing de la sorte. La recension exhaustive des algèbres de Lie simple montre qu'il en existe très peu :

> Les conclusions de Killing sont donc importantes, non pas tant par les groupes simples nouveaux dont elles nous révèlent l'existence, que par la certitude qu'elles donnent de n'avoir affaire qu'à un nombre excessivement limité de types de groupes simples, dont les plus généraux ont déjà été étudiés. [43]

Cartan est donc moins sensible à la découverte de nouveaux objets mathématiques — les algèbres de Lie simples de type exceptionnel — qu'à l'aspect classificatoire de la théorie de Killing. Il n'existe que 5 types d'algèbres de Lie simples exceptionnelles à côté des 4 types d'algèbre de Lie simples « classiques ». Comme la classification de Killing est complète — ce que Killing avait conjecturé, avant que Cartan ne démontre complètement ce résultat —, il est possible de déterminer *a priori* à quel type une algèbre de Lie simple donnée appartient. Cartan met en évidence un aspect tout à fait essentiel des travaux de Killing : ce dernier n'adopte pas une démarche empirique, fondée sur la découverte d'algèbres de Lie simples qui réaliseraient l'un des cinq types exceptionnels. L'approche de Killing est *systématique* et *abstraite*, bien qu'elle ne repose pas sur l'usage d'axiomes. Elle est *systématique*, puisqu'il construit tous les systèmes de racines irréductibles [44] possibles ; elle est *abstraite* étant donné qu'il n'a justement pas en sa possession des exemples d'algèbres de Lie qui correspondraient à l'un de ces cinq types.

42. *ibid.*, p.253 à 255.
43. *ibid.*, p. 225.
44. Nous reviendrons en détail sur ce concept dans ce qui suit.

Avant de comprendre comment Cartan introduit les systèmes de racines associés à une algèbre de Lie simple ou semi-simple, nous devons clarifier certaines difficultés terminologiques, comme en témoigne le passage suivant :

> Désormais nous désignerons le sous-groupe d'ordre k et de rang zéro qui contient une transformation générale déterminée sous le nom de *sous-groupe γ relatif à cette transformation*. Les racines 0, ω_1, ω_2, ..., ω_p de l'équation caractéristique relative à ce sous-groupe seront désignées, tant qu'une confusion ne sera pas à craindre, par *racines de l'équation caractéristique*. Les transformations infinitésimales $X_{k+1}f$, ..., $X_{k_1}f$ seront dites *appartenir à la racine* ω_1 (par rapport au sous-groupe γ) ; par analogie les transformations X_1f, ..., X_kf du sous-groupe γ seront dites *appartenir* à la racine zéro. [45]

Utilisons un langage modernisé pour saisir le raisonnement de Cartan. Le sous-groupe γ correspond à une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Les ω_i sont des éléments du dual $\mathfrak{h}^*$ qui vérifient les propriétés suivantes : $\omega_i \neq 0$ et le sous-espace propre $\mathfrak{g}^{\omega_i}$ correspondant — i.e. l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $[H, X] = \omega_i(H)X$, pour tous $H \in \mathfrak{h}$ — ne se réduit pas à 0. On peut dire que $X \in \mathfrak{g}$ « appartient à la racine » ω_i si $X \in \mathfrak{g}^{\omega_i}$.

Dans le cas d'une algèbre de Lie *semi-simple*, Cartan démontre le théorème V (chapitre IV) qui est d'une importance capitale pour mesurer l'usage qu'il fait des systèmes de racines :

> Étant donné un groupe semi-simple d'ordre r et de rang ℓ, l'équation caractéristique de ce groupe possède ℓ racines identiquement nulles et ℓ seulement. Chaque transformation générale fait partie d'un sous-groupe γ d'ordre ℓ à transformations échangeables entre elles. L'équation caractéristique relative à ce sous-groupe γ n'a, à part la racine 0, que des racines simples deux à deux égales et de signes contraires ; ℓ de ces racines sont indépendantes ; si ω_α est une racine, il n'en est jamais de même de $2\omega_\alpha$, $3\omega_\alpha$, ... Enfin le crochet de deux transformations qui appartiennent à deux racines égales et de signes contraires n'est jamais nul. [46]

Ce théorème, qui est particulièrement dense, résume l'essentiel des résultats sur les sous-algèbres de Cartan et les systèmes de racines d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *semi-simple*. Cartan montre tout d'abord que, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors le rang de $\mathfrak{g}$ au sens où l'entend Killing, c'est-à-dire le nombre de coefficients de son équation caractéristique $\det[\mathrm{ad}_X - \omega \mathrm{id}_\mathfrak{g}] = 0$ qui sont indépendants, coïncide avec la multiplicité de 0 comme valeur propre de ad X. Ensuite, Cartan rappelle que si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est abélienne. De plus, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe semi-simple, alors Cartan prouve explicitement que le système de racines R qui lui est associé est *réduit*, au sens où pour tout $\omega_i \in R$, ω_i

45. *ibid.*, p. 168-169.
46. *ibid.*, p. 185.

et $-\omega_i$ sont les seules racines proportionnelles à ω_i. De manière subsidiaire, Cartan indique que le nombre de racines linéairement indépendantes coïncide avec le rang de $\mathfrak{g}$.

Pour comprendre le raisonnement mené par Cartan, nous devons une nouvelle fois clarifier la terminologie qu'il adopte. Il introduit une transformation Y_α qu'il dit être « associée » à la racine ω_α. Voici comment nous pouvons expliciter son propos. Considérons le sous-espace $\mathfrak{h}_{\omega_\alpha} = [\mathfrak{g}^{\omega_\alpha}, \mathfrak{g}^{\omega_{-\alpha}}] \subset \mathfrak{h}$. La transformation Y_α au sens de Cartan est l'unique élément de $\mathfrak{h}_{\omega_\alpha}$ tel que $\omega_\alpha(Y_\alpha) = 2$. À un changement de signe près, Cartan démontre que, pour tout $X_\alpha \in \mathfrak{g}^{\omega_\alpha}$, il existe un unique $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{\omega_{-\alpha}}$ tel que

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = Y_\alpha, \quad [Y_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha, \qquad [Y_\alpha, X_{-\alpha}] = -2X_{-\alpha}.$$

Il introduit également la relation suivante pour $X_\beta \in \mathfrak{g}^{\omega_\beta}$:

$$[X_\beta, Y_\alpha] = a_{\alpha\beta} X_\beta.$$

Les constantes $a_{\alpha\beta}$ sont cruciales. Il s'agit des coefficients de la « matrice de Cartan » associée à un système de racines donné. Là encore, la dénomination actuelle ne doit pas nous tromper pour deux raisons : (i) les entiers $a_{\alpha\beta}$ sont connus de Killing, (ii) ni Killing dans ses articles de 1884-1890, ni Cartan dans sa thèse de 1894 n'adoptent explicitement l'écriture matricielle ; ils n'emploient pas même le terme de matrice. Cartan établit notamment le résultat suivant : p racines ω_1, ω_2, ..., ω_p sont linéairement indépendantes si et seulement si le déterminant $|a_{ij}| \neq 0$. Dans le cas des algèbres de Lie semi-simples, Cartan démontre le théorème XI :

> Étant donné un groupe semi-simple de rang ℓ, on peut toujours choisir ℓ racines indépendantes telles que le système d'entiers qui leur est associé fournisse toutes les racines de l'équation caractéristique. [47]

Cette formulation, particulièrement dense, mérite une analyse précise : Cartan se donne ℓ racines linéairement indépendantes, celles-ci forment une base du système de racines R de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire une base de $\mathfrak{h}^*$ qui est bien de dimension ℓ. Il démontre que le système d'entiers a_{ij}, c'est-à-dire l'ensemble des coefficients de la matrice de Cartan de R détermine entièrement R.

Maintenant, si le système d'entiers a_{ij} est « simple » — ce qui revient à dire que le système de racines R de $\mathfrak{g}$ est irréductible — alors $\mathfrak{g}$ est *simple*. Précisons ce que cela signifie en utilisant des rudiments d'algèbre linéaire qui sont éloignés de la lettre des raisonnements de Cartan : supposons que $\mathfrak{h}^*$ soit somme directe de deux sous-espaces $\mathfrak{h}_1^*$ et $\mathfrak{h}_2^*$ et que $R \subset \mathfrak{h}_1^* \cup \mathfrak{h}_2^*$. Le système R est dit irréductible s'il n'est possible que de façon *triviale* de le

47. *ibid.*, p. 193.

concevoir comme somme de sous-systèmes $R_i = R \cap \mathfrak{h}_i^*, \quad i = 1, 2$, ce qui signifie que $\mathfrak{h}_1^*$ ou $\mathfrak{h}_2^*$ est réduit à zéro. On peut donc caractériser l'intégralité des algèbres de Lie simples à partir des systèmes de racines irréductibles et des coefficients de la « matrice » de Cartan qui leur est associée. De la sorte, il devient possible de découvrir des types d'algèbres de Lie simples sans avoir présentement à l'esprit des exemples qui les réaliseraient. Tel est exactement le procédé utilisé par Killing pour mettre au jour les cinq algèbres de Lie simples de type exceptionnel, à savoir $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, et $\mathbf{E}_8$. Cartan reprend à son compte ce procédé et il le clarifie au cours du chapitre V de sa thèse. L'approche adoptée par Cartan n'est en rien structurale et elle n'est pas fondée sur un usage systématique de concepts et de méthodes relevant de l'algèbre linéaire ; elle est avant tout calculatoire : il détermine tout d'abord les coefficients des « matrices de Cartan » associées à chaque système de racines irréductibles. Tel est l'objectif du théorème 1 :

Tout système d'entiers simple d'ordre l est équivalent à un des systèmes des sept types suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{A} & l \geqslant 1; & a_{ii} = -2, a_{ij} = -1, (i \neq j; i, j = 1, 2, ..., \ell) \\ \mathbf{B} & l \geqslant 2; & a_{ii} = -2, a_{ij} = -1, sauf \;\; a_{i\ell} = -2, (i \neq j; i, j = 1, 2, ..., \ell) \\ \mathbf{C} & l \geqslant 3; & a_{ii} = -2, a_{ij} = -1, sauf \;\; a_{\ell\ell i} = -2, (i \neq j; i, j = 1, 2, ..., \ell) \\ \mathbf{D} & l \geqslant 4; & a_{ii} = -2, a_{ij} = -1, sauf \;\; a_{\ell\ell-1} = a_{l-1\ell} = 0, (i \neq j; i, j = 1, 2, ..., \ell) \\ \mathbf{E} & l = 6, 7, 8; & a_{ii} = -2, a_{ij} = -1, sauf \;\; a_{\ell\ell-1} = a_{\ell\ell-2} = a_{\ell-1\ell} = a_{l-2\ell} = 0 \\ \mathbf{F} & l = 4; & a_{ii} = -2, a_{ij} = -1, sauf \;\; a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = -2 \\ \mathbf{G} & l = 2; & a_{11} = a_{22} = -2, a_{12} = -3, a_{21} = -1. \end{cases}$$ [48]

Nous ne reproduisons ici que la première partie de ce théorème. Cartan détaille également les systèmes de racines correspondant à chacune de ces matrices dans la seconde partie de ce théorème. Il prouve ensuite que de tels systèmes sont deux à deux non équivalents. Le théorème 2 affirme que l'on peut associer une algèbre de Lie *simple* à chacun de ces systèmes de racines irréductibles. Cartan calcule explicitement la dimension de ces algèbres :

il y a en général quatre structures distinctes de groupes simples de rang ℓ, à savoir :

$$\begin{cases} \mathbf{A} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; \ell(\ell+2), & pour \;\; l \geqslant 1; \\ \mathbf{B} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; \ell(2\ell+\ell), & pour \;\; l \geqslant 2; \\ \mathbf{C} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; \ell(2\ell+1), & pour \;\; l \geqslant 3; \\ \mathbf{D} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; \ell(2\ell-1), & pour \;\; l \geqslant 4. \end{cases}$$

Il faut ajouter une structure spéciale pour les valeurs $\ell = 2, 4, 6, 7, 8$:

$$\begin{cases} \mathbf{E} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; 78, & pour \;\; \ell = 6; \\ \mathbf{E} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; 133, & pour \;\; \ell = 7; \\ \mathbf{E} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; 248, & pour \;\; \ell = 8; \\ \mathbf{F} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; 52, & pour \;\; \ell = 4; \\ \mathbf{G} & une \;\; structure \;\; d'ordre \;\; 14, & pour \;\; \ell = 2. \end{cases}$$

48. *ibid.*, p. 201.

[49]

Nous pouvons donner des exemples canoniques pour les quatre grandes classes **A**, **B**, **C** et **D** :

Pour $\ell \geqslant 1$, $\mathbf{A}_\ell = \mathfrak{sl}(\ell+1)$, i.e. l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(\ell+1)$,

Pour $\ell \geqslant 2$, $\mathbf{B}_\ell = \mathfrak{so}(2\ell+1)$, i.e. l'algèbre de Lie du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(2\ell+1)$,

Pour $\ell \geqslant 3$, $\mathbf{C}_\ell = \mathfrak{sp}(2\ell)$, i.e. l'algèbre de Lie du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2\ell)$,

Pour $\ell \geqslant 4$, $\mathbf{D}_\ell = \mathfrak{so}(2\ell)$ i.e. l'algèbre de Lie du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(2\ell)$.

Il existe une réalisation relativement simple de $\mathbf{G}_2$: il s'agit de l'algèbre des dérivations de l'algèbre des octaves de Cayley.

Les clarifications, corrections, simplifications et innovations auxquelles Cartan contribue ne sont pas restées lettre morte quand bien même il revient à Killing d'avoir répertorié tous les types d'algèbres de Lie simples et d'avoir montré que la structure des algèbres de Lie semi-simples dépend de la connaissance des algèbres de Lie simples. La fortune d'un écrit mathématique ne dépend donc pas nécessairement ou exclusivement des résultats supposés inédits qu'il comporte ; si tel avait été le cas, alors la référence aux articles de Killing aurait dû demeurer centrale parmi les mathématiciens. En réalité, au cours du premier tiers du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle, la thèse de Cartan devient la source principale dans l'étude des algèbres de Lie simples et semi-simples ; en outre, les travaux de Killing ne sont cités et étudiés qu'en fonction de cette même thèse. Pour vérifier cette hypothèse, nous pouvons nous appuyer sur la troisième partie de l'article que Weyl consacre aux représentations des groupes de Lie complexes semi-simples :

> Les recherches sur la structure des groupes continus semi-simples à un nombre fini de paramètres ont été inaugurées par Killing [50] ; mais c'est seulement dans sa thèse que Cartan parvint à une construction théorique irréprochable. Le résultat en fut la table complète de tous les groupes *simples* (les groupes semi-simples en étant le produit direct) : seuls cinq autres groupes exceptionnels s'ajoutent aux trois grandes classes de groupes $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ dont nous avons développé la théorie de la représentation dans les deux chapitres précédents. [51]

C'est dire à quel point les questions de priorité relatives à un concept ou un résultat scientifique doivent être séparées des problèmes liés à la fortune, la réception et, plus globalement,

49. *ibid.*, p. 224.

50. W. Killing, ≪ Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen ≫, *math. Ann.*, **31**, p. 252, **33**, p. 1, **34**, p. 57, **36**, p. 161 (1888-1890).

51. H. Weyl, ≪ Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen ≫, *Mathematische Zeitschrift*, **24**, p. 353. Clarifions la terminologie de Weyl : $\mathfrak{g}$ désigne le groupe spécial linéaire, $\mathfrak{c}$ le groupe symplectique et $\mathfrak{d}$ le groupe spécial orthogonal.

les usages d'un texte scientifique par une communauté de chercheurs. Dans le fond, on peut dire que la thèse de Cartan donne toute leur effectivité aux innovations de Killing. Il y a plusieurs raisons à cela : la thèse de Cartan se caractérise par une écriture plus nerveuse, un réseau de concepts nettement hiérarchisés et des raisonnements plus directs. De plus Cartan corrige l'ensemble des erreurs commises par Killing. Il ne faudrait donc pas croire que des innovations scientifiques pourraient spontanément être mises à la disposition des chercheurs, même lorsqu'elles sont rapidement reconnues par quelques spécialistes. Engel a parfaitement conscience de l'importance des résultats de Killing sur les algèbres de Lie simples avant même qu'ils ne soient publiés. Maurer et Burckhardt les résument dans leur article pour l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Pour autant, le travail de réécriture que l'on doit à Cartan rend les contributions de Killing plus accessibles ; *in fine* il vient même se substituer à elles. Les résultats de Killing ne se sont pas imposés naturellement ; en réalité, ils ont été pris dans un processus de réécriture — principalement dû à Cartan — dont il est fondamental de tenir compte pour saisir la dynamique de leur réception.

Au cours de la troisième partie de son article sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples, Weyl reprend largement à son compte la théorie générale des algèbres de Lie développées par Cartan. Il revient notamment sur les critères que Cartan introduit pour caractériser les algèbres de Lie résolubles et semi-simples. Bien que les *résultats* présentés par Weyl dans les trois premiers paragraphes de cette partie ne soient pas nouveaux, il présente la théorie des algèbres de Lie de manière inédite.

Tout d'abord, il isole les éléments de connaissance nécessaires en « algèbre linéaire » pour saisir la structure des algèbres de Lie. Autrement dit, il considère explicitement les groupes infinitésimaux à r paramètres comme des espaces vectoriels à r dimensions. Comme nous l'avons vu, la méthode axiomatique constitue systématiquement chez Weyl un moyen de rapprocher et d'unifier des concepts mathématiques d'abord appréhendés séparément. En 1913, l'axiomatisation des surfaces de Riemann permettait à Weyl de montrer qu'il s'agit de *variétés* analytiques complexes de dimension 1, faisant ainsi converger deux concepts qui se trouvent respectivement dans la *Dissertation* et le *Habilitationsvortrag* de Riemann. Dès 1923, dans sa *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Weyl propose de définir une algèbre de Lie par une liste d'axiomes et il montre alors explicitement qu'il s'agit d'un espace vectoriel muni d'un crochet. Cette définition, qui nous semble aller de soi, n'a en fait rien d'évident lorsque l'on parcourt les travaux de Killing et de Cartan. Soyons plus précis : à la différence de Killing et Cartan, Weyl sépare les éléments de connaissance qui valent pour des espaces vectoriels *en général* et les résultats qui relèvent spécifiquement de la théorie des algèbres

de Lie. En revanche, Weyl ne considère pas l'algèbre linéaire comme un domaine théorique bien circonscrit qu'il investirait pour lui-même. Lorsqu'il évoque les espaces vectoriels et les applications linéaires, Weyl pratique l'autocitation : il se réfère au premier chapitre de *Raum, Zeit, Materie* et à la série d'articles qu'il consacre à la résolution du problème de l'espace. Or, dans ces textes, Weyl ne traite pas l'algèbre linéaire comme un corps de doctrine qui serait à lui-même sa propre référence. En réalité, il s'agit seulement d'introduire certains concepts et résultats dans la mesure où leur *usage* est nécessaire afin de clarifier les fondements du calcul tensoriel mais aussi pour raisonner convenablement sur l'espace tangent en un point d'une variété différentielle. Weyl isole certains concepts et résultats rattachés à l'algèbre linéaire parce qu'ils facilitent le traitement de théories qui débordent largement de ce cadre — nous pensons en l'occurrence à la géométrie différentielle et à la théorie des groupes et des algèbres de Lie.

Par extension, il semble hautement périlleux de vouloir écrire une histoire *de* l'algèbre linéaire ; il convient davantage de décrire et expliquer les usages de concepts qui relèvent pour nous de l'algèbre linéaire dans diverses branches des mathématiques à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle et durant le premier tiers du XX$^{\text{e}}$ siècle. La théorie des algèbres de Lie nous fournit ici un bon exemple : Cartan et Killing introduisent bel et bien la notion de polynôme caractéristique d'une transformation appartenant au groupe adjoint d'une algèbre de Lie ; mais, à la différence de Weyl, ils ne conçoivent pas encore clairement les groupes infinitésimaux — i.e. les algèbres de Lie — comme des espaces vectoriels. Nous pouvons donc observer un processus très progressif de linéarisation de la théorie des groupes et algèbres de Lie durant le premier tiers du XX$^{\text{e}}$ siècle. Des constats du même ordre vaudraient pour d'autres théories, nous pensons en particulier à la théorie de Galois qui, dans l'exposé qu'en propose Weber à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle, ne fait intervenir quasiment aucun concept relevant de l'algèbre linéaire. Sans doute Artin sera-t-il l'un des grands promoteurs d'une linéarisation de la théorie de Galois à partir du milieu des années 20.

Ensuite, Weyl adopte une démarche résolument géométrique et moins calculatoire que Killing et Cartan. Par exemple, soient ℓ racines linéairement indépendantes d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de rang ℓ (relativement à une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$), Weyl conçoit ces ℓ racines comme une base de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}^*$. Soient α une racine de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ et h_α la coracine de α — c'est un élément qui permet d'exprimer la réflexion par rapport à α dans $\mathfrak{h}^*$, en particulier $\alpha(h_\alpha) = 2$. L'ensemble des h_α engendre un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Weyl montre que la restriction de la forme de Killing à $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ que nous noterons $K_{\mathfrak{h}_\mathbb{R}}$ est définie positive. Il munit donc $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ d'une structure d'espace euclidien. Il définit ensuite la forme bilinéaire duale

de $K_{\mathfrak{h}_\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(h) \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}\}$. En d'autres termes, $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ est également muni d'une structure d'espace euclidien. En outre, il introduit le groupe (S) — c'est-à-dire le « groupe de Weyl » — dans le § 4 de la troisième partie de son article, ce qui vient confirmer notre hypothèse selon laquelle il remplace les fastidieux calculs de déterminants que l'on observe chez Killing et Cartan par une approche synthétique et géométrique. En effet, le groupe (S) est engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans de $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ orthogonaux aux racines. De plus, l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ (relativement à $\mathfrak{h}$) est invariant par le groupe (S). Ces indications en pointillés montrent que Weyl ne se contente pas de répéter servilement les résultats qu'il emprunte à Cartan. En réalité, il les insère dans un type d'écriture mathématique et une démarche qui lui sont spécifiques. Autrement dit, il intègre les principaux théorèmes de Lie, Engel, Killing et Cartan sur les algèbres de Lie dans une configuration théorique tout à fait inédite. Cela étant, Weyl ne propose pas encore d'axiomatisation d'un système de racines dans une situation purement abstraite, c'est-à-dire en prenant pour point de départ un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

1.1.4 L'article de 1913 : représentations irréductibles et poids

Dans son article de 1925-1926 sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples, Weyl se réfère non seulement à la thèse, mais également à un article fondamental de Cartan intitulé « Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane ». Ce texte, qui est publié en 1913, revient à étudier les « représentations irréductibles » des algèbres de Lie semi-simples sur le corps des nombres complexes. Nous mettons l'expression « représentations irréductibles » entre guillemets pour la raison suivante : Cartan n'utilise pas le cadre conceptuel et la terminologie hérités de la théorie des représentations de groupes que l'on doit à Frobenius et Schur. Il ignore tout des travaux de ces derniers à Berlin, il ne parle d'ailleurs pas même de représentations linéaires de groupes. Dans sa *Notice sur les travaux scientifiques*, qui date de 1931, il montre à titre *rétrospectif* que son article de 1913 relève de la théorie des représentations des algèbres de Lie. Il précise à ce propos que l'« on appelle représentant linéaire d'un groupe G un groupe linéaire et homogène isomorphe, holoédrique ou mériédique, de G ».[52] En termes modernisés, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie, une représentation de $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un espace vectoriel complexe V et

52. É. Cartan, *Notice sur les travaux scientifiques*, *op. cit.*, p. 18. Un « isomorphisme holoédrique » est un *isomorphisme* de groupes ; un « isomorphisme mériédique » est un *homomorphisme surjectif* de groupes.

d'une application $\mathbb{C}$-linéaire ρ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$ telle que

$$[\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y]), \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Une représentation (V, ρ) est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de V invariants par ρ sont $\{0\}$ et V lui-même. C'est de cette manière que l'on peut comprendre l'expression « qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane » dans le titre même de l'article de Cartan. Ce texte intéresse Weyl dans la mesure où Cartan explicite de manière claire et concise ce qu'il entend par poids et par poids dominant — cette dernière expression correspond à ce que nous appelons « le plus haut poids ». Comme il s'agit là de concepts relativement techniques, nous préférons d'abord en expliciter le sens en utilisant une formulation qui n'est pas celle de Cartan, tout en revenant régulièrement à son texte même.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de rang ℓ, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et (ρ, V) une représentation linéaire complexe de dimension finie de $\mathfrak{g}$, $\mu \in \mathfrak{h}^*$ est un *poids* de ρ, s'il existe un vecteur non nul $v \in V$ tel que

$$\rho(H)v = \mu(H)v, \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Le vecteur v est un *vecteur poids* pour le poids μ de (ρ, V). Les vecteurs v de V tels que $\rho(H)v = \mu(H)v$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$, forment un sous-espace de V, noté V_μ et que l'on appelle l'espace des poids pour le poids μ. Dans le cas de la représentation adjointe, les notions de poids et de racines coïncident ; autrement dit, les racines de $\mathfrak{g}$ sont les poids de la représentation adjointe. Soient maintenant R l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ et $S = \{a_1, ..., a_\ell\}$ une base de R. En particulier, S est une base de $\mathfrak{h}^*$. Tout poids μ d'une représentation ρ peut s'écrire

$$\mu = c_1\alpha_1 + ... + c_\ell\alpha_\ell, \quad c_i \in \mathbb{Q}, \forall i \in \{1, ..., \ell\}.$$

Cartan affirme d'ailleurs très exactement qu'un poids « est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des ℓ racines fondamentales ».[53] Il ajoute ensuite : « si x est une variable de poids ϖ, $X_\alpha(x)$ est une combinaison linéaire des variables de poids $\varpi + \omega_\alpha$ », ce que l'on peut traduire comme suit : soient v un vecteur de poids μ et Z un élément de $\mathfrak{g}$ appartenant à $\mathfrak{g}^\alpha$ — i.e. un élément appartenant à la racine α —, si $\rho(Z)v \neq 0$, alors $\rho(Z)v$ est un vecteur poids pour le poids $\mu + \alpha$. Munissons l'ensemble des poids d'une représentation ρ d'une relation d'ordre partiel : soient μ_1 et μ_2 deux poids de ρ,

$$\mu_1 \succeq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 - \mu_2 = a_1\alpha_1 + ... + a_\ell\alpha_\ell, \quad a_i \geqslant 0, \forall i \in \{1, ..., \ell\}.$$

53. É. Cartan, « Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane », *op. cit.*, p. 359.

Le plus haut poids μ_0 d'une représentation ρ est tel que $\mu_0 \succeq \mu$ pour tout poids μ de ρ. Cartan n'utilise pas exactement cette terminologie : il introduit les notions de « poids frontière » et de « poids dominant », cette dernière expression correspondant à ce que nous appelons le plus haut poids d'une représentation :

> Un poids ϖ sera dit un poids *frontière* s'il est impossible de trouver une racine ω_α tel qu'il y ait en même temps des variables de poids $\varpi + \omega_\alpha$ et des variables de poids $\varpi - \omega_\alpha$. Il y a évidemment des poids frontières ; il suffit de prendre parmi les poids de toutes les variables du groupe, ceux pour lesquels le coefficient m_1 (...) est le plus grand ; parmi ces poids, ceux pour lesquels le coefficient m_2 est le plus grand, et ainsi de suite. On arrive ainsi à un poids, que nous appellerons poids *dominant*, et qui évidemment est frontière. [54]

Si (ρ, V) est une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, alors elle possède un unique plus haut poids. En outre, si deux représentations irréductibles (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) de $\mathfrak{g}$ ont le même plus haut poids, alors elles sont *équivalentes*, ce qui signifie qu'il existe un isomorphisme T de V_1 dans V_2, tel que $\rho_2(X) \circ T = T \circ \rho_1(X), \ \ \forall X \in \mathfrak{g}$. La notion de plus haut poids est donc essentielle pour savoir si deux représentations irréductibles d'une algèbre de Lie semi-simple sont équivalentes. Cartan parvient effectivement à ce résultat, comme en témoigne la formule suivante : « si deux groupes linéaires isomorphes ne laissant invariante aucune multiplicité plane ont le même poids dominant, ils sont semblables ». [55] Dans sont article de 1925, Weyl revient en détail sur ce théorème qu'il démontre au cours du § 3 de la première partie. Aux yeux de Weyl, il s'agit de la contribution la plus importante de Cartan en théorie des représentations des algèbres de Lie complexes semi-simples, comme en témoigne le passage suivant : « Jusqu'à présent, la réflexion se poursuit dans la voie que Cartan avait peu ou prou tracée conformément la tradition algébrique. Sa contribution originale proprement dite repose sur la formulation et la preuve de la Proposition 2 : *Une représentation irréductible est déterminée de manière unique par son plus haut poids ; ce poids est toujours de multiplicité 1* ». [56]

Weyl formule ce théorème en utilisant de manière explicite une terminologie héritée de la théorie des représentations. Ce constat n'est pas trivial : il indique que Weyl effectue une véritable synthèse à partir des sources qu'il utilise, en l'occurrence ici Cartan, Frobenius, Schur ou encore Burnside. Il affirme à ce propos que le théorème de Cartan « complète et approfondit le théorème général de Burnside – qui n'est pas issu du cercle de pensée infinitésimal – selon lequel une représentation irréductible est déterminée de manière unique

54. *ibid.*, p. 359.
55. *ibid.*, p. 361.
56. H. Weyl, *op. cit.*, p. 281.

par sa caractéristique ≫.[57] Le théorème de Burnside consiste tout simplement à classer les représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe en fonction de leurs caractères. Par analogie, le théorème de Cartan permet d'effectuer une classification des représentations irréductibles d'une algèbre de Lie semi-simple en fonction de leurs plus hauts poids respectifs.

Dans son article de 1913, Cartan fait plus, il introduit également des substitutions qu'il applique à l'ensemble des poids et des racines : ≪ Nous désignerons en particulier le poids $\varpi + b_\alpha \omega_\alpha$ par la notation $S_\alpha \varpi$, et nous l'appellerons le poids *transformé de* ϖ *par la substitution* S_α ≫.[58] Si l'on raisonne sur l'espace $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ tout entier, la substitution S_α correspond à la réflexion par rapport à l'hyperplan de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ orthogonal à la racine α. Cartan identifie donc clairement les transformations qui engendrent le groupe de Weyl ; il ne les fait agir que sur l'ensemble des poids et des racines. On peut donc dire que Weyl interprète sous une forme explicitement géométrique ce qui, pour Cartan, n'est jamais qu'un jeu de permutations sur les poids et les racines, abstraction faite de l'espace environnant qui les contient. Cartan formule au surplus la définition et le théorème suivants : ≪ Nous appellerons poids *homologues* d'un poids donné ϖ tous les poids qui peuvent s'en déduire par les transformations S_α répétées un nombre quelconque de fois. Tous les poids homologues de ϖ sont de la forme

$$S_{\alpha_n} S_{\alpha_{n-1}} ... S_{\alpha_1} \varpi;$$

il leur correspond à tous le même nombre de variables ≫.[59] Autrement dit, si deux poids μ_1 et μ_2 sont homologues au sens de Cartan, c'est-à-dire conjugués par le groupe de Weyl, alors les espaces-poids V_{μ_1}, V_{μ_2} ont même dimension. Au terme de ce bref commentaire, il nous paraît donc pertinent d'affirmer que Weyl reprend à son compte certains résultats et concepts issus de la thèse de Cartan et de l'article de 1913 qu'il reformule dans une perspective géométrique. De plus, Weyl situe explicitement l'article de Cartan de 1913 à l'intérieur même de la théorie des représentations de groupes. Il fait ainsi converger deux traditions : la première, héritée de Cartan et Killing, est centrée sur l'étude des algèbres de Lie complexes semi-simples et la classification des algèbres de Lie simples ; la seconde, héritée de Frobenius et Schur, consiste à étudier systématiquement les représentations des groupes finis, avant d'étendre ce cadre théorique à certains groupes continus — nous pensons en particulier aux travaux de Schur sur les représentations de SO_n au début des années 20.

Loin de se contenter de faire coexister ces diverses références, Weyl effectue un important travail de réécriture portant sur les sources qu'il convoque dans l'article de 1925-1926. Ainsi,

57. *ibid.*, p. 281.
58. É. Cartan, *op. cit.*, p. 359.
59. *ibid.*, p. 360.

lorsque dans la première et la troisième partie de cet article, il emprunte la notion de poids à Cartan, il en précise le sens dans le cadre de la théorie des *représentations* des algèbres de Lie — ce que Cartan ne faisait pas encore explicitement en 1913. Ces modifications peuvent paraître négligeables ; en réalité, elles feront date : les exposés donnés notamment par P. Cartier et F. Bruhat dans le cadre du séminaire Sophus Lie (1954-1955) montrent qu'ils sont très marqués par l'approche géométrique que l'on doit à Weyl dans l'étude des systèmes de racines ; ils généralisent les concepts et les méthodes relevant de l'algèbre linéaire qui sont déjà très présents dans l'article de Weyl. Il est parfaitement erroné de croire que Weyl se serait contenté de compléter les travaux de Cartan, voire de combler une lacune dans les raisonnements de ce dernier, en démontrant le théorème de complète réductibilité dans le cas des algèbres de Lie complexes semi-simples. En réalité, il opère une véritable refonte des résultats de Killing et Cartan, refonte dont le groupe Bourbaki s'est très largement fait l'écho au début des années 50.

Nous venons de résumer les principaux travaux de Cartan que Weyl s'approprie dans son article de 1925-1926. Nous devons tout d'abord signaler qu'il s'agit d'une source parmi d'autres pour Weyl lorsqu'il élabore cette vaste synthèse. Il n'y a donc pas lieu d'établir un lien de filiation simple entre Cartan et Weyl en théorie des groupes de Lie. De plus, les quelques rappels que nous avons faits à la fin de la deuxième partie et dans l'introduction à cette troisième partie montre que les échanges entre Weyl et Cartan ne sont pas circonscrits à cette théorie. À cela s'ajoute que Weyl ne s'approprie pas spontanément la thèse de Cartan en 1923, c'est-à-dire au moment où il découvre l'effectivité des méthodes de Cartan pour résoudre le problème de l'espace. En réalité, c'est seulement au moment où il utilise des méthodes de théorie des groupes en calcul tensoriel que Weyl reprend à son compte les travaux de Cartan. Nous faisons nôtre l'argument d'Hawkins :

> But as far as the space problem was concerned, the extensive detour required by Cartan's approach was not deemed appropriate by Weyl, who was still fascinated by his own approach. I would suggest that Weyl had not yet found sufficient reason to take on the nontrivial task of mastering the details of Cartan's papers so as to put them to his own use. Eventually he did (...) but the motivation to do so seems to have come not from the space problem but from the calculus of tensors. [60]

En outre, les déplacements que Weyl fait subir aux textes de Cartan sont de trois ordres. En premier lieu, il leur imprime la marque de la méthode axiomatique et il les conçoit sous un angle moins algébrique et donc plus spécifiquement géométrique. En deuxième lieu, il

60. T. Hawkins, *op. cit.*, p. 440.

traduit les résultats de Cartan dans le langage des représentations de groupes de manière à pouvoir harmoniser cet emprunt avec les autres sources qu'il utilise. En troisième lieu, Cartan raisonne en algébriste : non seulement il adopte une approche très calculatoire dans sa thèse et ses articles de 1913-1914, mais de plus son intérêt se focalise sur l'étude des algèbres de Lie dont les propriétés sont fondamentalement algébriques. En revanche, Weyl entend également s'intéresser aux propriétés topologiques des groupes de Lie : il complète le point de vue infinitésimal et algébrique de Cartan par un point de vue topologique et global.

Cela posé, nous avons pu observer que Cartan n'étudie pas certains groupes continus en particulier, il élabore une théorie générale des algèbres de Lie qui se concrétise avec la classification exhaustive des algèbres de Lie simples et la détermination de critères pour identifier les algèbres de Lie respectivement semi-simples et résolubles. Weyl se maintient à ce niveau de généralité dans son article de 1925-1926. En conséquence, à la différence de Schur, Weyl ne se contente pas d'étudier un groupe de Lie en particulier — par exemple $\mathrm{O}(n)$ ou $\mathrm{SO}(n)$ — il veut prouver un théorème qui soit valable pour tous les groupes de Lie complexes semi-simples.

1.2 Les apports conceptuels et théoriques de Frobenius : caractères et représentations des groupes finis

Nous voudrions tout d'abord préciser qu'au moment où Weyl s'intéresse aux représentations de groupes, les principaux résultats sur les représentations des groupes finis sont déjà thématisés dans diverses monographies consacrées à la théorie des groupes finis. Nous pensons tout d'abord à la seconde édition de l'ouvrage de Burnside intitulé *Theory of groups of finite order* qui date de 1911. Par exemple, le chapitre XIV de cette monographie est entièrement consacré aux représentations linéaires des groupes finis. Mais, plus près de Weyl, Speiser — alors professeur à l'université de Zürich — publie en 1923 un ouvrage en langue allemande sur la théorie des groupes finis qui s'intitule *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Kristallographie.* Il s'inspire alors très largement de l'œuvre de Burnside dans l'organisation d'ensemble de son texte. Là encore, Speiser consacre plusieurs chapitres à la théorie des représentations des groupes finis. Weyl est durablement marqué par cette monographie. À court terme, elle permet d'avoir une vue synoptique sur les principaux concepts et résultats en théorie des représentations des groupes finis. À moyen terme, Speiser met en valeur les applications de

la théorie des groupes à la cristallographie, sur lesquelles Weyl insistera pour justifier par extrapolation l'usage de la théorie des groupes dans la mathématisation de la mécanique quantique. À plus long terme, dans la troisième édition de son ouvrage (1937), Speiser met en valeur l'importance de la théorie des groupes pour expliquer rationnellement l'art ornemental. Weyl reprendra à son compte ces développements dans une conférence de 1938, ses cours à Princeton en 1946 / 1949 et son ouvrage *Symmetry* (1952). Toujours est-il que la théorie des représentations des groupes finis est thématisée dans les ouvrages de Burnside et de Speiser que Weyl connaît sans doute au moment où il publie son article de 1925-1926 et qu'il mentionne systématiquement dans ses cours en théorie des groupes. Mais, d'un autre côté, nous verrons que la correspondance Schur / Weyl en 1924 explique l'intérêt que Weyl porte spécifiquement aux travaux de Frobenius qu'il a donc étudiés en tant que tels.

Les travaux que Frobenius consacre à la théorie des caractères et aux représentations des groupes finis a déjà fait l'objet de commentaires historiques détaillés. Nous pouvons mentionner en particulier *Pionneers of Representation Theory* de Curtis et le chapitre 10 de l'ouvrage de Hawkins intitulé *Emergence of the Theory of Lie Groups*. Dans ce chapitre, Hawkins revient de manière synthétique sur les principales publications de Frobenius en théorie des représentations de groupes finis à la fin du XIX^{e} siècle et au tout début du XX^{e} siècle. Il semble paradoxal qu'au sein même d'un ouvrage sur l'histoire des groupes de Lie, on trouve un chapitre dévolu à Frobenius. Non seulement ce dernier n'a publié aucun article sur les représentations des groupes et des algèbres de Lie, mais de plus, à l'instar d'autres collègues à Berlin tels que Weierstrass, il a clairement déploré le manque de rigueur qui entacherait les travaux de Lie et de ses successeurs :

> Lie and his theory were held in low esteem in Berlin. Lie was regarded as a poorly educated, narrow-minded mathematician, and his theory of transformation groups was regarded as in need of a sound mathematical foundation. These views, which are not without some justification, seem to have been held — perhaps in a less extreme form — by Weierstrass as well as Frobenius. [61]

De manière schématique, nous avons affaire à deux traditions, l'une représentée par Frobenius et Schur en théorie des représentations de groupes, l'autre par Lie, Engel, Killing et Cartan en théorie des groupes et des algèbres de Lie. Ces deux traditions ne se réfèrent ni aux mêmes méthodes, ni aux mêmes champs disciplinaires ; elles dépendent d'institutions différentes et elles ne légitiment pas les mêmes types de savoirs mathématiques. Voilà pourquoi elles restent globalement étrangères l'une à l'autre au tournant du XX^{e} siècle. De manière comparable, dans la première partie de notre thèse, nous avons souligné les divergences entre deux tra-

61. *ibid.*, p. 383.

ditions — l'une riemannienne, l'autre weierstrassienne — en analyse complexe. De même que dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913), Weyl dépasse l'antagonisme entre les points de vue riemannien et weierstrassien en analyse complexe, de même dans la série de publications qu'il consacre à la théorie des représentations des groupes de Lie semi-simples (1925-1926), il combine des éléments de connaissance issus de deux traditions distinctes, la première étant incarnée par Frobenius et Schur, la seconde par Killing et Cartan.

Rappelons tout d'abord que, dans la théorie des représentations des groupes finis, le concept de caractère semble découler naturellement du concept de représentation. Précisons qu'une représentation (linéaire) d'un groupe fini G est la donnée d'un espace vectoriel complexe de dimension finie E et d'un morphisme de groupes, $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$. Soit (E, ρ) une représentation de G. Le caractère de ρ est la fonction χ_ρ sur G à valeurs complexes définie par

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)),$$

Pour tout $g \in G$. Mais, d'un point de vue historique, le concept de caractère tire en réalité sa source des travaux de Gauss en arithmétique et de Dedekind en théorie algébrique des nombres. Le concept de caractère a donc été très progressivement annexé au domaine des représentations *matricielles* des groupes finis à la toute fin du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, Frobenius et Schur ne raisonnant d'ailleurs jamais sur des *espaces vectoriels* à proprement parler, contrairement à Weyl et Noether au début des années 20. Qui plus est, Frobenius introduit le concept de représentation de groupes après coup en 1897, alors qu'il a déjà dessiné les contours d'une théorie des caractères. Ces quelques remarques nous montrent que, d'un point de vue historique, il n'est pas du tout « naturel » de déduire le concept de caractère à partir de celui de représentation. Nous pouvons également mesurer la complexité des médiations nécessaires à la formulation des définitions que nous venons d'énoncer.

Dans un premier temps, nous nous proposons donc de montrer comment la théorie des caractères a peu à peu été subordonnée à l'étude des représentations matricielles des groupes finis. Nous pourrons ainsi mesurer tout l'écart qui sépare l'ordre logique d'une théorie mathématique une fois qu'elle est constituée et l'ordre historique de sa construction. Dans un second temps, nous reviendrons de manière synthétique sur les innovations conceptuelles et les principaux résultats que l'on doit à Frobenius sur les représentations matricielles des groupes finis. Enfin, dans un dernier temps, nous identifierons les éléments de connaissance que Weyl emprunte aux travaux que Frobenius consacre aux représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

1.2.1 La théorie des caractères et des déterminants de groupes de Dedekind à Frobenius

Le développement de la théorie des caractères pour les groupes finis (abéliens et non abéliens) est documenté de manière très précise dans la correspondance qu'entretiennent Dedekind et Frobenius au cours des années 1895-1897, comme le souligne E. Noether dans l'édition des œuvres complètes de Dedekind. [62] Les problèmes qui orientent Frobenius dans ses recherches lui sont suggérés par Dedekind : soit G un groupe fini de cardinal n, il s'agit d'étudier la décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme de degré n à n variables complexes associé à G et appelé *déterminant du groupe* G. La *structure* du groupe G se reflète dans une telle décomposition, comme le souligne Dedekind lui-même. [63] Ainsi, la théorie des ≪ déterminants de groupes ≫ constitue une médiation pour décrire les propriétés des groupes étudiés. Voici comment Dedekind définit la notion de déterminant de groupe dans une lettre à Frobenius datant du 25 mars 1896 :

> Soient 1, 2, ..., n les éléments de G écrits dans n'importe quel ordre, alors à chaque élément r du groupe G, je fais correspondre une variable x_r et je forme le déterminant
>
> $$H = \begin{vmatrix} x_{11'}, & x_{21'}, & \cdots & x_{n1'} \\ x_{12'}, & x_{22'}, & \cdots & x_{n2'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n'}, & x_{2n'}, & \cdots & x_{nn'} \end{vmatrix}$$
>
> où r' désigne l'élément inverse de r dans G. [64]

Les variables x_r, $r = \{1, ..., n\}$ sont complexes, le déterminant de groupe $\Theta(x_1, x_2, ..., x_n) = \det(x_{r_i r_j^{-1}})$ est donc un polynôme à coefficients complexes à n variables et de degré n. À la lecture de cette seule définition, le lien avec la théorie des représentations des groupes finis n'est pas probant. Voici comment T. Hawkins l'explicite à titre rétrospectif [65] : le polynôme

62. Au début de la lettre de Dedekind à Frobenius datant du 8 février 1895, Noether adjoint la note suivante : ≪ Les échanges épistolaires qui suivent apportent une contribution essentielle à l'histoire de la théorie des nombres hypercomplexes et des déterminants de groupes. Frobenius mentionne à plusieurs endroits le rôle que Dedekind a joué dans cette théorie : [en particulier] dans les introductions aux travaux sur les caractères de groupes, sur les facteurs premiers des déterminants de groupes et sur la représentation des groupes finis ≫. Cette note figure dans les *Gesammelte mathematische Werke* de Dedekind, Bd. II, Braunschweig, 1930, p. 419.

63. R. Dedekind, lettre du 25 mars 1896 à Ferdinand Georg Frobenius, ≪ XLV. Aus Briefen an Frobenius ≫, in *Gesammelte mathematische Werke*, *op. cit.*, p. 421 : ≪ On doit supposer que les propriétés du groupe G, au regard de ses diviseurs, se reflètent dans la décomposition de son déterminant H ≫.

64. *ibid.*, p. 420.

65. T. Hawkins, *op. cit.*, p. 376-377.

$\Theta(x_1, ..., x_n)$ s'identifie au déterminant de la représentation régulière droite ρ_R de G.[66] Hawkins ajoute la remarque suivante : supposons que la représentation ρ_R se décompose en la somme de deux représentations $\mu \oplus \nu$ de $\mathbb{C}[G]$, ce qui signifie qu'il existe une matrice carrée $n \times n$ et inversible, notée M, telle que

$$M\rho_R(\mathbf{x})M^{-1} = \begin{pmatrix} \mu(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \nu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}[G].$$

De manière équivalente, le déterminant de groupe se factorise de la manière suivante :

$$\Theta(x_1, ..., x_n) = \Phi(x_1, ..., x_n)\Psi(x_1, ..., x_n),$$

avec $\Phi(x_1, ..., x_n) = \det\mu(\mathbf{x})$ et $\Psi(x_1, ..., x_n) = \det\nu(\mathbf{x})$. La *factorisation* du déterminant du groupe G correspond exactement à la *décomposition* de la représentation régulière droite de G. Ce fait n'est pas mis au jour par Dedekind lui-même, puisqu'il ne raisonne jamais en termes de représentations matricielles de groupes. À supposer que G soit un groupe fini abélien, il parvient cependant au résultat suivant :

> Si G est un groupe abélien et ψ', ψ'', ..., $\psi^{(n)}$ sont ses caractères correspondants, (...), alors le déterminant H est décomposable en le produit des n facteurs linéaires
>
> $$\sum^{r} \psi^{(s)}(r)x_r = \psi^{(s)}(1)x_1 + ... + \psi^{(s)}(n)x_n$$
>
> qui correspondent aux n valeurs de s.[67]

Par caractère, Dedekind entend une fonction ψ non nulle à valeurs complexes sur G telle que $\psi(gg') = \psi(g)\psi(g')$ pour tous g, g' de G. Dans la citation précédente, les $\psi^{(s)}$ désignent les n caractères du groupe fini abélien G. Dedekind obtient la décomposition suivante du déterminant Θ de G :

$$\Theta = \prod_{s=1}^{n} \left(\sum_{g \in G} \psi^{(s)}(g)x_g \right).$$

La question est de savoir comment le déterminant de groupe Θ se factorise lorsque G n'est pas abélien. Par extension, quelles sont les informations qu'une telle factorisation apporte sur la structure du groupe fini G ? Dedekind n'aborde pas ces difficultés en toute généralité ; en

66. Soient G un groupe fini de cardinal n et $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre de G sur le corps des nombres complexes, c'est-à-dire l'algèbre associative de dimension n sur $\mathbb{C}$ telle que tout élément $\mathbf{x}$ de $\mathbb{C}[G]$ s'écrive de manière unique :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i, \quad x_i \in \mathbb{C},\ g_i \in G.$$

La représentation régulière droite ρ_R de G dans l'algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$ est définie par $(\rho_R(g)\mathbf{x})(h) = \mathbf{x}(hg)$, pour tous $g, h \in G$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{C}[G]$.

67. *ibid.*, p. 420-421.

1886, il se contente d'étudier les déterminants des groupes non abéliens de petit cardinal, à savoir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et le groupe quaternionien $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Dedekind observe tout d'abord que, lorsque G n'est pas abélien, son déterminant ne se décompose généralement pas en facteurs linéaires. Il tente donc de faire intervenir d'autres quantités dans les coefficients de Θ, à savoir les nombres hypercomplexes, pour que celui-ci se décompose en facteurs du premier degré.[68] Dedekind poursuit donc la lettre du 25 mars 1895 en ces termes :

> Mais si G n'est pas abélien, alors, pour autant que je le sache, outre des facteurs linéaires (...) son déterminant H possède des facteurs de plus haut degré qui sont irréductibles au sens habituel du terme, mais ces derniers peuvent de nouveau se décomposer en facteurs linéaires si, à côté des nombres habituels, on fait intervenir des nombres hypercomplexes (avec une multiplication non commutative) qui satisfont aux lois du groupe G.[69]

Dans son article intitulé « Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante »[70] Frobenius démontre la conjecture de Dedekind, formulée à la fin de la lettre du 18 avril 1896[71] : le nombre de facteurs linéaires de Θ coïncide avec l'ordre du groupe quotient $G/\mathcal{D}(G)$, où $\mathcal{D}(G)$ désigne le groupe dérivé de G qui est engendré par les commutateurs de G[72]. De plus, Frobenius prouve que le nombre l de facteurs homogènes irréductibles *distincts* du polynôme homogène Θ coïncide avec le nombre de classes de conjugaison que comporte le groupe G.[73] Écrivons la décomposition de Θ en facteurs irréductibles comme suit :

$$\Theta(x_1, ..., x_n) = \prod_{\lambda=1}^{l} \Phi_\lambda(x_1, ..., x_n)^{e_\lambda},$$

le nombre e_λ désigne la multiplicité de chaque facteur Φ_λ. Frobenius démontre en outre que la multiplicité de chaque Φ_λ coïncide avec son degré. Il résume de manière très synthétique l'ensemble de ces résultats dans le passage suivant :

> Le nombre k de facteurs irréductibles ou premiers de Θ est égal au nombre de classes d'éléments conjugués en lesquelles se répartissent les éléments de $\mathfrak{H}$; si f est le degré d'un tel facteur premier

68. Les nombres hypercomplexes désignent des algèbres associatives sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, telles que la multiplication cesse de satisfaire à la propriété de commutativité. Le corps des quaternions de Hamilton constitue un exemple de nombres hypercomplexes.

69. *ibid.*, p. 421.

70. G. Frobenius « Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante », in *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin*, (1896), p. 1343-1382.

71. R. Dedekind, *op. cit.*, p. 432-433.

72. i.e. les éléments de la forme $[g, g'] = g^{-1}g'^{-1}gg'$, où g et $g' \in G$

73. Rappelons à toutes fins utiles que la classe de conjugaison d'un élément g_0 de G est l'ensemble $C_{g_0} = \{gg_0g^{-1} \mid g \in G\}$.

> Φ, alors Θ est divisible par la puissance f-ième de Φ mais non par une puissance plus grande de Φ.[74]

Nous pouvons établir un dictionnaire entre les résultats obtenus ici par Frobenius et certains théorèmes bien connus en théorie des représentations des groupes finis. Par exemple, la proposition selon laquelle le déterminant de groupe se décompose en produit de facteurs irréductibles dont la multiplicité est égale à leur degré respectif est équivalente au théorème suivant : la représentation régulière contient chaque représentation irréductible de G avec une multiplicité égale à sa dimension. De plus, à chaque facteur irréductible de Θ correspond une et une seule représentation irréductible de G. Pour le dire autrement, la décomposition de Θ en facteurs irréductibles équivaut à la mise au jour de toutes les représentations irréductibles inéquivalentes de G. En outre, la proposition de Frobenius selon laquelle le nombre de facteurs irréductibles distincts de Θ coïncide avec le nombre de classes de conjugaison de G peut être traduite comme suit dans le langage de la théorie des représentations : le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes de G correspond au nombre de classes de conjugaison de G. Ces équivalences montrent la pérennité et l'invariance de certains résultats lorsque l'on passe du langage des déterminants de groupes à celui des représentations de groupes.

Les théorèmes établis par Frobenius impliquent ceux de Dedekind dans le cas des groupes finis abéliens. En effet, si G est abélien, alors $\mathcal{C}_g = \{g\}$, pour tout $g \in G$. Le nombre de classes de conjugaison de G coïncide avec le cardinal n de G. En d'autres termes, Θ se décompose en n facteurs irréductibles, qui sont nécessairement linéaires. De manière équivalente, si G est abélien, alors $\mathcal{D}(G) = \{e\}$, donc $G/\mathcal{D}(G) = G$, ce qui permet de démontrer par un autre biais que le nombre de facteurs linéaires de Θ correspond au cardinal de G et que Θ se décompose en facteurs du premier degré.

En résumé, si l'on s'en tient à la correspondance Dedekind / Frobenius et aux articles publiés par Frobenius au cours de l'année 1896, on peut observer que la théorie des ≪ caractères ≫ est complètement liée à l'étude et à la décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme homogène de degré n et à n variables appelé déterminant d'un groupe fini G de cardinal n. Cette donnée nous permet de mesurer concrètement l'écart entre l'ordre historique d'une théorie scientifique en cours d'élaboration et son ordre logique une fois qu'elle est constituée. En effet, nous sommes habitués à parler du caractère *d'une* représentation (E, ρ) d'un groupe G, comme s'il était impossible de définir la notion de caractère indépendamment de celle de représentation. En réalité, Frobenius assujettit après coup l'étude des caractères

74. G. Frobenius, *op. cit.*, p. 1343.

d'un groupe G au cadre théorique des représentations matricielles de groupes. Le concept de ≪ déterminant de groupe ≫, qui est fondamental chez Dedekind et dans les premiers travaux que Frobenius consacre aux caractères d'un groupe fini, est *transitoire* dans la mesure où il deviendra secondaire lorsque la théorie des représentations des groupes finis sera pleinement constituée au début du XX^{e} siècle.

De manière plus littérale, la notion de déterminant de groupe constitue une *transition* entre deux types de théories : d'une part la théorie de Galois et la théorie des invariants qui partagent au moins un objet en commun, à savoir l'étude des polynômes et de leur décomposition en facteurs irréductibles, d'autre part la théorie des représentations de groupes qui accorde une place centrale au langage matriciel dès la fin du XIX^{e} siècle. Pour vérifier notre hypothèse, nous pouvons nous appuyer sur le court paragraphe que H. Burkhardt consacre aux déterminants de groupe dans son article sur les groupes finis tiré de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*

> Associons une variable x_R à chaque opération R d'un groupe et formons le déterminant
>
> $$\left|x_{PQ^{-1}}\right|, \qquad (P, Q = R_0, R_1, R_2, ..., R_{N-1}),$$
>
> alors celui-ci s'appelle le déterminant du groupe. Si le groupe est abélien, alors le déterminant est égal à un produit de facteurs linéaires, dont les coefficients sont les caractères. En général, il se décompose en une suite de facteurs, dont le nombre est égal au nombre d'opérations équivalentes du groupe [i.e. au nombre de classes de conjugaisons du groupe], chacun de ces facteurs étant à une multiplicité dont l'exposant est égal à son degré. À chaque facteur correspond une représentation ≪ primitive ≫ [i.e. irréductible] du groupe par des substitutions linéaires en f variables. [75]

À l'appui de cet argument, Burkhadt mentionne la correspondance Dedekind / Frobenius, les articles de Frobenius qui en découlent et un article de Burnside de 1894. Un concept tel que celui de déterminant de groupe est donc hautement significatif en histoire des mathématiques parce qu'il permet de saisir sur le vif toute une série de reconfigurations théoriques et disciplinaires qui, loin d'être spontanées, s'effectuent très progressivement, comme en atteste la coexistence de méthodes qui ne sont pas uniformes, notamment dans les premiers articles de Frobenius en 1896-1897. D'après les écrits de Dedekind et Frobenius, nous pouvons mesurer à quel point la décomposition ≪ à la main ≫ de polynômes — en l'occurrence ici le déterminant de groupe — demeure encore largement plébiscitée pour saisir les propriétés d'un groupe fini à la fin du XIX^{e} siècle. S'il est vrai que Dedekind utilise de manière récurrente l'axiomatisation pour définir toute une série de concepts algébriques, en revanche les méthodes sur

75. H. Burkhardt, ≪ Endliche diskrete Gruppen ≫ (1898), in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. I. I., Leipzig, éd. Teubner, 1898-1904, p. 226.

lesquelles il se fonde ici n'ont rien de structural, elles s'appliquent à des objets particuliers qu'il s'agit de décomposer empiriquement en ses éléments irréductibles, comme en atteste l'étude du déterminant du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ et du groupe des quaternions.

En outre, lorsque l'on se réfère à la théorie des représentations linéaires des groupes finis telle qu'elle est maintenant constituée, on peut observer que ses énoncés valent immédiatement pour les groupes finis *en général*, le cas des groupes abéliens finis étant jugé trivial. L'examen historique de la théorie des déterminants de groupes nous montre exactement l'inverse : Dedekind étudie le cas supposé élémentaire des groupes finis abéliens dont il maîtrise parfaitement les résultats ; il peut ensuite identifier et mesurer les difficultés qu'il est nécessaire de résoudre face à une situation plus complexe qui est celle des groupes finis non abéliens. Ainsi, les connaissances dont il dispose pour les groupes finis abéliens et l'étude qu'il propose dans le cas de deux groupes non abéliens de petit cardinal lui permet de formuler le bon problème et la bonne conjecture à propos des groupes finis non abéliens en général. Ce qui pour nous est un cas trivial ou une série d'exemples élémentaires constitue un instrument heuristique de premier plan aux yeux de Dedekind et de Frobenius, comme en atteste leur correspondance même. Par extension, il n'est guère intéressant de s'en tenir au constat selon lequel Frobenius aurait établi les premiers résultats généraux en théorie des déterminants de groupes, des caractères et des représentations si l'on ne prend pas le soin d'identifier les méthodes, les problèmes ou encore les concepts qui lui ont permis de *généraliser* les résultats de Dedekind.

Ainsi l'ordre historique de développement d'une théorie ne coïncide pas avec son ordre logique comme en attestent ici l'importance du concept transitoire de déterminant de groupe ainsi que la montée très progressive en généralité esquissée par Dedekind avant d'être pleinement réalisée par Frobenius dès 1896. Nous faisons nôtre l'argument de Burnside — qui est l'un des fondateurs de la théorie des représentations des groupes finis aux côtés de Frobenius et Schur — selon lequel

> It is hardly too much to say that the methods by which new ideas are introduced and new results obtained in any branch of mathematical science are in general indirect. In fact the historical development of a subject rarely follows the lines of the logical presentment that can be given when a sufficient number of results and their connexion with each other have become familiar. [76]

76. W. Burnside, ≪ On the Representation of a Group as an irreducible Group of linear Substitutions and the direct Establishment of the Relations between the group-characteristics ≫, in *Proc. Lond. Math. Soc.* (1904), p. 146.

Si, à titre rétrospectif, il est possible d'interpréter les principaux résultats de Frobenius sur les déterminants de groupes dans le langage des représentations matricielles de groupes, il convient de ne pas perdre de vue que de telles reformulations ne reposent pas sur de simples changements de vocabulaire. Sans doute l'outil matriciel permet-il de refléter de manière plus claire et selon des procédés plus simples la structure et les propriétés des groupes finis.

La non coïncidence entre ce que nous avons appelé les ordres logique et historique d'une théorie permet de critiquer plus largement une conception finaliste qui est à la fois inversée et normative de l'histoire des mathématiques. En effet, si l'on suit cette conception, alors la théorie dans son achèvement constitue une sorte de fin et les étapes qui participent à sa réalisation sont réduites à des moyens jugés en fonction de leur utilité ou de leur pérennité. Les écueils d'une conception finaliste de l'histoire des mathématiques sont triples. En premier lieu les catégories de la fin et des moyens conduisent à une inversion du rapport de cause à effet en histoire. Ainsi, il est invérifiable de prétendre que les écrits de Frobenius sont d'emblée guidés par la forme achevée que prendra la théorie des représentations de groupes, comme si cette dernière se trouvait en quelque sorte en puissance dans ses travaux. En second lieu, le finalisme conduit à sous-évaluer l'importance des concepts, méthodes et problèmes formulés à titre transitoire dans l'émergence d'un nouveau cadre théorique. Dans une certaine mesure, on est alors conduit à réécrire l'histoire des sciences en effaçant les écarts qui séparent les productions passées des productions présentes en termes méthodologique, conceptuel et disciplinaire. Enfin, le finalisme est systématiquement associé à une illusion rétrospective. La citation de Burnside nous incite justement à nous déprendre d'une vision finaliste de l'histoire des mathématiques, précisément dans le cas de la théorie des représentations de groupes.

1.2.2 De la théorie des caractères aux représentations matricielles de groupes

Dans l'article qu'il consacre aux déterminants des groupes finis, Frobenius ne se contente pas de résoudre la conjecture de Dedekind, il généralise également la notion de caractère aux groupes non abéliens. En effet, soit

$$\Theta(x_1, ..., x_n) = \prod_{\lambda=1}^{l} \Phi_\lambda(x_1, ..., x_n)^{f_\lambda}$$

la décomposition du déterminant du groupe fini G en facteurs irréductibles. Frobenius caractérise complètement les *facteurs irréductibles* Φ_λ comme suit :

$$\Phi_\lambda(x) = x_e^{f_\lambda} + \left(\sum_{g \neq e} \psi^{(\lambda)}(g) x_g \right) x_e^{f_\lambda - 1} + ...,$$

e étant le neutre de G. Les coefficients $\psi^{(\lambda)}$ généralisent la notion de caractère dans le cas des groupes finis non abéliens. Frobenius définit donc en 1896 le concept de caractère de manière générale — c'est-à-dire pour des groupes finis abéliens ou non abéliens — en s'appuyant exclusivement sur la théorie des déterminants de groupes. Dans le langage des représentations, précisons qu'il s'agit des caractères des représentations irréductibles inéquivalentes.

En outre, Frobenius met au jour deux propriétés fondamentales des caractères — qui, rappelons-le, sont des fonctions sur un groupe fini quelconque G et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Tout d'abord, il démontre qu'elles sont constantes sur les classes de conjugaison de G [77] ; autrement dit, les caractères sont des *fonctions centrales* sur G. De plus, il prouve qu'ils satisfont aux relations d'orthogonalité. [78] Précisons ce que cela signifie : soient $\psi^{(\lambda)}$ et $\psi^{(\mu)}$ deux « caractères » — en théorie des représentations, $\psi^{(\lambda)}$ et $\psi^{(\mu)}$ correspondent aux caractères de deux représentations irréductibles inéquivalentes —, Frobenius prouve que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi^{(\lambda)}(g) \overline{\psi^{(\mu)}(g)} = 0$$

et que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi^{(\lambda)}(g) \overline{\psi^{(\lambda)}(g)} = 1$$

Il n'interprète pas ce résultat géométriquement ; autrement dit, il ne considère pas la formule $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi^{(\lambda)}(g) \overline{\psi^{(\mu)}(g)}$ explicitement comme le produit scalaire de deux éléments appartenant à l'espace des fonctions sur G et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Il n'en demeure pas moins que le cadre théorique hérité de la théorie des déterminants de groupes rend l'appréhension et le maniement de la notion de caractère difficile. Voilà pourquoi, à partir de 1897, Frobenius pose les premiers fondements de la théorie des représentations de groupes, substituant ainsi l'outil matriciel à un objet complexe à manipuler, en l'occurrence le déterminant d'un groupe qu'il s'agit de décomposer en ses facteurs irréductibles. Il ne faudrait pas croire qu'en 1896 Frobenius n'utilise jamais des matrices et que, subitement en 1897, il abandonne totalement la référence aux déterminants de groupes. En réalité, dans l'article de 1896 que nous avons cité, les théorèmes que nous avons mentionnés portent bien

77. G. Frobenius, *op. cit.*, p. 1353.
78. *ibid.*, p. 1358-1359.

sur le déterminant d'un groupe fini non abélien, l'outil matriciel étant utilisé en toile de fond pour les démontrer. En revanche, à partir de 1897, les résultats obtenus sur les déterminants de groupes constituent un moyen heuristique pour dessiner les contours d'une théorie des représentations matricielles de groupes.

Frobenius traduit donc l'ensemble des concepts et des résultats dérivés de l'étude du déterminant de groupe dans le langage de la théorie des représentations. Il introduit d'ailleurs la notion de « représentation » [Darstellung] qu'il explicite de manière très générale pour un groupe *abstrait*, dont la nature des éléments n'est donc pas spécifiée :

> Soient $\mathfrak{H}$ un groupe abstrait, A, B, C, ... ses éléments. Si on fait correspondre la matrice (A) à l'élément A, la matrice (B) à l'élément B, ..., alors le groupe $\mathfrak{H}'$ est isomorphe [79] au groupe $\mathfrak{H}$, ce qui signifie que l'on a $(A)(B) = (AB)$. Je dis donc que les substitutions ou les matrices (A), (B), (C), ..., représentent le groupe $\mathfrak{H}$. [80]

Ce nouveau cadre théorique lui permet de redéfinir les caractères comme les fonctions traces des représentations irréductibles d'un groupe fini quelconque G. Autrement dit, soit ρ une représentation matricielle irréductible de dimension n de G, le caractère χ_ρ de ρ vérifie :

$$\chi_\rho(g) = \sum_{i=1}^{n} (\rho(g))_{ii}.$$

L'usage de l'outil matriciel permet à Frobenius de formuler et de démontrer des propositions qu'il n'aurait pas pu mettre au jour s'il s'en était tenu à la théorie des déterminants de groupes héritée de Dedekind. C'est notamment le cas du théorème de complète réductiblité dans le cas des groupes finis, qui est d'une importance capitale pour notre propos, puisque Weyl envisage de l'étendre aux groupes de Lie complexes semi-simples. Le théorème de complète réductibilité dans le cas d'un groupe fini G signifie que *toute* représentation de dimension finie n de G est complètement réductible ; autrement dit toute représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ vérifie la propriété suivante : il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que

$$M\rho(g)M^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_m(g) \end{pmatrix},$$

où les ρ_λ sont des représentations matricielles irréductibles de G. [81] Le théorème de complète réductibilité est prouvé de manière relativement indépendante par Molien et surtout par

79. c'est-à-dire homomorphe.

80. G. Frobenius, « Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen », *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin*, 1897, p. 998.

81. *ibid.*, p. 1000 et suiv.

Maschke, élève de Klein qui participe largement au développement de l'école algébrique de Chicago aux côtés de Dickson à la fin du XIX^{e} siècle.

Cette remarque appelle la réflexion suivante : si nous avions eu pour objectif d'écrire une histoire de la théorie des représentations des groupes finis — ce qui dépasse largement l'objet de notre présente thèse —, alors nous aurions dû effectuer un véritable changement d'échelle. Il aurait été injustifié de nous en tenir aux travaux des deux principaux représentants de l'école de Berlin en théorie des représentations de groupes, à savoir Frobenius et Schur. En effet, il nous aurait été absolument nécessaire de prendre en considération les articles et ouvrages de Burnside, mais aussi certaines publications issues de l'école de Chicago. L'exemple du théorème de complète réductibilité dans le cas des groupes finis le montre assez. Seulement, les rappels historiques que nous effectuons ici ont pour seul but d'éclairer les articles que Weyl publie en 1925-1926. Or, les écrits de Frobenius et Schur constituent sa principale source. Weyl ne cite qu'en passant les autres mathématiciens qui ont œuvré au développement de la théorie des représentations de groupes. Voilà pourquoi, sans les nier, nous mettons entre parenthèses les apports de protagonistes tels que Maschke ou encore Dickson, puisqu'ils ne nous permettent pas de contextualiser les travaux ultérieurs de Weyl. Néanmoins, nous ne nions pas qu'une histoire des représentations des groupes finis, exclusivement centrée sur l'école de Berlin, serait fautive et inconséquente.

Dans son article de 1897, Frobenius reformule également dans le langage de la théorie des représentations le théorème fondamental de factorisation du déterminant d'un groupe fini non abélien G qu'il avait mis au jour en 1896. Il démontre tout d'abord que le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes coïncide avec le nombre k de classes de conjugaison de G. En outre, en vertu du théorème de complète réductibilité, la représentation régulière ρ_R est complètement réductible. Si ρ_1, ..., ρ_k désignent les k représentations irréductibles inéquivalentes de G et f_1, ..., f_k leurs degrés respectifs, chaque ρ_λ intervient f_λ fois dans la réduction complète de la représentation régulière de G. Autrement dit :

$$\rho_R = \bigoplus_{\lambda=1}^{k} f_\lambda \rho_\lambda.$$

C'est ce que l'on appelle maintenant la décomposition de la représentation régulière en composantes isotypiques. Le lien avec le théorème de décomposition du déterminant du groupe G est immédiat. En effet, si Θ désigne le déterminant de G et

$$\Theta(x_1, ..., x_n) = \prod_{\lambda=1}^{l} \Phi_\lambda(x_1, ..., x_n)^{f_\lambda},$$

sa décomposition en facteurs irréductibles, nous avons :

$$\Phi_\lambda(x_1, ..., x_n) = \det \left[\sum_{g \in G} \rho_\lambda(g) x_g \right] \quad \text{et} \quad \psi^\lambda(g) = \text{Tr} \ \ \rho_\lambda(g).$$

À partir des relations d'orthogonalité et du théorème de réductibilité, Frobenius démontre le théorème suivant : deux représentations irréductibles sont équivalentes si et seulement si elles ont le même caractère. Ainsi, le cadre théorique des représentations de groupes permet de définir simplement et commodément la notion de caractère ; en retour, les caractères constituent une condition nécessaire et suffisante pour établir une *classification exhaustive* des représentations matricielles irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini G.[82] À l'instar de Frobenius, nous pouvons établir la table des caractères dont les colonnes correspondent aux classes de conjugaison d'un groupe et les lignes aux représentations irréductibles inéquivalentes de ce groupe. D'après le résultat que nous venons de mentionner, cette table est carrée et elle peut s'écrire comme suit :

	$\lvert C_{g_1} \rvert$	.....	$\lvert C_{g_N} \rvert$
	$g_1 \in \lvert C_{g_1} \rvert$	.....	$g_N \in \lvert C_{g_N} \rvert$
χ_{ρ_1}	$\chi_{\rho_1}(g_1)$	.....	$\chi_{\rho_1}(g_N)$
...	...	.....	...
χ_{ρ_N}	$\chi_{\rho_N}(g_1)$	.....	$\chi_{\rho_N}(g_N)$

Dans le chapitre précédent, nous avons souligné que Weyl fait abstraction des procédés calculatoires utilisés par Killing et Cartan au profit d'une approche géométrique parfaitement illustrée dans l'étude des systèmes de racines des algèbres de Lie complexes simples. De manière analogue, alors que Frobenius se donne exclusivement pour objet des représentations *matricielles* de groupes, Weyl définit les représentations de groupes en s'appuyant sur les notions d'espace et de sous-espace vectoriels. Pour le dire autrement, avec Weyl une représentation d'un groupe G est définie par la donnée d'un espace vectoriel — de dimension finie — et d'un morphisme de groupes $\rho : G \to \text{GL}(E)$, une représentation étant irréductible lorsque les seuls sous-espaces invariants par ρ sont E et $\{0\}$; elle est réductible dans le cas contraire :

> Une représentation $\mathfrak{G}$ est *réductible* s'il y a un ≪ plan ≫, autrement dit une variété linéaire de vecteurs $\mathfrak{R}_1$, qui est stable ≪ sous l'action de $\mathfrak{G}$ ≫, c'est-à-dire par toute transformation de $\mathfrak{G}$ et dont la dimension N_1 est > 0 et $< N$.[83]

82. Rappelons à ce propos que le nombre de classes de conjugaison de G coïncide avec le nombre de représentations irréductibles inéquivalentes qu'il admet.

83. H. Weyl, *op. cit.*, p. 272.

Weyl n'a donc en rien été *passivement* influencé par Cartan en théorie des algèbres de Lie semi-simples et par Frobenius en théorie des représentations de groupes. Il réécrit les résultats de Cartan et Frobenius en les délestant de leurs lourdeurs calculatoires. Pour reprendre une expression de Hawkins, Weyl assujettit ces deux sources à une même approche qui est à la fois conceptuelle et géométrique — par opposition à calculatoire et algébrique.[84] La systématisation de l'outil vectoriel en théorie des représentations confère d'ailleurs une unité à l'article de Weyl par delà la diversité des sources et des méthodes qu'il combine.

Il nous reste à aborder l'une des contributions essentielles de Frobenius au début du XX^{e} siècle, à savoir l'étude des représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Il d'autant plus nécessaire de résumer les articles qu'il consacre à ce sujet qu'ils auront une incidence certaine sur Weyl, comme en atteste la première partie de son article de 1925-1926, mais aussi sa monographie sur la mécanique quantique (1928, 1931).

1.2.3 Les représentations du groupe symétrique

Frobenius étudie de manière exhaustive les représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ quelconque dans deux articles. Au cours du premier article, qui est intitulé « Über die Charactere der symmetrischen Gruppe » (1900), il détermine les représentations irréductibles inéquivalentes de $\mathfrak{S}_n$ et il donne une formule qui permet de calculer effectivement la valeur que prend la fonction caractère d'une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ pour une classe de conjugaison $\mathcal{C}_i$ de $\mathfrak{S}_n$ arbitrairement donnée. Il s'agit de la *formule des caractères*. De plus, il introduit une *formule de la dimension* qui permet de calculer le degré ou la dimension d'une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$. Dans le second article, qui a pour titre « Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe » (1903), Frobenius reprend à son compte les diagrammes introduits par Young en 1901 et il montre qu'à chaque représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$, on peut associer un et un seul diagramme de Young [normal].

La théorie des représentations irréductibles du groupe symétrique intéresse Weyl entre 1924 et 1931 pour trois raisons. Tout d'abord, sur les conseils de Schur, Weyl propose l'équivalent à la formule des caractères et de la dimension pour certains groupes de Lie. Ensuite, il montre que les représentations du groupe symétrique jouent un rôle essentiel dans la construction des représentations de certains groupes continus, en particulier $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Enfin, il s'avère qu'un atome comportant n électrons jouit d'une symétrie par permutation de ces n électrons. Cela tient au fait que ces n particules sont « indiscernables » : elles peuvent

84. T. Hawkins, *op. cit.*, p. 408.

être numérotées, mais elles ne sauraient être individualisées. Nous aborderons ce type fondamental de symétrie dans le troisième chapitre de la présente partie. Nous montrerons que les représentations du groupe symétrique interviennent de manière essentielle pour décrire un système quantique comportant n particules indiscernables. Ces données appellent deux remarques. (a) Les résultats qui dérivent de l'étude des représentations du groupe symétrique connaissent une fortune qui va bien au-delà de la théorie des représentations des groupes *finis* : elles sont intimement liées à l'étude des représentations de certains groupes de Lie et elles admettent des applications remarquables en mécanique quantique. (b) Il ne faudrait pas croire qu'en 1925-1926, Weyl s'intéresse exclusivement aux représentations des groupes et des algèbres de Lie. En réalité, il produit une série de résultats et de théorèmes synthétiques qui mettent *simultanément* en jeu un groupe fini — en l'occurrence $\mathfrak{S}_n$ — et des groupes continus — nous pensons à $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ou encore à $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ — c'est ce que l'on appelle la *dualité de Schur-Weyl*.

Revenons tout d'abord sur l'article de Frobenius intitulé ≪ Über die Charactere der symmetrischen Gruppe ≫. Il fait d'abord des rappels élémentaires sur les permutations conjuguées de $\mathfrak{S}_n$ et sur les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$:

> Une permutation [de n symboles] peut toujours être représentée de manière unique comme produit de cycles [cyklischen Vertauschungen], dont nuls n'ont de symboles en commun. Pour que deux permutations attachées à [$\mathfrak{S}_n$] soient conjuguées, il faut et il suffit qu'elles se composent d'un même nombre de cycles de même ordre. Si les permutation de la ρ-ième classe ($\rho = 0, 1, ..., k-1$) sont constituées de α cycles d'ordre 1, de β cycles d'ordre 2, de γ cycles d'ordre 3, ..., alors d'après Cauchy, le nombre de telles permutations est :
>
> $$h_\rho = \frac{n!}{1^\alpha \alpha! 2^\beta \beta! 3^\gamma \gamma! ...}$$
>
> Le nombre k de classes d'éléments conjugués en lesquelles se répartissent les $h = n!$ permutations est égal au nombres de solutions de l'équation
>
> $$n = \alpha + 2\beta + 3\gamma + ...$$
>
> par des nombres entiers α, β, γ, ..., qui peuvent également être nuls, [le nombre k] est aussi égal au nombre de partitions différentes du nombre
>
> $$n = n_1 + n_2 + ...$$
>
> en un nombre déterminé de parties positives. [85]

D'après les résultats généraux qu'il a obtenus sur les représentations des groupes finis, Frobenius sait que $\mathfrak{S}_n$ admet exactement k représentations irréductibles inéquivalentes, qui correspondent donc au nombre de partitions possibles de l'entier n. La motivation fondamentale

85. F. G. Frobenius, ≪ Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe ≫, *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin*, 1900, p. 516.

de cet article s'énonce comme suit : soit $\lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ une partition quelconque de l'entier n — i.e. $n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$ — et ρ_λ la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ associée à λ, il s'agit de trouver une formule permettant de calculer la valeur que prend le caractère χ_{ρ_λ} de ρ_λ pour une classe de conjugaison $\mathcal{C}_i$ de $\mathfrak{S}_n$ arbitrairement donnée. C'est la formule des caractères. Dans ce premier article, Frobenius fait plus : il détermine le *degré* — c'est-à-dire la dimension — de la représentation irréductible ρ_λ de $\mathfrak{S}_n$ correspondant à la partition $\lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ de l'entier n.

Les résultats obtenus ici par Frobenius sont déterminants pour comprendre les §§ 6 et 7 de la première partie de l'article de Weyl de 1925-1926. En effet, au cours du § 6, Weyl détermine la formule des caractères et de la dimension pour les représentations irréductibles inéquivalentes de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Nous insistons ici sur le fait que Weyl raisonne par *analogie* : certains résultats canoniques en théorie des représentations des groupes finis lui servent de modèle pour proposer et démontrer des résultats analogues dans le cas des groupes de Lie. L'analogie a ici une double fonction : *transposition* de théorèmes à d'autres objets mathématiques et *unification* de différents cadres théoriques.

Weyl fait plus dans le § 7. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie N. Weyl exprime le caractère d'une représentation irréductible ρ de $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ ayant pour espace sous-jacent $\bigotimes^n E$ [86] en fonction du caractère de la représentation irréductible ρ' de $\mathfrak{S}_n$ « correspondante ». [87] Il montre au surplus que le degré de ρ coïncide avec le degré de ρ'. Ainsi, il fait converger la théorie des représentations d'un groupe fini, à savoir le groupe symétrique, *et* la théorie des représentations d'un groupe continu, en l'occurrence ici $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$. Il ne se contente donc pas de transposer à certains groupes continus des théorèmes valables dans le cas des groupes finis. Il veut parvenir à des résultats qui mettent en jeu les représentations du groupe symétrique et de certains groupes continus. Il poursuivra d'ailleurs ce projet au cours du chapitre V de sa monographie sur la mécanique quantique. [88]

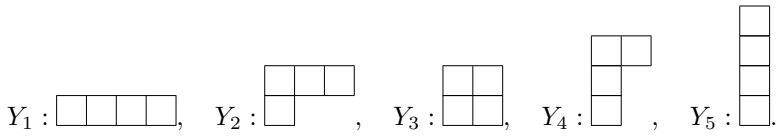
Pour parvenir à ce point, Weyl s'appuie sur deux concepts qui interviennent dans l'article de Frobenius datant de 1903, à savoir les *diagrammes de Young* et *les unités caractéristiques primitives* — c'est-à-dire les idempotents primitifs attachés à chaque représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$. Nous n'aborderons que la première de ces deux notions. Un *diagramme de Young* est un tableau formé de n cases réparties en lignes de longueur décroissante au sens large. Il existe autant de diagrammes de Young distincts que de partitions de l'entier n. Par exemple,

86. c'est-à-dire la n-ième puissance tensorielle de E, E étant un espace vectoriel de dimension N.

87. une telle correspondance repose sur le fait que les représentations irréductibles ρ de $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ et ρ' de $\mathfrak{S}_n$ sont indexées par le même tableau de Young.

88. Les résultats qu'il obtient sont connus sous le nom de dualité de Schur-Weyl.

pour $n = 4$, on trouve cinq tableaux de Young distincts :



À chaque tableau de Young, on peut associer une et une seule classe d'équivalence de représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$. Le recours à de tels diagrammes permet de répertorier les représentations irréductibles inéquivalentes de $\mathfrak{S}_n$ pour n fixé.

Plus profondément, à partir des concepts de diagramme de Young et d'unité caractéristique primitive, Weyl fait converger trois domaines : (1) la théorie des poids de Cartan dans le cas de $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ et de son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$, (2) la classification des tenseurs de $\bigotimes^n E$, (3) l'étude des représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$. Ce projet est déjà à l'œuvre dans l'article de Weyl de 1924 intitulé « Das gruppentheorerische Fundament der Tensorrechnung ».[89] Weyl le poursuit au cours de la première partie de son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples. Plutôt que de nous perdre dans les détails techniques des raisonnements de Weyl, nous voulons insister sur son mode opératoire. Dans ces deux articles, il synthétise diverses sources — essentiellement Cartan et Frobenius —, il construit des passerelles entre différents cadres théoriques pour produire des résultats mathématiques inédits. Pour être un peu plus précis, Weyl démontre tout simplement qu'à un tableau de Young Y on peut associer (1) une et une seule représentation irréductible de $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ (à équivalence près), (2) un type *simple* de tenseurs de $\bigotimes^n E$, (3) une et une seule représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ (à équivalence près).[90] Le résultat (3) est connu de Frobenius et Young. Weyl leur adjoint les résultats (1) et (2). En ce sens, la théorie des représentations de groupes — et, plus particulièrement du groupe symétrique — fonde le calcul tensoriel en un sens très précis : elle permet de décomposer l'espace des tenseurs $\bigotimes^n E$ en types simples.

Illustrons cette assertion par l'exemple suivant. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n de base $\{e_1, ..., e_n\}$ et $E \otimes E$ l'espace des tenseurs (contravariants) d'ordre 2, i.e. l'espace vectoriel des formes bilinéaires de $E^* \times E^*$ dans $\mathbb{C}$. Pour $x, y \in E$, un élément $x \otimes y$ de $E \otimes E$ est défini par

$$(x \otimes y)(\xi, \eta) =< \xi, x >< \nu, y > .$$

La famille $(e_i \otimes e_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ forme une base de $E \otimes E$. Donc, tout tenseur (contravariant) d'ordre 2 sur E s'écrit $T = \sum_{i,j=1}^{n} T^{ij} e_i \otimes e_j$. L'espace $E \otimes E$ des tenseurs d'ordre 2 se

89. Pour une analyse technique du contenu mathématique d'un tel projet, nous renvoyons à l'ouvrage d'Hawkins, *op. cit.*, p. 455.

90. *ibid.*, p. 302-303.

décompose en deux classes de tenseurs : les tenseurs symétriques d'ordre 2 et les tenseurs antisymétriques d'ordre 2. Le sous-espace AS^2E des tenseurs antisymétriques d'ordre 2 est engendré par les $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$, avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, alors que le sous-espace S^2E des tenseurs symétriques d'ordre 2 est engendré par les $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i$, avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$. On a donc

$$E \otimes E = S^2E \oplus AS^2E.$$

L'espace S^2E est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, l'espace AS^2E est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Ces deux espaces peuvent être associés respectivement à la représentation triviale ρ_1 et à la représentation alternée ρ_2 de $\mathfrak{S}_2$.[91] Il s'agit là des deux seules représentations irréductibles inéquivalentes (de dimension 1) de $\mathfrak{S}_2$. Soit (E, ρ) une représentation du groupe $\mathfrak{S}_2$, les espaces S^2E et AS^2E sont stables par $\rho \otimes \rho$. La représentation $\rho \otimes \rho$ de $\mathfrak{S}_2$ dans le groupe des automorphismes de $E \otimes E$ se décompose comme suit en somme directe de représentations irréductibles :

$$\rho \otimes \rho = \frac{n(n+1)}{2}\rho_1 \oplus \frac{n(n-1)}{2}\rho_2.$$

Ainsi, la décomposition de $E \otimes E$ en « grandeurs simples » — au sens où $E \otimes E = S^2E \oplus AS^2E$ — est intimement corrélée à la décomposition de la représentation $(\rho \otimes \rho, E \otimes E)$ de $\mathfrak{S}_2$ en somme directe de représentations irréductibles. Ce raisonnement peut être généralisé : chaque classe de symétrie de tenseurs d'ordre n est associée à une représentation irréductible ρ_λ de $\mathfrak{S}_n$. Le type de symétrie de cette classe de tenseurs est dicté par les propriétés de ρ_λ. Par exemple, les tenseurs totalement symétriques d'ordre n sont associés à la représentation triviale de $\mathfrak{S}_n$; les tenseurs totalement antisymétriques d'ordre n sont associés à la représentation alternée de $\mathfrak{S}_n$. Les méthodes de théorie des groupes ont donc pour fonction la *décomposition* de l'espace $\bigotimes^n E$ en classes de symétries. C'est ce que Weyl appelle le *fondement* du calcul tensoriel en termes de théorie des groupes. Non seulement Weyl établit une correspondance étroite entre les représentations de certains groupes continus et les représentations du groupe symétrique, mais de plus la théorie des représentations de groupes lui permet d'envisager le calcul tensoriel à nouveaux frais.

Nous pouvons maintenant comprendre comment et de quelle manière Weyl réoriente ses recherches en théorie des groupes et des représentations de groupes — qu'ils soient finis ou continus — à partir de 1924. Si l'on jette un regard rétrospectif sur les diverses éditions de *Raum, Zeit, Materie*, on observe que Weyl introduit le calcul tensoriel dans la mesure où il

91. la représentation triviale ρ_1 est définie par $\rho_1(\sigma)(v) = v$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_2$ et pour tout vecteur v de $\mathbb{C}$; la représentation alternée ρ_2 est définie par $\rho_2(\sigma)(v) = \varepsilon_\sigma \cdot (v)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_2$ et pour tout $v \in \mathbb{C}$, $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ désignant la signature de σ.

s'agit d'un outil essentiel pour formaliser la relativité générale. En particulier, les lois de la nature s'expriment dans cette théorie comme des *relations* entre tenseurs qui doivent être généralement covariantes par le groupe des difféomorphismes d'espace-temps. Par ailleurs, entre 1921 et 1923, Weyl utilise spécifiquement la théorie des groupes et des algèbres de Lie linéaires pour résoudre le problème de l'espace.

Il ne faudrait pas croire qu'il s'intéresse spontanément à la théorie des représentations des groupes finis d'une part, à la théorie des groupes et des algèbres de Lie d'autre part, après découverte des articles de Frobenius et de Cartan mentionnés. Tout d'abord, il convient d'être attentif aux médiations qui permettent à Weyl de prendre connaissance de ces travaux. Il mentionne la thèse de Cartan et l'article de 1913 que nous avons brièvement résumé dans sa *Mathematische Analyse des Raumproblems*. Nous avons montré par ailleurs que les principaux résultats de Frobenius en théorie des représentations des groupes finis sont abordés dans la monographie de Speiser (1923) qui est un collègue et ami de Weyl. Toujours est-il que Weyl commence réellement à s'approprier les travaux de Cartan et de Frobenius au moment de la rédaction de son article sur les fondements du calcul tensoriel, soit en 1924. Weyl officialise son intérêt pour la théorie des groupes auprès de l'ETH de Zürich au début de l'année 1924. Nous en voulons pour preuve le rapport datant du 25 janvier 1924 qu'il adresse au président de l'ETH pour décrire l'avancée de ses recherches au cours de l'année 1923. De plus, dans le rapport qu'il rédige l'année suivante et qui est daté du 12 janvier 1925, Weyl indique qu'il s'est consacré à la lecture des travaux de Cartan et qu'il a poursuivi ses recherches en théorie des groupes avec l'aide précieuse de Schur.[92] Schur l'incite en particulier à étudier dans le détail les articles de Frobenius sur les représentations des groupes finis afin de transposer les apports de celui-ci dans le cas des groupes continus. On peut donc dire que la théorie des groupes au sens large devient centrale dans l'œuvre de Weyl à partir de 1924. Son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples marque un point d'aboutissement dans cette *progressive* réorientation. Corrélativement, nous pouvons dire qu'il n'y a pas de rupture massive dans le parcours mathématique de Weyl entre 1923 et 1925.

92. H. Weyl, lettres au président de l'ETH de Zürich datant respectivement du 25 janvier 1924 et du 12 janvier 1925, reproduite dans G. Frei et U. Stammbach, *Hermann Weyl und die Mathematik an der ETH Zürich*, 1913-1930, Berlin, Basel, Boston, Birkhäuser, 1992, p. 62 et 64.

1.3 Le « truc unitaire » de Hurwitz

Nous avons déjà montré dans les deux paragraphes précédents que Weyl s'approprie des traditions disciplinaires différentes et qu'il combine des champs théoriques relativement distincts lorsqu'il se réfère tantôt à Cartan, tantôt à Frobenius dans son article de 1925-1926. Cet argument est assurément confirmé lorsque l'on s'intéresse à la manière dont Weyl investit les deux principales publications de Hurwitz en théorie des invariants à la fin du XIX^{e} siècle, à savoir « Zur Invariantentheorie » (1894) et « Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration » (1897).

Quelques éléments biographiques méritent préalablement d'être évoqués à propos de Hurwitz. Celui-ci effectue sa thèse sous la direction de F. Klein à l'université de Leipzig. Hurwitz suit notamment les cours de Klein sur les surfaces de Riemann que nous avons commentés dans notre première partie. Cette donnée n'est pas anecdotique. En effet, dans ce cours Klein établit que le groupe d'automorphismes d'une surface de Riemann compacte connexe de genre $g \geqslant 2$ est fini. Hurwitz affine ce résultat en lui assignant une borne par des arguments de nature purement topologique en 1893 : le nombre d'automorphismes d'une surface de Riemann compacte connexe de genre $g \geqslant 2$ ne peut pas excéder $84(g-1)$.[93] Pour $g = 2$, cette borne n'est jamais atteinte. pour $g = 3$ elle l'est, comme en témoigne l'exemple de la quartique de Klein. De plus, Hurwitz travaille sur les fonctions modulaires dans le cadre de sa thèse. Il prolonge alors la théorie des fonctions modulaires que Klein développe entre 1879 et 1884. Il se situe donc dans une tradition kleinéenne. À partir de 1884, Hurwitz fait la connaissance de Hilbert et de Minkowski à Königsberg. Il entretiendra des liens intellectuels durables avec ces derniers. En effet, à partir de 1892, Hurwitz exerce à l'ETH de Zürich, il occupe la place laissée vacante par Frobenius. En 1896, Minkowski le rejoint avant d'être appelé par Hilbert et Klein à Göttingen en 1902. Dans sa correspondance avec Hilbert, Minkowski insiste sur le fait qu'il travaille alors en étroite collaboration avec Hurwitz. Corrélativement, ce dernier entend prolonger les travaux de Hilbert en théorie des invariants à partir des années 1890. Minkowski signale à Hilbert l'intérêt et la portée des recherches réalisées par Hurwitz dans ce domaine, avant même que ce dernier ne communique directement ses résultats à Hilbert en 1896. Précisons enfin que Hurwitz demeure à l'ETH jusqu'à sa mort en 1919. Cette donnée factuelle n'est pas anodine, puisque Weyl est recruté comme professeur à l'ETH en 1913.

93. A. Hurwitz, « Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich », *mathematische Annalen*, **41**, (1893), p. 403-442. Hurwitz précise qu'il va d'abord démontrer à nouveaux frais qu'une surface compacte connexe de genre $g \geqslant 2$ n'admet qu'un nombre fini d'automorphismes avant de prouver qu'elle en a au plus $84(g-1)$.

D'ailleurs en 1917-1918, Weyl effectue des cours en commun avec Hurwitz, essentiellement en géométrie, en géométrie analytique et en théorie des surfaces.

Dans les deux articles que nous avons mentionnés, Hurwitz entend réformer la théorie des invariants et développer une méthode par intégration pour déterminer les invariants engendrés par certains groupes continus de transformations, à savoir le groupe des rotations $\mathrm{SO}(n)$ et le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Dans ce dernier cas, Hurwitz montre qu'il est nécessaire de se restreindre au cas unitaire, c'est-à-dire au groupe $\mathrm{SU}(n)$ pour que la méthode dite par intégration puisse être appliquée. [94] Il s'appuie de manière *incidente* sur les travaux que Lie et Engel consacrent aux groupes continus de transformations. En outre, il est inexact de dire que l'article de 1897 anticiperait sur la théorie des représentations des groupes topologiques compacts. En effet, en 1897 la théorie des représentations des groupes *finis* n'en est qu'à ses prémisses, il faudra attendre les années 20 pour qu'elle se prolonge à certains groupes de Lie. Voilà pourquoi, on peut dire que les travaux de Hurwitz (1894,1897) dépendent d'une tradition disciplinaire et d'un champ théorique spécifiques, à savoir la théorie des invariants qu'il soumet à une série de reconfigurations sur lesquelles nous reviendrons. Sa méthode par intégration, dont nous préciserons le sens, ne demeure pas inconnue du public jusqu'en 1924. Elle est brièvement évoquée avec enthousiasme par W. Fr. Meyer dans l'article qu'il consacre en 1899 à la théorie des invariants dans l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* [95] En outre, au cours de sa notice nécrologique sur Hurwitz, Hilbert insiste également sur l'article de 1897 dans la mesure où Hurwitz y démontre le théorème de finitude pour les invariants du groupe spécial orthogonal. [96]

Les méthodes de Hurwitz sont donc relativement bien connues en théorie des invariants. Insistons de nouveau sur le fait que Weyl côtoie Hurwitz à l'ETH de Zürich avant que ce dernier ne décède en 1919. Il semblerait que l'on ait là deux données suffisantes pour expliquer l'intérêt que Weyl attache aux méthodes de Hurwitz dans ses travaux de 1925-1926 sur les groupes de Lie. Pourtant, ses propres témoignages ne vont pas dans ce sens. À plusieurs reprises, Weyl insiste sur le fait qu'il s'approprie certains articles de Hurwitz à la suite des travaux que Schur consacre aux représentations du groupe spécial orthogonal et du groupe orthogonal en 1924. Par exemple dans les notes qu'il rédige pour préparer son cours de 1934 sur les groupes de Lie, Weyl écrit en particulier : « I. Schur first applied Hurwitz's

94. En effet, les intégrales considérées par Hurwitz ne convergent pas sur $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, dans la mesure où ce groupe n'est pas compact.

95. W. Fr. Meyer, *Invariantentheorie* (1899), in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* I.1., Leipzig, éd. Teubner, 1898-1904, p. 346.

96. D. Hilbert, « Adolf Hurwitz », in *mathematische Annalen*, **83**, 1921, p. 164.

(...) tool of integration to the problem of representation of groups in 1924 and I myself followed in his steps ≫.[97] Ainsi, Schur constitue un intermédiaire tout à fait essentiel pour expliquer comment Weyl s'approprie les résultats et méthodes de Frobenius, mais également de Hurwitz.

En 1925-1926, Weyl réalise un véritable coup de force puisqu'il déplace la méthode par intégration et l'astuce unitaire de Hurwitz dans le cadre de la théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Elles lui permettent de prouver le théorème de complète réductibilité d'abord pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, avant de l'étendre à tout groupe de Lie complexe semi-simple. Il fait même plus : il entend subordonner la théorie des invariants à la théorie des représentations de groupes, comme en atteste le dernier paragraphe du chapitre IV de son article.

Dans un premier temps, nous montrerons que Hurwitz accorde une place centrale aux groupes linéaires de transformations en théorie des invariants. Dans un second temps, nous verrons qu'un raisonnement par analogie le guide pour constituer sa méthode par intégration : la méthode par intégration est aux invariants engendrés par des groupes continus de transformations, ce que la méthode par sommation est aux invariants engendrés par des groupes discrets, finis ou infinis.

1.3.1 Théorie des invariants et groupes de transformations

Dans ce paragraphe, nous ne prétendons pas commenter de manière exhaustive l'article de Hurwitz intitulé ≪ Zur Invariantentheorie ≫. Nous entendons seulement montrer comment il réforme le sens et la portée du concept d'≪ invariant ≫. Cette réforme n'est d'ailleurs pas seulement conceptuelle, elle est également théorique, dans la mesure où l'étude systématique de certains groupes *continus* de transformations doit se situer au cœur de la *théorie* des invariants. Hurwitz prolonge et radicalise un point de vue que Klein avait déjà mis en exergue dans des situations particulières et exclusivement pour des groupes finis.[98] Hurwitz constate que la théorie des invariants est généralement assujettie à la théorie des formes. On se donne un polynôme F homogène à n variables, de degré m et à coefficients complexes. Selon Hurwitz, les mathématiciens ne considèrent pas d'abord les invariants de F comme des expressions en les coefficients de F qui demeurent invariantes par des transformations de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ ou

97. H. Weyl, ≪ Struktur und Darstellung Continuierlicher Gruppen, Princeton 1934 ≫, manuscrit sur cahier petit format en préparation du cours et au fascicule intitulé *The structure and representation of continuous groups*, *ETH-Bibliothek*, Hs : 91a 52. Le passage en question se trouve à la page 7 du cahier.

98. Voir la sous-section 2.2.1 (première partie) de la présente thèse.

de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, ils recherchent avant tout un système de *formes* en nombre fini telles que tout invariant de F s'exprime comme somme de produits de puissances de ces mêmes formes. Hurwitz songe sans doute ici à Gordan et dans une moindre mesure à Hilbert. Pour Gordan, la théorie des invariants serait donc avant tout une théorie des formes. De ce point de vue, la théorie des groupes finis ou continus de transformations ne jouent qu'un rôle incident. À l'encontre de Gordan, Hurwitz montre que la construction même du concept d'invariant est fondée sur la notion de groupe de transformations linéaires. La conséquence théorique est immédiate : la théorie des groupes prend le pas sur la théorie des formes, le problème étant maintenant de déterminer quels sont les invariants engendrés par un groupe de transformations donné. C'est ce que confirme le paragraphe qui marque le début de l'article intitulé « Zur Invariantentheorie » :

> Il ne me paraît pas pertinent de relier d'emblée le concept d'invariant à l'examen des formes, comme cela se produit trop souvent. En effet, en un certain sens, le concept d'invariant ne dépend qu'indirectement des formes, celles-ci servant uniquement à caractériser les transformations linéaires des arguments de l'invariant par rapport auxquelles celui-ci possède sa propriété d'invariance. Les transformations linéaires constituent l'élément fondamental de la construction conceptuelle. Puisque chaque transformation linéaire de déterminant non nul se décompose en une transformation unimodulaire (c'est-à-dire de déterminant 1) et en une transformation qui consiste en la multiplication de toutes les variables par un même facteur, alors il suffit de considérer seulement les transformations unimodulaires tant que l'on se restreint aux fonctions homogènes. [99]

Contrairement à Gordan, qui prévilégie une approche résolument combinatoire et calculatoire en théorie des invariants, Hurwitz insiste sur la « formation du concept » d'invariant [Begriffsbildung]. Il opère une hiérarchie conceptuelle au profit des groupes de transformations linéaires qui seuls donnent un sens précis à la notion d'invariant. La recherche de « systèmes de formes » — en nombre fini — selon l'expression consacrée par Gordan est assujettie à une détermination précise des groupes de transformations linéaires opérant sur les variables d'un polynôme homogène donné. Par extension, l'importance que Hurwitz accorde à la formation des concepts en mathématiques n'est pas sans incidence sur un plan épistémologique. En effet, dans une série de conférences prononcées à Göttingen en 1919-1920, Hilbert mettra en avant une mathématique conceptuelle [begriffliche mathematik], qu'il distingue à la fois d'une conception calculatoire et d'une vision formaliste des mathématiques comme manipulation de symboles vides de sens. Il nous paraît pertinent de soutenir que le début de l'article de Hurwitz est conforme à cette *begriffliche Mathematik*. Non seulement il montre

99. A. Hurwitz, « Zur Invariantentheorie », *Math. Ann.*, **45** (1894), p. 381.

comment hiérarchiser les concepts de manière à ce qu'ils s'engendrent les uns les autres de manière nécessaire, mais de plus une telle reconfiguration conceptuelle lui permet de formuler des problèmes et des méthodes inédits, centrés sur l'étude de certains groupes linéaires de transformations.

De manière subsidiaire, dans le passage que nous avons traduit, Hurwitz indique pourquoi il privilégie le groupe unimodulaire — c'est-à-dire le groupe spécial linéaire — en théorie des invariants. Le groupe spécial linéaire nous fournit les invariants absolus d'un polynôme homogène.[100] Nous verrons cependant que la méthode intégrale proposée par Hurwitz affronte un obstacle de taille : elle semble *a priori* ne pas pouvoir s'appliquer à $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Le « truc » unitaire permet de contourner cette difficulté. La reformulation du concept d'invariant opérée par Hurwitz se poursuit en ces termes :

> On pourra formuler le concept d'invariant d'une manière qui comprend toutes les constructions utilisées en théorie des formes comme suit :
>
> *Soient a, b, ..., l plusieurs — disons r — systèmes de variables. Donnons-nous en outre r transformations unimodulaires A, B, ..., L attachées respectivement à chacun de ces systèmes. Une fonction rationnelle entière* $J(a, b, ..., l)$ *en chacun des systèmes de variables est dite un invariant du système de transformations* $(A, B, ..., L)$ *si l'égalité :*
>
> $$J(a, b, ..., l) = J(a', b', ..., l')$$
>
> *est identiquement valable en les variables* a'*,* b'*, ...,* l'*, à supposer que les a (resp. les b, etc.) résultent des* a' *(resp. des* b'*, etc.) par la transformation A (resp. B, etc.).*[101]

Dans son article de 1925-1926, Weyl ne se contente pas d'utiliser le « truc » unitaire de Hurwitz afin de prouver le théorème de complète réductibilité — d'abord dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, ensuite pour tout groupe de Lie complexe semi-simple —; il prolonge la réforme de la théorie des invariants amorcée ici par Hurwitz. Il montre en effet que la théorie des invariants doit être assujettie à la théorie des groupes ou, pour être plus précis, à la théorie des représentations de groupes. De plus, il généralise la méthode transcendante par intégration de Hurwitz à tout groupe de Lie complexe semi-simple :

> Hurwitz a inventé la *méthode par intégration* à cette fin [pour engendrer les invariants associés à un groupe de transformations donné]. Nous reconnaissons maintenant la portée de cette méthode : elle nous conduit à ce but non seulement pour le groupe projectif et le groupe orthogonal auxquels Hurwitz l'a seulement restreinte, mais aussi *pour tous les groupes semi-simples*. Elle témoigne ainsi de sa suprématie par rapport aux méthodes purement algébriques,

100. En effet, soit F un polynôme homogène à coefficients complexes de degré n et à m variables, un invariant absolu de F est une expression en les coefficients de F qui demeure invariante par les transformations linéaires de déterminant 1 opérant sur les m variables de F.

101. *ibid.*, p. 381.

> qui font intervenir des processus de différenciation, à l'image de l'Ω-processus de Cayley. *Pour la première fois, un cadre d'application de la théorie des invariants est déterminé de manière naturelle grâce à la théorie des groupes.* [102]

Ce passage nous permet tout d'abord de rejeter une inexactitude historique : la théorie des invariants n'a pas brusquement disparu au profit d'une algèbre des structures à la suite de la série d'articles publiés par Hilbert à la fin des années 1880 et au début des années 1890. En réalité, on observe une refonte de la théorie des invariants dont les principaux acteurs sont donc Hurwitz et, plus tardivement, Schur ainsi que Weyl. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, la prévalence du concept de groupe en théorie des invariants ne signifie pas qu'une approche algébrique structurale viendrait se substituer brutalement à une approche algébrique plus combinatoire et calculatoire. En effet, les méthodes introduites par Hurwitz et généralisées par Weyl ne sont pas algébriques du tout, quand bien même elles sont centrées sur l'étude de certains groupes de transformations. elles sont transcendantes et elles présupposent des réflexions sur les propriétés topologiques des groupes continus étudiés. En particulier, la question de savoir s'ils sont compacts est déterminante. La prévalence que Hurwitz et Weyl accordent à la théorie des groupes sur la théorie des invariants ne doit donc absolument pas s'interpréter en fonction d'une histoire linéaire des mathématiques qui les rattacherait à marche forcée à l'émergence des mathématiques structurales ou au développement de l'algèbre abstraite. Dans son article de 1925-1926, Weyl montre justement que l'on peut concevoir la théorie des groupes continus de transformations d'un point de vue qui n'est pas algébrique aux deux sens du termes, c'est-à-dire au sens d'une approche combinatoire à l'image des travaux de Cayley et de Gordan, mais aussi au sens d'une approche structurale à l'image des articles de Noether visant à reformuler le théorème de la base finie de Hilbert dans le langage de la théorie des idéaux.

1.3.2 Méthode intégrale et raisonnement par analogie chez Hurwitz

Nous entendons montrer que Hurwitz s'appuie sur un raisonnement par analogie pour élaborer la méthode intégrale qui lui permet d'engendrer les invariants attachés à un groupe continu de transformations — il s'agit pour l'essentiel des groupes $\mathrm{SO}(n)$ et de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. L'intérêt que nous accordons à l'analogie chez Hurwitz suppose de clarifier notre approche. Lorsque l'on adopte un point de vue exclusivement *normatif*, on est tenté de considérer l'analogie comme un raisonnement défectueux qui n'a donc pas sa place dans une théorie bien

102. H. Weyl, ≪ Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen III ≫, *mathematische Zeitschrift*, **24**, p. 392.

constituée. C'est ce que soutient justement Blanché dans son ouvrage intitulé *Le Raisonnement* :

> [le] caractère foncièrement subjectif et incontrôlable de l'analogie lui retire toute portée cognitive. [103]

L'analogie serait donc arbitraire en ce qu'elle ne serait assortie d'aucune garantie en termes d'objectivité et de certitude. L'argument de Blanché exclut donc l'analogie du champ des raisonnements rigoureux. Mais l'auteur nous dit plus : elle ne peut pas et elle ne doit pas être productrice de connaissances. Nier toute « portée cognitive » à l'analogie, c'est donc affirmer qu'elle n'a pas à intervenir dans la pratique scientifique. Non seulement elle n'est pas légitime en *droit*, mais de plus elle ne saurait être intégrée de *fait* à la démarche du scientifique, même à titre transitoire. On peut donc dire que Blanché assujettit la pratique scientifique à une norme de scientificité qui exclut tout recours à l'analogie et au raisonnement par analogie. Plus profondément, il conçoit la *construction* d'une théorie scientifique à la lumière de ce qu'elle doit être une fois qu'elle est *constituée*. Or, il nous semble justement que l'analogie a une fonction heuristique indéniable dans la production de concepts, de problèmes et de méthodes inédits en mathématiques. Elle fait donc partie intégrante de la pratique mathématicienne, y compris lorsqu'elle porte sur des objets abstraits. En outre, loin de l'utiliser de manière totalement arbitraire, les mathématiciens font généralement un usage *contrôlé* de l'analogie. Pour le dire autrement, l'analogie n'est pas *en elle-même* incontrôlable, contrairement à ce que laisse entendre Blanché. Nous faisons donc nôtre l'argument de M.-J. Durand-Richard selon lequel

> C'est donc plutôt dans la plasticité d'une science envisagée dans ses pratiques que le recours à l'analogie peut être pleinement reconnu, puisqu'il fait partie des tentatives visant à intégrer de nouvelles perspectives au champ des connaissances acquises, à la fois en amont et en aval du processus de théorisation scientifique. [104]

Pour le dire en termes plus précis, l'analogie permet au scientifique d'appréhender une situation *inconnue* en la comparant à une situation qui lui est familière ou connue. Par exemple, Hurwitz reconnaît l'importance du processus de sommation pour engendrer les invariants attachés à un groupe discret, fini ou infini, de transformations. L'intégration doit donc être analogue à la sommation dans le cas des groupes continus. Lorsque l'on s'intéresse exclusivement à une théorie constituée, des conséquences prévisibles peuvent être déduites à partir de

103. R. Blanché, *Le Raisonnement*, Paris, P.U.F., 1973, p. 180.
104. Marie-José Durand-Richard (sous la dir. de), *L'analogie dans la démarche scientifique*, Paris, éd. de L'Harmattan, 2008, p. 4.

principes connus et bien établis ; mais il n'en va pas de même lorsqu'un cadre théorique est en cours d'élaboration : il est alors nécessaire d'appréhender une situation ou un objet qui nous échappent au moins en partie. Seule l'analogie rend alors l'inconnu commensurable au connu. Non seulement elle sert de guide pour prédire un certain résultat, mais de plus elle nous aide à esquisser les grandes lignes du raisonnement qui nous permettra d'y parvenir. Cet argument s'applique non seulement à Hurwitz, mais également à Weyl. En effet, ce dernier prédit que le théorème de complète réductibilité s'applique non seulement à $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, mais également à tout groupe de Lie complexe semi-simple, ce qui nous renvoie à une situation autrement plus difficile à appréhender. De plus, il estime que l'on peut construire l'exact analogue de la méthode de la restriction au cas unitaire lorsque l'on raisonne sur un groupe de Lie complexe semi-simple arbitrairement donné. Aussi l'analogie participe-t-elle à la production d'hypothèses inédites tout en nous donnant les moyens d'esquisser la démonstration qui servira à les prouver.

Venons-en plus précisément à l'article de Hurwitz intitulé « Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration » pour vérifier notre propos. Hurwitz commence donc par décrire une situation connue, à savoir l'engendrement des invariants attachés à un groupe fini de transformations linéaires au moyen d'un processus de *sommation* :

> Étant donné un groupe fini de substitutions discrètes opérant sur les variables x_1, x_2, ..., x_n, il existe dès lors un procédé simple pour produire tous les invariants de ce groupe. On applique en effet à une fonction quelconque $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ l'ensemble des substitutions du groupe et l'on forme ensuite la somme de toutes les fonctions ainsi engendrées. Cette somme représente un invariant du groupe et, à vrai dire, le plus général, puisqu'un invariant quelconque $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ peut toujours être obtenu en supposant
>
> $$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{r}\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$$
>
> où r désigne le nombre de substitutions contenues dans le groupe. Comme on le sait, on peut construire de manière similaire les invariants des groupes discrets infinis. [105]

Précisons son propos. Soient donc G un groupe fini de transformations linéaires de cardinal $|G|$ agissant sur $\mathbb{C}^n$ et P un polynôme sur $\mathbb{C}^n$, le polynôme P^* défini par

$$P^* = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} P(g^{-1} \cdot x), \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

est un invariant de G. Le facteur $\frac{1}{|G|}$ implique que, si P est un invariant de G, alors $P^* = P$. Dans le cas d'un groupe continu de transformations, Hurwitz montre que la sommation doit être remplacée par l'intégration en fonction d'une mesure invariante par translation :

105. A. Hurwitz, « Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration », *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, (1897), p. 71.

> J'ai eu l'idée de transposer ce procédé, qui se présente pour ainsi dire de lui-même afin de produire des invariants, aux groupes continus ; dans ce cas des intégrales interviennent naturellement en lieu et place des sommes. [106]

Hurwitz ne considère pas l'intégration sur certains groupes continus de transformations comme une fin en soi. Pour le dire autrement, l'intégration sur des groupes — supposés compacts, sans quoi nous avons affaire à une intégrale divergente — ne constitue pas pour Hurwitz un domaine théorique à part entière, mais seulement une *méthode* fructueuse qu'il applique d'abord à $\mathrm{SO}(n)$ et qu'il étend ensuite à $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Ce dernier cas est moins évident, puisqu'il implique de se restreindre à $\mathrm{SU}(n)$ pour engendrer les invariants de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Avant d'expliciter cette méthode dans une situation élémentaire — à savoir pour le groupe SU_2 — nous pouvons observer qu'une analogie oriente bel et bien les recherches de Hurwitz en théorie des invariants. En effet, à aucun moment il ne propose une *axiomatisation* de l'intégrale qu'il définit sur un groupe compact. Il se contente d'affirmer que l'intégration est à des groupes continus de transformations ce que la sommation est aux groupes discrets de transformations. Cependant, il effectue un usage parfaitement contrôlé d'une telle analogie. Il détermine les conditions de nature topologique qui rendent cette méthode intégrale possible : elle ne peut pas s'appliquer arbitrairement et donc sans restriction à n'importe quel groupe continu de transformations. Il faut que le groupe en question soit compact. Bref, bien que dans cet article Hurwitz n'adopte pas un modèle de raisonnement hypothético-déductif fondé sur la méthode axiomatique, il n'en demeure pas moins que les résultats auxquels il parvient n'ont rien d'arbitraire : la méthode intégrale ne peut pas s'étendre directement à $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, dans la mesure où $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ n'est pas compact. Mais il s'avère que les invariants de ce groupe sont essentiellement ceux de l'un de ses sous-groupes qui pour le coup est compact, à savoir $\mathrm{SU}(n)$. La méthode intégrale peut être utilisée *médiatement* pour engendrer les invariants de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, à condition de se restreindre au groupe spécial unitaire. Ainsi, l'analogie permet d'appréhender une situation inconnue — ici la construction des invariants d'un groupe de Lie — à partir d'une situation connue, mais de plus elle s'entoure de précautions méthodologiques.

Tentons de comprendre la méthode intégrale de Hurwitz en nous appuyant sur un exemple élémentaire qui intervient dans l'article de Hurwitz et que A. Borel formule de manière modernisée. [107] Considérons le groupe $\mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SL}(2, \mathrm{C})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices

106. *ibid.*, p. 71.

107. A. Borel, *Essays in the History of Lie groups, and algebraic groups*, *American Mathematical Society*, *London Mathematical Society*, History of mathematics **21**, 2001, p. 12-14.

carrées 2×2 à coefficients complexes de déterminant 1 et satisfaisant à la relation :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

À partir de cette relation, on peut aisément en inférer que

$$c = -\overline{b}, \quad d = \overline{a}.$$

On a donc :

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

En posant $a = x_1 + ix_2$ et $b = x_3 + ix_4$, on remarque que le groupe SU(2) est isomorphe à la sphère unité de dimension 3

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ (x_1, ..., x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1^2 + ... + x_4^2 = 1 \right\}.$$

On peut donc paramétrer ce groupe par les angles d'Euler :

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\psi \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta \\ x_2 &= \cos\psi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta \\ x_3 &= \cos\psi \cdot \sin\varphi \qquad\qquad (|\varphi|, |\psi| \leqslant \pi/2, \theta \in [0, 2\pi]) \\ x_4 &= \sin\psi. \end{aligned}$$

La mesure $\mathrm{d}v = \cos\psi \cdot \cos\varphi \cdot \mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$ est invariante par translations, le volume de $\mathbb{S}^3$ par rapport à $\mathrm{d}v$ est 8π. Soit P un polynôme sur $\mathbb{C}^N$. L'intégration sur SU(2) permet de construire le polynôme P^* tel que

$$P^*(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi \cdot d\psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\varphi \cdot d\varphi \int_0^{2\pi} P(g^{-1} \cdot x)\mathrm{d}\theta$$

avec $x \in \mathbb{C}^N$ et $g \in \mathrm{SU}(2)$. Le polynôme P^* est invariant sous l'action du groupe SU(2). Dans son article de 1897, Hurwitz étudie d'ailleurs l'exemple de SU(2), [108] après avoir appliqué la méthode intégrale à SU(n) en général. Il montre d'ailleurs que les invariants de SU(n) sont essentiellement ceux de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Ce résultat donne son sens et sa portée à la restriction au cas unitaire. En effet, la méthode intégrale, que Hurwitz applique d'abord au groupe des rotations SO(n), est mise en défaut lorsqu'il essaie de l'étendre directement à $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Il identifie un sous-groupe continu de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ sur lequel il est possible de pratiquer la méthode intégrale. Il choisit donc SU(n) et il démontre ensuite l'implication : si un polynôme P^* est

108. *ibid.*, p. 84 et suiv.

un invariant de $\mathrm{SU}(n)$, alors c'est un invariant de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, la réciproque étant évidente. Un schéma de démonstration similaire interviendra dans la première partie de l'article de Weyl de 1925. Il ne semble pas possible de démontrer directement que le théorème de complète réductibilité s'applique à $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. L'objectif de Weyl consiste tout d'abord à prouver que ce théorème est vérifié lorsque l'on se restreint à $\mathrm{SU}(n)$. Il utilise à cette fin la méthode intégrale de Hurwitz. Il démontre ensuite l'implication : si toute représentation de dimension finie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(n)$ de $\mathrm{SU}(n)$ est complètement réductible, alors il en va de même pour $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. D'une manière synthétique, nous pouvons dire que Weyl et Hurwitz emploient une même méthode, ils utilisent des schémas de démonstration qui admettent des similitudes frappantes. Cependant, ils ne raisonnent pas exactement à partir des mêmes cadres théoriques et ils produisent des théorèmes distincts.

Hurwitz demeure donc essentiellement attaché à la théorie des invariants qu'il réforme cependant de manière saisissante. Les problèmes qu'il formule et qu'il tente au moins partiellement de résoudre appartiennent de plain-pied à cette même théorie. Ils se situent dans le prolongement des travaux de Hilbert, quand bien même les méthodes utilisées par Hurwitz sont inédites. Un exemple permet d'illustrer ce point. Hurwitz cherche notamment à prouver le théorème de la base finie de Hilbert pour $\mathrm{SO}(n)$, ce qui revient à montrer que l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{C}^N$ invariants par $\mathrm{SO}(n)$ est finiment engendré. Hurwitz s'appuie sur la méthode intégrale pour résoudre cette difficulté qui relève explicitement de la théorie des invariants. La méthode intégrale constitue d'ailleurs une clé pour prouver le théorème de la base finie de Hilbert dans le cas de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Elle entre en concurrence avec les procédés plus algébriques et fondés sur l'usage d'un opérateur différentiel qui interviennent dans la preuve du théorème de la base finie pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ telle qu'elle est proposée par Hilbert. Weyl s'appuie sur la méthode de Hurwitz pour montrer que les invariants associés à tout groupe de Lie complexe semi-simple sont finiment engendrés. Weyl prolonge dans une certaine mesure les travaux de Hurwitz en théorie des invariants ; il ne faut néanmoins pas manquer de préciser que Weyl raisonne pour l'essentiel dans le cadre de la théorie des représentations de groupes, ce qui n'est pas le cas de Hurwitz.

Dans son article, Hurwitz ne se contente pas d'appliquer la méthode intégrale aux deux exemples que sont $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, il conjecture qu'elle peut se généraliser à d'autres groupes de Lie. Cette conjecture ne restera pas lettre morte. En effet, dans son article de 1925-1926 Weyl étend la méthode intégrale de Hurwitz aux groupes de Lie complexes semi-simples. De plus, il prouve le théorème de complète réductibilité pour tous les groupes de ce type en s'appuyant sur le « truc » unitaire de Hurwitz. Enfin, il montre qu'en théorie des

invariants, la méthode transcendante et intégrale de Hurwitz surpasse la méthode algébrique et différentielle de Cayley et Hilbert.

1.4 Conclusion du premier chapitre

Au terme de notre analyse des travaux de Cartan, Frobenius et Hurwitz, nous pouvons faire une première observation : Weyl utilise des sources qui n'appartiennent ni aux mêmes traditions, ni aux mêmes cadres théoriques. Nous avons souligné dès notre introduction qu'il s'agit là d'une constante dans son œuvre. En outre, nous avons décrit à quelles conditions il s'approprie les travaux de ces trois protagonistes. (1) Les relations d'interdépendance entre Cartan et Weyl sont très étroites au cours des années 20 mais c'est seulement en 1924 que Weyl reprend à son compte les contributions de Cartan dans l'étude des algèbres de Lie. (2) La théorie des représentations des groupes finis est résumée dans les monographies de Burnside (1911) et de Speiser (1923) sur les groupes finis que Weyl a consultées. Mais la correspondance Schur / Weyl est déterminante pour expliquer pourquoi ce dernier attache autant d'importance à la relecture des articles de Frobenius. (3) De même, Weyl investit les articles de Hurwitz en théorie des invariants par l'intermédiaire de Schur. Nous prenons ainsi conscience de la complexité des médiations qui président à l'utilisation de telles sources. Mais de plus, Weyl n'est pas passivement influencé par ces trois auteurs. Par exemple, il traduit explicitement les travaux de Cartan et de Hurwitz dans le cadre de la théorie des représentations de groupes. De plus, il a systématiquement recours à des concepts relevant de l'algèbre linéaire pour « homogénéiser » ces diverses références.

Enfin, Weyl est loin de s'approprier exclusivement des *résultats* parmi ces trois mathématiciens. Il reprend à son compte des concepts et des méthodes qu'il spécifie, qu'il compare et qu'il différencie. Par exemple, la méthode de Cartan est dite algébrique et infinitésimale pour la raison suivante : Cartan s'intéresse essentiellement au groupe *infinitésimal* d'un groupe de Lie G, c'est-à-dire l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G qui correspond à l'espace tangent en l'identité de G. Or, une algèbre de Lie admet des propriétés essentiellement algébriques et elle permet en retour de nous donner des informations sur le groupe de Lie G par des méthodes purement algébriques. En revanche, la méthode de Hurwitz est topologique et intégrale, puisqu'il s'agit d'intégrer sur un groupe de Lie, ce qui suppose d'être attentif à ses propriétés topologiques globales. Le but de Weyl consiste à *dialectiser* ces deux méthodes.

Il nous semble donc essentiel de mesurer les écarts entre des textes scientifiques qui comportent essentiellement les mêmes résultats. Ces écarts se situent au niveau des concepts,

du langage scientifique et des méthodes employés. Inversement, on peut mettre au jour des similitudes profondes — méthodes identiques, schémas de démonstrations comparables — entre des textes scientifiques qui n'aboutissent pas aux mêmes résultats et qui ne relèvent pas exactement du même cadre théorique. C'est exactement ce que l'on peut observer lorsque l'on compare l'article de Hurwitz (1897) et celui de Weyl (1925-1926). Au final, on pourrait presque dire que les travaux de Weyl sont plus proches de ceux de Hurwitz que de ceux de Cartan. Cette assertion n'a rien d'arbitraire : la correspondance qu'entretiennent Weyl et Cartan en 1925-1926 témoigne en faveur de divergences méthodologiques importantes, quand bien même ils s'intéressent à un même objet, à savoir la théorie des représentations des groupes et des algèbres de Lie complexes semi-simples. Ainsi se confirme l'idée selon laquelle l'histoire des sciences ne saurait être une simple histoire de résultats scientifiques. Non seulement ces derniers ne constituent pas le seul critère pour comparer des textes scientifiques, mais de plus ils ne sont pas toujours un critère pertinent pour saisir les similitudes et les différences entre ces mêmes textes.

Cela posé, pour en revenir à Weyl, on peut observer le processus suivant dans l'élaboration de son article de 1925-1926 : (1) diversification des sources utilisées, (2) traduction de ces sources dans un langage approprié qui permet de les faire tenir ensemble, (3) comparaison des méthodes qui en sont issues pour dégager leurs mérites respectifs, mais aussi leurs limites, (4) dialectisation de ces méthodes pour produire des mathématiques nouvelles. C'est ce que nous entendons préciser dans le prochain chapitre.

Chapitre 2

L'article de Weyl de 1925-1926 : un exemple fondamental pour penser l'unité des mathématiques chez Weyl

Dans le chapitre précédent, nous avons insisté sur la diversité et l'hétérogénéité des sources utilisées par Weyl dans son article sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. De même, il combine différents cadres théoriques — théorie des invariants, théorie des groupes et des algèbres de Lie, théorie des représentations de groupes — et des champs disciplinaires distincts — algèbre, *analysis situs*, etc. Cependant, la structure de cet imposant article laisse apparaître certaines qualités formelles, voire esthétiques qui appartiennent au vocabulaire de l'unité : la composition d'ensemble est parfaitement équilibrée, la montée en généralité s'effectue de manière progressive et elle est préparée par les exemples de certains groupes continus (représentations de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, de $\mathrm{SO}(n)$ et de $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$), les méthodes utilisées sont comparées les unes aux autres, afin que leurs mérites respectifs soient mis en lumière, Weyl n'hésitant pas à les faire converger. Ce sentiment d'unité doit trouver une justification épistémique forte. Deux problèmes méritent alors d'être résolus. (1) Qu'est-ce que Weyl entend unifier ? S'agit-il d'unifier des concepts, d'utiliser un langage mathématique plus cohérent, d'harmoniser des méthodes, ou de redéfinir les liens de dépendance entre certaines théories scientifiques ? (2) Quels sont les procédés ou les moyens auxquels Weyl a recours pour procéder à une telle unification ?

Dans l'article de Weyl, l'unité des mathématiques se joue à la fois au niveau des concepts, des méthodes utilisées et des théories investies. En effet, Weyl soumet les apports de Frobenius et de Cartan à un même langage mathématique centré sur le concept d'espace vectoriel, celui-

ci pouvant être enrichi au gré des objets considérés. Les représentations linéaires de groupes sont définies par la donnée d'un *espace vectoriel* et d'un morphisme de groupes ; les algèbres de Lie complexes sont des espaces vectoriels munis d'un crochet — une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G pouvant être considérée géométriquement comme l'espace tangent à G en l'identité de G —; les systèmes de racines sont envisagés comme un ensemble d'éléments contenus dans un espace euclidien. Nous ne pouvons pas dire que Weyl conçoit l'algèbre linéaire en et pour elle-même, par contre il s'agit bel et bien d'un pôle unificateur dans le traitement et la définition des concepts introduits par Weyl au cours de son article.

Il n'utilise pas une unique méthode ou un traitement uniforme ou homogène pour développer la théorie des représentations des groupes et des algèbres de Lie semi-simples : l'unité des mathématiques ne recouvre pas ici les notions d'*unicité* ou d'*uniformité*. Si nous voulons être exhaustifs, Weyl combine trois méthodes, qu'il parvient à harmoniser : (1) la méthode des poids qu'il emprunte à Cartan et qui permet de classer les représentations irréductibles inéquivalentes d'une algèbre de Lie semi-simple ; (2) la méthode de Frobenius, fondée sur la détermination explicite des caractères et des dimensions des représentations irréductibles inéquivalentes des groupes finis, l'idée étant de transposer cette méthode aux groupes de Lie ; (3) la méthode transcendante et intégrale de Hurwitz qui préside à la démonstration du théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ avant qu'elle ne soit étendue à tout groupe de Lie complexe semi-simple. Weyl saisit parfaitement ce qui singularise chacune de ces méthodes mais, dans le même temps, il les dialectise et il les fait converger. L'unité qui se dégage de cet article est donc *polyphonique*. Elle ne repose pas sur l'usage systématique d'une même méthode ou d'une unique approche qui serait déclinée en fonction des objets mathématiques considérés.

Enfin, il semble que la théorie des représentations de groupes ait un réel ascendant sur les autres théories convoquées par Weyl dans cet article, qu'il s'agisse du calcul tensoriel, de la théorie des groupes et algèbres de Lie ou de la théorie des invariants. Bref, les concepts et les propositions relevant des représentations de groupes jouent incontestablement un rôle unificateur même si, comme nous l'avons déjà souligné, l'article de Weyl ne se résume pas au théorème de complète réductibilité étendu aux groupes de Lie complexes semi-simples.

La question de l'*unité* des mathématiques mérite d'être corrélée à celle de la *généralité* si nous voulons problématiser avec rigueur notre commentaire de l'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples. Nous devons avoir trois données à l'esprit. (i) Weyl étudie une série de « cas » : $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ avant de présenter la théorie des groupes de Lie complexes semi-simples et de démontrer le théorème de complète réductibilité

en général. (ii) Il s'appuie sur des travaux antérieurs qui n'admettent pas le même niveau de généralité. Dans sa thèse (1894), Cartan traite les algèbres de Lie simples, semi-simples et résolubles en général. En revanche, Hurwitz n'applique sa méthode de restriction unitaire qu'à $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ et Schur s'en tient à une étude des représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(n)$ et de $\mathrm{O}(n)$. Weyl est amené à élever le point de vue intégral de Hurwitz et Schur au même niveau de généralité que celui de Cartan.

Mais l'unification de ces deux points de vue constitue un préalable pour étendre la méthode de restriction unitaire de Hurwitz à tout groupe de Lie complexe semi-simple. Voilà pourquoi, on peut parler d'une *généralisation par unification* dans l'article de Weyl de 1925-1926. Avant de parvenir à ce point, Weyl commence par se situer au niveau de généralité qui était celui de Hurwitz en 1897. En effet, la première partie de l'article de 1925-1926 est consacrée aux représentations de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Dans cette partie, Weyl aborde la théorie de Cartan en se restreignant donc à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Cependant, le groupe spécial linéaire n'est pas un cas particulier isolé. Il s'agit d'un paradigme à deux niveaux : (1) il permet déjà d'unifier les méthodes de Cartan et de Hurwitz-Schur. (2) Il constitue un point d'appui essentiel pour dessiner le schéma de démonstration que suivra Weyl dans sa preuve du théorème de complète réductibilité pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. Nous avons donc bien affaire à un exemple paradigmatique, c'est-à-dire à un cas particulier dont la fonction essentielle est de « dire » le général.

Mais, dans l'article de 1925-1926, l'accès au général ne s'effectue pas seulement en étudiant un exemple paradigmatique et en unifiant les méthodes de Cartan et de Hurwitz-Schur. Weyl s'appuie également sur la méthode axiomatique pour définir ce que sont généralement une algèbre de Lie, une algèbre de Lie simple ou encore une algèbre de Lie semi-simple. Voilà pourquoi, il est également question d'une *généralisation par abstraction* au sens où Weyl considère de tels concepts en s'abstrayant de la nature des objets auxquels ils renvoient. Nous avons donc trois modes d'accès à la généralité dans la série d'articles de 1925-1926. Nous les distinguons pour les besoins de l'analyse, mais en fait ils sont intimement corrélés : (i) le premier repose sur l'unification des méthodes de Cartan et de Hurwitz-Schur, (ii) le second consiste en l'étude d'un exemple paradigmatique, (iii) le troisième met en jeu un processus d'abstraction, fondé sur le recours à la méthode axiomatique.

Par extension, les rapports entre la généralité et l'unité sont tout à fait essentiels pour analyser la plupart des contributions de Weyl en mathématiques et en physique mathématique. La série d'articles de 1925-1926 confirment ce point. Un regard rétrospectif sur ses travaux antérieurs permet d'enrichir notre réflexion. Nous avons vu qu'en 1913, Weyl unifie les points

de vue de Riemann et de Weierstrass. Weyl utilise ainsi la méthode du prolongement analytique de Weierstrass pour construire les surfaces de Riemann *en général* au cours des §§ 1 à 3 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Il s'appuie ensuite sur la méthode axiomatique pour définir implicitement le concept de surface de Riemann (§ 7). L'axiomatisation de ce concept lui permet donc de dire en général ce qu'est une surface de Riemann en faisant abstraction de ses réalisations possibles. Bref, la généralisation par unification et la généralisation par abstraction sont déjà à l'œuvre dans *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Les questions de généralité et d'unité sont également essentielles lorsque Weyl participe à la mathématisation de la relativité générale, mais elles se posent d'une manière bien différente. En effet, Weyl commence par *généraliser* la géométrie riemannienne en mettant de côté le dernier élément de géométrie à distance qu'elle comportait — en géométrie riemannienne il doit toujours être possible de comparer les longueurs de deux vecteurs attachés à des points distincts d'une variété. Il rejette cette hypothèse restrictive au début de *Reine Infinitesimalgeometrie*. Il obtient ainsi une géométrie purement infinitésimale. Ce cadre géométrique plus général que la géométrie riemannienne [1] permet ensuite d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme. On a affaire ici à une généralisation par extension qui conduit à passer de la géométrie riemannienne à la géométrie weylienne. Cette généralisation conditionne en retour l'*unification* de deux théories physiques. Dans l'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples, les rapports entre généralité et unité sont assez similaires à ceux que l'on avait pu observer dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* : l'unification de deux méthodes constitue la clé pour parvenir à une théorie générale des groupes de Lie complexes semi-simples. Encore faut-il ne pas pousser trop loin cette analogie : en 1925-1926, Weyl s'appuie au surplus sur un exemple paradigmatique pour dessiner la preuve du théorème de complète réductibilité en général.

L'article de 1925-1926 constitue également une remarquable synthèse par rapport aux travaux antérieurs de Weyl. Ainsi, l'*analysis situs*, et plus particulièrement la théorie des revêtements qui jouait un rôle si important dans l'étude des surfaces de Riemann, est investie à nouveaux frais pour démontrer le théorème de complète réductibilité. Les contributions de Weyl en théorie des représentations de groupes ne sont pas non plus sans lien avec *Raum, Zeit, Materie*. En effet, au début de cet ouvrage, Weyl mesurait toute la pertinence du concept d'espace vectoriel qu'il emploie systématiquement dans l'article de 1925-1926. En outre, dans la première partie de *Raum, Zeit, Materie*, il s'intéressait de près au calcul tensoriel dont il recherche les ≪ fondements ≫ à partir de 1924-1925.

1. Les variétés riemmanniennes constituent une classe particulière à l'intérieur des variétés weyliennes.

Un examen superficiel des travaux de Weyl peut nous laisser croire qu'il n'a cessé de changer de domaines de prédilection en mathématiques. En effet, son intérêt s'est déplacé de la théorie des surfaces de Riemann, à la géométrie différentielle, puis aux représentations de groupes. En réalité, ses travaux se caractérisent par une remarquable continuité doublée d'une véritable cumulativité. L'article de 1925-1926 en témoigne avec force puisqu'il n'est pas sans lien avec *Die Idee der Riemannschen Fläche* et *Raum, Zeit, Materie*. Par extrapolation, nous pouvons dire qu'une même impression de volatilité caractérise à première vue les thèses de Weyl sur les fondements des mathématiques entre 1918 et 1925. Là encore, une analyse plus fine de ses textes témoignerait en faveur d'une grande cohérence motivée par la nécessité de trouver un équilibre entre méthodes axiomatiques et constructives en mathématiques. L'article de 1925-1926 reflète à notre sens cet équilibre.

Dans un premier temps, nous nous proposons de saisir les conditions d'élaboration et la structure d'ensemble de l'article de 1925-1926 sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Dans un deuxième temps, nous montrerons que l'étude des représentations de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ constitue un *exemple paradigmatique* qui permet à Weyl d'esquisser les grandes lignes de la démonstration du théorème de complète réductibilité en général, c'est-à-dire pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. [2] Dans un troisième temps, nous essaierons de comprendre les transformations que Weyl fait subir aux travaux de Frobenius et Cartan avant de voir comment il les harmonise. Dans un dernier temps, nous reviendrons sur la question de l'unité des mathématiques et nous indiquerons que Weyl ne la fonde ni sur l'usage systématique de la méthode axiomatique, ni sur la mise en avant d'un domaine des mathématiques au détriment des autres. Pour être plus précis, Weyl s'appuie justement sur ses travaux consacrés aux représentations des groupes de Lie complexes semi-simples pour critiquer la thèse d'E. Noether et Artin selon laquelle l'algèbre « abstraite » constituerait « une discipline-modèle » qui permettrait d'harmoniser les concepts et d'unifier les méthodes dans toutes les autres branches des mathématiques.

2. Au cours de la première partie de notre thèse, nous avions proposé une première analyse de la notion d'exemple paradigmatique en nous appuyant sur les procédés utilisés par Riemann pour introduire certaines notions d'*analysis situs*.

2.1 Conditions d'élaboration et structure de l'article de Weyl

Cet imposant article, composé de quatre parties, a été publié dans la *mathematische Zeitschrift* en 1925-1926. La première partie figure dans le n° **23** de la *mathematische Zeitschrift*, les trois autres sont éditées un an plus tard dans le n° **24** de cette même revue. Il ne s'agit pas là du premier texte de Weyl dans lequel la théorie des groupes et des représentations de groupes occupe une place centrale. En effet, en 1924 Weyl publie deux textes qui méritent d'être mentionnés ici : « Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung » et « Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen » d'après une lettre envoyée à Schur. Nous pouvons donc observer que Weyl effectue ses recherches dans le prolongement direct des travaux menés par Schur au début des années 20, lesquels consistent à étendre explicitement la théorie des représentations aux groupes continus.

Les résultats fondamentaux que l'on doit à Weyl dans ce domaine voient le jour dans un laps de temps extrêmement resserré, marqué par une lecture intensive des écrits de Frobenius, Schur, Hurwitz et surtout Cartan. L'article fondamental de Weyl de 1925-1926 connaîtra néanmoins d'importants prolongements à plus ou moins long terme. Ainsi, dès 1927-1928, Weyl montre la pertinence de la théorie des représentations de groupes pour mathématiser tout un pan de la mécanique quantique ; tel sera d'ailleurs l'objet de son livre intitulé *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928, 1931). De plus, à des différences de dénomination et de formulation près, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations* (1939) reprend *in extenso* les résultats établis par Weyl en théorie des représentations de groupes à partir du milieu des années 20. Enfin, le contenu de l'article de 1925-1926 fait l'objet d'un cours que Weyl donne à Göttingen en 1926-1927 et à Princeton en 1934.

L'article de 1925-1926 constitue, selon Weyl lui-même, la plus grande contribution qu'il ait apporté dans le domaine des mathématiques pures. Au début des années 30, il se réfèrera à ce travail d'une rare ampleur pour montrer combien ses méthodes et sa conception des mathématiques divergent de celles que prônent Noether et Artin. Il faut prendre l'article de 1925-1926 pour ce qu'il est ; il s'agit d'un texte de mathématiques pures qui, à la différence de « Reine Infinitesimalgeometrie » ou encore « Das Raumproblem », ne comporte en lui-même aucune réflexion d'ordre philosophique ou épistémologique. Mais cela ne signifie pas qu'il échappe à tout questionnement épistémologique. D'ailleurs, dans son discours de 1931 sur l'algèbre abstraite et la topologie, Weyl interroge ce texte philosophiquement ; en particulier, il s'appuie sur cet écrit pour s'inscrire en faux contre le mouvement d'algébrisation des

mathématiques, représenté en Allemagne notamment par Noether à Göttingen et Artin à Hambourg.

Avant d'aborder plus précisément les conditions d'élaboration et la structure de l'article de Weyl, nous pouvons déjà en proposer une rapide vue d'ensemble. Les deux premières parties de ce texte sont consacrées à l'étude des classes de groupes de Lie complexes « classiques » à savoir le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ — que Weyl appelle alors le groupe complexe — et le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$. La première partie, qui est exclusivement consacrée au groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, méritera une analyse fine. En effet, Weyl évalue ici la pertinence de la méthode de restriction unitaire empruntée à Hurwitz, afin de démontrer le théorème de complète réductibilité pour $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Ainsi, le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ constitue un *exemple paradigmatique* qui permet de construire en pointillés une théorie générale des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Les troisième et quatrième parties de l'article ont justement pour objet l'étude des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples en général. Dans la troisième partie, Weyl commence par reformuler les résultats généraux de Cartan sur les algèbres de Lie complexes semi-simples, avant de montrer comment la méthode de restriction unitaire peut fonctionner à ce niveau de généralité. La quatrième partie contient la démonstration du théorème de complète réductibilité suivie d'une détermination des caractères et des dimensions des représentations irréductibles pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. À la toute fin de son article, Weyl montre comment on peut considérer la théorie des invariants à partir de la théorie des représentations de groupes ; il vante à ce propos les mérites de la méthode intégrale de Hurwitz. Celle-ci n'est pas seulement un outil au service de la démonstration d'un théorème ; elle permet de définir un programme de recherche en théorie des invariants.

2.1.1 Schur et Weyl

Dans le chapitre précédent, nous avons adopté une échelle géographique et historique plutôt ample. En effet, nous avons évoqué les travaux publiés entre 1895 et 1913 par des mathématiciens appartenant à des institutions et des traditions différentes. Dans cette perspective, les travaux de Weyl peuvent être envisagés comme le prolongement de diverses théories élaborées sur le long terme, à savoir la théorie des algèbres de Lie semi-simples et la théorie des représentations de groupes finis. Seulement, si nous voulons saisir avec plus d'acuité l'émergence de la théorie des représentations *des groupes de Lie*, alors il nous faut pratiquer une *variation d'échelle* et comprendre en particulier les liens qu'entretiennent Schur

et Weyl entre 1924 et 1925. Nous devons préalablement faire nôtres certaines précautions méthodologiques qui sont bien connues en historiographie contemporaine. Pour ce faire, nous nous appuierons sur le chapitre que Ricœur consacre aux variations d'échelle dans *La mémoire, l'histoire, l'oubli.*[3] Ricœur défend en particulier l'argument suivant :

> L'idée force attachée à celle de variation d'échelle est que ce ne sont pas les mêmes enchaînements qui sont visibles quand on change d'échelle, mais des connexions restées inaperçues à l'échelle historique.[4]

Il s'appuie sur une série de recherches en *microhistoire* pour justifier son propos. Nous devons surtout comprendre son propos comme suit : lorsqu'un historien ou un historien des sciences effectue une variation d'échelle, non seulement il saisit des connexions jusque-là inaperçues, mais de plus il met au jour des liens de causalité inédits. Ricœur n'adopte absolument pas ici une posture relativiste qui reviendrait à dire que les connaissances historiques produites en fonction d'échelles différentes seraient totalement incommensurables. Par contre, il insiste sur le fait que les niveaux de temporalité historique que l'historien est susceptible d'adopter ne sont pas immédiatement superposables. Il s'inscrit donc en faux contre la célèbre thèse de Braudel selon laquelle le temps géographique, le temps social et le temps de l'événement peuvent parfaitement s'emboîter[5] :

> On a pu ainsi observer chez Braudel une certaine hésitation dans le maniement de la hiérarchie des durées : d'une part est présumé un rapport d'emboîtement entre durées linéairement homogènes, à la faveur de l'inclusion de toutes les durées dans un unique temps calendaire lui-même indexé sur l'ordre stellaire, et cela en dépit d'une méfiance certaine à l'égard des abus de chronologie commis par l'histoire événementielle ; d'autre part, on observe un simple empilement des durées superposées, sans lien dialectique entre elles.[6]

Cet argument nous paraît décisif pour saisir les conditions d'élaboration de l'article de Weyl sur le court terme, c'est-à-dire entre 1924 et 1925. Il a alors une correspondance suivie avec Schur. Cette correspondance a une incidence certaine sur la configuration même de l'écrit de Weyl. Ainsi, nous pouvons mettre au jour des connexions et des rapports de causalité qui seraient restés inaperçus si nous avions situé exclusivement l'article de Weyl par rapport au développement d'une ou de plusieurs théories sur le long terme. Venons-en à l'objet même

3. P. Ricœur, *La mémoire, l'histoire, l'oubli*, Paris, éd. du Seuil, 2000, p. 267 et suiv.

4. *ibid.*, p. 268.

5. Voir en particulier F. Braudel, *Écrits sur l'histoire*, Paris, éd. Flammarion, 1969, p. 13 : ≪ Ainsi sommes-nous arrivés à une décomposition de l'histoire en plans étagés. Ou si l'on veut, à la distinction, dans le temps de l'histoire, d'un temps géographique, d'un temps social, d'un temps individuel ≫. L'image des plans étagés renvoie à l'idée d'une superposition des différents niveaux de temporalité historique mis en avant par Braudel.

6. P. Ricœur, *op. cit.*, p. 270-271.

de notre étude pour clarifier ces réflexions historiographiques. En 1924, Schur publie deux articles qui donnent une actualité aux recherches que Hurwitz avait consacrées à la théorie des invariants à la fin du XIX^{e} siècle, à savoir « Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I » et « Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie II, über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen ». Contrairement à ce que pourrait nous laisser croire son titre, le premier article n'est pas consacré exclusivement à la théorie des invariants. En réalité, Schur introduit déjà la notion de caractère d'une représentation irréductible d'un groupe continu, à savoir le groupe des rotations — c'est-à-dire le groupe spécial orthogonal. Il emploie alors le terme de « caractéristique » et non de caractère qu'il réserve à l'étude des représentations irréductibles des groupes finis. Dans le second article, il développe une théorie systématique des représentations de $\mathrm{SO}(n)$, il énonce la formule des caractères et de la dimension dans ce cas.

Dans le courant de l'année 1924, Weyl envoie à Schur son article intitulé « Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung ». Si l'on suit les hypothèses d'Hawkins, Weyl connaissait alors le premier, mais non le second texte que Schur consacre à la théorie des invariants et des représentations du groupe spécial orthogonal en 1924. Cela signifie en particulier qu'il connaît les relations d'orthogonalité entre caractères irréductibles dans le cas d'un groupe continu de transformations, à savoir $\mathrm{SO}(n)$, mais qu'il ignore tout des autres résultats fondamentaux de Schur — formule des caractères et de la dimension pour $\mathrm{SO}(n)$. Or, dans son article de 1925-1926, Weyl énonce la formule des caractères et de la dimension pour les trois types de groupes classiques que sont $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$, mais aussi dans le cas d'un groupe de Lie complexe semi-simple arbitrairement donné.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la théorie des caractères renvoie à une tradition qui remonte aux travaux de Frobenius entre 1896 et 1903. À cette échelle relativement ample, on peut dire que Weyl prolonge aux groupes de Lie une théorie des caractères initialement introduite par Frobenius dans le cas des groupes finis. Lorsque l'on pratique une variation d'échelle et que l'on s'intéresse à la correspondance Weyl-Schur entre 1924 et 1925, d'autres connexions apparaissent. Ce qui peut constituer à nos yeux une généralisation « naturelle », liée au développement de la théorie des représentations de groupes sur le long terme, ne l'est en fait absolument pas. En effet, encore en 1924, Weyl n'envisage pas de trouver la formule des caractères et de la dimension dans le cas des groupes de Lie complexes semi-simples. Sa principale motivation est alors de démontrer le théorème de complète réductibilité pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. En réalité, il appartient à Schur

d'orienter Weyl en direction d'une détermination de la formule des caractères et de la dimension pour tous les groupes de Lie complexes semi-simples. S'il est vrai de dire que l'article de Weyl de 1925-1926 constitue une synthèse des approches de Frobenius et Cartan en théorie des représentation de groupes, il n'en demeure pas moins que nous devons effectuer une *variation d'échelle* pour expliquer comment une telle synthèse a vu le jour. Les échanges de lettres entre Weyl et Schur sur une période extrêmement réduite — moins de quelques mois — sont déterminants à ce propos. Les motivations de Weyl se diversifient peu à peu : elles ne se restreignent plus à la démonstration du théorème de complète réductibilité ; il s'agit au surplus de développer une théorie des caractères dans le cas des groupes continus. [7] La structure d'ensemble de l'article de Weyl est donc conditionnée par cette correspondance. À l'occasion de cet échange de lettres, Schur envoie à Weyl un résumé détaillé de son article sur les représentations du groupe des rotations. De plus, il invite expressément Weyl à établir le lien entre la théorie des caractères de Frobenius qu'il est en train de prolonger pour l'essentiel au groupe des rotations et la méthode de Cartan qui, comme nous l'avons vu précédemment, est fondée sur la notion de poids. Weyl résoudra justement ce problème dans son article de 1925-1926. [8] Autrement dit, le basculement de la théorie des poids de Cartan à la théorie des caractères de Frobenius et Schur — basculement que l'on peut observer à plusieurs reprises dans l'article de Weyl — est directement lié aux difficultés que lui soumet Schur.

En outre, le premier article de Schur de 1924 et la lettre qu'il envoie à Weyl pour résumer son second article constituent deux références essentielles pour comprendre comment la méthode intégrale de Hurwitz se déplace de la théorie des invariants à celle des représentations de groupes. Sans ignorer le « truc » unitaire développé par Hurwitz afin d'engendrer les invariants de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, Schur n'en mesure pas toute la portée. Pour le dire autrement, il revient à Weyl — et à Weyl seul — de saisir l'importance du « truc » unitaire pour démontrer le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ et, par extension, pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. Certes, Schur a vraisemblablement indiqué à Weyl l'importance de l'article de Hurwitz de 1897 pour parvenir à une théorie

7. Voir en particulier T. Hawkins, *op. cit.*, p. 472 : « Judging by the Schur-Weyl correspondence discussed below, it would seem that Schur's reply to Weyl's communication inspired — and to a certain extent guided — Weyl's successful efforts to develop a theory of characters for semisimple groups that would provide formulas for the irreductible characters and the degrees of the corresponding representations ».

8. Hawkins cite à ce propos l'extrait d'une lettre de Schur à Weyl, *op. cit.*, p. 473 : « It would be of considerable interest to me to see how my latest results on the number of variables and characters could be derived on the basis of Cartan's methods. My first impression is that this would still require a separate investigation. My method of proof, which merely uses the theory of characters (...) seems simpler to me than the deep methods of Cartan ».

des représentations des groupes continus. Mais il est abusif de soutenir que Weyl et Schur s'approprient ce texte de la même manière.

Là encore, notre analyse doit être fine : nous avons affaire à deux chercheurs, en l'occurrence Weyl et Schur, engagés dans le développement d'une même théorie, et qui s'appuient sur une même source. Pourtant ils ne s'intéressent pas exactement aux mêmes aspects du texte de Hurwitz, tout simplement parce qu'ils ne l'interrogent pas en fonction des mêmes problèmes. Les questions de complète réductibilité ne sont abordées par Schur que dans le cas de $\mathrm{SO}(n)$, alors que Weyl veut les traiter pour tout groupe de Lie complexe semi-simple.

Les démarches suivies par Schur et Weyl sont également différentes. De manière approximative, on peut dire que Schur cherche à étendre la théorie des caractères de Frobenius *au cas par cas*, c'est-à-dire en proposant d'étudier séparément certains types de groupes de Lie. À la lecture des deux articles de Schur que nous avons mentionnés, nous avons l'impression que l'étude des représentations du groupe des rotations est à elle-même sa propre fin, alors que les résultats et relations établis par Schur peuvent s'appliquer en droit à des classes très étendues de groupes continus.

Nos analyses ultérieures nous permettront de montrer que la « pensée par cas » qui caractérise les deux premières parties de l'article de Weyl ne s'apparente pas à une « étude de cas ». Weyl fait en sorte que le particulier — c'est-à-dire l'étude des représentations du groupe spécial linéaire — *dise* le général au sens où les propositions et les schémas de démonstration valables pour tout groupe de Lie complexe semi-simple s'expriment déjà dans ce cas particulier. Rien d'étonnant à ce que la première et la quatrième parties de l'article de Weyl comportent des similitudes structurelles frappantes, alors qu'elles ne se situent pas à un même niveau de généralité. Mais, avant d'aborder de manière plus précise ce point, résumons de manière succincte — et sans nous embarrasser de détails techniques — les résultats fondamentaux de Schur sur les représentations du groupe spécial orthogonal.

Intéressons-nous plus particulièrement aux §§ 4 à 6 du premier article de Schur. Il commence par reprendre à son compte la méthode intégrale de Hurwitz mais, loin de la considérer exclusivement dans le cadre de la théorie des invariants, il la rapporte au langage et aux concepts fondamentaux de la théorie des représentations. Schur raisonne sur un espace euclidien de dimension n. Pour expliciter son propos, nous pouvons nous restreindre à $\mathrm{SO}(3)$. Chaque élément de $\mathrm{SO}(3)$ est une rotation qui peut être paramétrée par les angles d'Euler ψ, θ, φ, avec $\psi \in [0, 2\pi[$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, \pi]$. Cette paramétrisation permet de définir l'intégrale suivante sur $\mathrm{SO}(3)$ — rétrospectivement, il s'agit de l'intégrale de Haar de $\mathrm{SO}(3)$

$$I(f) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Omega} f(\varphi, \theta, \psi) \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\psi,$$

où $\Omega =]0, 2\pi[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$ et f désigne une fonction sur SO(3).

Cela posé, Schur introduit ce qu'il appelle « les homomorphismes » du groupe des rotations SO(n). Soit H l'un de ces homomorphismes, Schur remarque que H doit être continu et que l'image d'une rotation R de SO(n) par H est une fonction continue. Pour le dire autrement, Schur définit une représentation continue de SO(n) sans préciser la nature de l'espace sous-jacent à une telle représentation.[9] Cette remarque apparemment anodine montre que Schur n'aborde pas les représentations de groupes sous un angle géométrique. À l'instar de Frobenius, il raisonne systématiquement et exclusivement sur des matrices. Il appartiendra donc bel et bien à Weyl d'introduire le langage des espaces vectoriels dans la théorie des représentations de groupes, ce qui montre que Weyl s'inscrit dans une tradition plus géométrique, alors que Schur demeure attaché à une tradition plus algébrique, à l'image de Frobenius.

Schur introduit la définition de la « caractéristique » d'un homomorphisme H de SO(n), c'est-à-dire le caractère d'une représentation de SO(n). Il s'agit de la fonction χ à valeurs complexes définie par :

$$\chi_H(s) = \mathrm{Tr}(H(s)), \quad \forall s \in \mathrm{SO}(n).$$

Il utilise le terme *caractéristique*[10] pour indiquer au lecteur qu'il étudie les représentations d'un groupe *continu* et non pas *fini*, tout en soulignant les étroites analogies que comporte la théorie des représentations d'un groupe continu par rapport à celle des groupes finis. Il met en exergue la proposition suivante qu'il considère comme le fondement de ses recherches :

> Deux homomorphismes $H(s)$ et $H_1(s)$ sont équivalents l'un à l'autre si et seulement si leurs caractéristiques coïncident.[11]

Cette assertion indique dans quelle direction Schur entend étudier les représentations du groupe spécial orthogonal : il s'agit pour lui d'élaborer une théorie des caractères. Il pro-

9. De fait, si l'on voulait expliciter ce point, on ajouterait que l'espace-support d'une représentation d'un groupe continu est un espace de Hilbert complexe. On rappelle à ce propos qu'un espace de Hilbert complexe est un espace vectoriel de dimension finie ou infinie, muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne $\langle\ ,\ \rangle$, et complet pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, au sens où toute suite de Cauchy est alors convergente pour une telle norme. Schur travaille exclusivement sur des espaces de dimension finie.

10. Cette terminologie sera reprise par Weyl dans son article de 1925-1926.

11. I. Schur, « Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie » (1924), in *Gesammelte Abhandlungen*, Band 2, Berlin, Heidelberg, New York, éd. Springer, 1973, p. 448.

longe donc une tradition héritée de Frobenius ; corrélativement, il laisse de côté la théorie concurrente des poids de Cartan pour les algèbres de Lie complexes semi-simples.

Au cours du § 5 de son article, Schur prouve le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SO}(n)$, [12] ce qui revient à dire que toute représentation de dimension finie de $\mathrm{SO}(n)$ peut être décomposée en une somme directe de sous-représentations irréductibles. Il ne fait pas de ce théorème une fin en soi : cette proposition l'incite à s'intéresser aux représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(n)$ et aux caractéristiques simples [einfache Charakteristiken] qui leur sont associées. Il montre en substance que ces caractéristiques simples satisfont à des relations d'orthogonalité *analogues* à celles que Frobenius avait mises au jour dans le cas des groupes finis. Ainsi, Schur fait apparaître une série d'analogies entre la théorie des représentations d'*un* groupe continu, à savoir $\mathrm{SO}(n)$, et la théorie des représentations des groupes finis. Certains passages de cet article pourraient presque nous laisser penser que le groupe des rotations constitue un exemple paradigmatique que Schur aurait pu utiliser pour développer une théorie générale des représentations des groupes continus. Ce n'est pas le cas : il appartient à Weyl d'élaborer une théorie dont le niveau de généralité dépasse la simple étude de cas.

Pour parvenir aux relations d'orthogonalité dans le cas du groupe spécial orthogonal, Schur se donne deux fonctions à valeurs complexes sur $\mathrm{SO}(n)$ qu'il note respectivement H et H', il désigne par $\mathrm{d}s$ la mesure invariante sur $\mathrm{SO}(n)$ et il pose :

$$F = \int_{\mathrm{SO}(n)} \overline{H'}(s) H(s) \mathrm{d}s.$$

Géométriquement, cette formule peut être interprétée comme un produit scalaire sur l'espace vectoriel des classes d'équivalence (pour la relation d'égalité presque partout) des fonctions continues à valeurs complexes sur $\mathrm{SO}(n)$, autrement dit

$$(H' \mid H) = \int_{\mathrm{SO}(n)} \overline{H'}(s) H(s) \mathrm{d}s.$$

Les caractéristiques simples — c'est-à-dire les caractères des représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(n)$ — sont elles-mêmes des fonctions continues sur $\mathrm{SO}(n)$ à valeurs complexes. Schur démontre qu'elles satisfont aux relations d'orthogonalité suivantes :

$$(\chi \mid \chi_1) = \int_{\mathrm{SO}(n)} \overline{\chi}(s) \chi_1(s) = 0,$$

si χ et χ_1 sont les caractéristiques simples correspondant à deux représentations irréductibles *inéquivalentes* ;

$$(\chi \mid \chi_1) = \int_{\mathrm{SO}(n)} \overline{\chi}(s) \chi_1(s) = 1,$$

12. *ibid.*, p. 449.

si elles correspondent à des représentations irréductibles *équivalentes*. Il en déduit que

> L'ensemble des caractéristiques simples associées au groupe des rotations (...) forme un système de fonctions orthogonales unitaires de la variable s.[13]

Le résumé de la fin du § 5 et du § 6 du premier article que Schur consacre aux représentations du groupe des rotations admet de profondes similitudes avec la formulation des relations d'orthogonalité dans le cas des groupes topologiques compacts en général. Nous serions presque tentés de penser qu'une telle généralisation s'impose « naturellement » après la publication des travaux de Schur que nous venons de commenter. Cette affirmation constitue de fait une illusion rétrospective pour deux raisons. (1) Tout d'abord Schur ne perçoit pas le caractère de généralité qu'admettent les relations d'orthogonalité qu'il a obtenues ; il avance encore en terrain inconnu lorsqu'il transpose la théorie des caractères de Frobenius à un groupe continu. Il ne mesure donc pas la *transversalité* des formules qu'il vient d'obtenir. Weyl la mettra déjà en avant dans le cas des groupes de Lie complexes semi-simples. (2) De plus, il s'avère que la théorie des représentations des groupes de Lie a globalement vu le jour avant la théorie des groupes topologiques compacts. L'ordre logique voudrait que l'on aille de la structure la plus simple à la structure la plus riche ; justement, la structure de groupe de Lie est plus complexe que celle de groupe topologique.

Explicitons clairement notre propos : le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est un groupe topologique compact qui est en outre muni d'une structure de variété différentielle. Il n'est absolument pas évident de montrer que l'on peut faire *abstraction* de sa structure de groupe de Lie pour définir une mesure invariante sur lui avant de déterminer les relations d'orthogonalité auxquels les caractères de ses représentations irréductibles sont assujetties. Bref, lorsque Schur et Weyl étudient des objets mathématiques complexes — et c'est bien le cas du groupe spécial orthogonal —, ils ne distinguent pas clairement leur structure topologique et leur structure de variété différentielle. Or, la théorie des représentations des groupes topologiques compacts suppose de hiérarchiser ces différentes structures. Tout un travail de dépouillement et de simplification est donc nécessaire afin de savoir quelle structure est réellement engagée dans la formulation d'un résultat ou d'une relation. C'est à cette condition que l'on peut passer des relations d'orthogonalité dans le cas du groupe spécial orthogonal aux relations d'orthogonalité pour tout groupe topologique compact en général. Cette simplification et cette montée en généralité vont de pair avec un processus d'axiomatisation. Ainsi, la théorie des groupe topologiques est complètement isolée par O. Schreier en 1926 à l'aide de la méthode axiomatique. La mesure de Haar est introduite dans le prolongement des travaux de Schreier :

13. *ibid.*, p. 451.

Haar la définit par voie axiomatique pour tout groupe topologique localement compact, il démontre son existence et von Neumann son unicité. Nous pouvons ainsi en déduire que la généralisation des relations d'orthogonalité à tout groupe topologique compact n'a rien de naturel, malgré les similitudes que le texte de Schur comporte avec un exposé contemporain sur les représentations des groupes compacts. Notre argumentation n'a de sens que si nous précisons que nous nous intéressons à la construction d'une théorie mathématique et moins à sa structure logique une fois qu'elle est constituée.

Nous ne commenterons pas en détail le second article de Schur sur les représentations de $\mathrm{SO}(n)$. Il *caractérise* alors complètement les représentations irréductibles de $\mathrm{SO}(n)$ comme l'indique le théorème suivant :

> Le groupe $\mathfrak{D}'$ [14] n'admet que des homomorphismes rationnels, ce qui signifie que chaque homomorphisme (continu) $H(t) = (T_{\varrho\sigma})$ de $\mathfrak{D}'$ est tel que tous les $T_{\varrho\sigma}$ peuvent être représentés comme des fonctions rationnelles entières des n^2 coefficients $t_{\kappa\lambda}$ de la substitution t. [15]

Autrement dit, Schur formule explicitement les représentations irréductibles du groupe spécial orthogonal. L'espace sous-jacent à une représentation irréductible de $\mathrm{SO}(n)$ correspond à l'espace vectoriel des polynômes homogènes à coefficients complexes de degré et à un nombre de variables convenablement choisis. Voilà pourquoi Schur parle de fonctions rationnelles entières. Nous pouvons préciser notre propos en nous fondant sur l'exemple du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$. Pour parvenir à ce point, caractérisons d'abord les représentations irréductibles de $\mathrm{SU}(2)$. [16] Soient

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

un élément quelconque de $\mathrm{SU}(2)$ et f une fonction sur $\mathbb{C}^2$ à valeurs complexes. On introduit le morphisme :

$$(\rho(g)f)(z_1, z_2) = f(\overline{a}z_1 - bz_2, \overline{b}z_1 + az_2).$$

Considérons l'espace vectoriel V^j des polynômes homogènes à coefficients complexes en deux variables (z_1, z_2) de degré $2j$, avec $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Cet espace est de dimension $2j+1$ et il est stable par la représentation ρ de $\mathrm{SU}(2)$. Nous avons la proposition suivante : *toute représentation irréductible de* $\mathrm{SU}(2)$ *est équivalente à la représentation* $\mathcal{D}^j$ *de* $\mathrm{SU}(2)$ *dans* V^j *obtenue par restriction de* ρ *à l'espace* V^j.

14. Il s'agit de la notation utilisée par Schur pour désigner le groupe spécial orthogonal.

15. I. Schur, ≪ Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, II ≫, *op. cit.*, p. 481.

16. Pour plus de détail, voir Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groupes et Symétries*, Palaiseau, éd. de l'École Polytechnique, 2005, p. 98 et suiv.

Nous pouvons nous appuyer sur ce théorème pour caractériser les représentations irréductibles de SO(3). Soit

$$\varphi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$$

un morphisme surjectif de groupes de noyau $\{I, -I\}$. Donnons-nous une représentation (E, ρ) du groupe SU(2) et supposons que ρ se factorise en $\sigma \circ \varphi$, $\sigma : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{GL}(E)$ étant une représentation de SO(3). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que ρ vérifie :

$$\rho(-I) = \rho(I) = \mathrm{Id}_E.$$

En particulier, ρ est une représentation *irréductible* de SU(2) si et seulement si σ est une représentation *irréductible* de SO(3). On va donc s'appuyer sur cette équivalence pour caractériser les représentations irréductibles de SO(3).

Pour qu'une représentation (V^j, D^j) de SU(2) se factorise de la sorte, il faut et il suffit que le nombre j soit un entier. Dans ce cas, nous avons :

$$D^j = \underline{D}^j \circ \varphi, \ \ j \in \mathbb{N},$$

Puisque (V^j, D^j) est une représentation irréductible de SU(2), $\underline{D}^j$ est une représentation irréductible de SO(3) ayant pour espace sous-jacent V^j, i.e. l'espace vectoriel des polynômes homogènes à deux variables complexes et de degré $2j$. Donc, *toute représentation irréductible de* SO(3) *est équivalente à l'une des représentations* $(V^j, \underline{D}^j)$, $j \in \mathbb{N}$. Il s'agit là d'une formulation modernisée du théorème fondamental de Schur.

Comparées aux travaux de Schur, les contributions de Weyl sont de quatre ordres.

(1) Weyl généralise les relations d'orthogonalité au sens où il ne les circonscrit pas à l'étude du groupe spécial orthogonal. Cela étant, il raisonne sur des groupes de Lie et non sur des groupes topologiques localement compacts ou compacts donnés abstraitement.

(2) À la différence de Schur, Weyl utilise systématiquement le langage des espaces vectoriels en théorie des représentations de groupes. Cette remarque n'a rien d'anodin. En effet, dans le chapitre précédent, nous avons souligné que ni Frobenius, ni Cartan n'ont recours au concept d'espace vectoriel à la fin du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle. Nous aurions pu penser qu'il s'agit là seulement d'une question de chronologie et qu'à partir des années 20, la notion d'espace vectoriel se généralise et se systématise pour formaliser certains aspects de la théorie des groupes de Lie et des représentations de groupes. Ce n'est pas le cas : les travaux de Schur sur le groupe des rotations et de Weyl sur les groupes de Lie complexes semi-simples sont quasiment contemporains. Pourtant, Schur n'explicite pas les propriétés de l'espace-support d'une représentation de groupe. En conséquence, lorsque Weyl étudie par exemple la décomposition

de l'espace-support d'une représentation en sous-espaces invariants, il adopte une approche géométrique qui est proprement inédite au milieu des années 20.

(3) Contrairement à Schur, Weyl n'entend pas généraliser au cas par cas la théorie des caractères des groupes continus. Il se fonde sur l'exemple de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ pour « dire le général ». Précisons le sens de cette formule laconique : à partir de l'étude des représentations du groupe spécial linéaire, il élabore une théorie des caractères pour les groupes de Lie complexes semi-simples sans préciser la nature de ces mêmes groupes, contrairement à ce qu'aurait entraîné une étude au cas par cas.

(4) Enfin, Weyl confronte systématiquement la méthode de Hurwitz et celle de Cartan dans son article de 1925-1926. En revanche, Schur ne fait que mentionner les travaux de Cartan sans se les approprier.

En résumé, Weyl et Schur n'accordent pas le même statut aux exemples particuliers qu'ils étudient ; de plus, leurs résultats respectifs n'ont pas le même niveau de généralité ; enfin Schur se contente de prolonger la théorie des caractères de Frobenius aux groupes continus en s'appuyant sur la méthode intégrale de Hurwitz, en revanche Weyl confronte systématiquement les approches de Frobenius-Schur et de Cartan. L'article de Weyl représente donc une *synthèse* quasiment indépassable en théorie des représentations des groupes de Lie.

2.1.2 Structure d'ensemble de l'article de 1925-1926

À première lecture, l'article de Weyl progresse du particulier au général. En effet, il étudie les représentations de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ (première partie), celles du « groupe complexe » $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ et de $\mathrm{SO}(n)$ (deuxième partie), avant de proposer une théorie générale des groupes et des algèbres de Lie complexes semi-simples (troisième partie) qui doit aboutir à une démonstration du théorème de complète réductibilité pour tout groupe de Lie complexe semi-simple (quatrième partie). Cette manière d'envisager la structure de l'article de 1925-1926 a un double inconvénient : elle nous fait croire que Weyl traite les trois exemples que sont $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$ au même niveau, ce qui n'est pas le cas. Weyl accorde clairement un statut privilégié à l'étude des représentations du groupe spécial linéaire parce qu'elle lui fournit les grands schémas de démonstration qu'il pourra utiliser lorsqu'il abordera les groupes de Lie complexes semi-simples *in abstracto*. En outre, on pourrait croire que la seule finalité de Weyl est de généraliser le théorème de complète réductibilité à tout groupe de Lie complexe semi-simple. En réalité, d'autres motivations président à l'élaboration de cet article et elles sont savamment coordonnées.

Énumérons-les : (1) généraliser la théorie des caractères de Frobenius-Schur à tout groupe de Lie complexe semi-simple, (2) confronter systématiquement la méthode infinitésimale de Cartan et la méthode intégrale de Hurwitz, (3) utiliser le concept d'espace vectoriel et faire valoir une approche plus géométrique en théorie des représentations de groupes, mais aussi en théorie des groupes et des algèbres de Lie, (4) « fonder » le calcul tensoriel sur la théorie des groupes [17], (5) assujettir la théorie des invariants à la théorie des représentations de groupes. Chacune de ces motivations a une incidence sur l'organisation de l'article.

Weyl élabore donc une *théorie* systématique des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples, ce qui signifie (a) qu'il ne s'en tient pas à la démonstration d'un *théorème*, fût-ce le théorème de complète réductiblité, (b) qu'il prend le soin de hiérarchiser les concepts et de comparer les méthodes qu'il utilise. Il développe cette *théorie* en opérant un véritable décloisonnement entre *champs disciplinaires* : analyse, algèbre et *analysis situs* sont considérées d'un seul tenant pour étudier des objets mathématiques dont la structure est très riche (il s'agit en l'occurrence des groupes de Lie). Nous avons donc affaire à une théorie qui se situe à l'intersection entre plusieurs disciplines que Weyl n'entend pas traiter isolément. L'unité des mathématiques, au sens d'une coordination entre des méthodes et des concepts appartenant à des champs disciplinaires distincts, constitue l'horizon régulateur de cet article.

À partir du moment où les motivations de Weyl sont saisies dans leur diversité, notre réflexion sur la structure d'ensemble de l'article gagne en subtilité et en complexité : il ne s'agit pas d'une simple montée en généralité. Ainsi, la première partie, qui est consacrée à l'étude des représentations de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ est *homologue* à la théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples définis *in abstracto*. Dans les deux cas, Weyl commence par appliquer la méthode *infinitésimale* de Cartan. Ainsi, dans les §§ 2 et 3 de la première partie, il étudie les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, celle-ci étant constituée de l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ de trace nulle. De manière analogue, la troisième partie de l'article de Weyl est consacrée à la théorie des algèbres de Lie semi-simples. C'est donc une nouvelle fois la méthode de Cartan qui prévaut. Ensuite, Weyl montre que la méthode intégrale de Hurwitz ne peut pas être directement utilisée dans le cas de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Il faut se restreindre au groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(n)$. C'est ce que l'on appelle la restriction unitaire sur laquelle Weyl s'appuie pour démontrer le théorème de complète réductibilité pour $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. De manière strictement parallèle, à la fin de la troisième partie, Weyl recherche le

17. C'est-à-dire décomposer les tenseurs de $\bigotimes^n E$ en classes de symétrie en s'appuyant sur les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$.

bon candidat pour que cette restriction unitaire puisse valoir pour n'importe quel groupe de Lie complexe semi-simple. [18] Enfin, dans les §§ 6 et 7 de la première partie, Weyl développe une théorie des caractères dans le cas de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, il en fait exactement de même au cours du § 3 de la quatrième partie pour tout groupe de Lie complexe semi-simple donné *in abstracto*.

Cette homologie en termes de méthodes, de concepts et de raisonnements ne doit pas nous faire oublier une série de différences. En effet, au cours de la première partie, Weyl accorde une place importante au calcul tensoriel. En revanche, à la fin de son article, Weyl prolonge ses réflexions en direction de la théorie des invariants. Le calcul tensoriel constitue le pivot qui permet de comprendre le passage de la relativité générale à la théorie des groupes dans l'œuvre de Weyl. La structure interne de l'article de 1925 doit donc être saisie à la lumière de cette nouvelle orientation prise par Weyl dans le champ des mathématiques pures : la première partie résume en un raccourci saisissant ce changement d'orientation. En revanche, la dernière partie a une tout autre fonction : Weyl se situe dans une tradition héritée de Hurwitz en théorie des invariants ; il entend montrer que le langage des représentations de groupes permet de réformer en profondeur cette même théorie.

Autrement dit, la première et la quatrième partie renvoient à des cadres théoriques qui ne se recouvrent pas nécessairement. Voilà qui permet de confirmer l'idée selon laquelle l'article de 1925-1926 n'est pas construit en fonction d'une simple montée en généralité visant à étendre le champ d'application du théorème de complète réductibilité. Ces différences ne doivent pas nous faire oublier que dans la première partie, comme dans la troisième partie de son article, Weyl adopte un formalisme relativement homogène qui est fondé sur l'usage systématique du concept d'espace vectoriel : d'entrée de jeu, il met en lumière les propriétés de l'espace sous-jacent à une représentation linéaire de groupes ; il rappelle qu'un groupe infinitésimal (c'est-à-dire une algèbre de Lie) admet une structure d'espace vectoriel ; il montre qu'un système irréductible de racines d'une algèbre de Lie de rang n forme une base d'un espace euclidien de dimension n.

Nous n'avons encore rien dit sur la deuxième partie de l'article. Ce choix est délibéré. En effet, nous faisons ressortir le rôle privilégié que Weyl accorde au groupe spécial linéaire pour aboutir à une théorie générale des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Il n'en reste pas moins que l'étude des représentations du groupe symplectique et du groupe spécial orthogonal reflète l'une des motivations constantes de Weyl dans cet article :

18. Si G désigne un groupe de Lie complexe semi-simple quelconque et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, ce candidat est un sous-groupe compact maximal $\mathfrak{A}_u$ du groupe adjoint $\mathfrak{A} \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. Weyl s'appuie sur la donnée de $\mathfrak{A}_u$ pour démontrer le théorème de complète réductibilité en général (quatrième partie, § 2).

confronter systématiquement la méthode infinitésimale de Cartan et la méthode intégrale de Hurwitz.[19] En outre, Weyl ne choisit pas les groupes $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}(n)$ par hasard : ils permettent de décrire les quatre classes de groupes de Lie simples « classiques ». Seulement, les motivations de Weyl en 1925 ne sont pas celles de Cartan en 1894 : Weyl ne cherche pas à décomposer un groupe de Lie complexe semi-simple en ses éléments simples ; voilà pourquoi il évoque en passant la classification des groupes de Lie complexes simples en 9 types deux à deux non isomorphes. L'article de Weyl ne s'apparente donc ni à une étude au cas par cas des représentations de certains groupes de Lie complexes, ni à une classification des constituants ultimes des groupes de Lie complexes semi-simples. Il s'agit bien d'une théorie systématique dont la généralité est déjà à l'œuvre dans l'étude d'un cas en particulier, à savoir $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$.

Il est donc approximatif de dire que Weyl va du particulier au général, puisque le groupe spécial linéaire constitue un exemple paradigmatique dont la portée est générale. Mais on ne peut pas non plus dire que Weyl raisonne directement dans le général, étant donné que son point de départ n'est certainement pas la définition axiomatisée d'un groupe de Lie complexe semi-simple donné *in abstracto*. Cette définition n'interviendra qu'au début de la troisième partie de son article. Ainsi Weyl établit une relation tout à fait inédite entre le *particulier* et le *général* : l'étude d'un cas particulier tel que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ n'a pas pour fonction d'exemplifier une théorie générale, comme si celle-ci nous était donnée à l'avance ; au contraire, la référence au groupe spécial linéaire constitue un guide et un point d'appui afin de construire cette même théorie. Inversement, les résultats obtenus par Weyl dans la troisième et la quatrième partie de son article ne constituent pas une simple généralisation à partir de cas particuliers sur le modèle d'une induction au sens naïf du terme. Weyl se donne les moyens pour parvenir à un tel niveau de généralité, ce qui suppose de définir implicitement un groupe de Lie complexe semi-simple et de trouver le bon candidat pour appliquer le truc unitaire. Dans le fond, l'article de 1925 se caractérise par un équilibre savant entre des procédures *constructives*, fondées sur l'étude d'un exemple paradigmatique, à savoir $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, et des procédures *axiomatiques* qui permettent d'appréhender une série de concepts dans toute leur généralité. Ajoutons que, contrairement à Noether et Artin, Weyl n'emploie pas systématiquement la méthode axiomatique dans cet article. Nous voudrions donc formuler l'hypothèse suivante : l'articulation

19. Le découpage de la deuxième partie de l'article confirme ce point : § 2 « représentations du groupe complexe : partie infinitésimale » ; § 3 « représentation du groupe complexe : partie intégrale » ; § 4 « les représentations du groupe des rotations : partie infinitésimale » ; § 5 « les représentations du groupe des rotations : partie intégrale ».

fine entre la référence à des cas particuliers et la théorie générale qui caractérise l'article de Weyl de 1925-1926 s'accorde parfaitement avec la voie moyenne entre méthode axiomatique et méthode constructive qu'il entend promouvoir. Nous savons en effet qu'à partir de 1924, Weyl entend concilier l'intuitionnisme de Brouwer et le « formalisme » de Hilbert.

2.2 Un exemple paradigmatique : $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$

Nous avons montré dans notre première partie que Riemann s'appuie sur l'exemple paradigmatique des tores à g trous pour dégager un certain nombre de propriétés en *analysis situs* notamment au début de sa *Théorie des fonctions abéliennes* (1857). Par extension, les tores à g trous permettent de classer les surfaces de Riemann compactes, connexes en fonction de leurs seule structure topologique, comme le montre Klein en 1882 à la suite de Jordan. Un exemple paradigmatique est tout sauf un cas *isolé*, il dit le général. Dans l'article de Weyl de 1925-1926, le groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ constitue un exemple paradigmatique pour deux raisons : il est le lieu d'une dialectique entre les méthodes de Cartan et de Frobenius-Schur — Weyl étend ensuite cette dialectique à tout groupe de Lie complexe semi-simple — ; il permet d'évaluer la pertinence de la restriction unitaire pour prouver le théorème de complète réductibilité. Weyl finit par *transposer* à tout groupe de Lie complexe semi-simple le schéma de démonstration qu'il utilise dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

En mathématiques, un cas *paradigmatique* se situe aux antipodes de ce que nous appellerons, faute de mieux, un cas *problématique*. En effet, un exemple paradigmatique permet de construire un concept, de démontrer un théorème ou d'esquisser une théorie mathématique de portée générale. En revanche, un cas problématique ne se laisse pas appréhender dans un cadre théorique existant ; il résiste provisoirement à toute tentative de saisie rationnelle. Il exige l'introduction de nouveaux concepts qui permettront d'expliquer pourquoi il se singularise par rapport à d'autres cas bien connus. Alors qu'un exemple paradigmatique nous permet de nous familiariser avec certaines méthodes voire avec une théorie tout entière, un cas problématique ne nous indique pas de lui-même à quelles conditions on peut le rendre intelligible. Nous pouvons donner quelques exemples bien connus de cas problématiques afin d'illustrer notre propos : nous pensons à certaines figures qui ne sont pas constructibles à la règle et au compas (trisection d'un angle non droit, duplication du cube, quadrature du cercle), ou encore aux équations algébriques de degré supérieur ou égal à cinq, qui ne sont généralement pas résolubles par radicaux. L'une des raisons d'être de la théorie de Galois consiste à rendre raison de ces cas problématiques. Weyl procède à rebours de cette démarche

lorsqu'il élabore la théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples : il n'étudie pas des cas problématiques ; au contraire, il prend appui sur un exemple paradigmatique. J.-C. Passeron et J. Revel décrivent d'ailleurs en un raccourci saisissant la différence entre cas problématique et cas paradigmatique en mathématiques :

> [Les mathématiques] ont, en effet, pris fréquemment appui sur des ≪ cas de figure ≫ rares ou privilégiés — tantôt scandaleusement irrationnels parce que manifestant une rupture avec la rationalité de savoirs déjà harmonieusement ordonnés, tantôt trop exemplaires par la réunion exceptionnelle de toutes les propriétés de plusieurs séries — aux fins de trouver une démonstration capable de restaurer l'intégrité d'un système de règles cohérent qui les absorberait, fût-ce au prix élevé de sa refonte complète. [20]

Pour paraphraser Passeron et Revel, nous pouvons dire que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ — ou plus précisément la restriction au groupe $\mathrm{SU}(n)$ — est un cas exemplaire, mais il n'est pas ≪ trop ≫ exemplaire, puisqu'il constitue un point d'appui parfaitement fiable pour étudier ensuite les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples en général. L'approche adoptée par Weyl dans son article de 1925-1926 a d'ailleurs des vertus pédagogiques indéniables : un exemple relativement commode à manier nous permet de saisir les grandes lignes d'une théorie générale et abstraite. Cette idée n'a d'ailleurs pas échappé à Hall qui propose une démonstration modernisée du théorème de complète réductibilité pour $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ en s'appuyant sur la restriction unitaire de Weyl :

> There is a theory of the representations of semisimple groups/Lie algebras which includes as a special case the representations of SU(3). However, I feel that it is worthwhile to examine the case of SU(3) separately. I feel this way partly because SU(3) is an important group in physics, but chiefly because the general semisimple theory is difficult to digest. Considering a non-trivial example makes it much clearer what is going on. In fact, all of the elements of the general theory are present already in the case of SU(3), so we do not lose too much by considering at first just this case. [21]

Nous nous proposons tout d'abord de montrer comment Weyl utilise la notion de poids dominant — qu'il emprunte à Cartan — pour caractériser les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Ensuite, nous expliquerons pourquoi Weyl s'appuie sur des propriétés d'*analysis situs* héritées de la théorie des revêtements afin de prouver le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Nous ferons ainsi ressortir le lien entre son ouvrage sur les surfaces de Riemann (1913) et son article de 1925-1926.

20. J.-C. Passeron, J. Revel, ≪ Penser par cas, raisonner à partir de singularités ≫, in *Penser par cas*, Paris, éd. de l'EHESS, 2005, p. 34-35.

21. Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras and Representations : an Elementary Introduction*, New York, éd. Springer, 2003, p. 127.

2.2.1 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ et poids dominants

Dans ce paragraphe, nous allons essayer de résumer et de commenter les §§ 2 et 3 de la première partie de l'article de Weyl. La méthode infinitésimale de Cartan signifie que l'on s'intéresse aux représentations du groupe infinitésimal, c'est-à-dire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Or, le début du § 2 ne s'ouvre pas d'emblée sur une caractérisation de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. En réalité, Weyl commence par formuler une définition axiomatisée d'un groupe infinitésimal donné *in abstracto* :

> Un groupe infinitésimal à r paramètres donné *in abstracto* est une variété vectorielle linéaire à r dimensions ; l'addition des vecteurs représente la composition des éléments du groupe. Mais outre la composition intervient le commutateur qui, à partir de deux éléments quelconques u, v du groupe, produit un élément $w = [uv]$. Il est à considérer comme une multiplication, puisque par rapport au premier facteur :
>
> $$[u+u', v] = [u,v] + [u',v], \quad [\alpha u, v] = \alpha[u,v] \qquad (\alpha \text{ est un nombre quelconque})$$
>
> et de même par rapport au second facteur, il satisfait à la loi de distributivité. À la place des lois commutative et associative figurent les suivantes :
>
> $$[vu] = -[uv],$$
> $$[u[vw]] + [v[wu]] + [w[uv]] = 0.$$

Un tel niveau de généralité peut surprendre. D'ailleurs, Weyl revient assez rapidement à l'étude de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ et de ses représentations au cours du § 2. Pourquoi un tel écart ? À notre sens, cette définition implicite n'a rien d'arbitraire : Weyl indique au lecteur qu'il veut parvenir à une théorie des groupes et des algèbres de Lie complexes semi-simples *en général*. Corrélativement, l'étude des représentations de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ n'est pas à elle-même sa propre fin ; elle doit nous fournir les grandes lignes de cette théorie générale. Le passage assez brutal de la définition implicite d'une algèbre de Lie abstraite à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ montre qu'il ne s'agit pas pour Weyl de s'en tenir à la description d'un cas isolé. Nous avons bel et bien affaire à un exemple paradigmatique qui doit s'ouvrir sur un horizon de généralité. Sans doute Weyl propose-t-il également une axiomatisation du concept d'algèbre de Lie parce que ses prédécesseurs n'en ont pas fourni une définition rigoureuse. En outre, il affirme très clairement qu'il s'agit d'un espace vectoriel. Géométriquement parlant, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G correspond d'ailleurs à l'espace tangent à G en l'identité de G.

Cela posé, Weyl rappelle que $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ s'identifie à l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients complexes de trace nulle, autrement dit :

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\ X = 0\}.$$

Il s'agit d'une algèbre de Lie à n^2-1 paramètres. Il considère ensuite la sous-algèbre commutative $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ constituée de l'ensemble des matrices *diagonales* de trace nulle. Autrement dit, un élément quelconque $X \in \mathfrak{h}$ est de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 0$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est à $n-1$ paramètres, il s'agit d'une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.[22] Les matrices diagonales $H_i,\ i = 1, ..., n-1$ qui prennent le coefficient 1 à la i-ème ligne et à la i-ème colonne, le coefficient -1 à $i+1$-ème ligne et à la $i+1$-ème colonne et 0 partout ailleurs sur la diagonale principale forment une base de la sous-algèbre $\mathfrak{h}$. Par exemple, pour $n = 3$, les matrices :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathfrak{h}$. Weyl introduit ensuite les matrices $E_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n, i \neq j$ qui comportent le coefficient 1 à la i-ème ligne et à la j-ème colonne, des 0 partout ailleurs. Les H_i et les E_{ij} forment une base de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Par exemple, pour $n = 3$, en plus de H_1 et H_2, il faut introduire les matrices

$$E_1 = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = E_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = E_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour obtenir une base de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

Weyl détermine ensuite ce qu'il appelle les quatre formules de constitution du groupe infinitésimal $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ qui correspondent à ce que nous appelons les *relations de commutation.*

22. Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ d'une algèbre de Lie complexe semi-simple $\mathfrak{g}$ est définie par les propriétés suivantes : (1) $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$, (2) $\mathrm{ad}H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est diagonalisable pour tout H de $\mathfrak{h}$.

La première formule s'énonce comme suit : pour tous $H, H' \in \mathfrak{h}$

$$[H,\ H'] = 0,$$

ce qui revient à dire que la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est commutative.

La seconde formule permet de construire le système des racines de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ relativement à $\mathfrak{h}$. Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, on a :

$$[H, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(H)E_{ij},$$

où λ_i (resp. λ_j) désigne une forme linéaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout $H \in \mathfrak{h}$, associe l'élément qui se trouve sur la i-ème ligne de H (resp. sur la j-ème ligne de H). Pour $n = 3$, appliquons cette formule de constitution à la matrice H_1. Nous obtenons :

$$[H_1,\ E_1] = (\lambda_1 - \lambda_2)(H_1)E_1 = 2E_1$$

$$[H_1,\ E_2] = (\lambda_2 - \lambda_3)(H_1)E_2 = -E_2$$

$$[H_1,\ E_3] = (\lambda_1 - \lambda_3)(H_1)E_3 = \ E_3,$$

et

$$[H_1,\ F_1] = (\lambda_2 - \lambda_1)(H_1)F_1 = -2F_1$$

$$[H_1,\ F_2] = (\lambda_3 - \lambda_2)(H_1)F_2 = \ F_2$$

$$[H_1,\ F_3] = (\lambda_3 - \lambda_1)(H_1)F_3 = -F_3.$$

Posons :

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3, \quad \alpha_3 = \lambda_1 - \lambda_3,$$

les formes linéaires α_1, α_2, α_3, $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ et $-\alpha_3$ sont les six racines de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ relativement à la sous algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$. Puisque $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, on en déduit que toutes les racines de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ (relativement à $\mathfrak{h}$) sont des combinaisons linéaires de α_1 et α_2. Par extension, les racines α_1 et α_2 forment une base de $\mathfrak{h}^*$, c'est-à-dire de l'espace dual de $\mathfrak{h}$.

La troisième formule s'énonce comme suit :

$$[E_{ij},\ E_{ji}] = [E_\alpha,\ E_{-\alpha}] = H_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

Par exemple, pour $n = 3$,

$$[E_3,\ F_3] = H_3, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la quatrième formule de constitution s'écrit :

$$[E_\alpha,\ E_\beta] = \begin{cases} E_{\alpha+\beta} \\ 0 \end{cases}$$

selon que $\alpha + \beta$ est une racine de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ou non.

Ainsi, pour $n = 3$, nous avons :

$$E_1 = E_{\alpha_1}, \quad E_2 = E_{\alpha_2}.$$

Donc,

$$[E_1,\ E_2] = E_{\alpha_1+\alpha_2} = E_3,$$

car $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ est une racine de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. En revanche

$$[E_1,\ E_3] = 0,\ [E_2,\ E_3] = 0$$

car $\alpha_1 + \alpha_3$ et $\alpha_2 + \alpha_3$ ne sont pas des racines de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ (relativement à $\mathfrak{h}$).

Après avoir énoncé les quatre formules de constitution pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, Weyl définit abstraitement la notion de représentation linéaire d'une algèbre de Lie. Une représentation linéaire d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se caractérise par la donnée d'un espace vectoriel E et d'un morphisme d'algèbres de Lie ρ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(E)$:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g},\ \rho([X,\ Y]) = [\rho(X),\ \rho(Y)].$$

Il précise ensuite ce qu'il entend par poids d'une représentation de $\mathfrak{g}$. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et (ρ, E) une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$. Un poids pour cette représentation est une forme linéaire $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ telle qu'il existe un vecteur non nul $e \in E$ vérifiant :

$$\forall H \in \mathfrak{h}, \quad \rho(H)e = \lambda(H)e,$$

Le vecteur e est un vecteur-poids pour le poids λ de la représentation ρ.

Pour illustrer cette définition sur un exemple élémentaire, prenons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, $E = \mathbb{C}^3$ et déterminons les *poids* de la représentation standard : il s'agit des formes linéaires λ_1, λ_2 et λ_3 sur $\mathfrak{h}$ que nous avons introduites ci-dessus, i.e. λ_i associe à chaque $H \in \mathfrak{h}$ le coefficient qui se trouve à la i-ème ligne dans H. Les vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la base standard de $\mathbb{C}^3$ sont des vecteurs-poids pour chacun des λ_1, λ_2, λ_3 ; autrement dit, pour $i = 1, 2, 3$,

$$He_i = \lambda_i(H)e_i, \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

On peut aisément comprendre pourquoi Weyl commence par manipuler les notions de poids et de racines dans le cas de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$: il s'agit là d'un exemple suffisamment simple

pour que le lecteur n'ait pas le sentiment de se perdre dans des abstractions stériles, mais également suffisamment riche pour qu'il puisse saisir la diversité des propriétés qui sont attachées à ces deux concepts. Le théorème central des §§ 2 et 3 revient à dire que deux représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même « plus haut poids ». Rappelons ce que signifie l'expression « le plus haut poids » : soit Δ le système des racines de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ relativement à $\mathfrak{h}$. On peut extraire dans Δ un système simple de $n-1$ racines $\{\alpha_1,...,\alpha_{n-1}\}$, ce qui signifie que α_1, ..., α_{n-1} forment une base de $\mathfrak{h}^*$ et que chaque racine de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des α_1, ... α_{n-1} avec des coefficients qui sont soit tous des entiers positifs ou nuls, soit tous des entiers négatifs ou nuls. Un poids λ d'une représentation ρ de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ est justement une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, donc $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, ce qui signifie que λ peut s'écrire comme combinaison linéaire des α_1, ..., α_{n-1} avec des coefficients *entiers*.

Un poids λ_i de ρ est plus haut qu'un autre poids λ_j de ρ si

$$\lambda_i - \lambda_j = a_1\alpha_1 + ... + a_{n-1}\alpha_{n-1}$$

avec $a_k \geqslant 0,\ \forall k = 1,...,n-1$. Cette relation d'ordre partiel s'écrit $\lambda_i \succeq \lambda_j$. Le plus haut poids λ_0 de ρ vérifie $\lambda_0 \succeq \lambda_i$, pour tout poids λ_i de ρ. Weyl montre donc à la suite de Cartan qu'une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ est entièrement déterminée par son plus haut poids.

Par exemple, pour $n = 3$, le plus haut poids de la représentation standard introduite précédemment n'est autre que λ_1. Il est même possible de calculer la dimension d'une représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ à partir de la donnée de son plus haut poids. Nous allons illustrer cette proposition dans le cas de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Considérons les matrices $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ introduites précédemment. Un poids λ d'une représentation ρ de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ peut être défini par les entiers

$$m_1 = \lambda(H_1), \quad m_2 = \lambda(H_2),$$

ce que l'on écrit $\lambda = (m_1, m_2)$. Nous avons la proposition suivante : la dimension d'une représentation ρ de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ de plus haut poids $\lambda = (m_1, m_2)$ est

$$\frac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2).$$

Si l'on prend la représentation standard de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, elle a pour poids dominant $\lambda_1 = (1,0)$ et on vérifie immédiatement qu'elle est de dimension 3 en s'appuyant sur la seule connaissance des valeurs de m_1 et m_2.

Les §§ 2 et 3 que nous venons brièvement de commenter ne comportent pas de résultats inédits ; ils ont pour seule fonction de familiariser le lecteur avec les concepts de *poids* et de *racine* dans le cas de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ et de ses représentations. Ce constat doit néanmoins être nuancé. Tout d'abord, ces deux paragraphes montrent que Weyl se démarque de Schur. En effet, dans son deuxième article sur les représentations du groupe des rotations, Schur mentionne les travaux que Cartan a consacrés aux représentations irréductibles des algèbres de Lie complexes et réelles semi-simples ; dans le même temps, il reconnaît qu'il ne s'est pas approprié cette méthode infinitésimale et qu'il ignore comment la relier à la théorie des caractères qu'il entend développer pour le groupe des rotations. L'« originalité » de la première partie de l'article de Weyl réside moins dans ses emprunts à Cartan que dans les relations qu'il établit entre les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ (conformément à la méthode infinitésimale de Cartan) et les représentations de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ ou plutôt de $\mathrm{SU}(n)$ (conformément à la méthode intégrale de Hurwitz-Schur). Ensuite, il ne faut pas oublier que dans la troisième partie de son article, Weyl donne une forme nouvelle à la théorie des algèbres de Lie due à Cartan. Cette reconfiguration théorique fera date puisqu'elle sera largement reprise et affinée par le groupe Bourbaki, comme en attestent les exposés donnés notamment par P. Cartier et F. Bruhat dans le cadre du séminaire Sophus Lie au cours des années 50.

La démonstration du théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ permet à Weyl d'expliciter les liens profonds entre les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ et les représentations irréductibles de $\mathrm{SU}(n)$. Ces liens ne sont pas évidents à établir et ils supposent une bonne connaissance des propriétés d'*analysis situs* qu'admet le groupe spécial unitaire. Weyl est amené à *transposer* aux groupes de Lie la théorie des revêtements qu'il avait initialement développée dans le cas des surfaces de Riemann. C'est ce que nous souhaitons montrer dans le paragraphe qui suit.

2.2.2 Le théorème de complète réductibilité et l'*analysis situs*

Weyl démontre le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ au cours du § 5 (première partie). Sa démonstration suscite un double intérêt d'un point de vue épistémologique. (1) Weyl transpose la théorie des revêtements d'un objet mathématique à un autre. Il montre ainsi que cette théorie est *transversale* : elle s'applique indifféremment aux surfaces de Riemann et aux groupes de Lie — ces deux types d'objets étant munis d'une structure de variété topologique. Il mesure cette transversalité *in concreto*, c'est-à-dire sans

en passer par une théorie *abstraite* des revêtements qui ne verra guère le jour avant le début des années 30. L'œuvre de Weyl se caractérise également par son unité sur le long terme. En effet, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *Raum, Zeit, Materie* et l'article de 1925-1926 sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples ne renvoient pas à des domaines de recherche totalement imperméables. Au contraire, Weyl fait preuve d'un grand esprit de synthèse : la familiarité qu'il a acquise avec la théorie des revêtements dès 1911-1913 lui donne les ressources conceptuelles suffisantes pour démontrer le théorème de complète réductibilité dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Elles lui permettront également de prouver ce même théorème pour tout groupe de Lie complexe semi-simple dans la quatrième partie de son article.

(2) Weyl combine explicitement des méthodes et des concepts qui relèvent de champs disciplinaires différents. L'unité des mathématiques se réalise selon lui en montrant l'existence d'une étroite corrélation entre l'algèbre abstraite et la topologie dans l'étude de certains objets. Mais Weyl insiste sur le fait suivant : lorsqu'il est possible d'étudier un même objet selon un point de vue topologique et un point de vue algébrique, alors il faut se rendre à l'évidence que ces points de vue nous invitent à suivre des directions opposées. Il est extrêmement difficile de les combiner et de mesurer leur complémentarité. En effet, l'algèbre abstraite se rapporte essentiellement à des opérations définies sur des domaines d'objets dont la nature n'est pas spécifiée : elle constitue « l'eldorado » de la méthode axiomatique pour emprunter une expression à Weyl. Par exemple, une algèbre de Lie abstraite est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'une opération appelée crochet. Il s'agit d'un objet de nature algébrique que l'on peut traiter à l'aide de méthodes purement algébriques. En revanche, la topologie est fondée sur la propriété de continuité qui, pour Weyl, échappe aux procédures axiomatiques : celles-ci ne peuvent intervenir qu'après coup en topologie.

Ainsi, la distinction entre point de vue topologique et point de vue algébrique recouvre jusqu'à un certain point chez Weyl la distinction entre procédures constructives et procédures axiomatiques. Nous disons « jusqu'à un certain point » pour la raison suivante : bien que Weyl considère l'algèbre comme l'*eldorado* de la méthode axiomatique, il n'exclut pas la possibilité d'appliquer des procédures constructives dans ce domaine. Dans un texte fameux rédigé après 1953 et intitulé « comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques », Weyl donne des exemples de construction en algèbre — c'est par exemple le cas de l'adjonction d'une indéterminée X pour former l'anneau de polynômes $A[X]$, la lettre A désignant un anneau d'éléments quelconques. Dans le même temps, il semble reconnaître la prééminence des procédures axiomatiques sur les procédures constructives dans ce domaine puisqu'il parle des « fondements axiomatiques » de l'algèbre.

Inversement, il ne rejette pas l'usage de la méthode axiomatique en topologie. Par contre, cette dernière repose de manière essentielle sur la propriété de continuité, or Weyl entend engendrer le continu à partir de procédés constructifs. Donc on peut comprendre pourquoi il associe la topologie à des méthodes constructives sans nier que celles-ci puissent être prolongées par des procédures axiomatiques. Ces arguments sont conformes avec la pratique des mathématiques de Weyl. À partir de 1918, il utilise la méthode des définitions implicites ou par axiomes presque exclusivement pour définir des concepts relevant de l'algèbre : espaces vectoriels, algèbres de Lie, etc. Toujours est-il que dans sa célèbre conférence intitulée « Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege des mathematischen Vertändnisses », Weyl oppose d'abord frontalement la topologie et l'algèbre. Il n'est donc pas possible de transposer les méthodes de l'algèbre à la topologie, à moins de dénaturer complètement cette dernière. Aussi affirme-t-il :

> In topology, we begin with the notion of continuous connection, and in the course of specialization we add, step by step, relevant structural features. In algebra this order is, in a sense, reversed. Algebra views the operations as the beginning of all mathematical thinking and admits continuity, or some algebraic surrogate of continuity, at the last step of specialization. The two methods follow opposite directions. Little wonder that they don't get on well together. What is most easily accessible to one is often most deeply hidden to the other. [23]

Cependant, Weyl n'en reste pas à cette opposition. Il cherche à montrer la profonde intrication entre ces deux points de vue : ainsi, les propriétés algébriques de certains objets mathématiques se reflètent en des propriétés purement topologiques. Un exemple emprunté à la théorie des surfaces de Riemann illustre parfaitement ce point. En effet, soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ un polynôme *irréductible* de degré non nul, l'irréductibilité de P — qui est une propriété purement *algébrique* — se reflète en une propriété purement *topologique* de la surface $P(x, y) = 0$: celle-ci est *connexe*. De manière plus profonde, l'article de 1925-1926 repose sur un savant équilibre entre l'algèbre et la topologie, comme il le souligne à titre rétrospectif dans sa conférence de 1931 :

> In the last few years, in the theory of representation of continuous groups by means of linear substitutions, I have experienced most poignantly how difficult it is to serve these two masters at the same time. [24]

En effet, Weyl combine le point de vue algébrique et infinitésimal de Cartan d'une part, le point de vue topologique et intégral de Hurwitz-Schur d'autre part. Bref, d'un côté il décrit

23. H. Weyl, « Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension », (1931) Part I, *The American mathematical monthly*, **102**, n° 5, 1995, p. 460.
24. *ibid.*, p. 460.

les propriétés algébriques des algèbres de Lie, de l'autre il prête attention aux propriétés topologiques et globales des groupes de Lie qui sont justement des variétés « continues ». Weyl dialectise deux points de vue, le premier étant donc algébrique et infinitésimal, le second étant topologique et global. À chacun de ces points de vue est associée une méthode. À notre sens, cette dialectique doit être interprétée à la lumière de la voie moyennne entre l'intuitionnisme et le formalisme qu'adopte Weyl en 1924 : schématiquement, l'intuitionnisme se situe du côté du « continu », le formalisme du côté des « opérations » de l'algèbre. Pour être plus précis, la combinaison entre les procédures constructives et les procédures axiomatiques se manifestent à deux niveaux dans l'article de 1925-1926 : (1) dans le rapport très subtile que Weyl établit entre le particulier et le général, (2) dans la dialectique entre points de vue algébrique et topologique. D'ailleurs, la démonstration du théorème de complète réductibilité qu'il propose met en jeu un savant équilibre entre des concepts et des méthodes qui relèvent de la topologie et de l'algèbre.

Explicitons déjà brièvement notre propos. (i) Le groupe $\mathrm{SU}(n)$ est *compact*, donc on peut lui appliquer la méthode intégrale de Hurwitz. De plus, il est connexe et *simplement connexe* (pour $n \geqslant 2$), ce qui signifie que tout lacet basé en l'identité de $\mathrm{SU}(n)$ est continûment réductible à un point. Or, cela entraîne que les représentations irréductibles de $\mathrm{SU}(n)$ sont en bijection avec les représentations irréductibles de son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \mid X +^t \overline{X} = 0,\ \mathrm{Tr}\ X = 0\}$. C'est pourquoi, il n'est absolument pas vain de résumer cette démonstration d'un point de vue épistémologique, même si certains détails sont techniques.

Le début du § 5 de la première partie s'ouvre sur une mise en perspective historique. Weyl rappelle en effet que « la méthode intégrale et transcendante » a été introduite par Hurwitz pour engendrer les invariants relatifs à des groupes continus de transformations. Schur l'a ensuite transposée à l'étude des représentations du groupe des rotations. À vrai dire, la méthode intégrale ne pose aucun problème dans le cas de $\mathrm{SO}(n)$, puisqu'il s'agit d'un groupe compact. Par contre, elle ne peut pas être directement appliquée à $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ qui n'admet justement pas cette propriété de compacité. Il s'agit là de la première difficulté qu'il faut pouvoir surmonter si l'on veut démontrer que toute représentation de dimension finie de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ se décompose en une somme directe de représentation irréductibles.

Pour ce faire, Weyl s'appuie sur la restriction unitaire proposée par Hurwitz. Puisque la méthode intégrale ne peut pas s'appliquer directement à $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, il convient de se restreindre au groupe $\mathrm{SU}(n)$ qui est compact. À l'instar de Schur, Weyl sait que le théorème de complète réductibilité est vérifié dans le cas de $\mathrm{SU}(n)$. C'est là que survient une seconde diffi-

culté : il ne va absolument pas de soi que la propriété de complète réductibilité, valable pour les représentations de dimension finie de $\mathrm{SU}(n)$, s'étende aux représentations de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. Nous allons voir que, pour contourner ce second obstacle, Weyl est amené à s'intéresser aux propriétés topologiques de $\mathrm{SU}(n)$. En fait, il doit démontrer les deux implications suivantes :

(a) si $\mathfrak{su}(n)$ admet la propriété de complète réductibilité, alors il en va de même pour $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$;

(b) étant donné que $\mathrm{SU}(n)$ admet la propriété de complète réductibilité, il en va de même pour $\mathfrak{su}(n)$.

L'implication (a) ne pose aucune difficulté. En effet, les représentations de dimension finie de $\mathfrak{su}(n)$ sont en correspondance bijective avec les représentations de dimension finie de sa complexifiée $\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}$. Or, $\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Cela signifie en particulier qu'une représentation (ρ, E) de $\mathfrak{su}(n)$ laisse un sous-espace $F \subset E$ invariant si et seulement la représentation (ρ', E) de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ qui lui correspond laisse ce même sous-espace invariant. À l'instar de Weyl, on peut en déduire que l'implication (a) est vérifiée.

En revanche, l'implication (b) est tout sauf évidente : en effet, il n'y a *a priori* pas de correspondance bijective entre les représentations d'un groupe de Lie et celles de son algèbre de Lie.[25] En effet, soient G est un groupe de Lie complexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, Weyl montre qu'il n'y a de bijection qu'entre les représentations de $\mathfrak{g}$ et celles du revêtement universel $\widetilde{G}$ de G, sachant que les algèbres de Lie de $\widetilde{G}$ et G sont isomorphes.[26] Mais Weyl se heurte aussitôt à une troisième difficulté : à supposer que le groupe de Lie G soit compact — ce qui entraîne que G admet la propriété de complète réductibilité —, rien ne nous permet d'en inférer que son revêtement universel soit lui-même compact.

Weyl prend un contre-exemple élémentaire. Supposons que G s'identifie au cercle unité dans le plan complexe, il s'agit bien d'un groupe compact. Son revêtement universel correspond à ce même cercle parcouru un nombre infini de fois, il est à un nombre infini de feuillets et, pour cette raison, il n'est pas compact (topologiquement, un tel revêtement est une droite). D'une manière générale, supposons que G soit compact, le revêtement universel $\widetilde{G}$ de G est lui-même compact s'il est à un nombre *fini* de feuillets. La compacité de $\widetilde{G}$ est de la plus haute importance : elle signifie que l'on peut appliquer la méthode intégrale de Hurwitz à $\widetilde{G}$ pour s'assurer qu'il admet lui-même la propriété de complète réductibilité.

25. Voir en particulier T. Hawkins : *op. cit.*, p. 467 : ≪ But Weyl realized that a representation of a Lie algebra (...) need not correspond to a representation of the Lie group from which it was derived ≫.

26. Pour une définition du concept de revêtement universel, nous renvoyons le lecteur à la première partie, troisième chapitre de la présente thèse. Par exemple $\mathrm{SU}(2)$ est le revêtement universel (à deux feuillets) de $\mathrm{SO}(3)$, alors que $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont isomorphes.

Weyl résout ici par anticipation des difficultés qui ne se présentent pas dans le cas du groupe $\mathrm{SU}(n)$. En effet, il démontre le lemme suivant : $\mathrm{SU}(n)$ est *simplement connexe* pour $n \geqslant 2$, ce qui signifie que son revêtement universel lui est isomorphe. Donc, les représentations de dimension finie de $\mathrm{SU}(n)$ et de $\mathfrak{su}(n)$ sont en correspondance bijective. L'implication (b) est ainsi démontrée. En vertu de l'implication (a), $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ et, par extension, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ admettent la propriété de complète réductibilité.

Cette démonstration permet tout d'abord de clarifier le lien — qui n'a donc rien d'évident — entre les représentations d'un groupe de Lie et celles de son algèbre de Lie. Weyl dépasse de la sorte les points de vue de Cartan et de Schur. En effet, Cartan s'intéresse essentiellement aux représentations des *algèbres de Lie* complexes et réelles semi-simples. Pour sa part, Schur étudie exclusivement les représentations d'un *groupe de Lie compact*, à savoir $\mathrm{SO}(n)$. Weyl se fonde sur l'exemple de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ qui est certainement problématique aux yeux de Schur car ce n'est pas un groupe compact. En revanche, cet exemple est paradigmatique aux yeux de Weyl puisqu'il lui fournit toutes les clés afin de démontrer le théorème de complète réductibilité pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. Comme $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ n'est pas compact, Weyl est amené à considérer tour à tour les représentations de $\mathrm{SU}(n)$, de $\mathfrak{su}(n)$ et de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ avant d'en conclure que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ admet la propriété de complète réductibilité. On peut aisément comprendre quelles sont les motivations qui conduisent Weyl à s'appuyer ici sur la théorie des revêtements : il prouve de manière tout à fait substantielle que les représentations de dimension finie d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G sont en correspondance bijective avec celles du revêtement universel $\widetilde{G}$ de G.

Les considérations d'*analysis situs* qu'il effectue n'ont donc rien de gratuit : non seulement elles permettent de démontrer le théorème de complète réductibilité pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, mais de plus elles l'aident à comprendre le rapport délicat que les représentations (de dimension finie) d'un groupe de Lie G entretiennent avec les représentations (de dimension finie) de l'algèbre de Lie qui lui est associée, ce que n'avaient fait ni Cartan ni Schur. On saisit donc maintenant *pourquoi* Weyl s'appuie sur la théorie des revêtements — qui relève de l'*analysis situs* — pour prouver le théorème de complète réductibilité dont la formulation renvoie au domaine de l'*algèbre*. L'idée d'une complémentarité entre la topologie et l'algèbre prend ici tout son sens. Certes, il est possible de fournir une preuve purement algébrique du théorème de complète réductibilité, comme en témoignent les travaux de Casimir, van der Waerden et Brauer. Cette remarque ne doit pas prêter à extrapolation : la démonstration de Weyl conserve toute sa pertinence parce qu'elle permet de saisir la structure d'un groupe de Lie en fonction de ses diverses facettes — algébrique, topologique, etc. De plus, Weyl *dialectise*

des méthodes qui relèvent de l'algèbre et de la topologie : il cherche à les corréler tout en montrant qu'elles sont irréductibles l'une à l'autre. Par extension, il n'a aucunement pour but de défendre une forme d'hégémonie qui consisterait à privilégier indûment un domaine des mathématiques au détriment des autres.

Notre commentaire du § 5 demeure incomplet tant que nous ne précisons pas *comment* Weyl parvient à étendre la théorie des revêtements aux groupes de Lie. Loin de considérer la théorie des revêtements comme un système de connaissances abstraites et surplombantes qui pourrait s'appliquer indifféremment aux surfaces de Riemann et aux groupes de Lie, Weyl transpose des raisonnements directement issus de *Die Idee der Riemannschen Fläche* aux groupes de Lie. Qu'il nous suffise de citer ce premier passage :

> Suivant Lie, à partir d'une représentation du groupe infinitésimal $\mathfrak{g}_u^\circ$ à n^2-1 paramètres réels, on obtient par intégration la matrice T correspondante pour tous les t de $\mathfrak{g}_u$ appartenant au voisinage de l'élément identité. Mais si l'on choisit un t_0 dans ce voisinage, alors on peut prolonger la représentation au voisinage de t_0, en lequel se transforme le premier voisinage par une translation de e à t_0. Le *processus de prolongement* itéré ne rencontre manifestement aucune limite ; néanmoins T n'est pas nécessairement uniforme sur $\mathfrak{g}_u$, mais seulement sur une ≪ *variété de revêtement* ≫ qui se prolonge sans ramification et sans limite au-dessus de $\mathfrak{g}_u$. [27]

Weyl montre qu'il y a une correspondance bijective entre les représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G et les représentations du revêtement universel $\widetilde{G}$ de G. Or, il emploie ici un processus qui est bien connu en analyse complexe : il s'agit du *prolongement analytique*. En outre, l'adjectif ≪ uniforme ≫ n'est pas sans rappeler le théorème d'uniformisation. Or, c'est dans ce contexte que Poincaré, Koebe et Weyl ont pu introduire le concept de revêtement universel d'une surface de Riemann, comme nous l'avons souligné dans notre première partie. Nous pouvons en déduire que l'ouvrage de Weyl sur les surfaces de Riemann lui sert de référence pour étendre la théorie des revêtements aux groupes de Lie. Weyl prend pour point de départ une situation connue, à savoir la théorie des revêtements dans le cadre des surfaces de Riemann. Il se donne ensuite les moyens de transposer cette théorie dans un contexte moins connu, celui des groupes et des algèbres de Lie. Pour ce faire, il utilise des procédés et résultats (prolongement analytique, théorème d'uniformisation) qui renvoient indéniablement à *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Le lien entre cet ouvrage et l'article de 1925-1926 s'effectue donc de proche en proche, et non à partir d'un point de vue surplombant, fondé sur la théorie abstraite des revêtements que l'on appliquerait ensuite indifféremment aux surfaces de Riemann et aux groupes de Lie. Pour le dire de manière imagée, Weyl étend le champ

27. H. Weyl, ≪ Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen ≫ I, *op. cit*, p. 290.

d'application de la théorie des revêtements en suivant un « mouvement horizontal », c'est-à-dire en faisant apparaître une série de points de contact entre les surfaces de Riemann et les groupes de Lie. Il est tout à fait possible de suivre un « mouvement vertical » pour parvenir à cette fin. Dans ce cas, on commence par opérer un *décrochage* en termes de niveau de généralité : la théorie des revêtements se rapporte d'abord à des espaces topologiques définis abstraitement. On montre ensuite comment elle se réalise pour certains objets mathématiques dont la nature est spécifiée.

À la fin de la première partie de son article, Weyl aborde le cas de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ pour souligner la nécessité de se restreindre à des groupes de Lie complexes semi-simples. En effet, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ n'est pas semi-simple et Weyl montre qu'il ne satisfait pas au théorème de complète réductibilité. Il exhibe tout simplement une représentation réductible de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ qui n'est pas complètement réductible. Ainsi, alors que l'exemple de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ constitue un support essentiel pour esquisser la preuve du théorème de complète réductibilité pour tout groupe de Lie complexe semi-simple, l'exemple de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ vient borner la validité de ce théorème et justifier la restriction aux groupes de Lie complexes *semi-simples*. Nous pouvons donc observer que la généralité vers laquelle Weyl tend est assujettie à une série de conditions rendues nécessaires par un contre-exemple.

Reste à savoir comment Weyl parvient à généraliser la méthode de restriction unitaire afin de démontrer le théorème de complète réductibilité pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. Dans ce cas également, certains éléments de connaissance issus de la théorie des revêtements seront mis à contribution. Nous verrons cependant que la preuve du théorème de complète réductibilité ne couvre que la fin de la troisième partie et le début de la quatrième partie de son article. Or, Weyl va bien au-delà de ce résultat : (1) il propose une importante reconfiguration de la théorie des algèbres de Lie complexes semi-simples ; (2) il propose une formule des caractères et de la dimension pour les représentations irréductibles d'un groupe de Lie complexe semi-simple quelconque.

2.3 Théorie générale des algèbres de Lie complexes semi-simples

Comme nous l'avons déjà indiqué, la première et la seconde partie de l'article de Weyl sont consacrées aux représentations des groupes « classiques », c'est-à-dire $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n)$

et $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$. À partir de la troisième partie, Weyl opère un décrochage en termes de niveau de généralité. Il propose une définition implicite des algèbres de Lie complexe *semi-simples* et *simples*, étant précisé qu'en 1925-1926 il emploie les termes « groupe infinitésimal » pour algèbre de Lie et « sous-groupe » pour idéal d'une algèbre de Lie. Pour éviter toute ambiguïté, nous utiliserons les dénominations qui sont maintenant en vigueur. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, un idéal I de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $[x, y] \in I$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et tout $y \in I$. Une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ est semi-simple si elle n'admet pas d'idéal résoluble non nul ; *a fortiori* elle est *simple* si elle n'est pas abélienne et si ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$ elle-même. Dans sa monographie sur la mécanique quantique (1928, 1931), Weyl emploie encore le terme de groupe infinitésimal pour désigner une algèbre de Lie. En revanche, dans ses cours sur la structure et les représentations des groupes de Lie à Princeton (1934), il hésite entre les deux vocables. Les notes manuscrites de ce cours le montrent : le chapitre III est consacré aux « fondements de la théorie générale des algèbres de Lie » : Weyl commence par utiliser la terminologie que nous connaissons. Puis il barre systématiquement le terme algèbre et, dans une note marginale en cadrée en rouge, il écrit au crayon à papier : « always group instead of algebra ! ».[28] La justification de ce choix apparaît dans le fascicule tapuscrit de Jacobson et Brauer qui résulte des notes de Weyl. On peut lire à la page 44 de ce fascicule : « In order to emphasize the analogy between the concepts in this theory and in the theory of groups, we adopt the terminology of the latter. We shall call a Lie algebra an infinitesimal group or simply a group ».[29] Ainsi, Weyl ne choisit pas de maintenir cette terminologie en hommage à Lie ou Cartan, mais parce qu'elle a un intérêt pédagogique, même si elle n'est pas parfaitement rigoureuse. Elle permet de souligner la parenté entre la théorie générale des groupes et la théorie générale des algèbres de Lie.

Revenons à l'article de 1925-1926. L'une des principales motivations de Weyl consiste à démontrer la proposition suivante : toute représentation de dimension finie d'un groupe de Lie complexe semi-simple se décompose en une somme directe de représentations irréductibles. Une difficulté supplémentaire doit être surmontée pour pouvoir démontrer le théorème de complète réductibilité à ce niveau de généralité. En effet, dans le cas de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, le candidat

28. H. Weyl, « Struktur und Darstellung Continuierlicher Gruppen », Princeton 1934, *ETH-Bibliothek*, Hs 91a : 52, p. 38.

29. H. Weyl, *The structure and representation of continuous groups : Lectures at Princeton university*, *ETH-Bibliothek*, Hs 91a : 70, p. 44. La première page du fascicule conservé à l'ETH a été arrachée. Une comparaison systématique avec les notes manuscrites (Hs 91 a : 52) nous a permis non seulement de dater ce fascicule mais également d'en retrouver le titre. Un autre exemplaire de ce fascicule est conservé à la bibliothèque de l'IAS.

pour appliquer la méthode de restriction unitaire est donné : il s'agit de $\mathrm{SU}(n)$. En revanche, pour un groupe de Lie complexe semi-simple quelconque G, il convient de construire un groupe de Lie compact qui joue exactement le même rôle que $\mathrm{SU}(n)$. Or, une telle construction ne va pas de soi dans la mesure où G n'est pas nécessairement un groupe de Lie *linéaire* — c'est-à-dire un sous-groupe continu fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans le paragraphe qui suit. Nous reviendrons ensuite sur les innovations que l'on doit à Weyl dans l'étude des systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples. Il introduit à ce propos un groupe qui porte maintenant son nom : il s'agit du *groupe de Weyl*.

2.3.1 Généralisation de la restriction unitaire

Résumons les étapes qui permettent à Weyl d'appliquer la méthode de restriction unitaire à tout groupe de Lie complexe semi-simple. Soient G un groupe de Lie complexe semi-simple et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Weyl introduit la forme de Killing au sens où nous l'entendons maintenant : il s'agit d'une forme quadratique sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ K(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}X \circ \mathrm{ad}X)$$

Puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, K est non dégénérée ; nous retrouvons le critère de Cartan que nous avons évoqué dans le premier chapitre, à ceci près que Cartan ne se fonde pas sur la forme K mais sur le coefficient $\psi_2(e)$ de l'équation caractéristique de $\mathfrak{g}$. Weyl démontre au surplus que, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors il existe une sous-algèbre réelle $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$ telle que la restriction de K à $\mathfrak{g}_u$ soit définie négative. Il considère ensuite l'application :

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

qui associe à tout $X \in \mathfrak{g}$ l'application ad_X de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$\mathrm{ad}_X(Y) = [X\ Y],$$

pour tous $Y \in \mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{a}$ l'image de $\mathfrak{g}$ par ad et $\mathfrak{a}_u \subset \mathfrak{a}$ l'image de $\mathfrak{g}_u$ par ad. Les algèbres de Lie $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{a}_u$ et $\mathfrak{g}_u$) sont isomorphes. Cette étape n'est pas anodine : en effet, les algèbres $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_u$ sont constituées de transformations *linéaires*, Weyl peut donc étendre à elles un raisonnement qui s'est avéré opératoire dans le cas des groupes et des algèbres de Lie classiques. Soit $\mathfrak{A}_u$ le groupe de Lie réel correspondant à $\mathfrak{a}_u$. Weyl démontre que $\mathfrak{A}_u$ est un groupe de Lie compact. Autrement dit, le groupe $\mathfrak{A}_u$, qui est un sous-groupe compact du groupe adjoint de $\mathfrak{g}$, sert de point d'appui pour étendre la méthode de restriction unitaire à

tout groupe de Lie complexe semi-simple. Pour le dire autrement, $\mathfrak{A}_u$ joue un rôle analogue à $\mathrm{SU}(n)$.

Seulement, nous n'avons encore fait que la moitié du chemin : il faut démontrer que le théorème de complète réductibilité s'étend de proche en proche aux algèbres de Lie $\mathfrak{a}_u$, $\mathfrak{g}_u$, $\mathfrak{g}$ et donc au groupe de Lie complexe semi-simple G. Pour parvenir à cette fin, il est à nouveau nécessaire de s'appuyer sur des considérations d'*analysis situs*. Nous savons donc que $\mathfrak{A}_u$ est compact. À ce titre, toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{A}_u$ est complètement réductible. La question est de savoir s'il en va de même pour $\mathfrak{a}_u$ qui désigne l'algèbre de Lie associée à $\mathfrak{A}_u$. Or, les représentations de dimension finie de $\mathfrak{a}_u$ ne sont pas en correspondance bijective avec celles de $\mathfrak{A}_u$, mais avec celles du revêtement universel $\widetilde{\mathfrak{A}}_u$ de $\mathfrak{A}_u$. Weyl prouve que si G est semi-simple, alors le revêtement universel $\widetilde{\mathfrak{A}}_u$ de $\mathfrak{A}_u$ est à un nombre fini de feuillets.[30] Pour cette raison, puisque $\mathfrak{A}_u$ est compact, $\widetilde{\mathfrak{A}}_u$ l'est également et il admet donc la propriété de complète réductibilité. Il en va de même pour $\mathfrak{a}_u$ en raison de la correspondance biunivoque que nous venons de rappeler. Étant donné que les algèbres de Lie $\mathfrak{a}_u$ et $\mathfrak{g}_u$ sont isomorphes, $\mathfrak{g}_u$ admet la propriété de complète réductibilité. Enfin, la restriction unitaire nous enseigne que si les représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}_u$ sont complètement réductibles, alors il en va de même pour $\mathfrak{g}$. Donc le théorème de complète réductibilité est valable pour tout groupe de Lie complexe semi-simple G.

Deux enseignements méritent d'être tirés au terme de ce résumé. (1) La généralisation de la restriction unitaire ne va pas de soi : la construction d'un groupe de Lie compact qui est censé jouer le même rôle que $\mathrm{SU}(n)$ supose toute une série de médiations. On peut dire qu'il s'agit là de l'étape proprement inédite dans la preuve du théorème pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. (2) Une fois ce groupe identifié, Weyl reprend les grands schémas de démonstration qu'il avait développés dans le cas de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$: mise à contribution de la théorie des revêtements et extension du théorème de complète réductibilité de proche en proche à $\mathfrak{A}_u$, $\widetilde{\mathfrak{A}}_u$, $\mathfrak{a}_u$, $\mathfrak{g}_u$, $\mathfrak{g}$ et finalement G. Si donc l'étude des représentations du groupe spécial linéaire nous permet déjà de tracer les grandes lignes de cette démonstration en général, elle n'est toutefois pas suffisante. Voilà pourquoi il n'est pas exact de dire que Weyl généralise à partir d'un cas particulier ; en réalité, au moment où il envisage des groupes de Lie complexes semi-simples définis abstraitement, il est amené à inventer les conditions qui permettent d'avoir alors recours à la restriction unitaire. Ces conditions ne sont donc pas données à l'avance, elles doivent être construites. Le particulier dit certes le général au sens

30. Nous renvoyons le lecteur à notre traduction commentée de l'article de Weyl pour saisir les grandes lignes de la démonstration de ce résultat.

où $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ constitue un bon guide pour savoir ce qu'il advient lorsque l'on raisonne sur des groupes de Lie complexes semi-simples quelconques ; encore faut-il ajouter la restriction suivante : le particulier ne nous indique toutefois pas *comment* prouver cette proposition *en général*.

2.3.2 Une réforme de la théorie des algèbres de Lie complexes semi-simples

Bien que la démonstration du théorème de complète réductibilité constitue le motif initial et principal de Weyl, son article excède cette seule finalité. Weyl propose une nouvelle théorie des algèbres de Lie complexes semi-simples. Ses innovations ne concernent pas directement les résultats auxquels il aboutit et qui, pour la plupart, ont déjà été démontrés par Cartan ; elles portent sur l'approche et la méthode que Weyl adopte. En effet, Weyl propose une interprétation géométrique du système de racines d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ relativement à une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et il démontre que ce système est *invariant* par un groupe fini (S) que l'on appelle maintenant *le groupe de Weyl*. On peut donc dire que Weyl *réforme* la théorie des algèbres de Lie complexes semi-simples : il n'en modifie pas fondamentalement le contenu ; en revanche, il lui imprime une forme qui fera date, puisqu'elle sera reprise par le groupe Bourbaki dans le cadre du *séminaire Sophus Lie* au cours des années 50.

À certains égards, Weyl s'inscrit dans la *continuité* par rapport à Cartan : en effet, dans le § 2 (troisième partie), il reprend à son compte la théorie des poids que Cartan avait développée dans son article de 1913 ; dans le § 3, il revient sur les critères de résolubilité et de semi-simplicité introduits par Cartan dans sa thèse en 1894. L'idée de réforme nous semble tout à fait significative, dans la mesure où elle indique que Weyl n'a absolument pas l'intention de *rompre* avec Killing et Cartan. En effet, une réforme ne marque pas de rupture dans le développement d'une théorie scientifique. Elle consiste seulement à ouvrir de nouvelles perspectives qui n'entrent pas en contradiction avec les précédentes. Inversement, Weyl ne se contente pas d'*ajouter* des résultats à ceux qu'avaient déjà établis Cartan et Killing. Il n'est donc pas non plus question de cumulativité au sens strict. En effet, Weyl reprend certains propositions déjà formulées par Cartan, mais il les démontre plus directement, il leur imprime un sens plus géométrique et il les appréhende sans doute de manière plus intuitive, c'est-à-dire en se débarrassant de calculs parfois fastidieux. L'idée de réforme mérite d'être corrélée à celle de *cumulativité critique* : Weyl examine le *bien-fondé* et les *limites* des méthodes proposées par Cartan afin de leur substituer une approche plus simple, plus commode et plus riche en

résultats. La manière dont Weyl appréhende les systèmes de racines en atteste clairement au cours du § 4 de la troisième partie. Résumons-la brièvement.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple de rang ℓ, soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, soit R le système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ et soit α l'une d'elles et $H_\alpha = [X_\alpha, X_{\alpha'}]$, avec $\alpha' = -\alpha$. Weyl introduit une transformation linéaire S_α de $\mathfrak{h}^*$ dans $\mathfrak{h}^*$ telle que

$$S_\alpha(\xi) = \xi - \frac{2\xi(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} \cdot \alpha, \forall \xi \in \mathfrak{h}^*.$$

Il choisit ℓ racines linéairement indépendantes α_1, ..., α_ℓ de R qui forment donc une base de $\mathfrak{h}^*$. Une racine quelconque $\alpha \in R$ est combinaison linéaire à coefficients rationnels des $\alpha_i, i = 1, ..., \ell$. Notons V l'espace vectoriel réel de dimension ℓ engendré par α_1, ..., α_ℓ. Considérons la forme de Killing K restreinte à $\mathfrak{h}$ et notons K^* la forme duale de K sur $\mathfrak{h}^*$; K^* est également bilinéaire et symétrique. Elle est même à valeurs réelles et définie positive sur V, ce qui signifie que V hérite naturellement d'une structure d'*espace euclidien*. Ces rappels quelque peu techniques permettent de comprendre comment Weyl parvient à concevoir les racines de R comme des éléments d'un espace euclidien de dimension ℓ assujettis à certaines propriétés. Les transformations S_α ont elles-mêmes une signification géométrique : en effet la forme bilinéaire, symétrique et définie positive K^* est laissée invariante par les S_α, donc celles-ci peuvent être interprétées comme des *isométries*. Weyl montre plus précisément que les S_α sont des réflexions d'hyperplan $\alpha = 0$. En outre, elles engendrent un groupe (S) qui est nécessairement fini puisque les racines sont permutées par les S_α. Le groupe (S) s'appelle maintenant le *groupe de Weyl* : le système de racines R est laissé *invariant* par (S). Cette manière d'appréhender les systèmes de racines est tout à fait essentiel, notamment lorsque l'on travaille en petite dimension, étant donné qu'il permet de visualiser les racines d'une algèbre de Lie et de comprendre géométriquement les relations qu'elles entretiennent. C'est particulièrement vrai si l'on prend l'exemple de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ qui est de rang 2 : les racines peuvent alors être représentées dans le plan ; il en va d'ailleurs de même pour les poids des représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

En tous les cas, cette manière très géométrisée de concevoir les systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples complexes est inédite et spécifique à Weyl au moment où il publie son article en 1925-1926. Elle vient directement concurrencer une approche plus calculatoire et quelque peu fastidieuse que l'on trouve notamment chez Killing et Cartan. L'article de Weyl ouvre la voie à la définition *axiomatisée* des systèmes de racines tel que nous les connaissons. [31]

31. Voir à ce propos J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, *op. cit.*, p. V-3.

Voilà qui nous permet concrètement de vérifier notre hypothèse selon laquelle Weyl réforme de manière significative la théorie de Cartan et Killing. Son article constitue à ce propos une étape décisive avant que ne soient publiés les fascicules de Bourbaki sur les groupes et les algèbres de Lie. Les emprunts de Bruhat et Cartier à l'article de Weyl de 1925-1926 sont nombreux et variés, comme en attestent les exposés que nous avons consultés dans le cadre du séminaire Sophus Lie.

Cette réforme qui apparaît pour l'essentiel au cours du § 4 de la troisième partie n'est pas sans lien avec les résultats auxquels Weyl souhaite aboutir en théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Par exemple, le groupe (S) joue un rôle essentiel dans la construction d'une théorie des caractères pour de tels groupes. De même, la reformulation des résultats de Killing et Cartan permet à Weyl de franchir une série d'étapes intermédiaires nécessaires avant de démontrer le théorème de complète réductibilité. Il convient ici d'être plus précis : Weyl ne réforme pas la théorie des algèbres de Lie complexes semi-simples gratuitement ; elle constitue le cadre dans lequel il doit pouvoir prouver le théorème de complète réductibilité en général. [32]

Inversement, il serait excessif de dire que son exposé consacré à la théorie des algèbres de Lie complexes semi-simples serait entièrement au service de la démonstration du théorème de complète réductibilité. Nous confirmons ainsi notre hypothèse de départ. L'article de Weyl de 1925-1926 ne saurait être réduit à la démonstration d'un théorème. Il se caractérise également par des avancées globales dans trois domaines : (1) la théorie des algèbres de Lie complexes semi-simples, (2) la théorie des caractères dans le cas des groupes de Lie complexes semi-simples, (3) la théorie des invariants. En effet, (1) Weyl réforme la théorie de Killing-

32. Donnons un exemple pour clarifier ce point. Soient X_α un élément de $\mathfrak{g}$ associé à la racine α, X_β un élément de $\mathfrak{g}$ associé à la racine β, alors $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ si $\alpha+\beta$ n'est pas une racine de R ; $[X_\alpha, X_\beta] = c_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}$ si $\alpha + \beta$ est une racine de R. Weyl montre que les X_α peuvent être choisis de telle sorte que les coefficients $c_{\alpha\beta}$ satisfassent à certaines conditions que nous n'énumérerons pas de manière exhaustive : les $c_{\alpha\beta}$ doivent être réels pour tous α, β tels que $\alpha + \beta \in R$, de plus $c_{\alpha\beta} = c_{-\alpha-\beta}$, etc. Weyl choisit une base $\{H_i, X_\alpha\}$ sur $\mathfrak{g}$ avec des X_α qui répondent aux conditions que nous venons partiellement d'énumérer — nous parlons maintenant à ce propos de *bases de Weyl* de $\mathfrak{g}$. Ces données, qui se situent dans le prolongement des travaux de Cartan sur les systèmes de racines, permettent en réalité à Weyl de construire l'analogue de la restriction unitaire dans le cas des algèbres de Lie complexes semi-simples. Soit donc $\{H_i, X_\alpha\}$ une « base de Weyl » de $\mathfrak{g}$, Weyl considère la sous-algèbre $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$ telle que tous les éléments $X \in \mathfrak{g}_u$ s'écrivent sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^{l} s_k H_k + \sum_{\alpha \in R} t_\alpha X_\alpha$$

où s_k est un imaginaire pur et $t_{-\alpha} = \bar{t}_\alpha$. La restriction unitaire signifie que, si $\mathfrak{g}_u$ possède la propriété de complète réductibilité, il en va de même pour $\mathfrak{g}$.

Cartan en lui imprimant une orientation plus géométrique, (2) comme le lui suggère Schur, il propose une formule des caractères et de la dimension pour tout groupe de Lie complexe semi-simple, construisant ainsi un analogue continu de la théorie de Frobenius, (3) enfin, il prolonge l'approche de Hurwitz en théorie des invariants, tout en la traduisant dans le langage des représentations de groupes. Weyl montre à ce propos que les invariants relatifs à tout groupe de Lie complexe semi-simple sont finiment engendrés, généralisant ainsi les résultats obtenus par Hurwitz pour $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Si la démonstration du théorème de complète réductibilité constitue l'une des principales motivations qui conduit à ces développements théoriques, elle ne les explique et ne les épuise pas tous. Dans cet article, le théorème de complète réductibilité joue indéniablement un rôle privilégié : il ne saurait être considéré comme une proposition parmi d'autres. Mais inversement, les innovations théoriques de Weyl ne sont pas bornées à la démonstration de ce théorème.

2.4 Weyl et la méthode axiomatique dans l'article de 1925-1926

L'axiomatisation de certains concepts mathématiques constitue une constante dans l'œuvre de Weyl dès la publication de *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Dans notre première partie, nous sommes revenus sur les définitions qu'il propose des surfaces topologiques, des surfaces de Riemann et des revêtements. Nous avons alors montré qu'il s'agit là de définitions implicites ou par axiomes dans une veine hilbertienne. Le premier chapitre de *Raum, Zeit, Materie* se caractérise également par un usage récurrent de la méthode axiomatique pour préciser les contours des concepts d'espace affine, d'espace vectoriel, etc., indépendamment de la nature des objets auxquels ils renvoient. Nous pouvons donc dire que la méthode axiomatique intervient de manière régulière dans la pratique des mathématiques de Weyl. Il n'y renonce pas brutalement lorsqu'il adhère à partir de 1919 au programme intuitionniste de Brouwer. Ce premier constat nous conduit à formuler cette règle de prudence : il serait erroné de surdéterminer les partis-pris épistémologiques de Weyl sur les fondements des mathématiques, au point de penser qu'ils *conditionnent de manière unilatérale* sa pratique des mathématiques. Les éditions successives de *Raum, Zeit, Materie* ont lieu au moment où éclate la polémique entre Weyl et Hilbert sur les fondements des mathématiques. Or, en 1918-1923, Weyl définit les concepts d'espace affine, d'espace vectoriel et de connexion affine conformément aux prescriptions de Hilbert. Il envisage ces concepts abstraction faite de la

nature des objets auxquels ils renvoient.

Inversement, il serait excessif de penser que l'épistémologie des mathématiques développée par Weyl au cours des années 20 n'aurait aucun lien avec sa pratique des mathématiques. En effet, un examen attentif de l'article de 1925-1926 que nous venons de commenter montre que Weyl combine de manière assez subtile *procédures axiomatiques* et *procédures constructives*, comme en attestent (i) l'intrication entre l'étude effective d'exemples et la théorie générale des groupes de Lie complexes semi-simples conçus abstraitement, (ii) la dialectique entre les points de vue topologique et algébrique. Or, à partir de 1923-1924 Weyl plaide en faveur d'une voie moyenne entre constructivisme et formalisme en épistémologie des mathématiques. Nous pouvons nous appuyer sur la fin d'un article de Weyl intitulé « Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik » (1926) pour confirmer ce point :

> Aussi est-il d'un grand profit que Brouwer ait fortifié, dans la mathématique, le sens de l'intuitivement donné. Son analyse exprime d'une manière pure le contenu de l'intuition mathématique originelle, et en conséquence est traversée d'une clarté sans énigme. Mais en même temps que le chemin de Brouwer il faut aussi suivre le chemin de Hilbert, car on ne saurait nier qu'est vivant en nous un besoin théorique, incompréhensible du point de vue strictement phénoménal, dont l'élan créateur, orienté vers la représentation symbolique du transcendant, demande à être satisfait. [33]

Ce passage apparaît à l'identique dans les « Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik » (1924). [34] Il indique que Weyl entend dépasser l'antagonisme entre formalisme et intuitionnisme non seulement sur les fondements des mathématiques, mais également dans sa pratique des mathématiques. Il appartient à l'intuition de donner un contenu aux connaissances mathématiques. De plus, la clarté est du côté de l'intuition (intellectuelle) telle qu'elle est définie par Brouwer. Dans ce passage, Weyl se conforme au sens que Brouwer prête à l'intuition dans sa célèbre conférence intitulée « intuitionnisme et formalisme ». [35] Précisons rapidement ce point. Brouwer n'adopte pas une position néokantienne face à ce qu'il appelle le formalisme : il ne dit pas que les connaissances mathématiques sont conditionnées par l'espace et le temps comme intuitions pures. Pour Brouwer, on ne saurait s'en tenir aux thèses kantiennes au sujet de l'espace depuis l'avènement des géométries non-euclidiennes. En réalité, Brouwer interprète « l'Esthétique transcendantale » de la manière suivante : la

33. H. Weyl, « L'état présent de la connaissance des mathématiques », in H. Weyl, *Le continu et autres écrits*, Paris, éd. Vrin, 1994, p. 161.

34. H. Weyl, « Remarques marginales à des problèmes fondamentaux des mathématiques », *op. cit.*, p. 286-287.

35. Brouwer, « Intuitionnisme et formalisme », in J. Largeault, *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Paris, éd. Vrin, 1992, p. 39 et suiv.

théorie kantienne de l'espace implique le caractère apodictique de la géométrie euclidienne et exclut donc la possibilité des géométries non-euclidiennes. Il ne s'agit pas pour nous de savoir si cette lecture est pertinente, mais comment elle conditionne la redéfinition de l'intuition par Brouwer. Ce dernier remet de fait en question l'idée selon laquelle l'espace serait une intuition *a priori* en se fondant sur les progrès accomplis en géométrie au cours du XIX^{e} siècle. Brouwer adhère au *Programme d'Erlangen* de Klein qui permet de reconnaître l'égale validité des géométries non euclidiennes par rapport à la géométrie non euclidienne. [36] Il n'écarte d'ailleurs pas la possibilité de « construire des objets pour lesquels la cinématique serait plus aisément interprétable en termes de géométrie non-euclidienne qu'en terme de géométrie euclidienne ». [37] En revanche, il maintient en partie seulement l'argument de Kant au sujet du temps :

> Le néo-intuitionnisme considère la dissociation d'instants vécus en parties qualitativement distinctes, qui ne se réunissent qu'en restant séparées par le temps, comme le phénomène fondamental de l'intellect humain, phénomène qui, par abstraction de son contenu émotionnel, donne le phénomène fondamental de la pensée mathématique, l'intuition de la dyade pure. [38]

Brouwer postule donc l'existence d'une « intuition originelle » à partir de laquelle peuvent être construits les objets mathématiques. Cette intuition, qui dépend donc du temps, est intellectuelle, et non pas sensible, ce qui montre une nouvelle fois que Brouwer fait subir un infléchissement aux thèses kantiennes. Si nous revenons au court extrait de l'article de Weyl mis en exergue, nous observons qu'il utilise exactement l'expression « intuition originelle » qui renvoie à une terminologie que l'on trouve déjà dans le texte fondateur de Brouwer intitulé « Intuitionnisme et formalisme ».

Ces précisions nous permettent de mesurer l'écart qui sépare les réflexions de Weyl en 1910-1913 et en 1919-1926 sur le sens et les fonctions de l'intuition en mathématiques. Si, en 1910-1913, il reconnaissait à l'intuition (sensible) une fonction heuristique dans la construction des connaissances mathématiques, il insistait également sur son obscurité ; il s'agissait

36. L.E.J. Brouwer, « La nature de la géométrie », (1909) *op. cit.*, p. 29 : « le groupe projectif contient, en plus du groupe euclidien, les groupes non-euclidiens qui dépendent aussi de six paramètres et sont aussi riches de propriétés que le groupe euclidien. Ils satisfont aux mêmes axiomes, sauf celui des parallèles, qui doit être remplacé par un autre. (...) Mais un groupe non-euclidien ne contient pas de groupe euclidien, et les invariants non-euclidiens ne sont généralement pas invariants pour le groupe euclidien ; en conséquence, la géométrie non euclidienne ne peut pas être considérée comme une partie de la géométrie euclidienne. Ainsi, en géométrie des coordonnées, la géométrie euclidienne et la géométrie non euclidienne sont égales en droits, tout en se contredisant mutuellement, et on ne peut plus soutenir que la première est *a priori mathématiquement* ».

37. « Intuitionnisme et formalisme », *op. cit.*, p. 43.

38. *ibid.*, p. 43.

alors de corriger les représentations intuitives en opérant un travail rigoureux de formalisation des concepts mathématiques les plus élémentaires, comme celui de courbe continue. À l'inverse, dès 1919, Weyl reprend à son compte la définition de l'intuition intellectuelle proposée par Brouwer pour corriger l'arbitraire d'une manipulation de symboles vides de sens. La clarté se déplace donc du côté de l'intuition. Mais les prescriptions intuitionnistes s'avèrent très contraignantes : en particulier, elles assujettissent l'existence d'un objet mathématique à sa constructibilité et elles interdisent le recours au tiers-exclu pour des ensembles infinis. Weyl opte finalement pour une position de compromis entre les thèses de Brouwer et de Hilbert à partir de 1924. L'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie est conforme à cette position. Avant d'en venir à ce point, identifions les fonctions et les usages que Weyl prête à la méthode axiomatique. Nous verrons qu'il se démarque de certains de ses contemporains en mathématiques, à commencer par E. Noether.

Plus précisément, nous entendons « comparer » brièvement l'article de Weyl de 1925-1926 et les travaux que Noether consacre à la théorie des idéaux en 1921 et en 1926. Cette comparaison mérite d'être justifiée. Tout d'abord, elle permet de mesurer un contraste saisissant entre Noether et Weyl au sens où ils ne partagent pas le même héritage en théorie des invariants. En effet, à partir du début des années 20, Noether replace le théorème de la base finie de Hilbert à l'intérieur de la « théorie des idéaux » qui relève de l'*algèbre commutative*. Autrement dit, Noether assujettit certaines propositions fondamentales issues de la théorie des invariants à des méthodes structurales : les théorèmes qu'elle formule admettent un niveau de généralité et d'abstraction remarquables. En revanche, Weyl prolonge les travaux de Hurwitz en théorie des invariants au cours des années 20 : il met donc en jeu une méthode qui n'est justement pas algébrique pour montrer que les invariants associés à un groupe de Lie complexe semi-simple sont finiment engendrés. De plus, Noether et Weyl n'assignent pas les mêmes fonctions à la méthode axiomatique dans leurs articles respectifs. Pour Noether, la méthode axiomatique mérite d'être mise en œuvre de manière systématique pour formuler des théorèmes inédits : elle a donc une fonction heuristique indéniable. Ce n'est pas le cas chez Weyl : selon lui, l'axiomatisation vient seulement après coup pour généraliser et clarifier certains concepts et raisonnements, elle n'est pas un instrument de découverte à proprement parler et elle doit donc être complétée par des procédures constructives. Weyl maintient cette position jusqu'à la fin de sa carrière, comme en témoigne le passage suivant :

> In stressing the importance of the axiomatic method I do not wish to exaggerate. Without inventing new constructive processes no mathematician will get very far. It is perhaps proper to say that the strength of modern mathematics lies in the interaction between axiomatics and

construction. [39]

Enfin, alors que Noether entend transposer les méthodes de l'algèbre à d'autres domaines des mathématiques, Weyl cherche à combiner approches algébrique et topologique dans son article de 1925-1926, refusant ainsi de privilégier l'algèbre au détriment d'autres champs disciplinaires.

2.4.1 Singularités de Weyl par rapport à Noether sur l'usage de la méthode axiomatique

Prémunissons-nous tout d'abord contre une erreur d'appréciation qui ne rendrait pas notre comparaison entre Noether et Weyl pertinente. L'opposition entre l'*intuitionnisme*, entendu comme la promotion de procédures constructives fondées sur une intuition, et le *formalisme*, au sens d'une manipulation de symboles vides de sens, ne permet pas de différencier de manière judicieuse les approches respectives de Weyl et de Noether dans leur pratique des mathématiques. Par exemple, selon une vue grossière, Weyl se situerait dans le prolongement de Brouwer, puisqu'il semble adhérer sans équivoque aux thèses intuitionnistes dès 1919. Inversement, Noether raisonnerait exclusivement sur des concepts définis abstraitement sans mesurer concrètement l'effectivité des théorèmes qu'elle démontre lorsqu'ils sont appliqués à des objets particuliers.

Or, comme nous l'avons souligné, dès 1923-1924 Weyl tempère fortement son adhésion à l'intuitionnisme et il cherche à combiner méthodes constructive et axiomatique en mathématiques. Parallèlement, il nous semble doublement inexact de considérer les travaux de Noether comme une manifestation du formalisme au sens d'un jeu sur des formules vides de sens. Tout d'abord, Noether ne s'est jamais intéressée à la question des fondements des mathématiques et elle n'utilise pas le langage de la théorie des ensembles. De plus, comme nous l'avons déjà souligné précédemment, elle ne fait pas totalement abstraction des constructions concrètes dans le développement des connaissances mathématiques. Prenons l'exemple de la théorie des idéaux qu'elle développe pour l'essentiel dans deux articles, à savoir « Idealtheorie in Ringbereiche » (1921) et « Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern » (1926). Noether commence par étudier les travaux de Dedekind sur des anneaux de nombres ou encore de Macaulay et Lasker sur des anneaux de polynômes. Les résultats auxquels ils parviennent constituent des réalisations de la théorie générale qu'elle élabore

39. H. Weyl, « A half-century of mathematics », *The American Mathematical Monthly*, **58**, n° 8 (Oct., 1951), p. 524.

en 1921 et en 1926. Cette manière de procéder est d'ailleurs une constante dans son œuvre, comme en témoigne son article de 1918 intitulé ≪ Invariante Variationsprobleme ≫ (1918) que nous avons brièvement évoqué dans notre deuxième partie. Dans cet article de 1918 comme dans sa théorie des idéaux, Noether opère un décrochage en termes de niveau de généralité par rapport à ses prédécesseurs. Elle formule des théorèmes transversaux. Par exemple, le premier théorème de Noether (1918) — qui établit un rapport de correspondance biunivoque entre lois de conservation et générateurs infinitésimaux d'un groupe de Lie laissant invariante une intégrale d'action — admet plusieurs réalisations en fonction du cadre physique adopté (par exemple la mécanique classique ou la relativité restreinte). De même, les théorèmes sur les idéaux (1921 / 1926) peuvent recevoir diverses interprétations, dès lors que l'on spécifie la nature des objets auxquels ils s'appliquent. La théorie des idéaux de Noether n'est donc pas ≪ vide de sens ≫. L'opposition entre formalisme et intuitionnisme n'est donc pas pertinente pour saisir les différences qui séparent les travaux de Noether et de Weyl.

Mais cela ne signifie pas qu'ils partagent la même conception et qu'ils font un même usage de la méthode axiomatique. Quelques rappels historiques très succincts s'imposent ici pour préciser notre propos. La *méthode* axiomatique commence à se développer systématiquement en mathématiques dès la fin du XIX^{e} siècle, donc avant l'avènement de l'algèbre abstraite et des mathématiques structurales que l'on situe dans les années 20 et surtout au début des années 30. En 1893, Weber définit les notions de groupe et de corps *abstraitement*, donc indépendamment de la nature des objets auxquels ils renvoient ; il formule en toute généralité les axiomes auxquels ces deux concepts sont assujettis. [40] Mais c'est surtout avec Hilbert que la méthode axiomatique acquiert sa vertu programmatique. Elle apporte rigueur, simplicité et généralité plus grande aux connaissances mathématiques. Comme le précise Sinaceur

> C'est à partir de Hilbert, comme on sait, que la méthode axiomatique devient une voie royale pour aborder ou maîtriser les questions mathématiques. Un problème nouveau, écrit Hilbert, reste ≪ comme un sauvageon qui ne se développe et ne porte de fruits ≫ qu'une fois soumis à la méthode axiomatique. [41]

Hilbert associe la méthode axiomatique à une exigence de rigueur dans les définitions de concepts et dans les démonstrations. C'est d'ailleurs au nom de cette rigueur que Weyl définit par une liste d'axiomes les concepts de surface topologique et de surface de Riemann en 1913. Mais Hilbert assigne d'autres fonctions à cette méthode. Elle doit intervenir pour *fonder* les théories mathématiques. Il insiste alors sur l'analyse de la structure logique des axiomatiques

40. Voir à ce propos H. Weber, ≪ die allgemeinen Grundlagen der galoisschen Gleichungstheorie ≫, *mathematische Annalen*, **43**, 1893, p. 521 et suiv.

41. H. Sinaceur, *Corps et Modèles*, Paris, éd. Vrin, 1999, p. 185.

formulées en arithmétique ou en géométrie élémentaire. De plus, il estime qu'elle est amenée à jouer un rôle essentiel pour formaliser les théories physiques : il s'agit du programme d'axiomatisation de la physique que celui-ci formule dès 1900 et qu'il mettra en jeu aussi bien en relativité générale qu'en mécanique quantique. En outre, elle doit être appliquée à toutes les branches des mathématiques ; de la sorte, elle en garantit l'unité. Hilbert insiste tout particulièrement sur la fonction unificatrice de la méthode axiomatique à la fin de la célèbre conférence intitulée « Axiomatisches Denken » qu'il prononce le 11 septembre 1917 *devant la société mathématique suisse à Zürich.*[42] Enfin, il insiste sur la fécondité des procédures axiomatiques dans le développement d'une théorie mathématique. Autrement dit, la méthode axiomatique ne garantit pas seulement rigueur, généralité et simplicité à nos raisonnements, elle devient un « instrument de découverte », elle permet même de formuler des problèmes inédits, d'inventer des théorèmes nouveaux et d'expliciter les connexions entre des domaines éloignés des mathématiques.

Notre but est de montrer que Weyl et Noether ne s'approprient pas la méthode axiomatique de la même manière et qu'ils ne lui assignent pas les mêmes fonctions. Pour ce faire, nous nous proposons de comparer les articles de Noether de 1921 et de 1926 sur la théorie des idéaux et l'article de Weyl de 1925-1926 sur les groupes de Lie. Weyl et Noether ne s'intéressent pas ici aux mêmes domaines théoriques. À première vue, cette comparaison semble donc arbitraire et dénuée de fondement. Pourtant, leurs travaux admettent un point commun : il s'agit dans les deux cas de transposer *un théorème de décomposition à une situation générale et abstraite.* Noether établit le théorème de la décomposition primaire d'un idéal dans un anneau noethérien en 1921, Weyl établit le théorème de la décomposition d'une représentation de dimension finie d'un groupe de Lie complexe semi-simple en une somme directe de représentations irréductibles en 1925-1926. Noether envisage des anneaux noethériens quelconques. Weyl envisage des groupes de Lie complexes semi-simples quelconques. Nous allons montrer qu'ils ne s'y prennent pas du tout de la même manière pour parvenir à cette fin ; cela s'explique en partie par le fait qu'ils n'assignent pas les mêmes fonctions à la méthode axiomatique.

Pour préciser déjà les choses, Weyl estime que les procédures axiomatiques ont seulement pour but de clarifier et de généraliser nos concepts et nos raisonnements. En revanche, Noether fait un usage *heuristique* de la méthode axiomatique. L'axiomatisation des concepts mathématiques tels que celui d'anneau ou d'idéal permet de *découvrir* les *similitudes* sous-jacentes à des domaines d'objets *a priori* distincts. Dans le même temps, le niveau de

42. D. Hilbert, « Axiomatisches Denken », *mathematische Annalen*, **78**, 1918, p. 415.

généralité adopté par Noether dans ses articles consacrés à la théorie des idéaux lui permet de formuler des théorèmes de structure inédits par rapport à ses prédécesseurs. On peut alors parler d'invention. De plus, Noether assigne une fonction *structurante* à la méthode axiomatique, au sens où elle commande l'architecture d'ensemble de la théorie qu'elle entend édifier. La référence à l'≪ algebraische Theorie der Körper ≫ de Steinitz doit ici être mentionnée en complément de Hilbert. En effet, dans cet article de 1910, Steinitz établit une classification exhaustive des corps et des extensions de corps dans des situations générales et abstraites, i.e. sans rapport immédiat avec la théorie des équations de Galois. Il s'agit de l'un des premiers textes traitant une structure algébrique pour elle-même. Certes, Noether ne se réfère pas exclusivement à Steinitz dans ses articles : elle s'approprie spécifiquement les travaux de Dedekind, Lasker, Macaulay ou encore Fraenkel sur les anneaux. Mais l'on ne peut pas non plus nier l'évidence : non seulement Noether reprend à son compte l'article de Steinitz dès 1915, comme en témoigne l'article qu'elle publie sous le titre ≪ Körper und Systeme rationaler Funktionen ≫ dans les *mathematische Annalen*[43], mais de plus Noether et Krull prêtent une fonction *programmatique* aux travaux de Steinitz sur les corps et les extensions de corps au début des années 20 : il s'agit de proposer l'*analogue* de l'≪ Algebraische Theorie der Körper ≫ dans le cas des anneaux. Il en résulte les trois articles que Krull publie en 1922, 1923 et 1924 sous le titre pour le moins évocateur : ≪ Algebraische Theorie der Ringe ≫. Krull annonce d'emblée la couleur :

> Dans son imposant travail intitulé ≪ Algebraische Theorie der Körper ≫, Steinitz a caractérisé de manière exhaustive tous les types de corps possibles en se fondant sur les extensions algébriques et transcendantes d'un corps défini abstraitement. On est amené à transposer la théorie qui y est développée aux anneaux, c'est-à-dire à des domaines qui diffèrent essentiellement des corps en ce qu'aucune hypothèse aussi forte n'est formulée sur la possibilité de l'inversion pour la multiplication. [44]

Cela posé, revenons sur l'article de Noether de 1921 intitulé ≪ Idealtheorie in Ringbereichen ≫. Elle prend pour point de départ un théorème bien connu en arithmétique élémentaire. Il s'agit du théorème fondamental de l'arithmétique : tout entier strictement positif se décompose de manière unique en un produit de puissances de nombres premiers. Sa motivation principale consiste à transposer cet énoncé dans une situation générale et abstraite, comme en atteste le passage suivant :

> Le transfert [Übertragung] des théorèmes de décomposition dans le cas des entiers rationnels

43. E. Noether, ≪ Körper und Systeme rationaler Funktionen ≫, *mathematische Annalen*, **76**, 1915, p. 161-196.

44. W. Krull, ≪ Algebraische Theorie der Ringe I. ≫, *mathematische Annalen*, **88**, 1922, p. 80.

> algébriques et des idéaux contenus dans des corps de nombres algébriques à des idéaux appartenant à des domaines d'intégrité quelconques et plus généraux constitue le contenu même du présent travail. [45]

Pour ce faire, elle définit axiomatiquement les concepts d'idéal et d'anneau dit « noethérien ». Rappelons à la suite de Noether qu'un idéal $\mathfrak{I}$ d'un anneau A est un sous-ensemble de A vérifiant les propriétés suivantes : (a) il s'agit d'un sous-groupe additif ; (b) si $x \in A$ et $y \in \mathfrak{I}$, alors $xy \in \mathfrak{I}$. En outre, elle raisonne sur une classe très générale d'anneaux que l'on qualifie rétrospectivement de noethériens. Elle montre en particulier qu'un anneau « noethérien » A satisfait aux propriétés équivalentes suivantes : (1) toute chaîne [Kette] croissante pour « l'inclusion » d'idéaux est stationnaire à partir d'un certain rang ; (2) tout idéal $\mathfrak{I}$ de A est finiment engendré. On peut donc dire que l'architecture de l'article de 1921 repose sur la *structure* d'anneau noethérien.

Elle affine ensuite sa théorie des idéaux en introduisant les concepts d'idéal *premier* et d'idéal *primaire*. Un idéal $\mathfrak{I}$ de A est dit *premier* s'il ne s'identifie pas à A et si $xy \in \mathfrak{I}$ implique $x \in \mathfrak{I}$ ou $y \in \mathfrak{I}$. Il est *primaire* si $\mathfrak{I} \neq A$ et si $xy \in \mathfrak{I}$ implique $x \in \mathfrak{I}$ ou $y^n \in \mathfrak{I}$ pour un certain entier positif n. Dans l'introduction de son article, Noether montre que les notions d'idéal premier et d'idéal primaire correspondent respectivement à celles de nombre premier et de puissance d'un nombre premier. Une telle analogie permet de *transposer* le théorème fondamental de l'arithmétique à une situation générale et abstraite, à savoir celle des anneaux noethériens.

Résumons brièvement cette opération de transposition. Une décomposition primaire d'un idéal $\mathfrak{I}$ de A consiste à exprimer $\mathfrak{I}$ comme « intersection » finie d'idéaux *primaires*. L'idéal $\mathfrak{I}$ s'écrit alors :

$$\mathfrak{I} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{K}_i$$

les $\mathfrak{K}_i$ étant des idéaux primaires. Maintenant, nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{I}$ est *irréductible* si $\mathfrak{I} = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{L}$ implique $\mathfrak{I} = \mathfrak{K}$ ou $\mathfrak{I} = \mathfrak{L}$. Le paragraphe 2 de l'article de Noether est justement consacré à la décomposition d'un idéal en idéaux irréductibles. Précisons immédiatement que le vocabulaire utilisé par Noether n'est pas ensembliste. En effet, voici comment elle formule cette première proposition : « Tout idéal peut être représenté comme plus petit commun multiple d'idéaux irréductibles en nombre fini ». [46] Elle demeure donc attachée à une terminologie héritée de l'arithmétique qu'elle emprunte d'ailleurs à Dedekind. Cela signifie qu'elle parvient à une théorie générale des anneaux « noethériens » à partir de situations spécifiques.

45. E. Noether, « Idealtheorie in Ringbereichen », *mathematische Annalen*, **81**, 1921, p. 25.
46. *ibid.*, p. 33.

Elle ne déduit pas régulièrement une théorie des anneaux et des idéaux en s'appuyant sur une conception ensembliste des mathématiques. Il faudra attendre l'ouvrage de Krull intitulé *Idealtheorie* (1935) pour que la théorie des anneaux soit traduite dans un langage ensembliste. À partir du paragraphe 4, Noether définit la notion d'idéal primaire et elle montre que si A est noethérien, alors « tout idéal non primaire est réductible ; autrement dit tout idéal irréductible est primaire », [47] la réciproque étant fausse, i.e. il existe des idéaux primaires qui ne sont pas irréductibles. Noether peut immédiatement en déduire que *tout idéal d'un anneau noethérien A admet une décomposition primaire* : nous obtenons l'analogue du théorème fondamental de l'arithmétique dans le cas très général d'un anneau noethérien. Ajoutons que le théorème de Noether est une généralisation du théorème de Lasker (1905) qui portait exclusivement sur des anneaux de polynômes.

On peut donc observer que Noether axiomatise progressivement les concepts d'idéal, d'idéal premier, d'idéal primaire et d'idéal irréductible. Ce recours systématique à la méthode axiomatique participe à la *mise au jour* et à la démonstration du théorème de décomposition primaire dans le cas d'un anneau noethérien. Voilà qui permet de justifier concrètement l'idée selon laquelle Noether prête une fonction heuristique à la méthode axiomatique : cette dernière permet non seulement de découvrir les points communs entre des objets mathématiques distincts, mais encore d'inventer de nouveaux théorèmes remarquables par leur niveau de généralité. En outre, elle vient structurer la composition de l'article de Noether.

Néanmoins, il faut préciser que Noether n'est pas la première à s'appuyer sur une définition par axiomes d'un anneau *abstrait*. Par exemple, dès 1914, Fraenkel définit le concept d'anneau indépendamment de la nature des objets qu'il contient, comme en atteste son article de 1914 intitulé « Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen ». [48] Bien qu'abstraite et fondée sur la méthode axiomatique, sa démarche n'est pas structurale. Il décrit en particulier les propriétés de factorisation des diviseurs de zéro dans un anneau qui n'est donc pas un domaine d'intégrité. En revanche, il n'isole pas le concept d'idéal et il ne formule pas de théorèmes de structure comparables à ceux que l'on trouve dans les deux articles de Noether

47. *ibid.*, p. 39.

48. A. Fraenkel, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **145**, 1914, p. 139-176. Pour une analyse de ses travaux voir en particulier L. Corry, *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Basel, Boston, Berlin, éd. Birkhäuser, 2004, p. 207-213. À la page 209, Corry fait la remarque suivante : « As a matter of fact, in Fraenkel's treatment of factorization in abstract rings there is no even a clue to the connections between rings and concepts such as ideals and modules. From the point of view of « modern algebra », modules and rings are intimately linked, and in fact subordinate to abstract rings ».

consacrés à la théorie des idéaux. Celle-ci utilise la méthode axiomatique dans un but bien précis : elle enrichit progressivement la structure d'anneau. En 1921, son point de départ correspond aux anneaux dont les idéaux sont finiment engendrés (anneaux noethériens). En 1926, elle assujettit progressivement les anneaux sur lesquels elle raisonne à cinq axiomes :

(I) Toute chaîne ascendante d'idéaux dans un anneau A est stationnaire à partir d'un certain rang ;

(II) toute chaîne descendante d'idéaux de A contenant un idéal non nul est finie ;

(III) A possède un élément neutre pour la multiplication ;

(IV) A ne contient pas de diviseur de 0 ;

(V) A est intégralement clos, ce qui signifie qu'il s'identifie à sa clôture intégrale dans son corps de fractions. [49]

Elle classifie les anneaux en fonction des axiomes auxquels ils satisfont. Pour le dire autrement, elle commence par raisonner sur une classe très étendue d'anneaux — que l'on qualifie rétrospectivement de noethériens — pour ensuite s'intéresser à des anneaux plus spécifiques, à savoir les *anneaux de Dedekind* qui sont définis par les cinq axiomes ci-dessus et que l'on rencontre essentiellement en théorie des corps de nombres et des corps de fonctions algébriques. Elle démontre ensuite le théorème de structure suivant : si A est un anneau de Dedekind, alors tout idéal $\mathfrak{I}$ de A s'exprime de manière unique comme intersection de puissances d'idéaux premiers. Elle va donc d'une structure très générale à des structures plus spécifiques ; en outre, elle tient pour acquis les résultats auxquels ses prédécesseurs sont parvenus pour des objets particuliers. Ainsi, la méthode axiomatique est une condition nécessaire pour inventer des théorèmes de structure inédits dans un esprit de *systématicité*. Cela signifie très exactement que *l'architecture d'ensemble* des articles de Noether est gouvernée par la méthode axiomatique. En 1921 comme en 1926, Elle formule bel et bien des *théorèmes de*

49. Précisons ce que cela signifie : soit K un corps, $A \subset K$ un sous-anneau, un élément $x \in K$ est dit *entier* sur A s'il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$, tel que $P(X) = 0$. Noether reprend littéralement cette définition à la page 31 de son article intitulé ≪ Abstrakter Aufbau der Idealtheorie ≫. Il s'agit à ses yeux d'une définition usuelle qu'elle reformule de manière structurale en s'appuyant sur le concept de module. En effet, un élément $x \in K$ est entier sur A si le sous-anneau $A[x] \subset K$ des expressions polynomiales en x à coefficients dans A est un A-module de type fini. Soient maintenant A et B deux sous-anneaux de K avec les inclusions $A \subset B \subset K$, on dit que B est entier sur A si tout élément $y \in B$ est entier sur A. En outre, le sous-anneau $C \subset K$ contenant tous les $x \in K$ entiers sur A s'appelle la clôture intégrale de A dans K. En particulier, A est intégralement clos dans K si tous les éléments $x \in K$ entiers sur A font partie de A. Enfin, on dit qu'un anneau est *intégralement clos* s'il s'identifie à sa clôture intégrale dans son corps de fractions. Par exemple, l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ est intégralement clos, i.e. il s'identifie à sa clôture intégrale dans son corps de fractions qui correspond à $\mathbb{Q}$. Soit dit en passant, $\mathbb{Z}$ est un anneau de Dedekind.

décomposition dans des situations générales et abstraites.

Contrairement à Noether, Weyl ne perçoit pas le processus d'axiomatisation comme un instrument de découverte dans sa pratique des mathématiques. S'il a bien recours à la méthode axiomatique dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913), *Raum, Zeit, Materie*, ou encore son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie, il ne s'appuie pas *systématiquement* sur elle. Ces deux arguments nous montrent bien que Weyl et Noether ne font pas le même usage de la méthode axiomatique. Avant de préciser les fonctions que Weyl lui assigne, il convient de résumer ses réflexions épistémologiques sur l'axiomatisation des théories mathématiques.

Dans *Philosophie der Mathematik* (1927) et dans un article beaucoup plus tardif intitulé ≪ Procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques ≫ [50], Weyl montre que les mathématiciens considèrent généralement un système d'axiomes selon deux points de vue distincts.

(1) L'axiomatisation peut tout d'abord intervenir pour *fonder* une théorie. Le point de vue adopté par le mathématicien est alors *transcendantal* — le terme est de Weyl — : il s'intéresse à la structure logique d'une axiomatique ; il cherche à en établir la *consistance* et la *complétude* ; il construit des modèles pour s'assurer de l'indépendance de certains axiomes ; il tente également de prouver que son système d'axiomes est *catégorique*, au sens où deux modèles quelconques qui le réalisent sont isomorphes. Weyl décrit de manière détaillée l'ensemble de ces problèmes dans le paragraphe tiré de *Philosophie der Mathematik* et intitulé ≪ méthode axiomatique ≫. Pour illustrer ce point de vue transcendantal, il se réfère aux *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (1899).

(2) Mais, à la fin de ce paragraphe, Weyl remarque que certains systèmes d'axiomes s'apparentent en réalité à des *définitions implicites de concepts*. Il s'agit alors d'exhiber de manière exhaustive les caractères d'un concept indépendamment de la nature des objets auxquels il renvoie. Le point de vue adopté par les mathématiciens est ici *immanent* : il n'est pas alors question de prouver que les systèmes d'axiomes qui permettent de définir les principales structures algébriques ou topologiques sont consistants, complets ou encore catégoriques ; il s'agit de s'assurer *a minima* qu'ils n'engendrent pas de contradictions. Dans cette perspective, les mathématiciens utilisent le processus d'axiomatisation à des fins purement pragmatiques ; ils se désintéressent alors des problèmes liés aux *fondements* des mathématiques. [51] Weyl re-

50. Weyl a rédigé ce texte après 1953.

51. H. Weyl, ≪ comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques ≫, in *Le continu et autres écrits*, *op. cit.*, p. 272.

marque que Noether fait un usage immanent de la méthode axiomatique. En revanche, étant donné que la question des fondements de la géométrie et de l'arithmétique joue un rôle central dans l'œuvre de Hilbert, on peut dire que ce dernier fait tantôt un usage immanent, tantôt un usage transcendantal de la méthode axiomatique.

Si nous voulons identifier avec rigueur les fonctions que Weyl prête aux procédures axiomatiques dans leur usage immanent, c'est-à-dire abstraction faite des questions liées aux fondements des mathématiques, il est nécessaire de revenir sur sa pratique de mathématicien. Rappelons que, dans le § 4 de *Die Idee der Riemannschen Fläche*, il reprend à son compte la définition par axiomes des variétés topologiques bidimensionnelles proposée par Hilbert dès 1902. Il montre ensuite au cours du § 7 que l'on peut définir les surfaces de Riemann comme des variétés analytiques complexes de dimension 1. Certes, les définitions qu'il formule sont encore incomplètes — par exemple, il ne précise pas que les variétés différentielles sont des espaces topologiques séparés et paracompacts — mais il s'agit là d'un détail secondaire. En effet, la méthode axiomatique permet à Weyl de définir en général et de manière parfaitement rigoureuse le concept de surface de Riemann ; mais surtout il explicite le lien entre les notions de variété (bidimensionnelle) et de surface de Riemann. Clarification, généralisation et unification sont donc les trois principales fonctions que Weyl assigne à la méthode axiomatique.

Cependant, l'axiomatisation n'est pas suffisante aux yeux de Weyl pour unifier de manière effective les mathématiques. À ses yeux, l'unité des mathématiques — qui ne peut pas être atteinte de manière définitive — se réalise lorsque l'on fait intervenir plusieurs domaines théoriques pour résoudre concrètement un problème. Comme nous l'avons vu précédemment, dans l'article de 1925-1926, il combine la méthode algébrique et infinitésimale de Cartan à la méthode intégrale et transcendante de Hurwitz. En outre, lorsqu'il prouve le théorème de complète réductibilité, il met en présence divers résultats empruntés aux domaines de l'algèbre, de l'*analysis situs* et de la théorie des groupes et des algèbres de Lie.

En revanche, Noether privilégie nettement l'algèbre abstraite — ou tout du moins les modes de raisonnement algébriques — pour unifier les mathématiques ; corrélativement, elle « décline » la méthode axiomatique au fur et à mesure de ses raisonnements. Cela signifie qu'elle enrichit les structures sur lesquelles elle travaille en leur adjoignant progressivement des propriétés supplémentaires. Elle hiérarchise ainsi différents types d'anneaux et d'idéaux en fonction des axiomes auxquels ils satisfont ; elle s'appuie rarement sur des exemples qui correspondraient aux concepts qu'elle introduit. À l'inverse, dans son article sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples, Weyl élabore sa théorie sur des cas particuliers, à commencer par le groupe spécial linéaire. La définition des groupes de Lie complexes

semi-simples abstraits n'intervient qu'au début de la troisième partie de son article. L'axiomatisation permet ici de *clarifier* certains concepts et elle sert de support afin de généraliser des méthodes déjà éprouvées dans des cas particuliers. Ainsi, la preuve du théorème de complète réductibilité dans le cas $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ permet de dessiner les grandes lignes de la démonstration de ce théorème pour tout groupe de Lie complexe semi-simple. Avec l'étude de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, Weyl mesure *in concreto* la pertinence et la portée de la restriction unitaire qu'il doit à Hurwitz. Ce n'est donc pas la méthode axiomatique, mais bien l'étude d'un exemple paradigmatique — à savoir $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ — qui constitue aux yeux de Weyl le véritable instrument de découverte en mathématiques.

Bref, alors que Noether raisonne directement dans le général lorsqu'elle établit ses théorèmes de décomposition en 1921 et en 1926, Weyl commence par démontrer son théorème de décomposition pour un certain groupe de Lie, à savoir $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Il construit par ce biais les grandes lignes d'une démonstration qui devra valoir dans une situation générale et abstraite, i.e. pour tout groupe de Lie complexe semi-simple.

2.4.2 Les critiques de Weyl à l'encontre de « l'algèbre abstraite »

Dans « Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege des mathematischen Verständnisses », conférence que Weyl prononce en 1931 devant la société suisse des enseignants de lycée, Weyl met en avant ses travaux sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples en insistant sur le fait qu'ils combinent des méthodes héritées à la fois de l'algèbre et de la topologie. Parallèlement, il formule une série de réserves à l'encontre de ce qu'il appelle l'algèbre abstraite, dont les principaux représentants ne sont autres que Noether, Artin et van der Waerden qui a tout juste publié la première édition de sa *Moderne Algebra* (1930-1931). Weyl prononce cette conférence alors qu'il a été recruté il y a un an comme professeur à l'université de Göttingen pour remplacer Hilbert. Il s'estime étranger au développement de l'algèbre abstraite dont il critique les méthodes et l'hégémonie à Göttingen. Il est convaincu que les algébristes des écoles allemandes de Göttingen et de Hambourg manipulent exclusivement des entités abstraites, dépourvues de tout contenu intuitif. Il estime même que le tournant structural, incarné notamment par la *Moderne Algebra* de van der Waerden — et, plus tardivement, par le *Lehrbuch der Topologie* (1934) de Seifert et Threlfall — empêche toute recherche effective portant sur des problèmes concrets. Weyl soupçonne l'algèbre abstraite de perdre en effectivité ce qu'elle gagne en généralité. Il emprunte à Polya l'expression de généralisation par dilution pour expliciter dans un langage imagé ses critiques

frontales à l'encontre de l'algèbre abstraite :

> In recent years mathematicians have had to focus on the general and on formalization to such an extent that, predictably, there have turned up many instances of cheap and easy generalizing for its own sake. Pólya has called it generalizing by dilution. It does not increase the essential mathematical substance. It is much like stretching a meal by thinning the soup. [52]

De plus, il estime qu'il est impossible d'appliquer les méthodes issues de l'algèbre aux autres branches des mathématiques. En particulier, il insiste sur le fait que la topologie et l'algèbre sont irréductibles l'une à l'autre, même si on peut les combiner pour étudier un même objet mathématique — surfaces de Riemann, groupes de Lie, etc. Il se réfère justement à son article de 1925-1926 pour montrer qu'il développe un autre pratique des mathématiques. Il refuse de privilégier une discipline au détriment des autres et il accorde une place fondamentale aux exemples pour appréhender et construire une théorie. À la différence de Noether et Artin, Weyl ne se définit pas comme un algébriste. Au contraire, il entend dialectiser des méthodes algébriques et topologiques dans l'étude des groupes de Lie. Cette dialectique constitue un instrument de découverte à part entière aux yeux de Weyl. Donc, non seulement son article de 1925-1926 reflète la voie moyenne entre formalisme et intuitionnisme qu'il adopte dès 1924, mais de plus il lui permet en retour de critiquer l'algèbre abstraite.

Revenons plus en détail sur sa conférence de 1931. Certes, Weyl est prêt à reconnaître que la théorie des idéaux développée par E. Noether dans les années 20 a des applications significatives en géométrie algébrique. Le passage suivant en atteste :

> Du côté de l'algèbre abstraite, je me contenterai d'insister sur le concept fondamental d'idéal. Si l'on s'appuie sur la méthode algébrique, alors, dans un espace tridimensionnel muni de coordonnées cartésiennes complexes x, y, z, une variété algébrique est définie par un système constitué de plusieurs équations simultanées
>
> $$f_1(x, y, z) = 0, ..., f_h(x, y, z) = 0.$$
>
> Les f_i sont des polynômes. Rien ne nous dit que deux équations suffisent pour définir une courbe. Non seulement les f_i mais encore tous les polynômes de la forme
>
> $$f = A_1 f_1 + ... + A_h f_h,$$
>
> — les A_i étant également des polynômes — s'annulent en les points de la variété. L'ensemble des polynômes de cette forme constituent un ≪ idéal ≫ contenu dans l'anneau de polynômes [i.e. dans $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$]. (...) D'après le théorème de la base de Hilbert [Hilbertschen Basissatz] tout idéal dans un anneau de polynômes [à coefficients dans un corps et, plus généralement, dans un anneau noethérien] admet une base finie ; on peut choisir des polynômes en nombre fini $f_1, ..., f_h$ parmi les éléments d'un idéal [de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$] de telle sorte que tout polynôme de l'idéal en question s'écrive sous la forme $f = A_1 f_1 + ... + A_h f_h$. Pour cette raison, on peut

52. H. Weyl, ≪ Topology and abstract Algebra (...) ≫, *op. cit.*, p. 454.

> remplacer l'étude des variétés algébriques par celle des idéaux. Supposons que l'on ait affaire à une surface algébrique et donnons-nous des points et des courbes algébriques sur elle. Ces points et ces courbes peuvent être représentés par des idéaux qui sont des diviseurs de l'idéal [associé à la surface algébrique en question]. Le théorème fondamental de M. Noether a pour objet des idéaux dont la variété des zéros (Nullstellenmannigfaltigkeit) est constituée exclusivement de points en nombre fini : un polynôme appartient ou non à l'un de ces idéaux en fonction de son comportement en ces points. Ce théorème résulte tout simplement de la décomposition de l'idéal [associé à la surface algébrique de départ] en idéaux premiers. Bien qu'il ait d'abord été mis au jour par Dedekind dans la théorie des corps de nombres algébriques, le concept d'idéal tel qu'il résulte des travaux d'E. Noether peut être comparé à un fil rouge qui traverse toute l'algèbre et toute l'arithmétique. [53]

Précisons son propos en langage légèrement modernisé. Soit K un corps algébriquement clos, une sous-variété algébrique $V(S)$ de K^n est l'ensemble de zéros communs à une famille S de polynômes de $K[X_1, ..., X_n]$, autrement dit :

$$V(S) = \{x \in K^n \mid f_i(x) = 0, \forall f_i \in S\}$$

Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de $K[X_1, ..., X_n]$ engendré par S, on peut montrer que $V(S)$ s'identifie à $V(\mathfrak{a})$. Ce fait permet à Weyl d'en inférer que l'étude des variétés algébriques (contenues dans K^n, K étant un corps algébriquement clos) « peut être remplacée par celle des idéaux » de $K[X_1, ..., X_n]$. Soit maintenant S un système de polynômes de $K[X_1, ..., X_n]$ en nombre fini, $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par S. Introduisons l'idéal $I(V(\mathfrak{a}))$ défini par

$$I(V(\mathfrak{a})) = \{f \in K[X_1, ..., X_n] \mid f(x) = 0, \forall x \in V(\mathfrak{a})\}.$$

L'anneau $I(V(\mathfrak{a}))$ correspond tout simplement au radical de $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire à :

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in K[X_1, ..., X_n] \mid \exists r \in \mathbb{N}^*, f^r \in \mathfrak{a}\}.$$

On obtient ici l'une des formulations du *Nullstellensatz* de Hilbert. Il y a donc une correspondance biunivoque entre radicaux d'idéaux de $K[X_1, ..., X_n]$ et sous-variétés algébriques de K^n. Maintenant, nous disons qu'une variété algébrique contenue dans K^n est *irréductible* si elle ne peut pas s'écrire comme réunion de deux sous-variétés fermées propres. On établit justement une correspondance biunivoque entre variétés algébriques irréductibles de K^n et idéaux premiers de $K[X_1, ..., X_n]$. Allons plus loin : l'anneau $K[X_1, ..., X_n]$ est factoriel. Autrement dit, tout polynôme $f \in K[X_1, ..., X_n]$ s'écrit de manière « unique » comme produit

53. H. Weyl, « Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension », *op. cit.*, p. 649.

de polynômes irréductibles. Bref, $f = \prod f_i^{m_i}$, où les f_i sont irréductibles. En particulier, soit (f) l'idéal engendré par f. Le radical de (f), noté $\sqrt{(f)}$, vérifie

$$\sqrt{(f)} = \bigcap_i \ (f_i)$$

Les f_i étant les polynômes de $K[X_1, ..., X_n]$ qui interviennent dans la décomposition de f en facteurs irréductibles. Puisque donc les f_i sont irréductibles, les idéaux (f_i) sont premiers. Enfin, l'ensemble algébrique $V(f)$ satisfait à la propriété :

$$V(f) = \bigcup \ V(f_i).$$

C'est très précisément à ce résultat que songe Weyl dans « Topologie und abstrakte Algebra » ; il reconnaît par là même une effectivité à la théorie des idéaux développée par E. Noether en géométrie algébrique.

Maintenant, d'un point de vue épistémologique, Weyl formule deux arguments justifiés au sujet des travaux de Noether en algèbre abstraite. Tout d'abord, il ne lui a pas échappé que Noether opère un véritable décrochage par rapport à Dedekind en termes de niveau de généralité et d'abstraction lorsqu'elle développe sa théorie des idéaux. Contrairement à van der Waerden, il ne répète pas à l'envi le propos prêté à Noether selon lequel « Es steht alles schon bei Dedekind ». Van der Waerden est l'un des principaux acteurs dans la propagation de ce mot d'ordre qui revient à ériger de manière non critique Dedekind au rang de père fondateur de l'algèbre abstraite. [54] Ensuite, Weyl insiste sur le caractère transversal des théorèmes auxquels E. Noether parvient, puisqu'ils peuvent s'appliquer indifféremment à des objets qui relèvent de l'algèbre ou de l'arithmétique.

Pour autant, son analyse succincte des travaux de Noether sur les idéaux ne peut pas être détachée du pessimisme qu'il exprime à l'encontre de l'algèbre abstraite et des mathématiques structurales. À notre sens, ce « pessimisme » ne provient pas d'une attitude passéiste ou d'une forme de conservatisme. En particulier, il ne faudrait pas s'imaginer qu'il rejette les méthodes de l'algèbre abstraite d'un revers de la main. Plusieurs références nous montrent qu'il a su se les approprier dans ses cours comme dans ses ouvrages. Ainsi, le chapitre III de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928, 1931) est un condensé de théorie *abstraite* des groupes. De plus, pour élaborer son cours sur les groupes et les algèbres de Lie à Princeton en 1934, il s'entoure de deux « algébristes » en qualité d'assistants, à savoir Brauer

54. Son écrit à Borchardt sur les fonctions modulaires et sa correspondance avec Frobenius au sujet des déterminants de groupes montrent que les méthodes de Dedekind ne relèvent pas de l'algèbre abstraite, même s'il est l'un des plus éminents représentants des mathématiques conceptuelles au cours de la seconde moitié du XIX^{e} siècle.

et Jacobson. Ses notes de cours montrent qu'il est attentif aux derniers développements en algèbre abstraite, évoquant par exemple la théorie des algèbres non associatives [55]. De plus, son style et sa démarche indiquent qu'il reconnaît la pertinence de ce domaine pour simplifier ses propres raisonnements. Enfin, en 1946, il aborde la théorie de Galois dans ses cours à Princeton sur le modèle de la réforme de la théorie de Galois initiée par Artin dès le milieu des années 20. [56] Mais il se trouve qu'en 1930-1933 Weyl est isolé à l'université de Göttigen. Le pessimisme qu'il exprime dans sa conférence de 1931 reflète cette situation. Il estime donc qu'une mathématique purement formalisée ne nous donne pas les moyens de construire effectivement les objets auxquels elle est censée s'appliquer. À ses yeux, les mathématiques dites structurales consistent à manipuler *in fine* des concepts très généraux, mais vides de sens :

> Avant de pouvoir généraliser, formaliser et axiomatiser, il doit y avoir une substance mathématique. Je pense que la substance mathématique que nous nous sommes entraînés à formaliser durant les dernières décennies s'épuise progressivement. Par suite, je prévois que la génération à venir connaîtra des temps difficiles en mathématiques. [57]

Aux yeux de Weyl, une théorie mathématique n'a de contenu que si elle permet de résoudre effectivement des problèmes pour des objets que l'on peut appréhender par l'intuition. Elle ne saurait donc se réduire à un appareil conceptuel qui renverrait exclusivement à des entités abstraites. L'article de 1925-1926 sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples est conforme à ces prescriptions. En effet, l'étude des représentations de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ et de $\mathrm{SO}(n)$ fournit la substance mathématique qui permet à Weyl de ne pas s'égarer dans des généralités creuses. En outre, il nous semble parfaitement justifié de dire que la formalisation et l'axiomatisation viennent après coup dans le développement d'une théorie mathématique. Cependant, Weyl défend une thèse trop radicale à l'encontre de l'algèbre abstraite. Le pessimisme qu'il exprime dans sa conférence de 1931 sera largement réfuté par Alexandrov dans le discours qu'il prononce en hommage à E. Noether devant la société mathématique de Moscou le 5 septembre 1935. [58] Preuve que la conférence de Weyl a bien une tonalité polémique et qu'elle est perçue comme telle. Pour nuancer le pessimisme de Weyl,

55. H. Weyl ≪ Struktur und Darstellung Continuierlicher Gruppen, Princeton 1934 ≫, *ETH-Bibliothek*, Hs 91a : 52, p. 10-11.

56. H. Weyl ≪ Theory of groups II ≫, 1945-1946, chapter IV ≪ Galois Theory ≫, *ETH-Bibliothek*, Hs 91a : 64, numéroté de la page 20 à la page 40. L'ouvrage d'Artin intitulé *Galois Theory* (éd. de 1944) est cité comme source principale.

57. H. Weyl, ≪ Topologie and abstract Algebra as two roads of mathematical comprehension ≫ (Part II), *op. cit.*, p. 651.

58. P. S. Alexandrov ≪ in Memory of Emmy Noether ≫ (5 septembre 1935), in E. Noether, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, éd. Springer, 1983, p. 4-5.

on peut tout d'abord souligner que les théorèmes de Noether en théorie des idéaux ont des applications décisives en géométrie algébrique, ce que Weyl est d'ailleurs prêt à reconnaître. De même, la théorie des corps *réels*[59] développée par Artin et Schreier en 1926 permet de résoudre le 17^{e} problème de Hilbert.[60] En outre, Alexandrov indique que Noether ne recherche pas la généralité pour la généralité. Selon elle, les mathématiques sont constituées de « constructions concrètes » et de « principes généraux » :

> En mathématiques, de même que pour ce qui concerne la connaissance du monde, les deux aspects sont également valables : l'accumulation de faits et de constructions concrètes, et l'établissement de principes généraux qui dépassent l'isolement des faits individuels et portent la connaissance factuelle à un nouveau degré de compréhension axiomatique.[61]

Bien que dans sa théorie des idéaux, Noether s'appuie sur des concepts abstraits qui sont susceptibles de diverses réalisations, il serait erroné de supposer qu'elle ignore les applications de ses théorèmes de structure. Les théories qu'elle développe ne s'épuisent en rien dans des généralités creuses. Comme le rappelle H. Sinaceur, l'algèbre abstraite permet rigueur et fécondité. Il est aussi question de simplicité, dans la mesure où Noether formule et résout des problèmes initialement complexes tant qu'ils sont rapportés à des objets particuliers.

On pourrait presque renverser l'argument de Weyl : loin de nous éloigner irrémédiablement d'objets supposés concrets, les concepts introduits par Noether nous permettent de les classer de manière systématique et de mesurer jusqu'à quel point un théorème peut demeurer valide. Dans son hommage à E. Noether en 1935, Weyl reconnaît qu'elle refusait cette attitude pessismiste. Selon elle, il est inexact de supposer que l'algèbre abstraite évide les mathématiques de leur substance ; plus radicalement, il est infondé de laisser entendre que les méthodes de l'algèbre abstraite seraient stériles. Mais de son côté, Weyl maintiendra ce pessimisme jusque dans les années 50, malgré ses emprunts à ce domaine dans ses propres cours à Princeton. En particulier, ce pessimisme resurgit quasiment à l'identique dans le texte que Weyl rédige après 1953 sous le titre « comparaison entre les procédures axiomatiques et les procédures constructives en mathématiques ».[62]

---

59. Un corps $\mathbb{K}$ est dit *réel* si -1 ne peut pas s'écrire comme somme de carrés, i.e. $-1 \neq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, pour tout n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$.

60. Ce problème s'énonce comme suit : il s'agit de savoir si une forme de n variables de degré quelconque à coefficients réels et toujours positive ou nulle pour les valeurs réelles des variables peut s'écrire comme somme de carrés de formes réelles. Schreier et Artin répondent positivement à cette question en 1926. Leurs travaux ont été commentés par H. Sinaceur dans *Corps et modèles*, *op. cit.*, p. 231 et suiv.

61. P. S. Alexandrov, *op. cit.*, p. 5.

62. H. Weyl, « comparaison entre les procédures axiomatiques et les procédures constructives en mathématiques », *op. cit.*, p. 274 : « Puisque la résolution de notions et de faits complexes et relativement

Cependant, il ne faudrait pas tirer prétexte du pessimisme de Weyl pour ne pas reconnaître la pertinence des autres arguments développés dans cet article. D'un côté, il sous-évalue l'effectivité des méthodes algébriques mises en place par Noether dans sa théorie des idéaux et par Artin-Schreier dans leur théorie des corps réels. De l'autre, il critique à juste titre la position quasiment hégémonique qu'elles occupent à Göttingen et à Hambourg au début des années 30, comme si l'algèbre constituait une discipline-modèle susceptible d'homogénéiser et d'unifier toutes les branches des mathématiques. En réalité, Weyl montre que de nombreuses théories se situent au *croisement* entre plusieurs champs disciplinaires et qu'elles reposent sur un savant équilibre entre des méthodes relevant de l'algèbre, de l'analyse ou encore de l'*analysis situs*. Il rappelle qu'entre 1901 et 1913, Hilbert, Koebe et lui-même sont parvenus à unifier le point de vue algébrique et local de Weierstrass et le point de vue topologique et intégral de Riemann en analyse complexe. De même en 1925, lorsqu'il développe la théorie des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples, il passe de la méthode algébrique et infinitésimale de Cartan à la méthode intégrale et transcendante de Hurwitz. Pour le dire autrement, Weyl ne conçoit pas l'unité des mathématiques à partir du point de vue « surplombant » dont jouit l'algèbre abstraite au début des années 30 dans les écoles allemandes de Göttingen et de Hambourg. Il tente de mettre une telle unité concrètement à l'épreuve en confrontant des modes de raisonnement qui relèvent tantôt de l'algèbre — au sens large du terme — tantôt de la topologie.

Dans sa conférence intitulée « Topologie und abstrakte Algebra », Weyl ne reconnaît pas à leur juste valeur les travaux de Noether en algèbre abstraite, ce qu'il tentera d'ailleurs de corriger dans l'hommage qu'il lui rendra en 1935. Cependant, il est parfaitement en droit de mettre en doute l'hégémonie de l'algèbre abstraite qui semble s'imposer à la suite du succès remporté par la *Moderne Algebra* de van der Waerden. Weyl s'appuie justement sur *Die Idee der Riemannschen Fläche*, mais aussi sur son article de 1925-1926 pour montrer qu'il ne raisonne pas en algébriste et qu'il n'entend pas assujettir les autres branches des mathématiques à des méthodes empruntées à l'algèbre.

Nous pouvons maintenant saisir avec rigueur le lien entre les positions épistémologiques de Weyl et sa pratique des mathématiques, incarnée en particulier par son article de 1925-

concrets en notions générales et abstraites a tellement attiré l'attention des mathématiciens récemment, il est humain qu'ils se soient parfois laissés aller à des généralisations faciles, à des généralisations par raréfaction, comme Polya les appelle, qui n'ajoutent rien à la substance mathématique mais ne font que délayer dans l'eau la bonne soupe nourrissante. Ces phénomènes et de dégénérescence ne sont pas des arguments contre la correction et l'importance de la méthode axiomatique ». La dernière phrase ajoutée ici par Weyl vient tempérer le pessimisme qu'il répète au mot près dans ce texte écrit peu avant sa mort.

1926. D'un côté, Weyl aboutit à une théorie générale des représentations des groupes de Lie complexes semi-simples en s'appuyant sur l'étude effective d'un exemple paradigmatique, ce qui nous semble conforme à sa thèse philosophique selon laquelle il est nécessaire de trouver un équilibre entre procédures constructives et procédures axiomatiques en mathématiques. Inversement, dans « Topologie und abstrakte Algebra », Weyl s'appuie sur son article de 1925-1926 pour remettre en question l'hégémonie des méthodes algébriques, en particulier dans les universités de Göttingen et de Hambourg. Il entend montrer que l'algèbre ne suffit pas pour garantir une unité aux mathématiques, elle ne constitue pas à ses yeux une discipline-modèle dont les modes de raisonnement seraient susceptibles d'être transposés à n'importe quelle autre branche des mathématiques. La topologie lui sert alors de contre-exemple.

Ce n'est pas seulement au nom de positions philosophiques que Weyl s'oppose au mouvement d'algébrisation des mathématiques, incarné notamment en Allemagne par Noether et Artin ; en réalité, sa pratique même des mathématiques ne satisfait pas aux normes de raisonnement préconisées par les tenants de l'algèbre abstraite. Par extension, les réserves de Weyl à l'encontre des méthodes structurales ne peuvent pas être bien comprises tant que l'on ne s'intéresse pas à ses textes proprement mathématiques. Certes, Weyl utilise de manière récurrente la méthode axiomatique dans ses travaux de recherches, mais il n'en fait pas un instrument de découverte. De plus, le processus d'axiomatisation ne gouverne pas l'architecture d'ensemble de ses articles. Voilà pourquoi, il est rigoureusement impossible de considérer l'article de 1925-1926 dans le cadre d'une mathématique des structures. Cette assertion indique que les positions philosophiques de Weyl sont ici cohérentes avec sa pratique des mathématiques.

Il convient cependant de ne pas généraliser notre raisonnement. Au moment même où il tient sa conférence sur la topologie et l'algèbre abstraite, Weyl publie la seconde édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* dont nous proposerons une analyse détaillée dans le prochain chapitre. Un fait attire notre attention : le chapitre III de son ouvrage, qui est consacré à la théorie des groupes et des représentations de groupes, est organisé comme un traité d'algèbre abstraite. Il reprend d'ailleurs à son compte une extension du théorème de Jordan-Hölder qui est due à E. Noether.[63] Cette donnée n'invalide pas la thèse de Weyl selon laquelle l'unité des mathématiques ne se joue pas à partir de l'algèbre abstraite érigée au rang de discipline-modèle. Toujours est-il que Weyl est prêt à reconnaître l'effectivité de l'algèbre abstraite pour mathématiser la mécanique quantique ; il semble donc conscient que le pessimisme qui marque la fin de « Topologie und abstrakte Algebra » est excessif.

63. H. Weyl, *Group theory and Quantum mechanics*, 1931, New York, éd. Dover, 1950, p. 131 et suiv.

2.5 Conclusion du deuxième chapitre : prolongements et réception de l'article de Weyl de 1925-1926

Dans la quatrième partie de son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples, Weyl ne se satisfait pas de la méthode de Cartan pour construire les représentations irréductibles d'un groupe de Lie. Il se demande comment on peut étendre aux groupes de Lie le procédé utilisé par Frobenius pour embrasser d'un seul regard toutes les représentations irréductibles inéquivalentes d'un groupe fini à partir de la représentation régulière. Weyl rappelle à ce propos que la représentation régulière ≪ fournit d'un seul coup toutes les représentations irréductibles ≫. [64] Cette question demeure ouverte à la fin de l'article de Weyl. Il l'examine à nouveaux frais avec F. Peter en 1926-1927 dans le cas des groupes compacts. Il faut préciser que les travaux de Haar et de von Neumann visant à garantir l'existence et l'unicité d'une mesure invariante par translation sur un groupe topologique localement compact sont bien plus tardifs puisqu'ils datent de 1933 et 1935. Toujours est-il qu'en 1927, Peter et Weyl aboutissent au fameux théorème qui porte maintenant leur nom et que nous nous proposons de formuler en langage moderne. [65] Soient G un groupe topologique compact et E un espace de Hilbert complexe muni par définition d'un produit scalaire que l'on notera $(.|.)$. On se donne une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$. Les coefficients matriciels de ρ dans une base (e_i) de E sont définis par :

$$\varphi_{ij}^{\rho}(g) = (\rho(g)e_i|e_j).$$

Soit $L^2(G)$ l'espace des fonctions de carré sommable à valeurs complexes sur G. Il s'agit d'un espace de Hilbert de dimension infinie. Plus précisément, $L^2(G)$ est l'espace sous-jacent à la représentation régulière droite de G. Désignons par $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de G. Le théorème de Peter-Weyl revient à affirmer que

$$\{\sqrt{n^{\rho}}\varphi_{ij}^{\rho} \mid \rho \in \widehat{G}, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

est une base orthonormale de $L^2(G)$; les ρ désignent les représentants unitaires des classes d'équivalence de représentations irréductibles inéquivalentes de G, les n^{ρ} les dimensions respectives des ρ, les φ_{ij}^{ρ} les coefficients matriciels des ρ dans des bases orthonormales. Dans le cas des groupes finis comme dans celui des groupes compacts, chaque représentation irréductible

64. H. Weyl, ≪ Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen ≫ IV, *op. cit.*, p. 390.

65. Pour une analyse rigoureuse de l'article de Peter et Weyl, voir en particulier T. Hawkins, *op. cit.*, p. 500 et suiv.

est contenue un nombre de fois égal à sa dimension dans la représentation régulière. Peter et Weyl obtiennent ainsi dans le cas des groupes compacts l'exact analogue des résultats établis par Frobenius pour les groupes finis. Le papier de Peter et Weyl constitue donc un prolongement très direct de la quatrième partie de l'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples : ils répondent à une question que Weyl avait lui-même formulée à la fin de cet article.

L'intérêt de Weyl pour les représentations des groupes de Lie se manifeste à plus ou moins longue échéance. Il développe presque immédiatement cette théorie de manière remarquable à l'occasion de ses travaux en mécanique quantique. Ainsi, dès 1927 il s'intéresse aux représentations *projectives* de groupes dans son premier article consacré à la mathématisation de la mécanique quantique. Il ne s'en tient donc plus aux représentations *linéaires* qui constituaient son cadre de référence exclusif entre 1924 et 1926. De plus, il synthétise l'essentiel des applications de la théorie des groupes et des représentations de groupes à la mécanique quantique dans les chapitres IV et V de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928 pour la première édition, 1931 pour la seconde édition et la traduction en anglais). Plus précisément, dans le chapitre V de cet ouvrage, il approfondit le lien entre les représentations irréductibles du groupe symétrique d'une part et les représentations du groupe linéaire ainsi que du groupe unitaire d'autre part. Il avait déjà abordé des recherches de cette nature pour $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ dans la première partie de son article de 1925-1926.

À partir de cette période, la théorie des groupes et des représentations de groupes constitue l'un des thèmes de prédilection de Weyl dans ses cours à l'ETH de Zürich et, par la suite, à Göttingen ainsi qu'à Princeton. L'ensemble de ses travaux seront synthétisés dans son ouvrage de 1939 intitulé *The classical groups* à la suite de leçons sur les représentations de groupes et la théorie des invariants données à l'Institute for Advanced Studies entre 1934 et 1936. Nous avons d'ailleurs pu reconstituer le dossier quasiment complet de ces leçons au cours de nos investigations dans les archives Weyl à l'ETH de Zürich. Nous avons tout d'abord étudié un premier cahier (sous la cote Hs 91 a : 52) contenant les premières notes préparatoires aux cours de 1934 et de 1934 / 1935 sur les groupes de Lie. Nous avons découvert que la suite de ces notes se trouve dans un autre cahier jusque-là non daté (sous la cote Hs 91 a : 69). Il y a plus : le document tapuscrit (sous la cote Hs 91 a : 70) dont la première page a été arrachée n'est autre que la première partie du fascicule issu de ce cours et rédigé par Jacobson avec l'aide de Brauer. Une comparaison systématique entre les documents Hs 91 a : 52 et Hs 91 a : 70 nous a permis d'établir ce fait. [66] Enfin, les documents tapuscrits sous la cote Hs 91 a : 53

66. La seconde partie du fascicule en question se trouve dans la bibliothèque de l'IAS.

et Hs 91 a : 54 correspondent aux deux fascicules en théorie des invariants de 1935-1936 qui prolongent directement le cours sur les groupes de Lie de 1934 et 1934-1935. Les nombreux renvois au fascicule de 1934 sur les groupes de Lie (avec pagination précise des titres des paragraphes) nous a permis de confirmer définitivement que le document tapuscrit sous la cote Hs 91 a : 70 n'est autre que le fascicule de 1934.

Nous avons donc un dossier constitué de deux types de documents dont les fonctions sont très différentes. Dans ses notes manuscrites, Weyl élabore un plan développé, qu'il corrige et dont il modifie l'ordre à l'aide d'un système de renvois ou des indications du type « after » pour signifier que tel résultat devra être présenté plus tard parce qu'il présuppose des éléments de connaissances qui n'ont pas encore été abordés. Il détaille également les démonstrations des principaux théorèmes qu'il aborde dans ce cours — nous pensons notamment au théorème selon lequel $\mathrm{SU}(n)$ est simplement connexe pour $n \geqslant 2$. Bref, ces notes nous permettent d'appréhender la genèse des cours de Weyl, avec ses repentirs, ses corrections, ses hésitations. Dans ces notes, Weyl anticipe sur certaines remarques qu'il fera à l'oral — notamment concernant ses difficultés à maîtriser l'anglais. Bref, il est indéniable que ces notes, relativement détaillées, lui servent de support pour s'approprier une langue et prévenir les difficultés qu'il pourrait rencontrer à l'oral parce qu'il doit s'exprimer en anglais. En revanche, les fascicules tapuscrits transcrivent de manière détaillée chaque démonstration : il ne s'agit pas seulement de reproduire le « contenu » d'un cours mais bien d'anticiper sur des publications à venir. En particulier, les fascicules de 1935-1936 en théorie des invariants préfigurent l'ouvrage *Classical groups* qui paraît en 1939.

Cela posé, revenons brièvement sur la structure du cours de Weyl en théorie des groupes de Lie en 1934 et 1934-1935. Son article de 1925-1926 constitue sa principale source, mais il mentionne également ses propres contributions dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, il se réfère de plus aux travaux de Haar et von Neumann sur les groupes topologiques localement compacts. Le fascicule de 1934 est composé de cinq parties : chapitre I, concepts fondamentaux en théorie des groupes et des représentations de groupes ; chapitre II, aperçu de la théorie de Lie ; chapitre III, théorie générale des algèbres de Lie — essentiellement d'après Cartan — ; chapitre IV, point de vue intégral et topologique — le fascicule reproduit alors un article en préparation de Weyl intitulé « Harmonics on Homogeneous Manifolds » [To appear in the *Annals of Mathematics*] ; chapitre V, le groupe unitaire unimodulaire, i.e. le groupe spécial unitaire $\mathrm{SU}(n)$ dont Weyl prouve la simple connexité pour $n \geqslant 2$[67]. Dans l'introduction à ce cours, il distingue trois « points de vue » sur les représentations de groupes : (i) un

67. H. Weyl, « The structure and representation of continuous groups », (1934), Hs 91a : 70, p. 112-113.

point de vue algébrique et abstrait qui vaut pour tout groupe conçu abstraitement, (ii) un point de vue infinitésimal fondé sur l'étude des algèbres de Lie et de leurs représentations ; (iii) un point de vue topologique et intégral qu'il emprunte à Hurwitz et dont il mentionne les derniers développements par Haar et von Neumann dans des situations plus générales. [68] Le chapitre I correspond au point de vue algébrique et abstrait, les chapitres II et III au point de vue infinitésimal, les chapitres IV et V au point de vue topologique et intégral. Ainsi, la distinction entre différents points de vue qui structurait l'article de 1925-1926 se retrouve dans le cours de 1934 à Princeton, à ceci près que Weyl accorde une place plus importante aux méthodes de l'algèbre abstraite dans ces leçons, preuve qu'il faut nuancer son pessimisme à l'encontre de l'algèbre abstraite lorsque l'on prête attention aux usages qu'il en fait dans ses propres cours.

Cela étant, le plan adopté par Weyl en 1934 a de quoi surprendre : il aborde de manière très abrupte la théorie générale des algèbres de Lie semi-simples, sans donc commencer par étudier certains cas exemplaires, contrairement à ce qu'il avait fait dans les chapitres I et II de son article de 1925-1926. La question est de savoir s'il maintient cette approche d'emblée très générale au semestre suivant. Malheureusement, aucun exemplaire du fascicule de ce second cours ne se trouve dans les archives Weyl à l'ETH. Mais nous avons au moins pu consulter les notes manuscrites de Weyl qui s'y rapportent, puisqu'elles sont contenues dans le cahier sous la cote Hs 91a : 52 et Hs 91 a : 69. [69] Or, le premier chapitre de ce cours est entièrement consacré A. au groupe linéaire [70], B. au groupe complexe (i.e. symplectique) [71] et C. au groupe orthogonal [72]. On retrouve un type d'organisation « par cas » qui est caractéristique de l'article de 1925-1926. Le second chapitre est intitulé « Structure of semi-simple groups ». Weyl se montre attentif à des publications récentes de Cartan. Ainsi, il reproduit les références précises de l'article de Cartan intitulé « La géométrie des groupes simples » (1927) dans lequel ce dernier souligne la pertinence des méthodes topologiques de Weyl dans l'étude des groupes de Lie et de leurs représentations. [73] Voici le plan que Weyl adopte dans ce second chapitre : § 1 les sous-algèbres de Cartan (maximal nilpotent subgroup) ; § 2 théorie des poids et des

68. H. Weyl, « Struktur und Darstellung Continuierlicher Gruppen, Princeton 1934 », Hs 91 a : 52, *ETH-Bibliothek*, p. 7.

69. H. Weyl, « Continuation 1934-1935 », Hs 91a : 52, p. 91 et suiv. Les notes de cours se poursuivent sur 35 pages dans le cahier sous la cote Hs 91a : 69.

70. Hs 91a : 52, p. 94 à 109.

71. Hs 91a : 52, p. 110 jusqu'à la fin du cahier et Hs 91 a : 69, p. 1-2.

72. Hs 91 a : 69, p. 3-4.

73. É. Cartan, « La géométrie des groupes simples », *Annali di Matematica*, **4**, 1927, p. 209-256, in É. Cartan, *Œuvres complètes*, I.1., p. 793 et suiv.

racines ; § 3 critère de Cartan pour les algèbres de Lie résolubles et les algèbres de Lie semi-simples ; § 4 le groupe de « Weyl » ; § 5 détermination d'une algèbre de Lie par le groupe de Weyl ; § 6 la restriction unitaire ; § 7 développements supplémentaires de la théorie (groupe de revêtement universel, complète réductibilité). Ainsi, il maintient la méthode qu'il utilisait en 1925-1926 pour prouver que toute représentation de dimension finie d'un groupe de Lie complexe semi-simple est complètement réductible.

En résumé, les cours donnés par Weyl à Princeton en 1934 et en 1934-1935 montrent qu'il n'est pas hermétique à une approche plus abstraite en algèbre (chapitre I du cours de 1934), en topologie et en théorie de la mesure (chapitre IV consacré aux dernières innovations de Haar et von Neumann). D'un autre côté, il maintient la dialectique entre méthodes algébriques et topologiques dans ces deux cours. En outre, le cours de 1934-1935 est conforme au plan de l'article de 1925-1926 : l'étude de certains groupes de Lie connus doit précéder la théorie générale.

Qu'en est-il maintenant de la réception de l'article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples ? La correspondance entre Cartan et Weyl doit tout d'abord retenir notre attention. Si l'on suit Hawkins, en 1925 Cartan accueille avec réticence la méthode topologique et intégrale utilisée par Weyl. Pour Cartan, la preuve du théorème de complète réductibilité doit être possible sans faire intervenir des considérations d'*analysis situs*. La réponse de Weyl datée du 22 mars 1925 mérite toute notre attention. Si l'on se réfère à l'extrait reproduit par Hawkins,[74] Weyl précise à Cartan qu'il ne maîtrise pas suffisamment la théorie des algèbres de Lie pour éviter ce type de détour. Il précise ensuite que sa méthode est avantageuse puisqu'elle peut s'appliquer à des groupes de Lie complexes semi-simples quelconques sans procéder à une étude au cas par cas. Enfin, Weyl affirme que cette méthode est conforme à son mode de pensée, ajoutant au passage que la méthode de Cartan est purement algébrique. Ainsi, tout en reconnaissant les apports décisifs de Cartan sur les algèbres de Lie, Weyl se démarque de lui et il insiste sur l'usage de méthodes non algébriques pour démontrer un théorème relevant de l'algèbre, sans doute parce que cette pratique qui consiste à combiner différents champs théoriques est conforme à sa conception de l'unité des mathématiques.

Cela étant, il ne faudrait pas tirer prétexte de ces différences de vue en 1925 pour les réifier en disant que Cartan serait un algébriste et un géomètre, alors que Weyl serait un analyste et un topologue. Nous avons suffisamment montré que Weyl s'approprie de manière remarquable la thèse et l'article de Cartan de 1913 lorsqu'il publie ses travaux sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Comme le souligne avec raison Hawkins, « The

74. T. Hawkins, *op. cit.*, p. 493-494.

existence of an extensive and profound theory of semisimple groups, which is what Weyl discovered in Cartan's work, was a major source of inspiration for him ». [75] Inversement, Cartan met rapidement de côté ses réserves à l'égard des concepts et des méthodes issus de l'*analysis situs* en théorie des groupes « continus », comme en témoigne en particulier son article de 1927 intitulé « La géométrie des groupes simples ». Dans l'introduction à ce chapitre, Cartan écrit :

> Un premier chapitre introductif est consacré à la topologie des groupes simples réels unitaires ; il a son point de départ dans les recherches de H. Weyl relatives à la théorie des groupes semi-simples ; la question y est reprise en entier ; les résultats de H. Weyl sont complétés et les questions qui se posent sont résolues jusqu'au bout (...). [76]

Bref, ce passage indique que Cartan reprend entièrement à son compte la preuve de la simple connexité de SU_n pour $n \geqslant 2$ que Weyl établit dans le chapitre I, § 5 de son article 1925-1926. Ajoutons qu'en 1930, Cartan publie *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*, preuve qu'il entend adopter systématiquement le point de vue topologique et global de Weyl dans l'étude des groupes de Lie. Souvenons-nous qu'en 1923, Weyl commença à mesurer la puissance de la théorie des algèbres de Lie de Cartan, mais il accueille les méthodes de ce dernier avec certaines réserves. Il ne se les approprie qu'en 1924. De manière rigoureusement parallèle, en 1925, le point de vue topologique et intégral de Weyl en théorie des groupes de Lie semble étranger à Cartan ; finalement, ce dernier reprend à son compte ce point de vue dans ses publications dès 1927. On peut ainsi mesurer à nouveaux frais la fertilité du dialogue entre Cartan et Weyl au cours des années 20.

Toujours est-il que ni Weyl, ni Cartan n'écartent la possibilité d'une preuve purement algébrique du théorème de complète réductibilité pour les groupes de Lie complexes semi-simples. Casimir et van der Waerden parviennent à cette fin en 1935. Brauer — qui a été l'assistant de Weyl à Princeton en 1934 — leur emboîte le pas en 1936. Au début de leur article intitulé « Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen », Casimir et van de Waerden insistent sur la nature du théorème de complète réductibilité : il s'agit d'un théorème algébrique [ein algebraischer Satz]. [77] Il faut donc le montrer de manière purement algébrique. Ce projet n'est pas innocent du point de vue de la conception sous-jacente des mathématiques qu'ils défendent. Puisque l'algèbre constitue une discipline-modèle par rapport aux autres domaines des mathématiques, on

75. *ibid.*, p. 498.

76. É. Cartan, « La géométrie des groupes simples », *op. cit.*, p. 794.

77. H. L. Casimir et B. L. van der Waerden, « Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen », *Math. Ann.*, **117**, p. 1.

doit pouvoir envisager la preuve de ses principaux théorèmes à l'aide de méthodes purement « algébriques ». Pour van der Waerden et Casimir, une démonstration algébrique du théorème de complète réductibilité ne doit pas seulement être possible, elle est souhaitable et même nécessaire. Telle n'est pas la position de Weyl. Ce dernier insiste sur la complémentarité entre les méthodes issues de l'algèbre et de l'*analysis situs* ; l'existence d'une preuve purement algébrique du théorème de complète réductibilité ne remet nullement en question ses tentatives en vue de relativiser l'importance de l'algèbre par rapport à d'autres champs disciplinaires. En revanche, Casimir et van der Waerden estiment que les considérations d'*analysis situs* sur lesquelles s'appuie Weyl constituent d'inutiles détours. Mais leur démonstration purement algébrique s'avère très technique et d'une lecture difficile ; elle ne satisfait guère à l'idéal de clarté et de simplicité attaché au développement de l'algèbre abstraite.

Ainsi, la réception de l'article de Weyl de 1925-1926 est d'abord centrée sur la possibilité d'éviter toute considération d'*analysis situs* pour prouver le théorème de complète réductibilité. Nous voyons cependant que les positions de Cartan d'une part, de Casimir et van der Waerden d'autre part, ne sont pas du même ordre. Cartan se contente de faire part de ses réserves à propos de l'usage de l'*analysis situs* en théorie des groupes et des algèbres de Lie, réserves qu'il lèvera presque aussitôt dans la suite de ses travaux. En revanche, Casimir et van der Waerden entendent appliquer un programme qui vise à autonomiser l'algèbre par rapport à tout autre domaine des mathématiques.

La figure de von Neumann doit maintenant être invoquée pour mesurer plus finement la réception immédiate de l'article de Weyl. Nous reviendrons plus longuement sur von Neumann dans le prochain chapitre de notre thèse. Rappelons pour l'instant qu'entre 1926 et 1930, il est *Privatdozent* à l'université de Berlin. À partir de 1927, il se consacre à la mathématisation de la mécanique quantique (voir sous-section 3.1.5 du prochain chapitre) et, avec Wigner, il met en valeur l'usage des représentations de groupes pour formaliser cette théorie physique. Entre 1926 et 1927, il s'approprie l'article de Weyl sur les groupes de Lie. Il y fait référence non seulement dans le cadre de la formalisation de la mécanique quantique, mais également dans un article fondateur qui a pour objet l'étude des groupes de Lie linéaires. Il le publie en 1929 sous le titre « Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen ».[78] Comme le précise Godement, von Neumann fournit dans cet article les « techniques fondamentales de la théorie des groupes de Lie » ; celles-ci servent de point d'appui pour « montrer comment l'on peut associer, à tout sous-groupe fermé d'un

78. J. von Neumann « Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen », *Mathematische Zeitschrift* **30**, 1929, p. 3-42.

groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, une « algèbre de Lie » qui permet d'en reconstruire la composante connexe et de munir le groupe donné [d'une structure de groupe de Lie] ».[79] Certes, von Neumann se restreint dans cet article à des groupes de Lie linéaires, il se situe donc provisoirement à un niveau de généralité moindre que Weyl. Mais, en même temps, l'approche de von Neumann est nettement plus abstraite que celle de Weyl : il distingue avec netteté la structure topologique et la structure différentielle d'un groupe de Lie linéaire. Précisons à ce propos que von Neumann s'appuie sur les articles que Schreier consacre aux groupes topologiques (1926), mais aussi aux *Grundzüge der Mengenlehre* de Hausdorff (1914), ces deux références expliquant en partie la « modernité » de son propre article.

Parallèlement, la méthode intégrale et transcendante que développe Weyl dans le prolongement de Hurwitz et Schur ouvre la voie à des champs d'investigation inédits qui ont pour objet l'intégration dans un espace de groupe. Comme l'indique A. Weil dans son ouvrage *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* :

> Cette méthode féconde, dont Hurwitz paraît s'être servi le premier en 1897 et qui depuis lors avait permis à I. Schur, H. Weyl et É. Cartan lui-même d'étudier les représentations linéaires des groupes de Lie clos, a reçu dans les dernières années une extension considérable. En 1933, A. Haar a démontré que l'existence d'une mesure invariante dans un espace de groupe est liée à des conditions topologiques très simples et très générales, à savoir essentiellement la compacité locale du groupe.[80]

Il ne faudrait cependant pas céder à une vision linéaire de l'histoire pour deux raisons. (1) Les travaux de Haar de 1933 visant à prouver l'existence d'une mesure invariante pour les groupes localement compacts (à base dénombrable d'ouverts) présuppose une théorie abstraite des groupes topologiques fondée par Schreier en 1926. On ne peut donc pas dire que l'article de Haar de 1933 se situe dans le strict prolongement de l'article de Weyl de 1925-1926. Il suppose d'autres sources qui permettent d'envisager l'intégration non plus seulement sur des groupes de Lie, mais sur des groupes admettant *a priori* une structure plus faible. Mentionnons à ce propos les deux résultats suivants : von Neumann prouve en 1934 que la mesure de Haar est unique à un facteur près dans le cas des groupes compacts ; Weil et von Neumann généralisent ce résultat à tout groupe localement compact en 1936. (2) Ces travaux se situent dans une veine nettement plus abstraite et clairement structurale si on les compare aux

79. R. Godement, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, Berlin éd. Springer, 2004, p. 69, Godement présente d'ailleurs sous forme légèrement modernisée le contenu de l'article de von Neumann dans le § 3 de son ouvrage.

80. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (1940), Paris, éd. Hermann, 1953, p. 5.

travaux de Weyl sur les groupes de Lie complexes semi-simples. Non seulement donc Haar, von Neumann et Weil s'appuient sur une diversité de sources qui ne se restreignent pas à Weyl, mais de plus leur approche présuppose une série de discontinuités par rapport à celle qui est préconisée par Weyl en 1925-1926. Ainsi, dans son ouvrage de 1940 intitulé *L'intégration dans les groupes topologiques*, Weil raisonne d'emblée dans le général. Au contraire, en 1925-1926 Weyl commence par étudier un exemple convenablement choisi pour dire le général. Ensuite, Weil a systématiquement recours à la méthode axiomatique qui vient façonner la structure de son ouvrage. En revanche, Weyl n'utilise la méthode axiomatique que pour clarifier et généraliser certains concepts en 1925-1926. Il est cependant vrai qu'en 1934, Weyl commence à répercuter dans ses propres cours les avancées effectuées par Haar et von Neumann sur les groupes topologiques localement compacts. Preuve qu'il n'est pas totalement étranger à cette démarche structurale, même s'il ne l'embrasse pas complètement. En effet, dans son second cours sur les représentations de groupes à Princeton, il reprend l'organisation d'ensemble et l'écriture de son article de 1925-1926.

La réception des travaux de Weyl peut donc être caractérisée à trois niveaux : (1) approfondir les liens entre les groupes de Lie et l'*analysis situs* (Cartan dès 1927), (2) trouver une démonstration algébrique du théorème de complète réductibilité, (3) développer la méthode intégrale dans une optique abstraite et structurale en prenant pour cadre de référence la théorie des groupes topologiques. Dans les deux derniers cas, on peut observer une série de discontinuités par rapport à Weyl : van der Waerden et Casimir rompent avec la conception weylienne de l'unité des mathématiques qui consiste à relativiser l'exemplarité et l'autonomie de l'algèbre par rapport à d'autres champs disciplinaires, en l'occurrence l'*analysis situs* ; Haar, von Neumann et Weil adhèrent à une conception structurale des mathématiques lorsqu'ils développent une théorie de l'intégration sur des espaces de groupes. Ce qui était une *méthode* pour Weyl devient *une théorie abstraite* chez Haar, von Neumann et Weil.

Chapitre 3

Mécanique quantique, représentations de groupes et symétries

Dans la deuxième partie de notre thèse, nous avons montré que Weyl se consacre largement à la mathématisation de la relativité générale entre 1917 et 1923. Il propose en particulier une généralisation de la géométrie riemannienne et il parvient de la sorte à une théorie unifiée des champs électromagnétique et gravitationnel [1]. De plus il établit la nature pythagoricienne de l'espace dans l'infinitésimal, comme en atteste une série de publications consacrées au ≪ Raumproblem ≫ en 1921-1923. Son intérêt pour la *physique mathématique* se prolonge au cours de la seconde moitié des années 20, mais il s'oriente alors en direction de la mécanique quantique dont les fondements sont explicités notamment par Schrödinger et Heisenberg-Born-Jordan en 1925-1926. À partir de 1926-1927, Heisenberg, Wigner, von Neumann et Weyl montrent que la théorie des groupes et des représentations de groupes constitue un cadre formel pertinent pour mathématiser la mécanique quantique. Cette manière de concevoir et de formaliser la mécanique quantique — qui est diversement reçue et accceptée par les physiciens au tournant des années 30 — fait l'objet de trois monographies, à savoir *Gruppentheorie und Quantenmechanik* de Weyl (1928 pour la première édition, 1931 pour la seconde édition et la traduction en langue anglaise), *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* de Wigner (1931) et *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* de van der Waerden (1932).

Notre but consistera notamment à comprendre dans quel contexte et pour quelles raisons Weyl est amené à s'intéresser à la mécanique quantique au cours de la seconde moitié des

1. Nous renvoyons le lecteur aux articles fondamentaux que Weyl publie en 1918 : ≪ Reine Infinitesimalgeometrie ≫ et ≪ Gravitation und Elektrizität ≫.

années 20. Pour résoudre cette difficulté, nous ne pouvons pas nous en tenir à des éléments de connaissances internes à son œuvre. Si tel était le cas, nous serions alors tentés de souscrire à l'argument simplificateur suivant : en 1924-1927, Weyl contribue au développement de la théorie des représentations des groupes de Lie et son intérêt pour la mécanique quantique se ferait dans le strict prolongement de ses travaux en mathématiques pures. Cette hypothèse est doublement réductrice.

(1) Tout d'abord, il est attesté que Weyl entretient des liens étroits avec les principaux fondateurs de la mécanique quantique dès le milieu des années 20. Weyl demeure professeur à l'ETH de Zürich jusqu'en 1930. Or Schrödinger enseigne à l'université de Zürich entre 1921 et 1927. Comme le souligne E. Scholz, Weyl et Schrödinger se rencontrent et communiquent alors régulièrement. [2] Parallèlement, Weyl entretient une correspondance avec Born et Jordan. Ces derniers exercent alors à l'université de Göttingen et ils entendent clarifier les hypothèses de Heisenberg sur les fondements de la mécanique quantique, comme en atteste l'article intitulé ≪ Zur Quantenmechanik ≫ qu'ils cosignent en 1925. Weyl prend assez tôt connaissance des formalismes concurrents proposés respectivement par Schrödinger en 1926 et par Heisenberg, Born et Jordan en 1925-1926. Les liens entre Weyl et von Neumann sont également attestés par une correspondance. [3] Qui plus est, von Neumann a relu et corrigé les épreuves de la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* de Weyl. [4] Or, non seulement en 1927 von Neumann axiomatise les espaces de Hilbert abstraits — qui interviennent de manière essentielle pour formaliser la mécanique quantique — unifiant par là même la *mécanique ondulatoire* et la *mécanique des matrices*, mais de plus il travaille conjointement avec Wigner pour appliquer la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique en 1927-1928. Weyl correspond aussi avec Pauli qui, en 1927, formalise rigoureusement l'hypothèse du moment cinétique interne ou spin de l'électron proposée par Uhlenbeck et Goudsmit en 1925. Enfin, Weyl prolonge dès la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* les travaux fondateurs de Dirac en mécanique quantique relativiste.

On ne peut donc pas ignorer les réseaux de relations que Weyl entretient avec des physiciens théoriciens et des physiciens mathématiciens de premier plan dont l'objectif est de fonder et de formaliser la mécanique quantique. Il serait également inconséquent de perdre de

2. E. Scholz, ≪ Introducing Groups in Quantum Theory ≫, (1926-1930), preprint, 24 août 2005, p. 27.

3. Les lettres de von Neumann à Weyl entre 1925 et 1930 sont conservées dans les archives Weyl, *ETH-Bibliothek*, Hs 91 : 676 - Hs 91 : 687.

4. J. von Neumann, Brief an Weyl, 16 juillet 1928, *ETH-Bibliothek*, Hs 91 : 680. Au début de cette lettre, von Neumann remercie Weyl pour l'envoi des épreuves [Korrekturfahnen] de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* avant de lui suggérer quelques corrections.

vue que Weyl est lié à des institutions telles que l'ETH de Zürich et l'université de Göttingen dans lesquelles le développement de la mécanique quantique occupe une place de premier plan. Autant dire que la référence aux écrits théoriques de Weyl n'est pas suffisante pour expliquer son intérêt pour la mécanique quantique et sa formalisation.

(2) Ensuite, nous faisons comme si Weyl prolongeait ses recherches en direction de la mécanique quantique en qualité de mathématicien. Il s'agirait alors uniquement de tester les possibilités formelles de la théorie des représentations de groupes sans réellement se préoccuper du sens physique de la mécanique quantique. Or, ceci n'est pas attesté. Il est faux de supposer que Weyl ne s'intéresse qu'à un vêtement d'idées mathématiques dénuées de tout contenu physique au moment où il publie *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Au contraire, il souligne la profonde intrication entre concepts mathématiques et physiques en mécanique quantique. La théorie des représentations de groupes joue un rôle *constitutif* dans la mathématisation de la mécanique quantique, à condition que l'on sache clairement donner un sens physique — donc empiriquement testable — à ce mode de formalisation. L'adjectif « constitutif » signifie que la théorie des représentations de groupes permet non pas seulement de coordonner les résultats empiriques issus de la spectroscopie, mais également de les fonder et de les unifier.

Les problèmes que nous souhaiterions résoudre concernent les divers projets de mathématisation de la mécanique quantique durant la seconde moitié des années 20.

Dans un premier temps, il est nécessaire de confronter à nouveaux frais la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan et la mécanique ondulatoire de Schrödinger puisque Weyl prend très tôt connaissance de ces deux projets, d'abord concurrents, ensuite complémentaires. Signalons immédiatement que la mécanique des matrices emprunte ses méthodes à l'algèbre, la mécanique ondulatoire à l'analyse. En 1927, von Neumann les unifie en axiomatisant les espaces de Hilbert ; ses innovations — qui relèvent de l'analyse fonctionnelle — prolongent le projet d'unification de l'algèbre et de l'analyse que Hilbert met au point avec ses travaux sur les équations intégrales entre 1904 et 1912. Les recherches de Jordan et von Neumann consacrées à la formalisation de la mécanique quantique se situent dans une veine hilbertienne pour une autre raison : ils entendent déduire cette théorie physique à l'aide d'un système d'axiomes. Ainsi, au cours de la seconde moitié des années 20 et au début des années 30, il existe une série de publications centrées sur l'*axiomatisation* de la mécanique quantique. Qu'il nous suffise de mentionner l'article en deux parties de Jordan intitulé « Über eine neue Begründung der Quantenmechanik » (1926-1927), celui de von Neumann intitulé « Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik » (1927) ou

encore celui que Hilbert, Nordheim et von Neumann publient sous le titre « Über die Grundlagen der Quantenmechanik » (1928). Cette approche axiomatique sera consacrée en 1932 avec la publication de la monographie de von Neumann sur la mécanique quantique : *Die mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. La question est de savoir quelles sont les fonctions prêtées à la méthode axiomatique pour mathématiser la mécanique quantique, par comparaison avec d'autres théories physiques qui ont déjà été axiomatisées. Dans le cas de la mécanique quantique, le recours à la méthode axiomatique n'a pas seulement pour but de dégager les principes en nombre réduit qui la fondent, mais également de s'assurer de sa cohérence interne. Weyl demeure globalement étranger à ce programme. Déjà dans le cas de la relativité générale, Weyl partageait l'argument d'Einstein selon lequel la méthode axiomatique conduit à traiter une théorie physique de manière simplificatrice. Il n'est pas non plus convaincu en 1925-1931 que les procédures axiomatiques soient éclairantes en mécanique quantique. Ainsi, au cours de ces deux périodes, il reconnaît une spécificité aux théories physiques par rapport aux théories mathématiques. Néanmoins, il n'envisage pas le *rapport* entre physique et mathématique de la même manière en 1917-1923 d'une part, en 1925-1931 d'autre part. Toujours est-il qu'à partir de 1927, il se fonde essentiellement sur la théorie des groupes et des représentations de groupes qui doit garantir cohérence, unité et stabilité à la mécanique quantique.

Dans un deuxième temps, il convient donc d'identifier le rôle et les fonctions des groupes et des représentations de groupes pour rendre raison des expériences qualitatives issues de la spectroscopie, mais aussi pour dégager les fondements de la mécanique quantique. La théorie des groupes et des représentations de groupes éclairent d'un jour nouveau la mécanique quantique puisqu'elle rend explicites les principes de symétrie essentiels à la compréhension des phénomènes atomiques et subatomiques. De plus, von Neumann, Wigner ou encore Weyl font un usage pragmatique de ce cadre mathématique, car il permet d'appréhender de manière cohérente des systèmes quantiques de plus en plus complexes (système à un électron sans spin, à un électron avec spin, à plusieurs électrons sans spin, etc.). Notre but sera donc de montrer la spécificité de la mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des représentations de groupes par rapport à d'autres formalismes. Sans nier l'aspect fondamentalement probabiliste et indéterministe de la mécanique quantique, Weyl et Wigner montrent néanmoins que la mécanique quantique admet des principes d'invariance, à l'image d'autres théories physiques telles que la cristallographie, la mécanique classique ou la mécanique relativiste.

Dans un dernier temps, nous aborderons la seconde théorie de jauge que Weyl élabore

en 1927-1929 à la suite des travaux de Schrödinger, London et Fock. Cette seconde théorie de jauge, dont les applications sont décisives en mécanique quantique relativiste, a pour but d'unifier les « ondes de matière » et l'électricité, alors que la première théorie de jauge unifiait la gravitation et l'électricité. Dans une célèbre conférence de 1931 prononcée à l'université de Cambridge et intitulée « Geometrie und Physik », Weyl compare systématiquement ces deux théories de jauge. Il analyse corrélativement le bien-fondé et les limites d'une *géométrisation* de la physique. Si la géométrisation de la gravitation a porté ses fruits avec le développement de la relativité générale, il n'en va pas de même lorsque l'on examine les diverses tentatives de géométrisation des interactions électromagnétiques, qui se sont soldées par des échecs. Pour Weyl, le développement de la mécanique ondulatoire marque un coup d'arrêt aux méthodes issues de la géométrie différentielle pour unifier la physique. L'introduction des ondes de matière empêche que l'on puisse aboutir à une théorie unitaire en s'appuyant sur le modèle de la relativité générale. En outre, malgré les similitudes formelles entre la première et la seconde théorie de jauge, Weyl entend les différencier nettement. La première théorie de jauge se situe dans le prolongement de la géométrisation de la gravitation ; pour ce faire, il suffit d'introduire un cadre géométrique plus général que la géométrie riemannienne. La seconde théorie de jauge se rapporte aux fonctions d'onde et elle n'est pas déduite à partir d'un cadre géométrique posé *a priori*. Weyl accueille avec scepticisme l'hypothèse selon laquelle il existerait une géométrie qui puisse embrasser d'un seul tenant la matière, l'électricité et la gravitation.

3.1 La mathématisation de la mécanique quantique

La mathématisation d'une théorie physique nous engage à interroger la relation complexe entre son sens physique et sa « forme » mathématique, notre but étant de montrer que l'on ne peut pas instituer une ligne de démarcation entre le contenu et la forme d'une théorie. Pour mesurer toute la difficulté d'une telle question, il convient de rappeler qu'une même théorie physique peut admettre différents formalismes ; inversement, un même concept ou un même énoncé mathématique sont susceptibles de recevoir une diversité d'interprétations physiques. Par exemple, il existe trois formalismes en mécanique classique : le formalisme newtonien, le formalisme lagrangien et le formalisme hamiltonien qui, d'un point de vue *strictement logique*, peuvent être considérés comme équivalents. Il est possible de les déduire les uns des autres. Cependant, non seulement ces formalismes ne font pas appel aux mêmes concepts mathématiques et ils n'induisent pas les mêmes hiérarchies entre concepts physiques — le

concept de force, central dans le formalisme newtonien, est secondaire dans les deux autres formalismes —, mais de plus ils éclairent la mécanique classique sous des jours différents et ils impliquent des usages qui ne sont pas mutuellement substituables. Nous renvoyons le lecteur à la première partie de la thèse de Marion Vorms intitulée *Théories, modes d'emploi, une perspective cognitive sur l'activité théorique dans les sciences empiriques* pour une description détaillée des différences entre ces trois formalismes, malgré leur équivalence logique. [5]

Nous pouvons nous appuyer sur le premier théorème de Noether (1918) pour saisir la seconde partie de notre argumentation. Soit $L(x, u^{(m)})$ un lagrangien *généralisé*, i.e. une fonction lisse de n variables indépendantes $(x_1, ..., x_n)$ et de p variables dépendantes $(u_1, ..., u_p)$ ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Un problème variationnel généralisé consiste à trouver un extremum à la fonctionnelle

$$I = \int_\Omega L(x, u^{(m)}) \mathrm{d}x.$$

Le *premier théorème* de Noether peut être formulé comme suit : soit $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie à un nombre fini de paramètres qui laisse l'intégrale I invariante ; on a une correspondance bijective entre lois de conservation et générateurs infinitésimaux de $\mathfrak{G}$. Ce théorème admet diverses réalisations, en particulier en *mécanique classique* et en *relativité restreinte*. Dans le premier cas, on fait intervenir le groupe de Galilée, dans le second cas le groupe de Poincaré. Or, il s'agit là de deux théories dont les principes physiques ne sont pas compatibles et dont les prédictions sont très divergentes sauf pour des vitesses très inférieures à celle de la lumière. Le premier théorème de Noether occupe donc une position de surplomb par rapport à diverses théories physiques dans lesquelles il peut se réaliser. Il n'y a donc pas d'*univocité* dans le rapport entre le sens physique et la forme mathématique d'une théorie physique ; inversement, il n'y a pas non plus d'*univocité* dans l'interprétation physique que peuvent recevoir des concepts et des énoncés mathématiques.

Une autre difficulté mérite d'être soulevée : est-il pertinent de tracer une ligne de démarcation entre le contenu empirique d'une théorie physique et le cadre mathématique qui permet de la formaliser ? Ceci exige de préciser ce que l'on entend par contenu empirique d'une théorie physique. Une théorie physique consiste à représenter un ensemble de données *et* à faire des prédictions grâce à des hypothèses. Ces prédictions pourront être vérifiées ou réfutées. Une théorie a donc une *fonction représentative* et une *fonction prédictive*. Notre but est de montrer

5. M. Vorms, *Théories, modes d'emploi, une perspective cognitive sur l'activité théorique dans les sciences empiriques*, Thèse de doctorat (IHPST, Paris I), sous la direction d'A. Barberousse et J. Gayon, (2009), p. 19 à 178.

que la mathématisation d'une théorie physique ne consiste pas exclusivement à exprimer et à *représenter* mathématiquement des concepts et des quantités physiques nécessaires à la formulation de prédictions. En réalité le processus de mathématisation joue un rôle *constitutif* dans l'élaboration d'une théorie physique. Il ne s'agit pas d'un simple habillage formel qui assurerait une cohérence logique à une théorie, mais bien d'un système de concepts et de propositions mathématiques qui nous éclaire sur la réalité empirique.

L'usage de certains concepts mathématiques conditionne donc la structure d'ensemble et le sens d'une théorie physique. Nous pouvons justement nous appuyer sur la mécanique quantique pour préciser ce point. En effet, le concept d'espace de Hilbert joue un rôle central dans la mathématisation de la mécanique quantique. Non seulement il permet d'unifier formellement la mécanique ondulatoire de Schrödinger et la mécanique matricielle de Heisenberg-Born-Jordan, mais de plus il rend raison du caractère à la fois corpusculaire et ondulatoire des phénomènes quantiques. Il offre un cadre parfaitement adéquat dans l'étude des phénomènes quantiques : l'état quantique d'un système quantique est alors décrit par un vecteur d'état dans un espace des états — qui, mathématiquement, est un espace de Hilbert complexe de dimension finie ou infinie. Ajoutons que le concept d'espace de Hilbert abstrait est axiomatisé par von Neumann au moment où il participe à la mathématisation de la mécanique quantique. Il y a donc une parfaite corrélation entre la clarification d'un concept mathématique et le gain de cohérence d'une théorie physique sur un plan tant logique qu'empirique. Preuve que certains concepts mathématiques ne sont pas adjoints *de l'extérieur* à la mécanique quantique.

Dans ce qui suit, nous ne ferons que quelques rappels historiques sur les fondements de la mécanique quantique établis par Heisenberg, Born, Jordan d'une part, Schrödinger d'autre part en 1925-1927. La mécanique ondulatoire et la mécanique des matrices n'induisent pas le même type de relation entre la forme mathématique et le sens physique de la mécanique quantique. Précisons notre propos. Les travaux de Schrödinger sont guidés par une intuition physique liée à l'idée des ondes de matière introduite par de Broglie en 1922-1923. En revanche, Heisenberg, Born et Jordan privilégient la cohérence formelle de la mécanique quantique en s'appuyant sur le calcul matriciel. Nous reviendrons ensuite sur les relations d'indéterminatination que Heisenberg établit en 1927 afin d'appréhender *intuitivement* les principaux résultats de la mécanique quantique. Pour Heisenberg, les relations d'indétermination ne sont pas de simples *inégalités* mathématiques ; elles permettent d'appréhender intuitivement une théorie qui rompt avec les concepts apparemment les plus évidents de la mécanique classique, en particulier celui de trajectoire. Enfin, nous aborderons

l'article de von Neumann sur l'axiomatisation des espaces de Hilbert. Nous comparerons sa démarche à celle utilisée par Weyl en 1913 pour axiomatiser les surfaces de Riemann. Nous montrerons également que la méthode axiomatique est employée non seulement pour saisir les concepts mathématiques nécessaires à la formalisation de la mécanique quantique, mais également pour en dégager les fondements et s'assurer de leur cohérence, comme en attestent les travaux publiés par Jordan, Hilbert, Nordheim et von Neumann entre 1927 et 1932.

3.1.1 La *mécanique ondulatoire* de Schrödinger

L'acte de naissance de la mécanique quantique se situe au cours des années 1925-1926. Heisenberg, Jordan et Born introduisent la *mécanique matricielle* (Matrixmechanik) dès 1925. L'article inaugural de Heisenberg intitulé « Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen » est publié dans le volume **33** de la *Zeitschrift für Physik*. S'ensuivent presque immédiatement deux articles : « Zur Quantenmechanik » de Born et Jordan, puis « Zur Quantenmechanik II » cosigné par Born, Jordan et Heisenberg. Nous devons également citer les travaux fondateurs du physicien anglais Dirac sur les q-nombres au milieu des années 20. Ils admettent de nombreuses parentés avec la mécanique matricielle de Heisenberg-Jordan-Born. Pour sa part, Schrödinger jette les bases de sa *mécanique ondulatoire* dans un article en quatre parties intitulé « Quantisierung als Eigenwertproblem » qui est publié au cours de l'année 1926 dans les *Physische Annalen*.

Les deux grandes tendances de la mécanique quantique que nous venons de mentionner ont pour objectif de surmonter la crise qui affecte alors la *théorie des quanta* de Bohr-Sommerfeld. Cette crise est d'abord suscitée par une série de résultats expérimentaux dont le modèle de Bohr-Sommerfeld ne parvient pas à rendre raison. C'est notamment le cas de l'*effet Zeeman anomal* en spectroscopie atomique. Rappelons que la spectroscopie atomique consiste à mesurer et à expliquer les longueurs d'onde lumineuses émises ou absorbées par des atomes. L'*effet Zeeman* se manifeste lorsqu'un atome est plongé dans un champ magnétique : les raies optiques se séparent alors en multiplets. On distingue un effet Zeeman en champ fort ou normal (lorsque le champ magnétique appliqué est important) et un effet Zeeman en champ faible ou anomal (lorsque le champ magnétique appliqué est faible). On constate des raies en nombre pair dans l'effet Zeeman anomal. La théorie des quanta de Bohr-Sommerfeld échoue à rendre compte de ce résultat expérimental. Pour expliquer cette anomalie, Pauli introduit un nouveau nombre quantique en 1925 que Uhlenbeck et Goudsmit interprètent physiquement en formulant l'hypothèse d'un moment cinétique intrinsèque ou *spin* de l'électron qui n'a aucun

correspondant en mécanique classique. Le spin d'une particule — en l'occurrence ici d'un électron — est un degré de liberté spécifiquement quantique. Pauli formalise rigoureusement cette hypothèse en 1927.

En outre, l'ancienne théorie des quanta est construite à partir de l'étude de l'atome d'hydrogène qui ne contient qu'un seul électron, elle n'est pas généralisable à des atomes plus complexes — à commencer par l'atome d'hélium — sans perte de cohérence. La théorie des quanta — qui est formulée par Bohr en 1913 avant d'être affinée par Wilson, Sommerfeld et Bohr lui-même à la fin des années 10 et au début des années 20 — ne rompt pas avec la mécanique classique. En effet, dans cette théorie, l'électron suit une *trajectoire* le long d'une orbite autour du noyau de l'atome d'hydrogène. Or, la notion de trajectoire relève de la mécanique classique et elle perd tout sens en mécanique quantique, comme en témoignent les travaux de de Broglie et Schrödinger sur les ondes de matière ainsi que l'article de Heisenberg intitulé « Über den anschaulichen Inhalt der Quantentheoretischen Kinematik und Mechanik » (1927) dans lequel sont énoncées les *relations d'indétermination*. Dans cet article, Heisenberg insiste sur le fait que les notions de « corpuscule » et de « trajectoire » sont dénuées de sens en mécanique quantique. L'ancienne théorie des quanta constitue un compromis instable et difficile à tenir entre des intuitions héritées de la mécanique classique et des hypothèses de quantification introduites *ad hoc* pour expliquer certains résultats expérimentaux. D'où la remarque de Weyl :

> The physical theory was gradually reduced to a symbolic calculus of quantum numbers which had to be corrected each time a new fact was discovered. We do not wonder now that it ran such a course, but rather are surprised that it was as successful as it was!
>
> From the beginning the quantum rules were a compromise. [6]

Les insuffisances de la théorie des quanta sont donc de deux ordres : (1) elle ne permet pas d'expliquer toutes les données issues de la spectroscopie ; (2) elle ne repose pas sur des fondements cohérents et elle n'est pas homogène puisqu'elle fait coexister classique et quantique. Ces insuffisances donnent lieu à plusieurs bifurcations : les travaux de Pauli, Uhlenbeck et Goudsmit permettent de saisir les effets qui demeurent inexpliqués tant que l'on s'en tient à l'ancienne théorie des quanta. Les articles de de Broglie et Schrödinger d'une part, Heisenberg, Born et Jordan d'autre part, conduisent à une théorie cohérente et en rupture avec la mécanique classique. C'est seulement après coup, c'est-à-dire en 1927, que l'hypothèse du spin de l'électron sera incorporée à la mécanique quantique par Pauli.

La mécanique ondulatoire de Schrödinger et la mécanique matricielle de Heisenberg-Born-

6. H. Weyl, *Group Theory and Quantum Mechanics*, 1931, New York, *éd. Dover*, 1950, p. 47.

Jordan représentent deux manières différentes — mais formellement compatibles, comme le prouve Schrödinger en 1926 — pour mathématiser la mécanique quantique et lui assurer une cohérence formelle. Comme nous le verrons dans le prochain paragraphe, Heisenberg, Born et Jordan raisonnent essentiellement en algébristes en s'appuyant sur les propriétés auxquelles satisfait le calcul matriciel. En revanche, Schrödinger raisonne essentiellement en analyste au sens où il élabore sa mécanique ondulatoire dans le contexte théorique des équations aux dérivées partielles.

Un système dynamique en mécanique classique est décrit à partir de variables dynamiques, c'est-à-dire à partir des positions et des vitesses des particules qui décrivent une certaine trajectoire au cours du temps. En revanche, l'état d'un système quantique — on se limitera en général à un système constitué d'un quanton dans un champ de force — à un instant donné t est complètement décrit à l'aide d'une fonction à valeurs complexes, appelée fonction d'onde, notée $\Psi(\overrightarrow{r}, t)$ et satisfaisant à l'équation de Schrödinger :

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\overrightarrow{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\overrightarrow{\nabla}^2 + V(\overrightarrow{r})\right]\Psi(\overrightarrow{r}, t)$$

où $h = 6,626\ 10^{-34}\ j.s$ désigne la constante de Planck [7], $\hbar = h/2\pi$, $\overrightarrow{r}$ le rayon vecteur qui permet de repérer le quanton étudié dans l'espace, $V(\overrightarrow{r})$ son énergie potentielle et m sa masse, $\overrightarrow{\nabla}$ le vecteur gradient (dont les composantes sont $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$). Mathématiquement parlant, l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles linéaire homogène. Autrement dit, si deux fonctions linéairement indépendantes satisfont à elle, toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est également solution de l'équation. Physiquement parlant, l'équation de Schrödinger *dépendant du temps* permet de décrire l'évolution d'un système quantique au cours du temps, ce dernier étant décrit par $\Psi(\overrightarrow{r}, t)$.

Revenons très brièvement sur la série des quatre articles de 1926 intitulés « quantification et valeurs propres » [Quantisierung als Eigenwertproblem] [8] dans lesquels Schrödinger jette les fondements de sa mécanique ondulatoire. Il serait erroné de penser qu'il introduit d'emblée et de manière purement arbitraire l'équation qui porte son nom. En réalité, son raisonnement s'enracine dans une intuition physique et un problème physique. Il s'agit en effet d'expliquer de manière cohérente les propriétés des ondes électromagnétiques émises par un système

7. La constante de Planck, qui est exprimée en joule-seconde, est un quantum élémentaire d'action qui relie la plus petite quantité d'énergie E emportée par un rayonnement électromagnétique à sa fréquence f :

$$E = hf.$$

8. Littéralement quantification en tant que problème aux valeurs propres

quantique élémentaire, à savoir l'atome d'hydrogène étudié dans un cadre non relativiste et auquel on ne fait pas subir de perturbations.

> Dans cette première communication, je voudrais montrer que, pour le cas le plus simple de l'atome d'hydrogène (sans relativité et sans perturbation) la règle usuelle de quantification peut être remplacée par une autre prescription, dans laquelle il n'est plus question de ≪ nombres entiers ≫. Plus encore, l'intégralité (Ganzzahligkeit) apparaît de manière aussi naturelle que l'intégralité du nombre de noeuds d'une corde vibrante. Cette nouvelle conception est susceptible d'être généralisée et elle touche de très près, comme je le crois, l'être véritable des règles quantiques. [9]

Au cours de ce première partie, Schrödinger formule l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour un système stationnaire. Il s'appuie sur le formalisme hamiltonien. Il énonce tout d'abord l'équation aux dérivées partielles de Hamilton comme suit

$$H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E,$$

où q désigne l'une des variables indépendantes du système. Il introduit une fonction Ψ qui vérifie

$$S = K\ \log\ \Psi,$$

où K est une constante dont Schrödinger déterminera la valeur ultérieurement. Il obtient donc une nouvelle équation aux dérivées partielles :

$$H\left(q,\ \frac{K}{\Psi}\cdot\frac{\partial \Psi}{\partial q}\right) = E,$$

qui peut être écrite comme une forme quadratique de Ψ et de ses dérivées premières égalée à zéro. Il en déduit le problème variationnel suivant : il s'agit de rechercher les fonctions Ψ réelles, finies, continues et deux fois différentiables qui conduisent à un extremum pour l'intégrale de la forme quadratique en question. Il insiste sur le fait que ce problème variationnel vient remplacer les conditions de quantification. Voici comment il précise son propos : il s'appuie sur le modèle semi-classique d'un électron qui se déplace sur une orbite elliptique autour du noyau d'un atome d'hydrogène ; il introduit donc le hamiltonien attaché à ce système. La condition formelle qu'il vient d'imposer est satisfaite pour toutes les valeurs positives de E et pour un ensemble discret de valeurs négatives de E. Autrement dit, le problème variationnel qu'il formule admet un spectre continu et un spectre discret de valeurs propres. Le spectre discret reçoit immédiatement l'interprétation physique suivante : il correspond aux termes de la série de Balmer qui décrit le spectre d'émission des raies de l'atome d'hydrogène.

9. E. Schrödinger, ≪ Quantisierung als Eigenwertproblem ≫, Erste Mitteilung, *Annalen der Physik*, **79**, (1926), p. 361.

Précisons que seules des règles de quantification peuvent expliquer ces observations. Pour des raisons empiriques, la constante K vérifie :

$$K = \frac{h}{2\pi},$$

où h est la constante de Planck. Schrödinger note m la masse et e la charge de l'électron, il choisit des coordonnées cartésiennes qu'il note x, y, z et il réécrit l'équation précédente comme suit :

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi^2 = 0, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

On retrouve bien la forme quadratique de Ψ et de ses dérivées premières égalée à zéro. Schrödinger formule ensuite son problème variationnel :

$$\delta J = \delta \int\int\int \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi^2\right] = 0.$$

Il en propose une écriture simplifiée et il parvient à exhiber l'équation « de Schrödinger » indépendante du temps dans le cas de l'atome d'hydrogène :

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi = 0,$$

où Δ désigne le laplacien.

Le raisonnement que nous venons de restituer admet une part d'arbitraire, en particulier lorsque Schrödinger introduit la fonction Ψ qu'il est encore difficile de situer dans un espace mathématiquement bien défini. Il faudra attendre l'axiomatisation des espaces de Hilbert par von Neumann en 1927 pour résoudre complètement cette difficulté. Pour autant, il ne faudrait pas croire que Schrödinger a recours à de purs artifices formels assujettis à la seule contrainte de devoir coïncider avec les résultats expérimentaux issus de la spectroscopie atomique. Partant du formalisme hamiltonien hérité de la mécanique classique, il se défait progressivement de l'image semi-classique de l'électron considéré comme un corpuscule décrivant une *trajectoire* autour du noyau d'un atome d'hydrogène et soumis de manière *ad hoc* à certaines règles de quantification. En effet, la fonction Ψ définit une *onde* associée à l'électron et non plus une trajectoire :

> On est évidemment très tenté de rattacher la fonction Ψ à un phénomène de vibration intra-atomique, ayant un caractère de réalité beaucoup plus prononcé que celui, si souvent mis en doute actuellement, des trajectoires électroniques. [10]

10. *ibid.*, p. 372.

En d'autres termes, le raisonnement mené par Schrödinger est de part en part traversé par une intuition physique qu'il emprunte à de Broglie : il s'agit en effet d'attribuer à l'électron certaines caractéristiques ondulatoires, de même que Planck et Einstein avaient attribué certaines caractéristiques corpusculaires à la lumière au début du siècle. [11] Ainsi, le point de départ des articles de Schrödinger n'est pas une équation posée abstraitement, mais bien une représentation intuitive de l'électron qu'il emprunte à de Broglie. Comme le précise M. Paty,

> Bien qu'elles portent sur un formalisme (celui de Hamilton), [les recherches de Schrödinger] sont guidées par une pensée de l'onde physique, de la nature ondulatoire de la matière, qui résorbe le dualisme [onde, corpuscule]. [12]

Cependant, le rapport entre la représentation intuitive de la mécanique ondulatoire de Schrödinger et son expression formelle demeure complexe : en effet, non seulement il rejette les concepts hérités de la mécanique classique — en particulier celui de trajectoire — mais de plus il se montre également très prudent au sujet des descriptions de l'électron proposées par de Broglie, dont il reconnaît malgré tout la pertinence :

> Primitivement j'avais eu l'intention, moi aussi, de fonder la nouvelle conception des conditions de quanta sur une hypothèse de ce genre [celle de de Broglie], qui a l'avantage d'être à coup sûr beaucoup plus intuitive que d'autres ; j'ai préféré cependant la forme mathématique parfaitement neutre utilisée dans ce qui précède, parce qu'elle a l'avantage de mettre plus clairement en évidence l'essentiel de la question. [13]

Toute représentation intuitive des phénomènes quantiques demeure problématique, quand bien même celle que propose de Broglie est meilleure et plus opératoire que celle de Bohr. Schrödinger s'appuie sur le formalisme mathématique hérité de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires homogènes et incarné notamment par la fonction d'onde Ψ pour clarifier les fondements de la mécanique ondulatoire et les rendre parfaitement cohérents.

11. Voir en particulier L. de Broglie, J.L. Andrade e Silva, *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire*, T. 1, principes généraux, par L. de Broglie, Paris, éd. Gauthier-Villars, 1971, p. 2 : ≪ Soudain me vint, en 1923, l'idée que la coexistence des ondes et des particules n'existait pas seulement dans le cas étudié par Einstein et qu'elle devait être généralisée pour toutes les particules. Appliquée à l'électron, elle me paraissait devoir expliquer les propriétés étranges des mouvements d'un électron dans un atome découvertes par Bohr dans sa théorie des états stationnaires des atomes. Dans la théorie atomique de Bohr, on voit en effet apparaître des nombres entiers, ce qui est courant dans la théorie des ondes quand on étudie les phénomènes de résonance ou d'interférences ≫.

12. M. Paty, ≪ Formalisme et interprétation physique chez Schrödinger ≫, in Bitbol, Michel et Darrigol, Olivier (éds.), *Erwin Schrödinger. Philosophy and the birth of quantum mechanics. Philosophie et naissance de la mécanique quantique*, Paris, éd. Frontières, 1993, p. 166.

13. E. Schrödinger, *op. cit.*, p. 372.

Intuition et formalisation ne sont pas incompatibles, mais elles n'ont pas les mêmes fonctions et il demeure difficile de les accorder parfaitement. D'un côté, Schrödinger est guidé par les représentations intuitives de l'électron proposées par de Broglie qui ont donc une fonction heuristique indéniable dans « Quantisierung als Eigenwertproblem » ; de l'autre il les met en suspens au moins à titre provisoire afin de saisir rigoureusement les contours de la mécanique ondulatoire. Ajoutons que Schrödinger assigne systématiquement un sens physique au formalisme mathématique qu'il emploie et qu'il n'étudie jamais pour lui-même. Sa démarche n'est donc en rien comparable à celle de Born, Jordan et Heisenberg. Ces derniers considèrent les matrices comme de purs objets mathématiques auxquels ils assignent après coup un sens physique.

Dans sa seconde communication, Schrödinger demeure attaché à des problèmes et des intuitions physiques, comme en témoigne le *raisonnement par analogie* qui précède la formulation de l'équation de Schrödinger dépendant du temps. Il insiste en effet sur la profonde similitude entre l'optique géométrique et la mécanique classique. Plus particulièrement, il reprend à son compte l'analogie établie par Hamilton lui-même entre le *principe de Fermat* et le *principe de Hamilton*. En optique géométrique, le principe de Fermat affirme que la lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée de parcours soit minimale. En mécanique classique, le principe de Hamilton est également un principe minimal dont nous devons rappeler le sens.

Considérons un système dynamique ayant n degrés de liberté. Les propriétés de ce système sont décrites à partir de n coordonnées généralisées q_i, $(i = 1, ..., n)$, supposées indépendantes, dans un espace à n dimensions E, appelé *espace de configuration* du système. Le lagrangien L de ce système est une fonction lisse des coordonnées générales q_i et de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{q}_i$. On le note $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. En mécanique classique, le lagrangien d'un système conservatif est défini par $L = T - V$, où T désigne l'énergie cinétique du système, V son énergie potentielle. Choisissons arbitrairement deux instants t_1 et t_2. Il s'agit de déterminer l'évolution réelle du système entre t_1 et t_2. Notons Q_1 et Q_2 les points de E qui représentent l'état du système respectivement à l'instant t_1 et à l'instant t_2. Considérons l'ensemble des courbes

$$c : [t_1, t_2] \to U,$$

telles que $c(t_1) = Q_1$ et $c(t_2) = Q_2$, U désignant un ouvert de E contenant Q_1 et Q_2. Une fonctionnelle Φ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont le domaine de définition est l'espace

des courbes reliant Q_1 à Q_2 :

$$\Phi(c) = \int_{t_1}^{t_2} L(c(t), \dot{c}(t), t)\mathrm{d}t.$$

Le *principe de Hamilton* affirme que l'évolution réelle du système est telle que l'intégrale en question soit minimale. Le principe de Hamilton et le principe de Fermat sont donc deux principes extrémaux. Le premier relève de la mécanique classique, le second de l'optique géométrique. D'où le rapprochement établi par Schrödinger entre ces deux domaines de la physique dès le début de sa seconde communication.

Schrödinger montre ensuite que sa mécanique ondulatoire [undulatorische Mechanik] doit être à la mécanique classique, ce que l'optique ondulatoire est à l'optique géométrique. Cette analogie n'est pas neuve : de Broglie la formule notamment au cours d'une note présentée par Jean Perrin dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* :

> La théorie des ondes allait trop loin en niant la structure discontinue de l'énergie radiante et pas assez loin en renonçant à intervenir dans la dynamique. *La nouvelle dynamique du point matériel libre est à l'ancienne dynamique (y compris celle d'Einstein) ce que l'optique ondulatoire est à l'optique géométrique.* En y réfléchissant, on verra que la synthèse proposée est le couronnement logique du développement comparé de la dynamique et de l'optique depuis le XVIII$^{\mathrm{e}}$ siècle. [14]

De Broglie rappelle tout d'abord l'existence de quanta de lumière qui invalide une conception purement ondulatoire des phénomènes lumineux ; de manière symétrique, il insiste sur le fait que la théorie des ondes mériterait toute sa place en dynamique. S'ensuit une analogie entre la nouvelle dynamique et la dynamique classique d'une part, l'optique ondulatoire et l'optique géométrique d'autre part. Schrödinger s'appuie exactement sur la même analogie pour exhiber les *insuffisances* de la mécanique classique. En effet, de même que l'optique géométrique est impuissante à expliquer les phénomènes de diffraction de la lumière, de même la mécanique classique ne saurait rendre raison des caractéristiques ondulatoires que de Broglie et Schrödinger attachent à l'électron. Ainsi, la formulation de l'équation de Schrödinger dépendant du temps est précédée d'une mise en perspective historique portant sur les développements de l'optique et de la mécanique. Il s'agit corrélativement de justifier l'existence même de la mécanique ondulatoire dont la mécanique classique ne constitue qu'une approximation très grossière, puisque fondée sur des prénotions dont il s'agit de se défaire :

> L'étude du mouvement des points représentatifs, qui forme l'objet de la mécanique classique, n'est qu'un procédé d'approximation et son emploi est tout aussi peu justifié que l'emploi

14. Louis de Broglie, ≪ Optique — Quanta de lumière, diffraction et interférences ≫, note présentée par Jean Perrin dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **117** (1923), p. 549.

> de l'optique géométrique ou l'optique des rayons (Strahlenoptik) dans le cas des véritables phénomènes optiques. [15]

Schrödinger s'appuie donc sur la relation bien connue entre deux théories, à savoir l'*optique ondulatoire* et l'*optique géométrique*, pour souligner les insuffisances de la mécanique classique et, partant, la *nécessité* ainsi que la *légitimité* de la mécanique ondulatoire. Le regard rétrospectif que Schrödinger jette sur divers domaines de la physique est donc corrélé à une tentative de justification épistémologique de la mécanique ondulatoire. Nous avons là un exemple qui illustre l'importance du raisonnement par analogie en physique.

Dans le premier chapitre de cette partie, nous avons déjà montré la pertinence et l'effectivité de ce type de raisonnement en mathématiques en nous appuyant sur les travaux de Hurwitz consacrés à la méthode intégrale en théorie des invariants. Nous observons maintenant que l'introduction même de la « mécanique ondulatoire » s'effectue à la faveur d'un raisonnement par analogie qui porte sur des théories physiques (optique géométrique / optique ondulatoire ; mécanique classique / mécanique ondulatoire). L'analogie a ici une triple fonction : (1) elle indique les insuffisances de la mécanique classique ; (2) elle implique que la mécanique classique doit être *complétée* par la mécanique ondulatoire ; (3) elle assure une justification à ce cadre théorique introduit par de Broglie et Schrödinger.

Les réflexions de de Broglie et Schrödinger viennent confirmer les arguments décisifs de Duhem sur les usages et les fonctions de l'analogie en physique. Nous pensons au passage suivant issu de *La théorie physique* :

> Le physicien qui cherche à réunir et à classer dans une théorie abstraite les lois d'une certaine catégorie de phénomènes, se laisse très souvent guider par l'analogie qu'il entrevoit entre ces phénomènes et les phénomènes d'une autre catégorie ; si ces derniers se trouvent déjà ordonnés et organisés en une théorie satisfaisante, le physicien essayera de grouper les premiers dans un système de même type et de même forme. [16]

Ce passage est décisif dans la mesure où Duhem montre que l'analogie en physique ne porte pas seulement sur des *classes de phénomènes* mais sur des *cadres théoriques*, ce que vient confirmer notre référence à la mécanique ondulatoire qui serait donc l'analogue de l'optique ondulatoire. Duhem poursuit son argumentation en ces termes :

> L'histoire de la Physique nous montre que la recherche des analogies entre deux catégories distinctes de phénomènes a peut-être été, de tous les procédés mis en œuvre pour construire des théories physiques, la méthode la plus sûre et la plus féconde. [17]

15. E. Schrödinger, « Quantisierung als Eigenwertproblem », Zweite Mitteilung, *op. cit.*, p. 506.
16. Pierre Duhem, *La théorie physique, son objet, sa structure* (1906), Paris, éd. Vrin, 2005, p. 141.
17. *ibid.*, p. 142.

Il vient ainsi contester l'idée selon laquelle la construction d'une théorie physique devrait se faire sur un modèle déductiviste, comme si seule la déduction était un raisonnement scientifiquement pertinent par opposition à l'analogie qui demeurerait arbitraire, subjective et irrationnelle. Si Duhem souligne avec raison la fécondité de l'analogie en physique — et l'exemple de la mécanique ondulatoire confirme avec éclat son propos — en revanche, il n'est pas avéré que la recherche des analogies soit « la méthode la plus sûre » sans conditions. Une série de contre-exemples que nous avons abordés dans notre thèse viennent démentir cette assertion. Ainsi, en 1918 Weyl se fonde sur une analogie pour unifier la gravitation et l'électricité : la théorie einsteinienne de la gravitation serait à la géométrie riemannienne ce que la théorie unifiée des champs serait à la géométrie purement infinitésimale de Weyl. Or, plusieurs auteurs — à commencer par Reichenbach — ont démontré que cette analogie n'était pas fondée et surtout qu'elle donnait lieu à une théorie dont les conséquences empiriques doivent être rejetées. De même, l'analogie entre l'atome et le système solaire qui a largement été utilisée dans l'ancienne théorie des quanta conduit à conserver la notion de *trajectoire* qui se trouve remise en cause aussi bien par Schrödinger que par Heisenberg, Born et Jordan. Si la fécondité de l'analogie en physique est confirmée avec l'avènement de la mécanique ondulatoire, nous ne saurions néanmoins affirmer à l'instar de Duhem que la recherche d'analogies est la méthode la plus sûre en physique. Une analogie n'a de pertinence que si elle est contrôlée, c'est-à-dire si son bien-fondé et ses éventuelles limites sont soigneusement exhibés.

Ainsi, outre le fait que de Broglie et Schrödinger sont guidés par une intuition physique — celle des ondes de matière — lorsqu'ils cherchent à tirer au clair les fondements de la théorie des quanta, ils s'appuient essentiellement sur un raisonnement par analogie pour dessiner les contours de la mécanique ondulatoire. Ils se démarquent par là même de l'école de Göttingen dans la mathématisation de la mécanique quantique sur deux points : Born et Jordan privilégient d'emblée le formalisme mathématique — en l'occurrence ici le calcul matriciel — pour assurer une cohérence à la mécanique quantique ; leur approche est déductiviste : elle ne s'appuie pas sur un raisonnement par analogie mais, *in fine*, sur la méthode axiomatique. Nous pouvons donc mettre en évidence deux styles d'unification de la physique : le premier est fondé sur l'usage d'analogies qui permet de rapprocher divers domaines théoriques et d'appréhender l'inconnu à partir de situations connues. Le second est fondé sur un usage transversal de la méthode axiomatique qui est censée pouvoir s'appliquer à une grande diversité de théories physiques.

Jordan, Nordheim et von Neumann prolongent le programme d'axiomatisation de la phy-

sique promu par Hilbert dès la conférence de Paris de 1900. En revanche, de Broglie et Schrödinger ne se situent pas dans ce programme. Ajoutons que Weyl et Wigner adoptent une position originale puisqu'ils se démarquent aussi bien des tenants de la méthode axiomatique en physique quantique que de Schrödinger et de Broglie. Ainsi, dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik* Weyl ne formule pas d'emblée les postulats de la mécanique quantique ; il les énonce seulement dans le § 7 de la seconde partie de son ouvrage, sans adopter une présentation sous la forme d'axiomes. En réalité, Weyl et Wigner s'appuient essentiellement sur la théorie des groupes pour clarifier les fondements de la mécanique quantique et rendre compte des résultats qualitatifs issus de la spectroscopie. Mais surtout, la théorie des groupes devient un puissant pôle unificateur de la physique sous leur plume, puisqu'elle permet de formuler les principes de symétrie sur lesquels sont fondées une diversité de théories physiques.

Inversement, il ne faudrait pas croire qu'il existe une ligne de démarcation tranchée entre la mécanique ondulatoire de Schrödinger et la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan. Peu après la parution de « Quantisierung als Eigenwertproblem », Max Born propose une interprétation statistique de la mécanique ondulatoire de Schrödinger et il montre en quoi la mécanique quantique est fondamentalement une théorie *indéterministe* en s'appuyant sur la situation physique d'une interaction (une collision) entre une particule libre (un électron) et un atome. Il affirme en effet qu'aucune grandeur n'est susceptible d'expliquer causalement les effets d'une collision ; il reconnaît que cet indéterminisme constitue une position philosophique qui doit être soumise à un examen critique et au développement de la mécanique quantique. [18] Réciproquement, Schrödinger prouve *l'équivalence* entre ces deux formalismes en 1926 et von Neumann les *unifie* en 1927. Cela ne signifie pourtant pas que les formalismes de Schrödinger et de Heisenberg-Born-Jordan sont complètement identifiables, quand bien même ils aboutissent aux mêmes prédictions. La relation à des intuitions physiques et à l'empirie n'est pas le même dans les deux cas.

Qu'en est-il des rapports entre Schrödinger et Weyl ? Rappelons que, de 1921 à 1927, Schrödinger enseigne à l'université de Zürich ; il côtoie Weyl qui exerce alors à l'ETH de Zürich. À la lecture de la première partie de « Quantisierung als Eigenwertproblem », il apparaît que Schrödinger a présenté ses recherches à Weyl avant publication. En effet, dans une note de bas de page, Schrödinger indique avoir été aidé par Weyl pour formuler son équation

18. M. Born, « Sur la mécanique quantique des collisions » (1926), *Zeitschrift für Physik* **37**, p. 863-867, trad. en français dans B. Escoubès et J. L. Lopes, *Sources et évolution de la physique quantique*, Les Ulis, EDP sciences, 2005, p. 129 et suiv.

en coordonnées polaires.[19] Cela signifie donc que Weyl a eu un contact très direct avec Schrödinger au moment même où ce dernier énonce les fondements de sa mécanique ondulatoire. Weyl prend très tôt connaissance des travaux fondateurs de Schrödinger, avant d'appliquer la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique. Cependant, Weyl nr s'intéresse pas exclusivement à la mécanique ondulatoire de Schrödinger. Il entretient en parallèle une correspondance avec Born et Jordan. Comme le signale E. Scholz, Born rend même visite à Weyl en septembre 1925 pour lui faire part des dernières avancées en mécanique matricielle.[20] Weyl entretient donc des contacts avec les principaux représentants de la mécanique ondulatoire et de la mécanique des matrices. La deuxième partie de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* atteste du fait qu'il tient ces deux théories pour équivalentes puisqu'il envisage les formalismes de Schrödinger d'une part, de Heisenberg-Born-Jordan d'autre part sans solution de continuité. Ajoutons que l'ouvrage de Weyl constitue la première monographie dans laquelle figure la définition des espaces de Hilbert abstraits par von Neumann, concept qui garantit justement une unité aux formalismes de Schrödinger et de Heisenberg-Born-Jordan. Nous verrons dans la sous-section 3.3.1 de la présente partie que les liens entre Schrödinger et Weyl ne concernent pas seulement les fondements de la mécanique ondulatoire. En effet, dès 1922 Schrödinger envisage d'adapter la première théorie de jauge de Weyl à la théorie des quanta. Schrödinger joue donc un rôle clé dans le passage de la première à la seconde théorie de jauge.

3.1.2 La *mécanique matricielle* de Heisenberg-Born-Jordan

Les principes de la mécanique matricielle de Heisenberg-Born-Jordan sont formulés dans une série de trois articles publiés en 1925, à savoir ≪ Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen ≫ (Heisenberg), ≪ Zur Quantenmechanik I ≫ (Born, Jordan), ≪ Zur Quantenmechanik II ≫ (Born, Jordan, Heisenberg). Nous nous proposons de revenir sur les deux premiers articles pour montrer comment s'opère la mathématisation de la mécanique quantique sous une forme matricielle. Il s'agit également de déterminer le rapport très particulier qu'établissent Born, Jordan et Heisenberg entre le sens physique et la forme mathématique de la nouvelle théorie quantique qu'ils élaborent en 1925. Nous allons voir que ce rapport n'est pas du même ordre que celui qui est instauré par Schrödinger avec sa mécanique ondulatoire.

Le début de l'article de Heisenberg intitulé ≪ Über quantentheoretische Umdeutung ki-

19. E. Schrödinger, ≪ Quantisierung als Eigenwertproblem ≫, Erste Mitteilung, *op. cit.*, p. 363.
20. E. Scholz, ≪ Introducing groups into quantum mechanics ≫, *Historia Mathematica*, **33**, 2006, p. 463.

nematischer und mechanischer Beziehungen » doit être analysé avec prudence. En effet, il semblerait que Heisenberg envisage de corriger la théorie des quanta de Bohr-Sommefeld pour des raisons exclusivement physiques :

> On sait bien que les règles formelles utilisées en théorie quantique pour calculer des grandeurs observables telles que l'énergie d'un atome d'hydrogène peuvent être sérieusement mises en question en avançant qu'elles contiennent, comme élément fondamental, des relations entre des grandeurs qui sont apparemment inobservables en principe, comme par exemple la position et la période de révolution d'un électron. Ces règles souffrent d'un évident manque de bases physiques, à moins que l'on ne continue à garder l'espoir que les grandeurs jusqu'ici inobservables puissent un jour faire partie du domaine des mesures expérimentales. On pourrait estimer que cet espoir est justifié si les règles mentionnées ci-dessus avaient une consistance interne et étaient applicables à une classe bien définie de problèmes de mécanique quantique. L'expérience montre cependant que seuls l'atome d'hydrogène et l'effet Stark sont susceptibles d'être traités par ces règles formelles de la théorie quantique. [21]

Il montre tout d'abord que la théorie des quanta fait intervenir des grandeurs qui n'admettent pas de correspondant observable : elles sont introduites à la faveur d'un artifice de calcul, mais elles n'ont pas de sens physique. En conséquence, Heisenberg rejette le modèle de l'électron considéré comme une particule en mouvement le long d'une orbite autour du noyau d'un atome. On peut s'interroger sur l'épistémologie implicite qui justifie cette assertion : Heisenberg affirme sans ambiguïté que seules des grandeurs observables doivent être admises en physique ce qui renvoie à une forme d'empirisme. Heisenberg entend donc rejeter *toutes* les hypothèses *ad hoc* que comporte la théorie des quanta de Bohr-Sommerfeld. Il ajoute que le champ d'application de cette théorie demeure très restreint puisqu'elle ne fonctionne que dans le cas de l'atome d'hydrogène et de l'effet Stark qui se traduit par une modification des raies spectrales des atomes et des molécules sous l'action d'un champ électrique. À la lecture de ce passage on est amené à croire que Heisenberg envisage de construire une nouvelle théorie quantique pour deux raisons : (1) lui assurer un véritable fondement empirique en éliminant toutes les hypothèses ad hoc ; (2) garantir sa cohérence face à une série d'effets que Bohr et Sommerfeld ont échoué à expliquer.

En réalité, l'élimination de toutes les grandeurs inobservables de l'ancienne théorie des quanta est corrélée à une transformation en profondeur du cadre mathématique qui la sous-tendait. Cette réforme qui est essentiellement formelle, garantit une cohérence à la théorie élaborée par Heisenberg avant que ne soit vérifiée sa pertinence au regard des données spec-

21. W. Heisenberg, « Réinterprétation en théorie quantique des relations cinématiques et mécaniques », trad. B. Escoubès, in B. Escoubès et José Leite Lopes, *Sources et évolution de la physique quantique*, *op. cit.*, p. 112.

troscopiques. L'ancienne théorie des quanta souffre d'une ambivalence fondamentale : elle ne rompt pas avec la mécanique classique. Or, Heisenberg instaure une ligne de démarcation entre la théorie quantique et la théorie classique au niveau de leurs formalismes respectifs. Autrement dit, il ne s'appuie pas sur les seules données expérimentales pour corriger l'ancienne théorie des quanta : il montre qu'il n'y a plus de place pour un modèle semi-classique, dans la mesure où les formalismes attachés respectivement aux cas quantique et classique sont incompatibles. Son article est structuré par un *raisonnement comparatiste* : les théories classique et quantique sont comparées systématiquement sur un plan formel, de manière à souligner la frontière qui les sépare irrémédiablement. La comparaison a ici une fonction de *mise à distance* entre deux théories physiques. On peut donc dire que le processus de mathématisation qui est à l'œuvre dans l'article de Heisenberg joue un rôle constitutif dans l'élaboration de la « mécanique quantique » (au sens de Heisenberg, Jordan et Born). Le commentaire suivant de Jan Lacki nous paraît décisif :

> En 1925, Heisenberg posa les jalons de la mécanique matricielle (...). L'approche de Heisenberg avait comme motivation déclarée de ne prendre en compte que les grandeurs observables et leurs règles de manipulation. (...) On peut analyser le problème auquel fit face Heisenberg comme essentiellement celui de déterminer comment associer des suites de nombres (amplitudes) aux grandeurs physiques en théorie quantique. Clairement, une telle association devait être consistante, pas seulement au niveau de la concordance des amplitudes avec les valeurs des grandeurs physique, mais à niveau plus *structurel* [nous soulignons]. [22]

Cet argument ne peut pas s'appliquer au projet de mécanique ondulatoire de Schrödinger, qui demeure guidé par une intuition physique, celle des ondes de matière. Les dernières lignes de l'article de Heisenberg nous confortent d'ailleurs dans nos hypothèses :

> Seule une recherche mathématique intensive sur la méthode employée ici de manière très superficielle permettra de savoir si une méthode de détermination de quantités de théorie quantique utilisant des grandeurs observables, comme celle-ci, peut être jugée intéressante en son principe (...). [23]

Heisenberg insiste sur l'importance d'une « recherche mathématique » pour élucider les fondements de la mécanique quantique. La question est de savoir comment il procède pour introduire un nouveau formalisme — qui deviendra la mécanique des matrices — sachant qu'il s'agit d'éliminer les grandeurs inobservables issues de la vieille théorie des quanta. Plus généralement, Heisenberg entend faire correspondre à chaque grandeur classique son

22. J. Lacki, « Pensée physique et mathématique, à propos du problème de l'adéquation », in *actes du colloque de Peyrescq, « la pensée numérique »* , 2002, p. 204.
23. W. Heisenberg, *op. cit.*, p. 125.

équivalent quantique.[24] Il se fonde donc sur le *principe de correspondance* de Bohr que l'on peut définir comme suit : établir des règles formelles qui permettent de quantifier les théories classiques, c'est-à-dire de transformer les « grandeurs » classiques en « grandeurs » quantiques.

Puisqu'il est impossible de représenter un électron comme un point dans l'espace, il est nécessaire de s'appuyer sur les seules données observables pour construire ce nouveau formalisme. Heisenberg remarque qu'« en théorie quantique, il est possible d'attribuer à un électron une émission de rayonnement. Afin de caractériser ce rayonnement, il faut d'abord obtenir les fréquences qui apparaissent en fonction de deux variables ».[25] Ce passage mérite d'être explicité. Rappelons tout d'abord qu'en physique classique, une coordonnée de position $x(t)$ d'une particule en mouvement périodique de fréquence ν_0 peut être décomposée comme suit :

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{2\pi i n\nu_0 t}.$$

où les x_n désignent les coefficients ou les composantes de Fourier de x. D'après les résultats établis par Bohr en 1913, dans le cas quantique, on observe des fréquences ν_{nm} vérifiant :

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m$$

Bohr interprétait cette égalité comme suit : lorsqu'un électron passe d'un niveau d'énergie E_n à un niveau d'énergie E_m, il émet un quanta de lumière (un photon) d'énergie $h\nu_{nm}$. Les fréquences quantiques dépendent donc de « deux variables », ou plus exactement de deux indices que nous avons désignés par les lettres n et m. Heisenberg substitue aux coefficients de Fourier x_n un ensemble à deux indices X_{nm} tel que

$$X_{nm}(t) = X_{nm} e^{2\pi i n\nu_{nm} t}.$$

Autrement dit, la grandeur classique $x(t)$ a pour correspondant une grandeur quantique X exprimée par les quantités X_{nm}. Il convient ensuite de rechercher la grandeur quantique qui correspond à $x(t)^2$. Notons-la X^2. Elle se formule également à l'aide d'un ensemble d'indices $(X^2)_{nm}$ satisfaisant à la relation suivante :

$$(X^2)_{nm} = \sum_{q\in\mathbb{Z}} X_{nq} X_{qm}.$$

On peut reconnaître dans cette relation la multiplication matricielle. Ce fait n'est pas directement mis au jour par Heisenberg ; Born le lui fera remarquer peu après, ce qui permettra

24. *ibid.*, p. 113 : « si au lieu d'une grandeur classique $x(t)$ nous avons une grandeur théorique quantique, quelle grandeur quantique apparaîtra à la place de $x(t)$? »

25. *ibid.*, p. 113.

aux manipulations symboliques quelque peu arbitraires effectuées par Heisenberg dans cet article de recevoir une assise formelle cohérente. Heisenberg effectue cependant la remarque suivante qui est d'une importance capitale pour la suite de notre propos : il se donne deux grandeurs *classiques* $x(t)$ et $y(t)$ et il souligne qu'elles commutent, i.e. $x(t)y(t) = y(t)x(t)$; or ce n'est plus le cas de leurs équivalents *quantiques*. Autrement dit, la multiplication de deux grandeurs quantiques ne satisfait pas à la loi de commutativité. [26] Or, il s'agit là de l'une des caractéristiques fondamentales du produit de deux matrices A et B : en général $AB \neq BA$.

Le premier article de Heisenberg ne consiste pas à appliquer le formalisme des matrices à la théorie des quanta comme s'il était donné *a priori*. En réalité, il procède par l'élimination des grandeurs inobservables héritées de l'ancienne théorie des quanta de Bohr-Sommerfeld et il introduit une écriture symbolique cohérente, en conformité avec le résultat suivant : $h\nu_{nm} = E_n - E_m$, que l'on doit à Bohr. Cette écriture symbolique se laisse reconnaître *après coup* comme pouvant être exprimée à l'aide de matrices, ce dont attestent les deux articles suivants intitulés « Zur Quantenmechanik I » (Born, Jordan) et « Zur Quantenmechanik II » (Born, Jordan, Heisenberg). À la différence de Schrödinger, Heisenberg n'est pas guidé par une intuition physique au moment où il publie « Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen », il s'impose une exigence minimale pour que son formalisme se conforme aux données expérimentales issues de la spectroscopie ; en l'occurrence, seules des grandeurs observables doivent intervenir au cours de son raisonnement. Toujours est-il qu'il est d'abord attentif à la cohérence de sa théorie quant à sa forme mathématique, avant de saisir son sens physique.

Les fondements de la mécanique des matrices sont formulés proprement dans « Zur Quantenmechanik ». Cet article pose une série de questionnements sur les sources utilisées par Jordan et Born pour traduire les recherches inaugurales de Heisenberg dans le langage des matrices. Dans leur introduction, Born et Jordan considèrent leurs travaux comme un strict prolongement de « Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen ». Heisenberg reconnaît lui-même qu'il n'est pas encore parvenu à conférer une cohérence mathématique suffisante à sa théorie. Aussi Born et Jordan écrivent-ils :

> D'un point de vue formel et mathématique, les réflexions [de Heisenberg] sont seulement à un état embryonnaire, comme ce dernier le souligne lui-même. Il n'a explicité ses hypothèses que pour des exemples simples et il n'est pas parvenu à une théorie générale. Étant donné que nous avons pris connaissance de ses réflexions *in statu nascendi*, nous nous sommes efforcés de

26. *ibid.*, p. 116 : « Alors qu'en théorie classique, $x(t)y(t)$ est toujours égal à $y(t)x(t)$, ce n'est pas nécessairement le cas en théorie quantique. Dans des cas spéciaux, comme par exemple pour l'expression $x(t)x(t)^2$, cette difficulté ne se produit pas.

> clarifier le contenu formel et mathématique de ses formules pour parachever ses recherches et nous présentons ici quelques-uns de nos résultats. Ils indiquent qu'à partir des fondements donnés par Heisenberg, il est parfaitement possible de construire l'édifice d'une théorie mathématique complète de la mécanique quantique en analogie très étroite avec la mécanique classique, à condition de prendre garde aux traits qui caractérisent les phénomènes quantiques en propre. [27]

Pourtant, la lecture seule de l'article de Heisenberg ne permet pas de traduire formellement ses innovations à l'aide du calcul matriciel. Non seulement nous devons nous attendre à ce que Born et Jordan se soient largement familiarisés avec ce calcul — avant même de prolonger les travaux de Heisenberg —, mais de plus, il convient de nous demander si les matrices ne font pas déjà partie des concepts communément partagés par les scientifiques directement ou indirectement liés à l'école de physique mathématique de Göttingen dont Jordan et Born font précisément partie. En effet, ils poursuivent en ces termes :

> Le fondement mathématique des réflexions de Heisenberg est la loi de multiplication des grandeurs issues de la théorie quantique qu'il a obtenue à partir d'une règle de correspondance ingénieuse. La refonte de son formalisme que nous proposons repose sur le constat selon lequel cette loi n'est rien d'autre que la loi bien connue de multiplication des matrices. Le schéma carré à un nombre infini [de lignes et de colonnes] (avec des indices parcourant des ensembles discrets ou continus), pour ainsi dire la matrice, est le représentant d'une grandeur physique qui est exprimée en théorie classique comme fonction du temps. La méthode mathématique de la nouvelle mécanique classique est ainsi décrite par l'usage d'une analyse matricielle, à la place de l'analyse numérique habituelle. [28]

Le terme ≪ wohlbekannt ≫ doit nous arrêter : Born et Jordan suppose que les lois auxquelles le calcul matriciel est assujetti n'ont rien d'inédit en physique mathématique ; elles semblent communément partagées, tout du moins à l'université de Göttingen. Leur perception ne saurait être généralisée. Pourtant, il est nécessaire de rendre historiquement raison de leur assertion. En quoi peuvent-ils affirmer que la loi de multiplication des matrices est ≪ bien connue ≫ ? Une note de bas de page doit retenir toute notre attention au début du chapitre 1 qui est consacré au calcul matriciel d'un point de vue purement mathématique. Dans cette note, Born et Jordan mentionnent l'ouvrage du mathématicien américain M. Bôcher intitulé *Introduction to Higher Algebra* (1907) dont ils ont parcouru la traduction en allemand par Hans Beck (1910). Ils citent également les *Methoden der mathematischen Physik* de Hilbert et Courant (1924).

Bôcher s'est formé auprès de F. Klein à l'université de Göttingen au début des années 1890, avant de devenir professeur à l'université de Harvard. Le titre même de son manuel —

27. M. Born, P. Jordan, ≪ Zur Quantenmechanik ≫, *Zeitschrift für Physik*, **34**, 1925, p. 858.
28. *ibid.*, p. 859.

Introduction to Higher Algebra — fait directement écho à l'*Einleitung in die höhere Geometrie* publiée par F. Klein en 1893. Pour le dire autrement, l'ouvrage de Bôcher est le pendant algébrique de l'ouvrage de F. Klein en géométrie. Voilà pourquoi l'*Introduction to Higher Algebra* est rapidement traduit en langue allemande ; il devient un ouvrage de référence en algèbre au même titre que le « Lehrbuch der Algebra » de Weber. Précisons que le manuel de Bôcher n'aborde pas la théorie de Galois ; il est centré sur les polynômes, les transformations linéaires, les matrices et les formes quadratiques. L'axiomatisation du concept de groupe est tout juste évoquée à la fin du chapitre VI [29]. Au cours du chapitre VI, Bôcher répertorie les propriétés qui caractérisent les opérations sur les matrices : addition et multiplication. Pour ce faire, il se fonde sur une théorie abstraite des quantités complexes qu'il définit comme suit :

> Dans une théorie abstraite des quantités complexes, nous ne spécifions jamais aucun objet concret tels que cheval, vache, etc. mais nous prêtons seulement attention à des ensembles de quantités (couples, triplets, etc.) en distinguant ces quantités en fonction de la position qu'elles occupent dans notre [écriture symbolique]. Il est souvent commode de désigner une telle quantité par une seule lettre
>
> $$\alpha = (a, b, c)$$
>
> de même qu'en algèbre ordinaire nous désignons une fraction (par exemple $\frac{2}{3}$) qui implique pourtant deux nombres par une seule lettre. [30]

Dans ce passage, Bôcher indique vouloir manipuler des symboles et définir des lois entre ces symboles indépendamment de la nature des objets auxquels ils renvoient. Cette idée n'est pas nouvelle dans le domaine de l'algèbre. En effet, dès les années 1830 à 1850, l'école algébrique anglaise, qui est représentée notamment par Peacock, Babbage, de Morgan, Boole ou encore Cayley, se caractérise par le développement d'une algèbre symbolique qui ne porte pas sur la signification de symboles utilisés mais sur les relations que l'on peut définir entre eux. Bôcher prolonge cette tradition mais, dans le même temps, il est redevable de la méthode axiomatique qui s'est systématisée parmi les algébristes de langue allemande à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle, comme en attestent les travaux de Dedekind, Hölder ou encore Weber. Chaque matrice est représentée par une seule lettre ; preuve qu'un symbole ne désigne plus nécessairement une quantité numérique. Il convient d'exhiber les propriétés auxquelles satisfont les opérations sur les matrices. Bôcher montre tout d'abord que les « lois ordinaires de l'algèbre » restent valables lorsque l'on additionne des matrices ou que l'on multiplie des matrices par des scalaires :

29. M. Bôcher, *Introduction to Higher Algebra*, New York, The Macmillan Company, 1907, p. 82.
30. *ibid.*, p. 60.

Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont des matrices, et k, l des scalaires,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$$

$$k\mathbf{a}+k\mathbf{b}=k(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

$$k\mathbf{a}+l\mathbf{a}=(k+l)\mathbf{a}.$$

Il définit ensuite la multiplication entre matrices — il se restreint alors à des matrices carrées — et il montre que celle-ci ne satisfait pas à la propriété de commutativité. En général :

$$\mathbf{ab}\neq\mathbf{ba}$$

ce qui avait déjà été remarqué à la fin des années 1840 par Cayley. Bôcher ajoute que la multiplication des matrices est associative et distributive par rapport à l'addition :

$$(\mathbf{ab})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{bc})$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{ab}+\mathbf{ac}.$$

En outre, Bôcher introduit la matrice identité

$$I=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{Vmatrix}$$

telle que pour toute matrice $n\times n$ que l'on note $\mathbf{a}$, on vérifie

$$\mathbf{a}I=I\mathbf{a}=a.$$

Enfin, il montre que pour toute matrice $\mathbf{a}$ de taille $n\times n$ de déterminant non nul, il existe une unique matrice inverse $\mathbf{a}^{-1}$ telle que

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1}=\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}=I.$$

Soulignons que Bôcher détermine les propriétés auxquelles satisfont l'addition et la multiplication des matrices avant de faire le lien entre matrices et transformations linéaires. Dans le chapitre I de « Zur Quantenmechanik », Born et Jordan reprennent à leur compte les §§ 22 et 25 de l'ouvrage de Bôcher qu'ils résument de manière très ramassée sous la forme d'une *série d'axiomes* qui président à la définition d'une algèbre de matrices carrées à un nombre infini de lignes et de colonnes et à coefficients complexes.

L'idée d'introduire l'outil matriciel en physique mathématique n'est pas neuve. En effet, Jordan et Born se réfèrent aux *Methoden der mathematischen Physik* (1924) de Hilbert et Courant. Or, dans le chapitre premier de cet ouvrage, Hilbert et Courant énoncent effectivement les propriétés auxquelles satisfont la multiplication et l'addition de matrices. Cela étant, ils n'introduisent pas l'outil matriciel pour lui-même : ils raisonnent de prime abord sur des transformations linéaires d'un espace vectoriel sur lui-même (endomorphismes). Pour Hilbert et Courant, une matrice carrée est fondamentalement « la » matrice d'un endomorphisme dans une base donnée. Ainsi, Born et Jordan effectuent une synthèse entre les deux sources auxquelles ils se réfèrent : l'ouvrage de Bôcher leur permet de considérer les matrices et les lois du calcul matriciel pour elles-mêmes ; les premières pages du livre de Courant et Hilbert constitue une médiation essentielle afin d'étendre l'outil matriciel à la physique mathématique.

Cette première étape dans la mathématisation de la mécanique quantique à l'aide des matrices montre déjà toute l'importance que Born et Jordan accordent à la méthode axiomatique pour définir les algèbres de matrices carrées à coefficients complexes. La question est de savoir si et de quelle manière cette méthode axiomatique se répercute au niveau des grandeurs quantiques qui précisément doivent être représentées par des matrices. Tout porte à croire que l'axiomatisation des algèbres de matrices constitue un élément heuristique décisif afin de dégager les relations fondamentales entre les grandeurs quantiques. Pour parvenir à cette fin, Born et Jordan s'appuient sur le formalisme hamiltonien en mécanique classique dont ils proposent un analogue dans le cas quantique. Rappelons tout d'abord ce qu'il faut entendre par hamiltonien classique.

Soit un système dynamique à n degrés de liberté, L désigne son lagrangien. Son hamiltonien H peut être défini à partir de son lagrangien en introduisant n nouvelles variables indépendantes p_i, appelées *moments conjugués* et définies par :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

L'évolution du système dynamique est décrite dans un espace qui n'est plus à n dimensions — comme c'est le cas avec l'*espace de configuration* dans le cadre du formalisme lagrangien — mais à $2n$ dimensions. Cela vient tout simplement de l'adjonction de n variables indépendantes correspondant aux moments conjugués. L'espace ainsi obtenu est appelé *espace des phases*. Le hamiltonien H est défini par :

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L.$$

et il représente l'énergie totale dans le cas d'un système conservatif. On peut remplacer les n équations différentielles du second ordre de Lagrange par les $2n$ équations différentielles canoniques de Hamilton qui sont du premier ordre. Elles sont de la forme :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Born et Jordan formulent ces équations dans le cas d'un système dynamique à un degré de liberté dans leur article.[31] Comme ils le précisent, les équations du mouvement peuvent être déduites à partir du principe d'action (Wirkungsprinzip) :

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \{p\dot{q} - H(p,q)\} = \text{Extremum}.$$

Déterminons les constantes de mouvement en mécanique classique. Donnons-nous une fonction $f(q_i, p_i)$ définie sur l'espace des phases, représentant une grandeur physique. Introduisons le crochet de Poisson de f avec H :

$$\{f, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right).$$

Mathématiquement, le crochet de Poisson est une forme bilinéaire, antisymétrique, qui satisfait à l'identité de Jacobi. Cela posé, une expression f des variables dynamiques est un invariant si son crochet de Poisson avec le hamiltonien est nul, ce qui s'écrit tout simplement :

$$\{f, H\} = 0.$$

Ainsi, le crochet de Poisson sert de critère d'identification des constantes de mouvement dans le cadre de la mécanique classique lorsque celle-ci est mathématisée sous une forme hamiltonienne. Pour le dire autrement, la quantité représentée par la fonction f est une constante de mouvement si $\{f, H\} = 0$. Pour transposer le formalisme hamiltonien en mécanique quantique, Jordan et Born remplacent les variables position q_i et impulsion p_i par leurs équivalents quantiques : il s'agit de matrices que nous désignerons respectivement à l'aide des symboles $\hat{q}_i$ et $\hat{p}_i$. Ils montrent que ces deux grandeurs quantiques sont assujetties à la relation fondamentale :

$$\hat{p}_i \hat{q}_i - \hat{q}_i \hat{p}_i = \frac{h}{2\pi i} I$$

où h désigne la constante de Planck et I la matrice identité. La partie gauche de cette égalité représente le commutateur $[\hat{p}_i, \hat{q}_i]$. Pour prolonger le raisonnement de Born et Jordan, nous

31. M. Born, P. Jordan, *op. cit.*, p. 868.

pouvons ajouter que dans le cas classique, le crochet de Poisson de q_i et p_i vérifie :

$$\{p_i, q_i\} = 1.$$

Nous avons donc la correspondance

$$\{p_i, q_i\} \leftrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_i, \hat{q}_i].$$

Born et Jordan ne se contentent donc pas d'introduire l'outil matriciel pour clarifier l'article inaugural de Heisenberg en mécanique quantique ; ils s'appuient également sur le formalisme hamiltonien en mécanique classique pour asseoir le principe de correspondance entre les cas classique et quantique sur des bases solides. Ainsi, la mathématisation de la mécanique quantique opérée par Jordan et Born dans cet article repose (1) sur une reprise des axiomes qui sont au fondement du calcul matriciel — le fait que le produit des matrices ne soit généralement pas commutatif rend formellement raison du résultat de Heisenberg selon lequel les grandeurs quantiques ne commutent pas nécessairement —, (2) sur le formalisme hamiltonien, celui-ci servant de guide pour s'assurer que chaque variable classique a un équivalent quantique, la réciproque étant fausse, comme en témoignent les travaux de Pauli, Uhlenbeck et Goudsmit sur le spin ou moment cinétique interne à l'électron, qui constitue un degré de liberté spécifiquement quantique.

Nous devons compléter notre résumé de la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan à trois niveaux. (1) La correspondance qu'entretient Weyl avec Born et Jordan en 1925 porte sur « Zur Quantenmechanik I » ; plus précisément, Weyl entend revenir sur les fondements de la relation $\hat{p}_i\hat{q}_i - \hat{q}_i\hat{p}_i = h/2\pi iI$. Son article intitulé « Quantenmechanik und Gruppentheorie » (1928) est d'ailleurs partiellement consacré à ce problème. (2) Schrödinger s'appuie sur les avancées de Born et Jordan pour prouver l'équivalence formelle entre la mécanique ondulatoire et la mécanique des matrices ; réciproquement, Born propose une interprétation probabiliste de la fonction d'onde de Schrödinger. (3) Il est nécessaire de faire apparaître le lien entre les apports de Born et Jordan dans « Zur Quantenmechanik I » et le projet plus général visant à axiomatiser la mécanique quantique auquel Jordan participe d'ailleurs.

Venons-en au premier point. Le statut de la relation $\hat{p}_i\hat{q}_i - \hat{q}_i\hat{p}_i = h/2\pi iI$ suscite donc la curiosité de Weyl, comme en atteste une série de lettres qu'il échange avec Born et Jordan. Cette correspondance a été analysée par E. Scholz. Nous nous proposons de résumer brièvement son commentaire. Weyl ne se satisfait pas de l'analogie entre le crochet de Poisson $\{p_i, q_i\}$ et le commutateur $[\hat{p}_i, \hat{q}_i]$ sur laquelle Born et Jordan se fondent dans leur article. Weyl se propose

donc d'analyser la relation $\hat{p}_i\hat{q}_i - \hat{q}_i\hat{p}_i = h/2\pi iI$ en s'appuyant sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie qui constitue le cadre même de ses recherches en mathématiques pures en 1925-1926. Il raisonne sur des groupes à un paramètre formés de transformations unitaires d'un espace de Hilbert de dimension finie E. Pour rappel, un sous-groupe à un paramètre de $\mathrm{GL}(E)$ est une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(E)$ telle que :

$$f(t+s) = f(t)f(s).$$

Le générateur infinitésimal X d'un groupe à un paramètre $t \mapsto f(t)$ est l'unique élément X de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(E)$ de $\mathrm{GL}(E)$ tel que

$$f(t) = \exp(tX),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soient P et Q deux opérateurs hermitiens sur E, le raisonnement mené par Weyl consiste à leur associer les groupes à un paramètres $t \mapsto f(t)$ et $s \mapsto g(s)$ engendrés respectivement par les opérateurs antihermitiens iP et iQ. Autrement dit,

$$f(t) = \exp(itP), \quad g(s) = \exp(isQ).$$

Dès sa correspondance avec Born et Jordan, Weyl entend établir que la relation de commutation du type

$$PQ - QP = \hbar/iI$$

peut être déduite à partir d'une relation de commutation entre les groupes à un paramètre $t \mapsto \exp(itP)$ et $s \mapsto \exp(isQ)$. Weyl schématise cette relation dans sa correspondance avec Born et il la formule en toute rigueur au cours de son article intitulé « Quantenmechanik und Gruppentheorie ». Voici comment nous pouvons énoncer son résultat : la relation $PQ-QP = \hbar/iI$ est valable si et seulement si les sous-groupes à un paramètre associés aux opérateurs hermitiens P et Q vérifient

$$\exp(isP)\exp(itQ) = \exp(ist\hbar)\exp(itQ)\exp(isP).$$

Ce résultat montre, il est vrai, que Weyl s'intéresse aux *fondements* de la mécanique quantique dans le prolongement des travaux de Born et Jordan. Ajoutons deux précisions pour ne pas surinterpréter cet argument. En premier lieu, Born et Jordan sont décontenancés par le raisonnement de Weyl ; ils ne semblent pas habitués à utiliser le cadre conceptuel issu de la théorie des groupes et des algèbres de Lie. De plus, ils estiment que la théorie des groupes continus demeure inconnue des physiciens et ils ne peuvent donc pas intégrer les suggestions

de Weyl dans leurs propres travaux.[32] Les résultats que Weyl établit non seulement dans sa correspondance avec Born et Jordan, mais encore dans son article de 1928 ne suscitent donc pas spontanément l'attention qu'ils mériteraient. En second lieu, il ne faudrait pas tirer prétexte des réflexions de Weyl sur les relations de commutation entre opérateurs hermitiens pour en déduire qu'il s'est exclusivement intéressé aux fondements de la mécanique quantique. Nous reviendrons dans la section 3.2 sur cette surinterprétation qui est due à Mackey. Ce dernier est tenté de distinguer trop nettement un Weyl *mathématicien*, soucieux de fonder la mécanique quantique sur des principes rigoureux, et un Wigner *physicien*, dont l'attention se porterait essentiellement sur les résultats qualitatifs issus de la spectroscopie.

Approfondissons maintenant le lien et les différences entre la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan et la mécanique ondulatoire de Schrödinger. Bien qu'elles soient ≪ équivalentes ≫ physiquement et mathématiquement, elles ne mettent pas en jeu le même rapport entre une théorie physique et sa mathématisation. À l'instar de de Broglie, Schrödinger est guidé par une intuition physique et il utilise un formalisme connu des physiciens ; en revanche, Heisenberg, Jordan et Born mettent d'emblée l'accent sur la cohérence formelle de leur théorie, faisant d'ailleurs appel à la méthode axiomatique pour introduire le calcul matriciel, avant de formuler la relation fondamentale :

$$\hat{p}_i\hat{q}_i - \hat{q}_i\hat{p}_i = \frac{h}{2\pi i}I.$$

Dès 1926, Schrödinger publie l'article intitulé ≪ Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen ≫ qui a précisément pour but de démontrer l'équivalence *mathématique* entre la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire, sachant que l'équivalence physique est tenue pour acquise : les prédictions dérivant de ces deux théories coïncident. Schrödinger commence par souligner que tout semble opposer les deux mécaniques en question. En effet, Born, Jordan et Heisenberg considèrent que la mécanique des matrices est une théorie du discontinu ; en revanche, Schrödinger rattache la mécanique ondulatoire à une théorie du continu. Mais, cette opposition n'est qu'apparente. Voici comment de Broglie résume le raisonnement qui permet à Schrödinger de parvenir à cette fin :

32. E. Scholz a reproduit en anglais le passage suivant de la lettre de Born à Weyl datée du 2 octobre 1925, in E. Scholz, *op. cit.*, p. 464 : ≪ It was a great pleasure for me to see that our new quantum mechanics attracts your interest. In the meantime, we have made considerable progress and are now sure that our approach covers the most important aspects of the atomic structure. It is very fine that you have thought about our formulas ; we have derived these formulas in our ways, even if not as elegant as you, and intend to publish the subject in this form, because your method is difficult for physicists to access (...) ≫.

> Soit une certaine grandeur mécanique attachée à un corpuscule et l'opérateur qui lui correspond, opérateur que nous savons former. À chaque couple de fonctions propres du système considéré, nous pouvons alors associer une grandeur formée de la manière suivante : on applique l'opérateur en question à l'une des fonctions du couple, on multiplie le résultat par la quantité complexe conjuguée de l'autre fonction et on intègre dans tout l'espace. En répétant la même opération pour tous les couples de fonctions propres, on obtient un ensemble d'éléments, les uns attachés à un état stationnaire unique, les autres à deux états stationnaires, c'est-à-dire à une transition. On peut disposer ces éléments en un tableau où les éléments de la première sorte sont placés sur la diagonale (éléments diagonaux). Chaque grandeur mécanique engendre ainsi une matrice. [33]

Schrödinger parvient donc à former des matrices à partir de sa mécanique ondulatoire et il montre qu'elles peuvent être identifiées à celles qu'ont introduites Born, Jordan et Heisenberg. Cette équivalence mathématique ne doit pas nous faire oublier les différences épistémologiques qui séparent la mécanique ondulatoire de Schrödinger et la mécanique des matrices de Born, Heisenberg et Jordan. Schrödinger est guidé par l'idée des ondes de matière introduite par de Broglie ; en revanche, Born, Heisenberg et Jordan se donnent pour seule règle d'introduire des grandeurs qui ont un sens physique, la cohérence de leur théorie étant ensuite assurée par un formalisme mathématique dont le « substrat » physique n'est guère évident à saisir.

Alors que Schrödinger prouve l'équivalence entre la mécanique ondulatoire et la mécanique des matrices, Born propose de son côté une interprétation probabiliste de la fonction d'onde introduite par Schrödinger. Loin d'avoir immédiatement le sens physique que lui assignait ce dernier, elle doit être interprétée comme une densité de probabilité. C'est ce que montre Born dans l'article intitulé « Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge » qui est publié en 1926. Pour accomplir cette étape, il faut tout d'abord se déprendre d'une forme de réalisme naïf qui consiste à associer immédiatement un existant physique, par exemple une onde de matière, à un concept mathématique, en l'occurrence ici la fonction d'onde Ψ. Comme le souligne avec force de Broglie, cette fonction d'onde est à valeurs complexes ; or, les quantités physiques sont fondamentalement représentées par des valeurs réelles :

> La fonction Ψ étant essentiellement complexe, on ne peut pas, nous l'avons dit, la regarder comme représentant une vibration physique, mais on peut chercher à former à l'aide de Ψ des expressions réelles ayant une signification physique ». [34]

La fonction d'onde ne représente pas un *existant physique*, elle décrit complètement *l'état d'une particule* — par exemple un électron — sachant qu'une particule ou un quanton n'est ni une *onde*, ni un *corpuscule*. Cela signifie que l'alternative apparente entre les thèses corpusculaire et ondulatoire n'a plus lieu d'être en mécanique quantique. La fonction Ψ introduite

33. L. de Broglie, *La physique nouvelle et les quanta*, Paris, éd. Flammarion, 1973, p. 202-203.
34. *ibid.*, p. 186.

par Schrödinger n'est pas n'importe quelle fonction à valeurs complexes. Il s'agit d'une fonction de *carré sommable*. Rappelons ce que cela signifie : une fonction φ définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs complexes est de carré sommable si elle vérifie la propriété suivante :

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

En mécanique quantique non relativiste, les fonctions d'onde sont des fonctions de carré sommable définies sur $\mathbb{R}^3$. Si nous anticipons légèrement sur les étapes suivantes dans la mathématisation de la mécanique quantique, nous pouvons préciser que l'ensemble de ces fonctions forme un espace de Hilbert de dimension infinie, c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension infinie muni d'une forme hermitienne définie positive et complet au sens de Cauchy. Le concept d'espace de Hilbert est axiomatisé par von Neumann dans le cadre de la mathématisation de la mécanique quantique. Nous verrons que la définition rigoureuse de ce concept sert de clef de voûte pour fondre la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire dans un cadre formel *unitaire* parfaitement cohérent. Toujours est-il qu'entre 1925 et 1927, Jordan, Born, Heisenberg ou encore Schrödinger ne déterminent pas avec précision les propriétés mathématiques de l'espace des états, c'est-à-dire de l'espace fonctionnel auquel $\psi(\mathbf{r}, t)$ appartient. L'apport fondamental de Born peut être reformulé comme suit : la fonction $\psi(\mathbf{r}, t)$, de carré sommable et normalisée à 1, représente la densité de probabilité de « trouver » une particule au point r. Pour être plus précis, soient $D \subset \mathbb{R}^3$ le domaine de l'espace accessible à la particule étudiée et r un point de D, la densité de probabilité de trouver cette particule dans le volume infinitésimal d^3r entourant r est :

$$\mathrm{d}^3P(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \, \mathrm{d}^3r.$$

Nous avons évidemment :

$$\int_D |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \, \mathrm{d}^3r = 1.$$

L'interprétation probabiliste de la fonction d'onde proposée par Born est contenue dans le premier *postulat* de la mécanique quantique non relativiste telle qu'elle est maintenant théorisée. Voici comment nous pouvons énoncer ce postulat : l'état d'une particule est complètement décrit par une fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$; la densité de probabilité de trouver cette particule dans le volume infinitésimal d^3r entourant r est

$$\mathrm{d}^3P(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \, \mathrm{d}^3r.$$

Nous ne trouvons aucune formule de ce type dans l'article de Born de 1926. Tout d'abord, l'objet de « Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge » est une étude des phénomènes de

collision entre particules. Born montre que ce problème empirique ne peut être résolu de manière satisfaisante que si l'on propose une interprétation probabiliste de la fonction d'onde. Il reconnaît en amont qu'il ne peut pas rendre raison des phénomènes de collision à l'aide de la mécanique des matrices qu'il a élaborée avec Heisenberg et Jordan. Born est donc conscient que le formalisme proposé par Schrödinger est un complément *essentiel* à celui qu'Heisenberg, Jordan et lui-même ont mis en place. Ensuite, l'énoncé des fondements de la mécanique quantique sous la forme de postulats ou d'axiomes n'est pas le fait de Born lui-même. Les premières tentatives d'axiomatisation de cette théorie physique sont dues à Jordan, Nordheim, Hilbert et von Neumann.

3.1.3 L'axiomatisation de la mécanique quantique

Donnons quelques repères sur les usages et les fonctions de la méthode axiomatique dans la formalisation de la mécanique quantique. Si deux des principaux représentants de la mécanique des matrices sont directement liés à l'école de physique mathématique de Göttingen, de même les premières applications de la méthode axiomatique à la mécanique quantique voient le jour à Göttingen. Pour préciser notre propos, nous pouvons nous appuyer sur l'article de J. Lacki intitulé justement : « The early axiomatizations of quantum mechanics : Jordan, von Neumann and the continuation of Hilbert's program ».

En première analyse, l'axiomatisation de la mécanique quantique se situe dans le prolongement d'un programme plus large visant à axiomatiser la physique. Bien que Hilbert ne soit ni le seul, ni le premier à utiliser la méthode axiomatique en physique, il érige effectivement l'axiomatisation des théories physiques en un véritable programme de recherche. Il précise déjà les objectifs de ce programme dans le sixième des vingt-trois problèmes qu'il énonce en 1900 dans sa célèbre conférence à Paris. De 1905 à 1928, il revient de manière récurrente sur ces questions. Ainsi, en 1905, il consacre toute une leçon à la méthode axiomatique qu'il applique tant aux mathématiques qu'à certaines théories physiques telles que la mécanique, la thermodynamique ou encore la théorie cinétique des gaz. En 1907-1908, Hilbert et Minkowski étudient les fondements de la relativité restreinte. En 1912, Hilbert revient sur les fondements de la théorie cinétique des gaz. Entre 1912 et 1914, il applique également la méthode axiomatique à la théorie élémentaire de la radiation. Ainsi que nous l'avons vu dans la deuxième partie de notre thèse, Hilbert entend également axiomatiser la théorie de la relativité générale, comme en témoigne déjà la conférence de novembre 1915 intitulée « Die Grundlage der Physik » : il s'appuie alors sur deux axiomes pour déduire les

équations de la gravitation. Il s'avère enfin qu'en 1922-1923, Hilbert consacre un cours aux fondements mathématiques de l'ancienne théorie des quanta qu'il prolonge en 1926-1927 par une série de leçons dans lesquelles il confronte théorie des quanta et mécanique quantique. Trois motifs permettent donc de rattacher les travaux de Jordan et von Neumann au programme de Hilbert. (1) Ce « programme » se caractérise par son extraordinaire longévité lorsque l'on parcourt les articles et les cours de Hilbert ; autrement dit, Hilbert ne le formule pas une fois pour toutes lors de sa conférence de Paris, il lui donne suite. (2) Il s'intéresse explicitement aux fondements de la théorie des quanta et de la mécanique quantique. (3) En 1928, il cosigne avec Nordheim et von Neumann un article portant sur l'axiomatisation de la mécanique quantique.

La méthode axiomatique est d'abord utilisée par Born, Jordan ou encore von Neumann pour clarifier certains concepts mathématiques qui interviennent de manière essentielle dans la formalisation de la mécanique quantique. C'est par exemple le cas du calcul matriciel (Born, Jordan) ou encore des espaces de Hilbert (von Neumann). Aussi la méthode axiomatique a-t-elle une première fonction qui consiste à définir *implicitement* les concepts mathématiques nécessaires pour donner une *forme* cohérente à la mécanique quantique. Une définition implicite consiste à répertorier une liste d'axiomes auxquels un concept satisfait indépendamment de la nature des objets qui le réalisent. Cependant, l'axiomatisation d'une théorie physique ne porte pas seulement sur des définitions de concepts, elle concerne également les principes mêmes de cette théorie. Jordan, Nordheim, Hilbert et von Neumann entendent donc exhiber les principes à partir desquels on pourra déduire l'essentiel des résultats de la mécanique quantique. Seulement, nous n'avons pas affaire ici à une théorie constituée de longue date. On doit donc s'attendre à ce que l'usage de la méthode axiomatique permette de *justifier* le bien-fondé de la mécanique quantique. En outre, nous avons pu observer que les physiciens empruntent différentes voies pour rompre avec l'ancienne théorie des quanta. Outre la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan et la mécanique ondulatoire de de Broglie et Schrödinger, on peut mentionner la théorie des q-nombres de Dirac et la théorie des opérateurs de Born-Wiener. Nous avons affaire à diverses variantes d'une même théorie. La question de l'unité de la mécanique quantique sous-jacente à la multiplicité de ses interprétations constitue une difficulté essentielle que Jordan, Nordheim, Hilbert et von Neumann entendent résoudre à l'aide de la méthode axiomatique.

Ainsi, les problèmes qui orientent ces quatre protagonistes dans l'axiomatisation de la mécanique quantique sont de deux ordres : (1) la mécanique quantique est-elle une théorie logiquement cohérente ? (2) les formalismes proposés jusque-là pour en rendre compte sont-

ils diverses modalités d'une *même* théorie ? La méthode axiomatique a donc pour but de *fonder* et d'*unifier* la mécanique quantique. Mais n'est-elle pas également un instrument de découverte puisqu'elle permet de mettre au jour les principes de la mécanique quantique et non pas seulement de s'assurer de leur bien-fondé ? Souvenons-nous que Weyl assigne deux usages à la méthode axiomatique dans ses propres travaux : (1) celle-ci peut d'abord être utilisée pour mesurer la consistance d'une théorie et elle se rapporte alors à ses fondements ; (2) mais elle préside également à la clarification et à la généralisation de certains concepts. Ces deux usages sont complètement intriqués pour les tenants d'une axiomatisation de la mécanique quantique. Pour être plus précis, la méthode axiomatique a ici quatre fonctions : (a) unifier la mécanique quantique par-delà les diverses interprétations dont elle est susceptible, (b) expliciter ses principes, (c) mesurer sa cohérence interne, (d) clarifier les concepts mathématiques nécessaires à sa formalisation — nous pensons en particulier à l'axiomatisation des espaces de Hilbert abstraits par von Neumann en 1927.

La question de l'unité de la mécanique quantique constitue l'une des principales motivations de Jordan dans « Über eine neue Begründung der Quantenmechanik » (1927) et de von Neumann dans « Mathematische Begründung der Quantenmechanik ». Par exemple, l'article de Jordan s'ouvre sur le résumé suivant :

> Les quatre formes de la mécanique quantique développées jusque-là — la théorie des matrices, la théorie de Born et Wiener, la mécanique ondulatoire et la théorie des q-nombres — sont contenues à titre de cas particuliers dans une théorie formelle plus générale. Conformément à une idée de Pauli, cette nouvelle théorie peut être fondée sur quelques postulats simples de nature statistique. [35]

Pour une analyse de cette tentative d'axiomatisation de la mécanique quantique, nous renvoyons au commentaire qu'en a proposé J. Lacki. Ce passage montre que Jordan distingue une théorie abstraite et ses diverses réalisations, qui sont au nombre de quatre, et dont il démontre l'équivalence. Cette remarque nous incite à tenter un rapprochement avec le développement d'une mathématique structurale à laquelle Jordan ne devait pas être étranger, étant donné le mode de présentation du calcul matriciel qu'il adopte avec Born en 1925. En effet, de même qu'un théorème de structure admet diverses réalisations en fonction des objets mathématiques auxquels on le rapporte, de même la théorie formelle proposée par Jordan peut s'interpréter dans le langage de la théorie des matrices, de la mécanique ondulatoire, de la théorie des q-nombres et de la théorie des opérateurs de Born-Wiener. Comme nous le

35. P. Jordan, « Über eine neue Begründung der Quantenmechanik », *Zeitschrift für Physik*, **40**, 1927, p. 809.

verrons dans ce qui suit, le parallèle que nous venons d'établir est encore plus justifié dans le cas de von Neumann : l'axiomatisation des espaces de Hilbert *abstraits* permet d'aboutir à une théorie formelle dont la mécaniques des matrices et la mécanique ondulatoire sont deux réalisations. [36]

Dans l'article de Nordheim, Hilbert et von Neumann de 1928, l'accent est mis sur la découverte des principes de la mécanique quantique et sur sa cohérence logique. La référence aux *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert est explicite :

> Les relations entre les objets géométriques tels que points, droites et plans sont décrites par des axiomes et on montre ensuite que ces relations sont également satisfaites par un cadre analytique, à savoir les équations linéaires. Inversement, on peut de nouveau obtenir des propositions géométriques à partir des équations linéaires. [37]

Les concepts de « point », de « droite » et de « plan » sont susceptibles d'une diversité d'interprétations, en revanche ils doivent être assujettis à un cadre analytique déterminé avec précision. Par analogie, il convient de distinguer en mécanique quantique les « valeurs numériques mesurables des grandeurs physiques » et les opérateurs attachés à ces grandeurs. Les « opérateurs » sur l'espace des états d'un système quantique appartiennent au cadre analytique de la mécanique quantique. En revanche, les mesures des grandeurs physiques se situent du côté de l'interprétation physique que l'on peut donner à ce cadre formel. Ainsi, Nordheim, Hilbert et von Neumann s'appuient sur l'exemplarité de la géométrie pour distinguer la forme et les interprétations physiques de la mécanique quantique. Ils s'imposent une condition pour que ce cadre formel soit bien défini : il doit être univoque, ce qui revient à dire que les divers modes de formalisation de la mécanique quantique doivent pouvoir être identifiés. Autant le processus d'axiomatisation de la mécanique quantique autorise une liberté dans l'interprétation de son formalisme, autant il impose que ce cadre formel soit lui-même parfaitement déterminé, ce qui exige de rassembler les projets concurrents de Schrödinger, Heisenberg, Born, Jordan, Wiener ou encore Dirac en un tout cohérent. C'est ce qui ressort du passage suivant :

> Il est difficile de comprendre une telle théorie, tant que l'on ne distingue pas avec suffisamment de précision ces deux choses : le formalisme et son interprétation physique. Cette distinction doit être menée le plus clairement possible quand bien même nous ne voulons pas encore constituer

36. Pour une étude plus détaillée de ce point, nous renvoyons le lecteur à la sous-section 3.1.5 (troisième partie) de la présente thèse qui est consacrée à l'analyse de l'axiomatisation des espaces de Hilbert par von Neumann

37. D. Hilbert, J. v. Neumann, L. Nordheim, « Über die Grundlagen der Quantenmechanik », *mathematische Annalen*, **98**, 1928 p. 2-3.

> une axiomatique complète au vu de l'état actuel de la théorie. L'appareil analytique doit être établi de manière univoque et — d'un point de vue purement mathématique — il n'est susceptible d'aucune révision. En revanche, l'interprétation physique qui admet une part de liberté et d'arbitraire peut être modifiée et le sera très probablement. [38]

Ainsi, l'axiomatisation d'une théorie physique implique de tracer une ligne de démarcation entre son cadre formel et les interprétations qu'elle peut admettre. Nordheim, Hilbert et von Neumann font comme si l'on pouvait envisager la mécanique quantique à l'image de la géométrie. Sans doute cette comparaison est-elle réductrice. En effet, le cadre formel et l'interprétation physique d'une théorie se conditionnent l'un l'autre. Par exemple, la théorie des groupes et des représentations de groupes conduit à mettre l'accent sur les principes de symétrie auxquels les phénomènes atomiques et subatomiques peuvent être assujettis ; en revanche, dans leurs tentatives d'axiomatisation de la mécanique quantique, Jordan et von Neumann s'intéressent aux aspects irréductiblement probabilistes de la mécanique quantique. Autant l'axiomatisation de la mécanique quantique est essentielle pour dégager les principes de cette théorie et assurer sa cohérence, autant la volonté de séparer le cadre formel et les interprétations physiques de cette théorie peut paraître artificielle dans la mesure où seule leur synthèse reçoit une réelle effectivité. C'est d'ailleurs à cette synthèse que tend Weyl au cours du chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* : il fait constamment le pont entre la théorie des représentations de groupes et les résultats expérimentaux qu'elle permet d'appréhender. Nous avons suffisamment montré précédemment que Weyl n'utilise pas la méthode axiomatique de manière systématique en mathématiques pures. Contrairement à Artin et Noether, il ne prête pas de vertu heuristique à la méthode axiomatique quand bien même elle est nécessaire pour clarifier et généraliser des concepts mathématiques. Les mêmes réserves peuvent être constatées en physique mathématique. Weyl ne cherche pas à axiomatiser la mécanique quantique dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik* et il n'est pas enclin à suivre le programme d'axiomatisation de la physique qui est central dans l'œuvre et les cours de Hilbert.

Au terme de notre courte analyse de la mécanique ondulatoire de Schrödinger et de la mécanique des matrices de Heisenberg, Jordan et Born, nous pouvons tirer les enseignements suivants : l'idée communément admise selon laquelle ces deux voies sont mathématiquement équivalentes ne doit pas nous faire oublier que le rapport entre une théorie physique et sa mathématisation n'est pas pensé de la même manière selon que l'on se réfère à la mécanique des matrices ou à la mécanique ondulatoire. En outre, il ne faut pas s'imaginer qu'il n'existe

38. *ibid.*, p. 3.

aucune passerelle entre ces deux théories. En effet, dès 1926, Schrödinger établit l'équivalence mathématique entre sa mécanique ondulatoire et la mécanique des matrices de Born, Jordan et Heisenberg. Au même moment, Born réalise combien le formalisme proposé par Schrödinger est nécessaire pour étudier les phénomènes de collision ; en outre, il accomplit un pas de plus pour comprendre la fonction d'onde : celle-ci cesse de représenter une entité physique — par exemple une onde de matière — ; elle devient une densité de probabilité. Cette interprétation, qui est maintenant bien admise puisqu'elle est élevée au rang de postulat, n'a d'abord pas convaincu les principaux tenants de la mécanique ondulatoire, à savoir de Broglie et Schrödinger. Toujours est-il que l'équivalence et la complémentarité entre la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire sont acquises en 1926, soit un an après la publication de l'article inaugural de Heisenberg. Reste à savoir (i) comment interpréter en termes probabilistes la relation fondamentale de Born et Jordan, en l'occurrence

$$\hat{p}_i\hat{q}_i - \hat{q}_i\hat{p}_i = \frac{h}{2\pi i}I$$

(ii) et comment *unifier* formellement la mécanique ondulatoire et la mécanique des matrices. La solution au premier problème réside dans les relations d'indétermination de Heisenberg (1927) ; la solution définitive du second problème est établie avec l'axiomatisation des espaces de Hilbert qui deviennent un concept central pour mathématiser la mécanique quantique, comme en atteste l'article majeur de von Neumann intitulé « Mathematische Begründung der Quantenmechanik » (1927).

3.1.4 Les relations d'indétermination de Heisenberg

Heisenberg formule les relations d'indétermination en 1927 dans un article intitulé « Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik » qu'A. Svenbro a récemment traduit en français sous le titre « Sur le contenu intuitif de la cinématique et de la mécanique quantiques ». [39] Dans la littérature consacrée à la mécanique quantique, il est question tantôt des relations d'indétermination, tantôt du principe d'incertitude, tantôt des inégalités de Heisenberg. Or, ces expressions n'ont ni le même sens, ni la même portée épistémologique. En effet, la première se rapporte à des grandeurs quantiques, la question étant alors de savoir si elles commutent entre elles ou non ; la seconde suggère que nous avons affaire à un principe constitutif qui place « l'incertitude » au cœur de la physique, ce qui peut

39. A. Svenbro, *mini-mémoire* de Master II, traduction, présentation bilingue et commentaire de l'article de Heisenberg intitulé « Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik », université Paris X, Nanterre, juin 2007.

conduire à une lecture irrationnaliste de la mécanique quantique ; enfin, la troisième semble détachée de toute interprétation physique, seule la forme mathématique des résultats établis par Heisenberg dans cet article est retenue : il s'agit d'inégalités. De ces trois expressions, nous privilégierons la première pour deux raisons : (1) le but de Heisenberg consiste à donner un sens et un contenu physique à l'égalité $\hat{p}_i\hat{q}_i - \hat{q}_i\hat{p}_i = \frac{h}{2\pi i}I$ établie de manière purement formelle par Jordan et Born, voilà pourquoi il nous paraît insuffisant de dire que Heisenberg aboutit à des inégalités ; (2) l'indétermination est préférable à l'incertitude : la mécanique quantique est bien indéterministe tout en étant fondée en raison puisqu'elle est logiquement cohérente et que ses prédictions sont conformes aux résultats expérimentaux. Par extension, il est abusif de confondre probabilité et incertitude et donc de laisser entendre qu'une théorie probabiliste serait proprement incertaine. L'incertitude se situe à la limite extérieure d'une explication scientifique — qu'elle soit strictement déterministe, probabiliste au sens classique ou probabiliste au sens quantique. Comme le montre avec rigueur A. Svenbro, Heisenberg utilise divers termes ≪ sémantiquement corrélés ≫ au cours de son article :

> Le terme *Ungenauigkeit* apparaît treize fois (...). Non seulement nous rencontrons par deux fois le nom *Unsicherheit*, une fois son composé *Unsicherheitsrelation*, mais nous sommes encore mis en présence de l'adjectif *unbestimmt* à six reprises et son dérivé nominal *Unbestimmtheit* par deux fois. [40]

Heisenberg ne tranche donc pas en 1927 entre les termes d'imprécision / inexactitude [Ungenauigkeit], d'incertitude [Unsicherheit] et d'indétermination [Unbestimmtheit]. Heisenberg privilégiera finalement le concept d'indétermination qui s'avère à la fois plus clair et moins porteur de surinterprétations que les notions d'imprécision ou d'incertitude.

Heisenberg entend rendre les principaux résultats de la mécanique quantique intuitivement appréhendables, ce qui montre qu'il n'introduit pas les relations d'indétermination pour des raisons purement formelles. Il existe donc un écart significatif entre son article inaugural de 1925 et cet écrit qui date de 1927. En effet, en 1925 Heisenberg insistait sur la nécessité de fonder la mécanique quantique sur un formalisme mathématique logiquement cohérent. Cette étape est franchie avec les deux articles de 1925 intitulés respectivement ≪ Zur Quantenmechanik I ≫ et ≪ Zur Quantenmechanik II ≫. En 1927 en revanche, Heisenberg s'intéresse au contenu intuitif que l'on peut prêter à un tel formalisme qui n'est donc pas à lui-même sa propre fin. La question est de savoir ce qu'il entend par ≪ intuition ≫ [Anschauung] et par contenu intuitif [anschaulichen Inhalt] dans cet article. Le début de l'introduction nous éclaire sur ce point :

40. *ibid.*, p. 47.

> Nous croyons qu'une théorie physique est compréhensible intuitivement seulement si nous pouvons envisager dans tous les cas simples les conséquences expérimentales de cette théorie sur le plan qualitatif et si nous avons dans le même temps reconnu que l'application de cette théorie ne recèle aucune contradiction interne. [41]

Heisenberg introduit deux critères pour s'assurer qu'une théorie physique a un contenu intuitif : (1) on doit tout d'abord appréhender et saisir clairement ses conséquences empiriques ; (2) la non-contradiction doit être étendue à ses applications. On aurait pu s'attendre à ce que Heisenberg nous dise d'emblée qu'une représentation intuitive des phénomènes atomiques et subatomiques va dans le sens de nos habitudes de pensée ; en conséquence, la mécanique quantique serait *contre-intuitive*. Il veut doter cette théorie d'un contenu intuitif pour qu'elle puisse concurrencer plus concrètement les représentations habituelles que nous héritons de la mécanique classique, par exemple l'idée selon laquelle un électron serait un corpuscule qui décrirait une trajectoire le long d'une orbite autour du noyau d'un atome. Autrement dit, Heisenberg n'oppose pas une mécanique classique « intuitive » à une mécanique quantique « contre-intuitive ». Il tente plus sérieusement de montrer en quoi les représentations issues de la mécanique classique relève de l'intuition naïve lorsqu'elles sont étendues aux phénomènes atomiques. Voilà pourquoi il convient de construire un nouveau contenu intuitif qui permet (i) de contrer cette intuition naïve ; (ii) de mettre en avant les conséquences empiriques de la mécanique quantique ; (iii) d'éviter de dissoudre la compréhension des phénomènes atomiques dans un formalisme éthéré. Sans doute répond-il aux objections de certains physiciens qui ne voient dans l'usage des matrices qu'une astuce calculatoire dénuée de conséquences empiriques vérifiables.

Heisenberg précise qu'en mécanique quantique (non-relativiste) les intuitions de l'espace et du temps héritées de la mécanique classique demeurent intactes. Il ajoute en revanche :

> En mécanique quantique (...), il doit exister une relation $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$ entre la masse, la position et la vitesse. Nous avons également de bonnes raisons d'avoir des soupçons contre l'usage non critique des termes de « position » et de « vitesse ». Si l'on admet que des discontinuités sont en quelque sorte typiques des processus à des échelles spatio-temporelles réduites, une contradiction entre les concepts de « position » et de « vitesse » est même tout à fait possible. [42]

Tant qu'une telle contradiction n'est pas surmontée, la mécanique quantique n'a pas de contenu intuitif déterminé. Ainsi, l'égalité fondamentale

$$\hat{p}_i\hat{q}_i - \hat{q}_i\hat{p}_i = \frac{h}{2\pi i}I$$

41. W. Heisenberg, « Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik », trad. Svenbro, *op. cit.*, p. 8.
42. *ibid.*, p. 9.

établie par Jordan et Born à la faveur d'un raisonnement purement formel n'a de sens que si l'on comprend les conséquences empiriques qu'elle induit sur les quantités physiques associées aux opérateurs position et impulsion. Tel est justement l'objectif de Heisenberg avec la première relation d'indétermination. En effet, son raisonnement se calque sur les deux conditions auxquelles une théorie physique doit satisfaire selon lui pour avoir un contenu intuitif. Il commence donc par évoquer une conséquence empirique dont la mécanique quantique rend raison : il s'agit de l'*effet Compton*. Si l'on adhère à la théorie classique de l'électromagnétisme, une onde électromagnétique transmet de l'impulsion à un électron de manière continue. Or, les résultats expérimentaux établis par Compton en 1923 contredisent cette hypothèse. Voici comment l'on peut rapidement décrire cette expérience : on envoie une onde électromagnétique de courte longueur d'onde λ (par exemples des rayons X ou des rayons γ) sur une feuille d'un isolant. De manière très schématique, un photon incident rencontre un électron au repos de masse m_e ; ce photon est alors diffusé suivant une direction qui forme un angle θ par rapport à sa direction initiale. La longueur d'onde λ' du photon diffusé varie de manière discontinue puisqu'elle satisfait à l'égalité :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\ \theta).$$

Comme le rappelle Heisenberg, l'effet Compton intervient de manière essentielle lorsque l'on tente de déterminer la position d'un électron :

> On peut par exemple construire un microscope à rayons gamma et procéder avec ce microscope à la mesure de la position aussi précisément que l'on veut. Il y a néanmoins par cette mesure un effet collatéral d'importance : l'effet Compton. (...) À l'instant même où la position est mesurée, et aussi à l'instant même où le quantum de lumière est diffusé par l'électron, l'électron change de quantité de mouvement de manière discontinue. Ce changement est aussi grand que la longueur d'onde de lumière utilisée est petite, c'est-à-dire que la précision de la mesure de la position est élevée. [43]

Les relations d'indétermination de Heisenberg appliquées aux opérateurs impulsion et position peuvent être formulées en langage commun de la manière suivante : plus on connaît avec précision la position d'un électron, moins bonne est la précision avec laquelle on connaît son impulsion. Elles sont en accord avec une conséquence empirique liée à l'usage d'un microscope à rayons gamma pour mesurer la position de l'électron : il s'agit en l'occurrence de l'effet Compton, auquel il faudrait ajouter l'effet photoélectrique lorsque les photons rencontrent la lentille du microscope. En outre, Heisenberg montre que ces relations constituent une

43. *ibid.*, p. 11.

application dépourvue de contradictions de la formule $\hat{p}_i\hat{q}_i - \hat{q}_i\hat{p}_i = \frac{h}{2\pi i}I$ que l'on doit à Jordan et Born. Heisenberg peut donc en déduire :

> Nous entrevoyons une interprétation intuitive et directe de la relation $pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$.[44]

De manière plus formelle, la relation d'indétermination de Heisenberg dans le cas de l'impulsion et de la position d'un électron peut être formulée ainsi : si Δq désigne l'incertitude sur la position de l'électron et Δp l'incertitude sur sa composante d'impulsion, alors on obtient l'*inégalité* de Heisenberg :

$$\Delta p \; \Delta q \geqslant \approx \frac{\hbar}{2},$$

ce qui signifie *empiriquement* : si l'on connaît bien la position d'un électron, on ne connaît pas exactement son impulsion et réciproquement. Formellement, cela signifie que les opérateurs position $\hat{q}$ et impulsion $\hat{p}$ ne sont pas commutatifs, comme le montre l'égalité établie par Jordan et Born en 1925 ; ces opérateurs sont des transformations linéaires de l'espace des états (du système quantique étudié) sur lui-même. Mathématiquement, l'espace des états est un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, comme le montrera von Neumann en 1927.

Cette première relation d'indétermination permet à Heisenberg de montrer que la notion de trajectoire, qui a un sens bien établi en mécanique classique, est frappée d'une contradiction interne lorsqu'on croit pouvoir l'étendre aux phénomènes subatomiques :

> Par trajectoire, nous entendons une série de points de l'espace (dans un référentiel donné), que l'électron prend les uns après les autres comme ≪ positions ≫. (...) L'expression couramment utilisée ≪ la trajectoire 1 s de l'électron dans l'atome d'hydrogène ≫ n'a aucun sens de notre point de vue. Pour mesurer cette trajectoire 1 s, on devrait en effet éclairer l'atome avec de la lumière dont la longueur d'onde serait de toute manière considérablement plus courte que 10^{-8} cm. Il suffit cependant d'un seul quantum de cette lumière pour éjecter complètement l'électron hors de sa ≪ trajectoire ≫.[45]

Ainsi, la première relation d'indétermination de Heisenberg n'est pas une simple inégalité mathématique. (1) Elle découle de la relation de commutation entre les opérateurs impulsion et position ; (2) elle est conforme aux conséquences empiriques liées à l'effet Compton ; (3) elle montre que plus on connaît avec précision la position d'un électron, moins on connaît son impulsion ; (4) enfin, fort de cette relation, Heisenberg révoque en doute la notion de trajectoire à l'échelle atomique. Formulons deux autres relations d'indétermination. La première concerne l'énergie et le temps — sachant que le temps est un paramètre, il n'est pas représenté

44. *ibid.*, p. 11.
45. *ibid.*, p. 12.

par une observable, i.e. par un opérateur hermitien associé à une grandeur physique — :

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar,$$

ce qui signifie qu'il est généralement impossible « de représenter (...) l'énergie d'un phénomène, même isolé, par un nombre unique, bien déterminé à tout instant ». [46] La seconde se rapporte aux composantes du moment cinétique — par exemple J_z — et de la position angulaire d'une particule — φ_z — :

$$\Delta J_z \Delta \varphi_z \gtrsim \hbar.$$

Le cheminement suivi par Heisenberg pour attribuer un contenu intuitif à la mécanique quantique est rigoureusement inverse à celui qu'empruntent Schrödinger et de Broglie. Alors que Schrödinger et de Broglie s'appuient sur une intuition physique — celle des ondes de matière — pour aboutir à la mécanique ondulatoire, Heisenberg, Born et Jordan commencent par donner à la mécanique des matrices une forme mathématique cohérente avant de déterminer son sens intuitif qui n'a rien de commun avec les anciennes intuitions héritées de la mécanique classique.

3.1.5 Les fondements « mathématiques » de la mécanique quantique : von Neumann

Nous savons que Weyl et Schrödinger sont en étroit contact à Zürich au moment où paraissent les articles de ce dernier sur la mécanique ondulatoire. Parallèlement, Weyl prend connaissance des publications que Heisenberg, Born et Jordan consacrent à la mécanique des matrices. Enfin, dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl se réfère aux deux articles majeurs publiés par von Neumann en 1927, à savoir la « Mathematische Begründung der Quantenmechanik » et le « Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik ». De plus, il entretient une correspondance régulière avec von Neumann entre 1925 et 1931. Ainsi, Weyl est en rapport avec une diversité d'acteurs engagés dans la formalisation de la mécanique quantique. Certes, Weyl privilégie le lien entre mécanique quantique et théorie des représentations de groupes, mais il s'intéresse également aux autres aspects de la mathématisation de cette théorie. Voilà pourquoi il est réducteur de nous limiter à la théorie des représentations de groupes et à ses applications pour contextualiser les contributions de Weyl en mécanique quantique.

46. F. Balibar, J.-M. Lévy-Leblond, *Quantique*, Paris, éd. Dunod, 2006, p. 109.

Avant de parvenir à ce point, rappelons que von Neumann, qui est d'origine hongroise, s'est formé aux mathématiques, à la physique expérimentale et à la chimie à l'université de Budapest et à l'ETH de Zürich. Il suit notamment les cours professés par Weyl et Polya à l'ETH. Entre 1926 et 1929, il est *Privatdozent* à Berlin. Il effectue un séjour à Göttingen en 1926-1927. Il côtoie alors Hilbert, Courant, Born mais aussi Jordan. La « Mathematische Begründung der Quantenmechanik » de von Neumann est présentée par Born lors de la séance du 20 mai 1927 de la classe de physique mathématique de Göttingen ; de même, Born présente le « Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik » lors de la séance du 11 novembre 1927. Dans le premier article, qui est donc consacré aux fondements mathématiques de la mécanique quantique, von Neumann définit les propriétés mathématiques auxquelles satisfait l'espace des états d'un système quantique. Pour ce faire, il s'appuie sur la méthode axiomatique : il énumère les axiomes qui président à la définition des « espaces de Hilbert » abstraits. Il clarifie donc un concept mathématique qui est central (i) pour rendre raison du fait que les matrices introduites par Born et Jordan en 1925 sont à un nombre infini de lignes et de colonnes, (ii) pour unifier par le haut la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan et la mécanique ondulatoire de Schrödinger.

Ainsi, la méthode axiomatique permet de préciser les définitions des concepts mathématiques nécessaires à la formalisation de la mécanique quantique. Born et Jordan s'appuient sur elle pour reformuler les fondements du calcul matriciel ; von Neumann l'utilise afin de donner ses contours définitifs au concept d'espace de Hilbert. Lorsque Weyl publie *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, il reconnaît la pertinence de cet usage de la méthode axiomatique, i.e. comme outil de clarification des concepts mathématiques ; en revanche il ne cherche pas à fonder la mécanique quantique sur un système d'axiomes, en ce sens il reste étranger au programme de Hilbert. Le § 2 du premier chapitre de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* est consacré aux applications linéaires et au calcul matriciel. Weyl revient sur la liste des propriétés auxquelles le calcul matriciel satisfait à l'image de ce que Born et Jordan avaient fait en 1925. Weyl aborde les espaces de Hilbert au cours du § 7 de ce même chapitre. Il mentionne alors l'article que von Neumann consacre aux fondements mathématiques de la mécanique quantique. Voilà pourquoi, nous devons restituer au moins partiellement le contenu de la « Mathematische Begründung der Quantenmechanik » de von Neumann.

Dans l'introduction à cet article, von Neumann fait état des avancées théoriques, mais aussi des difficultés formelles encore non résolues pour mathématiser la mécanique quantique, malgré l'équivalence établie par Schrödinger entre sa mécanique ondulatoire et la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan. von Neumann énumère les points suivants :

α. le comportement d'un système atomique est relié à un problème aux valeurs propres [47] ;

β. le mélange de discret (quantifié) et de continu (qui est issu de la mécanique classique) dans le monde de l'atome résulte du fait que le spectre des valeurs propres peut être discret ou continu ;

γ. les lois de la mécanique ne décrivent pas le devenir d'un système de manière univoque et causale ;

δ. le problème aux valeurs propres prend deux formes équivalentes selon que l'on se réfère à la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan ou à la mécanique ondulatoire de Schrödinger ;

ε. et ζ., ces deux formalismes ont des limites respectives et ils sont donc *complémentaires* ;

ϑ. les méthodes développées respectivement par Schrödinger et Heisenberg-Born-Jordan conduisent à introduire des éléments inobservables et dépourvus de sens physique.

> Dans le présent travail, nous tenterons de donner une méthode qui pallie ces inconvénients et qui résume de manière rigoureuse et unifiée le point de vue statistique maintenant établi en mécanique quantique. [48]

Voici donc les deux motivations qui guident von Neumann : (1) éliminer l'arbitraire qui persiste dans les méthodes utilisées par ses prédécesseurs ; (2) unifier la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan et la mécanique ondulatoire de Schrödinger. Ainsi, von Neumann n'ambitionne pas seulement de démontrer à nouveaux frais l'équivalence entre ces deux formalismes ; il veut les fondre dans un même et unique formalisme suspendu au concept d'*espace de Hilbert*. Von Neumann assigne une fonction *unificatrice* à la méthode axiomatique : elle permet de faire tenir la mécanique ondulatoire et la mécanique des matrices dans une même théorie formelle qui les surplombe.

Cette idée nous conduit à faire le parallèle suivant : dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913), Weyl avait établi le lien entre les surfaces de Riemann et les variétés à partir d'une axiomatisation de ces deux concepts : une surface de Riemann est une variété analytique complexe de dimension 1. Weyl avait par là même souligné à titre rétrospectif la profonde unité conceptuelle entre la *Dissertation* et la *Leçon* de Riemann. De manière comparable, von Neumann définit abstraitement et par voie axiomatique les espaces de Hilbert en 1927 ; il montre qu'une fonction d'onde peut être considérée comme un élément dans un espace de Hilbert et que les matrices introduites par Born et Jordan en 1925 ne font que représenter un

47. Un problème aux valeurs propres consiste à étudier le spectre des valeurs propres d'un opérateur linéaire auto-adjoint d'un espace de Hilbert.

48. J. v. Neumann, ≪ Mathematische Begründung der Quantenmechanik ≫, in *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1927, p. 3.

opérateur linéaire de cet espace dans lui-même. Bien que les concepts axiomatisés par Weyl en 1913 et par von Neumann en 1927 relèvent de domaines différents des mathématiques, les procédés utilisés par ces deux mathématiciens admettent de nombreux points communs. Ils raisonnent sur des « espaces » dont la nature des éléments n'est pas spécifiée. Ainsi, on peut lire dans *Die Idee der Riemannschen Fläche* :

> Dans le cas de la théorie riemannienne des fonctions, un fondement ensembliste des concepts et des théorèmes topologiques qui entrent en jeu est d'autant plus nécessaire que les « points » qui constituent les variétés de base (courbes et surfaces), ne sont pas des points de l'espace au sens habituel du terme, mais des objets mathématiques quelconques, qui peuvent être d'une autre sorte (par exemple les éléments d'une fonction). [49]

Weyl conçoit la notion de point indépendamment de la nature des objets auxquels elle renvoie spontanément. Il s'appuie sur cette conception abstraite des « points » d'une variété pour construire les surfaces de Riemann à partir du processus weierstrassien de prolongement analytique. De manière analogue, dans sa « Mathematische Begründung der Quantenmechanik », von Neumann aboutit à une définition du concept d'espace de Hilbert *abstrait* [abstrakten Hilbertschen Raum], i.e. dont les éléments ne sont pas spécifiés. Cette axiomatisation vient après coup dans le raisonnement de von Neumann : il commence par décrire les propriétés de certains espaces de Hilbert spécifiques avant d'aborder la définition d'un espace de Hilbert abstrait. Von Neumann exploite pleinement la distinction entre une définition implicite de concept et les diverses interprétations qu'il peut ensuite recevoir.

Poursuivons cette comparaison Weyl / von Neumann : en 1913, Weyl unifie les points de vue riemannien et weierstrassien en analyse complexe ; de manière analogue, en 1927, von Neumann unifie les points de vue de Schrödinger et de Heisenberg-Born-Jordan en mécanique quantique. De part et d'autre, une telle unification est acquise à la faveur d'une analyse des concepts mathématiques qui permet d'en proposer une définition rigoureuse et transversale. Une telle comparaison ne doit toutefois pas être poussée trop loin. Dans la première partie de notre thèse, nous avons montré que *Die Idee der Riemannschen Fläche* ne relève pas exactement des mathématiques structurales, quand bien même Weyl utilise la méthode des définitions par axiomes. En revanche, l'approche de von Neumann en 1927 est résolument structurale : elle permet la formulation de théorèmes de structure en analyse fonctionnelle.

49. H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, *op. cit.*, p. VI : « Eine strenge mengentheoretische Fundierung der für die Riemannsche Funktionentheorie in Frage kommenden topologischen Begriffe und Theoreme ist um so mehr erforderlich, als die « Punkte », aus denen hier die Grundgebilde (die Kurven und Flächen) bestehen, keine Raumpunkte im gewöhnlichen Sinne sind, sondern beliebige mathematische Dinge anderer Art (z. B. Funktionselemente) sein können ».

Suivons plus précisément le raisonnement de von Neumann. Il commence par décrire les problèmes aux valeurs propres attachés respectivement à la mécanique des matrices et à la mécanique ondulatoire. Voici comment il résume le point de vue de Heisenberg-Born-Jordan. Soit

$$H = \{h_{\mu\nu}\}, \quad \mu, \nu = 1, 2, ...$$

la matrice carrée à coefficients complexes et à un nombre infini de lignes et de colonnes représentant l'énergie d'un système quantique et dont les ≪ valeurs propres ≫ correspondent aux niveaux d'énergie du système. Von Neumann précise que H est une matrice hermitienne, i.e. telle que

$$h_{\mu\nu} = \overline{h_{\nu\mu}}.$$

Il s'agit de rechercher la matrice $S = \{s_{\mu\nu}\}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) elle est orthogonale

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} s_{\mu\rho}\overline{s_{\nu\rho}} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{pour} \quad \mu \neq \nu \end{cases}$$

(2) le produit $S^{-1}HS$ est une matrice diagonale que von Neumann note pour simplifier W et dont les coefficients (diagonaux) w_1, w_2, ... sont les valeurs propres de H. La ν-ième colonne de S, constituée des coefficients $s_{1\nu}$, $s_{2\nu}$, ..., est un vecteur propre pour la valeur propre w_ν.

Il aborde ensuite le ≪ problème aux valeurs propres ≫ en mécanique ondulatoire. Il se donne un opérateur différentiel H et il s'agit de rechercher une fonction ψ telle que

$$H\psi = w\psi.$$

La fonction ψ est donc fonction propre pour la valeur propre w et, de nouveau, les w correspondent à un facteur $\frac{8\pi^2 m}{h^2}$ près aux niveaux d'énergie du système étudié. Von Neumann précise que ψ doit satisfaire à certaines conditions de régularité et ne pas s'annuler identiquement.

Il peut ainsi identifier le dénominateur commun de ces deux problèmes aux valeurs propres :

> À chaque fois, on se donne une variété contenant certaines grandeurs [des suites de nombres et, respectivement, des fonctions] et un opérateur linéaire H dans cette variété. À chaque fois, il s'agit de rechercher toutes les solutions du problème aux valeurs propres associé à l'opérateur H, c'est-à-dire tous les nombres réels w, tels qu'il existe un élément non nul f de cette variété vérifiant
>
> $$Hf = wf$$

Ces valeurs propres w représentent les niveaux d'énergie. [50]

Von Neumann s'appuie sur cette formulation unique [einheitliche Formulierung] pour dégager un *unique* problème aux valeurs propres qui peut ensuite être interprété tantôt dans le langage de la mécanique ondulatoire de Schrödinger, tantôt dans le langage de la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan. Pour ce faire, von Neumann indique qu'il est nécessaire de dégager les propriétés auxquelles satisfont les variétés dont les éléments sont respectivement des suites de nombres complexes et des fonctions d'une variable complexe. Ces variétés ne sont autres que des espaces de Hilbert ; en conséquence, von Neumann prête bien au concept d'espace de Hilbert une fonction unificatrice au sens où la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire peuvent être fondues dans une même théorie.

Mais, avant de parvenir à une définition d'un espace de Hilbert *abstrait*, von Neumann commence par décrire deux espaces de Hilbert particuliers, i.e. dont les éléments sont spécifiés. Le premier, qui est construit dans le cadre de la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan, est une variété linéaire constituée de suites de nombres complexes x_1, x_2, etc., telles que la somme des carrés $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ soit finie. Il s'agit tout simplement de l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |u_k|^2 < +\infty.$$

On a bien affaire à un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{\ell^2} = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \overline{v_k}.$$

Le second, qui est construit dans le cadre de la mécanique ondulatoire de Schrödinger, est un espace de fonctions ψ à valeurs complexes dont le domaine de définition, qui est noté Ω, est un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Les fonctions ψ vérifient les propriétés suivantes : comme H est un opérateur différentiel du second ordre, elles sont au moins deux fois différentiables ; de plus, elles sont de carré sommable, autrement dit

$$\int_\Omega |\psi|^2 \mathrm{d}v$$

doit être finie, $\mathrm{d}v$ désignant l'élément de longueur, de surface ou de volume dans Ω ; enfin, pour toutes fonctions ψ_1 et ψ_2 qui s'annulent aux bords du domaine d'intégration Ω,

$$\int_\Omega \{\psi_1 \cdot \overline{H\psi_2} - H\psi_1 \cdot \overline{\psi_2}\}\mathrm{d}v$$

50. J. von Neumann, *op. cit.*, p. 6.

doit également s'annuler. Cette condition entraîne que H est un opérateur autoadjoint ou hermitien, propriété dont von Neumann précisera le sens dans la suite de son raisonnement.

Avant même de proposer une axiomatisation exhaustive des espaces de Hilbert abstraits, von Neumann montre que l'on peut unifier les points de vue de Schrödinger et de Heisenberg-Born-Jordan à l'aide de l'argument suivant :

> Nous avons affaire à un espace $\mathfrak{H}$ (...) dont nous désignerons les éléments par f, g, ... pour des raisons d'unité. En outre, nous nous donnons un opérateur linéaire H, i.e. un opérateur qui, à des éléments f de $\mathfrak{H}$, fait correspondre d'autres éléments Hf de $\mathfrak{H}$, et tel que l'on ait
>
> $$\begin{aligned} H(af) &= aHf \qquad (a \text{ est une constante complexe}) \\ H(f+g) &= Hf + Hg; \end{aligned}$$
>
> H est également symétrique (resp. autoadjoint). Nous pouvons aussi formuler cette dernière condition de manière unifiée. Si, par $Q(f,g)$, nous entendons
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \quad \text{resp.} \quad \int_\Omega \varphi\overline{\psi}\mathrm{d}v,$$
>
> (donc $f = x_1, x_2, ...,\ g = y_1, y_2, ...,$ dans le cas des matrices et $f = \varphi$, $g = \psi$ dans le cas de l'équation différentielle), elle signifie simplement : pour des f, g quelconques,
>
> $$Q(f, Hg) = Q(Hf, g).$$
>
> Nous cherchons les solutions du problème aux valeurs propres pour cet opérateur H :
>
> $$Hf = wf \quad (f \neq 0,\ w \text{ est une constante réelle}).^{51}$$

L'unification des deux principaux formalismes en mécanique quantique repose tout d'abord sur un travail de notation. En effet, von Neumann utilise arbitrairement les lettres f et g pour désigner les éléments d'une variété linéaire $\mathfrak{H}$. Ces éléments renvoient indifféremment à des suites de nombres complexes ou à des fonctions dont les propriétés respectives ont été décrites précédemment. À la lecture de l'argument de von Neumann, nous devinons que $\mathfrak{H}$ est un espace vectoriel complexe muni d'une forme hermitienne $Q(f,g)$ — ou, si l'on adopte une notation moderne $\langle f, g\rangle$ — qui sera définie positive. L'opérateur H est *autoadjoint* : $Q(f, Hg) = Q(Hf, g)$, autrement dit pour tous f, $g \in \mathfrak{H}$,

$$\langle f, H(g)\rangle = \langle H(f), g\rangle.$$

Pour approfondir le lien entre les formalismes de Schrödinger et de Heisenberg-Born-Jordan, von Neumann suit le raisonnement suivant : il considère à nouveaux frais l'espace $\mathfrak{H}$ des fonctions à valeurs complexes, dont le domaine de définition est noté Ω et qui sont de carré sommable. Pour f, $g \in \mathfrak{H}$, il désigne donc $\int_\Omega \varphi\overline{\psi}\mathrm{d}v$ par $Q(f,g)$. Deux fonctions f et g sont dites orthogonales dans $\mathfrak{H}$ si

$$Q(f,g) = 0.$$

51. *ibid.*, p. 10.

Un système de fonctions f_1, f_2, ... est orthonormé si

$$Q(f_\mu, f_\nu) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \mu = \nu \\ 0 & \text{pour} \quad \mu \neq \nu \end{cases} .$$

Ce système orthonormé est complet si ces propriétés ne sont plus conservées par adjonction d'une autre fonction f. Von Neumann munit donc $\mathfrak{H}$ d'un système orthornormé complet, i.e. d'une base orthonormée φ_1, φ_2, ... Soit f une fonction de $\mathfrak{H}$, von Neumann note

$$c_\mu = Q(f, \varphi_\mu) \quad (\mu = 1, 2, ...)$$

les coefficients du développement de f suivant la base orthonormée φ_1, φ_2, ... Il montre que la somme $\sum_{\mu=1}^{\infty} |c_\mu|^2$ est alors finie. Von Neumann reprend ici à son compte le théorème de Riesz (1907) selon lequel il existe une fonction $f \in \mathfrak{H}$ telle que $c_\mu = \langle f, \varphi_m u \rangle$ si et seulement si $\sum_{\mu=1}^{\infty} |c_\mu|^2 < +\infty$. Il ajoute que la série $\sum_{\mu=1}^{\infty} c_\mu \varphi_\mu$ converge si et seulement si $\sum_{\mu=1}^{\infty} |c_\mu|^2 < +\infty$. Enfin, il démontre à nouveaux frais le théorème de Riesz-Fischer : il existe un isomorphisme entre l'espace $\mathfrak{H}$ des fonctions f à valeurs complexes de carré sommable et l'espace des suites c_1, c_2, ..., telles que $\sum_{\mu=1}^{\infty} |c_\mu|^2$ soit finie :

> Nous avons une correspondance biunivoque entre les f de $\mathfrak{H}$ et les suites c_1, c_2, ... avec $\sum_{\mu=1}^{\infty} |c_\mu|^2$. Au surplus, cette correspondance est manifestement linéaire, i.e. : si f se transforme en c_1, c_2, ..., af se transforme en ac_1, ac_2, ... où a désigne une constante complexe ; et si f, g se transforment en c_1, c_2, ..., resp. d_1, d_2, ..., alors $f + g$ se transforme en $c_1 + d_1$, $c_2 + d_2$, ... En outre $Q(f, g)$ se transforme en $\sum_{\mu=1}^{\infty} c_\mu \mathrm{d}_\mu$ (...). [52]

Sous sa forme générale, le théorème de Riesz-Fischer affirme que tout espace de Hilbert de dimension infinie et séparable, i.e. possédant un ensemble dénombrable dense, est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$. L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ sert donc d'espace-modèle pour tout espace de Hilbert de dimension infinie et séparable. Cet argument permet surtout à von Neumann d'accomplir un pas de plus dans une montée en abstraction qui doit aboutir à l'unification des formalismes de Heisenberg-Born-Jordan et de Schrödinger. En effet, comme les espaces $\mathfrak{H}$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ sont isomorphes, ils ne diffèrent pas fondamentalement l'un de l'autre. Von Neumann applique à des espaces de Hilbert particuliers un type de raisonnement que Klein avait déjà utilisé dans le cas des groupes et des surfaces de Riemann (compactes connexes), et que Dedekind et Weber avaient étendu aux corps. Deux groupes isomorphes sont les représentants d'un même groupe abstrait. De même, deux surfaces de Riemann isomorphes constituent diverses réalisations d'une même surface de Riemann abstraite, etc. De manière similaire, von Neumann s'appuie

52. *ibid.*, p. 13.

sur la notion d'isomorphisme entre espaces de Hilbert pour montrer que $\mathfrak{H}$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ sont deux interprétations différentes d'un même espace de Hilbert conçu abstraitement.

> tous les espaces $\mathfrak{H}$ (correspondant à des Ω différents) ne diffèrent de l'espace des suites x_1, x_2, ... avec $\sum_{\mu=1}^{\infty} |x_\mu|^2$ et ne diffèrent donc entre eux que par la dénomination de leurs éléments et de leurs opérations ; par contre, ils doivent s'identifier parfaitement les uns aux autres au niveau de leurs propriétés. [53]

Von Neumann désigne l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ par le symboles $\mathfrak{H}_0$. Les espaces $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}_0$ admettent les même propriétés formelles [formale Eigenschaften] et leurs seules différences résident dans l'interprétation que l'on donne aux éléments qu'ils contiennent. D'où la nécessité de parvenir à une définition d'un espace de Hilbert abstrait que von Neumann note $\overline{\mathfrak{H}}$ pour éviter toute confusion. C'est donc seulement après avoir introduit la relation d'isomorphisme entre espaces de Hilbert que von Neumann justifie la nécessité de concevoir les espaces de Hilbert abstraitement, i.e. indépendamment de la nature des éléments qu'ils contiennent. Ces élément peuvent *indifféremment* être des suites de nombres complexes ou des fonctions satisfaisant à certaines propriétés.

Le cheminement suivi par von Neumann pour aboutir à une axiomatisation des espaces de Hilbert peut être résumé comme suit : (1) il commence par formuler les problèmes aux valeurs propres attachés aux deux contextes théoriques que sont la mécanique des matrices de Born-Jordan-Heisenberg et la mécanique ondulatoire de Schrödinger ; (2) il dégage une formulation commune à ces deux problèmes ; (3) il spécifie les propriétés de l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ sur lequel raisonnent Born-Jordan-Heisenberg et les propriétés de l'espace des fonctions à valeurs complexes et de carré sommable qui sert de support à Schrödinger ; (4) en vertu du théorème de Riesz-Fischer, von Neumann montre que ces espaces sont isomorphes ; (5) ils sont donc deux réalisations possibles d'un même espace de Hilbert abstrait qu'il convient donc de définir par voie axiomatique.

Von Neumann s'appuie donc sur certains théorèmes cardinaux relevant de ce que l'on appelle maintenant l'analyse fonctionnelle pour expliciter le dénominateur commun aux formalismes de Schrödinger et de Heisenberg-Born-Jordan. L'axiomatisation des espaces de Hilbert n'est pas formulée arbitrairement par von Neumann dans son article de 1927, elle est la résultante d'un cheminement qui remonte de la physique mathématique (mécanique ondulatoire et mécanique des matrices) aux mathématiques pures (analyse fonctionnelle). La clarification d'un concept mathématique (les espaces de Hilbert) est donc intimement corrélée à un processus d'unification des formalismes introduits dès 1925-1926 en mécanique

53. *ibid.*, p. 14.

quantique. Cette unification est également consacrée par le théorème de Riesz-Fischer.

Nous venons d'évoquer une série de résultats établis dans le cadre de la théorie des équations intégrales et repris par von Neumann en 1927 pour mathématiser la mécanique quantique. Tout se passe *comme si* les travaux de Hilbert, Riesz et Fischer ≪ préfiguraient ≫ les travaux de von Neumann en analyse fonctionnelle qui sont appliqués à la mécanique quantique. Cette donnée viendrait d'ailleurs confirmer à nouveaux frais l'idée d'une ≪ harmonie préétablie ≫ entre la physique et les mathématiques mise en avant par Minkowski dès 1908 et largement plébiscitée par Hilbert. Ce point n'a pas échappé à Weyl. Mais il utilise justement le conditionnel pour souligner malgré tout l'écart qui sépare les travaux de Hilbert sur les équations intégrales et les recherches bien postérieures de von Neumann sur les fondements de la mécanique quantique :

> And now one of those events happened, unforeseeable by the wildest imagination, the like of which could tempt one to believe in a pre-established harmony between physical nature and mathematical mind : Twenty years after Hilbert's investigation [on the spectral theory of linear operators] quantum mechanics found that the observables of a physical system are represented by the linear symmetric operators in a Hilbert space and that the eigen-values and eigen-vectors of that operator which represents energy are the energy levels and corresponding stationary quantum states of the system. Of course this quantum-physical interpretation added greatly to the interest in the theory and led to a more scrupulous investigation of it, resulting in various simplifications and extensions. [54]

Dans ce passage, Weyl évoque avec une certaine distance l'idée d'une telle harmonie préétablie : celle-ci est l'objet d'une croyance et d'une lecture rétrospective de l'histoire des mathématiques et de ses interactions avec la physique. Weyl admet en retour que les applications de l'analyse fonctionnelle à la mécanique quantique supposent une refonte de l'analyse fonctionnelle elle-même. Les termes de simplification et d'extension renvoient aux travaux accomplis par von Neumann dès la fin des années 20. Proposons une courte digression pour préciser l'argument de Weyl. Notre but est d'éviter de proposer une vision simplificatrice du rapport entre l'analyse fonctionnelle telle qu'elle est développée au début du XX^{e} siècle par Hilbert, Riesz, Fischer ou encore Fréchet et la mathématisation de la mécanique quantique qui est parachevée avec la ≪ mathematische Begründung der Quantenmechanik ≫. Von Neumann ne se contente pas d'appliquer tels quels les résultats fondamentaux obtenus par Riesz et Fischer en 1906-1907. En réalité, von Neumann modifie substantiellement la théorie élaborée par Hilbert, Riesz et Fischer. Autrement dit, il réforme tout un pan de l'analyse fonctionnelle ; pour

54. H. Weyl, ≪ A half-century of mathematics ≫, *The American mathematical monthly*, **58** n°8, 1951, p. 541.

ce faire, il conçoit les espaces de Hilbert abstraitement et il formule d'authentiques théorèmes de structure à partir de l'axiomatisation d'un tel concept.

Pour mesurer les points de recoupement, mais aussi l'écart entre les travaux de von Neumann et la théorie des équations intégrales développée notamment par Hilbert, nous pouvons tout d'abord observer que nous ne trouvons nulle trace d'une définition des espaces de Hilbert dans l'imposante série d'articles que Hilbert consacre à la théorie des équations intégrales sous le titre « Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen Integralgleichungen » entre 1904 et 1910. Rappelons ce qu'il faut entendre par équations intégrales : soit $[a, b]$ un intervalle dans $\mathbb{R}$, soient s et t deux variables réelles parcourant l'intervalle $[a, b]$, soient $K(s, t)$ une fonction de ces deux variables, $f(s)$ une fonction donnée et $\varphi(s)$ celle qu'il convient de rechercher. L'équation

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

est une équation intégrale du premier ordre, l'équation

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

est une équation intégrale du second ordre, λ étant un paramètre non nul ; cette équation est également appelée équation de Fredholm. Hilbert se restreint en général à des noyaux symétriques, i.e. tels que $K(s, t) = K(t, s)$. Il aborde le cas des noyaux non symétriques dans le cinquième article (1906). Dans son premier article, Hilbert ne manque pas de souligner l'analogie entre l'équation de Fredholm et les systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_{j,k}\varphi_k - \lambda\varphi_j = f_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$A = \{a_{jk}\}$ étant une matrice carrée à n lignes et n colonnes. Un scalaire est valeur propre de A si et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique $C_A = \det(A - XI)$. La résolution des systèmes linéaires dépend de l'annulation de $C_A = \det(A - XI)$. L'équation de Fredholm généralise en dimension *infinie* de tels systèmes linéaires. D'où la nécessité d'introduire en théorie des équations intégrales des matrices carrées à un nombre infini de lignes et de colonnes en lieu et place des matrices à un nombre fini de lignes et de colonnes qui interviennent dans la résolution des systèmes linéaires.

Dès 1906, Hellinger et Toeplitz se réfèrent d'ailleurs aux travaux de Hilbert sur les équations intégrales pour énoncer les fondements d'une théorie des « matrices infinies » [unendliche Matrizen] i.e. des matrices carrées à coefficients complexes et à un nombre infini de lignes et de colonnes dont Born et Jordan souligneront toute l'importance pour clarifier les

fondements mathématiques de la mécanique quantique. [55] Certes, on ne saurait invoquer des rapports immédiats de filiation entre les travaux de Hilbert en théorie des équations intégrales (1904-1910) et la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan. Hilbert n'utilise pas l'outil matriciel dans ses propres articles consacrés aux équations intégrales. De plus, comme nous l'avons déjà souligné, en 1925 Born et Jordan s'appuient pour l'essentiel sur un ouvrage bien plus tardif de Courant et Hilbert, à savoir les *Methoden der mathematischen Physik* (1924 pour la première édition), lorsqu'ils abordent les propriétés du calcul matriciel. Toujours est-il que dès 1906, les matrices carrées à un nombre infini de lignes et de colonnes constituent un objet d'étude à part entière parmi les étudiants de Hilbert en théorie des équations intégrales. Preuve que Born et Jordan n'introduisent pas un objet inédit lorsqu'en 1925 ils utilisent les matrices carrées à un nombre infini de lignes et de colonnes pour garantir une cohérence formelle aux premiers travaux de Heisenberg sur les fondements de la mécanique quantique. La précision n'est sans doute pas superflue : Born et Jordan sont alors à Göttingen.

Revenons à l'équation intégrale de Fredholm. Au noyau $K(s,t)$ de cette équation peut être associé l'opérateur T_K

$$T_K\varphi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Il s'agit d'un opérateur compact et autoadjoint dans l'espace $L^2[a,b]$ des fonctions de carré sommable définies sur l'intervalle $[a,b]$. Le déterminant de Fredholm que l'on peut noter de manière concise par $\det(T_K - \lambda I)$ joue en théorie des équations intégrales un rôle analogue au polynôme caractéristique en algèbre linéaire. Les valeurs propres λ_1, λ_2, ... de l'opérateur T_K sont les racines, supposées simples, du déterminant de Fredholm. Hilbert parvient à dégager un système infini dénombrable de fonctions propres normées φ_1, φ_2, etc., de T_K pour les valeurs propres λ_1, λ_2, etc. Ces fonctions satisfont aux relations d'orthogonalité, [56] i.e.

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m(t)\mathrm{d}t = 0$$

et

$$\int_a^b (\varphi_n(t))^2\mathrm{d}t = 1.$$

55. E. Hellinger et O. Toeplitz, ≪ Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen ≫, in *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physische Klasse*, 1906, p. 351-355, et ≪ Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen ≫, in *mathematische Annalen*, **69** (1910), p. 289-330.

56. D. Hilbert, ≪ Wesen und Ziel einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen ≫, (1909) in *Werke*, Band III, Berlin, Springer, 1935, p. 61.

Si l'on veut prolonger les arguments de Hilbert, on peut dire que ce système forme une base orthonormée de l'espace $L^2[a, b]$. Les solutions de l'équation de Fredholm sont contenues dans cet espace de fonctions et elles s'expriment comme combinaison linéaire des φ_1, φ_2, etc., ce qui fait dire à A. Lautman :

> On peut alors voir poindre l'idée centrale qui a guidé Hilbert dans sa théorie générale des équations intégrales linéaires : construire sur le domaine $0 < s < 1$ un espace de fonctions jouissant de caractéristiques globales telles que l'on puisse, par une décomposition appropriée de cet espace, y distinguer un système de fonctions de base qui soient en même temps, fonctions propres de l'équation proposée. En tant qu'elles forment un système de base pour les fonctions de l'espace fonctionnel, elles sont liées à la structure de cet espace ; en tant qu'elles sont fonctions propres de l'équation proposée, elles se détachent de l'ensemble des autres fonctions de l'espace pour apparaître avec leur sens nouveau de solutions. [57]

Lautman formule cet argument en se fondant non pas sur les travaux mêmes de Hilbert mais sur le commentaire qu'en a proposé Hellinger lors de la publication du tome III des *Œuvres* de Hilbert en 1935. Hellinger a en sa possession la définition axiomatisée des espaces de Hilbert par von Neumann en 1927 ; il restitue donc les contributions de Hilbert en théorie des équations intégrales à partir d'un point de vue rétrospectif. Il en va donc de même pour Lautman. En réalité, entre 1904 et 1910, Hilbert demeure centré sur la résolution des équations intégrales ; il ne dégage pas explicitement les propriétés de l'espace des fonctions auquel appartiennent les solutions de l'équation de Fredholm.

Cela étant, bien que les objets étudiés par Hilbert relèvent de l'*analyse* — il s'agit d'équations intégrales dont les solutions sont des fonctions appartenant à $L^2[a, b]$ — les méthodes qu'il préconise sont élaborées en étroite analogie avec la résolution des systèmes linéaires en *algèbre linéaire*. L'une des motivations essentielles de Hilbert consiste justement à vouloir unifier les domaines de l'algèbre et de l'analyse via la théorie des équations intégrales. Ce projet d'unification de l'algèbre et de l'analyse est d'ailleurs prolongé par von Neumann en 1927.

Ainsi, l'article de Hilbert de 1909 intitulé « Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen » s'ouvre sur l'argument suivant :

> En algèbre, des quantités en nombre fini — désignées par φ_1, φ_2, ..., φ_n — sont considérées comme des inconnues et par suite, le problème consiste à déterminer ces quantités φ_1, φ_2, ..., φ_n en nombre fini de telle sorte qu'elles satisfassent à un nombre fini de relations données.
>
> En revanche, les problèmes de l'analyse consistent pour la plupart à regarder des *fonctions* comme des inconnues et à les déterminer de telle sorte qu'elles satisfassent à des relations données ; ces relations peuvent se présenter sous la forme d'équations différentielles, d'équations

57. A. Lautman, *op. cit.*, p. 202.

> intégrales, d'équations fonctionnelles ou elles peuvent même être une combinaison de telles équations. Pour fixer l'idée de ces relations, considérons une unique fonction continue $\varphi(s)$ d'une variable s en tant qu'inconnue et donnons-nous une relation unique pour cette fonction
>
> $$R(\varphi(s)) = 0.$$
>
> Le problème d'analyse que l'on vient de décrire et le problème d'algèbre initialement donné se confondent et sont contenus dans le problème plus général et complet qui revient à considérer un nombre infini de quantités en tant qu'inconnues et à les déterminer de telle sorte qu'elles satisfassent à un nombre infini de relations. [58]

Ce passage fait écho aux premières lignes des *Grundlagen der Geometrie* (1899) : Hilbert commençait alors par introduire des ensembles d'objets intitulés points, droites et plans avant de les assujettir à certaines relations. En algèbre, les objets sont des quantités inconnues en nombre fini qui satisfont à des relations en nombre fini — équations algébriques, systèmes d'équations linéaires, etc. ; en analyse, les objets sont des fonctions qui sont assujetties à des relations qui prennent la forme d'équations différentielles, d'équations intégrales, d'équations fonctionnelles, etc. Nous ne faisons pas ce rapprochement avec les *Grundlagen der Geometrie* par hasard : Hilbert évoque les réflexions qu'il a menées sur les fondements de la géométrie à la fin de cet article de 1909. En effet, dans les dernières lignes des *Grundlagen*, on peut lire l'argument suivant : les mathématiques « modernes » se caractérisent par la systématisation de preuves d'impossibilité — impossibilité de résoudre en général des équations du cinquième degré par radicaux, impossibilité d'envisager π et e comme racines d'une équation algébrique à coefficients rationnels, impossibilité de démontrer l'axiome des parallèles, etc. Les mathématiciens s'intéresseraient moins à la résolution effective de problèmes qu'aux conditions qui commandent leur résolubilité. C'est très exactement dans cette perspective que Hilbert entend aborder la théorie des équations intégrales. Le parallèle entre les *Grundlagen der Geometrie* et cet article de 1909 n'a donc rien de fortuit.

Revenons au passage que nous venons de traduire. Les problèmes de l'algèbre et de l'analyse, que Hilbert schématise d'abord séparément, peuvent se fondre dans un unique problème plus général : la *nature* des inconnues n'est alors plus spécifiée ; le nombre d'inconnues et de relations peut être infini. Von Neumann procède de manière similaire en 1927 : il commence par formuler les problèmes aux valeurs propres en *mécanique des matrices*, qui est redevable de l'*algèbre*, puis en *mécanique ondulatoire*, qui est redevable de l'*analyse* ; il propose ensuite de manière schématique un unique problème aux valeurs propres qui transcende ces deux types d'énoncés et qui doit ouvrir la voie à une unification des points de vue de Heisenberg-Born-Jordan et de Schrödinger. Cette unification de l'algèbre et de l'analyse, préconisée par

58. D. Hilbert, *op. cit.*, p. 56.

Hilbert en 1909, se prolonge et se cristallise avec l'axiomatisation des espaces de Hilbert par von Neumann en 1927 à un autre point de vue : un espace de Hilbert est une structure « mixte » : il s'agit d'un espace vectoriel topologique de dimension finie ou infinie, complet au sens de Cauchy.

Ainsi, avec l'axiomatisation des espaces de Hilbert abstraits, von Neumann effectue un véritable décrochage en termes de niveau de généralité par rapport à Hilbert ; mais, dans le même temps, von Neumann prolonge le programme d'unification de l'analyse et de l'algèbre initié par Hilbert avec ses travaux sur les équations intégrales. Parallèlement, nous avons souligné que von Neumann poursuit le programme d'axiomatisation de la physique de Hilbert.

Voici, plus précisément, la liste des cinq axiomes auxquels von Neumann assujettit un espace de Hilbert *abstrait* $\overline{\mathfrak{H}}$:

A. $\overline{\mathfrak{H}}$ est un « espace linéaire » ; plus précisément, von Neumann suppose qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes ; $\overline{\mathfrak{H}}$ est donc muni de deux opérations, l'addition $f+g$ de deux éléments quelconques f et g de $\overline{\mathfrak{H}}$ et la multiplication af, où a désigne un nombre complexe. Ces opérations satisfont à certaines propriétés : existence d'un neutre pour l'addition, commutativité et associativité de l'addition, associativité de la multiplication et distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

B. $\overline{\mathfrak{H}}$ est un espace métrique ; cette métrique provient d'une forme sesquilinéaire, hermitienne, non dégénérée et définie positive $Q(f,g)$, ce qui signifie :

1. $Q(af,g) = \overline{a}Q(f,g)$, a étant un nombre complexe et $\overline{a}$ le nombre complexe conjugué de a,

2. $Q(f_1+f_2,g) = Q(f_1,g)+Q(f_2,g)$,

3. $Q(f,g) = \overline{Q(f,g)}$ (hermitienne),

4. $Q(f) \geqslant 0$ (positive), et $Q(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ (non dégénérée).

C. $\overline{\mathfrak{H}}$ a un nombre infini de dimensions.

D. Il existe une suite partout dense dans $\overline{\mathfrak{H}}$.

E. La condition de convergence de Cauchy est vérifiée dans $\overline{\mathfrak{H}}$, i.e. $\overline{\mathfrak{H}}$ est complet au sens de Cauchy. Cela signifie que toute suite f_1, f_2, ..., dans $\overline{\mathfrak{H}}$ qui est de Cauchy — i.e. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon)$, tel que de $N \leqslant m \leqslant n$, il résulte $\sqrt{Q(f_m - f_n)} \leqslant \epsilon$ — est convergente dans $\overline{\mathfrak{H}}$ — i.e. il existe $f \in \overline{\mathfrak{H}}$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$ il y ait $N = N(\epsilon)$ de sorte que de $N \leqslant m$ il s'ensuive $\sqrt{Q(f_m - f)} \leqslant \epsilon$.

Von Neumann se restreint ici à des espaces de Hilbert complexes dans la mesure où l'espace des états d'un système quantique se mathématise sous la forme d'un espace de Hilbert complexe. Mais il est tout à fait possible d'envisager des espaces de Hilbert réels. En outre, un

espace de Hilbert peut être de dimension finie, ce que semble exclure von Neumann lorsqu'il formule l'axiome **C** en 1927. Il lèvera d'ailleurs cette restriction en 1932 avec la parution de son ouvrage également intitulé *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*[59]. Enfin, l'axiome **D** correspond à une hypothèse de séparabilité, nécessaire pour garantir l'existence d'une base orthonormée dans $\overline{\mathfrak{H}}$. La définition proposée par von Neumann ne correspond donc pas exactement à celle que nous connaissons et que nous pouvons formuler comme suit : un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et complet au sens de Cauchy pour la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définie par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Les restrictions ajoutées par von Neumann sont liées à son projet de mathématisation de la mécanique quantique ; de fait, il détermine par voie axiomatique le bon niveau de généralité pour que sa définition soit opératoire, mais il ne cherche pas à définir les espaces de Hilbert en ≪ toute ≫ généralité : il raisonne essentiellement sur des espaces de Hilbert complexes, de dimension infinie et séparables.

Les espaces de Hilbert ne constituent pas une notion de plus pour mathématiser la mécanique quantique : l'axiomatisation d'un tel concept revêt une triple visée unificatrice. En premier lieu, les espaces de Hilbert font intervenir des propriétés et des méthodes qui sont redevables de l'analyse et de l'algèbre. En ce sens, von Neumann poursuit sous une forme plus abstraite le projet hilbertien d'une mise en commun de l'analyse et de l'algèbre qui est caractéristique du développement de la théorie des équations intégrales et de l'analyse fonctionnelle. En second lieu, von Neumann montre que la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire sont le recto et le verso d'un même formalisme : les espaces $\ell^2(\mathbb{N})$ et $L^2[a, b]$ sont isomorphes en vertu du théorème de Riesz-Fischer. En troisième lieu, les espaces de Hilbert garantissent une cohérence formelle à la mécanique quantique qui se caractérise par un dépassement de l'antagonisme entre une physique du discret et une physique du continu. Comme le souligne à juste titre Lautman :

> Reprenons par exemple l'équation de Schrödinger :
>
> $$\Delta a \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - V(x, y, z)]a = 0.$$
>
> Le paramètre variable étant l'énergie E, cette équation n'a de solution que pour des niveaux discontinus d'énergie qui sont les valeurs propres de l'équation. On a souvent opposé la physique du continu à la physique du discontinu ; nous voyons que le problème de la genèse du discontinu sur le continu n'est pas un problème de physique, le drame se joue plus haut, au niveau des mathématiques ; le continu, c'est le domaine de variation de la variable, le discontinu ce sont

59. J. von Neumann, *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Berlin, éd. Springer, 1932, p. 23-24.

> les solutions, et ce mixte qu'est l'espace de Hilbert est homogène au continu par la nature et la topologie de ses éléments, et au discontinu par ses décompositions structurales. [60]

L'idée-force qui alimente les réflexions de Lautman sur les espaces de Hilbert peut être résumée comme suit : un espace de Hilbert est un mixte, il est homogène au continu puisqu'il est complet au sens de Cauchy et il est homogène au discontinu ≪ par ses décompositions structurales ≫, expression qui, dans le vocabulaire de Lautman, renvoie à la décomposition de l'espace des états d'un système quantique en sous-espaces propres pour les valeurs propres de l'opérateur hamiltonien H, ce dernier étant un opérateur autoadjoint. Les espaces de Hilbert jouent le rôle d'une interface entre le continu — en vertu de leurs propriétés topologiques — et le discret, comme en témoigne la référence de Lautman à des opérateurs sur un espace de Hilbert dont le spectre des valeurs propres peut être discret.

Lautman élabore l'idée de mixte en se référant au schématisme kantien, un schème étant un produit de l'imagination qui est homogène aux catégories de l'entendement *et* aux phénomènes. Le schématisme est donc un moyen terme entre les concepts de l'entendement et les représentations issues de notre sensibilité. Le schème est une condition qui rend possible (i) la subsomption de nos intuitions sous des concepts et (ii) l'application de nos concepts à des objets. [61] Par analogie, Lautman suppose qu'un espace de Hilbert constitue un moyen terme d'ordre purement mathématique pour dépasser l'antagonisme entre une physique du continu et une physique du discontinu. Comme le souligne E. Barot, l'idée de mixte chez Lautman est également redevable de la philosophie platonicienne. Ce double emprunt, à Kant et à Platon, montre que Lautman n'entend pas reprendre à son compte toute l'architecture du criticisme kantien, mais seulemnent l'idée du schématisme, qu'il s'approprie en faisant savamment abstraction des présupposés qui renverraient à une quelconque philosophie de la conscience.

L'axiomatisation des espaces de Hilbert permet donc de saisir rigoureusement les fondements mathématiques de la mécanique quantique ; mais ce concept intervient également de manière essentielle pour clarifier l'interprétation statistique de la mécanique quantique proposée par Born dès 1926. Tel est l'objectif du second article publié par von Neumann en 1927 et intitulé ≪ Wahrscheinlichkeitstheoretiker Aufbau der Quantenmechanik ≫. Von Neumann postule alors explicitement qu'un système quantique $\mathfrak{S}$ est associé à un espace des états qui,

60. A. Lautman, *op. cit.*, p. 206-207.

61. E. Barot, *Lautman*, Paris, *Les Belles Lettres*, 2009, p. 168 : ≪ [Le schème] est une figuration et à la fois la règle d'un mouvement de pensée permettant de subsumer l'objet sous un concept, donc simultanément ce par quoi le sujet connaissant s'ouvre aux objets de l'intuition sensible, et ce par quoi les objets sensibles deviennent des objets de connaissance ≫.

mathématiquement parlant, est un espace de Hilbert complexe :

> Les fonctions à valeurs complexes définies dans l'espace des états de $\mathfrak{S}$ constituent une réalisation de l'espace de Hilbert abstrait $\mathfrak{H}$.[62]

Et il ajoute aussitôt que toute grandeur physique peut être associée à un opérateur autoadjoint de l'espace des états du système. Cet opérateur s'appelle maintenant l'*observable* représentant la grandeur en question. On peut prolonger l'argument de von Neumann comme suit : une mesure concernant une grandeur physique A ne peut correspondre qu'à une valeur propre de l'opérateur autoadjoint $\hat{A}$ associé à A ; étant entendu que les valeurs propres d'un opérateur autoadjoint ou hermitien sont toutes réelles. Soient a_α une valeur propre de $\hat{A}$ et $\hat{P}_\alpha$ le projecteur sur le sous-espace associé à la valeur propre a_α, la probabilité de trouver la valeur a_α lors de la mesure de la grandeur physique A est définie par :

$$\mathcal{P}(a_\alpha) = \|\psi_\alpha\|^2, \quad \text{où } |\psi_\alpha\rangle = \hat{P}_\alpha|\psi\rangle.$$

Von Neumann dégage ainsi de proche en proche les postulats généraux de la mécanique quantique *après* avoir explicité les concepts mathématiques nécessaires à une formalisation parfaitement cohérente de cette théorie. L'axiomatisation des espaces de Hilbert et la formulation des postulats de la mécanique quantique se font dans un même élan et sont donc intimement corrélées. Von Neumann se situe une nouvelle fois dans le prolongement de Hilbert sur un plan épistémologique. En effet, von Neumann utilise la méthode axiomatique pour dégager les fondements de la mécanique quantique ; il se conforme aux prescriptions que Hilbert avait formulées au cours de son sixième problème. Nous allons voir que von Neumann est également l'un des principaux acteurs dans l'application de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique : il fait connaître à son collègue et ami Wigner les travaux de Frobenius, Schur et Weyl sur les représentations de groupes. Parallèlement, il entretient une correspondance avec Weyl.

Nous pouvons synthétiser les différents projets de formalisation de la mécanique quantique que nous venons d'aborder de la manière suivante : entre 1925 et 1927 — soit un an avant que ne paraisse la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* —, la mécanique ondulatoire de Schrödinger et la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan sont bien établies ; leur équivalence est démontrée et leur unification à partir d'une axiomatisation des

62. J. von Neumann, ≪ Wahrscheinlichkeitstheoretiker Aufbau der Quantenmechanik ≫, in *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1927, p. 251.

espaces de Hilbert est assurée sur un plan mathématique, comme en atteste l'article fondamental de von Neumann que nous venons de commenter et dont il reprendra le contenu dans une monographie de 1931 également intitulée *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*. La question est de savoir dans quelles conditions et pour quelles raisons Wigner, von Neumann et Weyl s'appuient sur la théorie des représentations de groupes pour compléter les divers travaux de Schrödinger, Heisenberg-Born-Jordan ou encore von Neumann consacrés à la mathématisation de la mécanique quantique. Pour Wigner comme pour Weyl, la théorie des représentations de groupes constitue un complément essentiel en mécanique quantique. Nous allons montrer sur des exemples simples quels usages ils font de cette théorie et comment ils justifient son recours. Signalons d'emblée que Wigner et Weyl connaissent les travaux de Heisenberg-Born-Jordan et de Schrödinger en mécanique quantique. Réciproquement, von Neumann se situe à l'intersection entre ces différents formalismes. D'un côté, il unifie la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire, de l'autre il indique à son ami et collègue Wigner l'importance de la théorie des représentations des groupes finis et des groupes de Lie en mécanique quantique dès la fin de l'année 1926.

3.2 Représentations de groupes et mécanique quantique

L'introduction de la théorie des groupes et des représentations de groupes ne s'est pas faite après l'unification de la mécanique des matrices et de la mécanique ondulatoire par von Neumann en 1927. D'où la nécessité de ne pas adhérer à une histoire linéaire de la mathématisation de la mécanique quantique (non relativiste) qui serait marquée par les étapes suivantes : (1) mécanique des matrices, (2) mécanique ondulatoire, (3) espaces de Hilbert, (4) théorie des représentations de groupes. Comme le souligne E. Scholz dans son article intitulé « Introducing Groups into Quantum Theory », les premiers usages de la théorie des groupes et des représentations de groupes pour mathématiser certains aspects de la mécanique quantique datent de 1926-1927. Ainsi en 1926-1927, Heisenberg publie un article en deux parties intitulé « Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik » dans lequel il s'appuie de manière *ad hoc* sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ pour formaliser un système quantique comportant n électrons qui sont des particules *indiscernables*. Alors que Born et Jordan se réfèrent à un ouvrage d'algèbre relativement récent, à savoir celui de Bôcher de 1907 (1910 pour la traduction allemande), pour formuler par voie axiomatique les fondements du calcul matriciel, Heisenberg envisage le groupe symétrique à partir de la traduction en allemand (1868) de la troisième édition du *Cours d'algèbre supérieure* de Serret (1866). Heisenberg

considère le concept de groupe dans le cadre de la théorie des équations algébriques ; il ignore quasiment tout d'une conception *abstraite* des groupes, pourtant développée par Hölder dès 1889, avant d'être prolongée par Weber dans les années 1890. [63]

Les importantes réformes en matière de théorisation et d'enseignement de l'algèbre qui sont amorcées dès la fin du XIX^{e} siècle par des mathématiciens de langue allemande notamment ne se diffusent pas aussi naturellement que nous pourrions le penser, en particulier auprès d'un public de physiciens. Le problème n'est pas de juger Heisenberg sous prétexte qu'il utilise une source qui semble alors « dépassée » ; le fait qu'il s'appuie encore sur le manuel de Serret en 1926 montre que les développements d'une théorie physique et d'une théorie mathématique ne sont pas nécessairement conjoints ou parfaitement coordonnés. On peut donc tout à la fois être « à la pointe » sur les fondements de la mécanique quantique et s'appuyer sur des sources en théorie des groupes auxquelles les mathématiciens préfèrent des références plus récentes. Nous pensons bien sûr au second tome du *Lehrbuch der Algebra* de Weber, mais surtout à l'ouvrage de Speiser intitulé *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (1923) qui est consacré à la théorie abstraite des groupes finis et des représentations de groupes avec des applications à la cristallographie. [64]

Heisenberg ne connaît vraisemblablement pas les travaux sur les représentations du groupe symétrique que Frobenius publie au début du XX^{e} siècle. Par extension, Heisenberg ignore quasiment tout de la théorie des représentations de groupes qui s'avère être le bon cadre pour formaliser la mécanique quantique. Si le cas Heisenberg s'avère intéressant pour nuancer l'idée d'un parallélisme et d'une parfaite corrélation entre les développements des mathématiques

63. Voir O. Hölder, « Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen », *Mathematische Annalen*, **34**, 1889, p. 26-56. Dans cet article, O. Hölder définit le concept de groupe fini abstraitement par voie axiomatique, il introduit la notion de groupe-quotient, il retraduit les suites de composition de Jordan en fonction de cette approche plus abstraite. H. Weber, « Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie », *Mathematische Annalen*, **43**, 1893, p.521-549, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. II, Braunschweig, éd. Vieweg, 1896. Dans son article de 1893 sur les fondements de la théorie galoisienne des équations, Weber accorde encore une place centrale à la question de la résolubilité des équations par radicaux, qu'Artin rejettera en périphérie de ses cours consacrés à la théorie de Galois, celle-ci devenant, sous la plume d'Artin, un jeu de correspondance entre deux structures algébriques : les corps et les extensions de corps d'une part, les sous-groupes du groupe des K-automorphismes d'une extension normale N d'un corps K d'autre part. Au début de cet écrit, Weber formule cependant la liste complète des axiomes auxquels le concept de groupe est assujetti, qu'il s'agisse de groupes finis ou de groupes infinis. Le second volume du *Lehrbuch der Algebra* s'ouvre sur une théorie générale des groupes.

64. Nous verrons dans la suite de notre propos que l'ouvrage de Speiser constitue une référence essentielle pour Weyl et Wigner afin de mettre en valeur les applications de la théorie des groupes à la physique à partir de l'exemplarité de la cristallographie.

et de la physique, il ne faudrait toutefois pas le survaloriser et croire qu'il peut se généraliser. En effet, en 1926-1927 von Neumann et Wigner se forment à la théorie des représentations de groupes en consultant les travaux de Frobenius, Schur et Burnside sur les représentations des groupes finis et les articles que Schur et Weyl publient en 1924 sur les représentations du groupe spécial orthogonal SO_n. Réciproquement, Weyl entretient une correspondance avec Born et Jordan dès 1925, il rencontre régulièrement Schrödinger puisqu'ils enseignent tous deux à Zürich — Schrödinger part pour Berlin en 1927 — et il s'approprie les travaux que Dirac consacre à une formulation cohérente de la mécanique quantique relativiste dans les années 1927-1928.

Les groupes qui interviennent en mécanique quantique sont relatifs au *cadre théorique adopté* (mécanique quantique non-relativiste ou mécanique quantique relativiste de Dirac) et à la *complexité* des systèmes étudiés (système comportant une ou plusieurs particules *indiscernables*). Ainsi, les représentations du groupe des transformations de Lorentz propres et orthochrones, à savoir $\mathrm{SO}_0(3,1)$, interviennent de manière essentielle en mécanique quantique relativiste. Les représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ jouent un rôle crucial dans l'étude des systèmes comportant n particules indiscernables. Enfin, les représentations du groupe SO_3 sont étudiées en mécanique quantique non relativiste par Wigner et Weyl en 1927-1928. Ces trois exemples montrent qu'il est nécessaire de connaître la théorie des représentations des groupes finis *et* des groupes de Lie pour tirer parti de la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique.

Nous pouvons situer les premiers usages des groupes et des représentations de groupes en mécanique quantique en 1926-1927, comme en témoignent les articles de Heisenberg et de Wigner. Rappelons pour mémoire que Wigner a une trajectoire assez similaire à son collègue et ami von Neumann. Tous deux sont originaires de Budapest. Wigner reçoit une formation en génie chimique à l'université de Berlin à partir de 1921. Il obtient son diplôme d'ingénieur en 1925. Il se forme à la physique théorique en assistant notamment aux colloques organisés par la *Deutsche physikalische Gesellschaft* à Berlin. Enfin, il effectue un séjour à Göttingen avec von Neumann en 1927. Les travaux de Wigner (1926-1927) sur les systèmes comportant n particules indiscernables semblent encore ignorés des mathématiciens et des physiciens en 1927, malgré une recension dans les *Physikalische Berichte* et le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. La multiplication des publications consacrées aux applications de la théorie des groupes à la mécanique quantique au cours de l'année 1928 offre une plus grande lisibilité à cette démarche qui est diversement représentée par Wigner, von Neumann, Weyl, Heitler, London, Fock, etc. Mais surtout, une telle approche acquiert une certaine autorité avec les

publications successives des trois monographies suivantes : *Gruppentheorie und Quantenmechanik* de Weyl (1928 pour la première édition en allemand, 1931 pour la seconde édition et la traduction en anglais), *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* de Wigner (1931) et *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* de van der Waerden (1932).

Pour une comparaison systématique entre les approches respectives de Wigner, Weyl et van der Waerden, nous renvoyons le lecteur à la thèse de doctorat de M. Schneider intitulée *Die physikalischen Arbeiten des jungen B. L. van der Waerden*. Dans son introduction, Schneider remet en question l'hypothèse d'interprétation de Mackey selon laquelle Wigner utiliserait la théorie des groupes et des représentations de groupes pour résoudre des problèmes concrets en mécanique quantique alors que Weyl s'intéresserait exclusivement aux fondements de la mécanique quantique. Mackey soutient notamment que

> Weyl's idea differed from that of Wigner in that he wanted to apply group representations to get a better understanding of the foundations of quantum mechanics in general and not so much to gain insight into particular problems. [65]

Il poursuit en ces termes :

> Wigner and Weyl not only introduced group representations into quantum mechanics in quite different ways with different goals but they reached this interaction between physics and mathematics from opposite directions. While Wigner was above all a theoretical physicist, Weyl was a pure mathematician. Moreover while Wigner had to have the existence of the theory of group representations called to his attention by von Neumann, Weyl had been actively working in the field since 1924. [66]

Cette ligne de démarcation est trop forte et elle ne résiste pas à l'examen des faits. En réalité, Weyl et Wigner s'appuient sur la théorie des groupes et des représentations de groupes aussi bien pour aborder les fondements de la mécanique quantique que pour résoudre des problèmes concrets liés à des résultats qualitatifs en spectroscopie. [67] Parallèlement, Schneider indique qu'il n'est pas pertinent de transposer l'antagonisme qui oppose Weyl à l'école algébrique allemande de Hambourg et de Göttingen à la mécanique quantique. En effet, van der Waerden n'écrit pas son ouvrage sur la mécanique quantique pour étendre les méthodes issues de la *Moderne Algebra* à la physique mathématique. Son but est pragmatique : montrer

65. G. W. Mackey, introduction aux articles mathématiques d'E. Wigner, in E. Wigner, *The collected works*, Volume I, Berlin, Springer Verlag, 1993, p. 248.

66. *ibid.*, p. 252.

67. M. Schneider, *Die physikalischen Arbeiten des jungen B. L. van der Waerden*, thèse de doctorat sous la direction d'E. Scholz, 2009, p. 2 et 3.

l'intérêt des méthodes issues de la théorie des représentations de groupes auprès d'un public de physiciens tout en reconnaissant que d'autres méthodes concurrentes sont possibles — nous pensons notamment aux travaux du physicien américain Slater qui se fonde sur la théorie des déterminants en 1929 pour formaliser les systèmes à n électrons avec spin. Inversement, dans la seconde édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl consacre le § 6 de la troisième partie de son ouvrage à une généralisation par E. Noether du théorème de Jordan-Hölder sur les suites de composition. Plus globalement, l'approche de Weyl dans cette partie s'accorde parfaitement avec les réquisits de l'algèbre abstraite. À la différence de van der Waerden, Weyl propose une monographie plus ambitieuse tant sur un plan mathématique que physique. Le contenu mathématique présenté va bien au-delà de ce qu'il est nécessaire de connaître pour appliquer la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique. Réciproquement, sa monographie est plus exhaustive que celle de van der Waerden. En effet, Weyl aborde toutes les applications connues de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique. De plus, il défend ardemment cette approche contre celles de concurrents comme Slater qu'il ne présente pas. On ne peut donc pas superposer les critiques que formule Weyl à l'encontre de l'algèbre abstraite dans « Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege des mathematischen Verständnisses » et les différences entre ses propres travaux et ceux de van der Waerden en mécanique quantique.

Enfin, Schneider insiste sur le fait que la réception des travaux de Wigner, Weyl et van der Waerden ne donne pas lieu à des clivages marqués entre tenants et opposants aux méthodes issues de la théorie des groupes en mécanique quantique. L'introduction de l'expression « Gruppenpest », qui peut donner l'illusion d'un tel clivage, est attribuée à Ehrenfest. [68] Toutefois, ce dernier adopte une position nuancée puisqu'il a largement encouragé van der Waerden à utiliser la théorie des représentations de groupes dans ses travaux de physique mathématique consacrés aux spineurs (1929). Selon ses interlocuteurs, Ehrenfest fait part tantôt de son intérêt, tantôt de ses réserves à l'égard de cette approche. Par exemple, dans une lettre à Kramers d'août 1928, il indique qu'il souhaite la comprendre davantage. En revanche, la tonalité de ses propos est de plus en plus négative dans sa correspondance avec Pauli entre 1928 et 1929.

D'une manière générale, la réception des travaux appliquant la théorie des groupes à la

68. Comme le précise M. Schneider, l'expression « Gruppenpest » apparaît effectivement sous la plume d'Ehrenfest dans une lettre à Pauli datée du 29 septembre 1928. Ehrenfest l'emploie une nouvelle fois dans une lettre à Pauli du 8 mai 1929 et il souligne alors le caractère inhibiteur du formalisme hérité de la théorie des représentations de groupes.

mécanique quantique est complexe et variée : elle oscille entre enthousiasme, intérêt, réserves, scepticisme et rejet. Par exemple, Heisenberg qui se réfère au groupe symétrique pour aborder l'étude des systèmes quantiques comportant n particules indiscernables fait une recension très élogieuse de la monographie de Weyl dans la *Deutsche Literaturzeitung* en décembre 1928.[69] Sommerfeld avoue à Weyl que la théorie des groupes lui est étrangère. Pour sa part, Schrödinger insiste sur la nécessité de clarifier les principes physiques de la mécanique quantique au lieu de les dissimuler derrière un appareillage mathématique fort complexe — celui des représentations de groupes.[70] Comme le souligne M. Schneider, Sommerfeld et Schrödinger accueillent la théorie des groupes et ses applications en mécanique quantique avec scepticisme. Enfin, Born et le physicien américain Slater rejettent avec vigueur ces méthodes, estimant que les physiciens peuvent s'appuyer sur d'autres outils conceptuels.

Nous n'envisageons pas de suivre un ordre chronologique dans notre argumentation. Dans un premier temps (3.2.1), nous entendons tout d'abord dégager les principales fonctions des représentations de groupes en mécanique quantique (classification des niveaux d'énergie, détermination des « lois de conservation » et caractérisation des états quantique d'un système quantique). Pour ce faire, nous prendrons le cas le plus simple, à savoir l'atome d'hydrogène. Cette première approche nous permettra de montrer que les points de vue de Weyl et de Wigner ne sont pas aussi opposés que ne le prétend Mackey. Dans un deuxième temps (3.2.2), nous dégagerons la structure d'ensemble de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* de Weyl et nous verrons que cette monographie propose une conception unifiée de la mécanique quantique grâce aux méthodes de théorie des groupes. Dans un troisième temps (3.2.3), nous verrons comment Weyl, Wigner et von Neumann entendent justifier le recours à la théorie des représentations de groupes pour mathématiser la mécanique quantique. Dans un quatrième temps (3.2.4), nous montrerons de quelle manière les représentations de groupes peuvent être adaptées à des systèmes de plus en plus complexes. Dans un cinquième temps (3.2.5), nous reviendrons en particulier sur l'usage des représentations du groupe symétrique afin de décrire des systèmes comportant n particules indiscernables. Ce problème marque d'ailleurs le point de départ d'une mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des groupes (Heisenberg, 1926) et des représentations de groupes (Wigner et von Neumann, 1926-1927). Nous préférons l'étudier en dernier, parce qu'il a pour objet des systèmes quantiques d'une relative complexité. Enfin, la sous-section 3.2.6 est un bilan des points communs et des différences entre Wigner et Weyl. Pour une comparaison systématique entre les travaux de van der Waer-

69. voir à ce propos M. Schneider, *op. cit.*, p. 56.

70. Nous reprenons les commentaires de M. Schneider aux pages 60 et 61 de sa thèse.

den et de Weyl, nous renvoyons le lecteur à la thèse de M. Schneider. Nous mettons l'accent sur les rapports Wigner / Weyl en raison de leurs prolongements épistémologiques avec les parutions ultérieures de *Symmetry* de Weyl (1952) et de *Symmetries and Reflections de Wigner* (1979) que nous aborderons dans le quatrième et dernier chapitre de notre troisième partie.

3.2.1 Les méthodes de théorie des groupes : un instrument pour caractériser les niveaux d'énergie, les lois de conservation et les états quantiques d'un système

Le principe de Wigner et la classification des niveaux d'énergie d'un système

L'état d'un système quantique aussi élémentaire que l'atome d'hydrogène sans spin n'est décrit ni par des points dans l'espace usuel ni par des fonctions dépendant du temps, mais par un vecteur dans l'espace des états. Mathématiquement, il s'agit d'un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ de dimension infinie dont les éléments sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^3$, à valeurs complexes et de carré sommable. Autrement dit, $\mathcal{H}$ s'identifie à l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$. Contrairement à ce qui prévaut en mécanique classique, on ne peut donc pas directement affirmer que les ≪ lois de la nature ≫ — qui sont de nature statistique en mécanique quantique — sont formellement *invariantes* par rotation dans l'espace usuel, car ce serait faire comme si cet espace usuel constituait le cadre de description d'un système quantique, ce qui n'est pas le cas. Il s'agit donc de *représenter* ces transformations géométriques dans l'espace des états du système.

Ainsi, il est nécessaire de faire *correspondre* à tout élément d'un groupe de transformations géométriques dans l'espace usuel un *opérateur* dans l'espace des états $\mathcal{H}$ du système étudié. Si, par exemple, on se réfère au groupe des rotations, cette correspondance entre très directement dans le cadre de la théorie des représentations des groupes topologiques et, *a fortiori*, des groupes compacts. En effet, soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable et G un groupe topologique, c'est-à-dire un groupe muni d'une structure d'espace topologique séparé telle que la multiplication et le passage à l'inverse soient continus ; on appelle représentation de G la donnée d'un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ tel que, pour tout $\widehat{X} \in \mathcal{H}$,

$$g \in G \mapsto \rho(g)\widehat{X} \in \mathcal{H}$$

soit continu. Dans le contexte de la mécanique quantique non relativiste, le groupe G peut par exemple désigner le groupe SO_3 qui est un groupe topologique compact. En réalité, SO_3

admet une structure plus riche, puisqu'il s'agit d'un groupe de Lie, i.e. il est muni d'une structure de variété lisse. L'espace $\mathcal{H}$ correspond à l'espace des états du système étudié et $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$ au groupe des automorphismes de $\mathcal{H}$ qui sont des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$. Par définition, $\mathcal{H}$ est muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $\widehat{U}$ est un endomorphisme de $\mathcal{H}$, l'*adjoint* $\widehat{U}^*$ de $\widehat{U}$ est défini par :

$$\langle \widehat{U}x, y \rangle = \langle x, \widehat{U}^* y \rangle,$$

pour tous x, y de $\mathcal{H}$. Un automorphisme $\widehat{U}$ de $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire unitaire si $\widehat{U}\widehat{U}^* = \widehat{U}^*\widehat{U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$.

Une *symétrie* en mécanique quantique ne désigne pas un ensemble de transformations géométriques dans l'espace usuel, mais un ensemble d'opérateurs agissant sur l'espace $\mathcal{H}$ des états du système. Précisons les propriétés de ces opérateurs. Soit $\widehat{H}$ le hamiltonien quantique du système étudié, c'est-à-dire l'opérateur hermitien associé à l'énergie. Un *opérateur de symétrie* du système est un opérateur *unitaire* qui *commute* avec $\widehat{H}$, i.e. $[\widehat{U}, \widehat{H}] = 0$.[71] Un *groupe de symétries* du système est constitué d'opérateurs de symétrie. Weyl utilise exactement les arguments que nous venons de résumer pour introduire le cadre théorique des représentations de groupes en mécanique quantique, comme en témoigne le passage suivant, tiré de l'article intitulé ≪ The spherical symmetry of atoms ≫ :

> I rotate [a physical system] P about the origin O by the rotation s ; by this process the arbitrary state r of P goes over into a new state r'. Since everything which is physically significant must remain unchanged and since the system space of the vector r is unitary, the transition $r \to r'$ must be a linear unitary operator $U(s)$, dependent on s, in the system space. I say briefly that $U(s)$ is induced in the system space by s. All such rotations s form the group of rotations of orthogonal transformations in our 3-dimensional Euclidean space. The correspondence $U : s \to U(s)$ must obey the following law
>
> $$U(t)U(s) = U(ts),$$
>
> to the composition of rotations s, t, corresponds the composition of the induced operations U in the system space. The mathematician calls such a correspondence a representation of the rotation group.[72]

Parmi tous les groupes de symétries du système, il en existe un qui contient tous les autres : son *groupe de symétries complet*. La mise au jour de ce groupe et la détermination de

71. E. Wigner, *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra* (1931 pour l'édition en allemand, New York, Academic Press Inc., 1959, p. 107.

72. H. Weyl, ≪ The spherical symmetry of atoms ≫, *The Rice Institute Pamphlet*, **16**, 1929, in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, *op. cit.*, p. 273.

ses représentations irréductibles conditionne une description cohérente du système étudié. [73] Soient G un groupe de symétries du système, $\widehat{H}$ son hamiltonien et $\mathcal{E}_n$ l'espace vectoriel de dimension m engendré par les vecteurs propres de $\widehat{H}$ pour la valeur propre E_n (il s'agit du niveau d'énergie E_n), i.e. les vecteurs $|\Psi\rangle$ tels que

$$\widehat{H}(|\Psi\rangle) = E_n(|\Psi\rangle).$$

Comme $\widehat{U}$ commute avec $\widehat{H}$, on a :

$$\widehat{H}(\widehat{U}|\Psi\rangle) = \widehat{U}(\widehat{H}|\Psi\rangle) = E_n(\widehat{U}|\Psi\rangle),$$

pour tout $|\Psi\rangle \in \mathcal{E}_n$ et pour tout $\widehat{U} \in G$. Autrement dit, le vecteur $\widehat{U}|\Psi\rangle$ est vecteur propre pour la valeur propre E_n, il fait partie de $\mathcal{E}_n$. Cet espace demeure *invariant* ou *stable* par G. Il peut donc servir d'espace sous-jacent à une représentation $(\mathcal{E}_n, \rho)$ de G. Si G est le groupe de symétries *complet* du système, alors une telle représentation est *irréductible*. Le principe de Wigner découle de cette implication. Voici comment on peut le formuler :

Chaque *niveau d'énergie* d'un système quantique est en correspondance avec l'une des *représentations irréductibles* du groupe de symétries *complet* de son hamiltonien. [74] La *dimension* de la représentation irréductible associée à un niveau d'énergie correspond exactement au *degré de dégénérescence* de ce niveau d'énergie — une dégénérescence traduisant l'existence de plusieurs états quantiques associés à un même niveau d'énergie. Le principe de Wigner permet donc de *classer* les niveaux d'énergie d'un système quantique en fonction des représentations irréductibles du groupe de symétries complet du système et de rendre raison du *degré de dégénérescence* de chaque niveau d'énergie.

Pour montrer que la détermination du groupe de symétries complet d'un système quantique n'a rien d'évident, prenons l'exemple problématique de l'atome d'hydrogène. Si l'on exclut le spin et les effets relativistes, le hamiltonien de l'atome d'hydrogène est

$$\widehat{H}_0 = \frac{p^2}{m_e} - \frac{e^2}{r},$$

où p désigne le module de la quantité de mouvement de l'électron, m_e sa masse, r sa distance au centre et e^2 l'intensité de l'attraction électrostatique. Comme tout hamiltonien comportant

73. E. Wigner, *op. cit.*, p. 108 : ≪ There are physical quantities, in the present case the energy, from whose point of view the states φ and $P_R\varphi$ are equivalent. This means that the measurement of these quantities gives the same values with the same probabilities for φ and for $P_R\varphi$. The operators which correspond to physical quantities of this nature are called *symmetric* under the transformations P_R. Conversely, the group is called the *symmetry group* of the physical quantity ≫.

74. *ibid.*, p. 119 : ≪ one irreducible representation corresponds to each eigenvalue ≫.

un potentiel central — c'est-à-dire un hamiltonien qui ne dépend que de la distance au centre —, $\widehat{H}_0$ a un groupe de symétries isomorphe à SO_3. Est-ce son groupe de symétries *complet* ? Nous allons voir que ce n'est pas le cas. Pour l'atome d'hydrogène, chaque niveau d'énergie E_n possède la dégénérescence n^2. Ceci entraîne que l'espace propre $\mathcal{E}_n$ pour la valeur propre E_n n'est pas *irréductible* sous l'action de SO_3. De deux choses l'une : (i) ou bien le principe de Wigner est mis en défaut alors qu'il est appliqué au système le plus simple que l'on puisse envisager en physique atomique, (ii) ou bien le groupe de symétries complet pour l'atome d'hydrogène contient strictement SO_3.

La seconde possibilité doit être retenue, ce qui tient au fait que le hamiltonien de l'atome d'hydrogène possède un potentiel coulombien $-e^2/r$. Pour éclaircir ce point rappelons qu'en mécanique classique, une particule soumise à un champ coulombien décrit une trajectoire elliptique telle que les axes de l'ellipse restent fixes au cours du mouvement, ce qui se traduit par la constance en direction et en module d'un vecteur connu sous le nom de vecteur de *Runge-Lenz* :

$$\overrightarrow{R} = \frac{\overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{l}}{m} - \frac{e^2 \overrightarrow{r}}{r},$$

où $\overrightarrow{l}$ désigne le moment cinétique orbital, $\overrightarrow{p}$ l'impulsion et $\overrightarrow{r}$ le vecteur position de la particule en mouvement. Les trois composantes du vecteur de Runge-Lenz constituent des constantes de mouvement dans le cas d'une particule soumise à un champ coulombien. En vertu du principe de correspondance, on peut associer à chacune des composantes de ce vecteur des observables que nous noterons $\hat{R}_i$. Ces observables commutent avec le hamiltonien $\hat{H}_0$ de l'atome d'hydrogène, elles constituent des lois de conservation au sens quantique. [75] À partir de la conservation des composantes du moment cinétique orbital et des composantes du vecteur de Runge-Lenz, on peut montrer que le groupe de symétries *complet* de l'atome d'hydrogène s'identifie non pas à SO_3, mais à SO_4 — si l'on ne tient pas compte de l'inversion par rapport à l'origine. On parvient donc à déduire ce groupe à partir de la connaissance des lois de conservation associées à l'atome d'hydrogène — en excluant l'hypothèse du spin et les effets relativistes. Cet exemple problématique montre que l'application du principe de Wigner ne peut pas se faire sans une recherche précise du groupe de symétries complet d'un système.

Le principe de Wigner admet des conséquences empiriquement vérifiables ; cependant, sa signification et sa portée sont indissociables de la théorie des représentations de groupes. Si l'on séparait les concepts physiques et mathématiques qui interviennent dans ce principe, on

75. Nous expliquerons ce point en toute généralité dans ce qui suit.

perdrait de vue qu'il se situe *à la jonction* entre une théorie physique — la mécanique quantique — et une théorie mathématique — les représentations de groupes : il met précisément en jeu une correspondance entre niveaux d'énergie d'un système quantique et représentations irréductibles du groupe de symétries complet de son hamiltonien. Il ne s'agit donc ni d'un *énoncé observationnel*, dérivant des données empiriques issues de la spectroscopie, ni d'un *théorème* relevant de la théorie des représentations de groupes. Par exemple, on ne saurait situer le principe de Wigner sur le même plan que le théorème de complète réductibilité dans la mesure où il met en jeu des concepts essentiellement physiques — celui de niveau d'énergie d'un système physique. Le principe de Wigner montre également qu'il n'y a pas de rapport d'extériorité entre la mécanique quantique et sa mathématisation via la théorie des représentations de groupes. Ce cadre mathématique n'est pas un simple instrument de formalisation. La théorie des représentations de groupes participe à l'intelligibilité et à l'effectivité de la mécanique quantique au regard de l'expérience. L'exemple de l'atome d'hydrogène — et plus particulièrement la recherche des symétries supplémentaires que comporte ce système sur la base du principe de Wigner — le montre assez.

Un analogue du premier théorème de Noether pour déterminer les lois de conservation d'un système

Nous voudrions mettre en exergue un second résultat, tout aussi fondamental, qui est établi de manière indépendante par Wigner et Weyl en 1927-1928 : il s'agit de redéfinir la notion de loi de conservation en mécanique quantique et de montrer comment elle est conditionnée par des symétries. En outre, si ces symétries sont définies par un groupe de Lie, alors on obtient une variante du premier théorème de Noether [76] dans un formalisme hamiltonien adapté à la mécanique quantique. Voici comment on peut formuler cette variante : supposons qu'un groupe $\mathcal{G}$ de symétries du système soit un groupe de Lie à n paramètres, on peut associer n lois de conservation aux n générateurs infinitésimaux de $\mathcal{G}$, ces lois ayant

76. Le premier théorème de Noether, énoncé par Noether dans ≪ Invariante Variationsprobleme ≫ (1918) est énoncé à partir d'un formalisme lagrangien. Voici comment nous pouvons le formuler d'une manière simplifiée. Soient $L(x, u^{(m)})$ un lagrangien *généralisé*, i.e. une fonction lisse de n variables indépendantes $(x_1, ..., x_n)$ et de p variables dépendantes $(u_1, ..., u_p)$ ainsi que de leurs dérivées jusqu'à l'ordre m et Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Un problème variationnel généralisé consiste à trouver un extremum à la fonctionnelle

$$I = \int_\Omega L(x, u^{(m)}) \mathrm{d}x.$$

Premier théorème de Noether : soit $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie à un nombre fini de paramètres qui laisse l'intégrale I invariante, on a une correspondance biunivoque entre lois de conservation et générateurs infinitésimaux de $\mathfrak{G}$.

une signification statistique. [77]

Pour expliciter ce point, revenons brièvement sur les premières lignes de l'article fondamental de Wigner intitulé « Über die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik ». Wigner insiste d'abord sur le caractère essentiellement statistique de la mécanique quantique : les lois de conservation ne peuvent pas avoir le même sens en mécanique classique et en mécanique quantique :

> en raison de la « signification statistique de la mécanique quantique », beaucoup de nos concepts physiques habituels doivent faire l'objet d'une profonde révision (...)
> On sait que l'on ne peut jamais poser la question suivante dans le cadre de la mécanique quantique : « quelle est la valeur de la coordonnée des X ou de l'énergie de ce corps ? » ; on peut seulement se demander « quelle est la probabilité pour que la tentative afin de déterminer la coordonnée des X (ou l'énergie) donne telle ou telle valeur ». Nous devons également formuler les lois de conservation dans ce sens. Elles s'énoncent par exemple ainsi : la probabilité que l'énergie prenne la valeur E ne change pas au cours du temps ». [78]

Il ajoute :

> La condition analytique, afin qu'il y ait loi de conservation pour une grandeur à laquelle correspond l'opérateur hermitien Q, est que Q commute avec l'opérateur-énergie H. [79]

Il s'agit là de l'analogue quantique à l'énoncé classique selon lequel si une fonction f, définie sur l'espace des phases et représentant une quantité physique, est telle que

$$\{f, H\} = 0$$

où H désigne le hamiltonien classique et $\{\cdot, \cdot\}$ le crochet de Poisson, alors la quantité représentée par f est une constante de mouvement. Wigner conclut son article par la remarque suivante :

> Après une réflexion générale sur le sens des lois de conservation en mécanique quantique, nous avons abordé le lien entre la théorie des représentations et les lois de conservation. Les lois de conservation sont obtenues à partir de transformations unitaires qui laissent l'opérateur-énergie invariant. [80]

77. Ni Wigner, ni Weyl ne se réfèrent à l'article de Noether en 1927-1928. Wigner montrera à titre rétrospectif que ses réflexions sur les lois de conservation en mécanique quantique se situent dans le prolongement des travaux de Hamel (1904), Herglotz (1911), Engel (1916), Noether (1918) et Bessel-Hagen (1921) sur les symétries et les lois de conservation. Voir à ce propos E. Wigner, « Events, Laws of Nature, and Invariance Principles » (1964), in *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press, Bloomington et Londres, 1967, p. 47.

78. E. Wigner, « Über die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik », in *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1928, p. 375.

79. *ibid.*, p. 375.

80. *ibid.*, p. 381.

Si les « transformations unitaires » en question forment un groupe de Lie, alors les lois de conservation du système quantique étudié sont en correspondance biunivoque avec les générateurs infinitésimaux de ce groupe. Ce résultat relève des *fondements* de la mécanique quantique et il est d'abord établi par Wigner en toute généralité avant d'être reformulé de manière indépendante par Weyl dans certains cas. La ligne de démarcation entre Wigner et Weyl établie par Mackey est ainsi mise en défaut : Wigner s'appuie sur la théorie des groupes de Lie et des représentations de groupes pour résoudre ici des problèmes qui relèvent des fondements de la mécanique quantique.

Voyons ce qu'il en est dans le cas du groupe SO_3 des rotations dans l'espace usuel muni d'un repère orthonormé $Oxyz$. Il s'agit d'un *groupe de Lie*. En conséquence, Weyl l'analyse à titre d'exemple au cours du § 15 intitulé « remarques sur la théorie des groupes continus de transformations de Lie ».[81] Son analyse consiste à identifier les générateurs infinitésimaux de SO_3. Ce raisonnement mathématique a des conséquences physiques que Weyl souligne : des « constantes de mouvement » peuvent être associées aux générateurs infinitésimaux du groupe des opérateurs unitaires correspondant à SO_3.

Weyl montre en particulier que le groupe SO_3 est un groupe de Lie à trois paramètres dont trois générateurs infinitésimaux D_x, D_y et D_z peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$D_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices D_x, D_y et D_z forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_3$ de SO_3. Rappelons à ce titre que $\mathfrak{so}_3$ est constituée de l'ensemble des matrices carrées 3×3 antisymétriques, autrement dit

$$\mathfrak{so}_3 = \{X \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid X + {}^t X = 0\}.$$

Les matrices D_x, D_y et D_z satisfont aux relations suivantes :

$$[D_x, D_y] = D_z, \quad [D_y, D_z] = D_x, \quad [D_x, D_z] = D_y,$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le commutateur.

Aux trois générateurs infinitésimaux D_x, D_y, D_z de SO_3 correspondent trois opérateurs hermitiens $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ et $\hat{L}_z$; ils font partie de $\mathfrak{gl}(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ désigne l'espace des états du système et ils vérifient les relations de commutation :

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, \quad [\hat{L}_x, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_y.$$

81. H. Weyl, *The theory of groups and Quantum mechanics*, *op. cit.*, p. 175 à 180.

Il s'agit là des trois générateurs infinitésimaux du groupe $\mathcal{G}$ des opérateurs unitaires associé au groupe SO_3.[82] Le groupe $\mathcal{G} \subset U(\mathcal{E})$ est un groupe de Lie. Il s'agit plus précisément d'un groupe de symétries du système quantique étudié. En particulier, les éléments de $\mathcal{G}$ sont des opérateurs unitaires de symétrie du système ce qui s'exprime mathématiquement par le fait que tout élément $\hat{U}$ de $\mathcal{G}$ commute avec l'opérateur hamiltonien $\hat{H}$:

$$[\hat{U}, \hat{H}] = 0.$$

Or, si tous les éléments d'un groupe de Lie $\mathcal{G}$ commutent avec $\hat{H}$, alors les générateurs infinitésimaux de $\mathcal{G}$ commutent également avec $\hat{H}$. Autrement dit, M_x, M_y et M_z vérifient :

$$[\hat{L}_x, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{L}_y, \hat{H}] = 0, \quad [\hat{L}_z, \hat{H}] = 0.$$

Physiquement parlant, cela implique que les opérateurs $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ et $\hat{L}_z$ sont des *constantes de mouvement*, c'est-à-dire des opérateurs dont les valeurs propres restent constantes au cours du temps. De manière plus précise, $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ et $\hat{L}_z$ sont les composantes du moment cinétique.[83]

À l'instar de Weyl, on peut également s'appuyer sur le groupe $\mathcal{G}$ des opérateurs d'évolution $\hat{U}(t)$ pour en déduire la conservation de l'énergie en mécanique quantique non relativiste. Le groupe $\hat{U}(t)$ est isomorphe au groupe des translations dans le temps. C'est un groupe de Lie commutatif à un paramètre qui est engendré par le hamiltonien quantique $\hat{H}$. En effet, tout opérateur d'évolution vérifie :

$$\hat{U}(t) = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t)\right).$$

L'énergie est donc la quantité conservée associée à $\mathcal{G}$ puisque le hamiltonien est l'observable représentant l'énergie. Comme le groupe des translations dans le temps, qui n'est ni compact, ni semi-simple, est néanmoins commutatif, il admet la propriété de complète réductibilité ; toute représentation linéaire de ce groupe se réduit en une somme directe de représentations irréductibles qui sont toutes de dimension 1, comme le souligne Weyl.[84]

Les deux principes que nous venons d'énoncer — principe de Wigner et version quantique du premier théorème de Noether — montrent que Wigner et Weyl s'intéressent dans une égale mesure aux fondements de la mécanique quantique. Le principe de Wigner permet de classer les niveaux d'énergie d'un système et le premier théorème de Noether (version quantique) a pour but de formuler certaines lois de conservation pour un système quantique donné.

82. *ibid.*, p. 179.

83. *ibid.*, p. 179 : ≪ For reasons which will appear in the following chapter we call $[\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z]$ the components of *moment of momentum* ≫.

84. *ibid.*, p. 188 : ≪ Since we are dealing with a one-parameter Abelian group, (...) this reduction can be carried to the point in which all the constituent sub-spaces are 1-dimensional ≫.

Les représentations du groupe des rotations et la classification des états quantiques de l'atome d'hydrogène

Plus finement, les représentations de groupes peuvent être employées pour classer les *états quantiques* d'un système quantique. D'une manière générale, il s'agit d'associer à chaque état les valeurs d'un ensemble complet de *nombres quantiques*, ces derniers étant les valeurs propres d'observables, i.e. d'opérateurs hermitiens associés à des grandeurs physiques. Plusieurs nombres quantiques sont généralement nécessaires pour caractériser les états quantiques d'un système. Ils repèrent des valeurs propres d'observables $\hat{A}$ qui *commutent* entre elles et qui *commutent* avec le hamiltonien du système. La commutation entre les observables $\hat{A}$ correspond au fait que l'état quantique décrit doit être *vecteur propre commun* aux différents $\hat{A}$. Physiquement parlant, ceci permet une détermination « simultanée » de la mesure des valeurs des nombres quantiques associés à chacun des $\hat{A}$. Inversement, le *principe d'indétermination* de Heisenberg traduit la non-commutation entre certaines observables. *Un* ensemble d'observables qui commutent est dit *complet* s'il permet une caractérisation unique (à une phase près) des états quantiques du système étudié. Un tel ensemble n'est généralement pas unique.

L'objectif de Weyl et de Wigner est de parvenir à une telle caractérisation en employant le langage des représentations de groupes. Montrons comment ils parviennent à cette fin en appliquant l'étude des représentations du groupe des rotations à la description de l'atome d'hydrogène (en faisant abstraction du spin de l'électron et des effets relativistes). Nous avons établi que SO_3 n'est pas le groupe de symétries *complet* d'un tel système. Autrement dit, le sous-espace propre $\mathcal{E}_n$ pour la valeur propre E_n n'est pas irréductible sous l'action de SO_3. Néanmoins, les représentations irréductibles de SO_3 et de SO_2 interviennent de manière essentielle pour caractériser les états quantiques de l'atome d'hydrogène et rendre compte de ce que l'on appelle l'*effet Zeeman* normal.

Wigner aborde les représentations du groupe SO_3 dans un article intitulé « Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen » (1927). Pour préciser très schématiquement le contexte d'élaboration de cet article, faisons les trois remarques suivantes : (1) Wigner découvre la théorie des représentations des groupes finis et des groupes de Lie grâce à von Neumann en 1926-1928 ; (2) dans deux articles antérieurs, Wigner a déjà pu mesurer l'effectivité de la théorie des représentations du groupe symétrique pour décrire les systèmes à n électrons sans spin ; (3) sur les recommandations de von Neumann, il s'appuie sur les travaux de Schur et de Weyl de 1924 consacrés à la détermination des représentations irréductibles de SO_3. Pour sa part, Weyl connaît déjà les représentations de O_n et SO_n. Il

étudie le groupe SO_3 et ses représentations au cours des §§ 8 et 15 du chapitre III et dans le § 1 du chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

Supposons que l'on veuille décrire le comportement d'un électron sans spin dans un atome d'hydrogène. La vitesse de l'électron dans cet atome est environ cent fois plus faible que celle de la lumière. *En première approximation* il est donc possible de raisonner dans le cadre de l'espace-temps galiléen pour étudier cette particule. Le système quantique correspondant à un atome d'hydrogène peut s'interpréter géométriquement comme un espace *centré* autour du noyau formé par un proton dont la masse est très supérieure à celle de l'électron. Les propriétés géométriques qui caractérisent l'espace-temps galiléen se définissent notamment par leur invariance par translation dans l'espace, par translation dans le temps et par rotation dans l'espace. Mais, comme nous avons affaire à un espace centré, nous excluons l'invariance par translation dans l'espace. D'où la précision ajoutée par Weyl :

> The reader will perhaps have wondered why we consider only the virtual rotations of space and not the translations, which must also be taken into account in order to arrive at a complete description of the homogeneity of space. The reason for this is that in studying atoms or ions we treat only the electrons as particles, taking the nucleus as a fixed centre of force situated in the origin. That this is at least approximately correct is due to the fact that the mass of the nucleus is many times the mass of the electrons. Space is thereby transformed from a homogeneous into a centred space ; such a procedure naturally allow us to consider only atoms or ions, which have a single nucleus. [85]

Weyl souligne que cette description géométrique constitue déjà une idéalisation fondée sur une triple approximation : (i) on fait abstraction du spin de l'électron — que l'on peut caractériser intuitivement comme un moment cinétique interne à l'électron — ; (ii) on met de côté les effets relativistes qui font intervenir la constante c de manière essentielle, (iii) on considère l'atome d'hydrogène à partir du modèle d'un espace centré.

Il s'agit maintenant de caractériser les états quantiques d'un tel système. Pour ce faire, il est nécessaire de disposer d'un ensemble complet d'observables qui commutent entre eux, les valeurs propres de chacune de ces observables étant des nombres quantiques. Outre le hamiltonien $\hat{H}$ auquel est associé le nombre quantique principal n [86], on introduit L'opérateur correspondant au carré du moment cinétique orbital qui s'écrit $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$, où $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ et $\hat{L}_z$ sont ses composantes suivant les axes des x, des y et des z. Les opérateurs $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ sont des opérateurs hermitiens qui commutent entre eux, autrement dit

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0.$$

85. H. Weyl, *op. cit.*, p. 191.

86. Le nombre quantique principal est un entier strictement supérieur à zéro.

Il s'agit de résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \hat{L}^2|u\rangle &= \ell(\ell+1)|u\rangle \\ \hat{L}_z|u\rangle &= m|u\rangle \end{cases}$$

où les $\ell(\ell+1)$ sont les valeurs propres de $\hat{L}^2$, ℓ étant un entier vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$; les m sont les valeurs propres de $\hat{L}_z$, avec $m = -\ell, -\ell+1, ..., \ell-1, \ell$. Les nombres ℓ et m correspondent respectivement au nombre quantique *azimutal* (ou secondaire) et au nombre quantique *magnétique* (ou tertiaire). Le problème aux valeurs propres que nous venons de formuler consiste donc à rechercher le sous-espace propre $h^{(\ell,m)}$ de $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ pour les valeurs propres $\ell(\ell+1)$ et m. Wigner et Weyl établissent que ce sous-espace, qui est de dimension $2\ell+1$, s'identifie à l'espace sous-jacent à une représentation irréductible de SO_3 notée $\mathcal{D}_\ell$.[87] Pour être plus précis, Wigner et Weyl définissent un lien remarquable entre l'étude des représentations irréductibles de SO_3 et de SO_2 et les deux nombres quantiques ℓ et m qui permettent de caractériser l'état d'un système quantique à une particule sans spin, les effets relativistes étant tenus pour négligeables. Weyl établit ce lien au cours des §§ 1 et 2 du chapitre IV de son ouvrage. On le trouve également dans l'article de Wigner intitulé « Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen », (1927). Wigner et Weyl s'appuient sur ce cadre formel pour rendre compte de résultats qualitatifs issus de la spectroscopie, en particulier l'*effet Zeeman normal*.

Supposons que le vecteur qui décrit l'état du système fasse partie de l'espace $\mathcal{E}_n$ engendré par les vecteurs propres de $\hat{H}$ pour la valeur propre E_n, cet espace $\mathcal{E}_n$ étant supposé de dimension finie. La représentation de SO_3 qui admet $\mathcal{E}_n$ comme espace sous-jacent n'est pas irréductible étant donné que SO_3 n'est pas le groupe de symétries complet de ce système. Il se décompose comme suit :

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{D}_{n-1},$$

87. Pour une caractérisation des représentations irréductibles de SO_3, nous renvoyons le lecteur à la sous-section 2.1.1 de la présente partie. Précisons le lien entre les espaces propres communs à $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ et les représentations irréductibles de SO_3. En coordonnées sphériques, on a :

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right).$$

On rappelle que l'espace $\widetilde{H}^\ell$ des harmoniques sphériques est l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré ℓ à coefficients complexes sur $\mathbb{S}^2$ annulant le laplacien. L'espace vectoriel $\widetilde{H}^\ell \subset L^2(\mathbb{S}^2)$ est de dimension $2\ell+1$. Il s'agit précisément de l'espace propre commun aux opérateurs $\hat{L}_z$ et $\hat{L}^2$ et de l'espace sous-jacent à une représentation irréductible de SO_3.

où les $\mathcal{D}_\ell$ désignent les espaces sous-jacents aux représentations irréductibles de SO_3 pour $\ell = 0, ..., n-1$. Pour mesurer qu'il ne s'agit pas là d'un pur artifice formel dénué de signification empirique, Weyl précise qu'en l'absence de perturbation par un champ magnétique extérieur, les $2\ell+1$ états définis par n, ℓ et $m = -\ell, ..., \ell$ ont le même niveau d'énergie E_n. En revanche, en présence d'un champ magnétique extérieur le long de l'axe des z, le niveau E_n se décompose en $2\ell+1$ sous-niveaux séparés par des intervalles égaux. Il s'agit là de l'*effet Zeeman* normal.

> Le nombre quantique m, qui est susceptible d'admettre les valeurs $[\ell, \ell-1, ..., -\ell]$ permet ainsi de caractériser ces composantes. Sans doute la perturbation la plus importante en termes de symétrie axiale correspond-elle à celle qui est due à un champ magnétique homogène dans la direction de l'axe des z (*effet Zeeman*) ; pour cette raison, m s'appelle le *nombre quantique magnétique.* [88]

Ces résultats *qualitatifs* issus de la spectroscopie se mathématisent comme suit dans la théorie des représentations de groupes. En présence d'un champ magnétique extérieur le long de l'axe des z, on observe une réduction des symétries du système étudié : on passe de SO_3 à SO_2 qui correspond au groupe des rotations autour de l'axe des z. Or, SO_2 est commutatif, ses représentations irréductibles sont donc de dimension 1. En conséquence, la représentation irréductible $\mathcal{D}_\ell$ de SO_3 se décompose en $2\ell+1$ représentations $\mathcal{D}^{(m)}$ de SO_2, avec $m = \ell, \ell-1, ..., -\ell$; les représentations $\mathcal{D}^{(m)}$ de SO_2 sont irréductibles et de dimension 1. [89] Tous ces résultats sont établis de manière indépendante par Wigner dans un article de 1927 intitulé ≪ Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen ≫.

L'exemple de SO_3 confirme l'argument fondamental sur lequel Weyl se fonde pour justifier le recours à la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique :

> À l'exception du nombre quantique dit principal [à savoir n], tous les nombres quantiques sont des indices caractérisant des représentations de groupes. [90]

On peut relativiser le début de cette citation. En effet, le principe de Wigner met en évidence la pertinence de la théorie des représentations linéaires de groupes dans la classification des niveaux d'énergie d'un système quantique. Ainsi, Weyl et Wigner font le parallèle entre les nombres quantiques azimutal et magnétique d'une part, l'étude des représentations

88. *ibid.*, p. 192-193.

89. *ibid.*, p. 193 : ≪ Our analysis shows that the breaking up of energy levels due to an axially symmetric perturbation parallels the reduction of an irreductible representation of the rotation group $\mathfrak{d}_3$ when this is restricted to the group $\mathfrak{d}_2$ of rotations about the z-axis : by this $\mathcal{D}_j$ is reduced into the $2j+1$ one-dimensional representations which we have previously denoted by $\mathcal{D}^{(m)}$ ≫.

90. *ibid.*, p. xxi.

irréductibles de SO_3 et de SO_2 d'autre part dans le cas de l'atome d'hydrogène. La théorie des représentations de groupes intervient également pour rendre raison de résultats *qualitatifs* issus de la spectroscopie auxquels Weyl est tout aussi sensible que Wigner.

La ligne de démarcation entre Weyl et Wigner établie par Mackey est une nouvelle fois prise en défaut : Weyl s'appuie sur la théorie des représentations de groupes pour rendre raison de données expérimentales concrètes, comme en témoigne la référence à l'*effet Zeeman* normal. L'exemple du groupe des rotations permet donc de souligner la convergence entre les travaux de Weyl et de Wigner / von Neumann. Il est réducteur de penser que Weyl raisonnerait exclusivement en mathématicien, alors que Wigner raisonnerait en physicien-théoricien. En effet, la monographie de Weyl témoigne de son intérêt pour certains résultats expérimentaux en mécanique quantique ; inversement la monographie de Wigner contient également une étude de la théorie des représentations de groupes pour elle-même. En outre, nous avons suffisamment montré que Wigner est attentif aux fondements de la mécanique quantique. De manière symétrique, Weyl ne délaisse pas les données qualitatives issues de la spectroscopie. Enfin, chez Weyl comme chez Wigner, les représentations de groupes ne constituent pas un artifice formel qui viendrait se surajouter aux autres formalismes. Déjà dans le cas de l'atome d'hydrogène sans l'hypothèse du spin de l'électron, le principe de Wigner permet une classification des *niveaux d'énergie* et l'étude des représentations irréductibles de SO_3 et SO_2 préside à la détermination des différents *états quantiques*, spécifiés par les nombres quantiques ℓ et m. La question est de savoir si ce fait peut être généralisé à des systèmes plus complexes. Tel est justement l'objectif que se fixent Weyl et Wigner et qu'ils réalisent indépendamment l'un de l'autre en 1927-1928. Une description des motivations et de la structure de la monographie de Weyl éclaire ce point.

3.2.2 Motivations et structure de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*

Comparaison avec *Raum, Zeit, Materie*

Avant la parution de la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928), Weyl entretient des rapports avec divers chercheurs engagés dans la mathématisation de la mécanique quantique. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous pouvons mentionner l'existence d'une correspondance avec Born et Jordan dès 1925, des entretiens avec Schrödinger à Zürich jusqu'au départ de Schrödinger pour Berlin en 1927, une correspondance avec Pauli qui intègre l'ETH de Zürich en 1928 et qui a manifestement relu les épreuves de *Gruppentheorie*

und Quantenmechanik, ces dernières ayant également été corrigées par von Neumann. Si Weyl connaît les avancées substantielles effectuées par Dirac en mécanique quantique relativiste, qui sont d'ailleurs reprises dès la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, il évoque plus indirectement les travaux de von Neumann et de Wigner consacrés aux applications de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique. Nous ne pouvons donc pas adhérer à un schéma linéaire qui consisterait à affirmer que *Gruppentheorie und Quantenmechanik* est la résultante d'une influence de Wigner sur Weyl. En réalité, les sources utilisées par Weyl sont extrêmement diverses et elles reflètent également la complexité des réseaux de chercheurs travaillant sur la mécanique quantique entre 1925 et 1928. S'il est vrai que certains résultats établis par Weyl dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik* recouvrent ceux que Wigner et von Neumann formulent en 1927-1928, il semble néanmoins que Weyl commence par suivre une voie tout à fait spécifique avec la publication de son premier article sur la mécanique quantique qui précède de peu sa grande monographie.

Comme nous l'avons déjà souligné lorsque nous avons abordé les travaux de Jordan et Born, Weyl cherche tout d'abord à saisir les fondements de la relation $PQ - QP = h/2\pi i I$ en s'appuyant sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie. Tel est d'ailleurs l'objectif principal de son article « Quantenmechanik und Gruppentheorie » dont E. Scholz a analysé en détail le contenu et la réception à court et à plus long terme.[91] Parmi les innovations introduites par Weyl dans cet article, nous pouvons signaler l'usage systématique des représentations *projectives* de groupes qui ont été étudiées pour la première fois par Schur en 1904 et en 1907. Ceci vient du fait que les fonctions d'onde sont définies *à une phase près*. Pour anticiper sur la seconde théorie de jauge — initiée par Schrödinger, Fock et London, avant d'être développée par Weyl lui-même — signalons qu'elle consiste à associer la conservation de l'électricité à l'invariance par *changement de phase* d'une fonction d'onde décrivant une particule chargée. Ainsi, Weyl écrit :

> Il s'avère qu'en mécanique quantique, seules les droites, et non les vecteurs, ont une signification ; elles décrivent les différents états purs. Nous passons donc au *point de vue homogène*, pour lequel la matrice unitaire U ne désigne pas une application du corps des vecteurs mais du corps des droites (Strahlenkörper) et coïncide en conséquence avec l'application εU. Le mot représentation doit être entendu à l'avenir au sens d'une *représentation fidèle par les déplacements du corps des droites*. On caractérise dorénavant cela par la condition :
>
> $$U(s)U(t) \simeq U(st).$$
>
> On peut fixer le facteur quelconque ε en chaque $U(s)$ comme on l'entend (« jauge »). L'égalité

91. E. Scholz, « Introducing groups into quantum theory », *op. cit.*, p. 465-469.

[ci-dessus] doit être interprétée comme suit :

$$U(s)U(t) = \delta(s,t)U(st),$$

où δ est un nombre de module 1 dépendant de s et de t.[92]

Si donc on adopte le cadre des représentations projectives de groupes, certaines propriétés, valables dans le cas des représentations linéraires de groupes, cessent d'être vérifiées. Weyl donne l'exemple suivant : les représentations *linéaires* irréductibles d'un groupe abélien sont toutes de dimension 1. Ceci n'est pas vrai dans le cas des représentations projectives, sauf si le groupe (fini) en question est cyclique, i.e. s'il est engendré par un seul élément. Weyl donne l'exemple du ≪ Vierergruppe ≫ qui constitue l'exemple le plus simple d'un groupe (fini) abélien non cyclique. Les quatre éléments 1, a, b et c sont assujettis aux relations :

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1,$$

$$bc = cb = a, \quad ca = ac = b, \quad ab = ba = c.$$

Il introduit la représentation projective du *Vierergruppe* définie par

$$U(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(b) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad U(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$U(a)$, $U(b)$ et $U(c)$ sont les trois matrices de Pauli auxquelles s'ajoute la matrice identité. Weyl montre qu'il s'agit là d'une représentation projective irréductible du Vierergruppe. Il reprend et développe ces résultats au cours du § 16 (chapitre III) de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* et il les applique à la mécanique quantique à la fin du chapitre IV. Comme le montre E. Scholz, l'usage des représentations projectives de groupes en mécanique quantique ne sera pleinement mis en valeur qu'avec les travaux publiés par Mackey dès la fin des années 40. Ce dernier reconnaîtra alors les vertus programmatiques de l'article de Weyl de 1927.[93]

Sa monographie de 1928 est beaucoup plus ambitieuse : elle dresse un vaste panorama des concepts mathématiques et des résultats physiques attachés à la mécanique quantique. Elle est à l'image des relations complexes d'interdépendance entre Weyl et d'autres acteurs tels que Jordan, Born, Schrödinger, von Neumann, Pauli, etc. De plus, elle constitue un analogue de ce que Weyl avait déjà effectué dans le cas de la relativité générale avec la publication

92. H. Weyl, ≪ Quantenmechanik und Gruppentheorie ≫, *Zeitschrift für Physik*, **46**, 1928, p. 18-19.

93. E. Scholz, *ibid.*, p. 468 : ≪ G. Mackey took up Weyl's representation theoretic perspective and developed it into a broader program for the study of *irreductible projective representations* as a starting point for a more structural understanding of quantum physical systems ≫.

des cinq éditions de *Raum, Zeit, Materie* entre 1918 et 1923. Ce parallèle est d'ailleurs établi dans la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* :

> Pour la seconde fois, j'ai l'audace de faire paraître un ouvrage qui relève seulement pour moitié des mathématiques — mon champ disciplinaire — et pour l'autre de la physique. Les circonstances extérieures ne sont pas très éloignées de celles d'où résulta en son temps le livre *Raum, Zeit, Materie*. Durant le semestre d'hiver 1927-1928, Zürich [i.e. l'université et l'ETH] s'est vue privée de physique théorique avec les départs simultanés de Debye et de Schrödinger. J'ai tenté de m'engouffrer dans la brèche en transformant des leçons sur la théorie des groupes en leçons sur la théorie des groupes et la mécanique quantique. [94]

Ainsi, Weyl se définit comme un mathématicien qui a « l'audace » de s'occuper de physique. En 1918, cette audace était devenue témérité avec le projet d'une théorie unifiée des champs. Dans ce passage, il met surtout en valeur certaines similitudes entre ces deux monographies qu'il convient de relever précisément. Celles-ci se situent à deux niveaux : l'architecture d'ensemble des deux ouvrages et les lecteurs implicites visés. En effet, *Raum, Zeit, Materie* (quatrième édition) est composée de la manière suivante : le premier chapitre est consacré à des concepts fondamentaux en algèbre linéaire et en géométrie euclidienne ; le second chapitre a pour objet les géométries non-euclidiennes, la géométrie riemannienne, la géométrie purement infinitésimale de Weyl suivie de la résolution partielle du problème de l'espace ; le troisième chapitre est dévolu à la théorie de la relativité restreinte ; le dernier chapitre à la relativité générale et à la théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique (de Weyl). Les concepts mathématiques nécessaires à la formalisation de ces deux théories sont donc présentés avant que ne soit abordé leur « contenu » physique. *Raum, Zeit, Materie* est donc un ouvrage de physique mathématique qui s'adresse aussi bien à des physiciens qu'à des mathématiciens. Discuté étroitement par Cartan qui souhaite généraliser, approfondir et clarifier les contributions de Weyl en géométrie différentielle, l'ouvrage est également consulté par de nombreux physiciens — dont Schrödinger qui, dès 1921-1922, entend adapter la théorie de jauge de Weyl au contexte de la théorie des quanta.

Cet argument est également valable dans le cas de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Le plan adopté par Weyl est plus alterné que dans *Raum, Zeit, Materie* : la première partie, qui est d'ordre purement mathématique, est consacrée à la géométrie unitaire et aux espaces de Hilbert ; la seconde partie, qui relève essentiellement de la physique, présente les fondements de la mécanique quantique ; la troisième partie appartient de nouveau aux mathématiques pures, Weyl aborde alors tour à tour la théorie des groupes, des représentations des groupes finis et des groupes compacts mais aussi la théorie des groupes et des algèbres de

94. H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (première édition), Leipzig, éd. Hirzel, 1928, p. V.

Lie ; la quatrième partie constitue une synthèse des applications de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique, les situations envisagées par Weyl étant de plus en plus complexes — particule sans spin, avec spin, avec effets relativistes, etc. ; enfin, la dernière partie apparaît comme une vaste synthèse : Weyl fait le lien entre les représentations irréductibles du groupe symétrique et du groupe linéaire (dualité de Schur-Weyl) et il propose plusieurs applications de cette théorie pour étudier les systèmes à n particules indiscernables et pour comprendre la structure des molécules (chimie quantique). Dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik* comme dans *Raum, Zeit, Materie*, Weyl vise un public de physiciens et de mathématiciens. La structure d'ensemble de la monographie de Weyl sur la mécanique quantique ne sera pas modifiée de manière substantielle. Seul le chapitre V sera complété et remanié pour gagner en simplicité.

Mais ces similitudes ne doivent pas nous faire perdre de vue certaines différences essentielles. Dans *Raum, Zeit, Materie*, Weyl proposait une vision de l'histoire de la géométrie différentielle et de la relativité générale par filiations ; il se fondait alors sur deux figures tutélaires, à savoir Riemann et Einstein ; son point de vue était donc fortement teinté d'hagiographie. La donne change considérablement avec la parution de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* : Weyl n'invoque pas la paternité d'un scientifique en particulier lorsqu'il aborde le développement de la mécanique quantique. Il est lui-même inscrit dans un ensemble complexe de relations d'interdépendance avec une multiplicité d'acteurs (Schrödinger, Born, Jordan, von Neumann, Pauli, etc.) ; il est donc rigoureusement impossible de polariser la mécanique quantique autour d'une figure en particulier. Au début du chapitre II de son ouvrage, il ne surdétermine pas la place des travaux de Planck à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle dans le développement de la théorie des quanta, comme en atteste le passage suivant :

> The idea of quantized exchange of energy, which occurs in Planck's derivation somewhat schematically and only in application to statistical thermodynamical consequences, was first seriously applied to individual atomic processes by Einstein. [95]

Weyl rappelle le contexte théorique dans lequel Planck énonce l'hypothèse des quanta, ce qui a immédiatement pour effet de « relativiser » les contributions de Planck, étant donné qu'elles prennent tout leur sens après avoir été complétées en 1905 par celles d'Einstein. *A fortiori*, il est acquis que la mécanique quantique n'a pas « un » père fondateur en particulier et qu'elle s'enracine dans divers centres de recherche : Göttingen, Münich, Copenhague, Zürich, Cambridge, etc. avec lesquels Weyl entretient des liens plus ou moins étroits. En outre, la tonalité des arguments de Weyl est moins passionnée que dans *Raum, Zeit, Mate-*

95. H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, *op. cit.*, p. 42.

rie ; les incursions philosophiques se font plus rares et elles ne renvoient pas explicitement à la phénoménologie de Husserl, ce qui ne signifie pas que Weyl se détournerait de cette philosophie. Plus généralement, à partir de la seconde moitié des années 20, Weyl est moins enclin à confronter écriture philosophique et écriture mathématique dans un même livre ou dans un même article.

S'il a une portée moins ouvertement philosophique que *Raum, Zeit, Materie*, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* n'en laisse pas moins de relever également de la physique mathématique. Il ne faut pas oublier qu'il s'agit là de l'une des toutes premières monographies sur la mécanique quantique. L'enjeu est ici stratégique de la part de Weyl : il s'agit de faire valoir au plus tôt les méthodes de la théorie des groupes en mécanique quantique. L'ouvrage est construit de telle sorte que la théorie des représentations de groupes et la mécanique quantique soient indissolublement liées. L'objectif de Weyl est donc triple : (1) faire la synthèse des dernières avancées en mécanique quantique (hypothèse du spin, problème à n corps, unification avec la relativité restreinte) ; (2) rendre la théorie des groupes et des représentations de groupes accessible à un public de physiciens qui n'est manifestement pas habitué à ce cadre conceptuel ; (3) répertorier toutes les applications connues de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique.

Si les deux éditions de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* sont la résultante de cours donnés par Weyl à Zürich en 1927-1928, à Princeton en 1928-1929 et à Göttingen en 1930-1931, il semblerait réducteur de penser que cet ouvrage, d'un abord plutôt difficile, aurait une fonction strictement pédagogique. En réalité, il s'agit d'un livre théorique qui reflète une théorie en construction entre 1925 et 1928. En outre, Weyl présente un vaste panorama des usages des représentations de groupes en mécanique quantique. Nous pouvons ici reprendre la classification effectuée par M. Schneider dans sa thèse. Elle a dégagé quatre champs d'application de la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique entre 1926 et 1930 auxquels elle associe les acteurs suivants : (a) explication qualitative des spectres d'atomes et de molécules [Heisenberg, Wigner, von Neumann, Weyl, Witmer] ; (b) fondements de la mécanique quantique [Weyl, Wigner] ; (c) équation d'onde de Dirac introduite pour unifier de manière cohérente la mécanique quantique et la relativité restreinte [von Neumann, Weyl] ; (d) formation et description de la structure des molécules [Weyl, Heitler, London]. [96] Les points (a), (b) et (c) sont abordés dans le chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, le point (d) au cours du chapitre V. Autrement dit, Weyl se singularise par le fait qu'il synthétise *toutes* les applications connues de la théorie des groupes et des

96. M. Schneider, *op. cit.*, p. 41.

représentations de groupes à la mécanique quantique. Ainsi, son « souci d'exhaustivité » que nous avions mis en évidence dans notre introduction générale se manifeste à deux niveaux dans cette monographie : (i) au niveau des dernières avancées en mécanique quantique, (ii) au niveau des applications connues de la théorie des groupes à la mécanique quantique.

Les représentations de groupes pour unifier la mécanique quantique

Si l'on analyse plus finement la structure de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, l'alternance entre chapitres de mathématiques et de physique doit être étudiée à la lumière d'une tentative d'unification de la mécanique quantique à partir de sa mathématisation. La question de l'*unité* de la mécanique quantique polarise les recherches de Weyl en physique mathématique à partir de la seconde moitié des années 20 et elle constitue un fil conducteur pour proposer une lecture synoptique de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* qui, au premier abord, invite le lecteur à pratiquer un parcours sinueux au cours duquel quatre types d'éléments varient conjointement : (1) concepts mathématiques, (2) résultats qualitatifs issus de la spectroscopie, (3) cadres théoriques de référence, (4) complexité des systèmes quantiques étudiés. Pourtant, le plan adopté par Weyl est parfaitement ordonné et, si l'on s'en tient aux quatre premiers chapitres, on peut dire que la mécanique quantique relativiste de Dirac constitue le but auquel il s'agit d'aboutir et qu'il convient d'éclairer à partir de l'étude des représentations irréductibles du groupe de Lorentz.

Encore faut-il préciser ce que nous entendons par « unité » de la mécanique quantique. On peut donner au moins quatre sens à cette expression. (1) L'unité peut tout d'abord se rapporter au *formalisme* de la mécanique quantique non relativiste ; on montre alors que la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan et la mécanique ondulatoire de Schrödinger sont le recto et le verso d'un même cadre mathématique défini *a priori*. Tel était l'objectif de von Neumann dans sa « mathematische Begründung der Quantenmechanik » dont Weyl se fait l'écho au cours du chapitre I de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. (2) En un autre sens, l'unité consiste à embrasser une diversité de résultats expérimentaux dans un même cadre théorique. On sait que cette unité n'est par exemple pas garantie en mécanique quantique non relativiste tant que l'on ne fait pas l'hypothèse du spin de l'électron, laquelle s'avère nécessaire pour expliquer l'*effet Zeeman anomal*. Cette unité suppose une confrontation systématique de la théorie aux données de l'expérience afin de mesurer si et pour quelles raisons elle laisse certains faits empiriques inexpliqués. (3) L'unité d'une théorie ne se joue pas seulement au niveau des résultats expérimentaux qu'elle embrasse, mais aussi au niveau des types de systèmes physiques auxquels elle s'applique. La question est par exemple de

savoir comment la mécanique quantique non relativiste peut s'adapter à l'étude de systèmes faisant intervenir n particules indiscernables. (4) Enfin, l'unité porte sur les théories physiques elles-mêmes. Il s'agit si possible de les fondre dans une seule et même théorie qui vient en quelque sorte les surplomber. Tel est l'objectif de la mécanique quantique relativiste de Dirac puisqu'elle unifie la mécanique quantique et la relativité restreinte. Ainsi, l'unité d'une théorie peut se rapporter aux formalismes dont elle dépend, aux données expérimentales qu'elle explique, aux systèmes physiques qu'elle étudie et aux rapports qu'elle entretient avec d'autres théories.

On peut justement décliner ces quatre usages de l'unité en mécanique quantique pour saisir la structure d'ensemble de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* de Weyl. En effet, après avoir fait des rappels sur les espaces vectoriels, le calcul matriciel, les espaces de Hilbert et les opérateurs sur un espace de Hilbert (chapitre I), Weyl synthétise les résultats, les formules et les fondements de la mécanique quantique non relativiste en traitant d'un seul tenant les formalismes de Schrödinger et de Heisenberg-Born-Jordan (chapitre II). On peut donc dire que le chapitre II de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* scelle l'unité entre la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire. Au cours du chapitre IV, Weyl modifie de proche en proche le cadre théorique sur lequel il se fonde en fonction (a) des résultats qualitatifs qu'il doit intégrer et (b) des systèmes de plus en plus complexes qu'il souhaite embrasser. Ainsi, au cours du § 2, il aborde l'effet Zeeman normal dans le cas d'un système comportant un électron sans spin ; dans le § 4 il étudie l'hypothèse du spin de l'électron et il rend raison de l'effet Zeeman anomal ; à partir du § 9 il aborde des systèmes comportant n particules indiscernables. Il aboutit ainsi à une théorie de plus en plus unifiée en fonction de la diversité des données qu'elle explique et des systèmes auxquels elle s'applique. Enfin, dès le § 5, Weyl participe à l'unification de la *mécanique quantique* et de la *relativité restreinte*. Cette unification entraîne une série de contraintes : il s'agit en particulier de formuler une équation invariante de Lorentz — en vertu de la relativité restreinte — qui satisfasse également aux réquisits de la mécanique quantique. Seule l'équation de Dirac satisfait à cette double contrainte.

Ainsi l'unité de la mécanique quantique non relativiste au sens (1) est abordée au cours du chapitre II, l'unité de la mécanique quantique aux sens (2), (3) et (4) est abordée au cours du chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Alors que les concepts mathématiques issus de l'algèbre linéaire et de l'analyse fonctionnelle sont suffisants pour aborder le chapitre II, la théorie des représentations de groupes est omniprésente au cours du chapitre IV. Ainsi, la théorie des groupes et des représentations de groupes concourt de manière substantielle à l'unification de la mécanique quantique selon Weyl : le groupe SU_2 et son algèbre de

Lie $\mathfrak{su}_2$ interviennent dans la mathématisation du *spin* de l'électron ; les représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sont investies pour traiter des systèmes comportant n particules indiscernables ; enfin le groupe spécial de Lorentz et ses représentations jouent un rôle essentiel en mécanique quantique relativiste. La théorie des groupes et des représentations de groupes permet de traiter de manière homogène les diverses innovations dues à Heisenberg, Uhlenbeck, Goudsmit, Pauli ou encore Dirac entre 1925 et 1928. Pour le dire de manière schématique, les représentations de groupes nous permettent de savoir *comment* Weyl unifie les différents aspects du développement de la mécanique quantique au cours de la seconde moitié des années 20.

La question de l'unité en physique mathématique n'est pas neuve dans l'œuvre de Weyl : elle est déjà centrale en 1918 avec la publication des deux articles intitulés respectivement « Gravitation und Elektrizität » et « Reine Infinitesimalgeometrie » qui marquent le point de départ du projet weylien d'une théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique. Dans ces deux articles, Weyl introduit une géométrie *purement* infinitésimale qui sert de cadre à une unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. Les inconséquences d'une telle théorie sont rapidement soulignées par Einstein, avant d'être relayées sous des modalités différentes par Hilbert, Reichenbach, Eddington ou encore Pauli. Dans ses articles de 1918 comme dans les troisième et quatrième éditions de *Raum, Zeit, Materie*, Weyl attribue à sa géométrie purement infinitésimale une position de surplomb par rapport à la théorie unifiée des champs. Il tente de déduire sa théorie unitaire à partir de cette généralisation de la géométrie riemannienne. D'où la critique de Reichenbach selon laquelle Weyl adopterait une position *aprioriste* en 1918.

Dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, on ne peut pas dire que les représentations de groupes occupent une position de surplomb par rapport à la mécanique quantique. En réalité, Weyl s'appuie sur elles pour éclairer de proche en proche les aspects les plus complexes de la mécanique quantique. En outre, au cours du chapitre IV il revient systématiquement sur une série de données expérimentales issues de la spectroscopie, sans doute afin que son travail de formalisation de la mécanique quantique demeure attaché au socle de l'empirie. Par extension, bien que Weyl se situe sur le terrain de la physique mathématique lorsqu'il publie *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, nous ne pouvons pas dire qu'il souscrit à une forme d'*apriorisme* qui consisterait à déduire régulièrement une théorie physique à partir d'un cadre mathématique posé *a priori*.

Cette remarque nous permet déjà d'anticiper sur les différences qui séparent la première théorie de jauge de Weyl (1918) et sa seconde théorie de jauge (1928) — largement inspirée

par Schrödinger, Fock et London — qu'il aborde dans le chapitre II, § 12 et dans le chapitre IV, § 5 de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Son article de 1929 intitulé « Elektron und Gravitation » est d'ailleurs entièrement consacré à cette seconde théorie de jauge, avec des prolongements très hypothétiques à la relativité générale. Outre leurs similitudes formelles, ces deux théories de jauge admettent au moins un autre point commun : toutes deux ont une vertu *unificatrice* — unification de la gravitation et de l'électricité dans le premier cas, unification de l'électricité et des ondes de matière dans le second cas. Pourtant, en 1928 Weyl se montre très vigilant quant aux conséquences empiriques de sa seconde théorie de jauge, ce qui signifie qu'il n'envisage pas le rapport entre physique et mathématiques de la même manière qu'en 1918.

3.2.3 Justifications de Weyl, von Neumann et Wigner en faveur des méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique

Malgré les réticences de Schrödinger, Sommerfeld et la franche hostilité de Born et Slater, l'usage même de la théorie des groupes et des représentations de groupes n'a, à vrai dire, rien de neuf en physique théorique et en physique mathématique. En effet, la mathématisation de la cristallographie fait intervenir explicitement des groupes finis et infinis discrets dès le dernier tiers du XIX^{e} siècle. Nous pensons aux travaux inauguraux de Sohncke, mais surtout aux contributions décisives de Schönflies et Fedorov à la fin des années 1880 et au début des années 1890.[97] Les applications de la théorie des groupes finis à la cristallographie sont d'ailleurs présentées dans l'ouvrage de référence d'A. Speiser intitulé *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (1923). D'un point de vue mathématique, l'ouvrage de Speiser résume les principaux théorèmes en théorie des groupes finis et des représentations des groupes finis. Ce livre est connu de Wigner et de Weyl au moment où ils publient leurs premiers articles consacrés aux applications de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique.

Le développement de la relativité restreinte permet de préciser l'importance de la théorie des groupes et des algèbres de Lie en physique théorique. Ainsi, en 1905 Poincaré et Einstein formulent indépendamment l'un de l'autre les transformations dites de Lorentz qui permettent de passer d'un référentiel inertiel à un autre et ils montrent que l'ensemble de ces transformations forment un groupe. Il s'agit là d'un groupe de Lie dépendant de

97. Pour plus de détails, voir en particulier E. Scholz, *Symmetrie, Gruppe, Dualität*, Berlin, Basel, Boston, éd. Birkhäuser, 1989.

six paramètres. En 1910, Klein tire parti de l'importance du groupe de Lorentz dans la mathématisation de la relativité restreinte pour proposer une reformulation du principe de relativité : il s'agit fondamentalement d'un principe d'invariance sous l'action d'un groupe continu de transformations. En 1911, Herglotz déduit les 10 lois de conservation en relativité restreinte à partir des dix générateurs infinitésimaux du groupe de Poincaré, i.e. le produit semi-direct du groupe de Lorentz par $\mathbb{R}^4$. Engel propose un raisonnement similaire en 1916 pour parvenir aux dix lois de conservations associées aux dix générateurs infinitésimaux du groupe de Galilée en mécanique classique. En 1918, l'article de Noether intitulé *Invariante Variationsprobleme* synthétise à un niveau de généralité remarquable les applications de la théorie des groupes et des algèbres de Lie dans une diversité de contextes théoriques : mécanique classique, relativité restreinte et relativité générale. Ainsi, avant même le développement de la mécanique quantique, l'importance de la théorie des groupes de Lie est déjà reconnue par Klein, Noether, Engel, Herglotz ou encore Weyl en relativité restreinte et / ou en relativité générale.

Pourtant, l'utilisation des représentations des groupes et des algèbres de Lie ne s'est pas faite « naturellement » en mécanique quantique. En effet, les premières applications de la théorie des groupes et des représentations de groupes à la mécanique quantique concernent le problème à n particules (indiscernables) qui fait intervenir un groupe fini, à savoir $\mathfrak{S}_n$. En outre, en 1927 Wigner semble encore largement méconnaître les applications spectaculaires de la théorie des groupes de Lie en relativité restreinte et en relativité générale. Il ne mentionne guère que la cristallographie comme champ théorique dans lequel la théorie des groupes intervient de manière essentielle. Or, en cristallographie, seuls comptent les groupes finis et les groupes infinis discrets. Wigner suit les conseils de von Neumann et il se forme à la théorie des représentations des groupes continus en consultant les articles de Schur et Weyl de 1924 consacrés à la classification des représentations irréductibles de SO_n et de O_n. Wigner parcourt également l'article monumental de Weyl sur les représentations linéaires des groupes de Lie complexes semi-simples. Dans le cas de Weyl, la situation est quelque peu différente : il a participé à la mathématisation de la relativité générale, il a manifestement parcouru les travaux de Noether et Klein sur le statut des lois de conservation en mécanique classique et en relativité restreinte d'une part, en relativité générale d'autre part puisqu'il les mentionne dans la troisième édition de *Raum, Zeit, Materie*. Autrement dit, il sait déjà l'importance de la théorie des groupes de Lie en la relativité restreinte — qu'il aborde dans le chapitre III de *Raum, Zeit, Materie* — et en relativité générale — qu'il décrit de manière exhaustive dans le chapitre IV de *Raum, Zeit, Materie*, avant de se consacrer à son projet de théorie unifiée

des champs. En outre, la série d'articles qu'il publie en 1925-1926 sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples attestent de sa profonde connaissance de la théorie des représentations des groupes de Lie à un degré de technicité et de généralité remarquables, sans toutefois que soit évoqué leur possible usage en physique mathématique. Pour autant, dans son introduction à *Gruppentheorie und Quantenmechanik* comme dans le chapitre III de ce même ouvrage, Weyl soutient la même opinion que Wigner : avant l'avènement de la mécanique quantique, les principales applications de la théorie des groupes en physique se situent dans le domaine de la cristallographie. Ainsi, dans son introduction, on peut lire :

> Until the present, its most important application to natural science lay in the description of the symmetry of crystals, but it has been recognized that group theory is of fundamental importance for quantum physics. [98]

Au cours du § 1 du chapitre III, après avoir évoqué le *Programme d'Erlangen* de Klein, Weyl formule exactement le même argument :

> The most wonderful symmetrical structures are exhibited in crystals, the symmetry of which is described by those congruency transformations of Euclidean space which bring the atomic lattices of the crystal into coïncidence with themselves. The most important application of group theory to natural science heretofore has been in this field. [99]

À deux reprises, il évoque avec insistance la cristallographie et il ne dit mot sur les applications de la théorie des groupes ne serait-ce qu'en relativité restreinte. Ceci constitue un triple motif d'étonnement. (1) En 1910, Klein s'appuie sur le *Programme d'Erlangen* afin de faire ressortir l'importance de la théorie des groupes pour formaliser aussi bien la mécanique classique que la mécanique relativiste. On peut donc s'interroger sur les motivations qui poussent Weyl à dériver vers la cristallographie après avoir évoqué le *Programme d'Erlangen*. (2) Dans les chapitres III et IV, Weyl étudie le groupe de Lorentz et ses représentations dans la mesure où il aborde les fondements de la mécanique quantique relativiste qui constitue rien moins qu'une unification de la mécanique quantique et de la relativité restreinte. (3) Il existe une série non négligeable de publications sur les applications de la théorie des groupes et des algèbres de Lie en relativité restreinte, mais aussi en relativité générale dans les années 10 et au début des années 20.

La question est donc de savoir pourquoi Weyl met à ce point l'accent sur la cristallographie au détriment d'autres théories physiques pour montrer l'effectivité de la théorie des groupes en physique. L'hypothèse la plus plausible nous semble être la suivante : une histoire

98. H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, *op. cit.*, p. xxi.
99. *ibid.*, p. 113.

officielle des applications de la théorie des groupes à la physique se met en place dans les années 20 après la publication de l'ouvrage de Speiser intitulé *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*. Or, Speiser insiste justement sur l'importance de la théorie des groupes finis en cristallographie. Il exclut de fait la relativité restreinte et la relativité générale qui font intervenir des groupes continus de transformations. Cette histoire officielle est largement relayée par Wigner et Weyl. Elle permet de *légitimer* l'usage de la théorie des groupes et des représentations de groupes en mécanique quantique : de même que la théorie des groupes finis intervient de manière essentielle en cristallographie, de même la théorie des représentations des groupes finis et des groupes continus doit occuper une position centrale dans la mathématisation de la mécanique quantique. Une raison stratégique explique cette vision très sélective du rapport entre la physique et la théorie des groupes chez Weyl comme chez Wigner à la fin des années 20. En effet, le rôle central des groupes finis en cristallographie semble largement admis des physiciens. Wigner et Weyl s'appuient donc sur l'*exemplarité* de la cristallographie pour faire reconnaître l'importance des représentations des groupes finis et des groupes de Lie dans le cas d'une théorie dont les fondements viennent à peine d'être établis. La tâche qui se présente à eux est particulièrement ardue pour trois raisons : (1) la mécanique quantique vient seulement de recevoir une forme cohérente et unifiée, mais ses fondements sont encore largement discutés ; (2) il existe très peu de monographies sur la mécanique quantique ; (3) la théorie des représentations des groupes finis et des groupes de Lie est largement inabordable pour bon nombre de physiciens. Les questions de *justification* d'un tel cadre formel pour mathématiser la mécanique quantique sont donc pressantes et elles sont diversement traitées par Weyl, Wigner et von Neumann dès 1927-1928.

Dans la série d'articles qu'il publie en 1927, Wigner formule plusieurs arguments pour justifier l'usage de la théorie des représentations de groupes dans la mathématisation de la mécanique quantique : (i) les représentations du groupe symétrique paraissent incontournables pour appréhender formellement des systèmes dans lesquels interviennent n particules indiscernables ; (ii) la théorie des groupes et des représentations de groupes fait ressortir les principes d'invariance et de symétrie auxquels la mécanique quantique est assujettie, quand bien même il s'agit d'une théorie essentiellement probabiliste ; (iii) les représentations de groupes sont très commodes pour formaliser les résultats qualitatifs issus de la spectroscopie. Par exemple, au début de son article de 1927 intitulé « Einige Folgerungen aus der Schrödingenrschen Theorie für die Termstrukturen », Wigner soutient l'opinion suivante :

> La forme simple qu'admet l'équation différentielle de Schrödinger autorise le recours aux méthodes issues de la théorie des groupes ou, pour être plus précis, de la théorie des représentations [de

> groupes]. Ces méthodes ont l'avantage suivant : grâce à elles, on obtient quasiment sans faire de calcul des résultats qui sont vérifiés avec exactitude non seulement pour le problème à un corps (l'atome d'hydrogène), mais aussi pour des systèmes aussi compliqués qu'on le veut. L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne permet pas d'en déduire des résultats approchés. Il est de la sorte possible d'expliquer tout un pan des expériences qualitatives de la spectroscopie. [100]

L'argument de Wigner est nuancé : il ne soutient pas que la mécanique quantique peut entièrement être fondée sur la théorie des représentations de groupes. Il indique que d'autres outils mathématiques sont nécessaires pour saisir le caractère essentiellement statistique de la mécanique quantique. Il détermine ainsi le champ d'application, mais aussi les limites de la théorie des représentations de groupes appliquée à la mécanique quantique. En revanche, il insiste sur la commodité de cette théorie — elle évite des calculs fastidieux —, sur sa portée très générale puisqu'elle peut être adaptée à des systèmes quantiques plus ou moins complexes ; il ajoute enfin qu'elle n'est pas un vêtement formel dénué de signification physique, étant donné qu'elle peut être rapportée à des données expérimentales.

En 1928, Wigner et von Neumann publient conjointement un article intitulé ≪ Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons. (Erster Teil) ≫ qui, comme le souligne à juste titre M. Schneider, s'ouvre sur un rapprochement extrêmement fort entre les symétries et la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique :

> Cette méthode [issue de la théorie des groupes] est fondée sur l'utilisation des propriétés élémentaires de symétrie pour tous les systèmes atomiques, à savoir l'identité de tous les électrons et l'équivalence entre toutes les directions de l'espace (cette dernière sera utilisée en priorité) ; elle trouve dans la théorie dite des représentations son outil mathématique adéquat. [101]

Nous suivons ici la remarque de M. Schneider : les réflexions de Wigner et von Neumann sur le rôle des symétries en mécanique quantique attestent de leur intérêt pour les fondements de cette théorie. Wigner et von Neumann défendent l'idée selon laquelle les principes de symétrie jouent un rôle essentiel dans la mise au jour et la formulation des lois de la nature dans toute théorie physique. Pour renforcer cet argument, ils font d'ailleurs un parallèle entre les symétries en mécanique quantique et le principe de relativité qu'ils définissent immédiatement comme un principe d'invariance en relativité restreinte comme en relativité générale. Il s'agit à notre connaissance du seul passage dans lequel Wigner et von Neumann se

100. E. Wigner, ≪ Einige Folgerungen aus der Schrödingenrschen Theorie für die Termstrukturen ≫, *Zeitschrift für Physik*, **43**, 1927 p. 624.

101. E. Wigner, J. von Neumann, ≪ Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons. (Erster Teil) ≫, *Zeitschrift für Physik*, **47** 1928, p. 203.

réfèrent aux théories relativistes — et non à la cristallographie — pour expliquer l'importance des symétries en physique, étant entendu que nous nous restreignons ici à leurs publications de la fin des années 20. Les remarques sur lesquelles s'ouvre cet article de 1928 nourriront les réflexions ultérieures de Wigner sur la place et la fonction des principes de symétrie en physique. Ces réflexions font elles-mêmes écho à la célèbre conférence que Weyl prononcera à Princeton sur les symétries en 1951.

Ainsi, les arguments de Wigner et de von Neumann en faveur des méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique sont d'ordre théorique, épistémique et pragmatique. *Théorique*, puisqu'il est possible d'appréhender de manière cohérente des systèmes quantiques de plus en plus complexes ; *épistémique*, étant donné qu'ils mettent en lumière l'importance des symétries pour comprendre les phénomènes subatomiques ; *pragmatique*, dans la mesure où la théorie des représentations de groupes est utile pour expliciter de manière systématique des données expérimentales éparses relevant de la spectroscopie.

Dans son introduction à *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl s'appuie sur les mêmes exemples que Wigner et von Neumann pour justifier l'usage de la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique. Il se réfère tout d'abord au groupe des rotations dans l'espace, étant donné que les lois qui décrivent le comportement des électrons dans un atome ou un ion sont assujetties à une symétrie sphérique. Il évoque ensuite le groupe symétrique dans l'étude des systèmes comportant n particules indiscernables. Mais il ne s'en tient pas à ce constat. En effet, il souligne que la théorie des représentations de groupes confère une permanence et une stabilité aux résultats issus de la mécanique quantique, quand bien même cette dernière fait intervenir des lois statistiques. Le concept mathématique de groupe met ainsi en lumière les aspects les plus « certains » d'une théorie considérée pourtant comme fondamentalement indéterministe. À cela s'ajoute que la théorie des représentations de groupes parachève aux yeux de Weyl la théorie des groupes ; parallèlement, elle fournit une description adéquate des relations qui sont en jeu en mécanique quantique.

On peut expliciter l'argument de Weyl comme suit : (1) la théorie des représentations de groupes se caractérise par sa transversalité, initialement restreinte aux groupes finis, elle s'étend aux groupes et aux algèbres de Lie, voilà pourquoi elle parachève dans une certaine mesure la théorie des groupes ; (2) elle éclaire des pans différents de la mécanique quantique ; (3) réciproquement, tous les aspects de la théorie des représentations de groupes sont engagés dans la mathématisation de la mécanique quantique — représentations des groupes finis *et* représentations des groupes et des algèbres de Lie. Cette corrélation très étroite justifie à elle seule le recours à des méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique.

3.2.4 Application des représentations de groupes à des systèmes plus complexes, lien à l'empirie

Le spin de l'électron

Weyl aborde l'hypothèse du spin de l'électron dans le § 4 du chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Pour ce faire, il se réfère à l'article d'Uhlenbeck et Goudsmit de 1925 dans lequel se trouve formulée l'hypothèse d'un moment cinétique interne à l'électron [102] ; il mentionne également l'article de 1927 de Pauli qui consiste à intégrer cette hypothèse dans le cadre de la mécanique ondulatoire de Schrödinger. [103] Weyl évoque de proche en proche l'ensemble des données expérimentales qui trouvent un élément d'explication cohérent avec l'introduction de l'hypothèse du spin ; parallèlement, il la formalise en s'appuyant sur les représentations des groupes SO_3 et SU_2.

En effet, le paragraphe 4 du chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* s'ouvre sur la référence aux données de la spectroscopie dans le cas des métaux alcalins : sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, on observe un clivage des niveaux d'énergie en un nombre *pair* de sous-niveaux. Si l'on suppose que le moment cinétique *total* d'un électron coïncide avec son moment cinétique *orbital* — caractérisé par le nombre quantique ℓ qui est un entier vérifiant $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$, n étant le nombre quantique principal —, alors on devrait s'attendre à ce que ce clivage se fasse en un nombre $2\ell + 1$ de sous-niveaux, $2\ell + 1$ étant impair. Cette anomalie ne peut pas être saisie rationnellement tant que l'on se contente de faire des hypothèses spécifiques sur les métaux alcalins. En 1925, Pauli introduit un nouveau nombre quantique qu'il note m_R et qui ne prend que deux valeurs, à savoir $1/2$ et $-1/2$. Il généralise cette hypothèse à tous les atomes : ce nombre quantique participe à la caractérisation de l'état quantique d'un électron à côté des trois autres nombres quantiques que sont le nombre quantique principal n, le nombre quantique azimutal ℓ et le nombre quantique magnétique m. Uhlenbeck et Goudsmit relient ensuite ce nombre quantique à un moment cinétique interne à l'électron qu'ils appellent le « spin » de l'électron et qui n'a pas d'équivalent classique. Nous disons maintenant que l'électron est une particule de *spin* $s = 1/2$, le symbole m_R (notation de Pauli) ou m_s (notation actuelle) désigne le nombre quantique associé à la projection du spin sur l'axe Oz, avec donc $m_s = \pm 1/2$.

102. G. E. Uhlenbeck et S. Goudsmit, « Remplacement de l'hypothèse d'une contrainte non mécanique par une présomption relative au comportement interne de l'électron individuel » (1925), in B. Escoubès et J. Leite Lopes, *Sources et évolution de la physique quantique*, *op. cit.*, p. 78-80.

103. W. Pauli, « Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons », *Zeitschrift für Physik*, **43**, 1927, p. 601 et suiv.

Comme le précise Weyl (chapitre IV, § 4), l'hypothèse du spin de l'électron permet d'expliquer les doublets des alcalins et l'expérience de Stern-Gerlach (1922). Celle-ci consiste à faire passer un faisceau d'atomes d'argent dans l'entrefer d'un aimant : ce faisceau subit donc l'influence d'un champ magnétique non homogène que l'on supposera dirigé le long de l'axe Oz. Les atomes d'argent ont un moment cinétique orbital et un moment magnétique orbital nuls. Ils ne devraient donc pas subir l'influence de ce champ magnétique. Or, le faisceau se sépare en deux parties d'égale intensité. L'hypothèse du spin de l'électron rend *rétrospectivement* raison de cette expérience.

Reste à savoir comment une telle hypothèse se traduit formellement. Supposons que l'on veuille étudier l'atome d'hydrogène en prenant en compte le spin de l'électron, tout en faisant abstraction des effets relativistes. L'espace « complet » des états du système s'identifie à $\mathcal{H}_{\text{orb}} \bigotimes \mathcal{H}_{\text{spin}}$, où l'espace $\mathcal{H}_{\text{orb}}$ des états orbitaux de l'électron s'identifie à $L^2(\mathbb{R}^3)$ et l'espace $\mathcal{H}_{\text{spin}}$ des états de spin de l'électron correspond à $\mathbb{C}^2$. Le spin de l'électron est donc représenté par un opérateur hermitien agissant sur $\mathbb{C}^2$. Précisons ce point. Aux trois générateurs D_x, D_y et D_z de SO_3 sont associés trois opérateurs hermitiens $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$ sur $\mathbb{C}^2$ qui satisfont aux relations de commutation :

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \hat{S}_z, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = \hat{S}_x, \quad [\hat{S}_x, \hat{S}_z] = \hat{S}_y,$$

et qui commutent avec

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2.$$

Les opérateurs $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_z$ permettent de définir complètement le spin d'une particule. Donnons-nous les vecteurs

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^2$. Dans cette base, les opérateurs $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$ admettent la représentation matricielle suivante :

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit des matrices de Pauli. Ce dernier les introduit en 1927 dans un article intitulé « Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons ».[104] Il s'agit alors d'intégrer l'hypothèse du spin de l'électron au formalisme de la mécanique ondulatoire. D'un point de vue

104. W. Pauli, « Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons », *op. cit.*, p. 608.

mathématique, les matrices de Pauli forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}_2$ de SU_2 [105]. Dans une lettre à Schouten datant de 1949 et citée par M. Schneider, Pauli reconnaît qu'il n'a pas fait spontanément le lien entre son article et la théorie des groupes de Lie et de leurs représentations. Il appartient à Weyl de lui avoir indiqué cette piste de recherche peu de temps après la publication de cet article. [106]

Pour traduire l'hypothèse du spin de l'électron dans le langage des représentations de groupes, Weyl considère d'abord la situation abstraite suivante (chapitre IV, fin du § 1). Il se donne deux observables de moment cinétique respectif $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ agissant dans des espaces de Hilbert différents $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. Cette hypothèse admet diverses réalisations : système à deux particules (sans spin), ou système à une particule avec spin. L'espace du système pris dans sa globalité est le produit tensoriel

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$$

et le moment cinétique total s'identifie à

$$M = \mathfrak{M} \otimes I' + I \otimes \mathfrak{M}'$$

où I (resp. I') désigne l'opérateur identité dans $\mathcal{H}$ (resp. dans $\mathcal{H}'$). Weyl montre en particulier que, dans le sous-espace correspondant à des valeurs propres j de $\mathfrak{M}$ et j' de $\mathfrak{M}'$, le nombre quantique J associé au moment cinétique total M prend les valeurs :

$$J = j + j',\ j + j' - 1,\ ...,\ |j - j'|.$$

Il relie immédiatement ce résultat à la formule de Clebsch-Gordan : le produit tensoriel de deux représentations irréductibles $\mathcal{D}_j$ et $\mathcal{D}_{j'}$ de SU_2 (avec j et j' demi-entiers positifs ou nuls) se décompose en une somme directe de représentations irréductibles comme suit :

$$\mathcal{D}_j \otimes \mathcal{D}_{j'} = \mathcal{D}_{j+j'} \oplus \mathcal{D}_{j+j'-1} \oplus ... \oplus \mathcal{D}_{|j-j'|}.$$

À la fin du § 2, il applique ce résultat à un système comportant un seul électron avec spin. Les deux opérateurs de moment cinétique sont alors $\hat{L}$ (moment cinétique orbital de l'électron) et $\hat{S}$ (moment cinétique interne à l'électron). L'opérateur $\hat{L}$ agit sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathrm{orb}}$ des états orbitaux de l'électron qui s'identifie à $L^2(\mathbb{R}^3)$; pour sa part, l'opérateur $\hat{S}$ agit sur l'espace $\mathcal{H}_{\mathrm{spin}}$ des états de spin de l'électron qui est isomorphe à $\mathbb{C}^2$. L'opérateur de moment cinétique

105. Le groupe spécial unitaire SU_2 est noté $\mathfrak{u}_2$ dans l'ouvrage de Weyl. Il est constitué de l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ unitaires et de déterminant 1 ; $\mathfrak{su}_2$ correspond à l'algèbre des matrices anti-hermitiennes de trace nulle, i.e. une matrice $X \in \mathfrak{su}_2$ vérifie $X + {}^t\overline{X} = 0$ et $\mathrm{Tr}\ X = 0$

106. Pour plus de détails, voir M. Schneider, *op. cit.*, p. 38.

total est

$$\hat{J} = \hat{S} \otimes I' + I \otimes \hat{L}$$

qui agit sur l'espace

$$\mathcal{H}_{\text{spin}} \otimes \mathcal{H}_{\text{orb}}.$$

Dans le sous-espace correspondant à la valeur ℓ de $\hat{L}$ et à la valeur $s = 1/2$ de $\hat{S}$, le nombre quantique j associé au moment cinétique total du système prend les valeurs

$$j = s + \ell,\ s + \ell - 1,\ ...,\ |\ell - s|.$$

Une nouvelle fois, Weyl s'appuie sur la formule de Clebsch-Gordan :

$$\mathcal{D}_s \otimes \mathcal{D}_\ell = \mathcal{D}_{s+\ell} \oplus \mathcal{D}_{s+\ell-1} \oplus ... \oplus \mathcal{D}_{|s-\ell|}.$$

Il établit donc un parallèle entre la décomposition de $\mathcal{D}_s \otimes \mathcal{D}_\ell$ en somme directe de représentations irréductibles de SU_2 et les valeurs que peut prendre le nombre quantique j associé à l'opérateur de moment cinétique total $\hat{J}$. Aussi le formalisme de la théorie des représentations peut-il s'adapter à un système plus complexe, à savoir un système à un électron avec spin. En réalité, il est susceptible d'être généralisé à des systèmes de complexité croissante — en particulier des systèmes à plusieurs particules avec spin. Cependant, au fur et à mesure de cette généralisation, Weyl demeure attentif aux données empiriques issues de la spectroscopie.

Nous pouvons d'abord penser qu'il ne fait que refléter ici le développement *collectif* de la théorie des quanta et de la mécanique quantique. En effet, les travaux de Bohr, Sommerfeld, Pauli, Uhlenbeck et Goudsmit, Heisenberg, Schrödinger etc. sont motivés par la possibilité d'embrasser d'une manière cohérente les résultats qualitatifs issus de la spectroscopie. Cette cohérence ne peut être atteinte que sur la base d'une théorie qui rompt doublement avec la mécanique classique : (a) les particules ne peuvent pas être considérées comme des corpuscules auxquels on assignerait une certaine trajectoire ; (b) il existe des degrés de liberté spécifiquement quantiques, comme en témoigne l'hypothèse du spin de l'électron. Weyl donne ainsi des assises empiriques solides à une théorie dont les hypothèses sont contre-intuitives, ce qui n'a rien d'étonnant si l'on se souvient que *Gruppentheorie und Quantenmechanik* est l'une des premières monographies sur la mécanique quantique.

Mais dans le même temps, cette référence constante à la physique expérimentale permet à Weyl de ne pas outrepasser les conditions de l'expérience et donc d'utiliser un formalisme sous le contrôle de l'empirie. On peut dire que l'épistémologie implicite de Weyl est marquée par un *tournant empirique* à partir du milieu des années 20. Ce tournant est en partie individuel,

il n'est pas uniquement la résultante du développement de la mécanique quantique comme processus collectif. Loin de prétendre pouvoir déduire une théorie physique à partir d'un cadre mathématique défini *a priori*, Weyl se montre attentif à l'accord entre prédictions théoriques et résultats expérimentaux et il critique en retour l'attitude très spéculative qui était la sienne en 1918-1921. Cette hypothèse sera d'ailleurs largement confirmée lorsque nous aborderons la seconde théorie de jauge et lorsque nous commenterons la conférence de Weyl de 1931 intitulée « Geometrie und Physik ».

Généralisations et prolongements des méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique

Résumons brièvement comment Weyl généralise le cadre formel des représentations de groupes à des systèmes quantiques plus complexes. Dans le § 2 (chapitre IV), il se réfère à un système quantique comportant f électrons sans spin. Il assigne à chacun de ces électrons les nombres quantiques n_1, ℓ_1, n_2, ℓ_2, ..., n_f, ℓ_f et il montre que la détermination des valeurs possibles du nombre quantique azimutal total L dépend de la décomposition de la représentation

$$\mathcal{D}^{\pm}_{\ell_1} \otimes \mathcal{D}^{\pm}_{\ell_2} \otimes ... \otimes \mathcal{D}^{\pm}_{\ell_f}$$

de

$$\mathrm{O}_3 \times \mathrm{O}_3 \times ... \times \mathrm{O}_3$$

en ses composantes irréductibles $\mathcal{D}_L$. Chacun des groupes O_3 agit sur l'espace des états orbitaux de l'un des f électrons. Le signe $\pm$ désigne la parité de la représentation $\mathcal{D}^{\pm}_{\ell_i}$ de O_3. La parité de $\mathcal{D}^{\pm}_{\ell_i}$ vaut $(-1)^{\ell_i}$.[107] Dans le § 4, Weyl complexifie cette situation puisqu'il assigne un spin à chacun de ces f électrons. Il suppose que les interactions entre électrons et les interactions entre spin et moment cinétique orbital sont négligeables[108]. Il introduit implicitement le groupe

$$G = \mathrm{O}_3 \times \mathrm{O}_3 \times ... \times \mathrm{O}_3 \times \mathrm{SU}_2 \times \mathrm{SU}_2 \times ... \times \mathrm{SU}_2.$$

Comme précédemment, chacun des f groupes O_3 agit sur l'espace des états orbitaux de l'un des f électrons. De même chacun des f groupes SU_2 agit sur l'espace des états de spin de l'un des f électrons. Weyl étudie les représentations de G de la forme

$$\mathcal{D}^{\pm}_{\ell_1} \otimes \mathcal{D}^{\pm}_{\ell_2} \otimes ... \otimes \mathcal{D}^{\pm}_{\ell_f} \otimes \mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_{1/2} \otimes ... \otimes \mathcal{D}_{1/2}.$$

107. H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, *op. cit.*, p. 194.
108. *ibid.*, p. 206

Ainsi, le produit tensoriel de représentations irréductibles de groupes — qu'il s'agisse de SO_3, O_3 ou encore SU_2 — constitue l'outil essentiel pour étudier des systèmes *particuliers* de plus en plus complexes : système à un électron avec spin, système à f électrons sans spin, système à f électrons avec spin, etc. Weyl est guidé par la théorie des représentations de groupes pour formaliser les propriétés assignables à un large panel de systèmes quantiques, ce qui montre bien que cette théorie ne lui sert pas uniquement à éclairer les fondements de la mécanique quantique. Les représentations de groupes ne constituent donc pas un cadre mathématique rigide auquel il faudrait d'emblée assujettir toute la mécanique quantique. Weyl adapte la théorie des représentations de groupes en fonction des hypothèses physiques de plus en plus subtiles qu'il ajoute pour décrire des systèmes quantiques de complexité croissante.

Cette remarque nous engage à bien insister sur les diverses fonctions de la théorie des représentations de groupes et plus généralement des principes de symétrie dans la mathématisation de la mécanique quantique. Comme le souligne J.-M. Lévy-Leblond dans un article consacré aux fondements de la mécanique quantique, la description d'un système quantique peut tout d'abord être guidée par le *principe de correspondance* ou, plus exactement, de *compatibilité* entre mécanique classique et mécanique quantique. Ce principe signifie que, là où les effets quantiques sont négligeables, les prédictions issues de la mécanique quantique doivent coïncider avec celles que l'on peut déduire à partir de la mécanique classique.[109] Cette compatibilité trouve son fondement mathématique dans le formalisme hamiltonien, le crochet de Poisson étant par exemple l'analogue classique du crochet entre observables en mécanique quantique. Cette manière d'appréhender les systèmes quantiques fait doublement difficulté : (1) elle implique de revenir systématiquement au cas classique ; (2) elle ne permet pas de construire des degrés de liberté spécifiquement quantiques tels que le *spin*.

Il est frappant de constater que dans les §§ 1 à 4 du chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl fait abstraction du principe de compatibilité entre mécaniques classique et quantique. Tout se passe comme si les principes de symétrie qu'il dégage à l'aide de la théorie des représentations de groupes lui permettaient de décrire directement un système quantique, quel que soit son niveau de complexité. Sur ce point, la démarche de Weyl illustre

109. J.-M. Levy-Leblond, ≪ Mécanique quantique, (principes fondamentaux) ≫, in *Encyclopedia Universalis* : ≪ Le problème est de savoir sur quelles bases établir la réalisation pratique de la théorie pour un système donné, en particulier par quel opérateur représenter telle observable physique. Cette question a été abordée dès les débuts de la mécanique quantique à l'aide d'un ≪ principe de correspondance ≫, que l'on préférera appeler *principe de compatibilité*. Il s'agit d'une exigence de cohérence élémentaire : à la limite où les effets quantiques deviennent négligeables (...) les prédictions de la mécanique quantique doivent coïncider avec celle de la mécanique classique ≫.

par avance l'argument de Lévy-Leblond selon lequel ≪ il est possible, en fait, de se passer du principe de compatibilité pour la réalisation concrète des théories quantiques. Son rôle est avantageusement remplacé par celui que jouent aujourd'hui les principes de symétrie ≫. Le chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* confirme cet argument de manière remarquable, quelle que soit d'ailleurs la complexité du système quantique étudié. Ni Wigner, ni Weyl n'estiment que la théorie des représentations de groupes se réduirait à un artifice formel commode qui se surajouterait aux autres concepts mathématiques nécessaires à la mathématisation de la mécanique quantique. Le chapitre IV de l'ouvrage de Weyl montre justement à quel point les représentations de groupes permettent d'appréhender concrètement des systèmes quantiques en faisant abstraction du principe de compatibilité quantique / classique dont le statut épistémologique est ambivalent.

Pour confirmer à nouveaux frais qu'il ne s'agit pas d'un artifice formel, Weyl montre que la théorie des représentations de groupes s'applique aux *règles de sélection* dans le cas non relativiste (§ 3) et dans le cas relativiste (§ 8). Nous nous restreindrons au § 3. Donnons-nous un système réduit à un seul électron, sans spin. Les *règles de sélection* déterminent les *transitions permises* d'un état quantique défini par le vecteur $|E_j\rangle$ et caractérisé par les nombres quantiques n, ℓ et m à un état quantique défini par le vecteur $|E_k\rangle$ et caractérisé par les nombres quantiques n', ℓ' et m'. Par exemple, le nombre quantique azimutal ℓ étant connu, ℓ' ne peut pas prendre n'importe quelle valeur : les résultats issus de la spectroscopie montrent que

$$\ell - \ell' = \pm 1,\ 0,$$

de plus il est exclu que ℓ et ℓ' soient tous deux nuls. Weyl établit un parallèle entre cette règle de sélection et le produit tensoriel des représentations irréductibles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_\ell$ du groupe SO_3. En effet, si l'on utilise la formule de Clebsch-Gordan, on obtient la décomposition suivante de $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_\ell$ en une somme directe de représentations irréductibles :

$$\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_l = \mathcal{D}_{\ell+1} \oplus \mathcal{D}_\ell \oplus \mathcal{D}_{\ell-1},$$

$\ell+1$, ℓ et $\ell-1$ étant justement les trois valeurs de ℓ' permises en vertu des règles de sélection. Ainsi, un principe de symétrie — lié à l'étude des représentations irréductibles du groupe SO_3 — se trouve au fondement de la règle de sélection dans le cas du nombre quantique azimutal. Ce raisonnement est généralisable. Wigner consacre d'ailleurs le chapitre XVIII de sa monographie sur la mécanique quantique au lien entre représentations de groupes et règles de sélection.

Au terme de notre analyse, nous pouvons mettre en exergue les diverses applications de la

théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique que nous avons abordées. Ce cadre formel a plusieurs fonctions : (1) *classer les niveaux d'énergie* d'un système quantique (principe de Wigner), (2) *classer ses états quantiques*, (3) *aborder des systèmes quantiques* de complexité croissante, (4) *déterminer les règles de sélection* qui gouvernent le passage d'un état quantique à un autre. Les représentations de groupes peuvent même être étendues à la mécanique quantique relativiste. Elles garantissent donc une unité à la mécanique quantique, ce qui achève d'en justifier la pertinence aux yeux de Weyl ; réciproquement, c'est avec la mécanique quantique que la théorie des représentations de groupes acquiert une pleine effectivité en physique. Nous voudrions maintenant montrer en quoi les représentations du groupe symétrique jouent un rôle crucial dans l'étude des systèmes quantiques comportant n particules indiscernables. Nous aurons à préciser au préalable ce qu'il faut entendre par particules *indiscernables*.

3.2.5 Groupe symétrique et particules « indiscernables » : Heisenberg, Weyl et Wigner

Que signifie « particules indiscernables » ?

L'étude des représentations irréductibles du groupe symétrique, que l'on peut faire remonter aux travaux de Frobenius et Schur à la fin du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e} siècle, joue un rôle déterminant pour décrire un système quantique comportant des particules *identiques* ou *indiscernables*, ce qui est par exemple le cas lorsqu'on se réfère à un atome contenant n électrons. La question est tout d'abord de savoir ce que signifie l'expression « particules identiques ou indiscernables ». Rappelons que l'identité et la différence entre deux choses de même espèce fait l'objet de problèmes philosophiques intenses qui se cristallisent notamment dans les *Essais sur l'entendement humain* de Locke (1689) auxquels Leibniz répond dans ses *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (1704), ouvrage composé sous la forme d'un dialogue entre Philalèthe — alias Locke — et Théophile — alias Leibniz. Dans une perspective lockienne, la différence entre deux choses est fondée sur un critère « externe » de localisation spatio-temporelle : deux choses sont différentes si elles ne peuvent pas occuper le même lieu en même temps. Outre que cet argument présuppose la possibilité de pouvoir toujours localiser une chose, il se heurte à l'objection suivante de Leibniz :

> La manière de distinguer que vous semblez proposer ici comme unique dans les choses de même espèce, est fondée sur cette supposition que la pénétration n'est point conforme à la nature. Cette supposition est raisonnable, mais l'expérience même fait voir qu'on n'y est point attaché ici, quand il s'agit de distinction. Nous voyons par exemple deux ombres ou deux rayons de

> lumière qui se pénètrent, et nous pourrions nous forger un monde imaginaire où les corps en usassent de même. [110]

Autrement dit, on ne peut pas toujours distinguer deux choses en fonction de leur seule localisation spatio-temporelle : ce critère n'est valable qu'en première approximation, lorsque l'on ne connaît pas ce que sont ces choses en elles-mêmes. Bien qu'il soit utile d'avoir recours à ce principe de distinction externe, il n'est pas parfaitement fiable et il laisse de côté les ≪ vraies ≫ différences entre les choses qui sont internes ou intrinsèques : deux choses de même *genre* n'admettent jamais exactement les mêmes caractéristiques, ce qui permet donc de les différencier. Le principe de l'identité des indiscernables de Leibniz ne doit donc pas être pris au pied de la lettre : il ne nous dit pas littéralement que deux choses identiques sont indiscernables, il exclut justement la possibilité qu'il y ait deux choses indiscernables, c'est-à-dire dont les caractéristiques intrinsèques soient en tous points équivalentes. Weyl commet exactement ce contre-sens lorsqu'il invoque Leibniz à l'appui de ses réflexions sur les particules indiscernables [111] : dans une perspective leibnizienne et donc en vertu du principe des indiscernables, deux particules peuvent toujours être distinguées l'une de l'autre par cela seul qu'elles admettent toujours de petites différences, aussi infimes soient-elles.

Cela étant, il est possible de parler de particules identiques ou indiscernables en mécanique quantique à condition de rejeter dos à dos les arguments de Locke et de Leibniz. Tout d'abord, le critère lockien de différenciation en fonction d'une localisation spatio-temporelle est mis en défaut en mécanique quantique. Il n'est pas permis de localiser un électron, car ce serait revenir à l'image classique d'un corpuscule décrivant une certaine trajectoire au cours du temps. Si l'on adhérait à une telle représentation, deux électrons seraient ≪ différents ≫ parce qu'ils ne décriraient pas la même trajectoire. Mais précisément, la notion de trajectoire est dénuée de sens en mécanique quantique. [112] Ensuite, le critère leibnizien de distinction en fonction de caractéristiques intrinsèques ne peut pas non plus être invoqué pour différencier deux électrons. Contrairement à une substance ou une ≪ monade ≫, une particule ne comporte pas une *infinité* de prédicats. Cette dernière supposition implique qu'il serait toujours possible

110. G.W. Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain* (1704), Paris, éd. Garnier-Flammarion, 1990, p. 179.

111. H. Weyl, *op. cit.*, p. 241.

112. J.-M. Lévy-Leblond, F. Balibar, *Quantique*, Paris, éd. Dunod, 2006, p. 392 : ≪ En théorie classique, des particules identiques peuvent être individuellement repérées grâce à la possibilité de les localiser : il suffit de suivre leurs trajectoires. On peut d'ailleurs dire aussi que c'est justement cette localisation qui empêche de les considérer comme ≪ vraiment ≫ identique (chacune ayant sa propre histoire). Mais ici, l'extension spatiale des quantons élimine l'idée même de trajectoire, et rend impossible, dans un ensemble de quantons identiques, de suivre le destin individuel séparé de chacun ≫.

de trouver au moins un prédicat qu'elle n'aurait pas en commun avec une autre substance. Or, deux électrons ont la même masse, la même charge électrique, etc. Il n'existe pas de propriétés cachées qui permettraient de les distinguer.

Souvenons-nous que Leibniz critique l'atomisme dans la mesure où cette doctrine philosophique repose sur l'existence de constituants ultimes du réel qui peuvent être en tous points identiques et donc déroger au principe de l'identité des indiscernables.

> Car s'il y avait des atomes, c'est-à-dire des corps parfaitement durs et parfaitement inaltérables ou incapables de changement interne et ne pouvant différer entre eux que de grandeur et de figure, il est manifeste qu'étant possible qu'ils soient de même figure et grandeur, il y en aurait alors d'indistinguables en soi, et qui ne pourraient être discernés que par des dénominations extérieures sans fondement interne, ce qui est contre les plus grands principes de la raison. [113]

La doctrine atomiste telle qu'elle est restituée par Leibniz repose sur des présupposés liés à une conception corpusculaire de la matière qui est donc contraire aux fondements des théories quantiques. Cependant, elle partage avec la mécanique quantique l'idée selon laquelle il existerait des choses « indistinguables en soi », ce que refuse précisément Leibniz au nom du principe des indiscernables qu'il définit de la sorte dans la *Monadologie* :

> Car il n'y a jamais dans la nature deux êtres qui soient parfaitement l'un comme l'autre, et où il ne soit possible de trouver une différence interne, ou fondée sur une dénomination intrinsèque. [114]

Ainsi, l'étude des systèmes quantiques comportant des particules *identiques* c'est-à-dire *indiscernables* met directement en cause le « principe des indiscernables ». En effet, si l'on se donne un système comportant n électrons, il est tout juste possible de leur attribuer des « dénominations extérieures », mais aucune caractéristique intrinsèque ne permet de les distinguer. Comme le remarquent F. Balibar et J.M. Lévy-Leblond, des quantons identiques peuvent être *dénombrés* mais non pas *individualisés*. Cet argument reflète le dépassement de l'opposition onde / corpuscule hérité de la physique classique : des ondes ne peuvent être ni dénombrées, ni individualisées ; *a contrario*, des corpuscules peuvent être dénombrés *et* individualisés. Pour que cette impossibilité d'individualiser un électron — ou plus généralement un quanton — ne donne pas lieu à des objections fondées sur de mauvaises bases, il nous faut veiller à ne pas interpréter le « principe » d'exclusion de Pauli de manière erronée. Voici comment Pauli le formule :

> Il ne peut jamais exister dans l'atome deux ou plus de deux électrons équivalents pour lesquels dans des champs intenses les valeurs de tous les nombres (...) coïncident. Si un électron est

113. G. W. Leibniz, *op. cit.*, p. 180.

114. G. W. Leibniz, *Monadologie*, (1714), § 9, in *Principes de la nature et de la grâce, monadologie et autres textes, 1703-1716*, Paris éd. Garnier-Flammarion, 1996, p. 244.

présent dans l'atome pour lequel ces nombres quantiques (dans le champ extérieur) ont des valeurs définies, cet état est alors « occupé ».[115]

À la lecture de cette définition, nous pourrions être tentés de supposer que le *principe d'exclusion* de Pauli serait l'analogue quantique du principe de l'identité des indiscernables de Leibniz. Outre que ce rapprochement est arbitraire, il est infondé pour deux raisons : (1) les nombres quantiques ne caractérisent pas chaque électron isolément de manière intrinsèque, ce qui signifie que le principe d'exclusion de Pauli ne partage pas les présupposés substantialistes dont dépend justement le principe de l'identité des indiscernables de Leibniz ; (2) le principe d'exclusion de Pauli ne vise pas à *différencier* les électrons entre eux, mais à repérer certains cas d'exclusion lorsqu'on les envisage *collectivement*. D'ailleurs, comme le soulignent Balibar et Lévy-Leblond, « Il est (...) impossible, en général, de décrire l'état d'un système quantique composé en termes d'états individuels de ses composants ».[116] Autrement dit, la description d'un système quantique comportant plusieurs particules ne peut pas être opérée par décomposition en états individuels que l'on croit pouvoir *assigner* à chaque particule prise isolément, ce qui nous conduirait à tomber de nouveau dans des préjugés hérités de la mécanique classique. Voilà pourquoi, Lévy-Leblond et Balibar reformulent le principe d'exclusion de Pauli comme suit :

Un ensemble [d'électrons] ne peut jamais occuper une configuration d'états individuels dont deux soient identiques.[117]

On peut parler d'« états individuels » définis par des nombres quantiques qui donc ne sauraient être tous égaux. En revanche, il ne faut pas croire que l'on peut par là même *individualiser* chaque électron en lui attribuant un « état individuel » en propre. Le principe d'exclusion de Pauli s'accorde donc parfaitement avec l'indiscernabilité des électrons. D'ailleurs, ce « principe » est une conséquence des symétries induites en raison de l'identité entre électrons.

Voici comment une telle identité peut être formalisée. On se donne un système comportant deux particules que l'on supposera d'abord sans *spin*. L'espace $\mathcal{E}$ des états de ce système correspond au produit tensoriel des espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ des états de chaque particule, soit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2.$$

Si les deux particules sont indiscernables, les résultats de mesure demeurent invariants par permutation des deux particules. Plus rigoureusement, on introduit un opérateur d'échange

115. W. Pauli, « Sur la connexion entre la saturation des groupes d'électrons dans l'atome et la structure complexe des spectres », in Escoubès et Lopes *op. cit.*, p. 70.
116. J.-M. Lévy-Leblond, F. Balibar, *op. cit.*, p. 393.
117. *ibid.*, p. 419.

$\hat{P}_{12}$ qui agit sur l'espace des états du système tout entier. Il s'agit d'un opérateur hermitien commutant avec le hamiltonien du système et qui vérifie

$$\hat{P}_{12}^2 = \hat{I},$$

où $\hat{I}$ désigne l'opérateur identité. Lorsque les deux particules ont un spin, cet opérateur agit à la fois sur l'*espace des états orbitaux* et sur l'*espace des états de spin* de ces deux particules. Les seules valeurs propres de $\hat{P}_{12}$ sont ± 1. Ainsi, les seuls vecteurs d'état susceptibles de décrire un système comportant deux particules identiques sont

$$\hat{P}_{12}|\Psi\rangle = \pm|\Psi\rangle,$$

autrement dit, ils sont soit *symétriques*, soit *antisymétriques* par permutation de deux particules. Ce raisonnement peut être généralisé à n particules indiscernables. Les opérateurs d'échange forment un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_n$; en particulier, il s'agit d'un groupe de cardinal $n!$. Depuis les travaux fondateurs de Cauchy en théorie des substitutions (1815), on distingue les permutations *paires* et *impaires*, selon qu'elles peuvent être décomposées en un produit de transpositions en nombre pair ou impair. Cette distinction permet de différencier les symétries de n particules indiscernables, selon qu'elles ont un spin demi-entier (fermions) ou un spin entier (bosons). Ainsi, lorsque les n particules considérées sont des *bosons*, on a :

$$\hat{P}_i|\Psi\rangle = |\Psi\rangle,$$

En revanche, lorque les n particules sont des *fermions* — c'est par exemple le cas des électrons —, on obtient :

$$\hat{P}_i|\Psi\rangle = \varepsilon_{\hat{P}_i}|\Psi\rangle,$$

où $\varepsilon_{\hat{P}_i} = \pm 1$ désigne la signature de la « permutation » $\hat{P}_i$.[118] Une permutation paire est de signature 1, une permutation impaire de signature -1. Ainsi, les propriétés de symétrie et d'antisymétrie que l'on vient de décrire sont liées au spin des particules indiscernables considérées. Nous pouvons donc dégager le principe suivant : la fonction d'onde décrivant l'état d'un système composé de n électrons doit être totalement antisymétrique par permutation des électrons. Ce principe a été mis en évidence par Dirac et Heisenberg[119]

118. Soient σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$ et $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i < j$. La permutation σ présente une inversion en (i, j) si $\sigma(i) > \sigma(j)$. Le nombre d'inversions que comporte σ se note $\nu(\sigma)$. La signature ε_σ d'une permutation peut être définie comme suit : $\varepsilon_\sigma = (-1)^{\nu(\sigma)}$.

119. E. Wigner, J. von Neumann, « Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons », Zweiter Teil, *Zeitschrift für Physik* **49**, p. 76.

Au début de l'annexe D à son *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Weyl tire toutes les conséquences épistémologiques du rôle joué par la distinction entre permutations paires et impaires en mécanique quantique. Il faut tout d'abord se souvenir que pour Weyl, une telle distinction constitue un fait mathématique fondamental [120] dans la mesure où il permet de différencier la gauche et la droite sur des bases combinatoires et purement analytiques. Il remarque maintenant que cette distinction est en rapport avec un fait physique fondamental, puisqu'elle permet de caractériser des particules de spin demi-entier :

> Nous avons vu précédemment que la différence entre les permutations paires et impaires est le fondement combinatoire de la polarité entre la gauche et la droite ; nous observons maintenant qu'elle se situe à la racine du système périodique des éléments chimiques et des propriétés déterminantes du monde physique qui mettent en défaut toute explication issue du cadre conceptuel de la physique classique. [121]

Il précise en amont que le ≪ principe ≫ d'exclusion de Pauli (1925) devient une *conséquence* du principe selon lequel la fonction d'onde décrivant l'état d'un système constitué de n électrons est totalement antisymétrique par permutation des électrons. En effet, si l'on suppose que deux états r_i et r_j sont identiques, alors par transposition de r_i et r_j, nous aurions

$$\langle r_1\ r_2\ ...r_i...\ r_j\ ...r_n|\Psi\rangle = \langle r_1\ r_2\ ...r_j...\ r_i\ ...r_n|\Psi\rangle,$$

mais une transposition est une permutation impaire, donc

$$\langle r_1\ r_2\ ...r_i...\ r_j\ ...r_n|\Psi\rangle = -\langle r_1\ r_2\ ...r_j...\ r_i\ ...r_n|\Psi\rangle,$$

autrement dit, si $r_i = r_j$,

$$\langle r_1\ r_2\ ...r_i...\ r_j\ ...r_n|\Psi\rangle = 0,$$

ce qui revient à dire qu'un ensemble d'électrons ne peut jamais occuper une configuration d'états dont deux soient identiques. L'antisymétrie constitue donc un principe plus fondamental que le principe d'exclusion de Pauli, ce que Weyl n'a pas manqué de souligner : ≪ Le principe d'exclusion [Ausschließungsprinzip] est une conséquence de l'antisymétrie ≫. [122] Ainsi, la distinction entre permutations paires et impaires que Weyl érige en fait mathématique fondamental joue un rôle essentiel pour caractériser l'état d'un système quantique comportant n électrons. Ce point n'a pas non plus échappé à Lautman qui tire sensiblement les mêmes conclusions épistémologiques que Weyl, à ceci près que Lautman leur donne une coloration nettement platonicienne :

120. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, *op. cit.*, p. 112 et *infra*, p. 273.
121. *ibid.*, p. 342.
122. *ibid.*, p. 341.

> Si l'on examine le fondement mathématique de cette distinction des fonctions d'onde en fonctions symétriques et fonctions antisymétriques, on la trouve dans une dissymétrie interne du groupe des permutations de n objets. Ce groupe se décompose en deux familles : le sous-groupe des permutations paires et la famille des permutations impaires qui ne forme pas un groupe puisqu'elle ne contient pas la permutation identique. (...) L'exemple de la mécanique ondulatoire des systèmes de corpuscules où l'on voit la saturation des niveaux électroniques dans l'atome et la formation des molécules chimiques, reliées à une dissymétrie mathématique aussi essentielle dans sa simplicité que celle du groupe des permutations de n objets, montre de la façon la plus nette en quel sens il est possible de parler de la commune participation du monde sensible et de certaines théories mathématiques à une même structure dialectique, faite du mélange de symétrie et de dissymétrie. [123]

Heisenberg et Wigner : quelles ≪ méthodes ≫ de théorie des groupes pour formaliser les systèmes à n particules indiscernables ?

Pour rendre compte d'un système comportant n particules indiscernables, l'étude du groupe symétrique et de ses représentations intervient de manière essentielle. C'est d'ailleurs ce qui motive les premiers travaux visant à introduire les méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique. Ainsi, Heisenberg se réfère explicitement au groupe symétrique dans son article de 1926 intitulé ≪ Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik ≫ (1926). Comme nous l'avons déjà souligné, il s'appuie alors sur les *Cours d'algèbre supérieure* de Serret (troisième édition, 1866 et 1868 pour la traduction en allemand) et les résultats qu'il obtient ne sont concluants que pour $n = 2$, c'est-à-dire pour l'atome d'hélium. À partir de $n = 3$, ses prédictions s'avèrent erronées. [124] Heisenberg n'adopte tout simplement pas le bon cadre mathématique. En effet, il se réfère au groupe symétrique en tant que tel, alors qu'il faudrait justement s'appuyer sur les *représentations irréductibles* du groupe symétrique pour décrire convenablement des systèmes à n particules indiscernables. Comme le souligne J. Lacki :

> Heisenberg se trompa (...) sur le nombre total des groupes d'états disponibles (...). Voici en effet la conjecture qu'il proposa : pour le cas d'un système à n particules identiques, le nombre total [de groupes d'états] est $n!$; ils correspondent aux différentes propriétés sous échange des particules. (...) Ce nombre est en fait donné par le nombre des représentations irréductibles du groupe des permutations représenté par les opérations d'échange des coordonnées des particules. [125]

123. A. Lautman, ≪ Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique ≫, in *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, *op. cit.*, p. 270-271.

124. Pour un résumé complet du raisonnement mené par Heisenberg, voir en particulier E. Scholz, ≪ Introducing groups into quantum theory ≫, *op. cit.*, p. 443-447.

125. J. Lacki, ≪ La mécanique quantique, fille aînée de la théorie des groupes ? ≫, in *Symétries*, Contributions au séminaire de Han-sur-Lesse, septembre 2002, Louvain-la-Neuve, Centre de recherche en histoire des

Il appartient à Wigner de reconnaître le rôle central joué par l'étude des représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dans la description des systèmes quantiques comportant n particules indiscernables à la fin de l'année 1926 et au cours de l'année 1927. Wigner corrige par là même les erreurs de Heisenberg. Ainsi, dans son article intitulé « Über nicht kombinierende Termen in der neueren Quantentheorie » Wigner montre comment l'espace des états d'un système à n électrons sans spin se décompose en sous-espaces invariants sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Il construit cet espace des états de la même manière que Heisenberg. Désignons par $\bigotimes^n V$ la puissance tensorielle n-ième d'un espace vectoriel complexe V de dimension finie n (où V correspond à l'espace des états d'une particule prise isolément). Soient v_1, ..., v_n des éléments linéairement indépendants de V et $\underline{v} = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$ un élément fixé de $\bigotimes^n V$. Wigner considère l'ensemble défini par

$$V^{(n)} = \langle \sigma \cdot \underline{v} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n \rangle,$$

avec

$$\sigma \cdot \underline{v} = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Il s'agit d'un sous-espace de dimension $n!$ de $\bigotimes^n V$. Wigner détermine ensuite les sous-espaces de $V^{(n)}$ qui sont laissés invariants par $\mathfrak{S}_n$. Pour ce faire, sa démarche commence par être inductive, calculatoire et tâtonnante : il analyse le cas $n = 3$ et il ne fait pas d'emblée le lien avec la théorie des représentations de $\mathfrak{S}_3$. Pour être plus précis, la décomposition de $V^{(3)}$ en sous-espaces invariants par $\mathfrak{S}_3$ obtenue par Wigner dans son premier article correspond exactement à la décomposition de la représentation régulière ρ_R de $\mathfrak{S}_3$ en ses composantes irréductibles. [126] En l'occurrence $\mathfrak{S}_3$ admet trois représentations irréductibles inéquivalentes : (1) la représentation triviale ρ_1 telle que $\rho_1(\sigma)(v) = v$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ et pour tout vecteur v de $\mathbb{C}$; (2) la représentation alternée ρ_2 telle que $\rho(\sigma)(v) = \varepsilon_\sigma \cdot (v)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ et pour tout $v \in \mathbb{C}$; (3) la représentation ρ_3 de $\mathfrak{S}_3$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par

$$\rho_3(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_3(c) = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix},$$

où t désigne la transposition

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

sciences, éd. Brepols, 2005, p. 277.

126. Pour une définition de la représentation régulière d'un groupe fini, nous renvoyons le lecteur à la sous-section 1.2.3 de la présente partie : Frobenius montre en 1897 que la décomposition du déterminant d'un groupe fini G correspond à la décomposition de la représentation régulière de G en ses composantes irréductibles.

et c le 3-cycle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

j et j^2 étant les deux racines cubiques de l'unité à côté de 1. La représentation triviale ρ_1 de $\mathfrak{S}_3$ est de degré 1 et elle est associée au diagramme de Young



la représentation alternée ρ_2 qui est également de degré 1 est associée au diagramme de Young



enfin, la représentation ρ_3 est de degré 2 et elle est associée au diagramme de Young



La représentation régulière ρ_R de $\mathfrak{S}_3$ dans l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$ de $\mathfrak{S}_3$ se décompose en une copie de ρ_1, une copie de ρ_2 et deux copies de ρ_3, conformément aux résultats établis par Frobenius en 1897 [127], soit

$$\rho_R = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus 2\rho_3.$$

Dans la première partie de son article, Wigner introduit le déterminant du groupe $\mathfrak{S}_3$ [128] — qui, rappelons-le, est un polynôme à coefficients complexes à six variables et de degré 6 — et il le décompose en ses facteurs irréductibles. [129] Wigner privilégie donc l'objet équation qu'il cherche à réduire en suivant une démarche calculatoire. À la suite de von Neumann, Wigner relève l'identité entre la décomposition de son équation et la décomposition de la représentation régulière de $\mathfrak{S}_3$ au début de la deuxième partie de son article. Autrement dit, le cheminement suivi par Wigner en 1926-1927 est homologue à celui qui conduisit Frobenius à traduire la théorie des déterminants de groupes de Dedekind dans le langage des représentations de groupes en 1896-1897. La comparaison entre la première et la seconde partie de l'article de Wigner nous offre l'occasion de souligner que la théorie des représentations de groupes, dont les bases sont alors parfaitement établies en mathématiques, ne s'impose

127. *infra*, p. 384.

128. E. Wigner, ≪ Über nicht kombinierende Termen in der neueren Quantentheorie ≫, Erster Teil, *Zeitschrift für Physik*, **40** 1927, p. 495.

129. Pour une définition du déterminant d'un groupe G et son lien avec la représentation régulière de G, voir la sous-section 1.2.1 de la présente partie.

pas naturellement en mécanique quantique, bien qu'elle ait déjà fait ses preuves en cristallographie. En effet, c'est seulement à l'issue d'une démarche tâtonnante et de fastidieux calculs que Wigner réalise la pertinence et la commodité des représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ pour étudier les systèmes quantiques comportant n particules indiscernables. La seconde partie de son article s'ouvre d'ailleurs sur la remarque suivante :

> Dans la première partie, nous avons pu distinguer trois types différents de fonctions propres (symétriques, antisymétriques et dégénérées) qui, dans la théorie de Heisenberg-Schrödinger, sont associées à un système comportant trois particules absolument identiques. Le calcul était plutôt compliqué et il exigeait par exemple de résoudre une équation — réductible — du sixième degré, etc. Il est clair que l'on peut à peine appliquer ces méthodes ne serait-ce que pour quatre électrons. Il existe cependant une théorie mathématique bien constituée que l'on peut appliquer ici : la théorie des groupes de transformations isomorphes [homomorphes] au groupe symétrique (au groupe des permutations) qui a été fondée par Frobenius à la fin du siècle précédent avant d'être développée par W. Burnside et J. [I.] Schur. J. von Neumann m'a amicalement renvoyé à ces travaux et il a également prédit correctement le résultat général, lorsque je lui ai fait part de mon calcul pour $n = 3$. [130]

Notre rapprochement entre la première partie de l'article de Wigner et les travaux de Dedekind sur les déterminants de groupes est d'autant plus fondé qu'ils affrontent exactement les mêmes difficultés. Nous avons vu qu'en 1886, Dedekind parvient tout juste à étudier les déterminants de deux groupes non abéliens de petit cardinal, à savoir $\mathfrak{S}_3$ et le groupe quaternionien $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j \pm k\}$. Les méthodes utilisées par Wigner dans son premier article sont largement analogues à celles utilisées par Dedekind. Elles peuvent difficilement être étendues à des groupes plus grands que $\mathfrak{S}_3$. Non seulement l'étude des représentations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est essentielle pour raisonner en toute généralité, mais de plus elle permet de faire l'économie de calculs difficiles que Wigner avait dû effectuer dans la première partie de son article.

Quelles sont les sources citées et / ou utilisées par Wigner dans la deuxième partie de son article ? Il mentionne les travaux fondateurs publiés par Frobenius en 1896, 1897 et 1899, l'article de Burnside de 1904 intitulé ≪ On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order ≫ ; mais il s'appuie pour l'essentiel sur l'article de Schur de 1905 intitulé ≪ Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere ≫. Il s'approprie également l'ouvrage de Speiser de 1923 sur les groupes finis et leurs applications à la cristallographie. Wigner démontre à nouveaux frais l'identité entre la décomposition du déterminant du groupe symétrique en facteurs irréductibles et la décomposition de la représentation régulière

130. E. Wigner, ≪ Über nicht kombinierende Termen in der neueren Quantentheorie ≫, Zweiter Teil, *Zeitschrift für Physik*, **40** 1927, p. 883.

de $\mathfrak{S}_n$ en une somme directe de représentations irréductibles inéquivalentes de $\mathfrak{S}_n$. Il ne présuppose aucune connaissance de la part de son lecteur (physicien) sur les représentations de groupes, ce qui confirme notre argument selon lequel cette théorie mathématique est globalement méconnue des physiciens, malgré la publication de l'ouvrage de Speiser visant à répertorier les applications de la théorie des groupes et des représentations de groupes en cristallographie. En particulier, Wigner rappelle qu'une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ est associée à une partition de l'entier n, il montre comment déterminer la dimension d'une telle représentation — qui coïncide avec sa multiplicité dans la décomposition de la représentation régulière en composantes isotypiques. Voici l'application physique fondamentale d'une telle décomposition :

> Dans un système comportant n particules massives entre lesquelles il n'y a initialement aucun échange d'énergie, chaque valeur propre (...) est $n!$ fois dégénérée. Si un échange d'énergie apparaît, alors chaque valeur propre se divise en plusieurs valeurs. [131]

La situation initiale doit être mise en parallèle avec le fait que la représentation régulière est de dimension $n!$. La question est de savoir quelle est la multiplicité des valeurs obtenues lorsque survient un échange d'énergie entre ces particules. Pour ce faire, Wigner montre qu'il suffit de s'appuyer sur la décomposition de la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$ en composantes isotypiques. Ainsi, pour $n = 4$, chaque valeur propre se divise (1) en un terme une fois dégénéré (correspondant à la représentation triviale de $\mathfrak{S}_4$), (2) en trois termes trois fois dégénérés, (3) une nouvelle fois en trois termes trois fois dégénérés, (4) en deux termes deux fois dégénérés et (5) en un terme une fois dégénéré (correspondant à la représentation alternée de $\mathfrak{S}_4$). L'homologie avec la décomposition de la représentation régulière de $\mathfrak{S}_4$ est en tous points vérifiée. En effet, $\mathfrak{S}_4$ admet cinq représentations irréductibles inéquivalentes, deux de dimension 1 (notées ρ_1 et ρ_5), deux de dimension 3 (notées ρ_2 et ρ_3) et une de dimension 2 (notée ρ_4) :

$$\rho_R = \rho_1 \oplus 3\rho_2 \oplus 3\rho_3 \oplus 2\rho_4 \oplus \rho_5.$$

Weyl résume ce résultat établi par Wigner dans le § 8 du chapitre V de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (éd. de 1931) :

> There is a system of terms associated with every irreductible représentation $\mathfrak{h}$ of π [i.e. $\mathfrak{S}_n$] — which we denote simply as the term system χ, using the character χ of $\mathfrak{h}$ as a name for the system — and the multiplicity of this term system is the number $m(\chi)$ of times that $\mathfrak{h}$ occurs in the regular representation. [132]

131. *ibid.*, p. 884.
132. H. Weyl, *op. cit.*, p. 320-321.

Ainsi, il appartient à Wigner et von Neumann de montrer que la théorie des représentations du groupe symétrique constitue le cadre mathématique adéquat pour aborder l'étude des systèmes à n particules (indiscernables). Dans une série de publications ultérieures, ils montrent également l'importance des représentations de certains groupes de Lie — essentiellement SO_3, O_3 et SU_2 — pour décrire complètement des systèmes quantiques de complexité croissante. Il s'agit donc de résumer rapidement ces travaux dans un ordre chronologique et d'examiner si et dans quelle mesure ils croisent ceux de Weyl.

3.2.6 Bilan de la comparaison Wigner / Weyl

Les points de recoupements entre les travaux de Wigner et ceux de Weyl sont nombreux entre 1926 et 1931. Tout d'abord, nous avons montré (3.2.1) l'inexactitude de la thèse de Mackey selon laquelle Wigner s'intéresserait davantage aux applications pratiques des représentations de groupes à la mécanique quantique alors que Weyl aurait pour seul but de clarifier les fondements de cette théorie. En réalité, tous deux sont attentifs aussi bien aux expériences qualitatives de la spectroscopie qu'aux fondements de la mécanique quantique. En outre, ils développent un formalisme qu'ils adaptent à des systèmes quantiques de complexité croissante. Pourtant, cette grande proximité ne repose sur aucun rapport direct entre Weyl et Wigner. Par exemple, il n'y a pas de correspondance Weyl / Wigner durant cette période. Il nous faut cependant préciser ce point : Wigner s'approprie les travaux de Weyl sur les représentations des groupes « continus » ; en revanche, Weyl se contente de faire allusion aux articles de Wigner dans la préface à la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.[133] Ces liens semblent donc très distendus, surtout du côté de Weyl. Toujours est-il que von Neumann joue le rôle d'intermédiaire entre Weyl et Wigner : il travaille conjointement avec Wigner et ses échanges épistolaires avec Weyl sont nombreux durant cette période. Cependant, ils portent davantage sur la théorie des opérateurs que sur l'application des représentations de groupes à la mécanique quantique.

Affinons notre argumentation. Entre 1926 et 1928, les sources utilisées par Wigner se diversifient et elles lui permettent de maîtriser tous les aspects de la théorie des représentations de groupes. En parcourant son texte intitulé « Über nicht kombinierende Termen in der neueren Quantentheorie », (Zweiter Teil), nous avons remarqué que Wigner s'appuie exclusivement sur des articles relevant de la théorie des représentations des groupes *finis*, et pour cause : il met alors l'accent sur la décomposition de la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$ en composantes

133. H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, *op. cit.*, p. VI.

isotypiques. Von Neumann lui indique ensuite une série de références pour prolonger ses recherches aux représentations de certains groupes continus, parmi lesquels SO_3, O_3 et SU_2. Ainsi, Wigner publie un nouvel article intitulé « Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für Termstrukturen » au milieu de l'année 1927 ; dans cet article, il aborde les représentations irréductibles des groupes SO_2, SO_3 et O_3 ; il fait explicitement le lien entre les représentations irréductibles de SO_3 et SO_2 d'une part, les nombres quantiques azimutal et magnétique d'autre part. Pour ce faire, il s'appuie sur les articles de Schur et de Weyl consacrés aux représentations du groupe spécial orthogonal et du groupe orthogonal. Il s'agit en l'occurrence des « Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I, II, III » de Schur (1924) et de « Zur Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen » de Weyl (1924). Dans « Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für Termstrukturen », Wigner mentionne donc pour la toute première fois les travaux de Weyl sur les représentations des groupes de Lie.

Wigner et von Neumann s'approprient ensuite l'article majeur de Weyl sur les représentations linéaires des groupes de Lie complexes semi-simples (1925-1926). Ils se réfèrent pour l'essentiel à la deuxième partie qui est consacrée à l'étude du groupe spécial orthogonal et du groupe symplectique. Weyl cherche alors à identifier le revêtement universel (à isomorphisme près) de SO_n, pour n quelconque, ce qui généralise le résultat bien connu selon lequel SU_2 est le revêtement universel à deux feuillets de SO_3. Contrairement à Weyl, Wigner et von Neumann se restreignent au cas $n = 3$ et ils montrent comment l'étude des représentations irréductibles de SU_2 intervient de manière essentielle pour saisir les propriétés d'un électron avec spin. Ils étendent ensuite leur raisonnement à un système comportant n électrons avec spin, ce qui suppose de combiner les représentations du groupe symétrique et du groupe spécial unitaire. Ainsi, entre fin 1926 et 1928, Wigner passe de proche en proche des représentations d'un groupe fini — à savoir le groupe symétrique — aux représentations de certains groupes de Lie ; il se familiarise avec les travaux de Weyl consacrés aux représentations des groupes de Lie et il montre que ce cadre mathématique permet non seulement de dégager les symétries fondamentales d'un système quantique, mais aussi d'aborder des systèmes de plus en plus complexes en faisant l'économie de fastidieux calculs.

Les articles de Weyl sur les représentations des groupes de Lie constituent une référence essentielle pour Wigner et von Neumann à partir de 1927. La réciproque est-elle vraie ? Autrement dit, peut-on affirmer que les recherches de Wigner conduisent Weyl à appliquer les représentations de groupes à la mécanique quantique ? Si nous nous référons à l'article de

Weyl intitulé « Quantenmechanik und Gruppentheorie » qui est reçu le 13 octobre 1927, il s'avère que Weyl mentionne *en passant* les travaux de Wigner consacrés à l'étude des systèmes à n particules indiscernables (sans spin). Cependant, les objectifs de Weyl n'ont alors rien de commun avec les résultats obtenus par Wigner : Weyl propose alors de fonder la relation $PQ - QP = h/2\pi iI$ de Born et Jordan sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie. De même, dans la préface à la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl se contente de citer brièvement les noms de Wigner et de von Neumann. Dans les deux cas, Weyl fait tout juste allusion à Wigner. Donc Weyl applique les représentations de groupes à la mécanique quantique indépendamment de Wigner et von Neumann.

Ainsi, les travaux de Weyl et de Wigner en mécanique quantique à la fin des années 20 coïncident sur de nombreux points sans qu'il y ait une relation étroite d'interdépendance entre ces deux acteurs. Certaines différences peuvent malgré tout être relevées. Tout d'abord, Wigner applique les méthodes de théorie des groupes à deux niveaux : pour donner une explication qualitative aux spectres des atomes et des molécules et pour clarifier les fondements de la mécanique quantique. Les travaux de Weyl sont plus amples ; ils se caractérisent par un souci d'exhaustivité. Dans sa monographie, Weyl répertorie toutes les applications connues des représentations de groupes à la mécanique quantique. Il aborde en particulier la formation des molécules et la description de leur structure, ce que ne fait pas Wigner.

Ensuite, des différences formelles peuvent être relevées lorsque l'on compare plus finement leurs écrits respectifs. Par exemple, Wigner accorde une place centrale à l'outil matriciel en théorie des représentations de groupes — sans doute en raison de l'importance de l'objet matrice pour mathématiser la mécanique quantique — ; en revanche, Weyl prolonge en 1928 et en 1931 une approche plus géométrique qui, comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédent, singularise ses travaux de 1925-1926 sur les représentations de groupes par rapport à ceux de Schur.

En outre, Wigner ne se réfère pas explicitement au calcul tensoriel ; en revanche, entre 1924 et 1931, Weyl insiste sur le lien entre le calcul tensoriel et la théorie des représentations de groupes. D'ailleurs, dès 1924, l'une des principales motivations de Weyl consiste à classer les tenseurs (contravariants) de $\bigotimes^m E$ [134] en s'appuyant sur les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_m$. On peut d'ailleurs expliciter ce lien entre calcul tensoriel et représentations de groupes sur un exemple élémentaire que Weyl aborde partiellement au cours du § 9 du chapitre IV de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

Il se donne un système à deux particules indiscernables (sans spin) et il suppose que

134. Il s'agit de la puissance tensorielle n-ième d'un espace vectoriel complexe E de dimension n.

l'espace des états de ce système est

$$E \otimes E,$$

où E désigne un espace vectoriel de dimension finie n de base $\{e_1, ..., e_n\}$ représentant l'espace des états de chaque particule. Weyl précise que l'espace $E \otimes E$ des tenseurs (contravariants) d'ordre 2 se décompose en deux classes de tenseurs : les tenseurs symétriques d'ordre 2 et les tenseurs antisymétriques d'ordre 2. [135] Weyl établit la décomposition

$$E \otimes E = S^2E \oplus AS^2E.$$

L'espace S^2E est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$, AS^2E de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Ils sont associés respectivement à la représentation triviale ρ_1 et à la représentation alternée ρ_2 de $\mathfrak{S}_2$. Il s'agit là des deux seules représentations irréductibles inéquivalentes (de dimension 1) de $\mathfrak{S}_2$. Soit (E, ρ) une représentation du groupe $\mathfrak{S}_2$, les espaces S^2E et AS^2E sont stables par $\rho \otimes \rho$. La représentation $\rho \otimes \rho$ de $\mathfrak{S}_2$ dans le groupe des automorphismes de $E \otimes E$ se décompose comme suit en somme directe de représentations irréductibles :

$$\rho \otimes \rho = \frac{n(n+1)}{2}\rho_1 \oplus \frac{n(n-1)}{2}\rho_2.$$

Ainsi, la décomposition de $E \otimes E$ en $E \otimes E = S^2E \oplus AS^2E$. est corrélée à la décomposition de la représentation $(\rho \otimes \rho, E \otimes E)$ de $\mathfrak{S}_2$ en somme directe de représentations irréductibles. Ce raisonnement peut être généralisé : chaque classe de symétrie de tenseurs de degré n est associé à une représentation irréductible ρ_λ de $\mathfrak{S}_n$. Le type de symétrie de cette classe de tenseurs est dicté par les propriétés de ρ_λ. Par exemple, les tenseurs totalement symétriques d'ordre n sont associés à la représentation triviale de $\mathfrak{S}_n$; les tenseurs totalement antisymétriques d'ordre n sont associés à la représentation alternée de $\mathfrak{S}_n$. Ce résultat général est établi par Weyl dans le § 2 du chapitre V de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. [136]

D'après les premières lignes du chapitre V de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, on observe que Weyl n'utilise pas le calcul tensoriel pour des raisons purement formelles :

> Le problème principal que nous proposons de résoudre dans ce chapitre consiste à classer les spectres de raies d'un atome constitué d'un nombre arbitraire — disons f — électrons à l'aide de la théorie des groupes et en réduisant l'espace $\mathfrak{R}^f$ [l'espace des tenseurs d'ordre f] à $\{\mathfrak{R}^f\}$ [l'espace des tenseurs totalement antisymétriques d'ordre f], conformément au principe d'exclusion de Pauli et au spin de l'électron. Pour parvenir à cette fin, il est nécessaire de considérer en détails les représentations du groupe symétrique, i.e. le groupe π_f de toutes les $f!$ permutations de f choses. Celles-ci sont intimement reliées aux représentations du groupe $\mathfrak{u}$ de toutes

135. H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, *op. cit.*, p. 240.
136. *ibid.*, p. 286-287.

> les transformations unitaires ou du groupe $\mathfrak{c}$ de toutes les transformations linéaires homogènes d'un espace $\mathfrak{R}_n$. (...) Le substrat d'une représentation de $\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{u}$ est constitué par la variété linéaire de tous les tenseurs d'ordre f en $\mathfrak{R}_n$ qui satisfont à certaines conditions de symétrie, et les propriétés de symétrie d'un tenseur sont exprimées par des relations linéaires entre ce même tenseurs et ceux qui sont issus de lui par les $f!$ permutations. [137]

Dans la première partie de cette citation, Weyl transcrit l'argument suivant lequel l'état d'un système composé de f électrons est totalement antisymétrique par permutation des électrons. L'espace $\mathfrak{R}$ vérifie : $\mathfrak{R} = V \otimes \mathbb{C}^2$ où V désigne l'espace des états orbitaux d'un électron et $\mathbb{C}^2$ l'espace de ses états de spin. Si maintenant on considère un système comportant f électrons avec spin, alors l'espace des états sous-jacent à ce système n'est pas

$$\bigotimes^{f} \mathfrak{R},$$

mais bien

$$\{\mathfrak{R}\} = AT^{f}\mathfrak{R},$$

c'est-à-dire l'espace des tenseurs totalement antisymétriques d'ordre f. Plus profondément, l'étude des systèmes contenant f électrons (avec spin) permet mathématiquement à Weyl de faire le pont entre les représentations de deux groupes continus — à savoir $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et $\mathrm{U}(n)$ — et les représentations du groupe symétrique. Il envisage donc d'un seul tenant, i.e. dans une même théorie, les représentations de certains groupes continus et les représentations du groupe symétrique. Ceci est possible à condition de se référer aux tenseurs d'ordre f et, plus précisément, à leur classification en classes de symétrie. Le chapitre V de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1931) se situe donc à l'intersection entre un problème purement physique — l'étude des spectres des atomes et des molécules — et des problèmes purement mathématiques visant à garantir une unité à la théorie des représentations de groupes. Ces questions ne sont pas nouvelles : Weyl les avait abordées partiellement dans la première partie de son article de 1925-1926 consacrée aux représentations du groupe $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Si Wigner et von Neumann sont sans doute les premiers à s'approprier l'article de 1925-1926 dans le cadre de la mécanique quantique, Weyl en prolonge certains aspects de manière remarquable tout d'abord dans un article publié en 1929 [138] ensuite dans le chapitre V de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* qu'il modifie substantiellement dans la seconde édition (1931).

Ainsi, Weyl montre à la suite de Schur (1901, 1927) qu'il existe une correspondance biunivoque entre les sous-espaces invariants de la représentation régulière du groupe symétrique

137. *ibid.*, p. 281.

138. H. Weyl, ≪ Der Zusammenhang zwischen der symmetrischen und der linearen Gruppe ≫, *Annals of Mathematics*, **30** 1929, p. 499-516.

$\mathfrak{S}_n$ et les sous-espaces invariants de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\bigotimes^n V$. L'étude des systèmes comportant n électrons (avec spin) implique de se restreindre à l'espace $AT^n\mathfrak{R}$ des tenseurs totalement antisymétriques d'ordre n, avec $\mathfrak{R} = V \otimes \mathbb{C}^2$. Il s'agit donc de décomposer la représentation ρ de $\mathrm{GL}(\mathfrak{R})$ d'espace sous-jacent $AT^n\mathfrak{R}$ en une somme directe de représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(\mathfrak{R})$. Or, à chaque représentation irréductible $\rho_{\mathfrak{R}}(\chi)$ de $\mathrm{GL}(\mathfrak{R})$ dans $\bigotimes^f \mathfrak{R}$ correspond une représentation irréductible ρ_χ de $\mathfrak{S}_n$ identifiée par son caractère χ. En nous restreignant à $AT^n\mathfrak{R}$, nous obtenons donc

$$\rho = \bigoplus m_\chi \rho_{\mathfrak{R}}(\chi).$$

Weyl donne une formule explicite pour calculer la multiplicité de chacune de ces représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(\mathfrak{R})$. En effet, chaque m_χ est égal à la dimension de la représentation duale ρ^*_χ induite à partir de la représentation irréductible correspondante ρ_χ de $\mathfrak{S}_n$. Ces résultats très techniques de Weyl attestent de sa virtuosité dans le maniement du calcul tensoriel dont il a connaissance dès 1917 avec la formalisation de la relativité générale. On ne trouve pas explicitement d'équivalent à ce type d'investigation dans les travaux que publie Wigner entre 1927 et 1931.

À l'issue de notre commentaire sur les travaux de Weyl et de Wigner en mécanique quantique à la fin des années 20 et au début des années 30, nous pouvons faire les remarques suivantes. Weyl et Wigner ne considèrent pas la théorie des représentations de groupes comme un formalisme qui s'imposerait de l'extérieur à la mécanique quantique en raison de sa seule commodité. En réalité ce cadre mathématique permet d'éclairer aussi bien les fondements de la mécanique quantique que les données qualitatives issues de la spectroscopie. Ainsi, Wigner adopte progressivement ce cadre mathématique pour rendre d'abord raison des systèmes comportant n particules (sans spin). De même Weyl réalise l'importance de la théorie des groupes et des représentations de groupes alors qu'il tente de dégager les *fondements* de la relation $PQ-QP = h/2\pi iI$ établie par Born et Jordan en 1925. Ces données très incomplètes ont laissé croire à Mackey que Wigner raisonne en physicien théoricien dans un but purement pragmatique, alors que Weyl raisonne en mathématicien afin d'expliciter les fondements de la mécanique quantique. Nous nous sommes justement efforcés de relativiser cette différence. En effet, Wigner s'intéresse également aux fondements de la mécanique quantique, comme en attestent ses réflexions sur les lois de conservation et plus généralement sur la place des principes de symétrie dans cette théorie. Inversement, Weyl mentionne et explicite de nombreux résultats issus de la spectroscopie dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Ainsi, les recherches menées par Weyl et Wigner convergent.

Tous deux soulignent l'importance des *principes de symétrie* en mécanique quantique qui viennent concurrencer le principe de correspondance ou de compatibilité entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Le champ d'application de la théorie des représentations de groupes est considérable : elle concerne les fondements de la mécanique quantique, elle rend compte des expériences qualitatives issues de la spectroscopie, elle se prolonge à la structure des molécules et elle intervient en mécanique quantique relativiste. De plus, elle peut être adaptée à des systèmes quantiques de complexité croissante sans perte de cohérence. Réciproquement, tous les aspects connus de la théorie des représentations de groupes sont utilisés par Wigner et Weyl en mécanique quantique. Ainsi, de 1926 à 1928, Wigner s'approprie les travaux de Frobenius, Schur et Weyl ; les représentations du groupe symétrique et des groupes continus sont investis de proche en proche pour décrire les symétries de systèmes quantiques de plus en plus complexes. Weyl tire même parti de ses travaux sur la mécanique quantique pour développer certains aspects de la théorie des représentations de groupes : dans son article de 1927, il met l'accent sur les représentations *projectives* de groupes ; dans l'édition de 1931 de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, il approfondit la dualité de Schur-Weyl. Aussi faut-il rejeter l'hypothèse selon laquelle nous aurions affaire à une théorie mathématique bien constituée qui s'appliquerait à la mécanique quantique à la faveur de rapprochements arbitraires. L'ouvrage de Weyl montre au contraire que les développements respectifs de la théorie des représentations de groupes et de la mécanique quantique sont intimement corrélés.

Les apports de Weyl et de Wigner sont diversement appréciés peu après leur parution. Nous avons montré à la suite de M. Schneider que les physiciens sont partagés entre enthousiasme (Heisenberg), intérêt mêlé de circonspection (Ehrenfest), scepticisme (Schrödinger, Sommerfeld) et rejet (Slater, Born). Il ne faut pas perdre de vue que la théorie des groupes et des représentations de groupes — dont les méthodes semblent si « naturelles » de nos jours en physique mathématique — est alors méconnue des physiciens, sauf en cristallographie et, dans une moindre mesure, dans les théories relativistes. Lorsque Weyl et Wigner publient leurs articles et leurs ouvrages respectifs, ils ne présupposent aucune connaissance de la part de leurs lecteurs : ils commencent même par les définitions élémentaires d'un groupe de transformations et d'un groupe abstrait. De plus, l'accueil de leurs méthodes parmi les physiciens est très contrasté. On n'observe nul enthousiasme unanime.

Sans doute l'effectivité de leur approche sera-t-elle reconnue à plus long terme. Ainsi, Mackey envisage de fonder la mécanique quantique sur une étude systématique des représentations projectives de groupes à la fin des années 40, mettant en avant l'importance de l'article de

Weyl de 1927. En outre, le ≪ eightfold way ≫ suivi par Ne'eman et Gell-mann dans les années 60 permet de montrer toute l'importance de la théorie des représentations de groupes — en l'occurrence des représentations irréductibles de SU_3 — pour décrire les particules sensibles à l'interaction forte.

À plus court terme, Weyl et Wigner doivent non seulement justifier leurs méthodes auprès des physiciens, mais de plus ils multiplient les stratégies pour les promouvoir. Le cas de Weyl est ici exemplaire. Tout d'abord, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* est l'une des premières monographies sur la mécanique quantique. Ceci constitue déjà une stratégie pour imposer les méthodes de théorie des groupes dans l'étude des phénomènes atomiques et subatomiques. Ensuite, il multiplie les interventions pour faire valoir ce programme de mathématisation de la mécanique quantique. Par exemple, une lettre de Cassirer à Weyl datant du 18 janvier 1928 nous apprend que Weyl est invité par Hecke pour effectuer une série d'exposés sur la théorie des groupes et la mécanique quantique avant même la publication de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Cassirer profite de cette occasion pour convier Weyl à faire une conférence sur son ouvrage *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* dans le département de philosophie de l'université de Hambourg. [139]

De manière plus significative encore, Weyl effectue un séjour à Princeton et à Berkeley en 1929. Il y donne alors une série de cours sur la base de sa monographie en mécanique quantique. Les notes de cours sont conservées dans un cahier sous la cote Hs 91a : 51 à l'ETH. [140] Au recto de ce cahier se trouvent les grandes lignes d'un cours intitulé ≪ application of group theory to quantum mechanics ≫. Les premières pages de ces notes montrent que Weyl se fonde très largement sur les chapitres I, II et IV sa monographie pour composer ses leçons. Au verso figurent les notes d'un cours en théorie des groupes dans lequel Weyl aborde (a) des résultats élémentaires en théorie des groupes, (b) la théorie des représentations des groupes finis et des groupes continus, (c) la ≪ correspondance ≫ entre le groupe symétrique et le groupe linéaire (dualité de Schur-Weyl). Les chapitres III et V de sa monographie sont alors sa principale source d'inspiration. En outre, durant ce séjour, Weyl publie une série d'articles en anglais et en allemand dans des revues américaines. Il cherche notamment à promouvoir les méthodes de théorie des groupes auprès de physiciens américains très attachés à la physique expérimentale. Ces publications se divisent en deux classes : articles de vulgarisation en physique sur la symétrie sphérique des atomes [141] et sur les symétries par permutations des

139. E. Cassirer, Brief an Weyl, 18 janvier 1928, Hs 91 : 506, *ETH-Bibliothek*.

140. H. Weyl, recto : ≪ Application of group theory to quantum mechanics ≫, 43 pages manuscrites, verso : ≪ Theory of groups ≫, 67 pages manuscrites, Hs 91 a : 51, *ETH-Bibliothek*.

141. H. Weyl, ≪ The spherical symmetry of atoms ≫, *The Rice Institute Pamphlet*, **16**, 1929, p. 266-279.

électrons dans un atome [142] ; article de recherche en mathématiques sur la dualité de Schur-Weyl. [143] Weyl remaniera le chapitre V de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* sur la base de ce dernier article.

De même que Klein avait largement plébiscité la théorie des groupes pour formaliser la relativité restreinte dès 1910, de même Weyl veut promouvoir les méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique dès 1928. Les données que nous venons de répertorier le montrent assez. Ainsi, Weyl prolonge Klein à deux niveaux puisqu'il entend (i) faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann, (ii) diversifier les applications de la théorie des groupes à la physique et les défendre avec insistance en négligeant volontairement d'autres manières de formaliser la mécanique quantique.

3.3 La seconde théorie de jauge (1922-1929)

Nous avons décrit la première théorie de jauge de Weyl (1918) dans la deuxième partie de la présente thèse [144]. Nous avons montré qu'elle visait à *unifier* les champs gravitationnel et électromagnétique à partir d'un cadre géométrique introduit *a priori*, à savoir la « géométrie purement infinitésimale » de Weyl. Celle-ci consiste à mettre de côté un résidu de géométrie à distance dont la géométrie riemannienne et, par voie de conséquence, la théorie einsteinienne de la gravitation — seraient encore tributaires. Dans la conférence de 1931 intitulée « Geometrie und Physik », Weyl porte un regard rétrospectif sur cette première théorie de jauge. Il y résume ce projet d'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme de la manière suivante :

> J'ai effectué la première tentative d'unification de la gravitation et de l'électricité en 1918 via la géométrisation du champ électromagnétique. Elle reposait sur la considération suivante. Si l'on fait tourner un vecteur le long d'un lacet dans l'univers à l'aide du processus de transport parallèle infinitésimal, alors il ne revient généralement pas à sa situation initiale après un tour complet. Ce fait s'appelle la non-intégrabilité du transport d'un vecteur. Pourtant, puisque la mesure d'un vecteur n'est pas modifiée par transport parallèle, le vecteur de départ et le vecteur d'arrivée ne coïncident certes pas en termes de direction, mais nécessairement en termes de longueur. J'observai par là même une inconséquence. Il s'agit de la question de l'*échelle*. Le choix d'un repère local implique le choix d'une unité de longueur déterminée. La question est de savoir si des repères qui proviennent les uns des autres par une dilatation peuvent être considérés comme équivalents, c'est-à-dire si le groupe des transformations doit contenir les dilatations en

142. H. Weyl, « The problem of symmetry in quantum mechanics », *Journal of the Franklin Institute*, **207**, 1929, p. 509-518.
143. H. Weyl, « Der Zusammenhang zwischen der symmetrischen und der linearen Gruppe », *op. cit.*
144. *infra*, deuxième partie, section 3.3

> plus des rotations ou bien s'il existe une unité de longueur qui doit être privilégiée en tant que telle. [145]

Ce projet de théorie unifiée des champs est presque immédiatement critiqué par Einstein en raison de ses inconséquences sur un plan empirique. Reichenbach, Pauli, Eddington et Hilbert réfutent également le contenu physique de cette théorie, mais aussi les présupposés épistémologiques de Weyl qui relèvent alors de l'*apriorisme* : Weyl entend déduire une théorie qu'il croit physiquement consistante à partir d'un cadre géométrique construit entièrement *a priori*. Il renonce à ce projet à la fin de l'année 1921. Pourtant, l'idée de jauge n'en demeure pas moins féconde : ce n'est donc pas parce qu'une théorie n'est pas vérifiée par l'expérience que les hypothèses et les idées qui la sous-tendent doivent être rejetées en bloc. La question est de savoir comment Weyl aboutit, avec l'aide de Schrödinger, Fock et London, à une seconde théorie de jauge en 1927-1928. Il est également nécessaire d'identifier et de localiser les similitudes et les différences entre ces deux théories.

L'écart est d'abord d'ordre théorique : alors que la première théorie de jauge de Weyl se situe dans le prolongement immédiat de la relativité générale, la seconde théorie de jauge voit le jour dans le cadre de la mécanique quantique et elle admet des applications spectaculaires pour décrire une particule relativiste chargée dans un champ électromagnétique. Cette seconde théorie est donc étroitement liée au développement de la mécanique quantique relativiste dont les fondements sont établis par Dirac en 1927-1928. S'il est bien question d'*unification* dans les deux cas, celle-ci ne porte pas sur les mêmes objets. La première théorie de jauge unifiait la *gravitation* et l'*électromagnétisme* ; la seconde théorie de jauge unifie *les ondes de matière* et *l'électricité* sans que Weyl sache de manière certaine si elle peut s'étendre de proche en proche à la gravitation.

En outre, bien que les deux théories admettent des similitudes manifestes sur un plan formel, il n'en reste pas moins que l'épistémologie sous-jacente de Weyl n'est pas du même ordre dans les deux cas. Dans sa première théorie de jauge, Weyl succombe à une forme d'*apriorisme* doublée d'une posture spéculative de coloration fichtéenne. En revanche, il accorde une place fondamentale au contrôle expérimental lorsqu'il développe sa seconde théorie de jauge. Ce ≪ tournant empirique ≫ qu'E. Scholz a mis au jour [146] peut recevoir plusieurs éléments d'explication. Tout d'abord, les critiques répétées et insistantes d'Einstein, Pauli

145. H. Weyl, ≪ Geometrie und Physik ≫, *Die Naturwissenschaften*, (1931) **19**, p. 53.

146. E. Scholz, ≪ Hermann Weyl's analysis of the "problem of space" and the origin of gauge structures ≫, *preprint*, 2004, p. 32 : ≪ In this sense, about the middle of the 1920s we find an *empirical turn* of our author, richly nurtured by his scientific experiences, clearly reflected, and beautifully expressed in his publications ≫.

ou encore Eddington ont sans doute incité Weyl à cesser de construire une théorie physique sur des bases purement spéculatives. Ensuite, on ne peut pas nier l'existence d'un courant épistémologique protéiforme au cours des années 20 et surtout au début des années 30, incarné par Schlick, Carnap et Reichenbach, qui sera mieux connu sous le nom d'« empirisme logique » ou de « positivisme logique ». Or, nous avons montré que Reichenbach critique à deux reprises — en 1920 et en 1928 — la théorie unifiée des champs de Weyl. La question est donc de savoir si et dans quelle mesure le tournant empirique de Weyl est lié au développement de « l'empirisme logique ». Précisons immédiatement que les liens de Weyl avec les empiristes logiques sont ténus et que Weyl n'épousera jamais leurs présupposés *positivistes*. Enfin, de manière plus modeste, il convient de rappeler que le développement de la mécanique quantique est lié à la nécessité de rendre raison des résultats expérimentaux issus de la spectroscopie de manière cohérente. Dans sa préface à *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl souligne l'importance de la physique expérimentale pour dépasser l'ancienne théorie des quanta et donc pour aboutir à la mécanique quantique. De plus, bien que l'approche de Heisenberg, Born et Jordan soit très formelle lorsqu'ils posent les fondements de la mécanique quantique, ils sont attachés au réquisit épistémologique suivant : dans une théorie physique, toute grandeur doit être par principe observable. La première théorie de jauge de Weyl ne satisfait pas à cette condition : elle fait intervenir des grandeurs qui sont de purs artifices de calcul. En revanche, nous verrons que la seconde théorie de jauge repose sur des bases empiriques solides.

3.3.1 Les travaux inauguraux de Schrödinger, Fock et London

Avant d'étudier en détail le « tournant empirique » de Weyl qui est énoncé en toute clarté dans sa conférence « Geometrie und Physik » (1931), il convient de préciser dans quel contexte la « seconde théorie de jauge » voit le jour. Pour ce faire, il est nécessaire d'affiner notre étude sur la réception de la première théorie de jauge (1918) que nous avions commencé à aborder en deuxième partie [147]. Cette réception n'est pas limitée au seul domaine de la relativité générale et des théories dites « unitaires » ; en réalité, dès 1922, Schrödinger fait référence aux travaux de Weyl dans un autre cadre théorique : la modélisation du champ de matière. Comme le souligne E. Scholz, Schrödinger reste alors attaché à l'idée originale de Weyl de 1918 qui consiste à calibrer des longueurs — le groupe de jauge étant alors $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. Bien que Schrödinger ne modifie pas substantiellement le cadre formel proposé par Weyl,

147. *infra*, deuxième partie, section 3.5

il montre que cette première théorie de jauge serait susceptible d'être appliquée non pas à la gravitation et à l'électromagnétisme comme le croyait Weyl, mais à la matière et ce, dans le prolongement de la théorie des quanta. Dans son article de 1922 intitulé « Über eine bemerkenswerte Eigenschaft der Quantenbahnen eines einzelnen Elektrons », Schrödinger commence par résumer très brièvement la géométrie purement infinitésimale de Weyl et la théorie unifiée des champs qui en dérive, avant donc de l'utiliser comme un moyen heuristique pour sonder les phénomènes atomiques.

Schrödinger s'appuie sur la quatrième édition de *Raum, Zeit Materie* afin de présenter la théorie de Weyl ; il ne formule aucune critique à l'encontre de ce projet. La réception qu'il en fait est donc spécifique : loin d'en évaluer le bien-fondé sur un plan empirique et épistémologique, Schrödinger fait un usage purement pragmatique de cette première théorie de jauge, ce qui le démarque donc de la plupart des scientifiques qui ont pu la commenter et surtout la réfuter entre 1918 et 1922, à savoir Einstein, Eddington, Hilbert, Pauli ou encore Reichenbach. Pour Schrödinger, la question n'est donc pas de savoir si elle peut *légitimement* rendre raison des phénomènes gravitationnels et électromagnétiques, mais s'il est possible de l'adapter au contexte de la théorie des quanta et, plus particulièrement, à la quantification de l'orbite d'un unique électron. Schrödinger conjecture que le lien entre les conditions de quantification et la théorie de Weyl ne relève pas d'un pur artifice mathématique mais qu'il doit avoir un sens physique déterminé.

Cette hypothèse est pleinement mise en valeur par F. London en 1926-1927. Ce dernier est alors *Privatdozent* à l'université de Münich. Il effectue un séjour à Zürich à partir d'avril 1927, ce qui lui donne sans doute l'occasion de rencontrer Weyl et Schrödinger — qui obtiendra un poste à Berlin en septembre 1927. En décembre 1926, London écrit une lettre à Schrödinger centrée sur l'article que ce dernier a publié en 1922 sur la théorie de Weyl. London évoque d'un seul tenant les inconséquences du projet de Weyl et la pertinence des idées initiées par Schrödinger pour adapter le formalisme de Weyl à la théorie des quanta. Cette lettre résume de manière saisissante l'article que London publiera quelques mois plus tard dans la *Zeitschrift für Physik* sous le titre : « Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl ». Le plan adopté par London est d'une grande lisibilité.

Dans un premier temps, il expose brièvement la théorie de Weyl (géométrie purement infinitésimale, unification de la gravitation et de l'électromagnétisme, inconséquences soulevées par Einstein), comme en atteste le passage suivant :

> Pour compléter logiquement l'interprétation géométrique de la gravitation via la courbure variable de l'espace riemannien, Weyl considéra également les effets physiques restants — le champ

> électromagnétique — comme une propriété métrique de l'espace, caractérisée par une échelle de jauge variable. (...) On admirera l'incroyable témérité avec laquelle Weyl découvrit l'interprétation de l'électromagnétisme en termes de géométrie de jauge en se fondant seulement sur une correspondance purement formelle : dans la théorie de la gravitation, on était en présence d'un fait physique : le principe d'équivalence entre la masse inertielle et la masse grave, qu'Einstein suggéra d'interpréter géométriquement. Par contre, dans la théorie de l'électricité, un tel fait n'était pas connu : il n'y avait aucun lieu de penser que le champ électromagnétique agissait sur les règles dites rigides (resp. les horloges). Au contraire, les horloges atomiques constituent des instruments de mesure dont l'indépendance par rapport à une histoire antérieure est établie en vertu de l'exactitude des lignes spectrales, ce qui est contraire à la non intégrabilité de la mesure que suppose Weyl dans le champ magnétique. Il a fallu qu'en dépit de ces expériences les plus élémentaires, Weyl soit saisi d'une conviction métaphysique inhabituellement catégorique pour ne pas s'écarter de l'idée selon laquelle la nature devait faire usage de ces belles possibilités géométriques qui s'offraient à elle. [148]

London formule deux critiques à l'encontre du projet de *géométrisation* du champ électromagnétique proposé par Weyl. (1) Il rappelle qu'Einstein est guidé par un principe physique lorsqu'il se propose de formaliser les interactions gravitationnelles en se fondant sur la géométrie riemannienne, ce qui n'est pas le cas de la théorie que Weyl construit donc à la faveur d'un rapprochement purement formel. L'analogie qu'établit Weyl entre la géométrisation de la gravitation et la géométrisation de l'électromagnétisme est abusive. Cette critique sera clairement reprise par Reichenbach dans son ouvrage de 1928 intitulé *Philosophie der Raum-Zeit Lehre* (1928) [149]. (2) London fait ensuite écho au principal élément de réfutation qu'Einstein oppose à la théorie de Weyl et qui est donc centré sur le comportement des horloges atomiques. À la différence de Schrödinger en 1922, London met en exergue les principaux arguments qui frappent d'invalidité la théorie initiale de Weyl. Il laisse donc sous-entendre qu'il faut la réformer en profondeur pour qu'elle ait une effectivité physique. Cet argument est significatif : London indique à son lecteur qu'il ne se contentera pas d'un jeu de substitutions purement formelles pour parvenir à une seconde théorie de jauge. En effet, il est nécessaire de la réinterpréter physiquement de manière cohérente et de s'assurer qu'elle est fondée empiriquement. London utilise le qualificatif ≪ métaphysique ≫ à dessein pour caractériser l'attitude de Weyl en 1918. En effet, London ne manque pas de souligner la tonalité très spéculative des recherches menées alors par Weyl.

Ce passage est significatif pour comprendre le tournant empirique de Weyl, puisque, entre 1927 et 1931, ce dernier prolonge les travaux de Schrödinger, London et Fock. London ne

148. F. London, ≪ Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl ≫, *Zeitschrift für Physik*, **42** 1927, p. 376-377.
149. *infra* p.

se contente pas de réfuter la première théorie de jauge de Weyl, il énonce les conditions nécessaires pour la réformer afin qu'elle ait une effectivité physique. En conséquence, nous voudrions formuler l'hypothèse suivante : Weyl n'adopte pas une épistémologie plus « empiriste » par renoncement aux spéculations hardies mais dépourvues de sens physique qui l'avaient guidé pour élaborer sa première théorie de jauge. En réalité, ce « tournant empirique » est préparé par ceux-mêmes qui parviennent à modifier la théorie de Weyl et à déplacer son champ d'application jusqu'à ce qu'elle aboutisse à des prédictions en accord avec l'expérience : il s'agit en l'occurrence de Schrödinger, London et, dans une moindre mesure, Fock.

Dans un second temps, London confronte la théorie de Weyl et la mécanique ondulatoire élaborée par de Broglie et rigoureusement formalisée par Schrödinger. Enfin, dans un dernier temps, il montre comment on peut interpréter physiquement la théorie de Weyl dans le cadre de la mécanique quantique. Si l'article de Schrödinger de 1922 constitue une première adaptation de la géométrie de Weyl à la théorie des quanta, l'article de London de 1927 peut être considéré comme le texte inaugural dans la formulation d'une seconde théorie de jauge mathématiquement *et* physiquement cohérente.

London a régulièrement recours à un argument comparatiste pour repérer les similitudes et les différences entre la première théorie de jauge de Weyl et cette seconde théorie de jauge. Cette comparaison sera reprise, développée et approfondie par Weyl entre 1927 et 1931. En outre, London s'adresse une série d'objections — sensiblement similaires à celles qui avaient été formulées contre Weyl entre 1918 et 1921 — pour s'assurer que ce second projet résiste aux éléments de réfutation qu'on pourrait lui opposer.

Ces remarques préliminaires étant faites, voici comment la seconde théorie de jauge peut être résumée. Nous avons vu que, dans sa première théorie de jauge (1918), Weyl définit une structure métrique sur une variété lisse à l'aide d'une forme différentielle quadratique $\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}y^i$ et d'une forme différentielle linéaire $\varphi = \varphi_i \mathrm{d}x^i$, modulo la relation d'équivalence

$$mathrmds'^2 = \lambda \cdot \mathrm{d}s^2, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda},$$

où λ est une fonction à valeurs strictement positives appelée fonction d'échelle ou de jauge. Weyl identifie ensuite les φ_i aux potentiels électromagnétiques et il montre qu'à l'invariance de jauge, qui dépend donc d'une fonction arbitraire λ, peut être associée la loi de conservation de l'électricité.

London déplace la théorie de Weyl sur le terrain de la mécanique ondulatoire. Cette dernière repose sur l'intuition physique des ondes de matière. Selon Schrödinger, une onde de

matière est représentée par une fonction d'onde ψ qui, d'un point de vue mathématique, est une fonction à valeurs complexes de carré sommable. London montre en conséquence que le changement de jauge ou d'échelle ne doit pas s'appliquer au ds^2 mais à la fonction d'onde ψ. Pour être plus précis, deux fonctions ψ et $\widetilde{\psi}$ décrivent essentiellement les mêmes phénomènes physiques si elles ne diffèrent l'une de l'autre qu'à une phase près, autrement dit si

$$\widetilde{\psi} = e^{i\lambda} \cdot \psi,$$

le facteur de jauge n'est plus une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ mais une fonction à valeurs dans le groupe U(1) des nombres complexes de module 1. [150] Dans le cadre de la mécanique ondulatoire, London et Fock interprètent donc le facteur de jauge non plus comme un *facteur d'échelle*, mais comme un *facteur de phase* appliqué à des fonctions d'onde. London montre de manière systématique qu'aucune inconséquence physique n'est à déplorer lorsque l'on introduit ce nouveau facteur de jauge. Toujours est-il qu'à l'instar de Fock, London entend travailler dans un contexte relativiste, alors que les fondements de la mécanique quantique relativiste ne sont pas encore assurés. Ils ne le deviendront qu'en 1928 avec les travaux décisifs de Dirac.

De ce fait, la seconde théorie de jauge n'est pas encore pleinement aboutie avec la publication de l'article de London. S'il est établi qu'elle n'admet pas les inconvénients de la première théorie de jauge, il reste à savoir quelle effectivité elle reçoit en mécanique quantique. Les apports de Weyl sont donc de deux ordres. (1) Il montre comment on peut déduire la conservation de l'électricité à partir de cette nouvelle invariance de jauge ; il est alors guidé par l'idée fondamentale selon laquelle une propriété d'invariance conduit à une loi de conservation, ce qu'E. Noether avait déjà établi en toute clarté et à un niveau de généralité remarquable dans « Invariante Variationsprobleme » (1918). (2) Il clarifie les raisonnements encore incertains de Fock et London parce qu'il dispose justement des avancées décisives de Dirac en mécanique quantique relativiste.

150. L'idée selon laquelle deux fonctions d'onde ne différant l'une de l'autre qu'à une phase près représentent essentiellement le même phénomène physique est connue de Weyl dès sa correspondance avec Jordan et Born en 1925. Dans son article de 1927 intitulé « Quantenmechanik und Gruppentheorie », Weyl exploite ce fait dans un autre but : il montre que la théorie des représentations projectives de groupes est le cadre mathématique le plus adapté pour formaliser la mécanique quantique, ce qui sera pleinement exploité par Mackey à la fin des années 40.

3.3.2 Weyl et la seconde théorie de jauge : la ≪ géométrisation ≫ de la physique en question

Weyl aborde cette seconde théorie de jauge dès la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928). Il se réfère explicitement à l'article de London que nous venons de mentionner. À l'instar de ce dernier, Weyl commence par souligner que cette nouvelle transformation de jauge ne conduit à aucune conséquence physique discutable, comme en atteste le passage suivant :

> Seule $\overline{\psi}\psi$ a une signification physique simple ; voilà pourquoi on peut supposer que les lois qui gouvernent ψ demeurent invariantes lorsque l'on remplace ψ par $e^{i\lambda} \cdot \psi$, où λ est une fonction arbitraire de position dans l'espace-temps. [151]

Alors que la première théorie de jauge faisait intervenir la transformation suivante des potentiels électromagnétiques :

$$\varphi_i' = \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i},$$

la seconde théorie de jauge lui substitue la transformation :

$$\varphi_i' = \varphi_i - \frac{\hbar}{e}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}.$$

La similitude entre ces deux types de transformations est frappante, d'autant que dans les deux cas, l'invariance de jauge aboutit à la loi de conservation de l'électricité. Mais, à l'instar de London, Weyl ne s'en tient pas à cette parenté formelle. Aussi affirme-t-il :

> Ce ≪ principe d'invariance de jauge ≫ [qui consiste à substituer simultanément $e^{i\lambda} \cdot \psi$ à ψ et $\varphi_i - \frac{\hbar}{e}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$ à φ_i] est quasiment analogue à celui que l'auteur avait introduit précédemment, pour des raisons spéculatives, afin de parvenir à une théorie unifiée de la gravitation et de l'électricité. Mais je crois maintenant que cette invariance de jauge ne relie pas la gravitation à l'électricité, mais *l'électricité à la matière* (...). [152]

Weyl reconnaît donc que sa première théorie de jauge reposait sur des bases purement spéculatives, ce que London soulignait également dans ≪ Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl ≫. Ce passage montre en filigrane que Weyl fonde sa seconde théorie de jauge sur des présupposés épistémologiques qui relèvent d'une attitude plus ≪ empiriste ≫ ; il met très explicitement de côté les justifications métaphysiques qui l'avaient conduit à une théorie unifiée des champs électromagnétique et gravitationnel en 1918. L'argument qu'il développe ici est capital puisqu'il montre que les deux théories de jauge n'unifient pas les mêmes faits physiques. La première théorie de jauge porte donc sur l'électromagnétisme et

151. H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantummechanics*, *op. cit.*, p. 100.
152. *ibid.*, p. 101.

la gravitation. En revanche, la seconde théorie de jauge a pour objet les ondes de matière et l'électricité. Ceci mérite commentaire. Souvenons-nous qu'en 1918, Weyl était convaincu que le réel physique pouvait se réduire aux interactions gravitationnelles et électromagnétiques et donc que la structure de la matière pouvait entièrement se traduire en termes de théorie classique des champs. Or, avec le développement de la mécanique ondulatoire, il s'avère que les ondes de matière constituent une « troisième entité » à côté de la gravitation et de l'électromagnétisme. Weyl explicite ce point comme suit dans la célèbre conférence qu'il donne à Cambridge sous le titre « Geometrie und Physik » en 1931 :

> D'après le projet de G. Mie, on pouvait espérer envisager les particules élémentaires de matière comme des nœuds d'énergie dans le champ gravito-électromagnétique, comme des domaines étroitement circonscrits de l'espace, dans lesquels les grandeurs de champ atteignaient des valeurs extrêmement grandes. C'est pourquoi le problème se posa alors *d'unifier la gravitation et l'électricité*. Depuis lors, la situation a fondamentalement changé (...). La théorie quantique a ajouté les ondes de matière aux ondes électromagnétiques, ces ondes de matière sont représentées par la fonction d'onde ψ de Schrödinger qui, comme le montrèrent Pauli et Dirac, ne doit pas être envisagée comme un scalaire mais comme une grandeur à plusieurs composantes. Avec les expériences sur la diffraction des ondes électroniques, l'existence de ces ondes est devenue certaine de manière parfaitement tangible. Cette nouvelle connaissance n'a encore rien à voir avec le comportement quantique des processus naturels ; dans le cadre de la physique classique des champs, la grandeur d'état ψ — le champ de matière — doit être introduit à côté de la gravitation et de l'électromagnétisme. Il faut combiner non pas *deux*, mais *trois* choses. De plus, en vertu des propriétés des transformations mathématiques de la grandeur ψ qui sont attestées par les spectres, il est incontestablement certain que le champ de matière ne peut pas se ramener à la gravitation et à l'électromagnétisme ; l'inverse pourrait à la rigueur se poser. [153]

Weyl rappelle ici que sa tentative avortée de *géométrisation* de l'électromagnétisme est intimement corrélée au programme réductionniste de Mie-Hilbert selon lequel la matière pourrait être envisagée comme une concentration très élevée d'énergie dans un champ « gravito-électromagnétique ». Avec les développements de la théorie des quanta [154] et l'avènement de la mécanique ondulatoire, le programme de Mie-Hilbert s'effondre : les physiciens doivent composer avec les ondes de matière en tant qu'entités spécifiques à côté des champs gravitationnel et électromagnétique. Lorsque dans la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Weyl dit vouloir relier matière et électricité, il reconnaît donc la spécificité des ondes de matière et la mise en échec du programme de Mie-Hilbert. Ainsi se confirme

153. H. Weyl, « Geometrie und Physik »,*op. cit.*, p. 51.

154. Souvenons-nous que, dès 1921, dans son article pour l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* sur la relativité restreinte et la relativité générale, Pauli réfute le programme de Mie au vu des développements de la théorie des quanta.

notre hypothèse : si les deux théories de jauge (1918 et 1928) constituent deux projets d'unification de la physique, elles ne s'appuient pas sur les mêmes cadres théoriques et elles ne portent pas sur les mêmes objets. La première théorie de jauge intervient dans un processus de *géométrisation* de la physique qui doit se prolonger aux phénomènes électromagnétiques. Il s'agit alors de prendre modèle sur la théorie de la relativité générale que Weyl considère purement et simplement comme une *géométrisation* de la gravitation. La théorie unifiée des champs de Weyl est intimement liée aux développements de la géométrie différentielle et de la géométrie riemannienne. Weyl entend alors déduire régulièrement les deux types d'interactions physiques alors connus — gravitation et électromagnétisme — à partir d'une métrique d'espace-temps qui généralise le cadre « riemannien » dans lequel se formalise la relativité générale. La seconde théorie de jauge est issue de la mécanique ondulatoire de Schrödinger et elle se prolonge à la mécanique quantique relativiste de Dirac. Elle est donc attachée à une théorie physique dont la mathématisation ne s'apparente plus à une « géométrisation » sur le modèle de la relativité générale.

Dans sa conférence de 1931 sur la géométrie et la physique, Weyl insiste d'ailleurs sur le fait que le cadre mathématique dans lequel se développe cette seconde théorie de jauge n'est pas d'ordre « géométrique ». Lorsque l'on veut comparer et différencier deux théories « unificatrices », il faut donc non seulement *identifier les objets* qu'elles unifient mais encore *montrer comment* elles les unifient. Or, pour Weyl, la première théorie de jauge a une composante essentiellement géométrique que n'a pas la seconde théorie de jauge. Par extension, il montre que toute *mathématisation* d'une théorie physique n'est pas nécessairement une *géométrisation*. Comme Weyl le souligne à titre rétrospectif, son erreur en 1918 a été non seulement de croire (1) que l'on peut déduire une théorie physique à partir d'un cadre géométrique construit *a priori* et (2) que le réel physique se réduit aux interactions gravitationnelles et électromagnétiques, mais aussi de penser (3) que toute la physique peut se géométriser sur le modèle de la relativité générale. Le développement de la mécanique ondulatoire constitue un exemple de théorie physique qui se mathématise sous une forme qui ne relève pas de la géométrie — différentielle et riemannienne. Pour le dire autrement, l'avènement de la mécanique quantique remet en question la suprématie que la géométrie différentielle et la géométrie riemannienne semblaient définitivement avoir acquise dans la formalisation de la physique avec le développement de la relativité générale. En effet, d'autres domaines des mathématiques sont mis en avant avec la mathématisation de la mécanique quantique : essentiellement l'algèbre abstraite, l'analyse fonctionnelle et la théorie des représentations de groupes. Aussi Weyl affirme-t-il :

> Il me semble que nous avons renoncé à une géométrisation [de l'électricité] en reliant l'électricité à la matière et non à la gravitation. Je crains que la tendance à la géométrisation, dont la gravitation avait hérité de plein droit en vertu des arguments les plus intuitifs, devait échouer en s'étendant à d'autres entités physiques. [155]

Ainsi, à la faveur d'une comparaison systématique entre la première et la seconde théorie de jauge, Weyl s'interroge sur les conditions et les limites d'une *géométrisation* de la physique. Au vu des succès remportés par la relativité générale, on pouvait avoir bon espoir de géométriser *toute* la physique et donc de l'unifier en introduisant une géométrie plus générale que la géométrie riemannienne. C'est ce qu'indique le passage suivant : « Avec la théorie einsteinienne, on comprit que les forces gravitationnelles découlent de la structure métrique ; une entité physique avait été « géométrisée ». Il est compréhensible qu'on ait pu tenter de géométriser la physique tout entière pour unifier l'image du monde ». [156] En 1918, Weyl considérait la géométrisation de la physique comme un « cela va de soi ». Mais avec l'avènement de la mécanique ondulatoire, ce projet est manifestement compromis : il ne s'agit plus d'affirmer que la physique peut se géométriser mais de savoir si et dans quelles limites on peut s'appuyer sur un cadre géométrique pour formaliser des interactions physiques. Or, pour Weyl, les « ondes de matière » se situent à l'extérieur de ce processus de géométrisation qu'elles viennent borner : tout un pan de la physique échappe à cette géométrisation. Weyl reconnaît donc l'*incommensurabilité* entre les formalismes attachés à la relativité générale et à la mécanique quantique à partir de sa comparaison entre les deux théories de jauge, malgré les similitudes qu'admettent les transformations de jauge dans les deux cas.

On peut donc synthétiser les différences entre Weyl (1918) et Weyl (1928-1929) de la manière suivante : (a) Weyl est aprioriste en 1918, en revanche il adopte une approche plus empirique en 1928-1929 ; (b) la théorie unifiée des champs constitue un prolongement et une généralisation de la relativité générale, par contre la seconde théorie de jauge se développe dans le cadre de la mécanique quantique (relativiste) dont les fondements sont maintenant assurés ; (c) Weyl estime que la matière est réductible à une théorie classique des champs en 1918, en revanche les faits physiques représentés par les ondes de matière constituent des entités à part entière avec le développement de la mécanique ondulatoire de Schrödinger ; (d) la première théorie de jauge participe de plain-pied à un projet de géométrisation de la physique en étroite relation avec les développements de la géométrie différentielle dus à Levi-Civita ou encore Weyl lui-même, par contre la seconde théorie de jauge implique d'autres cadres mathématiques — algèbre abstraite et analyse fonctionnelle — qui interviennent de

155. *ibid.*, p. 58.
156. *ibid.*, p. 51.

manière essentielle dans la mathématisation de la mécanique quantique.

3.3.3 Le tournant ≪ empirique ≫ de Weyl

Ainsi, même si les principes sur lesquels reposent les deux théories de jauge font intervenir des formules similaires, elles appartiennent à des régimes distincts de mathématisation des théories physiques. À cela s'ajoute que Weyl n'entretient pas le même rapport à l'empirie dans les deux cas. Non seulement la seconde théorie de jauge ne conduit pas à des conséquences physiques injustifiées, mais de plus elle sert de clé pour décrire une particule avec effet relativiste dans un champ électromagnétique. Précisons ce point. Comme nous l'avons souligné, la seconde théorie de jauge repose sur les transformations simultanées :

$$\widetilde{\psi} = e^{i\lambda} \cdot \psi \quad \text{et} \quad \varphi_i' = \varphi_i - \frac{\hbar}{e}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}.$$

Donnons-nous une particule dans un champ électromagnétique de potentiel φ_i. Weyl montre que l'opérateur de moment linéaire $p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ (pour une particule libre) doit alors être remplacé par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{ie}{2\pi h}\varphi_i$, où $-e$ désigne la charge de la particule. Weyl parvient ensuite à déduire le hamiltonien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique de potentiel φ_i. Il souligne le lien entre sa seconde théorie de jauge et la formulation des principaux opérateurs permettant de décrire le comportement physique d'une particule avec effet relativiste dans un champ électromagnétique, comme en atteste le passage suivant tiré de ≪ Geometrie und Physik ≫ :

> le passage de l'électron libre à un électron qui se meut dans un champ électromagnétique implique le principe selon lequel l'opérateur $\partial/\partial x_p$ qui agit sur ψ doit être remplacé par
>
> $$\frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{ie}{2\pi h} \cdot \varphi_p,$$
>
> où les φ_p sont les potentiels électromagnétiques ($-e$ est la charge de l'électron, h le quantum d'action). Entre les mains de Dirac, ce principe s'avèra être un précieux fil conducteur pour établir les équations du mouvement d'un électron avec spin muni de ses deux composantes (ψ_1 et ψ_2). Il en découle les bonnes expressions de l'énergie pour expliquer l'effet Zeeman anormal, la structure fine de l'atome d'hydrogène, etc. Si l'on pose $e/2\pi h \cdot \varphi_p = f_p$, alors cette règle est équivalente au principe suivant qui, d'un point de vue formel, ressemble exactement à notre ancien principe d'invariance de jauge : *l'équation du mouvement de l'électron est invariante par rapport à la substitution*
>
> $$\psi \to e^{i\lambda} \cdot \psi, \quad f_p \to f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p} \qquad (*)$$
>
> (λ est une fonction arbitraire de position dans l'univers). [Ce principe] résulte nécessairement du développement de la mécanique quantique qui permet d'incorporer un patrimoine d'expériences puissant et nouveau à notre théorie du champ. [157]

157. *ibid.*, p. 57.

Non seulement la seconde théorie de jauge n'est pas contredite par l'expérience, mais de plus elle possède une réelle effectivité pour décrire une particule (avec effet relativiste) dans un champ électromagnétique. Weyl mesure d'autant plus cela que ses conceptions épistémologiques sont marquées par un tournant « empirique ». En effet, dans « Geometrie und Physik », il met en exergue le principe suivant : « l'image objective du monde ne doit rien contenir qui ne puisse par principe être vérifié par l'expérience. Certes, de nombreuses couleurs physiquement différentes suggèrent la même impression de rouge ; mais cette différence cachée devient perceptible grâce à un prisme. En revanche, une différence qui ne peut aucunement apparaître dans l'expérience doit être mise de côté ». [158] Il passe sa première théorie de jauge au crible de ce principe. Celle-ci est donc définie par les substitutions simultanées :

$$\mathrm{d}s'^2 = \lambda \cdot \mathrm{d}s^2, \quad \varphi_i' = \varphi_i - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_p},$$

où λ est une fonction à valeurs dans l'ensemble des réels strictement positifs. Weyl soulève la difficulté suivante :

> Dans l'image théorique du monde, le passage de f_p [c'est-à-dire les φ_i] à $-f_p$ s'interprète comme un changement objectif du champ métrique ; pour un segment subissant un transport par congruence le long d'un lacet, ce n'est point la même chose que de s'agrandir ou de se rétrécir. Or, d'après la loi d'action adoptée, il n'est pas possible de choisir le signe de f_p sur la base des phénomènes observés. L'image théorique du monde contient en conséquence une différence inaccessible à la perception, ce qui contredit le principe épistémologique évoqué ci-dessus. [159]

Le raisonnement philosophique de Weyl peut être résumé comme suit : dans une théorie physique, seules les différences qui sont attestées empiriquement ont une signification ; celles qui ne satisfont pas à ce principe sont vides de sens et doivent donc être rejetées. Weyl montre justement que sa première théorie de jauge fait intervenir des différences qui n'ont aucun correspondant empirique. Qui plus est, elle présuppose une grandeur cosmologique inconnue, dont l'existence est acquise à la faveur d'un pur artifice de calcul. Ces données permettent à Weyl de formuler les quatre points majeurs de distinction entre ses deux théories de jauge, sous couvert d'une similitude formelle qu'il faut donc nettement relativiser :

> 1. Le nouveau principe est issu de l'*empirie* et il synthétise un important patrimoine d'expériences qui dérive de la spectroscopie.
>
> 2. *Le facteur de jauge $e^{i\lambda}$ ne concerne pas les grandeurs métriques h_α^p, mais les grandeurs matérielles ψ.*
>
> 3. L'exposant n'est pas réel, mais purement imaginaire. L'ambiguïté du signe $\pm f_p$ dans mon ancienne théorie est levée avec le signe indéterminé $\sqrt{-1}$. Auparavant déjà, alors que je jetais

158. *ibid.*, p. 50.
159. *ibid.*, p. 55.

> les bases de mon ancienne théorie, j'avais le sentiment que le facteur de jauge devait être de la forme $e^{i\lambda}$; mais je n'arrivais évidemment pas à lui donner un sens géométrique. Des travaux de Schrödinger et F. London appuyèrent cette requête en faisant apparaître de plus en plus clairement le rapport avec la théorie quantique.
>
> 4. Ici, l'unité qui se présente naturellement pour mesurer les potentiels électromagnétiques f_p n'est pas une unité cosmologique inconnue mais la grandeur atomique connue $e/2\pi h$. [160]

Le premier point représente le renversement de perspective le plus spectaculaire. La première théorie de jauge était déduite entièrement *a priori* à partir de la « géométrie purement infinitésimale » introduite par Weyl pour généraliser la géométrie riemannienne. En revanche, la seconde théorie de jauge est fondée sur les expériences qualitatives issues de la spectroscopie. Le deuxième point consiste à montrer que le facteur de jauge ne s'applique pas au $\mathrm{d}s^2$ mais à la fonction d'onde ψ censée décrire une onde de matière, c'est-à-dire une particule massive — étant entendu qu'en mécanique quantique, une particule se comporte de manière à la fois ondulatoire et corpusculaire. En filigrane, ce second point implique que la seconde théorie de jauge unifie matière et électricité. Le troisième point renvoie au principe épistémologique que Weyl utilise pour critiquer sa première théorie de jauge. Enfin, le quatrième point indique que la seconde théorie de jauge fait intervenir une grandeur atomique qui a un signification physique, alors que la première théorie de jauge repose sur une grandeur cosmologique dépourvue de sens.

Ces différences manifestent le triple basculement que l'on peut observer lorsque l'on compare les travaux de Weyl de la fin des années 10 et de la fin des années 20 : (1) basculement de la géométrie différentielle à des théories mathématiques qui trouveront des applications remarquables en mécanique quantique (théorie des représentations de groupes, analyse fonctionnelle, etc.) ; (2) basculement de la relativité générale à la mécanique quantique ; (3) basculement de l'*apriorisme* à une forme d'*empirisme*. Bien que ces trois basculements ne coïncident pas dans le temps et qu'ils ne puissent pas être reliés entre eux par des rapports de causalité simples, ils admettent une série de corrélations. Par exemple, l'*apriorisme* de Weyl l'amène en 1918 à une théorie unifiée des champs fondée sur une généralisation de la géométrie riemannienne. En revanche, le développement de la mécanique ondulatoire conduit Weyl à envisager la physique mathématique en étroite relation avec les données empiriques issues de la spectroscopie ; parallèlement, il relativise le poids de la géométrie pour mathématiser une théorie physique. Cependant, ce triple changement ne se fait pas de manière brutale et il s'explique partiellement en vertu des relations d'interdépendance que Weyl entretient avec

160. *ibid.*, p. 57.

d'autres chercheurs. Ainsi, le tournant empirique de Weyl est préparé par London lorsque ce dernier commence à jeter les bases d'une seconde théorie de jauge. En outre, nous avons suffisamment montré que l'intérêt de Weyl pour la mécanique quantique ne résulte pas simplement du privilège qu'il accorde à la théorie des représenstations de groupes en mathématiques. Il est également le produit des liens plus ou moins forts qu'il entretient avec les principaux acteurs qui sont engagés dans la formalisation de la mécanique quantique.

3.3.4 Quel lien entre le « tournant empirique » de Weyl et l'« empirisme » logique ?

Le tournant empirique de Weyl — que l'on observe aussi bien dans *Gruppentheorie und Quantenmechanik* que dans la comparaison qu'il établit entre sa première et sa seconde théorie de jauge — doit être précisé d'un point de vue philosophique. En effet, l'empirisme logique se développe dans diverses directions au cours des années 20 et au début des années 30, comme en témoignent les trajectoires de Carnap — qui a d'abord adhéré à la phénoménologie de Husserl au début des années 20 — de Schlick et de Reichenbach. Les liens de ces protagonistes avec Weyl ne sont pas inexistants. Ainsi que nous l'avons souligné dans notre deuxième partie, Reichenbach commente et critique à deux reprises la théorie unifiée des champs de Weyl — en 1920 dans *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori* et en 1928 dans *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*. Dans ces deux ouvrages, la relativité restreinte et la relativité générale constituent les théories physiques de référence pour Reichenbach. Ajoutons cependant qu'au début des années 30, Reichenbach publie plusieurs articles dans la revue *Erkenntnis* sur le calcul des probabilités et ses applications en physique ; il commence alors à s'intéresser explicitement à la mécanique quantique. Mais à aucun moment il ne se réfère à la monographie de Weyl sur la mécanique quantique. En retour, seuls Heisenberg et Jordan publient des articles dans *Erkenntnis* au début des années 30.

De plus, Weyl a consulté les deux éditions de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* de Schlick. En 1923, Weyl publie d'ailleurs une recension très critique de l'ouvrage de Schlick (première édition) parce que ce dernier s'en prend alors directement à la phénoménologie de Husserl. Comme le souligne Ryckman, cette recension s'adresse à un public de scientifiques. Sans doute Weyl a-t-il alors pour but de contrer les thèses de Schlick qui connaissent une véritable audience auprès de physiciens tels qu'Einstein. Plus tardivement, dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927), Weyl se réfère de manière pacifiée à l'*Allgemeine Erkenntnislehre* de Schlick (seconde édition) ; il salue la pertinence des réflexions menées par

ce dernier sur les définitions implicites de concepts. Les relations de Weyl avec les empiristes logiques restent ténues, y compris lorsque l'on se réfère à sa correspondance. Seule une lettre de Schlick à Weyl datant de 1926 est recensée dans les archives Weyl.[161] Le fonds Reichenbach qui se trouve à l'université de Pittsburgh répertorie trois lettres (de Reichenbach à Weyl et / ou de Weyl à Reichenbach). Il y aurait donc une correspondance entre ces deux protagonistes entre 1919 et 1923, c'est-à-dire au moment où Weyl développe sa première théorie de jauge, alors que Reichenbach critique très directement ce projet dans *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori* (1920). Malheureusement, nous n'avons pas pu consulter cette correspondance.

Nous ne saurions donc majorer le rôle des positivistes logiques pour expliquer l'adhésion de Weyl à une méthode et une épistémologie de style empiriste à partir de la fin des années 20. Cependant, nous ne pouvons pas tenir sous silence la référence aux positivistes logiques pour aborder le « tournant empirique » de Weyl. Il y a trois raisons à cela. En premier lieu, Reichenbach critique avec insistance la posture spéculative adoptée par Weyl en 1918 pour géométriser les interactions gravitationnelles et électromagnétiques. Certes, Reichenbach n'est ni le premier, ni le seul à adresser ce reproche à Weyl. Il est néanmoins très vraisemblable que Weyl ait intériorisé de telles critiques lorsqu'en 1928, il affirme que sa première théorie de jauge reposait sur des motivations purement spéculatives. En second lieu, Weyl s'approprie la seconde édition de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* de Schlick au moment où il rédige *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927). Or, Schlick insiste sur le fait que dans une théorie physique, chaque concept doit recevoir une interprétation univoque et déterminée au regard de l'expérience. La seconde théorie de jauge satisfait à cette condition ; ce n'est pas le cas de la première théorie de jauge, comme le montre d'ailleurs Weyl dans « Geometrie und Physik ». En troisième lieu, la référence au positivisme logique nous permet de mesurer à l'aide d'un argument comparatiste la *spécificité* de l'empirisme prôné par Weyl à la fin des années 20. Nous pouvons ainsi affiner et préciser l'hypothèse d'E. Scholz selon laquelle la philosophie de Weyl est marquée par un tournant empirique au milieu des années 20.

161. M. Schlick an H. Weyl, 17 juillet 1926, Hs 91 : 728, *ETH-Bibliothek*. Le motif premier de ce courrier est le suivant : Schlick vient de recevoir un exemplaire de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Il précise à Weyl que, depuis peu, ses recherches portent essentiellement sur des questions d'éthique. Il mentionne donc ses travaux préparatoires aux *Fragen der Ethik* qui seront publiées en 1930. Il ajoute que l'équipe qui l'entoure à Vienne est néanmoins attachée aux problèmes qui concernent les fondements des mathématiques et des sciences de la nature. Employant alors la première personne du pluriel, Schlick fait allusion au Cercle de Vienne dont il est cofondateur. Il espère que ce groupe de chercheurs discutera les « intuitions » de Weyl sur ces problèmes.

Moritz Schlick qui est l'un des fondateurs du cercle de Vienne publie donc en 1918 son *Allgemeine Erkenntnislehre* qui fait l'objet d'une édition augmentée en 1925, soit trois ans après la création du cercle de Vienne (1922). L'*Allgemeine Erkenntnislehre* décrit les principales orientations de l'≪ empirisme ≫ logique qui ne doit pas être considéré comme un corps de doctrine monolithique constitué une fois pour toutes. En outre, nous mettons le terme empirisme entre guillemets, dans la mesure où les positivistes logiques rompent avec l'empirisme de Hume et de Mill autant qu'ils le prolongent. Par exemple, à la différence de l'empirisme traditionnel, les positivistes logiques s'accordent pour considérer les mathématiques comme une science purement formelle, dépourvue de tout contenu et donc ils n'envisagent pas de la fonder sur l'expérience. [162]

Plusieurs passages de *Philosophie der Mathematik* de Weyl indiquent que celui-ci s'est approprié certains arguments issus de la seconde édition de l'*Allgemeine Erkenntnislehre*. Ceci constitue d'abord un motif d'étonnement. En effet, au cours des années 20, Weyl demeure attaché à la phénoménologie de Husserl. Or, Schlick se montre très hostile à l'encontre de ce qu'il appelle l'analyse phénoménologique dans son *Allgemeine Erkenntnislehre*, même s'il atténue certaines de ses critiques dans la seconde édition de cet ouvrage. [163] La phénoménologie n'est pour Schlick qu'une propédeutique à une véritable théorie de la connaissance. Cette critique de la phénoménologie indique en filigrane l'adhésion de Schlick à une forme de positivisme que Weyl refuse catégoriquement, comme en témoigne la recension de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* qu'il rédige en 1923. En outre, dès 1919, Weyl prend parti pour Brouwer et donc contre Hilbert dans le domaine des fondements des mathématiques. En revanche, Schlick s'inspire largement des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert qu'il envisage d'ailleurs sous un jour purement formaliste. Autrement dit, pour Schlick, les mathématiques au sens de Hilbert consistent à manipuler des symboles vides de sens. [164] Nous savons qu'en 1924-1925, Weyl

162. Pour plus de détails, voir D. Chapuis-Schmitz, ≪ Les empiristes logiques et l'expérience ≫, in *L'Expérience*, Paris, éd. Vrin, 2010, p. 133-135.

163. M. Schlick, *General Theory of Knowledge* (1925), trad. Blumberg, Chigago and La Salle, éd. Open Court, 2002, p. 24 : ≪ It is a great error to believe that the solution of problems in the theory of knowledge requires that we first distinguish all the various modes of consciousness and ≪ acts ≫. If that were the case, we should never be able to answer any epistemological question. For the number of modes of consciousness is unlimited and inexhaustible ; no single experience, strictly speaking, is exactly the same as any other. The method of ≪ phenomenological analysis ≫, so widely prized and practiced today, undertakes to make just such differentiations. Hence the more thoroughly it is carried out, the farther it takes us into a realm without limits. This method does not yield real knowledge ; it only prepares the way for knowledge ≫.

164. Nous avons vu dans la partie précédente que Hilbert s'inscrit en faux contre une telle définition des mathématiques, comme en témoignent ses conférences de 1919-1920 en épistémologie à Göttingen. Hilbert est le partisan d'une *begriffliche Mathematik* qui ne laisse pas de place à l'arbitraire.

suit une voie moyenne qui lui permet de concilier formalisme et intuitionnisme. Il ne s'oppose donc plus aussi radicalement à Hilbert ; corrélativement, il met en exergue les développements que Schlick consacre aux définitions implicites de concepts dans une veine hilbertienne.

Notre but n'est pas ici de commenter de manière systématique et détaillée l'*Allgemeine Erkenntnislehre* de Schlick. Nous pouvons au moins montrer qu'il s'écarte radicalement du kantisme et qu'il indique sous quelles conditions nos concepts peuvent être coordonnés de manière *univoque* [eindeutig] à des objets réels. Cette exigence de *coordination* avec la réalité empirique, commune à Schlick, Carnap et Reichenbach, n'est sans doute pas passée inaperçue aux yeux de Weyl. En effet, dans les travaux qu'il consacre à la mécanique quantique, Weyl s'assure que ses hypothèses et concepts sont parfaitement coordonnés à la réalité empirique qu'il entend décrire et expliquer.

Avant de formuler le principe de coordination entre théorie et réalité empirique, Schlick s'intéresse aux définitions implicites de concepts. Un concept est défini implicitement lorsqu'il est envisagé indépendamment de tout support intuitif et de tout contenu empirique. Pour être plus précis, une définition implicite se compose d'axiomes en nombre réduit que l'on formule abstraction faite de la nature des objets auxquels ils renvoient. De telles définitions apparaissent effectivement au début des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert et elles se systématisent dans diverses branches des mathématiques, en particulier l'arithmétique, l'algèbre, mais aussi l'*analysis situs* et l'analyse. De même que Hilbert entend appliquer la méthode axiomatique aux mathématiques et aux sciences de la nature, de même Schlick insiste sur le fait que les définitions implicites peuvent nous permettre de déterminer n'importe quel concept scientifique. Les mathématiques lui servent donc de paradigme pour systématiser le recours aux définitions implicites. Ces dernières s'appliquent en droit à toutes les sciences de la nature. C'est ce qui ressort de la citation suivante, tirée du § 7 de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* :

> Nevertheless, the significance of the studies we are about to report is by no means confined to mathematics. On the contrary, they are in principle just as valid for scientific concepts generally as they are for those of mathematics. It is simply a matter of convenience that we take mathematical concepts as a paradigm on which to base our considerations. [165]

Les définitions implicites correspondent à l'une des fonctions de la méthode axiomatique : introduire des concepts mathématiques satisfaisant à certains axiomes et montrer que ces concepts peuvent recevoir diverses interprétations une fois que l'on a spécifié la nature des objets auxquels ils se rapportent. Cela étant, dans les *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert

165. *ibid.*, p. 32.

ne se contente pas de définir implicitement les concepts de point, de droite ou de plan. Il s'intéresse à la structure logique de l'axiomatique qui est au *fondement* de la géométrie élémentaire : il s'agit donc pour lui de *fonder* une théorie mathématique et de mesurer si le système axiomatique auquel il aboutit satisfait à des exigences de *consistance*, de *complétude* et de *catégoricité*.

Schlick montre qu'il y a un équivalent aux définitions implicites de concepts en physique. En effet, dans le domaine de la physique, il existe des lois formelles, par exemple des équations ou encore des théorèmes, qui peuvent s'appliquer à des phénomènes très divers ou trouver des réalisations dans une diversité de théories. [166] On peut donner diverses interprétations à ces lois formelles dès lors que l'on spécifie la nature des quantités physiques auxquelles elles renvoient. Par exemple, le premier théorème de Noether admet diverses applications, notamment en mécanique classique et en relativité restreinte.

Puisque les définitions *implicites* de concepts consistent à faire totalement abstraction de la nature des entités auxquelles elles renvoient, elles s'opposent aux définitions *constructives*. Une définition est constructive lorsque l'on se donne les moyens de construire effectivement les objets qui correspondent aux concepts que l'on souhaite définir. Pour le dire autrement, si l'on définit un concept implicitement, l'existence d'objets correspondant à ce concept est garantie à une seule condition : il faut que le système d'axiomes qui préside à une telle définition ne soit pas contradictoire. Une définition constructive exige plus : il convient de s'assurer que ces objets peuvent effectivement être engendrés — par exemple à l'aide d'un algorithme. Dans une perspective strictement intuitionniste, on doit remplacer systématiquement les définitions implicites de concepts par des définitions constructives. Si ce n'est pas possible, cela signifie que nous manipulons des concepts vides de sens, puisqu'ils sont dépourvus de tout contenu objectif.

Dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Weyl reprend complètement à son compte les arguments développés par Schlick au sujet des définitions implicites de concepts. Ceci pourrait d'abord étonner. En effet, dès 1919, Weyl adhère au programme intuitionniste de Brouwer : l'existence mathématique doit être plus que la possibilité logique c'est-à-dire la non-contradiction. Or, ce point de vue est très coûteux au niveau de la pratique des mathématiciens : bon nombre de concepts et de théorèmes en mathématiques doivent être sacrifiés au nom de cette exigence très stricte qui porte sur la construction effective d'objets

166. *ibid.*, p. 35 : ≪ It is a familiar fact that essentially different phenomena may nevertheless obey the same formal laws. The same equation may represent quite different natural phenomena depending on the physical meanings we assign to the quantities that occur in it ≫.

mathématiques. Il ne faut pas oublier qu'en 1924, Weyl réalise que les prescriptions des intuitionnistes conduisent à révoquer en doute des pans entiers des mathématiques. Il entend désormais concilier les thèses de Brouwer et de Hilbert ; corrélativement, il reconnaît sur un plan épistémologique l'importance des définitions implicites de concepts qu'il n'a d'ailleurs jamais cessé d'utiliser, même pendant sa parenthèse intuitionniste (1919-1923). Il admet avec Schlick que ce mode de définition peut s'étendre aux sciences de la nature :

> Dans sa *Théorie générale de la connaissance* (Berlin 1918, p. 30-37), Schlick a très bien expliqué la signification des définitions implicites non seulement en mathématiques, mais dans toutes les sciences. [167]

Lorsque Schlick insiste sur l'importance des définitions implicites de concepts dans les théories physiques, il envisage ces dernières sur un plan strictement formel. Néanmoins, sa motivation principale ne consiste pas à garantir une plus grande rigueur aux théories physiques en tant que systèmes déductifs. Il s'agit en effet de s'assurer qu'une théorie peut être *coordonnée de manière univoque* aux objets physiques. [168] Si un concept, une hypothèse ou une théorie ne satisfont pas à cette exigence de coordination, alors elles n'ont qu'un intérêt formel. C'est notamment le cas de la théorie unifiée des champs de Weyl. Pour qu'il y ait coordination, il faut s'assurer que chaque concept défini abstraitement renvoie à un objet réel. La première théorie de jauge de Weyl contrevient à ce principe : en effet ≪ l'unité naturelle qui permet de mesurer des potentiels électromagnétiques ≫ est alors une quantité cosmologique inconnue ; autrement dit, on ne sait pas si une telle quantité a un correspondant dans la réalité. L'exigence d'une coordination entre concepts et objets réels est une condition sans laquelle on risque de développer une théorie qui outrepasse les conditions de l'expérience.

Selon Schlick, les procédures de mesure permettent de s'assurer que la coordination entre théorie et réalité physique est *univoque*. Précisons que Schlick développe une théorie de la mesure dans un cadre non quantique, il n'aborde donc pas la question des interactions entre instrument de mesure et objet mesuré à une échelle atomique et subatomique. Supposons que certaines équations nous permettent de calculer une quantité physique, par exemple la

167. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, *op. cit.*, p. 46.

168. Voir à ce propos Delphine Chapuis-Schmitz, ≪ Définitions implicites, définitions explicites et application des théories physiques ≫, in J. Bouveresse, P. Wagner (sous la dir. de), *Mathématiques et expérience, l'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)*, Paris, éd. Odile Jacob, 2008, p. 161 : ≪ Selon Schlick, l'application d'un concept à un objet prend la forme d'une coordination : un concept désigne un objet réel s'il est coordonné de manière univoque à cet objet. L'idée de coordination joue véritablement un rôle essentiel dans l'épistémologie schlickéenne : toute connaissance consiste selon lui dans la simple coordination de concepts à des objets réels — et non dans l'observation ou l'appréhension perceptive de ces derniers par exemple ≫.

température d'un corps ; si nos mesures aboutissent au même résultat numérique — aux approximations près —, alors la coordination entre théorie et réalité physique est dite univoque. Lorsque cette univocité n'est pas satisfaite, nous pouvons mettre en cause tantôt la fiabilité de nos instruments de mesure, tantôt certaines hypothèses théoriques. L'exigence d'une coordination univoque entre théorie et réalité physique constitue un dénominateur commun aux empiristes logiques. C'est, en tout cas, ce que laisse entendre P. Wagner dans l'introduction à l'ouvrage collectif *Mathématiques et expérience, l'empirisme logique à l'épreuve* :

> Schlick, Reichenbach et Carnap proposèrent des solutions variées qui reposaient toutes néanmoins sur l'idée d'une *coordination [Zuordnung]*, c'est-à-dire d'une *mise en correspondance* dont la fonction était de donner aux systèmes de concepts axiomatiquement définis un ancrage dans la ≪ réalité empirique ≫, quelle que soit l'interprétation que ces auteurs aient pu donner, au sein de leur philosophie, de cette dernière expression. [169]

Même s'il est absurde d'établir un rapport de cause à effet entre le développement de l'empirisme logique et le ≪ tournant ≫ empirique de Weyl au cours des années, nous pouvons présumer (1) que Weyl a dû prendre connaissance des critiques que Reichenbach a adressées à l'encontre de son projet de théorie unifiée des champs, (2) qu'il n'a pas pu ignorer l'importance que Schlick accorde aux principes de coordination dans une théorie physique puisqu'il a écrit une recension de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* en 1923 et qu'il mentionne cet ouvrage dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927).

Mais cela ne signifie pas que Weyl adhère aux présupposés des empiristes logiques : l'empirisme de Weyl n'est pas du même ordre que celui de Schlick, Carnap ou encore Reichenbach. En effet, (i) Weyl ne perd de vue la référence à la phénoménologie de Husserl, (ii) il n'est pas positiviste, (iii) il n'affirme pas que les théories physiques dépendent entièrement de l'expérience quant à leur contenu (on dira plus subtilement qu'il défend un *quasi-empirisme*), (iv) il est holiste au sens de Duhem dès la première édition de *Raum, Zeit, Materie* (1918), ce qui signifie qu'une théorie doit être confrontée dans sa globalité à l'expérience ; il est rigoureusement impossible de vérifier une théorie hypothèse par hypothèse. Ajoutons pour nuancer les choses que, parmi les membres du cercle de Vienne, Neurath développe très tôt un argument de type holiste pour décrire le rapport entre théorie et expérience. Carnap admet dès le milieu des années 30 que les propositions hypothétiques sont solidaires les unes des autres en physique : elles ne peuvent pas être testées isolément. [170]

169. *ibid.*, p. 11.

170. R. Carnap, *La syntaxe logique du langage*, trad. fr. J. Bouveresse, Paris, éd. Gallimard, § 82, à paraître, cité par D. Chapuis-Schmitz, *op. cit.*, p. 147 : ≪ Il est, d'une manière générale, impossible de tester ne serait-ce qu'une seule proposition hypothétique isolée (...) il faut également utiliser les autres hypothèses ≫.

(i) Un passage fondamental de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* montre que Weyl reste partiellement fidèle aux arguments développées par Husserl dans ses fameuses *Ideen*. Revenant sur la question des jugements *a priori* chez Kant, Weyl affirme :

> Le développement général de la philosophie a suivi son cours de telle sorte que les jugements *a priori* de Kant ont bifurqué dans deux directions : d'un côté les ≪ lois de l'essence ≫ qui expriment les connexions fondamentales entre les données de la conscience sans avoir la prétention d'impliquer une quelconque assertion concernant les faits (cette ligne atteint son sommet dans la phénoménologie de Husserl ; l'a priori est ici bien plus riche que dans le système kantien) ; de l'autre les principes de la construction théorique qui, d'après le point de vue extrême de Poincaré, repose sur une simple convention. [171]

Dans ce passage, il fait allusion au § 7 des *Ideen*, dans lequel Husserl distingue les sciences de l'essence et les sciences de fait. Une science de l'essence — par exemple la logique, la mathématique pure et, en particulier, la géométrie — ne sont pas fondées sur l'expérience, elles ne visent donc jamais des faits individuels. Husserl reprend à son compte un célèbre argument issu de *la théorie transcendantale de la méthode* de Kant pour expliquer ce point dans le cas de la géométrie : ≪ le *géomètre*, lorsqu'il trace au tableau ses figures, forme des traits qui existent en fait sur le tableau qui lui-même existe en fait. Mais pas plus que le geste physique de dessiner, l'expérience de la figure dessinée, en tant qu'expérience, ne *fonde* aucunement l'intuition et la pensée qui portent sur l'essence géométrique ≫. [172] Autrement dit, lorsque le mathématicien trace une figure géométrique au tableau, il ne prête pas attention aux lignes qu'il dessine, mais bien à l'≪ essence ≫ que cette figure représente inadéquatement. Par *essence*, Husserl n'entend pas une forme en soi existant indépendamment de nous : une *essence* est toujours conditionnée par un acte de conscience. Pour le dire autrement, la phénoménologie de Husserl est une philosophie de la conscience, elle est absolument étrangère au réalisme des idées de style platonicien.

Le géomètre n'a pas pour objet des faits individuels, par définition empiriques, mais des *possibilités idéales* regroupées sous le vocable ≪ essence ≫. En conséquence, la géométrie est bien pour Husserl une science entièrement *a priori* : elle ne dépend pas de l'expérience et

Il faut néanmoins se garder s'assimiler les thèses de Carnap développées dans cet ouvrage au holisme de Duhem. Pour plus de précisions sur les différences entre Carnap et Duhem, voir en particulier M. Friedman, *Reconsidering logical positivism*, New York, Cambridge University Press, 1999, p. 85 : pour un holiste, toutes les propositions ont essentiellement le même statut dans une théorie. En revanche, Carnap maintient une distinction tranchée entre les propositions analytiques *a priori* d'une part, les propositions synthétiques *a posteriori* d'autre part.

171. H. Weyl, *op. cit.*, p. 172.

172. E. Husserl, *Idées directrices pour une phénoménologie* (1913), trad. Ricœur, Paris, éd. Gallimard, 1950, p. 31.

elle est fondée sur l'*intuition des essences*. Ce passage montre que Husserl refuse de réduire les mathématiques à un agencement de symboles vides de sens : à ses yeux, la logique et les mathématiques doivent être sous-tendues par une « intuition des essences », ce qui signifie que ses thèses sont compatibles avec les présupposés de l'intuitionnisme, même s'il faut se garder d'identifier ce que Husserl et Brouwer entendent par intuition.

Weyl distingue la *phénoménologie* de Husserl et le *conventionnalisme* de Poincaré. Pour les « conventionnalistes », les connaissances *a priori* ne sont pas sous-tendues par des visées intuitives ; il s'agit de pures conventions formelles construites indépendamment de l'expérience. Dans une perspective conventionnaliste, il est possible d'assujettir un même ensemble de phénomènes à des systèmes de conventions différents. Il s'avère que Schlick adhère au conventionnalisme qu'il applique d'ailleurs à la relativité générale, comme en témoigne son ouvrage intitulé *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik* (1917 pour la première édition). Dans notre deuxième partie, nous avons montré à la suite de Friedman que le conventionnalisme de Poincaré est construit à partir d'un cadre géométrique bien précis — problème de Helmholtz-Lie, axiome de libre mobilité, variétés à courbure constante — qui n'est plus de mise en relativité générale. Weyl refuse d'adhérer au conventionnalisme non pas seulement dans la mesure où il est attaché à la phénoménologie de Husserl, mais parce qu'il pense les propriétés de l'espace-temps dans le cadre de la relativité générale. Or cette théorie physique est fondée sur l'équation d'Einstein. Cette dernière affirme que le contenu en « matière » de l'espace-temps décrit par le tenseur d'énergie-impulsion — dont le sens est *physique* — conditionne la structure métrique, i.e. géométrique, de l'univers. On ne peut pas parler en relativité générale d'une sous-détermination de la géométrie par l'expérience.

Dans *Philosophie der Mathematik*, Weyl décrit deux prolongements différents de Kant en matière de connaissances *a priori* : la phénoménologie de Husserl et le conventionnalisme auquel adhère l'un des principaux représentants de l'empirisme logique, à savoir Schlick. En 1921-1923, Weyl tranche en faveur de Husserl avec la formulation et la résolution du problème de l'espace (adapté à la relativité générale). En 1925-1927, il s'abstient de trancher. En tous les cas, il ne perd pas de vue la référence aux thèses de Husserl en théorie de la connaissance au milieu des années 20, sans estimer que la phénoménologie ferait autorité. Preuve que le tournant *empirique* que l'on constate dans ses écrits scientifiques n'implique pas qu'il adhère massivement à une philosophie de style *empiriste* et conventionnaliste à l'image de certains positivistes logiques. Pour le dire autrement, Weyl utilise des arguments d'ordre empiriste uniquement pour des raisons méthodologiques dans ses recherches en mécanique quantique ; en revanche, il ne se positionne pas philosophiquement en faveur de l'empirisme

logique — quelles que soient les modalités dans lesquelles il peut être formulé. En particulier, Weyl n'adhérera jamais à la posture anti-kantienne et anti-phénoménologique qui est prônée par Schlick dès la première édition de l'*Allgemeine Erkenntnislehre* avant d'être relayée par Reichenbach au milieu des années 20.

(ii) Comme nous l'avons souligné, l'*empirisme* de Reichenbach, Schlick et Carnap est, pour l'essentiel, un *positivisme* ; les thèses empruntées à la tradition philosophique de style kantien doivent être passées au crible des méthodes et des théories scientifiques. En outre, les positivistes logiques assignent une et une seule fonction à la philosophie : élucider les propositions établies et vérifiées par la science ; corrélativement, il s'agit de rejeter tous les énoncés dépourvus de sens. Autrement dit, pour les positivistes logiques, la philosophie consiste à dégager les fonctions logiques du langage et à rendre raison du rapport que les théories scientifiques entretiennent avec la réalité empirique.

Si l'on brosse à grands traits le parcours philosophique de Weyl, on peut le découper de manière très approximative en trois étapes : dès le début de ses études à Göttingen, il se distancie par rapport aux thèses de Kant pour adhérer à une forme de positivisme dans le prolongement de Mach. À partir du milieu des années 10, il s'intéresse à la phénoménologie de Husserl et à l'idéalisme de Fichte ; corrélativement, il renonce au positivisme. Son adhésion à l'intuitionnisme de Brouwer ne fera que renforcer ce point. La démarche très spéculative qu'il adopte lorsqu'il élabore sa théorie unifiée des champs se solde par un échec retentissant. Cet échec explique au moins en partie qu'il ait pu renoncer à l'idéalisme fichtéen. D'où le tournant empirique du milieu des années 20 qui ne doit pourtant pas être interprété comme un retour à une forme de positivisme. Contrairement à l'empirisme de Reichenbach, Schlick ou encore Carnap, l'empirisme de Weyl n'est pas adossé à une posture positiviste. Weyl renonce à la spéculation de style fichtéen pour des raisons méthodologiques ; à aucun moment il ne réduit la philosophie à une élucidation des énoncés scientifiques. Philosophie et science se complètent et se conditionnent mutuellement pour Weyl. À la différence de Reichenbach, il refuse de passer systématiquement le criticisme de Kant ou la phénoménologie de Husserl au crible des théories physiques pour identifier ce qui mériterait d'être conservé ou rejeté dans de tels systèmes philosophiques.

(iii) Si nous mettons de côté l'ouvrage de Reichenbach de 1920 sur la relativité dont le statut est particulier, nous pouvons dire que les positivistes logiques attribuent à l'expérience tout le contenu du savoir scientifique. Reichenbach, Schlick et Carnap partagent *in fine* une même thèse : il n'existe pas de jugements de connaissance qui seraient à la fois synthétiques et *a priori*. Autrement dit, tous les jugements *a priori* sont analytiques. Ils garantissent une

cohérence logique aux théories physiques, mais ils ne leur apportent pas le moindre contenu. Weyl se montre plus nuancé : (a) il ne renonce pas à l'existence de jugements synthétiques *a priori*[173] ; (b) il n'attribue donc pas à l'expérience *tout* le contenu du savoir scientifique. L'épistémologie implicite de Weyl n'est pas un empirisme au sens strict, mais un *quasi-empirisme*. Il admet l'existence de principes *a priori* qui ne sont pas purement formels ou logiques et qui permettent de *constituer* des théories physiques : il s'agit en l'occurrence des principes d'invariance ou de symétrie à l'instar du principe de relativité. Nous trouvons la trace de ce *quasi-empirisme* dans les travaux scientifiques de Weyl de la fin des années 20 en mécanique quantique. Weyl l'explicite en toute clarté dans deux textes philosophiques plus tardifs : « Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen » (1948) et *Symmetries* (1952). Les thèses développées par Weyl dans ces deux écrits ne sont pas sans faire écho à l'ouvrage de jeunesse de Reichenbach sur la relativité. Souvenons-nous qu'en 1920, Reichenbach estimait que les principes qui permettent de coordonner la forme mathématique et le contenu empirique d'une théorie physique sont des jugements synthétiques *a priori*. Pour illustrer cet argument, Reichenbach donnait justement l'exemple du principe de relativité qui est un principe d'invariance. Nous entendons montrer que l'épistémologie implicite qu'élabore Weyl *in fine* admet des similitudes frappantes avec les thèses défendues par Reichenbach en 1920, avant donc que ce dernier n'adhère à un empirisme au sens strict.

Dans son article intitulé « Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen », Weyl revient sur le principe de relativité qui constitue un exemple de principe d'invariance parmi d'autres. Il montre que le principe de relativité est le principal instrument afin de représenter au mieux la réalité transcendante à l'aide d'une théorie mathématisée. En effet, si tout variait, si les lois de la nature changeaient de forme à chaque fois que l'on change de référentiel, alors le réel physique se déroberait sous nos yeux. Le principe de relativité est plus qu'un principe formel ou logique ; il est *constitutif* de notre connaissance de la nature. Corrélativement, Weyl aborde une difficulté que nous pouvons formuler comme suit : si une théorie physique était exclusivement assujettie au principe de non-contradiction et au tribunal de l'expérience, alors son fondement serait purement arbitraire. Les principes d'invariance ajoutent des contraintes supplémentaires qui viennent remédier à cet arbitraire. Par exemple, en vertu du principe de relativité, une expression mathématique logiquement possible dont la forme serait modifiée par changement de coordonnées *n*'est *pas* une loi de la nature et elle n'a pas à retenir l'intérêt du physicien. Les principes d'invariance constituent

173. Par exemple, dans la construction du problème de l'espace, Weyl fait intervenir des principes analytiques *a priori* et des principes synthétiques *a priori*.

donc des contraintes *a priori* qui permettent au physicien d'effectuer une sélection drastique parmi toutes les formules auxquelles il aboutit.

> En raison de la liberté de l'esprit, il est en somme évident qu'un certain arbitraire intervienne de manière inévitable dans ses constructions, cet arbitraire doit ensuite être compensé par un principe d'invariance. [174]

À l'instar de Reichenbach en 1920, Weyl maintient l'existence de principes *a priori* au sens où ils sont *constitutifs* d'une théorie physique ; ils ne dérivent pas des lois de la nature puisqu'ils les contraignent formellement. Pour justifier son propos, Weyl se réfère donc aux principes d'invariance et, en particulier, au principe de relativité. Corrélativement, Weyl affaiblit le concept d'*a priori*, exactement à l'image de ce que faisait Reichenbach dans son ouvrage sur la relativité. En effet, pour Weyl un principe *a priori* n'est pas universel et nécessaire, il n'est pas valable de tout temps ; il demeure relatif et révisable. S'il est attesté que les principes d'invariance sont des conditions sans lesquelles nulle loi de la nature ne pourrait être formulée, cela ne signifie pas pour autant qu'ils seraient vrais de manière définitive.

(iv) Un autre aspect des réflexions de Weyl sur les sciences de la nature le singularise par rapport à Reichenbach, Carnap et Schlick : Weyl prend parti pour une forme de holisme dès la première édition de *Raum, Zeit, Materie*. [175] Cela signifie tout d'abord qu'on ne teste jamais des hypothèses isolément en physique ; seule une théorie considérée globalement peut être confrontée au tribunal de l'expérience. Pour Weyl, une théorie physique ne peut pas être coordonnée terme à terme ou hypothèse par hypothèse à la réalité empirique. Le holisme de Weyl est redevable de Duhem et de Hilbert. [176] Certes, à la lecture de *Raum, Zeit, Materie*, il n'est pas encore clair que Weyl ait lu Duhem. En revanche, il se réfère explicitement à *La théorie physique, son objet, sa structure* de Duhem (1906) dans *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* (1927). Rappelons que, dans *La théorie physique*, Duhem défend la thèse selon laquelle les hypothèses sont solidaires les unes des autres dans une théorie physique. Lorsqu'un résultat contredit nos prédictions, nous ne pouvons pas savoir

174. H. Weyl, ≪ Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen ≫, *Eranos Jahrbuch* 1949 in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. IV, p. 336 : ≪ [E]s ist einigermaßen aus der Freiheit des Geistes verständlich, daß in seine Konstruktion unvermeidlich Willkür eingeht, daß aber diese nachträglich durch ein Prinzip der Invarianz unschädlich gemacht werden kann ≫.

175. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie* (1918), *op. cit.*, p. 61, *Temps, espace, matière*, *op. cit.* p. 57 : ≪ La dépendance entre l'expérience immédiate et celle que la raison cherche à saisir conceptuellement dans une théorie, comme étant la chose objective, cachée derrière elle n'est pas aussi simple que l'on puisse croire que chaque hypothèse particulière possède un sens intuitif immédiat ≫.

176. H. Weyl, ≪ David Hilbert and his mathematical work ≫, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **50** (1944), p. 640.

immédiatement quel est l'énoncé ou le groupe d'énoncés qui sont mis en défaut ; cela signifie que l'expérience nous dit seulement qu'il y a une erreur, elle ne nous donne aucun moyen de la *localiser* :

> On pense communément que chacune des hypothèses dont la physique fait usage peut être prise isolément, soumise au contrôle de l'expérience, puis, lorsque des épreuves variées et multipliées en ont constaté la valeur, mise en place d'une manière définitive dans le système de la physique. En réalité, il n'en est pas ainsi ; la physique n'est pas une machine qui se laisse démonter ; on ne peut pas essayer chaque pièce isolément et attendre, pour l'ajuster, que la solidité ait été minutieusement contrôlée ; la science physique, c'est un système que l'on doit prendre tout entier ; c'est un organisme dont on ne peut faire fonctionner une partie sans que les parties les plus éloignées de celle-là entrent en jeu, les unes plus, les autres moins, toutes à quelque degré (...). [177]

Le holisme de Duhem fonctionne à rebours du vérificationnisme de Schlick, Carnap ou encore Reichenbach. Pour les vérificationnistes, non seulement chaque hypothèse physique peut et doit recevoir un sens physique déterminé, mais de plus les énoncés d'observation (Schlick) ou les énoncés protocolaires (Carnap) sont les constituants atomiques de base d'une théorie physique. *A contrario*, Duhem estime que ≪ les vérifications expérimentales ne sont pas la base de la théorie, elles en sont le couronnement ≫. L'idée selon laquelle une théorie physique est comme un organisme dont les parties sont solidaires les unes des autres est largement reprise par Weyl et Einstein durant les années 20, c'est-à-dire au moment où se développent la relativité générale et la mécanique quantique. Dans le cas de Weyl, nous pouvons nous référer aux premières lignes du § 21 de *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* :

> D'après ce qui précède, il est clairement établi que la science de la nature est construite, [i.e.] que ses hypothèses prises isolément ne possèdent pas un sens vérifiable dans l'intuition, mais au contraire que la vérité forme en elle un système qui peut seulement être testé dans sa globalité. [178]

Les travaux de Don Howard sur Einstein ont notamment permis de souligner la ligne de fracture qui sépare Einstein et les trois principaux représentants de l'empirisme logique, à savoir Schlick, Reichenbach et Carnap, à partir du milieu des années 20 sur ce point précis. Einstein est résolument holiste et il s'oppose explicitement à la thèse selon laquelle les théories physiques seraient constituées d'énoncés de base qui pourraient être vérifiés indépendamment du système dont ils font partie. [179] Ce point de désaccord entre Einstein et certains empiristes

177. P. Duhem, *La théorie physique, son objet, sa structure* (1906), Paris, éd. Vrin, 2007, p. 263.
178. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, *op. cit.*, p. 192
179. D. Howard, ≪ Einstein, Kant and the Origins of Logical Empiricism ≫, In *Language, Logic and Structure of Scientific Theories*, Proceedings of the Carnap-Reichenbach Centennial, University of Konstanz, 21-24

logiques est documenté par la correspondance entre Einstein et Reichenbach. Nous pouvons par exemple nous référer au volume III des œuvres complètes de Reichenbach qui est presque entièrement consacré à l'ouvrage de 1924 intitulé *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre*. Reichenbach rejette explicitement le holisme de Duhem. [180] Un extrait non référencé d'une lettre d'Einstein à Reichenbach est reproduite en note. [181] Dans cette lettre, Einstein met clairement en doute la thèse de Reichenbach selon laquelle une théorie physique serait constituée d'énoncés de base qui pourraient être vérifiés indépendamment les uns des autres. De manière plus explicite, Einstein, s'appuie sur une thèse de style holiste pour invalider les arguments de Reichenbach.

Ainsi, Einstein et Weyl partagent un même présupposé sur un plan épistémologique : tous deux sont holistes. Il convient d'ajouter la précision suivante : Einstein entretient des liens étroits avec Schlick et Reichenbach. Non seulement il a œuvré en faveur de leur carrière, mais de plus il existe une correspondance assez fournie entre Einstein et ces deux représentants de l'empirisme logique. Ainsi, l'opposition entre Einstein et Reichenbach sur le rapport entre une théorie physique et l'expérience peut être documentée. En revanche, les rapports entre Weyl et les positivistes logiques demeurent plus indirects. Toujours est-il que le « tournant empirique » de Weyl au milieu des années 20 ne signifie absolument pas que ses thèses philosophiques s'apparentent à celles de l'empirisme logique pour au moins quatre raisons : (i) il refuse toute forme de positivisme, (ii) corrélativement il ne renie pas son attachement à la phénoménologie de Husserl ; (iii) il ne souscrit pas à l'idée selon laquelle il faudrait attribuer tout le contenu du savoir à l'expérience ; (iv) il est résolument holiste. Le travail de comparaison que nous avons mené entre le « quasi-empirisme » de Weyl et l'empirisme de Reichenbach ou encore Schlick a au moins le mérite suivant : nous venons de préciser le sens de l'hypothèse de Scholz selon laquelle l'épistémologie de Weyl est marquée par un « tournant empirique » au milieu des années 20.

---

may 1991, Wesley Salmon and Gereon Wolters, eds, Pittsburgh : University of Pittsburgh Press, Konstanz Universitätsverlag, 1994, p. 48 : « Einstein was just as eager as Schlick, Reichenbach, and Carnap to defend the empirical integrity of general relativity, and he was no less suspicious than they of facile reconciliations with Kant. But from early on he developed serious reservations about the logical empiricist way of doing this. In particular, he doubted that one could effect such a clean, principled distinction between the empirical and the conventional. Heavily influenced by his reading of Duhem, his view of the structure of scientific theories was all along more holistic ; he regarded all of the propositions constituting a scientific theory as being equally capable of revision, and hence, as being equally conventional ».

180. H. Reichenbach, *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre* (1924), in *Gesammelte Werke* Bd. III, Braunschweig / Wiesbaden, éd. Vieweg 1979, p. 3.

181. A. Einstein, extrait d'une lettre à Reichenbach, après 1924, *op. cit.*, p. 487.

3.4 Conclusion du troisième chapitre

Au terme de ce chapitre, nous pouvons formuler les résultats suivants. La correspondance de Weyl et ses échanges avec Schrödinger à Zürich montrent qu'il s'intéresse aux fondements de la mécanique quantique dès 1925. Il prend très tôt connaissance de la mécanique des matrices de Heisenberg-Born-Jordan et de la mécanique ondulatoire de Schrödinger. En outre, il entretient des liens privilégiés avec von Neumann comme en atteste leur correspondance. Ajoutons à ce propos que *Gruppentheorie und Quantenmechanik* de Weyl est la première monographie faisant état des innovations de von Neumann — introduction des espaces de Hilbert abstraits pour unifier les points de vue de Heisenberg-Born-Jordan et de Schrödinger —, réciproquement von Neumann a relu les épreuves de la monographie de Weyl. Parmi les réseaux de chercheurs qui participent à la formalisation de la mécanique quantique, von Neumann occupe une position remarquable puisqu'il participe (i) à l'unification de la mécanique des matrices et de la mécanique ondulatoire, (ii) à l'axiomatisation de la mécanique quantique, (iii) à la valorisation des méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique étant donné qu'il travaille avec Wigner en 1926-1928 et qu'ils publient des articles conjointement sur ces questions.

Le deuxième chapitre de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* montre que Weyl conçoit d'un seul tenant les points de vue de Heisenberg-Born-Jordan et de Schrödinger. De plus, Weyl répertorie par souci d'exhaustivité toutes les applications connues de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique. Néanmoins, à la différence de von Neumann, il n'adhère pas au programme d'axiomatisation de cette théorie. D'ailleurs, d'une manière générale, il estime que la méthode axiomatique, si importante soit-elle en mathématiques pour clarifier le sens des concepts et pour leur garantir une portée générale, ne peut pas être étendue de manière convaincante à la physique. Il s'agit là du point de divergence le plus frappant entre von Neumann et Weyl.

En outre, ne perdons pas de vue que Weyl formalise la mécanique quantique en *mathématicien* et qu'il utilise *a fortiori* un cadre mathématique auquel les physiciens ne sont pas habitués, à savoir la théorie des représentations de groupes. Voilà pourquoi, nous avons pu relever de nombreux arguments qui relèvent de la « justification » dans ses articles comme dans sa monographie sur la mécanique quantique. Il doit tout d'abord justifier qu'un mathématicien de formation puisse contribuer au développement d'une théorie physique. Étant donné les nombreuses critiques qu'il a dû essuyer entre 1918 et 1921 avec sa première théorie de jauge, on peut comprendre que cela n'aille pas de soi. En particulier, dans *Gruppentheorie und Quan-*

tenmechanik, il ne perd jamais de vue les résultats empiriques issus de la spectroscopie, sans doute parce qu'il veut convaincre un public de physiciens de la pertinence de sa démarche. Mais de plus, il lui est nécessaire de montrer le bien-fondé des méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique. Ses arguments sont invariablement les mêmes. Ces méthodes ont une triple fonction : (i) clarifier les fondements de la mécanique quantique, (ii) ordonner et unifier les expériences issues de la spectroscopie en les assujettissant à des arguments de symétrie, (iii) formaliser de proche en proche des systèmes quantiques de complexité croissante. Clarification, unification et généralisation résument de manière très schématique les arguments de Weyl pour justifier l'utilisation des représentations de groupes en mécanique quantique. De plus, ce cadre mathématique ne vient pas s'appliquer de l'extérieur à une théorie physique aux yeux de Weyl. En effet, la théorie des représentations de groupes a un rôle structurant et constitutif pour penser les phénomènes atomiques et subatomiques. Pourtant, la réception de ces méthodes demeure mitigée parmi les physiciens au début des années 30, même si elles sont partagées par une diversité de chercheurs — Weyl, Wigner, von Neumann, London, Heitler, etc.

Nous avons souligné qu'au moment où Weyl s'intéresse à la mécanique quantique, son épistémologie implicite se caractérise par un « tournant empirique ». Ceci n'est pas lié uniquement aux spécificités de la mécanique quantique. Weyl prend clairement ses distances avec la posture *aprioriste* et spéculative qui était la sienne en 1918. Nous avons indiqué que ce « tournant empirique » n'est pourtant pas assimilable au positivisme logique avec lequel Weyl demeure largement en désaccord. Mais, d'un autre côté, ce tournant empirique conduit Weyl à envisager de manière différente le rapport entre les mathématiques et la physique.

Nous devons avoir à l'esprit que l'école de physique mathématique de Göttingen — dont il est encore largement redevable lorsqu'il mathématise la relativité générale entre 1918 et 1923 — est attachée au *credo* suivant : il existerait une *harmonie préétablie* entre les mathématiques et la physique. Rappelons que cette expression est largement utilisée par Minkowski. Nous pouvons par exemple en trouver une occurrence dans ses leçons sur le calcul différentiel en 1904, mais aussi dans sa célèbre conférence prononcée en 1908 à Cologne et intitulée *Raum und Zeit*. Cette idée d'une harmonie préétablie qui relierait indissolublement les mathématiques aux sciences physiques est abondamment relayée par Hilbert. Au cours des années 20 et au début des années 30, il invoque l'exemplarité de la relativité générale pour justifier une telle harmonie. Par exemple, dans son article de 1930 intitulé « Naturerkennen und Logik », Hilbert définit le concept d'harmonie préétablie comme une incarnation (Verkörperung) et une réalisation de nos idées mathématiques. Il commence par évoquer la

théorie einsteinienne de la gravitation puisqu'elle incarne de manière remarquable les idées géométriques de Riemann. Il fait ensuite allusion à la mécanique quantique étant donné qu'elle constitue une réalisation du cadre mathématique qu'il avait commencé à élaborer entre 1904 et 1912 en développant sa théorie des équations intégrales. [182]

Lorsqu'il aborde sa première théorie de jauge, Weyl est largement attaché à cette idée d'une harmonie préétablie entre mathématiques et physique, à tel point qu'une simple identité formelle entre certains aspects de sa géométrie purement infinitésimale et la théorie de Maxwell le conduit à croire qu'il est parvenu à une théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique. Au nom de cette harmonie, la théorie qu'il vient d'élaborer doit être effective physiquement. De fait, ce n'est pas le cas. À partir du milieu des années 20, non seulement Weyl amorce un tournant empirique, mais de plus il se distancie de ce *credo* minkowskien et hilbertien pour la raison suivante : l'idée d'une harmonie préétablie suppose une prééminence des mathématiques sur la physique. Les théories physiques ne feraient que *réaliser* ou *incarner* des théories mathématiques qui leur préexisteraient. Dans ce qui précède nous avons d'ailleurs cité un passage de l'article de Weyl intitulé ≪ A half-century of mathematics ≫ (1951) dans lequel il mentionne cette prétendue harmonie préétablie entre la théorie des équations intégrales de Hilbert et la mécanique quantique. Mais, à la différence de Hilbert, Weyl ajoute un ≪ comme si ≫ qui montre qu'il n'adhère pas à cette croyance. [183] Les interactions entre les mathématiques et la physique ne peuvent pas se réduire à une prééminence des mathématiques sur la physique. La monographie de Weyl en mécanique quantique montre bien que l'aller-retour entre données empiriques et mathématisation d'une théorie physique est complexe, ramifié et qu'il n'est pas aussi ≪ harmonieux ≫ que ne le supposent Minkowski et Hilbert. Ajoutons enfin que les réserves de Weyl à l'égard de cette idée d'harmonie préétablie vont dans le sens des critiques qu'il formule à l'encontre du recours à la méthode axiomatique en physique.

182. D. Hilbert, ≪ Naturerkennen und Logik ≫, (1930), in *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III *op. cit.*, p. 381.

183. H. Weyl, ≪ A half-century of mathematics ≫, *op. cit.*, p. 541.

Chapitre 4

Symétries, principes d'invariance et lois de la nature

Les diverses applications de la théorie des représentations de groupes à la mécanique quantique représentent pour Weyl comme pour Wigner une occasion de mesurer le *statut* mais aussi les *fonctions* des symétries et, pour être plus précis, des principes d'invariance dans la mathématisation et la constitution d'une *diversité* de théories physiques. Weyl déborde largement de ce cadre, puisqu'il étend ses réflexions sur les symétries à la biologie et aux productions artistiques, ce dont atteste la conférence qu'il prononce en 1938 sous le titre ≪ Symmetry ≫ dans le cadre de la ≪ 8^{th} Joseph Henry Lecture of the philosophical Society of Washington ≫ le 12 mars 1938. Précisons que Weyl s'inspire alors de la troisième édition de *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* de Speiser, qui contient des réflexions esthétiques et mathématiques sur l'art ornemental. Le contenu de l'exposé de Weyl de 1938 sera repris et largement complété dans la série de conférences sur les symétries qu'il donnera à l'université de Princeton en 1951. Il en résultera l'ouvrage *Symmetry* (1952) traduit en allemand par la mathématicienne L. Bechtolsheim (Birkhäuser, 1955).

Les réflexions menées par Weyl et Wigner sur les symétries interviennent aussi bien dans leurs articles de recherche que dans des textes plus spécifiquement philosophiques. Ainsi, en 1928, Wigner et von Neumann établissent un rapprochement saisissant entre le principe de relativité et les symétries en mécanique quantique afin de justifier la nécessité de s'appuyer sur la théorie des groupes pour décrire et expliquer les phénomènes atomiques. La référence à la cristallographie apparaît aussi bien dans les textes de Wigner que dans ceux de Weyl. Aussi attribuent-ils d'emblée une transversalité aux principes d'invariance en physique, bien qu'ils mènent tout d'abord l'essentiel de leurs réflexions dans le cadre de la mécanique quantique.

Cette référence commune à la cristallographie est liée à plusieurs sources. Wigner et Weyl mentionnent à maintes reprises la *Theorie der Gruppen endlicher Ordnung* de Speiser (première édition en 1923). Ainsi, Wigner la cite dans le second volet de son article consacré à l'étude des systèmes quantiques comportant n électrons (sans spin). Weyl fait clairement allusion au livre de Speiser au début du chapitre III de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* et il l'investira à nouveaux frais dans sa conférence sur les symétries en 1951. Or, une partie de l'ouvrage de Speiser est consacrée à la théorie des groupes en cristallographie. En outre, comme le souligne M. Schneider, Wigner se souvient avoir suivi l'opinion de M. von Laue — connu notamment pour ses contributions en radiocristallographie — selon laquelle l'étude des symétries d'un système quantique a une vertu programmatique puisqu'elle permet d'expliquer de manière exhaustive les données expérimentales issues de la spectroscopie [1]. Enfin, l'ouvrage fondamental de Schönflies intitulé *Krystallsysteme und Krystallstruktur* (1891) fait l'objet d'une réédition en 1923, c'est-à-dire au moment où paraît la monographie de Speiser sur les groupes finis et leurs applications à la cristallographie. Rappelons que, dans *Krystallsysteme und Krystallstruktur*, Schönflies établit la classification exhaustive des 230 groupes d'espace, indépendamment de Fedorov. Justement, au début du chapitre IV de *Symmetry*, Weyl mentionne la classification établie par Schönflies et les résultats fondamentaux obtenus par von Laue en radiocristallographie en 1912 avant d'aborder les symétries en relativité, en mécanique quantique et dans la théorie des équations algébriques.

On doit également avoir à l'esprit que Wigner et Weyl sont étroitement liés à l'école de physique mathématique de Göttingen. Nous avons déjà souligné ce point dans le cas de Weyl lorsqu'il commence à développer sa théorie unifiée des champs (1918). Ses contacts avec Göttingen demeurent étroits lorsqu'il s'intéresse à la mathématisation de la mécanique quantique. En effet, il entretient une correspondance avec Born et Jordan en 1926. La première édition de son ouvrage est corrigée par von Neumann, qui effectue en 1927 un séjour à Göttingen. Enfin, la seconde édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* paraît en 1931, c'est-à-dire un an après le recrutement de Weyl en tant que professeur à l'université de Göttingen. De son côté, Wigner effectue un séjour à Göttingen en 1927 ; il travaille alors conjointement avec von Neumann à la mathématisation de la mécanique quantique via la théorie des représentations de groupes.

Dès la fin du XIX^{e} siècle, l'université de Göttingen constitue l'un des hauts lieux en matière d'application de la théorie des groupes à la physique. Au cours des années 1880, Klein incite Schönflies à s'appuyer sur les groupes de transformations géométriques en cris-

1. M. Schneider, *op. cit.*, p. 46.

tallographie. Les recherches que Schönflies mène dans ce sens culminent avec la classification des 230 groupes d'espace que l'on trouve dans son ouvrage fondamental intitulé *Krystallsysteme und Krystallstruktur* (1891). Précisons que Schönflies devient *Privatdozent* à l'université de Göttingen à partir de 1884. Pour sa part, Klein est recruté en qualité de professeur à Göttingen en 1886. Deux faits permettent de souligner les liens théoriques et institutionnels qu'entretiennent alors Klein et Schönflies. Ce dernier publie en 1886 un article intitulé « Über Gruppen von Bewegungen » qui permet déjà de mesurer l'effectivité de la théorie des groupes en cristallographie. Schönflies mentionne alors directement les *Vorlesungen über das Ikosaeder* de Klein, auxquelles il emprunte l'essentiel de la terminologie en théorie des groupes. [2] À partir de 1892, Schönflies occupe la chaire de mathématiques appliquées spécialement créée par Klein à Göttingen, soit un an après avoir publié son ouvrage majeur en cristallographie. Ceci permet de consacrer institutionnellement l'effectivité de la théorie des groupes en cristallographie.

Mais les interactions entre la théorie des groupes et la physique se diversifient à l'université de Göttingen durant le premier tiers du XX^{e} siècle. En 1910, Klein prononce une célèbre conférence en hommage à Minkowski intitulée « Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe ». Klein montre alors non seulement que le groupe de Lorentz joue un rôle essentiel dans la mathématisation de la relativité restreinte, mais également que la théorie des groupes continus de transformations sert de point d'appui pour différencier la *mécanique classique* et la *mécanique relativiste*. Cet argument se double d'un rapprochement entre ces deux théories physiques d'une part, le programme d'Erlangen (1872) d'autre part : de même qu'une géométrie est définie par les propriétés laissées invariantes sous l'action d'un sous-groupe continu du groupe $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$, de même les lois de la mécanique classique (resp. relativiste) sont caractérisées par leur invariance sous l'action du groupe des transformations de Galilée (resp. de Lorentz). Klein va même jusqu'à considérer le principe de relativité comme un principe d'invariance sous l'action d'un groupe continu de transformations.

> Les physiciens modernes entendent par *théorie de la relativité* une théorie des invariants du domaine quadridimensionnel d'espace-temps x, y, z, t (l'univers de Minkowski) par rapport à un groupe déterminé de collinéations, en l'occurrence le groupe de Lorentz. [3]

E. Noether, qui travaille aux côtés de Hilbert et Klein à Göttingen depuis 1916, publie son fameux article intitulé « Invariante Varationsprobleme » en 1918. Elle s'appuie sur les groupes

2. A. Schönflies, « Über Gruppen von Bewegungen », erste Abhandlung, *mathematische Annalen* **28**, 1886, p. 318-342, zweite Abhandlung **29**, 1887 p. 50-80.

3. F. Klein, « Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1910, p. 287.

et les algèbres de Lie, combinés au formalisme lagrangien généralisé, pour montrer que les lois de conservation n'ont pas le même statut en mécanique classique et en relativité restreinte d'une part, en relativité générale d'autre part. Noether donne ainsi raison à Klein et Hilbert contre Einstein sur le statut des lois de conservation en relativité générale. Ajoutons que son premier théorème reprend à un niveau de généralité remarquable les résultats établis par Hamel (1904) et Engel (1916) en mécanique classique et ceux de Herglotz (1911) en relativité restreinte. [4] Dès 1918, Klein met en valeur les innovations établies par E. Noether et il les reprend à son compte.

Ces rappels nous permettent d'en inférer que Klein intervient à plusieurs reprises sur un plan théorique et institutionnel pour promouvoir les applications de la théorie des groupes à la cristallographie, à la relativité restreinte et à la relativité générale. Il favorise donc largement les travaux qui accordent une place centrale au concept de groupe dans la mathématisation d'une théorie physique. Mais on ne peut toutefois pas dire qu'il a voulu établir un programme visant à systématiser l'usage de la théorie des groupes en physique. Nous ne saurions donc comparer les initiatives successives de Klein que nous venons de mentionner au « programme » d'*axiomatisation* de la physique mis en avant par Hilbert lors de sa conférence de Paris en 1900 à la suite des travaux de Mach, Boltzmann, Hertz ou encore Volkmann. Le programme de Hilbert trouvera des applications en mécanique classique (Hilbert, 1905), en théorie cinétique des gaz (Hilbert, 1905, 1912), en relativité restreinte (Minkowski et Hilbert, 1906-1907), en théorie élémentaire de la radiation (1912-1914), en relativité générale (Hilbert, 1915-1921) et, plus tardivement, en mécanique quantique (Born, Hilbert, Nordheim, von Neumann 1926-1932).

Le programme d'axiomatisation de la physique conduit à séparer la « forme » d'une théorie, qui doit répondre à des exigences de cohérence logique, et ses interprétations physiques à proprement parler. Nordheim, Hilbert et von Neumann défendent d'ailleurs cet argument dans leur article consacré à l'axiomatisation de la mécanique quantique. [5] Cette dichotomie sera largement reprise par les positivistes logiques (Schlick, Reichenbach, Carnap, Hempel, etc.). Elle est pourtant discutable. Ainsi, dans son imposant ouvrage *Lois et Symétrie*, van Fraassen critique très directement les thèses épistémologiques qui séparent la forme d'une théorie et ses interprétations physiques. (1) Cette séparation conduit à un non-

4. Herglotz soutient son habilitation sous la direction de Klein en 1904 et il est *Privatdozent* en astronomie et en mathématiques à Göttingen jusqu'en 1907.

5. D. Hilbert, J. v. Neumann, L. Nordheim, « Über die Grundlagen der Quantenmechanik », *mathematische Annalen*, **98**, 1928, p. 2.

sens : comment des axiomes délestés de toute signification physique peuvent-ils ensuite être au fondement d'énoncés dont les conséquences sont empiriquement testables ? (2) Elle se fait à la faveur d'une analogie forcée entre les mathématiques et la physique. En effet, on peut nettement distinguer en mathématiques les définitions implicites de concepts et les diverses réalisations ou interprétations qu'elles admettent, en fonction des objets mathématiques auxquels elles se rapportent. Il n'est aucunement évident qu'une telle distinction puisse se généraliser à la physique. Hilbert, Nordheim et von Neumann s'appuient sur le modèle des sciences mathématiques pour différencier forme et contenu d'une théorie physique. (3) La question du *rapport* entre la forme d'une théorie et ses interprétations physiques conduit à d'inévitables apories.[6] Il ne nous paraît pas anodin de souligner que Weyl et Wigner, qui n'ont jamais projeté d'axiomatiser la physique, ne prétendent pas non plus séparer la forme logique et l'interprétation physique d'une théorie.

Cela posé, ils sont redevables d'une tradition développée à Göttingen sous les auspices de F. Klein lorsqu'ils soulignent l'importance de la théorie des groupes (et des représentations de groupes) en mécanique quantique. Weyl et Wigner considéreront ensuite d'un seul tenant la cristallographie, la relativité et la mécanique quantique pour montrer que des principes d'invariance sont au fondement de la plupart des théories physiques. Or, ces principes d'invariance font intervenir le concept de groupe de manière essentielle. Ainsi, pour Weyl comme pour Wigner, les principes d'invariance ont un statut de *fondement* et ils ont également une fonction *heuristique* dans le développement des théories physiques. Ils garantissent clarté et cohérence à ces mêmes théories. Les réflexions menées par Weyl et Wigner sur les symétries viennent donc directement concurrencer le programme d'axiomatisation des théories physiques. Au-delà de l'héritage kleinéen, les réflexions épistémologiques de Weyl et Wigner sur les symétries ont une vertu programmatique ; elles ne consistent pas uniquement à *justifier* le recours à la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique.

Plusieurs publications attestent en faveur de cette position de surplomb que Weyl et

6. Bas C. van Fraassen, *Lois et symétrie* (1989), trad. C. Chevalley, Paris, éd. Vrin, 1994, p. 339 : ≪ Dans ce qu'on appelle maintenant le ≪ point de vue orthodoxe ≫ (celui qu'avaient développé les positivistes logiques et leurs successeurs immédiats), une théorie était conçue comme une théorie axiomatique, c'est-à-dire comme un ensemble de phrases, défini comme la classe des conséquences logiques d'un autre ensemble de phrases, plus petit, les axiomes de la théorie. On faisait la distinction suivante. Puisqu'il était normal de considérer que la classe des axiomes pouvait être effectivement exposée et qu'on pouvait donc en donner une description syntaxique, la théorie pouvait être conçue comme étant en elle-même non interprétée. D'où une distinction entre les théories scientifiques et les interprétations qui leur sont associées et qui relient les termes de la théorie avec le domaine de référence visé. Tout le monde connaît la suite et l'histoire des malheurs et des traquenards que cette distinction a engendrés. ≫.

Wigner prêtent *progressivement* aux *symétries* dans la construction des théories physiques. Ainsi, en 1929, Weyl publie deux articles sur les symétries en mécanique quantique dans des revues américaines. Il s'agit alors de promouvoir les méthodes issues de la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique.[7] En 1938, paraît un article de Weyl intitulé ≪ symmetry ≫ dans lequel la mécanique quantique n'est évoquée qu'à titre d'exemple particulier parmi d'autres théories physiques qui font également appel à des principes d'invariance. Il en va de même lorsqu'il prononce sa célèbre conférence à l'université de Princeton en 1951. L'ouvrage *Symmetries and Reflections* de Wigner rassemble l'essentiel des articles d'épistémologie que Wigner a pu consacrer aux principes d'invariance et au rapport qu'ils entretiennent avec les lois de la nature. Aussi observe-t-on, dans les écrits de Weyl et de Wigner, une même volonté de fixer le statut et les fonctions des principes d'invariance en physique. Wigner et Weyl proposent également une véritable classification des principes de symétrie. Voilà pourquoi, il nous paraît opportun de confronter et de comparer leurs points de vue respectifs sur les symétries dans les sciences de la nature. Avant de parvenir à ce point, il est nécessaire de préciser ce qu'il faut entendre par loi de la nature, par principe d'invariance pour ensuite comprendre le lien entre ces deux types d'énoncés.

4.1 Lois de la nature et principes d'invariance : un problème de définition

À la suite de Wigner, nous proposons de montrer que les *principes d'invariance* offrent un critère suffisant pour distinguer les *lois de la nature* par rapport à tout autre type d'énoncés et, en particulier les ≪ généralisations accidentelles ≫ qui rendent si délicate l'entreprise de définition rigoureuse de ce qu'est une ≪ loi de la nature ≫. Tous les autres critères (universalité, nécessité, caractère prédictif, etc.) sont soit problématiques, soit insuffisants. Les principes de symétrie ou d'invariance ont donc une première fonction : ils permettent d'identifier, parmi une série d'énoncés, ceux qui sont susceptibles de recevoir le statut de lois de la nature.

4.1.1 Lois de la nature et généralisations accidentelles

À première vue, une loi de la nature est un énoncé visant à déterminer des relations universelles et nécessaires entre des classes de phénomènes. Or, une telle définition recèle

7. H. Weyl, ≪ The problem of symmetry in quantum mechanics ≫, *Journal of the Franklin Institute*, **207**, 1929, p. 509-518, ≪ The spherical symmetry of atoms ≫, *Rice Institute Pamphlet* **16**, p. 266-279.

d'emblée un paradoxe : à proprement parler, une connaissance ne peut être nécessaire et strictement universelle que si elle est indépendante de l'expérience. Précisément, une loi de la nature ne doit pas seulement être conforme aux conditions formelles de l'expérience — en ce cas, elle pourrait encore être regardée comme une connaissance *a priori* —, elle a pour fonction de rendre raison du rapport effectif entre des phénomènes ou des événements tirés de l'expérience. Pour cette raison, on peut dire qu'elle est au moins en partie empirique. Autrement dit, son universalité est seulement présumée, elle n'est pas établie avec certitude : rien ne nous permet *a priori* d'écarter la possibilité de phénomènes qui n'y satisferaient pas ou qui dérogeraient aux prédictions formulées sur la base du cadre théorique que l'on a adopté. Si l'on emploie une terminologie kantienne, on peut dire que l'universalité d'une loi de la nature n'est pas stricte mais seulement *suppositive*, ce qui signifie à proprement parler : pour autant que nous l'ayons observé jusque-là, telle loi de la nature est vérifiée empiriquement.

Si l'on nous accorde ce point, alors nous devons affronter la difficulté suivante : quel critère peut-on utiliser pour distinguer une *loi de la nature* et une *généralisation accidentelle* ? Prenons l'assertion bien connue de Goodman : « Toutes les pièces de monnaie contenues dans ma poche sont en argent ». [8] La question est de savoir en quoi un tel énoncé ne saurait être considéré comme une loi de la nature. Si l'on s'en tient à une stricte analyse logique, il est impossible d'identifier un critère de distinction pertinent entre une loi de la nature et une généralisation accidentelle. Autrement dit, ces deux types d'énoncés ne sauraient être différenciés en vertu de leur seule forme logique, comme le souligne d'ailleurs Kistler :

> La seule *forme logique* d'un énoncé universel de type (U) [tous les A sont des B] ne contient pas d'indices qui permettraient de savoir si la corrélation qu'il exprime est de nature accidentelle ou de nature nomique. Les énoncés de type (U) *peuvent* exprimer une loi, mais en vertu de leur seule forme logique, la corrélation exprimée peut tout aussi bien être de nature accidentelle, plutôt que nomique. Autrement dit, un énoncé de forme (U) admet deux interprétations : selon l'une, l'énoncé exprime une corrélation accidentelle, selon l'autre une corrélation nomique. [9]

Maintenant, à supposer que l'on adopte un point de vue holiste, une généralisation accidentelle semble n'avoir aucune signification physique pertinente, en ce qu'elle ne saurait s'intégrer à un cadre théorique global. L'assertion : « Toutes les pièces de monnaie contenues dans ma poche sont en argent » est un énoncé isolé qui ne semble guère pouvoir faire partie d'un système ou d'une théorie physique. Si on laisse de côté le critère de distinction entre « généralisation accidentelle » et « loi de la nature » tel qu'il est formulé dans une perspective holiste, on peut identifier d'autres éléments de démarcation entre ces deux types d'énoncés.

8. N. Goodman, *Faits, fictions et prédictions* (1954), trad. P. Jacob, Paris, éd. de Minuit, 1984, p. 43.
9. M. Kistler, *Causalité et lois de la nature*, Paris, éd. Vrin, 1999 p. 106.

Par exemple, une généralisation accidentelle n'explique rien ; elle n'est guère qu'un constat. En revanche, on attend d'une loi qu'elle remplisse une fonction explicative, sans d'ailleurs qu'une telle explication se fasse nécessairement sur un mode causal.

En outre, une loi doit être prédictive — que cette prédiction soit certaine ou seulement probable. Par exemple, si l'on raisonne dans le cadre de la mécanique classique — qui est une théorie déterministe —, on peut dire qu'à partir de la connaissance de l'état initial d'un système dynamique et de certaines lois de la nature, on doit pouvoir prévoir avec certitude quel sera son état final. Une telle fonction prédictive se retrouve dans des théories probabilistes ou *a fortiori* indéterministes. Ces critères de démarcation sont pertinents ; Goodman les énonce d'ailleurs en toute clarté : « [la phrase « toutes les pièces de monnaie contenues dans ma poche sont en argent »] est reconnue comme la description d'un fait contingent *après* que la détermination de tous les cas a eu lieu, aucune prédiction sur une de ses instances n'étant fondée sur elle ».[10] mais ils ne sont pas suffisants pour écarter toute possibilité de confusion entre une loi de la nature et une généralisation accidentelle. Peut-être parvient-on à dépasser cette difficulté si l'on remarque que l'assertion de Goodman décrit un état de fait localisé, conditionné par des circonstances particulières. L'universalité d'une loi de la nature ne s'énonce pas sous la forme « tous les x sont des y dans telle circonstance » — quand bien même une loi de la nature ne saurait être formulée de manière inconditionnée, puisqu'elle suppose des conditions initiales qui n'ont pourtant rien à voir avec des circonstances particulières.

En voici la raison, ne serait-ce que si l'on adopte le cadre théorique de la relativité restreinte : une loi doit demeurer formellement invariante[11] par changement de référentiel inertiel, il est alors supposé qu'un référentiel inertiel B est en mouvement de translation uniforme par rapport à un référentiel inertiel A. Dans le cas de la relativité générale, ce principe s'énonce comme suit : les lois de la nature demeurent inaltérées par changement de coordonnées curvilignes lisses dans une variété pseudo-riemannienne d'espace-temps (principe

10. *ibid.*, p. 43.

11. Nous distinguons invariance formelle et invariance numérique de la manière suivante : l'invariance formelle porte sur la relation entre quantités physiques établie par une loi de la nature, en revanche l'invariance numérique a pour objet les valeurs numériques que ces quantités sont supposées prendre. Le principe de relativité est un principe d'invariance formelle. Voir en particulier F. Balibar, *Galilée, Newton lus par Einstein*, Espace et relativité, Paris, P.U.F., 1984, pp. 119-120 : « Insistons sur le fait que l'invariance dont il s'agit porte sur les relations entre les grandeurs physiques (ce que l'on appelle les « lois » physiques) et non sur les valeurs de ces grandeurs, elles-mêmes. Lors des transformations mentionnées plus haut, les valeurs des grandeurs physiques peuvent très bien changer (il est même rare qu'elles restent invariantes) ; mais les relations entre ces grandeurs doivent rester invariantes ».

général de covariance). Or, quelles que soient les modifications que l'on veuille faire subir à l'énoncé « toutes les pièces de monnaie contenues dans ma poche sont en argent », il est rigoureusement impossible d'en dégager une « forme » qui satisferait à un tel principe d'invariance. Il existe donc un critère décisif de démarcation entre une loi de la nature et une généralisation accidentelle que Goodman n'énonce à vrai dire jamais, alors qu'il est central dans toute théorie physique : une généralisation accidentelle demeure *circonstanciée*, en revanche une loi de la nature doit être soumise à un *principe d'invariance*, de sorte qu'elle reste formellement valide sous l'action des transformations permises par le principe d'invariance en question. [12]

La difficulté à distinguer « loi de la nature » et « généralisation accidentelle » tire sont origine d'une caractérisation incomplète de ce que l'on entend par « loi de la nature ». Il n'est pas seulement attendu d'une loi qu'elle soit explicative et prédictive (condition nécessaire), elle doit également être soumise à des principes d'invariance (condition suffisante), le plus connu et le plus important d'entre eux étant le *principe de relativité*. Wigner parvient très exactement à cette conclusion lorsqu'il affirme :

> It is not necessary to look deeper into the situation to realize that laws of nature could not exist without principles of invariance. (...) If the correlations between events changed from day to day, and would be different for different points of space, it would be impossible to discover them. Thus the invariance of the laws of nature with respect to displacements in space and time are almost necessary prerequisites that it be possible to discover, or even catalogue, the correlations between events which are the laws of nature. [13]

Cependant, il faut bien reconnaître la possibilité d'énoncés vides de sens, i.e. dépourvus de signification physique, mais qui satisfont néanmoins à ces principes. Il en va ainsi de l'équation de Klein-Gordon en mécanique quantique relativiste : elle est construite à partir du principe de correspondance ou de compatibilité. L'énergie d'une particule de masse m étudiée dans le cas non relativiste vérifie :

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} V(\mathbf{x}).$$

En vertu du principe de compatibilité ou de correspondance, on obtient l'équation de Schrödin-

12. *ibid.*, p. 121 : « La démarche de la physique théorique consiste donc sur le fond, d'une part, à dégager les transformations par lesquelles les lois doivent être invariantes (c'est ce que l'on appelle la recherche des principes d'invariance, dont le principe de relativité n'est qu'un parmi d'autres), et d'autre part, à ne retenir comme lois physiques que les relations qui sont invariantes par ces transformations ».

13. E. Wigner, « The Role of Invariance Principles in Natural Philosophy, Address at the 10th anniversary of the Scuola Internationale di Fisica "Enrico Fermi" », (1963) in *Symmetries and Reflections*, Woodbridge, Ox Bow Press, 1979, p. 29.

ger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x},t)=\left(-\frac{\Delta}{2m}+V(\mathbf{x})\right)\psi(\mathbf{x},t).$$

Dans le cas relativiste, le carré de l'énergie d'une telle particule vérifie :

$$E^2=\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4.$$

On applique une nouvelle fois le principe de correspondance, ce qui conduit à remplacer l'équation de Schrödinger (valable en mécanique quantique non relativiste) par l'équation dite de Klein-Gordon :

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}-\hbar^2\Delta+m^2c^2\right)\psi(\mathbf{x},t)=0,$$

où Δ désigne le laplacien. Cette équation est formellement invariante sous l'action du groupe des transformations de Lorentz. Pourtant, elle admet au moins un inconvénient majeur qui la rend incompatible avec les principes fondamentaux de la mécanique quantique : la densité de probabilité de présence d'une particule décrite par la fonction d'onde ψ cesse d'être positive. On ne peut donc tirer aucune prédiction à partir de cette équation.

Cet exemple montre qu'une loi de la nature ne saurait être *régulièrement* déduite à partir de principes d'invariance. On peut affirmer qu'un énoncé qui n'est assujetti à aucun principe d'invariance n'est pas une loi de la nature. Mais, réciproquement, il existe des énoncés ou des équations qui satisfont à certaines conditions d'invariance, tout en étant dénués de sens étant donné qu'aucune prédiction correcte ne dérive d'eux. Nous disons donc qu'une loi de la nature est un énoncé *prédictif* qui demeure *formellement inaltéré* sous l'action d'un groupe de transformations *convenablement choisi*. L'expression ≪ convenablement choisi ≫ mérite d'être saisie à l'aide d'un contre-exemple, il s'agit en l'occurrence de la première théorie de jauge de Weyl. Ce dernier est guidé par l'idée suivante :

> *De même que*, d'après des recherches de Hilbert, Lorentz, Einstein, Klein et l'auteur, *les quatre lois de conservation de la matière* (du tenseur énergie-impulsion) *sont attachées à l'invariance* (qui contient quatre fonctions arbitraires) *de l'action par rapport aux transformations de coordonnées, la nouvelle invariance d'échelle (qui contient une cinquième fonction arbitraire)* (...) *est liée à la conservation de l'électricité.*[14]

Il s'avère que l'invariance d'échelle obtenue sur la base d'une géométrie purement infinitésimale conduit à de nombreuses inconséquences physiques. Seule la seconde théorie de jauge (Schrödinger, Fock, London et Weyl) permet de formuler le bon principe d'invariance d'où découle la loi de la conservation de l'électricité dans le cadre de la mécanique quantique relativiste.

14. H. Weyl, ≪ Gravitation und Elektrizität ≫ (1918), in *Gesammelte Abhandlungen* Bd. III, *op. cit.*, p. 36-37.

4.1.2 L'invariance : une tentative de conceptualisation

La notion d'invariance se laisse difficilement caractériser tant qu'on ne l'a pas distinguée soigneusement d'autres concepts tels que celui d'*identité*, de *permanence* ou encore d'*absolu*. Toute connaissance portant sur l'identité d'un objet ou d'un état de chose prend la forme d'un jugement analytique. Cela ne signifie pas qu'on obtient par là des connaissances stériles ou triviales. La distinction frégéenne entre sens et référence ou la notion russellienne de description définie nous montrent qu'il n'en est rien : les jugements d'identité ne se réduisent pas à des tautologies.

Pour préciser la distinction entre invariance et identité, appuyons-nous une nouvelle fois sur le principe de relativité. Celui-ci ne nous dit pas seulement qu'une loi est ≪ identique ≫ relativement à un référentiel K et à un référentiel K' en mouvement de translation uniforme par rapport à K, mais bien plutôt qu'elle est formellement inaltérée par changement de référentiel inertiel. Pour qu'il y ait invariance, il faut donc déterminer un ensemble de changements exprimés mathématiquement par un type particulier de transformations qui admettent une structure de groupe. Bref, on ne peut parler d'invariance que si (1) on définit un groupe de transformations pertinentes et (2) on exhibe les expressions qui demeurent inaltérées par de telles transformations. Il n'est donc question d'invariance que si l'on soumet des énoncés ou des propriétés à des transformations — ces dernières n'étant pas nécessairement de nature géométrique. On a là le prototype d'une connaissance synthétique dans les domaines de la physique et de la mathématique. En effet, pour savoir quelles sont les propriétés ou les énoncés qui demeurent invariants, il faut bien sortir d'eux et les soumettre à des transformations convenablement choisies.

Pour expliciter notre distinction prenons l'exemple de la seconde loi ≪ de ≫ Newton (qui n'est pas formulée explicitement de cette manière dans ses *Principia*).[15] Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire du second ordre égalant l'accélération d'un point matériel à la résultante des forces exercées sur ce point :

$$m^2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F(x).$$

Si l'on pose :

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

15. F. Balibar, *ibid.*, p. 86-87. Newton formule la seconde loi comme suit : ≪ Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée ≫. (cité par F. Balibar, p. 86).

on peut ramener l'équation différentielle du second ordre de Newton à un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= F(x) \end{cases}$$

Une telle loi satisfait au principe de relativité galiléen. Ce dernier nous dit que toutes les lois de la *mécanique classique* demeurent inaltérées par changement de référentiel inertiel. Autrement dit, la loi fondamentale de la dynamique reste formellement invariante par le groupe des transformations de Galilée. Or, cette proposition est un jugement synthétique : les transformations de Galilée ne sont pas tirées de la loi de Newton ; il faut bien plutôt dire que le groupe de Galilée conditionne la forme que prend cet énoncé, il garantit sa validité quel que soit le référentiel inertiel adopté. Ainsi, les connaissances qui font intervenir des principes d'invariance ne sont pas des jugements d'identité par cela seul qu'ils ne sont pas analytiques. D'ailleurs les énoncés qui expriment de tels principes mettent généralement en jeu un rapport de correspondance entre certaines entités ou propriétés et les transformations par lesquelles elles demeurent inaltérées.

Cet argument n'est pas restreint au domaine de la physique, il s'étend également à des théories mathématiques. Ce constat n'a d'ailleurs pas échappé à Weyl. Ce dernier prononce en 1949 une conférence en l'honneur d'Einstein qui est intitulée ≪ Relativity Theory as a Stimulus in Mathematical Research ≫. Il s'appuie sur deux exemples empruntés à l'algèbre et à la géométrie, en l'occurrence la théorie de Galois et le *Programme d'Erlangen* de Klein, pour illustrer ce qu'il appelle en général le problème de la relativité (The relativity Problem). Weyl commence par décrire une situation très abstraite qui n'est pas sans rappeler le début des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert :

> Supposons qu'un ensemble d'objets, que nous appellerons des points, nous soit donné. Les transformations, les applications bi-univoques de cet ensemble sur lui-même qui préservent toutes les relations dotées d'une signification objective entre ces points forment un groupe, le groupe des automorphismes. [16]

Weyl se réfère tout d'abord à la théorie de Galois pour illustrer son propos :

> En théorie de Galois, les ≪ points ≫ sont les n racines α_1, ..., α_n d'une équation algébrique de degré n avec des coefficients rationnels. Les relations objectives sont celles que l'on peut exprimer en termes d'opérations fondamentales d'addition, de soustraction, de multiplication et de division, i.e. toutes les relations de la forme $F(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$ où $F(x_1, ..., x_n)$ est un

16. H. Weyl, ≪ Relativity Theory as a Stimulus in Mathematical Research ≫, in *Proceedings of the American Philosophical Society*, Vol. 93, $N°7$ 1949, p. 535.

> polynôme des n variables x_1, ..., x_n à coefficients rationnels. (...) Une transformation est une permutation des n racines, un automorphisme est une permutation qui laisse toutes les relations algébriques $F(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$ avec des coefficients rationnels inaltérées ; les automorphismes forment le groupe de Galois. [17]

L'idée d'invariance intervient donc de manière essentielle dans la correspondance de Galois. Weyl se réfère ensuite au *Programme d'Erlangen* de Klein :

> Les transitions entre (...) des systèmes de référence dans un espace de Klein trouvent leur expression dans un groupe Γ de transformations des coordonnées. Klein définit la géométrie par ce groupe que le mathématicien peut choisir comme il lui plaît : les relations entre points sont dites avoir une signification objective si elles sont invariantes relativement au groupe Γ, deux configurations de points sont considérées comme objectivement équivalentes si l'une peut être transformée en l'autre par une opération du groupe. Par exemple, si le groupe est transitif (...) tous les points sont équivalents, l'espace est homogène. [18]

Weyl se fonde sur deux théories qu'il juge ≪ fondatrices ≫ de ≪ la ≫ modernité pour montrer l'importance des symétries en mathématiques et en physique mathématique. Klein établit déjà une analogie entre sa classification des géométries et la théorie de Galois algébrique. Weyl ne fait que renforcer cette analogie en adoptant un langage abstrait. [19]

Précisons le propos de Weyl. Le théorème fondamental du *Programme d'Erlangen* de Klein affirme en effet qu'à tout sous-groupe continu du groupe projectif complexe $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ agissant sur le plan projectif complexe correspond une géométrie à isomorphisme près. Une telle géométrie est définie par les propriétés laissées *invariantes* sous l'action du sous-groupe correspondant. Par analogie avec la théorie de Galois algébrique, cette correspondance est également décroissante : plus le sous-groupe continu de $PGL(3, \mathbb{C})$ pris en considération est étendu, moins il y a de propriétés géométriques laissées invariantes sous l'action de ce sous-groupe. Voudrait-on qu'une telle correspondance s'exprime sous la forme d'un jugement analytique, alors il ne nous resterait plus que l'un de ces deux termes et donc on n'aurait plus du tout affaire à une correspondance. De là il suit que la proposition : ≪ toutes les connaissances a priori sont analytiques ≫ est une généralisation abusive. De même, les principes

17. *ibid.*, p. 535.

18. *ibid.*, p. 536.

19. F. Klein, ≪ Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes ≫, (1872) *Annales scientifiques de l'ÉNS*, troisième série, tome 8, 1891, p. 191 : ≪ Dans la théorie de Galois telle qu'elle est exposée, par exemple, dans le *Traité d'algèbre supérieure* de Serret ou dans le *Traité des substitutions* de C. Jordan, ce qui fait proprement l'objet des recherches, c'est la théorie même des groupes ou des substitutions ; la théorie des équations en découle comme application. Par analogie, nous voudrions une *théorie des transformations*, une théorie des groupes qui peuvent être engendrés par des transformations d'une nature donnée ≫.

d'invariance tels qu'ils se présentent en physique mettent généralement en jeu un *rapport de correspondance*. C'est particulièrement vrai du premier théorème de Noether qui trouve une application en mécanique classique, en relativité restreinte et en mécanique quantique. À supposer que l'intégrale d'action d'un système dynamique demeure invariante sous l'action d'un groupe de Lie $\mathfrak{G}$ à un nombre fini n de paramètres, alors on peut associer n lois de conservation aux n générateurs infinitésimaux de ce groupe, ce qui revient à dire qu'il y a une correspondance bijective entre le nombre de paramètres de $\mathfrak{G}$ et le nombre de constantes de mouvement.

L'invariance diffère non seulement de l'identité, mais également de la *permanence*. Pour clarifier la notion de permanence, appuyons-nous sur la première analogie de l'expérience de Kant. Voici comment ce dernier la formule :

> Principe de la permanence de la substance : Dans tout changement des phénomènes, la substance persiste et son quantum n'augmente ni ne diminue dans la nature ≫.[20]

Les analogies de l'expérience ne sont pas des principes métaphysiques, mais des principes de l'entendement. Or, les principes de l'entendement ont le statut de connaissances *a priori et transcendantales* : ils déterminent les conditions de possibilité de nos connaissances empiriques. D'une manière générale, Kant distingue une simple pensée d'une connaissance : une pensée est constituée uniquement de concepts ; une connaissance suppose que ces mêmes concepts soient attachés à des objets qu'ils *déterminent*. Il montre ensuite que ≪ la possibilité de l'expérience ≫ est ≪ ce qui donne une réalité objective à toutes nos connaissances *a priori* ≫, c'est-à-dire ce qui fait que ces connaissances ne se réduisent pas à de simples pensées, i.e. à une manipulation de concepts vides de sens. Cela posé, il faut bien qu'existent des principes de l'entendement qui président à la ≪ possibilité de l'expérience ≫. De tels principes justifient tout d'abord l'applicabilité de nos connaissances *a priori* à l'expérience. Ainsi, la possibilité de mathématiser la mécanique classique dans le cadre de la géométrie élémentaire dépend de ces principes. Ensuite, ces derniers garantissent une objectivité à nos jugements de connaissance et ils permettent de concevoir l'expérience de manière synthétique et non pas comme des données éparses et désordonnées.

Venons-en à la première analogie de l'expérience. Que faut-il entendre par ≪ substance ≫ ? Non pas une chose en soi puisque, dans une perspective kantienne, nous connaissons les objets seulement en tant que phénomènes. Kant associe la notion de substance à celle de permanence. Or, les notions de permanence et de changement ont une composante fondamentalement temporelle. Partant de la prémisse selon laquelle ≪ le temps ne peut pas être perçu en lui-même ≫,

20. E. Kant, *Critique de la raison pure*, A 182 ; B 224.

Kant en déduit que l'on doit nécessairement prendre pour point d'appui les phénomènes afin de caractériser les rapports de simultanéité et de succession. La « substance » est entendue comme « le substrat des phénomènes ». Les déterminations temporelles que sont la simultanéité et la succession ne seraient pas possibles si elles n'étaient pas fondées sur un principe de permanence. Kant ne nous dit donc pas : il existe une substance inaltérable en dehors de nous, mais : si nous n'avions pas de « principe de permanence », alors les changements subis par les phénomènes seraient inintelligibles. En effet, si « tout » variait, c'est-à-dire si rien ne demeurait, alors nous ne serions absolument plus en mesure d'ordonner les phénomènes dans le temps et donc de connaître leurs changements. Kant ajoute en conséquence : « C'est sur cette permanence que se fonde aussi la légitimité du concept de changement ».[21] Pour bien saisir cet argument, ajoutons que selon lui, la catégorie de « substance » dérive du principe de permanence. Il inverse donc le raisonnement « dogmatique » qui part de la prémisse selon laquelle il existe une substance, érigée au rang de chose en soi, à laquelle on assigne immédiatement la propriété de rester permanente. Kant montre (1) qu'une telle argumentation n'est pas correcte, car elle prend un principe pour sa conséquence et inversement : « de fait, dire que la substance est permanente, c'est là une proposition tautologique. En effet, cette permanence seule est la raison pour laquelle nous appliquons la catégorie de substance »[22] ; (2) qu'elle méconnaît le statut du principe de permanence. Ce dernier est tout simplement une condition sans laquelle nous n'aurions aucune intelligibilité des changements subis par des phénomènes.

Quelle distinction peut-on maintenant établir entre « l'invariance » et « la permanence » ? La « permanence » doit être analysée exclusivement en fonction du temps, en revanche « l'invariance » n'a pas nécessairement de composante temporelle. Ensuite, Kant dit explicitement que le principe de permanence caractérise le substrat des phénomènes c'est-à-dire les phénomènes dans leur matérialité. En revanche, un principe d'invariance dans le domaine de la physique et des mathématiques est avant tout de nature *formelle*. Le principe de relativité ne nous dit pas que les lois de la nature renvoient au même substrat permanent quel que soit le référentiel adopté. Une telle formulation serait d'ailleurs contradictoire, car le substrat en question vaudrait comme référentiel privilégié, ce que réfute le principe de relativité. Ce dernier nous dit bien plutôt : la forme des lois de la nature demeure invariante par changement de référentiel inertiel. Nous pouvons cependant reprendre à notre compte l'un des arguments cardinaux défendu par Kant dans cette première analogie : s'il n'y avait

21. *ibid.*, A 187 ; B 230.
22. *ibid.*, A 184 ; B 227.

pas de principes d'invariance, alors il serait impossible de construire des connaissances, que celles-ci soient *a priori* ou empiriques. En particulier, dans le domaine de la physique, l'absence de tels principes empêcherait d'ordonner des « événements » et de formuler des lois de la nature. De même en mathématiques, l'absence de principes d'invariance rendrait toute classification d'entités abstraites impossible. Par exemple, deux surfaces courbes au sens de Gauss sont considérées comme équivalentes — et donc comme faisant partie de la même classe — si elles sont localement isométriques. On peut également prendre l'exemple des surfaces de Riemann pour saisir en quoi il ne peut y avoir classification d'êtres mathématiques sans préservation de certaines de leurs propriétés par des transformations convenablement choisies. Deux surfaces de Riemann compactes connexes sont considérées comme équivalentes lorsqu'elles sont conformément équivalentes. En particulier, les propriétés topologiques globales d'une surface de Riemann compacte connexe — son genre g — sont laissées invariantes par une application conforme. Donc, deux surfaces de Riemann compactes connexes conformément équivalentes ont le même genre — cette dernière propriété ne les caractérisant néanmoins pas complètement.

Enfin, l'invariance ne saurait être rapprochée voire même confondue avec le concept d'*absolu*. L'absolu s'entend au moins de deux manières : (1) on dit qu'un objet ou une proposition sont considérés dans l'absolu, s'ils sont inconditionnés ; (2) une chose est dite absolue, si elle est privilégiée par rapport à toute autre chose de même nature. Ces deux sens du terme « absolu » ne correspondent pas exactement à la notion d'invariance. En premier lieu, une loi n'est pas invariante dans l'absolu ou en elle-même, mais relativement à un ensemble de transformations. Par exemple, la seconde loi de Newton est invariante relativement au groupe de Galilée, mais non relativement au groupe de Lorentz. Tant que l'on ne précise pas par rapport à quel type de transformations un énoncé est formellement invariant, on formule une assertion vide de sens. Ce point n'a d'ailleurs pas échappé à F. Klein. Dans sa conférence de 1910 sur les fondements géométriques du groupes de Lorentz, il écrit en effet :

> La théorie des invariants est un concept relatif, on peut parler de théorie des invariants correspondant à chaque groupe de transformations. Cette idée est si naturelle qu'elle survient partout et spontanément dans les domaines d'application les plus divers, y compris en physique théorique. [23]

En second lieu, lorsque l'on prétend qu'une chose est absolue ou qu'elle existe absolument, on énonce de fait une hypothèse qui doit être mise de côté. Les notions de temps et d'espace absolus hérités du newtonisme ont été clairement réfutés par la relativité restreinte.

23. F. Klein, « Über die geometrischen Grundlagen der Lorentz-Gruppe », *op. cit.*, p. 287.

Or, la théorie de la relativité restreinte repose sur un principe d'invariance, à savoir le principe einsteinien de relativité. Traduire la notion « d'invariance » des lois de la nature par l'idée selon laquelle elles seraient vraies de tout temps et en tout lieu, c'est à-vrai-dire ne pas distinguer clairement les notions d'invariance et d'absolu. En effet, l'expression « de tout temps et en tout lieu » est équivoque : elle peut nous faire croire en l'existence d'un temps et d'un espace absolus auxquels seraient assujetties en dernière instance les lois de la nature. Précisons en outre que cette formulation tend à nous laisser penser qu'une loi pourrait être formulée abstraction faite de tous référentiels. Le principe de relativité part justement de la prémisse selon laquelle ces derniers sont nécessaires pour localiser un événement et pratiquer des mesures dans une variété quadridimensionnelle. Outre cela, le principe de relativité affirme que les référentiels sont équivalents pour la formulation des lois de la nature. Cette équivalence se traduit précisément sous la forme d'une invariance formelle des lois de la nature par changement de référentiel, ce changement correspondant soit aux transformations de Galilée (mécanique classique), soit aux transformations de Lorentz (relativité restreinte). Cela veut également dire que le principe de relativité est l'exact opposé du relativisme, qui aurait l'inconséquence de prétendre que la formulation d'une loi de la nature dépendrait du référentiel choisi.

La triple distinction conceptuelle que nous avons établie est déjà énoncée par Cassirer dans un passage de son ouvrage fondamental intitulé *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (1910). Il se fonde sur le *programme d'Erlangen* de Klein pour soutenir l'argument suivant :

> Redéfinie comme théorie des invariants, la géométrie traite des relations immuables, mais cette immutabilité n'a de sens qu'en fonction de certains grands schémas de déplacements qui constituent, en quelque sorte, l'arrière plan formel destiné à en garantir, par contraste, la validité. Invariables, les propriétés géométriques le sont, non en soi, mais toujours par référence à un complexe de transformations possibles que nous présupposons implicitement. Constance et variabilité apparaissent alors comme des termes parfaitement corrélatifs, non définissables autrement que l'un par l'autre. Le concept géométrique ne reçoit l'identité et l'univocité de son sens qu'une fois précisé le groupe déterminé de déplacements auquel il s'adosse. La condition dont il s'agit ici ne désigne nullement une propriété absolue appartenant à des objets donnés ; elle ne fait que marquer une relation avec un projet opératoire que nous choisissons comme système de référence. On voit s'amorcer par là un changement de signification gros de conséquence pour la catégorie générale de substantialité et qui va prendre progressivement un relief de plus en plus accusé ; la permanence rompt avec la persistance dans le temps de choses ou d'états de chose ; elle désigne désormais la relation indépendante, à l'intérieur d'un enchaînement fonctionnel, de certains éléments qui n'affirment leur indépendance que par comparaison avec d'autres. [24]

24. E. Cassirer, *Éléments pour une théorie du concept* (1910), trad. Caussat, Paris, éd. de Minuit, 1977, p. 112-113.

Cassirer montre tout d'abord que les propriétés géométriques ne sont pas des qualités des objets que l'on pourrait identifier en elles-mêmes, elles sont corrélées à un certain groupe de déplacements agissant sur l'espace dans lequel on raisonne. D'où l'argument selon lequel « constance et variabilité apparaissent comme des termes parfaitement corrélés ». Ce point rejoint notre distinction entre « identité » et « invariance ». Ensuite, il affirme qu'il n'y a pas invariabilité dans l'absolu, mais toujours relativement à un ensemble de transformations convenablement choisies. Enfin, il insiste sur le caractère fonctionnel et non temporel d'une telle invariance lorsqu'il affirme que « la permanence rompt avec la persistance dans le temps de choses ou d'états de chose », ceci implique une modification en profondeur de la catégorie de substantialité et donc de la première analogie de l'expérience que l'on doit à Kant.

D'après cette analyse, seule la notion de symétrie recouvre celle d'invariance. Comme le montre Rosen, une symétrie admet deux composantes : (1) la possibilité de changements ou de transformations, (2) la préservation de certaines propriétés sous l'action de ces changements qui, pris ensemble, ont une structure de groupe. [25] Cette définition générale étant posée, nous pouvons introduire quatre critères en vue de classer les diverses symétries auxquelles nous pouvons avoir affaire en physique.

(a) On distinguera symétries *discrètes* et symétries *continues*, selon que les groupes qui permettent de les définir sont discrets (finis ou infinis) [26] ou continus. Dans le dernier cas, on a généralement affaire à des groupes qui admettent en outre une structure de variété lisse (resp. analytique), i.e. des groupes de Lie réels (resp. complexes). (b) On parlera de symétries *universelles* lorsqu'elles décrivent des changements de référentiels (c'est notamment le cas des principes de relativité galiléen et einsteinien) et de symétries *internes* dès lors qu'elles s'appliquent à l'étude d'*interactions spécifiques* pour un système donné. (c) Nous devons également différencier des principes de symétries *globaux* — qui entrent en ligne de compte en mécanique classique ou en relativité restreinte — et des principes de symétries *locaux* lorsque les paramètres qui les définissent dépendent de la position dans l'espace-temps — on peut alors mentionner l'exemple de la relativité générale et des théories de jauge. Ces deux cas de figure sont décrits de manière exhaustive respectivement par le premier et le second théorème de Noether. (d) Enfin, tous les principes de symétrie ne sont pas de nature

25. J. Rosen, *Symmetry in Science*, New York, Berlin, Heidelberg, éd. Springer, 1995, p. 4. « Note the two essential components of symmetry : 1. Possibility of a change. It must be possible to perform a change, although the change does not actually have to be performed. 2. Immunity. Some aspect of the situation would remain unchanged, if the change were performed ».

26. Voir en particulier l'usage du groupe des permutations de n éléments pour rendre compte de l'indiscernabilité entre n particules constituant un système quantique.

géométrique.

À la suite de Wigner, on distinguera les principes de symétrie *géométriques*, qui caractérisent l'espace-temps sur lequel on raisonne, et des principes de symétrie *dynamiques*, relatifs aux types d'interactions dont on veut rendre compte. Par exemple, si l'intégrale d'action d'un système dynamique est laissée invariante par le groupe des translations dans l'espace, dans le temps ou par le groupe des rotations dans l'espace, on travaille sur des principes de symétrie géométriques. En revanche, l'invariance de jauge est un principe de symétrie dynamique auquel est attachée la conservation de l'électricité. Concernant la distinction entre principes de symétrie géométriques et principes de symétrie dynamiques, Wigner ajoute les deux précisions suivantes. (i) Même si les principes de symétrie géométriques conditionnent la forme que prennent les lois de la nature, ils se rapportent également aux événements — en tant que points dans l'espace-temps sur lequel on opère. [27] En revanche, les principes de symétrie dynamiques sont formulés ≪ dans les termes des lois de la nature ≫, au sens où ils ne valent que pour des types spécifiques d'interactions. [28] (ii) Une difficulté survient dans le cas de la relativité générale, puisque les propriétés métriques de la variété pseudo-riemannienne d'espace-temps de la relativité générale sont indissolublement liées aux interactions gravitationnelles. Aux yeux de Wigner, l'invariance par les transformations générales de coordonnées de la relativité générale n'est pas tant de nature géométrique que de nature dynamique. [29]

Enfin, il importe également de savoir si les notions de symétrie et d'invariance s'équivalent complètement. Dans la préface à son ouvrage sur les symétries, Weyl attribue deux significations au concept de symétrie : la première, dérivant de l'étymologie même du terme, désigne ≪ l'harmonie dans les proportions ≫, la seconde qui est proprement mathématique correspond à l'invariance d'une configuration d'éléments sous l'action d'un groupe de transformations. [30] D'après cette seconde acception, symétrie et invariance se recouvrent complètement et ces deux notions, parfaitement interchangeables, font intervenir de manière essentielle le concept

27. E. Wigner, ≪ Symmetry and conservation laws ≫, *op. cit.* p. 17 : ≪ The geometrical principles of invariance, though they give a structure to the laws of nature, are formulated in terms of the events themselves ≫.

28. *ibid.*, p. 17-18 : ≪ the (...) dynamical principles of invariance are formulated in terms of the laws of nature. They apply to specific types of interaction, rather than to any correlation between events. Thus, we say that the electromagnetic interaction is gauge invariant, referring to a specific law of nature which regulates the generation of electromagnetic field by charges, and the influence of the electromagnetic field on the motion of the charges ≫.

29. *ibid.*, p. 22 : ≪ The reason that I did not speak about the invariance with respect to the general coordinate transformations of the general theory of relativity is that I believe that the underlying invariance is not geometric but dynamic ≫.

30. H. Weyl, *Symétrie et mathématique moderne* (1952), Paris, éd. Flammarion, 1964, p. 9.

mathématique de groupe. Par exemple, l'ouvrage de Schönflies consacré à la classification des groupes d'espace en cristallographie associe systématiquement les symétries d'un cristal à un groupe de transformations qui permet de les définir.

On peut accorder un sens plus restrictif à une symétrie en affirmant que deux configurations d'éléments sont symétriques si et seulement si on peut exactement les *superposer*. Dans ce cas, une isométrie indirecte — qui ne conserve pas l'orientation de l'espace — implique une certaine *dissymétrie*. C'est par exemple le cas d'une réflexion dans le plan euclidien : une figure F et son image F' par une réflexion ne sont pas superposables *en général*, bien qu'elles soient semblables. Cette dissymétrie, qui est au fondement de la distinction entre la gauche et la droite, n'a pas échappé à Kant, qui s'appuie d'ailleurs dans sa *Dissertation* de 1771 sur l'existence de figures semblables mais non congruentes pour montrer que l'espace est originairement une intuition et non un concept. L'argument kantien est résumé par Lautman dans un article intitulé ≪ symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique ≫, [31] Weyl mentionne également cet argument dans sa conférence sur la symétrie. [32] Lautman et Weyl soulignent l'importance de cette ≪ dissymétrie ≫ liée à la distinction entre la gauche et la droite dans le domaine de la cristallographie : tous deux font référence aux travaux fondamentaux de Pasteur consacrés aux cristaux d'acide tartrique. [33] Les arguments avancés par Pasteur, pour distinguer les deux formes de cristaux d'acide tartrique en fonction de leur orientation géométrique, sont effectivement analogues au raisonnement mené par Kant à propos des figures similaires mais non congruentes :

> Les deux espèces de cristaux sont isomorphes et isomorphes avec le tartrate correspondant ; mais l'isomorphisme se présente là avec une particularité jusqu'ici sans exemple : c'est l'isomorphisme de deux cristaux dissymétriques qui se regardent dans un miroir. Cette comparaison

31. A. Lautman, ≪ Symétrie et dissymétrie en mathématiques et en physique ≫, *op. cit.*, p. 265.
32. H. Weyl, *op. cit.*, p. 30.
33. A. Lautman, *op. cit.*, p. 265 : ≪ Dans le langage des cristallographes, deux cristaux isomères, symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan, et non superposables, sont dits énantiomorphes. Pour que deux cristaux symétriques soient énantiomorphes, il faut que chacun présente isolément une certaine dissymétrie interne, comme par exemple l'absence d'un centre de symétrie. L'importance de cette dissymétrie par énantiomorphie est apparue avec les premiers travaux de Pasteur, lorsqu'il reconnut la liaison qui existe entre la différence d'orientation géométrique de deux cristaux, énantiomorphes (ou hémiédriques), et l'inversion de leur action sur le plan de la polarisation de la lumière ≫. Voir également H. Weyl, *op. cit.*, p. 37 : ≪ En 1848, Pasteur découvrit que, lorsque le sel d'ammonium et de sodium de l'acide racémique, optiquement inactif, était recristallisé à partir d'une solution dans l'eau à basse température, le dépôt était composé de deux sortes de minuscules cristaux, images l'une de l'autre par réflexion. Ils furent soigneusement séparés et les acides obtenus à partir des uns et des autres se révélèrent avoir la même composition chimique que l'acide racémique, toutefois l'un était optiquement lévoactif, l'autre dextroactif ≫.

> rend le fait d'une manière très juste. En effet, si dans l'une et l'autre espèce de cristaux je suppose prolongées les facettes hémiédriques jusqu'à leurs rencontres mutuelles, j'obtiens les deux tétraèdres symétriques dont j'ai parlé, inverses l'un de l'autre, et que l'on ne peut superposer, malgré l'identité parfaite de toutes leurs parties respectives. [34]

L'argument de Pasteur atteste des vertus heuristiques de la dialectique entre symétrie et dissymétrie pour rendre compte du fait que deux cristaux de même composition atomique peuvent dévier la lumière polarisée dans des sens opposés. Si nous voulons être plus précis, une symétrie conserve certaines propriétés, mais il est également nécessaire d'identifier celles qu'elle ne conserve pas. Une réflexion par rapport à un plan dans l'espace comporte un élément de dissymétrie lié au fait qu'elle ne conserve pas l'orientation de l'espace. Ainsi, notre analyse du concept de symétrie permet de montrer (1) que la symétrie ne doit pas être confondue avec les notions d'identité, de permanence et d'absolu, (2) qu'il existe plusieurs types de symétries (discrète / continue, globale / locale, universelle / spécifique, géométrique / dynamique), (3) que toute symétrie doit être pensée en rapport avec une certaine dissymétrie. D'ailleurs, comme le souligne Weyl avec force, l'existence de dissymétries irréductibles dans l'observation des phénomènes naturels attestent de leur contingence. Si les principes de symétrie ou d'invariance conditionnent la formulation des lois de la nature, ils ne doivent pas être confondus avec le réel même et ils ne signifient pas que la nature serait *en elle-même symétrique* :

> Si la nature était entièrement réductible à des lois, tout phénomène possèderait la symétrie totale des lois universelles de la nature, telles qu'elles sont formulées par la théorie de la relativité. Le simple fait qu'il n'en est rien prouve que la *contingence* est une caractéristique essentielle du monde. [35]

4.2 Le statut et les fonctions des principes d'invariance

Venons-en au statut des principes d'invariance en physique. Remarquons que nous parlons de ≪ principes ≫ et non de ≪ lois ≫. Nous mettons en avant une hiérarchie et donc un rapport de conditionnant à conditionné entre un ≪ principe d'invariance ≫ et une ≪ loi de la nature ≫. Il ne s'agit pas là d'un simple lien logique de ≪ prémisse ≫ à ≪ conséquence ≫ pour deux raisons : (1) une loi doit s'accorder avec les conditions de l'expérience, par suite un principe d'invariance participe à la détermination de ces conditions ; (2) le choix d'un cer-

34. L. Pasteur, ≪ Recherches sur les relations qui peuvent exister entre la forme cristalline, la composition chimique et le sens de la polarisation rotatoire ≫, initialement publié dans les *annales de physique et de chimie*, 3e série, XXIV, 1848, in *Œuvres complètes de Louis Pasteur*, Tome I, Paris, éd. Masson, 1922, p. 78.
35. H. Weyl, *op. cit.*, p. 35.

tain principe d'invariance affecte le « sens » même d'une loi : suivant que l'on prend pour fondement le principe de relativité galiléen le principe de relativité einsteinien, les lois de la mécanique n'ont pas le même sens. Cela posé, les arguments de Weyl et de Wigner permettent de répondre complètement au problème que nous avons formulé touchant au statut des principes de symétrie ou d'invariance : il s'agit de connaissances qui, si l'on reprend une série de distinctions kantiennes tout en leur faisant subir une série de déplacements que nous expliciterons, sont *a priori* (Weyl) et même *transcendantales* (Wigner).

4.2.1 Principes d'invariance et connaissances *a priori* en physique

Dans *Symétrie et mathématique moderne*, Weyl affirme :

> Il arrive ainsi qu'on puisse, au nom de la symétrie, faire des prédictions *a priori* au sujet de cas particuliers, alors que le cas général — comme par exemple la loi de l'équilibre pour les balances à bras inégaux — ne saurait être établi qu'au moyen d'expériences, ou grâce à des principes physiques reposant, en définitive, sur l'expérience. Autant que je le sache, tous les résultats *a priori* de la physique ont eu leur origine dans la symétrie. [36]

Weyl n'affirme pas que tous les énoncés relevant de la physique sont fondés sur l'expérience ; plus précisément, il ne souscrit pas à l'idée selon laquelle des énoncés « protocolaires » seraient les fondements ultimes de toute théorie physique. En ce sens, il n'adopte pas un point de vue strictement empiriste. Il ne dit pas non plus que tous les principes d'invariance sont *a priori* mais bien plutôt que, jusqu'à preuve du contraire, toute connaissance *a priori* dans le domaine de la physique est issue d'un principe d'invariance ou de symétrie. Il va même plus loin, puisqu'il souligne les fonctions prédictives des symétries dans une diversité de théories physiques. Pour mesurer la portée et la pertinence de l'argument défendu par Weyl, il importera de savoir s'il existe des principes *a priori* en physique qui ne sont pas des principes d'invariance. Pour anticiper sur nos réflexions ultérieures, nous pouvons d'ors et déjà souligner que les principes extrémaux — nous pensons par exemple au principe de Hamilton — sont *a priori* sans pour autant s'identifier à des principes d'invariance. L'argument de Weyl méritera sans doute d'être nuancé. Toujours est-il que des propriétés de symétrie peuvent effectivement donner lieu à ce que Weyl appelle des prédictions *a priori* qui seront confirmées expérimentalement après coup. Deux exemples permettent d'expliciter cette idée. Le premier est abordé par Weyl lui-même : il s'agit de la classification des 230 groupes d'espace établie indépendamment par Fedorov et Schönflies à la fin des années 1880 et au début des années

36. *ibid.*, p. 124.

1890. [37] L'ouvrage de Schönflies consacré à cette classification s'ouvre sur l'assertion suivante :

> La loi de la nature qui permet de développer la théorie des systèmes cristallins de manière mathématique et déductive est la loi de symétrie. [38]

Ainsi, les fondements *a priori* de la cristallographie se trouvent dans une loi de symétrie. Après avoir identifié les différentes propriétés de symétrie des cristaux, Schönflies établit (1) que deux cristaux appartiennent à la même classe s'ils possèdent les mêmes propriétés de symétrie, (2) que la détermination de toutes les classes de cristaux *théoriquement possibles* équivaut à la classification des groupes d'espace. Le raisonnement de Schönflies est donc bien déductif et fondé sur des connaissances entièrement *a priori* : il ne classe pas les cristaux en fonction de leurs propriétés empiriques, mais en fonction de symétries définies indépendamment de l'expérience. D'ailleurs, Fedorov et Schönflies découvrent des classes de cristaux sans savoir si elles admettent un correspondant dans la nature. Ainsi, les propositions établies par Fedorov et Schönflies ne dépendent pas de l'expérience, elles sont établies *a priori* à partir de ce que Schönflies appelle une « loi de symétrie ».

Nous pouvons également nous fonder sur un second exemple, postérieur aux réflexions de Weyl, pour confirmer ses arguments. Il s'agit du « eightfold way » initié par Ne'eman et Gell-Mann au début des années 60. L'étude du groupe de symétries SU(3) et, pour être plus précis, de ses représentations irréductibles, sert de support pour classer des particules et établir *a priori* l'existence de certaines d'entre elles. Inutile d'entrer ici dans les raffinements qu'admet la classification des particules. Intéressons-nous aux hadrons, c'est-à-dire aux particules composées qui sont sensibles à l'interaction forte. Précisons que l'interaction forte est responsable de la cohésion du noyau d'un atome. Détaillons ce point : puisqu'ils sont chargés positivement, les protons devraient se repousser mutuellement. Ce n'est justement pas le cas. La stabilité du noyau d'un atome — composé de protons et de neutrons — est donc l'effet de l'interaction forte. Certains hadrons sont des fermions, c'est-à-dire des particules dont le moment angulaire intrinsèque — appelé spin — est demi-entier. Les hadrons qui satisfont à cette propriété sont des baryons. C'est le cas du neutron et du proton. D'autres hadrons sont des bosons, c'est-à-dire des particules de spin entier. On parle alors de mésons. Jusqu'en 1955, on connaissait 7 baryons, le 8^{e} fut découvert en 1958. En revanche, on connaissait seulement 7 mésons. En 1960-1961, Gell-mann et Ne'eman parviennent à une détermination exhaustive des familles de mésons et de hadrons à partir de l'étude de certaines *symétries internes*. Ils

37. H. Weyl, *op. cit.*, p. 120 à 125.
38. A.M. Schönflies, *Krystallsysteme und Krystallstructur* (1891), Berlin, éd. Springer, 1984, p. 3.

prédisent *a priori* l'existence d'un huitième méson qui fut observé un an plus tard. Pour établir cette prédiction, ils s'appuient sur l'étude des représentations irréductibles du groupe SU(3). Les représentations irréductibles de SU(3) sont en bijection avec les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(3)$, car SU(3) est *connexe* et *simplement connexe*. En outre, il y a une bijection entre les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(3)$ et de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ — par complexification et, inversement, par restriction. Il revient donc au même d'étudier les représentations de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Techniquement, les octets des baryons et des mésons s'ordonnent en fonction du diagramme des poids de la représentation adjointe de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Cet exemple montre en quoi des arguments de symétrie, liés à l'étude des représentations irréductibles de SU(3), permettent à la fois d'ordonner des particules et de prédire l'existence de certaines d'entre elles indépendamment de l'expérience. [39]

La question est de savoir ce que Weyl entend par « connaisance *a priori* » et s'il n'attribue pas à ce concept un sens plus faible que dans le kantisme. À strictement parler, une connaissance *a priori* est universelle et nécessaire. Qu'elle soit indépendante de l'expérience quant à son fondement ne signifie pas qu'elle soit inapplicable à l'expérience. Bien au contraire, Kant admet notamment que la géométrie qui, selon lui, est composée exclusivement de connaissances synthétiques *a priori*, doit se conformer aux conditions de l'expérience. Bref, *a priori* ne veut dire ni *inconditionné* ni *sans rapport avec l'expérience*. Il n'en reste pas moins qu'un jugement *a priori* ne dérive pas des données de l'expérience, bref il ne peut pas être construit sur la base d'observations empiriques.

Cela posé, la nécessité invoquée par Kant pour caractériser les connaissances *a priori* conduit à penser qu'elles ne sont pas révisables. Car, à proprement parler, un jugement est nécessaire s'il ne peut pas être autrement qu'il n'est. [40] De plus, les connaissances mathématiques sont *purement* et *absolument a priori* dans une perspective kantienne. L'adverbe « purement » signifie qu'aucun concept mathématique n'est dérivé de l'expérience, l'adverbe « absolument » indique que les principes sur lesquels sont fondées les mathématiques sont marqués de la même nécessité que les théorèmes qui en dérivent. [41] Bref, Kant ne considère pas les mathématiques comme une science hypothético-déductive mais comme un ensemble

39. Voir en particulier Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groupes et Symétries*, Palaiseau, éd. de l'École Polytechnique, 2005, p. 128 pour une description des travaux de Ne'eman et Gell-Mann

40. E. Kant, *Critique de la raison pure*, B 3 : « L'expérience nous enseigne bien que quelque chose est fait ainsi ou autrement, mais non pas que ce ne puisse être autrement. S'il se trouve (...) une proposition, qui est en même temps pensée comme comportant nécessité, elle est alors un jugement *a priori* ».

41. *ibid.*, p. 65 : « si en outre [une proposition a priori] n'est dérivée d'aucune autre, que de celle qui est à son tour elle-même valable comme proposition nécessaire, elle est absolument *a priori* ».

de vérités *apodictiques*. Le caractère non révisable des connaissances *a priori* au sens de Kant — puisqu'elles sont nécessaires et universelles — et la catégoricité qu'il assigne aux vérités mathématiques ne sauraient être maintenues sous peine d'inadaptation aux développements respectifs de la mathématique et de la physique modernes. En effet, pour ne prendre qu'un seul exemple, la géométrie est soumise à des axiomes qui sont purement hypothétiques, il est donc inexact de dire que les connaissances géométriques sont *absolument a priori*. En outre, on sait que la géométrie euclidienne repose sur la considération de corps rigides, concept qui est une idéalisation à partir de l'expérience. Donc la géométrie euclidienne n'est ni *absolument* ni *purement a priori*.

Il nous semble possible de soutenir l'hypothèse suivante : il existe bien des principes *a priori* spécifiques à la physique, ce qui veut dire qu'ils ne dérivent pas de l'expérience. Cela ne signifie pas qu'ils sont sans lien avec les conditions de l'expérience. Jusque-là, nous nous conformons aux arguments kantiens. Cependant, rien n'empêche de penser qu'ils soient *révisables* et donc qu'ils n'aient pas le caractère de stricte nécessité que Kant assigne pourtant à tout jugement *a priori*. En effet, de tels principes ne sont pas purement *a priori* : pour qu'ils aient une signification physique, il faut bien que certains de leurs concepts soient tirés de l'expérience ou, plus exactement, que des objets donnés empiriquement satisfassent au moins de manière approchée aux caractères de tels concepts. Or, ceci implique justement qu'ils soient révisables. Cette conséquence n'apparaît pas explicitement dans la théorie kantienne de la connaissance. L'hypothèse selon laquelle il existe des connaissances *a priori et* révisables n'est pas nouvelle puisque, dans un ouvrage de 1920 intitulé *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*, Reichenbach fait explicitement subir une telle inflexion à la notion kantienne de jugement *a priori*.[42] Pour être plus précis, Reichenbach entrevoit deux sens au concept d'*a priori* dans la *Critique de la raison pure*. Une connaissance est *a priori* au premier sens du terme lorsqu'elle est *constitutive* de notre compréhension des phénomènes auxquels elle donne un sens *déterminé*. Une connaissance est *a priori* au second sens du terme lorsqu'elle est universelle et nécessaire.[43] Reichenbach confronte ces deux acceptions du concept d'*a priori* au développement de la relativité restreinte et de la relativité générale. Il montre que ces deux théories mettent en jeu des principes *constitutifs* au sens où nous ne pourrions construire aucune connaissance déterminée à partir d'eux, mais il n'est pas possible de supposer qu'ils

42. Nous avions déjà évoqué cet ouvrage dans la seconde partie de notre thèse, puisque Reichenbach critique alors explicitement le projet de théorie unifiée des champs proposé par Weyl.

43. H. Reichenbach, *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*, Berlin, éd. Springer, 1920, p. 46 : ≪ Le concept d'a priori a deux significations différentes chez Kant. En premier lieu, il veut dire ≪ valable de manière apodictique ≫, ≪ valable de tous temps ≫, et en second lieu, il signifie constitutif du concept d'un objet ≫.

seraient non révisables. Reichenbach affaiblit donc le sens et la portée des connaissances *a priori* : elles sont bien *constitutives* au sens où elles permettent de construire des objets déterminés, ce qui signifie qu'elle ne *dérivent* pas de l'expérience, mais elles ne sont pas apodictiques.

Cela étant, dans son ouvrage sur la relativité, Reichenbach établit une nette dichotomie entre les mathématiques et la physique. En effet, les mathématiques se rapportent à un monde logique, alors que la physique renvoie à des choses du monde réel. On devine par cet argument que Reichenbach tend à réduire les mathématiques à de pures relations logiques entre des concepts, ce qu'il parachèvera dans la suite de ses travaux puisqu'il tentera de réfuter une fois pour toutes la notion de jugement *synthétique a priori* qui, selon Kant, caractérise toutes nos connaissances en mathématiques. Reichenbach identifie les connaissances *a priori* de la physique à des principes de coordination qu'il considère comme les composantes rationnelles d'une science empirique. Il s'agit donc de principes constitutifs qui rendent possibles les déterminations métriques entre des phénomènes. Ces principes de coordination renvoient aux diverses structures métriques que l'on peut *a priori* assigner à une variété différentielle, certaines d'entre elles n'étant pas physiquement concevables.

Il nous semble cependant que la notion de ≪ principe de coordination ≫ employée par Reichenbach ne correspond ni complètement ni tout à fait adéquatement à ce que pourraient être des connaissances *a priori* dans le domaine de la physique. Pour le dire plus clairement, son argument n'échappe pas à une objection majeure que Lautman a adressée à toute thèse qui satisfait aux deux présupposés qui caractériseront l'empirisme logique, quelles que soient ses variantes : (i) réduction des mathématiques à un système de jugements *analytiques a priori*, (ii) dichotomie entre les sciences formelles et les sciences de la nature quant à leurs fondements respectifs. Voici l'objection que formule Lautman contre ces deux présupposés :

> M. Carnap semble considérer parfois les rapports des mathématiques et de la physique comme ceux de la forme et de la matière. Les mathématiques fourniraient le système de coordonnées dans lequel s'inscrivent les données physiques. Cette conception ne paraît guère défendable puisque la physique moderne, loin de maintenir la distinction d'une forme logique et d'une matière physique, unit au contraire données spatio-temporelles et données matérielles dans l'armature commune d'un mode de représentation synthétique des phénomènes ; que ce soit par la représentation tensorielle de la théorie de la relativité ou par les équations hamiltoniennes de la mécanique ≫. [44]

Sans doute les thèses de Reichenbach et de Carnap ne sont-elles pas totalement identifiables — en ce sens, il faudrait réévaluer l'argument de Lautman en fonction des divers représentants

44. A. Lautman, ≪ Mathématiques et Réalité ≫, *op. cit.*, p. 49.

de ce que l'on appelle couramment ≪ l'empirisme logique ≫ — cependant, il est très clair que Lautman formule une objection qui s'étend aux hypothèses défendues par Reichenbach dès le début des années 20. En effet, l'expression ≪ système de coordonnées ≫ renvoie sans ambiguïté au concept de ≪ principe de coordination ≫ introduit par Reichenbach en 1920. En outre, l'idée de Lautman selon laquelle la mathématisation d'une théorie physique permet une ≪ représentation synthétique des phénomènes ≫ se situe aux antipodes de toute tentative de réduction des mathématiques à un système de jugements *analytiques a priori*. Une telle réduction s'observe déjà dans l'*Allgemeine Erkenntnislehre* de Schlick (1918) et elle apparaît explicitement dans *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori* de Reichenbach.

Le principe de relativité, le principe de Wigner en mécanique quantique ou les deux théorèmes de Noether — qui s'appliquent à une grande diversité de théories physiques — remplissent les conditions qui font d'eux des connaissances *a priori* révisables. Il s'agit dans les trois cas de principes d'invariance qui participent à une représentation synthétique des phénomènes. On ne saurait en aucune façon les réduire à des principes de coordination, c'est-à-dire de pures relations logiques établies analytiquement. Voilà pourquoi la redéfinition du concept d'*a priori* qui nous semble la plus conforme à nos arguments est due à Granger :

> Nous voulons seulement indiquer par ce mot une connaissance qui :
>
> 1/ n'est pas strictement déterminée par l'expérience (même si le sont certaines de ses conséquences, dans un système donné de description des phénomènes) ;
>
> 2/ est posée comme *régulatrice* de l'acquisition et de la formulation d'un savoir empirique. [45]

Lorsque nous affirmons que les principes que nous venons de mentionner sont des connaissances *a priori*, nous ne voulons pas dire qu'il s'agit là d'énoncés mathématiques déguisés : ils ont une signification physique très claire qui vient de ce qu'ils sont conformes ou de ce qu'ils peuvent se conformer aux conditions de l'expérience. À cela s'ajoute qu'ils ne sont pas *purement a priori*, car certains de leurs concepts seraient *vides* si on ne les rapportait pas, même indirectement, à des objets de l'expérience. Par suite, on peut toujours formuler des conséquences empiriquement testables à partir d'eux. Cependant, ils ne dérivent pas eux-mêmes de l'expérience. Car, précisément, ils doivent être présupposés à titre implicite ou explicite pour que nous puissions saisir des phénomènes ou des événements et donc les *constituer* en objets de connaissance.

Pour nous assurer de la pertinence de notre argument, analysons le principe de relativité. Limitons-nous au cadre de la relativité restreinte. D'un côté, ce principe fait intervenir un

45. G.-G. Granger, ≪ Le synthétique *a priori* et la science moderne ≫, in *Formes, opérations, objets*, Paris, éd. Vrin, 1994, p. 293.

quantificateur universel : tous les référentiels inertiels en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres sont équivalents pour la formulation des lois de la nature. Dès lors que l'on déroge à cette stricte universalité, on est conduit à admettre l'existence d'un référentiel privilégié. Or une telle hypothèse est contredite par l'expérience. De l'autre il conditionne la forme que doivent prendre les lois de la nature. Si donc le principe de relativité dérivait de l'expérience, il serait induit à partir des lois de la nature, ce qui n'est pas. On sait en outre que le principe einsteinien de relativité, qui s'applique indistinctement aux lois de la mécanique et de l'électrodynamique, rend raison de l'expérience de Morley-Michelson plutôt qu'il ne dérive d'elle. Celle-ci nous dit seulement : le supposé mouvement de la terre par rapport à l'éther est indétectable. Mais elle ne nous donne pas le principe qui admet pour conséquence l'inexistence d'un référentiel privilégié et donc ici de l'éther. Le principe de relativité a donc, dans une perspective einsteinienne, une triple fonction : (i) il permet de réfuter l'hypothèse de l'éther, (ii) il s'accorde avec une conception déductiviste des théories physiques défendue par Einstein, puisque les lois de la nature dérivent du principe de relativité auquel Einstein joint la « loi » de propagation de la vitesse de la lumière dans le vide à titre de second principe [46], (iii) il joue un rôle heuristique dans la formulation des lois de la nature, étant donné qu'un énoncé est une loi s'il est invariant par changement de référentiel inertiel.

4.2.2 Les principes d'invariance comme connaissances transcendantales

La question est maintenant de savoir si les principes d'invariance que nous avons mentionnés sont seulement des connaisances *a priori* ou s'ils ne s'apparentent pas, plus profondément, à des connaissances *transcendantales*. Cela voudrait dire qu'ils constituent des conditions sans lesquelles aucune connaissance de la nature ne serait possible. Nous avons de bonnes raisons de croire qu'ils ont un statut comparable aux *principes de l'entendement*

46. E. Cassirer souligne la différence de statut entre le principe de relativité et la loi de propagation de la lumière dans le vide au cours de son ouvrage *La théorie de la Relativité d'Einstein* (1921), trad. Seidengart, Paris, éd. du cerf, 2000, p. 57 : « D'un côté, il y a l'affirmation d'un fait naturel général, d'une constante matérielle qui est le résultat des constatations expérimentales de l'optique et de l'électrodynamique, de l'autre côté, il y a une exigence que nous imposons à la *forme* même des lois de la nature. Dans le premier cas, il est empiriquement établi qu'il y a une vitesse exactement déterminée, et possédant une valeur finie, qui conserve cette valeur dans tout système indépendamment de leur état de mouvement ; dans le second, on établit une *maxime* générale pour l'étude de la nature qui doit servir de "moyen heuristique dans la *recherche* des lois générales de la nature" ».

formulés par Kant dans son *Analytique transcendantale*. Rappelons que ce dernier établit explicitement une hiérarchie entre les *lois de la nature* et les *principes de l'entendement*. Les ≪ lois de la nature ≫ sont des ≪ lois de l'usage empirique de l'entendement ≫ : leur universalité est suppositive — elle n'est pas stricte — et elles ne font ≪ qu'exprimer ≫ inadéquatement une nécessité qui apparaît dans toute sa pureté dans les principes de l'entendement :

> On n'est donc véritablement pas exposé ici à prendre des principes empiriques pour des principes de l'entendement pur, ou inversement ; car la nécessité selon des concepts, qui caractérise les principes de l'entendement pur, et dont on perçoit aisément le manque dans toute proposition empirique, si universelle qu'en soit la valeur, peut aisément prévenir cette confusion. [47]

Pour le dire autrement, les lois de la nature ne sont pas *a priori* puisqu'elles dépendent de l'entendement dans son usage empirique ; en revanche les principes de l'entendement pur sont indépendants de l'expérience. D'une part les lois de la nature sont conditionnées par les ≪ principes de l'entendement ≫, de l'autre l'expérience donne ≪ le cas particulier ≫ censé se conformer aux lois de la nature entendues comme règles empiriques. Les arguments défendus par Wigner sur les ≪ principes d'invariance ≫ ne modifient pas la hiérarchie établie par Kant entre l'expérience, les lois de la nature et les principes de l'entendement. Il importe seulement de substituer la notion d'événement à celui de phénomène et de remplacer les principes de l'entendement par les principes d'invariance qui, d'après nos arguments précédents, sont *a priori* en un sens affaibli. Aussi Wigner écrit-il :

> The progression from events to laws of nature, and from laws of nature to symmetry or invariance principles, is what I meant by the hierarchy of our knowledge of the world around us. [48]

Wigner établit donc une hiérarchie entre les ≪ événements ≫, les ≪ lois de la nature ≫ et les ≪ principes d'invariance ≫. Son argument ne doit néanmoins pas prêter à confusion. Wigner n'affirme pas que les lois seraient induites à partir des événements et que les principes d'invariance seraient eux-mêmes induits à partir des lois de la nature. Il montre au contraire qu'à partir du développement de la relativité restreinte, une telle hiérarchie s'incarne dans un rapport de conditionnant à conditionné : les principes d'invariance sont des contraintes *a priori* sur la forme que peuvent prendre les lois de la nature. Ils rendent même possible la formulation des lois de la nature : si tout variait, les rapports entre les événements n'auraient aucune stabilité et ils ne pourraient pas être l'objet d'une connaissance à proprement parler.

Ainsi, la formulation de principes d'invariance est une condition sans laquelle il serait impossible de découvrir et de formuler des lois de la nature. Ils interviennent aussi bien dans

47. E. Kant, *op. cit.*, A 159 ; B 198.
48. E. Wigner, ≪ The role of invariance principles in natural philosophy ≫, *op. cit.*, p. 30.

le contexte de leur découverte que de leur justification. Telle est d'ailleurs la double fonction d'une condition de possibilité au sens kantien du terme : celle-ci permet la production d'une connaissance et elle consiste dans le même temps à déterminer des critères qui la justifient — d'où la hiérarchie entre les principes de l'entendement pur et les régularités empiriques. Le rapprochement que nous avons établi plus haut entre les principes d'invariance et le principe kantien de permanence n'a donc rien de fortuit : dans les deux cas, nous avons affaire à des connaissances *transcendantales* et non pas seulement *a priori*. Ainsi, il nous semble que Weyl et Wigner répondent à des problèmes directement issus de la théorie kantienne de la connaissance lorsqu'ils se demandent respectivement : (a) quel est le critère de démarcation entre jugements *a priori* et *a posteriori* en physique ? (b) quelles sont les conditions qui président à la formulation des lois de la nature ?

Cela posé, Wigner remarque que la hiérarchie entre principes d'invariance et lois de la nature n'a rien de spontané dans le développement historique des théories physiques. Wigner considère ≪ L'électrodynamique des corps en mouvement ≫ d'Einstein (1905) comme une inversion décisive du rapport entre ≪ lois de la nature ≫ et ≪ principes d'invariance ≫. Pour le dire de manière schématique, jusqu'à cet article, considéré comme le texte fondateur de la relativité restreinte, les principes d'invariance étaient réduits à des conséquences issues des lois de la nature, comme s'ils dérivaient d'elles. Einstein renverse la donne : les lois de la nature sont soumises quant à leur forme au principe de relativité et à la loi de propagation de la lumière dans le vide, ce qui conduit à revoir toutes les lois de la mécanique classique de manière à obtenir des relations laissées invariantes par le groupe spécial de Lorentz. [49] Wigner tire de cet argument un critère de démarcation décisif entre les interprétations d'Einstein et de Poincaré au sujet du principe de relativité. Si tous deux reconnaissent sa validité, il n'en reste pas moins que seul Einstein l'érige au rang de postulat qui conditionne de manière strictement déductive et donc *a priori* la forme que doivent prendre les lois de la nature. *A contrario*, Poincaré fait dériver le groupe spécial de Lorentz des équations de

49. E. Wigner, ≪ Invariance in physical theory ≫, *op. cit.*, p. 5 : ≪ [Einstein's] Papers on special relativity also mark the reversal of a trend : until then, the principles of invariance were derived from the laws of motion. (...) It is now natural for us to try to derive the laws of nature and to test their validity by means of the laws of invariance, rather than to derive the laws of invariance from what we believe to be the laws of nature ≫. Voir galement G. Lochak, *La géométrisation de la physique*, Paris, éd. Flammarion, 1994 p. 227-228 : ≪ Aujourd'hui, il ne s'agit plus, comme par le passé, de symétries découvertes après coup ni même introduites, comme on vient de le voir, dans des modèles physiques suggérés par l'expérience, mais de symétries imposées *a priori*, sans rapport avec une quelconque propriété physique intelligible, et dont on recherche a posteriori les conséquences expérimentales possibles ≫.

l'électrodynamique qui, par définition, sont établies empiriquement. Leurs raisonnements respectifs ne sont pas assimilables. [50]

Admettons qu'il y a un rapport de conditionnant à conditionné entre principes d'invariance et lois de la nature. Si ce point est accepté, alors nous pouvons raisonnablement entrevoir certaines limites à la méthode analytique qui est communément utilisée pour exhiber les caractéristiques d'une loi de la nature. Une telle méthode consiste pour l'essentiel à traiter une loi de la nature comme un énoncé isolé qui serait en lui-même porteur des traits qui le spécifient. Faisons un parallèle avec le domaine des mathématiques pour montrer qu'un tel procédé n'est pas applicable sans restriction. Soit un théorème de géométrie élémentaire. Peut-on réellement en déterminer le sens, si on ne le rattache pas aux axiomes qui le conditionnent ? En outre, est-il seulement possible de définir un théorème si on ne le compare pas à un axiome ? Or, pour qu'une telle comparaison soit possible, il faut bien admettre au préalable qu'il y a un rapport de conditionnant à conditionné entre un axiome et un théorème. Mais dès lors, il est rigoureusement impossible de traiter un théorème comme un énoncé isolé. Par extension, on ne saurait analyser un axiome sans le rapporter à l'axiomatique à laquelle il appartient.

Il en va exactement de même pour une loi de la nature. Lorsque l'on « compare » la seconde loi de Newton à un énoncé du type « toutes les pièces de monnaie contenues dans ma poche sont en argent », on fait comme si cette loi pouvait être analysée en elle-même, comme si son sens n'était conditionné que par elle-même. Or, ce « comme si » s'apparente à une pétition de principe discutable. On s'étonne après coup de ne pas parvenir à un critère de démarcation pertinent entre une loi de la nature et une généralisation accidentelle. Mais cette difficulté n'est-elle pas issue de la « méthode analytique » visant à déterminer les caractères nécessaires et suffisants d'une loi de la nature ? Si l'on admettait les limites qu'une telle méthode comporte, sans pour autant nier sa pertinence, peut-être la présente difficulté s'évanouirait-elle. Car si l'on nous concède que lois de la nature sont conditionnées par des principes d'invariance — ce qu'ont établi en toute clarté Noether, Weyl et Wigner sur un large spectre de théories physiques —, alors toute confusion possible avec une généralisation accidentelle disparaît : il n'y a pas de principe d'invariance sous-jacent à une généralisation accidentelle.

50. *ibid.*, p. 5 : « The formulae describing what I am calling the older principles of invariance were first given completely by Poincaré, who derived them from the equations of electrodynamics. He also recognized the group property of the older principles of invariance and named the underlying group after Lorentz. The significance and general validity of these principles were recognized, however, only by Einstein ».

La hiérarchie établie par Wigner entre principes d'invariance et lois de la nature entraîne une autre conséquence : elle interdit que l'on puisse neutraliser le concept de « loi de la nature ». On ne saurait prétendre en définitive que les principes d'invariance sont les seuls constituants d'une théorie physique. Remarquons tout d'abord que des énoncés ne peuvent être substitués l'un à l'autre que s'ils sont équivalents. Or, nous ne pouvons pas remplacer les lois de la nature par des principes d'invariance, puisqu'il y a un rapport de conditionnant à conditionné entre ces deux types d'énoncés. Ensuite, à supposer qu'une théorie physique soit constituée exclusivement de principes d'invariance, nous risquerions de ne plus pouvoir déterminer ce qui reste inaltéré par de tels principes. Car précisément, les lois de la nature constituent l'objet auxquels se rapportent les principes d'invariance en physique. On le voit assez avec le principe de relativité ou avec les théorèmes de Noether. Si on ne les rapportait pas à des lois, ces énoncés seraient vides. Pour mieux nous figurer cet argument, imaginons qu'au début du *Programme d'Erlangen*, Klein ait manqué de spécifier le type de propriétés géométriques qui demeurent inaltérées par rapport à un certain groupe continu de transformations opérant sur le plan projectif complexe. Son théorème fondamental n'aurait alors plus aucune vertu classificatoire et il serait, pour ainsi dire, dénué de sens. Nous disons donc que les lois de la nature sont caractérisées par leur assujettissement à des principes d'invariance ; dans le même temps, c'est par elles que de tels principes acquièrent toute leur effectivité dans le domaine des sciences empiriques. Pour le dire plus précisément, c'est par les lois de la nature que des événements empiriques sont effectivement ordonnés. Il faut donc bien que l'on ait un « intermédiaire » appelé « lois de la nature » entre des principes d'invariance et des événements ou des états. Sans quoi, les principes d'invariance seraient à eux-mêmes leur propre référence et les événements demeureraient inintelligibles.

4.2.3 Toutes les connaissances *a priori* en physique sont-elles des principes de symétrie ?

Dans sa conférence de 1951 sur les symétries, Weyl soutient que, jusqu'à preuve du contraire, seuls des principes de symétries constituent des connaissances *a priori* en physique. Il s'agit justement d'analyser le bien-fondé de cet argument : existe-t-il des principes *a priori* qui seraient autres que des symétries ? Et si oui, lesquels ? Pour répondre à cette question, nous devons tout d'abord revenir sur le *principe de causalité* pour les raisons suivantes. (i) Si l'on confronte à nouveaux frais les thèses de Hume et de Kant, on peut mesurer les difficultés qui entourent le statut du principe de causalité. Est-il *induit* à partir de la

relation de causalité entre des phénomènes observés ou bien est-il une condition *a priori* qui permet d'*instituer* une telle relation ? Autrement dit, il s'agit de savoir si nous avons affaire à une connaissance empirique ou à une connaissance *a priori*. (ii) Nous pouvons montrer que la relation de causalité est *asymétrique* : un événement A est cause d'un événement B, mais la réciproque est fausse : B ne peut pas être cause de A. De deux choses l'une : soit le principe de causalité qui rend compte d'une telle relation est *a priori* et il constitue alors un contre-exemple à la thèse de Weyl, soit son fondement est *a posteriori* et l'hypothèse de Weyl se trouve renforcée. Nous allons prouver que seule la seconde solution doit être retenue. Pour ce faire, nous nous appuierons essentiellement sur les arguments développés par Kistler dans *Causalité et lois de la nature*.

Avant cela, nous souhaiterions résumer les thèses de Hume et de Kant sur la causalité parce qu'elles sont cruciales afin de préciser le statut de la causalité. Les principaux arguments défendus par Hume sur la relation de causalité peuvent être synthétisés comme suit : (a) le principe de causalité est *induit* à partir de l'expérience, il n'est pas *a priori* ; (b) il n'a pas de signification *objective*, son ressort est purement psychologique, étant entendu que pour Hume les objets de nos perceptions n'ont pas d'existence indépendante. Ainsi, on peut lire au cours du chapitre IV de l'*Enquête sur l'entendement humain* :

> J'oserai affirmer, comme une proposition générale qui n'admet pas d'exception, que la connaissance de cette relation [de causalité] ne s'obtient, en aucun cas, par des raisonnements *a priori* ; mais qu'elle naît entièrement de l'expérience, quand nous trouvons que des objets particuliers sont en conjonction constante l'un avec l'autre. [51]

Ce passage correspond au premier argument ; le *principe de causalité* est défini comme la connaissance de la *relation* de causalité qui s'applique à des phénomènes *distincts*, *contigus* et *successifs*. Cette connaissance est induite à partir de l'observation de certains cas. La question est de savoir comment s'établit la *connexion* qui permet de dire que tel phénomène est cause d'un autre phénomène. La réponse à cette difficulté conduit à la formulation du second argument. Rien n'empêche en effet de considérer deux phénomènes qui satisfont aux conditions que nous venons d'énumérer — être distincts, contigus et successifs — sans qu'ils soient *reliés causalement*. [52] Or, pour Hume, le fondement de cette relation n'a aucune objectivité. En effet, nous *induisons* que telle cause donnera tel effet car nous avons pu observer par le passé que des événements similaires entraînent des effets similaires. Mais précisément,

51. D. Hume, *Enquête sur l'entendement humain*, (titre donné en 1758 aux *Essais philosophiques sur l'entendement humain* (1748)), trad. Leroy (1947), Paris, éd. Flammarion, 1983, p. 87.

52. *ibid.*, p. 105 : ≪ il n'est pas raisonnable de conclure, uniquement parce qu'un événement en précède un autre dans un seul cas, que l'un est cause et l'autre effet. Leur conjonction peut être arbitraire et accidentelle ≫.

qu'est-ce qui nous pousse à produire des inférences sur la base de telles ressemblances ? La réponse de Hume est sans appel : l'*habitude* ou l'*accoutumance* constituent le fondement de l'induction et, partant, de la relation de causalité. La connexion causale entre des phénomènes distincts, contigus et successifs est d'ordre purement psychologique ; le principe de causalité n'étant jamais qu'une connaissance permettant de produire des inférences sur les événements à venir, à partir de cette relation acquise par habitude. En outre, le « principe » de causalité dérive pour Hume de la relation de causalité ; il ne constitue pas une condition à partir de laquelle on peut dire que tel phénomène est la cause de tel autre phénomène.

Les deux principaux arguments défendus par Hume sont distincts : il est possible d'admettre le caractère *a posteriori* du principe de causalité tout en invalidant l'idée selon laquelle il serait purement subjectif. Si nous anticipons quelque peu sur la suite de notre raisonnement, nous pouvons dire que Kant juge en revanche que les arguments (a) et (b) sont corrélatifs : aux yeux de Kant, c'est parce que le principe de causalité est un principe *de l'entendement* — et donc une connaissance *transcendantale* — que la relation de causalité entre des phénomènes a un sens *objectif*. Autrement dit, le but de Kant consiste à nier simultanément les arguments (a) et (b) ; plus exactement, la fausseté de (a) impliquerait celle de (b).

Les caractéristiques que Hume assigne à la relation de causalité peuvent être correctement formalisées de la manière suivante : (i) puisque la cause et l'effet doivent être *distincts*, un phénomène ne peut pas être à lui-même sa propre cause, donc cette relation *n'est pas réflexive* ; (ii) les deux phénomènes reliés causalement sont successifs : la cause doit précéder temporellement son effet, ainsi Hume exclut la possibilité que la cause et l'effet soient simultanés ; (iii) la relation entre une cause et son effet est *asymétrique*, si A est cause de B, il est impossible qu'inversement, B soit cause de A. On pourrait ajouter qu'une telle relation est *transitive* : si A est cause de B et B cause de C, alors A est cause de C. Formellement parlant, la relation de causalité est une *relation d'ordre strict*. En revanche, le principe de relativité (galiléen et einsteinien) met en jeu une relation d'équivalence entre référentiels inertiels. Le principe de causalité n'est pas un principe de symétrie puisqu'il s'applique à une relation d'ordre strict.

Ajoutons que dans une perspective humienne, la cause et l'effet ne peuvent pas être des phénomènes localisés au même endroit au même moment, sinon ils seraient simultanés. Mais, après tout, il pourrait y avoir une *action à distance* entre deux phénomènes reliés causalement : ils seraient alors parfaitement distincts, tout en étant simultanés. Précisément, la condition de contiguïté entraîne le rejet de cette hypothèse. Il n'y a pas de causalité à distance pour Hume. Mais ce dernier avance des arguments purement intuitifs pour justifier

ce point. La question est de savoir si, avec les développements conjoints de la thermodynamique — fondée sur l'existence de phénomènes irréversibles — et de la relativité restreinte — qui repose sur l'existence d'une vitesse limite —, il est possible de maintenir sur des bases empiriques les arguments de Hume selon lesquels deux événements reliés causalement sont distincts, contigus et successifs. Plus précisément, nous verrons que ces deux théories permettent de montrer que l'idée de causalité simultanée n'est pas *physiquement concevable*. Nous reprendrons à notre compte l'argument suivant, que nous devons à Kistler : soit la simultanéité entre cause et effet n'est qu'apparente, soit nous avons affaire à une relation entre des faits qui n'est pas causale quoique « simultanée ».

Avant de parvenir à ce point, nous voudrions brièvement synthétiser les critiques de Kant à l'encontre de l'argument *principal* de Hume selon lequel la relation de causalité est *purement subjective* puisqu'elle est établie par habitude. La thèse de Kant peut être résumée de la manière suivante : le principe de causalité n'est pas induit à partir de la relation de causalité acquise par habitude ; il s'agit d'un principe de l'entendement et donc d'une connaissance qui permet *objectivement* d'établir qu'un phénomène est cause d'un autre phénomène. Kant maintient très exactement une hypothèse que Hume rejetait d'entrée de jeu dans son *Enquête sur l'entendement humain* : le principe de causalité ne naît pas de l'expérience ; il constitue une condition intellectuelle qui permet de conférer une objectivité aux données de l'expérience. Pour être plus précis, dans une perspective kantienne, la relation de causalité n'est pas fondée sur nos habitudes, elle a un sens objectif qui provient du principe de causalité, celui-ci étant *a priori*. Pour bien comprendre ce point, nous devons rappeler ce que Kant comprend par objectivité et par objet de connaissance. En effet, une apparence sensible demeure un objet *indéterminé* tant qu'elle n'est pas assujettie aux catégories et principes de l'entendement. Donc, elle n'a de signification objective et ne devient un objet de connaissance que si elle est déterminée par notre entendement. Kant rejette l'empirisme radical de Hume et, corrélativement, il renverse le rapport entre le *principe de causalité* et l'expérience : le principe de causalité conditionne la possibilité de déterminer si deux phénomènes sont causalement reliés ou non ; il n'est pas la résultante d'une habitude. Son fondement n'est pas psychologique.

Notre but n'est pas ici de rendre compte de la genèse de l'idée kantienne de causalité dans son œuvre, mais de comprendre comment il parvient à soutenir que le principe de causalité est *a priori*, à l'exact opposé des thèses avancées par Hume dans les sections IV et V de son *Enquête sur l'entendement humain*. Pour ce faire, nous nous contenterons de résumer les arguments développés par Kant dans la seconde analogie de l'expérience. Voici comment il

la formule :

> Principe de la succession dans le temps suivant la loi de causalité : *Tous les changements arrivent suivant la loi de liaison de la cause et de l'effet.* [53]

La possibilité de relier des phénomènes ne se situe pas au niveau de l'intuition ; on peut bien percevoir que des représentations sensibles se succèdent dans le temps, mais il est rigoureusement impossible de se fonder sur notre seule intuition sensible pour leur donner une signification objective et déterminer le rapport qui les unit. La question que se pose Kant est donc : comment relier *objectivement* des phénomènes ? ce qui suppose de clarifier le statut du rapport de causalité. Pour Kant, il s'agit d'un concept de l'entendement :

> La simple perception laisse indéterminé le *rapport objectif* des phénomènes qui se succèdent. Or, pour que ce rapport puisse être connu de manière déterminée, il faut que le rapport entre les deux états soit pensé de telle sorte qu'il soit par là déterminé comme nécessaire lequel doit être placé avant, lequel après, et non inversement. Mais le concept, qui comporte une nécessité de l'unité synthétique, ne peut être qu'un concept pur de l'entendement, qui ne se trouve pas dans la perception et c'est ici le concept du *rapport de la cause et de l'effet* (...). [54]

Ainsi, le « rapport de causalité » ne dérive pas de l'expérience. De même, le principe de causalité qui assujettit *tout* changement à l'ordre causal est un principe de l'entendement. Kant adopte une conception résolument déterministe de la réalité empirique : il exclut explicitement l'existence de changements qui échapperaient à la causalité ; de plus, la causalité est identifiée à la détermination. Le rapport de causalité et le principe de causalité se trouvent ainsi confondus.

À la différence de Hume, Kant érige donc le principe de causalité au rang de jugement synthétique *a priori* dans les sciences de la nature. Il s'agit même d'une connaissance transcendantale, puisqu'elle *permet* de connaître les phénomènes suivant un ordre déterminé. Si l'on maintenait l'argument de Kant en l'état, on disposerait alors d'un contre-exemple qui invaliderait l'argument de Weyl selon lequel les connaissances *a priori* de la physique sont fondées sur des arguments de symétrie. La question est de savoir si les thèses que Kant avance dans la seconde analogie de l'expérience constituent la seule alternative possible à l'empirisme radical de Hume. Pour être plus précis, est-il vrai qu'il faille élever la relation de causalité au rang de concept pur de l'entendement pour échapper à une conception subjectiviste de la causalité ?

Avant de répondre complètement à ce problème, nous devons revenir sur une difficulté qui figure dans l'énoncé même de la seconde analogie de l'expérience. Kant affirme que les

53. E. Kant, *Critique de la raison pure*, B 232.
54. *ibid.*, B 234.

changements — qui par définition se succèdent dans le temps — sont régis par la loi de causalité : chaque changement a une cause déterminée. Réciproquement le rapport de causalité ne s'applique-t-il qu'à des phénomènes *successifs* ? Dans une perspective humienne, cela ne fait aucun doute. La cause précède temporellement son effet ; lorsque deux phénomènes sont reliés causalement, il ne se présente alors aucune ambiguïté pour savoir lequel est la cause et lequel l'effet. Si l'on suppose en revanche que la cause et l'effet sont simultanés, comment alors les distinguer ? Kant aborde cette difficulté à la fin de la *seconde analogie de l'expérience*. Il n'écarte pas la possibilité d'une simultanéité entre une cause et son effet. Il faut même, nous dit-il, qu'ils soient contemporains à un certain moment, sinon l'action de la cause ne pourrait pas se transmettre à l'effet :

> Le principe de liaison causale parmi les phénomènes est restreint, dans notre formule, à leur succession, tandis que, dans l'usage de ce principe, il se trouve qu'il convient aussi à leur simultanéité, et que la cause et l'effet peuvent être en même temps. Il y a, par exemple, dans la chambre, une chaleur qui ne se trouve pas en plein air. J'en cherche la cause, et je trouve un poêle allumé. Or, ce poêle est, comme cause, en même temps que son effet, la chaleur de la pièce ; il n'y a donc pas ici de succession, dans le temps, entre la cause et l'effet, mais ils sont simultanés, et la loi vaut cependant. [55]

L'exemple utilisé ici par Kant pose une série de difficultés. Il confronte deux phénomènes macroscopiques qui semblent simultanés, d'une part « le poêle allumé », d'autre part « la chaleur dans la pièce ». Or, à strictement parler, la chaleur issue du poêle ne s'est pas propagée simultanément à toute la pièce. On peut raisonnablement se demander si l'on n'a pas affaire ici à un cas de simultanéité *apparente*. En effet, Kant décrit un effet global — la chaleur dans la pièce — qui est constaté par un observateur. Celui-ci remonte ensuite à une cause qui persiste dans le temps — le poêle est encore allumé. Cette simultanéité est apparente pour la raison suivante : si l'on mesure le paramètre « variation de température » en fonction d'une localisation fine dans l'espace et le temps, alors on peut montrer que la chaleur se propage de proche en proche et non simultanément à l'ensemble de la pièce. Le feu dans le poêle peut être plus ou moins intense et il entraîne des variations de température au cours du temps qui ne se réduisent pas au constat grossier d'une chaleur persistante dans la pièce. On doit prendre la situation décrite par Kant pour ce qu'elle est : un exemple du sens commun qui ne décrit pas des événements objectivement simultanés mais des phénomènes apparemment simultanés. Quoi qu'il en soit, à supposer qu'il puisse y avoir simultanéité entre une cause et un effet, ils ne se *différencieraient* aucunement quant au temps puisqu'ils ont justement lieu en *même* temps. Kant introduit une distinction conceptuelle qui écarte une telle conséquence :

55. *ibid.*, A 202 ; B 247-B 248.

> Il faut bien remarquer ici que l'on envisage l'*ordre* du temps, et non son *cours* ; le rapport demeure, bien qu'il n'y ait pas eu de temps écoulé. Le temps entre la causalité de la cause et son effet immédiat peut aller *disparaissant*, (et par conséquent la cause et l'effet être simultanés), mais le rapport de l'une à l'autre reste cependant déterminable quant au temps. Si je considère une boule, qui est placée sur un coussin moelleux et y imprime un léger creux, comme cause, elle est en même temps que l'effet. Mais je les distingue cependant tous deux par le rapport de temps de leur liaison dynamique (...). [56]

Il distingue ainsi le *cours du temps* et l'*ordre du temps*. Le cours du temps est le support intuitif à partir duquel on peut mesurer un intervalle de temps entre des phénomènes. En revanche l'ordre du temps permet de savoir quel phénomène *détermine* objectivement tel autre. Cette détermination est de l'ordre d'une « liaison dynamique ». Elle montre sans ambiguïté que la boule de plomb est la cause, alors que le creux sur le coussin est l'effet. Pourtant, ce nouvel exemple comporte les mêmes difficultés que le précédent. Rien n'empêche de considérer que la déformation du coussin s'est effectuée de proche en proche à partir de la transmission d'une certaine grandeur physique. Là encore, nous avons affaire à un cas de simultanéité apparente. On peut donc raisonnablement se demander si les situations décrites par Kant n'induisent pas une conception approximative de la causalité.

Laissons pour l'instant ces doutes de côté. Si Kant admet que le rapport de causalité implique un certain ordre — il s'agit donc d'une relation asymétrique —, en revanche il n'indexe pas cet ordre sur la succession dans le temps puisqu'une cause et son effet peuvent être simultanés. Tout se passe comme si l'asymétrie de la causalité était *constitutive* du rapport de cause à effet dans une perspective kantienne. Autrement dit, la causalité serait *a priori* asymétrique pour Kant.

Justement, nous nous proposons de montrer (1) que la possibilité d'une causalité simultanée n'est pas empiriquement attestée et (2) que la relation de cause à effet n'est pas un concept *a priori* ; en particulier, l'asymétrie de la causalité est *a posteriori*. Pour prouver ces deux points, nous nous appuierons essentiellement sur les arguments développés par M. Kistler dans *Causalité et lois de la nature*. Kistler commence par redéfinir la relation de causalité de manière à ce qu'elle puisse être éclairée par des théories physiques — essentiellement la relativité restreinte et la thermodynamique. Cette définition s'applique à des événements — mathématiquement des points dans une variété d'espace-temps — et elle repose sur le transfert d'une quantité physique conservée.

> Deux événements c et e sont liés comme cause et effet si et seulement s'il existe au moins une grandeur physique P, soumise à une loi de conservation, exemplifiée dans c et e, et dont une

56. *ibid.*, A 203 ; B 248.

quantité déterminée est transférée entre c et e.[57]

Ce fondement est bien *empirique* — le transfert d'une quantité physique n'est pas posé *a priori* — mais il est *objectif*, ce qui implique de renvoyer dos-à-dos les thèses de Kant et de Hume. En effet, pour Kant, la relation de causalité est un concept de l'entendement. C'est parce qu'elle est *a priori* qu'elle permet de relier objectivement des phénomènes. En revanche, Hume estime que la relation de causalité dérive de l'expérience et qu'elle est fondée sur l'accoutumance et l'habitude, qui sont purement subjectives. La définition de Kistler permet de dire que la relation de causalité n'est ni *a priori* ni déterminée sur des bases purement psychologiques.

À partir de là, nous pouvons vérifier certaines des propriétés que Hume conférait à la relation de causalité, à commencer par la *contiguïté*. Celle-ci se justifie pleinement avec le rejet des actions à distance. Tout transfert d'une quantité physique repose sur un processus de propagation qui ne peut se faire qu'à vitesse finie. D'ailleurs, la théorie de la relativité restreinte consacre l'existence d'une vitesse limite et exclut la possibilité d'actions à distance. Il est donc rigoureusement impossible qu'une cause et son effet soient simultanés quoique distants.

Dans une perspective humienne, la relation de causalité est asymétrique. Il s'agit de savoir si cette asymétrie est physiquement attestée. Pour ce faire, rappelons qu'il existe des processus irréversibles et qu'en vertu de la seconde loi de thermodynamique, l'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter. Elle imprime une direction à la coordonnée temporelle. L'existence de processus intrinsèquement asymétriques — i.e. irréversibles — qui est attestée expérimentalement, confère donc une asymétrie à toutes les relations causales.

> Une fois qu'on a fixé, grâce aux processus intrinsèquement asymétriques, la direction ≪ positive ≫ de la coordonnée temporelle, on peut déterminer la direction de n'importe quel processus, même lorsque celui-ci est réversible, c'est-à-dire intrinsèquement symétrique par rapport au temps. Ainsi, il apparaît que les relations causales qui ne font pas partie des processus intrinsèquement asymétriques, ne sont asymétriques que par l'intermédiaire de l'existence d'*autres* processus qui sont intrinsèquement asymétriques.[58]

La relation de causalité n'est donc pas asymétrique en *elle-même*, mais en vertu d'un argument *a posteriori* fondé sur l'observation de processus irréversibles. Ainsi se trouve remise en cause l'idée kantienne selon laquelle l'*asymétrie* serait constitutive de la relation de causalité en tant que concept de l'entendement. Bref, il est logiquement possible de penser une

57. M. Kistler, *op. cit.*, p. 39.
58. *ibid.*, p. 47.

causalité symétrique, en revanche cette hypothèse n'est pas empiriquement attestée. Reste à savoir si, en vertu des théories physiques existantes, on peut confirmer l'argument humien selon lequel la causalité s'applique à des événements successifs et non simultanés. Nous faisons nôtre l'argument suivant qui est dû à Kistler. L'hypothèse d'une causalité simultanée peut être invalidée pour les raisons suivantes : soit nous avons affaire à une simultanéité apparente, soit il y a simultanéité mais la relation envisagée n'est pas causale. Le premier point se justifie comme suit : si l'on admet que la relation de causalité est fondée sur la transmission d'une grandeur physique conservée, alors en vertu du postulat de la relativité restreinte selon lequel il existe une vitesse limite, il est impossible que cette quantité soit immédiatement transférée à un événement-effet séparé spatialement d'un événement-cause. [59]

Mais on pourrait avancer le contre-exemple suivant pour justifier la possibilité d'une causalité simultanée : l'augmentation de température d'un gaz est causalement reliée à l'augmentation de sa pression, pourtant ces deux « faits » valent exactement pour la même zone de l'espace-temps. En réalité, cette objection n'est qu'en apparence correcte, comme le montre Kistler. En effet, le contre-exemple en question ne se rapporte pas à des événements, mais à des faits qui correspondent à la « satisfaction d'un prédicat par un objet ». L'objet est ici le gaz et il satisfait à deux prédicats incarnés par les expressions « augmentation de la chaleur » et « augmentation de la pression ». Nous pouvons dire tout aussi bien :

(1) La pression du gaz augmente parce que la chaleur du gaz augmente,

(2) la chaleur du gaz augmente parce que la pression du gaz augmente.

Comme le montre Kistler, il y a une parfaite symétrie entre ces deux *faits*, ce qui déroge à l'asymétrie de la relation causale. En outre, l'intervention du terme « parce que » ne doit pas ici nous induire en erreur. Nous avons bien affaire à une explication, mais celle-ci n'est pas causale. Enfin, la causalité s'applique à strictement parler à des événements entendus comme « contenu d'une zone spatio-temporelle » et non à des faits entendus « comme ce qui rend vraie une proposition ». La pression et la chaleur sont deux propriétés factuelles appliquées à un même objet ; elles sont corrélatives, mais cela ne nous autorise pas à dire qu'elles sont reliées causalement, à moins d'employer de manière abusive l'expression « être cause de ». D'où la conclusion de Kistler :

> Cause et effet ne peuvent pas coïncider à la fois dans l'espace et dans le temps. Autrement dit, il ne peut y avoir de causalité simultanée où la cause coïncide aussi spatialement avec l'effet. Joint à l'argument selon lequel il n'y a pas de causalité simultanée *à distance*, cela permet d'établir

59. *ibid.*, p. 61 : « si cause et effet sont situés à quelque distance spatiale l'un de l'autre, alors on peut toujours découvrir qu'ils sont aussi séparés dans le temps, quoique éventuellement par un laps très bref ».

la thèse générale selon laquelle *il n'y a pas de causalité simultanée.*[60]

En nous conformant à ses arguments, nous avons redéfini la relation de causalité à partir de la notion de transfert d'une grandeur physique conservée. Cette définition indique que cette relation est fondée empiriquement. De plus, les propriétés qu'on lui assigne — contiguïté, asymétrie et rapport de succession entre une cause et son effet — sont vérifiées *a posteriori* grâce à des lois héritées de théories physiques telles que la thermodynamique ou encore la relativité restreinte. Nous pouvons en tirer la conclusion suivante : le principe de causalité, comme connaissance du rapport causal entre des événements, n'est pas un principe *a priori* de la physique. Ainsi se trouve renforcée la thèse de Weyl selon laquelle les connaissances *a priori* de la physique correspondent à des symétries. Ajoutons que le principe de Curie établit le lien suivant entre la relation de causalité et les symétries : ≪ Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits ≫.[61]

Nous aimerions cependant relativiser l'argument de Weyl en nous appuyant sur d'autres principes qui ont une effectivité dans une diversité de théories physiques : il s'agit des principes extrémaux que Granger élève à juste titre au rang de connaissances synthétiques *a priori* de la physique.[62] Nous pensons en particulier au principe de Fermat en optique géométrique ou encore au principe de Hamilton en mécanique analytique. On retrouve des principes extrémaux dans toutes les théories physiques susceptibles d'une formalisation lagrangienne. Or, le formalisme lagrangien peut notamment être employé pour mathématiser la mécanique classique, la relativité restreinte, ou encore la relativité générale. Bref, le caractère transversal du formalisme lagrangien plaide en faveur de l'idée selon laquelle les principes extrémaux sont des connaissances *a priori* au sens où ils ne sont pas strictement déterminés par l'expérience.

Ainsi, le principe de Hamilton affirme que l'évolution réelle d'un système dynamique est telle que, depuis l'instant t_1 jusqu'à l'instant t_2, l'intégrale

$$A(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$$

est extrémale, L désignant le lagrangien du système dynamique étudié. À partir de ce principe, on peut obtenir les équations du mouvement qui caractérisent le système en question. Le principe de Hamilton n'est pas lui-même un principe de symétrie, pourtant il ne dérive pas de

60. *ibid.*, p. 71.

61. P. Curie, ≪ Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique ≫, *Journal de Physique*, troisième série, tome III, 1894, p. 394.

62. G.-G. Granger, ≪ le synthétique *a priori* et la science moderne ≫, in *Formes, opérations, objets*, *op. cit.*, p. 292.

l'expérience. Il permet justement de déduire les lois qui décriront empiriquement un système dynamique. D'une manière générale, les principes extrémaux de la physique constituent la condition d'accès à l'*évolution réelle* d'un système, parmi toutes les virtualités dont celui-ci est susceptible. Ils viennent structurer notre savoir empirique. Ils satisfont donc aux propriétés qui nous permettent de les élever au rang de connaissances *a priori*.

D'un côté, la thèse de Weyl sur les symétries comme connaissances *a priori* de la physique nous incite à critiquer les arguments qui font passer certaines relations ou certaines lois empiriques pour des principes *a priori*. Notre examen de la *seconde analogie de l'expérience* de Kant le montre assez : Kant considérait le principe de causalité comme une connaissance *a priori* ; en réalité, un examen minutieux de la relation de causalité nous montre qu'il n'en est rien. De l'autre, la thèse avancée par Weyl tend à survaloriser le rôle des symétries pour structurer notre savoir empirique. Pourtant, il existe bien des principes *a priori* en physique qui ne sont pas en eux-mêmes des principes de symétrie. Nous pensons en particulier aux *principes extrémaux* que l'on retrouve d'ailleurs dans une grande diversité de théories physiques.

4.3 Vers un dépassement du kantisme et du positivisme logique ?

Pour finir, nous voudrions montrer de manière synthétique dans quelle mesure les réflexions de Weyl et de Wigner sur les principes d'invariance conduisent à un dépassement des thèses de Kant et des empiristes logiques concernant le rapport entre mathématiques et physique. Les arguments que nous présentons ici ne sont pas une transcription mais une appropriation des idées défendues par Weyl et Wigner. Commençons par proposer une classification — encore ouverte — des divers types d'énoncés qui peuvent intervenir dans les domaines de la physique et des mathématiques.

(i) *Connaissances strictement et absolument a priori* : une connaissance est *strictement et absolument a priori* si toutes ses prémisses sont marquées de la même nécessité qu'elle. Il n'existe aucun énoncé de la sorte en mathématiques et en physique pour des raisons distinctes. En mathématiques, toute proposition repose sur des axiomes purement *hypothétiques* : c'est parce que l'on accepte les règles du jeu données par telle axiomatique que l'on en dérive nécessairement tel théorème, mais cette axiomatique n'a pas le caractère d'absolue nécessité — ce qui ne veut évidemment pas dire que les mathématiciens introduisent des axiomes de

manière totalement arbitraire. Les procédures axiomatiques sont associées à la résolution de problèmes ou à une exigence de clarification et de généralisation de concepts. En physique, tout énoncé est révisable, ce qui contredit directement l'idée de connaissances *strictement a priori*.

(ii) *Connaissances purement a priori* : une connaissance est *purement a priori* lorsqu'aucun de ses concepts n'est tiré de l'expérience ou ne se rapporte en tant que tel à des objets de l'expérience. Il n'y a donc de connaissances *purement a priori* qu'en mathématiques. En outre, les grands principes de correspondance et/ou de classification qui interviennent en algèbre, en géométrie élémentaire, en géométrie différentielle, en analyse complexe, en topologie algébrique etc. sont des connaissances *synthétiques* et non pas analytiques. On peut même les élever au rang de connaissances *transcendantales* au sens où elles permettent d'identifier les conditions qui doivent être satisfaites pour qu'une méthode ou une proposition soit vérifiée. Par exemple à partir de la *correspondance* de Galois, on est à même de rendre raison des conditions qui président respectivement à la résolution des équations par les radicaux et à la construction des figures à la règle et au compas. De même, le *theorema egregium* de Gauss — qui montre que la mesure de courbure en un point donné d'une surface est une propriété intrinsèque étant donné que cette même mesure ne dépend que des coefficients du ds^2 et de leurs dérivées jusqu'au second ordre — permet de déterminer à quelles conditions une surface courbe est développable sur le plan euclidien. Rappelons que Kant situe les connaissances transcendantales censées rendre raison de la possibilité des connaissances mathématiques à l'extérieur de la mathématique elle-même. Par exemple, ce sont les axiomes de l'intuition — c'est-à-dire des principes de l'entendement et non pas des axiomes au sens mathématique du terme — qui, avec l'intuition pure de l'espace, conditionnent l'existence de connaissances géométriques selon Kant. On peut dire que les développements de l'algèbre, de l'analyse complexe et de la géométrie au cours du XIX$^{\text{e}}$ siècle notamment offrent une large place à des questionnements touchant aux conditions qui président à l'usage d'une *méthode* — résolution par les radicaux, constructions à la règle et au compas — à la *classification* d'objets mathématiques et à la validité de certains théorèmes. Bref le « transcendantal » ne peut plus être situé à l'extérieur de la mathématique comme le croyait Kant.

(iii) *Connaissance a priori non pures* : une connaissance *a priori* est *impure*, lorsque l'un au moins de ses concepts ne peut avoir de signification que rapporté à l'expérience. D'après nos analyses précédentes, certains des principes de symétrie utilisés dans le domaine de la physique sont indépendants de l'expérience, ils ne sont pourtant pas purement *a priori*, sans quoi ils n'auraient pas de conséquences empiriquement testables. C'est par exemple le

cas du principe de Wigner qui fait intervenir le concept empirique de *niveau d'énergie* de manière essentielle. Nous avons également montré qu'il est possible d'attribuer un statut de connaissance transcendantale au principe de relativité, aux théorèmes de Noether ou au principe de Wigner. Ajoutons cette remarque : Kant était tout à fait prêt à admettre que certains principes de physique soient élevés au rang de connaissances transcendantales, comme en témoignent les *analogies de l'expérience*.

(iv) *Connaissances empiriques* : une connaissance est *empirique* lorsque non seulement ses concepts, mais encore sa signification globale et sa portée sont indissociables de l'expérience. Parmi les connaissances empiriques, il faut distinguer les *généralisations accidentelles*, qui sont purement circonstanciées, et *les lois de la nature* qui sont assujetties à des principes d'invariance.

Ces distinctions étant établies, nous pourrions adresser cette objection empiriste à l'argument de Weyl selon lequel les symétries mettent en jeu des connaissances *a priori* en physique : si les principes d'invariance sont *a priori*, alors ils sont purement formels et analytiques, ce sont des énoncés mathématiques ou logiques, leur ≪ contenu physique ≫ provient exclusivement des lois de la nature auxquelles ils s'appliquent. Une telle objection repose, il faut le préciser, sur la prémisse selon laquelle toutes les connaissances physiques sont *synthétiques* et *a posteriori*. Pour dépasser un tel raisonnement, nous ferons les deux remarques suivantes. (1) Comme nous l'avons établi précédemment, il existe en physique des principes d'invariance qui sont des connaissances *a priori* même s'ils ne se réduisent pas à des énoncés mathématiques. Par exemple, le principe de Wigner établit une correspondance entre les représentations irréductibles du groupe de symétries complet d'un système quantique et ses niveaux d'énergie. Il s'agit d'un principe physique, i.e. ce n'est ni un théorème mathématique, ni une régularité empirique. (2) Si l'on suppose que les principes d'invariance qui interviennent en physique sont en fait des connaissances purement mathématiques, alors on admet (a) qu'ils assurent seulement une validité logique à une théorie physique, (b) qu'ils interviennent de l'extérieur pour la formaliser. Or, Wigner et Weyl nous disent tout autre chose. Les principes d'invariance conditionnent la formulation des lois de la nature : ainsi, en relativité restreinte, l'invariance de Lorentz entraîne une réforme complète des lois de la mécanique, de manière à obtenir des prédictions conformes aux résultats expérimentaux pour les vitesses proches de la vitesse de la lumière. Un principe d'invariance agit tant sur la ≪ forme ≫ que sur le ≪ contenu ≫ d'une théorie physique. Pour être plus précis, on se rend alors compte que forme et contenu sont indissolublement liés dans une théorie physique.

À l'issue de cette analyse, nous serions tentés de reconsidérer l'argument de Weyl à la

lumière de la dichotomie héritée de l'empirisme logique selon laquelle toutes les connaissances *a priori* sont *analytiques* et toutes les connaissances *synthétiques* sont *a posteriori*. Cette hypothèse ne peut être consistante que si elle réfute frontalement le présupposé qui permet à Kant de soutenir l'existence de connaissances synthétiques *a priori*, à savoir l'existence (a) de l'espace comme intuition pure du sens externe et (b) du temps comme intuition pure du sens interne. Faisons tout d'abord la précision suivante : rien n'empêche de sauver l'idée kantienne selon laquelle il existe des jugements synthétiques *a priori* sans recourir à des formes pures de l'intuition. De nombreuses propositions mathématiques — parmi lesquelles les théorèmes de correspondance mentionnés ci-dessus — sont synthétiques sans être fondées sur une intuition pure de l'espace ou du temps. Trois thèses méritent d'être confrontées au sujet des arguments défendus par Kant dans son *Esthétique transcendantale* pour justifier l'existence de connaissance *synthétiques a priori* :

(a) Une *thèse néokantienne* : l'esthétique transcendantale demeure compatible dans ses grandes lignes avec le développement de la géométrie au cours du XIX^{e} siècle et la mise en avant de théories physiques qui s'écartent explicitement du newtonisme. La philosophie des sciences de style kantien ne saurait être réduite à une systématisation de la mécanique classique en physique et à une promotion de la géométrie euclidienne. Rappelons à ce propos que Kant était indéniablement conscient des difficultés suscitées par la théorie des parallèles, comme en témoignent certains fragments non publiés et sa correspondance avec Schultz. En revanche, il nous semble excessif de penser que Kant aurait anticipé l'avènement des géométries non euclidiennes. Il s'agit là tout d'abord d'un anachronisme : l'existence de la géométrie hyperbolique est soulevée par Gauss dans sa correspondance à partir de l'année 1816. Il s'agit ensuite d'une hypothèse non conforme au système kantien. L'introduction des géométries non euclidiennes suppose préalablement que l'on doute de la démontrabilité et / ou de la nécessité du postulat des parallèles. Or, les connaissances mathématiques sont *absolument a priori* pour Kant. Sous cette hypothèse, le postulat des parallèles ne peut être saisi que de deux manières : (i) soit il est démontrable et il est *nécessaire* parce qu'il peut être rigoureusement prouvé ; (ii) soit il est non démontrable, mais il faut alors l'élever au rang d'axiome, c'est-à-dire — dans une perspective kantienne — au rang de proposition immédiatement et apodictiquement certaine. Dans ces deux cas de figure, la nécessité du postulat des parallèles et partant, le caractère *absolument a priori* des théorèmes d'Euclide, sont saufs. De fait, Kant n'a pas anticipé sur l'existence des géométries non euclidiennes. Si l'on se conformait au système kantien, des figures non euclidiennes seraient tout au plus des *possibilités logiques* dénuées de signification mathématique.

(b) Une *thèse positiviste et empiriste* : l'*esthétique transcendantale* repose sur une conception erronée de l'espace : soit il est question d'espace physique et celui-ci n'est pas *a priori*, soit il est question d'espace mathématique et celui-ci est conçu abstraitement et analytiquement, soit il est question d'espace intuitif et donc sensible, mais celui-ci est fini, ce qui contredit la thèse de Kant selon laquelle l'espace peut être représenté comme une grandeur infinie donnée. En outre, pour autant qu'on la considère indépendamment de l'expérience, la géométrie est constituée exclusivement de connaissances analytiques. La possibilité logique des géométries euclidiennes met clairement en lumière une telle analyticité. Cette thèse est une réfutation en bloc de l'esthétique transcendantale, mais aussi de la conception kantienne des mathématiques.

(c) Une *thèse quasi-empiriste* : certains présupposés qui apparaissent dans l'*Esthétique transcendantale* n'ont pas le caractère de nécessité que leur assigne pourtant Kant. Les hypothèses suivantes peuvent être discutées : l'espace est une forme indépendante de la matière des phénomènes, l'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée, l'espace est une représentation pure du sujet. Il convient donc de redistribuer les propriétés assignables à l'espace suivant qu'elles sont *a priori* ou *a posteriori*. Par exemple, Weyl soutient dans « Das Raumproblem » (1921) que seules les propriétés *topologiques* et la *nature* de la métrique déterminent l'espace comme forme des phénomènes. En revanche, « l'orientation mutuelle » des métriques est *a posteriori* car elle dépend de la répartition de la matière. Reste à savoir comment repenser le lien entre mathématiques et physique une fois ce préalable établi. Cette thèse s'apparente à une critique nuancée et non à une réfutation de l'esthétique transcendantale. Cette ligne nous semble suivie par Weyl.

Le néokantisme est difficilement tenable en particulier s'il maintient la conception de l'espace comme forme des phénomènes du sens externe. Nous allons tout d'abord montrer (i) qu'il existe des espaces mathématiquement concevables qui contredisent certains réquisits formulés par Kant dans son *Esthétique transcendantale*. Nous prouverons ensuite (ii) que l'argument selon lequel l'espace serait une intuition pure entraîne une série de confusions entre des propriétés spatiales pourtant distinctes — nous pensons en particulier à l'*infini* et l'*illimité* tels qu'ils sont différenciés dans le *Habilitationsvortrag* de Riemann. Le point (i) revient à dire que le domaine des espaces mathématiquement concevables débordent des conditions restrictives qui dérivent de la conception kantienne de l'espace comme intuition pure. Le point (ii) signifie que les thèses de Kant ne sont pas exemptes de confusions générées par des représentations intuitives naïves.

Venons-en au point (i). Lorsque Kant affirme que l'espace est une forme indépendante de

la matière des phénomènes, il ne veut pas dire qu'il s'agit d'un « espace purement formel », au sens où pourraient l'entendre les mathématiciens. En voici la raison : les espaces manipulés par les mathématiciens doivent être d'une manière ou d'une autre des concepts, car comme le dit Kant lui-même, lorsque l'on ne dispose que d'intuitions, on ne peut produire aucune connaissance. Or, l'espace dont il est question dans l'*Esthétique transcendantale* n'est justement pas un concept, il s'agit d'une intuition pure. Certes, celle-ci conditionne l'existence d'un domaine des mathématiques tel que la géométrie, pourtant elle est insuffisante pour produire des connaissances géométriques. Il n'est donc pas permis de faire un raccourci entre l'espace comme forme des phénomènes et les espaces formels des mathématiciens. Car, dans les deux cas, le terme forme n'a pas le même sens. Cela posé, comme l'a très justement montré Weyl, l'espace au sens où l'entend Kant est homogène — ce qui veut dire que deux quelconques de ses points peuvent être considérés comme équivalents — pour deux raisons suivantes. (a) Il est indépendant de la matière des phénomènes. (b) Kant considère l'espace d'un point de vue global et non pas local comme en témoigne le passage suivant :

> On ne peut se représenter qu'un unique espace ; et, quand on parle de plusieurs espaces, on n'entend par là que les parties d'un seul et même unique espace. Ces parties ne sauraient non plus être antérieures à cet espace unique qui comprend tout, comme si elles en étaient les éléments (et qu'à partir d'elles puisse se faire son assemblable) ; elles ne peuvent au contraire, être pensées qu'en lui. [63]

Sous cette supposition, le concept général de *variété* serait inconcevable puisqu'il permet justement de penser des espaces qui ne satisfont pas à la propriété d'homogénéité.

Abordons maintenant le point (ii). Dans une perspective kantienne, l'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée. Or, rien dans la *Critique de la Raison pure* ne permet de clarifier parfaitement la distinction entre deux propriétés : l'*infini* et l'*illimité*. D'un point de vue géométrique, l'infini est une propriété métrique qui signifie que la distance entre deux points peut être arbitrairement grande. En revanche, l'illimité est une propriété qualitative ou topologique qui veut tout simplement dire que l'espace est une variété sans bords. Il faudra justement attendre Riemann pour que cette distinction soit parfaitement clarifiée et rapportée à des niveaux d'analyse différents sur un plan mathématique.

Le *kantisme* et l'*empirisme logique* conduisent à des conséquences diamétralement opposées quant au rapport entre physique et mathématiques en général. Dans le cas de la philosophie kantienne de la connaissance, cette relation est *univoque* et *rigide* : *univoque*, dans la mesure où la physique doit se conformer à un cadre géométrique euclidien — Kant

63. E. Kant, *Critique de la raison pure*, *op. cit.*, A 25 ; B 39.

est convaincu que seule la géométrie euclidienne est conforme aux conditions de l'expérience, même si la *possibilité logique* des géométries non euclidiennes n'est pas incompatible avec le kantisme ; *rigide*, dans la mesure où l'applicabilité d'un concept mathématique à l'expérience est soumise aux principes nécessaires de l'entendement pur. Dans le cas de l'empirisme logique, on observe l'exact inverse. Supposons (1) que toutes les connaissances *a priori* sont *analytiques*, (2) que toutes les connaissances *a posteriori* sont *synthétiques*, (3) que toutes les connaissances mathématiques sont *analytiques* par cela seul qu'elles sont *a priori*. D'un côté le champ de ce qui est mathématiquement concevable est considérablement plus étendu que dans le kantisme, il s'identifie même au logiquement possible — ce qui n'est pas sans poser des difficultés, puisque les connaissances mathématiques se réduisent alors à des grandes tautologies. De l'autre, on ne voit pas du tout comment combler le fossé entre les pures constructions issues de la mathématique et les théories physiques, à moins de penser que les premières ne sont qu'un vêtement d'idées visant à formaliser les secondes. Par ailleurs, nous tenons à maintenir l'ordre suivant : ce qui est physiquement concevable doit être strictement inclus dans ce qui est mathématiquement concevable ; à son tour, ce qui est mathématiquement concevable doit être strictement inclus dans ce qui est logiquement possible. Cet argument signifie (i) qu'il y a des propositions logiquement possibles qui n'ont aucune effectivité mathématique et qui donc ne sont pas mathématiquement concevables ; (ii) que certains concepts mathématiques peuvent admettre des réalisations qui contredisent les conditions de l'expérience ; (iii) qu'aucun énoncé physique n'échappe à un processus de mathématisation.

L'argument selon lequel toutes les connaissances mathématiques sont analytiques conduit à identifier le « mathématiquement concevable » et le « logiquement possible ». Or, il n'y a pas d'équivalence entre ces deux termes. Seule l'implication : « si un énoncé est mathématiquement concevable, alors il doit être logiquement possible » est pertinente. Prenons l'exemple des géométries non euclidiennes pour expliciter la différence de sens entre ces deux expressions. On doit d'abord s'assurer que ces géométries sont exemptes de contradiction. Pour le dire plus précisément, elles doivent être aussi consistantes que la géométrie euclidienne. Gauss en était convaincu dès 1816, alors qu'il jetait les bases de la géométrie hyperbolique. Il pensait même qu'elle pouvait recevoir une effectivité extra-mathématique — ce qui nous renvoie au domaine de la physique. Mais il faut également que lesdites géométries soient *mathématiquement concevables*. Précisons ce que cela signifie. (i) Il s'agit d'envisager les géométries non euclidiennes dans une *théorie mathématique* qui en rende raison et non pas seulement de les poser comme des simples possibilités logiques. (ii) Elles doivent recevoir une effectivité, i.e. permettre de poser et de résoudre des problèmes mathématiques

— qui ne relèvent d'ailleurs pas nécessairement de la géométrie. On peut dire que le point (i) est entièrement résolu par des voies différentes avec le *Programme d'Erlangen* (1872) de Klein et la *Leçon d'Habilitation* (1854) de Riemann. Dans le premier cas, les géométries non-euclidiennes sont déduites à partir d'un point de vue projectif : Klein effectue une classification des géométries en fonction des sous-groupes continus de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ auxquels elles sont associées et il retrouve de la sorte les géométries euclidienne et non-euclidiennes. Dans le second cas, les géométries non-euclidiennes caractérisent les propriétés des variétés riemanniennes de dimension n à courbure constante négative (géométrie hyperbolique) ou positives (géométrie elliptique). Le point (ii) peut être exemplifié avec les travaux de Poincaré sur les équations différentielles linéaires. En effet, Si l'on suit les arguments de N. Bergeron, au début des années 1880, Poincaré entend résoudre ≪ les équations différentielles linéaires du second ordre

$$\eta'' + A(\omega)\eta' + B(\omega)\eta = 0,$$

où A et B sont des fonctions holomorphes de la variable [complexe] ω appartenant à une région S de la sphère de Riemann ≫. [64] C'est dans ce contexte que Poincaré étudie les sous-groupes discrets de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ et qu'il réalise l'effectivité de la géométrie hyperbolique : cette dernière n'est alors plus une simple possibilité logique, elle constitue un support géométrique essentiel pour construire une méthode de résolution de certaines équations différentielles linéaires du second ordre. [65]

Non seulement les expressions ≪ être mathématiquement concevable ≫ et ≪ être logiquement possible ≫ n'ont pas le même sens, mais de plus elles n'admettent pas la même extension : il y a du logiquement possible qui n'est pas mathématiquement concevable. En particulier, un concept mathématique demeure vide de sens tant qu'on ne considère que sa forme logique. Weyl insiste sur ce point lorsqu'il montre que la production de connaissances mathématiques exige de combiner deux procédures : des *procédures axiomatiques* — qui permettent (i) de définir implicitement des concepts et (ii) d'analyser la structure logique d'une théorie mathématique — et des *procédures constructives* sans lesquelles les opérations mathématiques ne seraient jamais rapportées à des objets. L'effectivité d'un concept mathématique ne se réduit pas à sa possibilité logique et elle justifie la distinction que nous avons proposée entre le logiquement possible et le mathématiquement concevable. Si l'on suit Granger, on peut

64. N. Bergeron, ≪ Des équations différentielles à coefficients algébriques aux variétés arithmétiques ≫, in *L'héritage scientifique de Poincaré*, sous la dir. d'É. Charpentier, É. Ghys et A. Lesne, Paris, éd. Belin, 2006, p. 64.

65. *ibid.*, p. 72.

d'ailleurs différencier deux types d'impossibilité en mathématiques : (a) l'*impossibilité logique* qui correspond à la contradiction, (b) l'*impossibilité d'exécution* qui signifie qu'une méthode ou une construction ne peuvent pas être *effectuées* pour certains objets mathématiques. Par exemple, les méthodes algébriques de résolution des équations cessent d'être opératoires lorsque l'on passe le quatrième degré ; il existe des problèmes géométriques constructibles à la règle et au compas mais non à la règle et au transporteur du segment unité ou empan. C'est notamment le cas du problème d'Apollonius qui consiste à construire un cercle tangent à trois cercles donnés de rayons différents : il est justiciable de la règle et du compas, mais non de la règle et de l'empan. Or, ces problèmes d'effectivité ne peuvent pas être entièrement réduits à des questions de possibilité ou d'impossibilité logiques. Comme le montre Granger, cette distinction entre l'*impossibilité logique* et l'*impossibilité d'exécution* suppose qu'il y ait, de manière irréductible, du synthétique *a priori* en mathématiques. Granger donne alors partiellement raison aux intuitionnistes, rejoignant ainsi Weyl qui, précisément, adopte une voie moyenne entre le formalisme et l'intuitionnisme dès le milieu des années 20 [66] :

> Quant à l'aspect positif du synthétique *a priori*, il correspond à ce qu'il y a de vrai dans la position des Intuitionnistes. Il signifie que certaines opérations, dans un univers symbolique, peuvent être effectuées sans se heurter à une impossibilité d'exécution, et que d'autres ne le peuvent pas. En ce sens, la notion de l'infini dénombrable est certainement un *a priori* synthétique ; ainsi de la notion de continu, soit qu'elle dépende des opérations de passage à la limite ou de coupure, soit qu'elle soit saisie dans le système opératoire plus ≪ concret ≫ et plus restrictif de Brouwer et des Intuitionnistes. Il faut bien voir qu'ici le mot ≪ intuition ≫ égare : il ne s'agit pas, à vrai dire, de viser des objets donnés, mais de rendre effectif un rapport de dualité entre une opération ou un système d'opérations, et des objets corrélatifs. Que ce rapport soit dans certains cas effectuable, tel est le sens profond, me semble-t-il, du synthétique *a priori* positif en mathématiques. [67]

L'existence de connaissances synthétiques *a priori* en mathématiques correspond exactement à l'idée selon laquelle le domaine de ce qui est ≪ mathématiquement concevable ≫ est irréductible au ≪ logiquement possible ≫. Ainsi, l'argument des empiristes logiques selon lequel les distinctions conceptuelles analytique / synthétique et *a priori* / *a posteriori* se recouvrent mérite d'être corrigé en ce qu'il existe du synthétique *a priori* en mathématiques. Inversement, nous avons mis en exergue dans ce qui précède l'existence de principes synthétiques *a priori* en physique ; ces principes participent à l'effectivité d'une théorie physique, i.e. au

66. Weyl maintiendra d'ailleurs cette position jusqu'à sa mort

67. G.-G. Granger, ≪ Le synthétique *a priori* et la science moderne ≫, in *Formes, opérations, objets*, *op. cit.*, p. 291. L'aspect ≪ négatif ≫ du synthétique *a priori* correspond aux ≪ théorèmes de limitation ≫ dus à Tarski et Gödel.

fait qu'elle puisse rendre raison de la réalité empirique. En outre, la dichotomie établie par les empiristes logiques entre les connaissances analytiques *a priori* d'une part et les connaissances synthétiques *a posteriori* d'autre part entraîne un fossé quasiment infranchissable entre mathématiques et physique.

À l'opposé, Kant considère que les mathématiques reposent exclusivement sur des connaissances synthétiques *a priori*. Il les soumet aux formes de l'intuition que sont l'espace et le temps. Celles-ci sont elles-mêmes des conditions de possibilité des phénomènes empiriques. Dans la *Critique de la raison pure*, le domaine de ce qui est mathématiquement concevable ne va pas au-delà de ce qu'il est nécessaire d'introduire pour mathématiser la mécanique classique conformément au formalisme newtonien. Si l'on suit rigoureusement les prémisses kantiennes, alors les géométries non euclidiennes seraient par exemple reléguées au rang de pures possibilités logiques qui n'auraient aucune *effectivité mathématique* et qui, *a fortiori*, ne pourraient pas être appliquées à la physique. L'idéalisme critique et l'empirisme logique partagent un présupposé commun. Ils ne déterminent pas la spécificité de ce qui est mathématiquement concevable : dans le cas du kantisme, le « mathématiquement concevable » doit toujours être en accord avec les conditions de l'expérience ; dans le cas de l'empirisme logique, le « mathématiquement concevable » et le « logiquement possible » sont une seule et même chose. Si l'on veut correctement saisir le lien entre mathématiques et physique, il faut précisément dépasser cet écueil commun aux deux thèses opposées auxquelles nous nous référons.

Pour expliciter notre argument, partons du constat suivant : il n'y a pas de rapport d'extériorité entre une théorie physique et sa mathématisation, ce que Weyl a suffisamment montré sous des modalités différentes dans ses deux monographies consacrées respectivement à la relativité — *Raum, Zeit, Materie* 1918-1923 — et à la mécanique quantique — *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928 et 1931. Un tel rapport d'extériorité signifierait que l'on peut toujours décider si un énoncé issu d'une théorie physique est purement observationnel ou s'il est purement analytique ou formel. Sans vouloir abuser d'une métaphore bien connue, il existe parmi les propositions constitutives d'une théorie physique des principes dont la formalisation mathématique et les implications physiques sont comme le recto et le verso d'une même feuille. Si l'on supprime l'un de ces deux termes, le principe se trouve anéanti. C'est exactement le cas du *principe de Wigner* que nous avions introduit pour clarifier le statut et les fonctions de la théorie des représentations de groupes en mécanique quantique. Rappelons ce qu'il signifie : chaque niveau d'énergie d'un système quantique est en correspondance avec l'une des représentations irréductibles du groupe de symétries complet de son

hamiltonien, c'est-à-dire de l'observable représentant l'énergie. Il s'agit d'une connaissance *synthétique* car il met en jeu une *correspondance* entre les représentations irréductibles du groupe de symétries complet et les niveaux d'énergie pour un système quantique donné. En outre, on peut qualifier cet énoncé d'*a priori*, dans la mesure où (i) il n'est pas « strictement déterminé par l'expérience », (ii) il est posé comme « régulateur de l'acquisition et de la formulation d'un savoir empirique ».[68] Enfin, il se situe à l'intersection entre une théorie mathématique et une théorie physique ; plus précisément, il ne s'agit pas d'un simple principe de coordination qui serait introduit artificiellement pour formaliser de l'extérieur la mécanique quantique en s'appuyant sur les représentations de groupes. Cet argument reflète concrètement le quasi-empirisme de Weyl et de Wigner, comme alternative au positivisme logique et au kantisme.

4.4 Conclusion du quatrième chapitre

Les travaux de Weyl et de Wigner consacrés à la mathématisation de la mécanique quantique constituent le point de départ d'une série de réflexions épistémologiques fructueuses sur le statut, les fonctions et la portée des principes d'invariance en physique. Tout d'abord, ils permettent de caractériser les lois de la nature et de sélectionner, parmi certains énoncés, ceux qui pourront recevoir le statut de loi de la nature. En effet, une loi de la nature ne se caractérise pas seulement par sa généralité, ses fonctions explicatives ou encore prédictives, elle doit demeurer formellement invariante sous l'action d'un groupe de transformations convenablement choisi. Ainsi, l'invariance de Lorentz conduit Einstein à réformer l'ensemble des lois de la mécanique dès 1905. De même, en relativité générale, le principe de covariance — selon lequel les lois de la nature doivent être généralement covariantes sous l'action du groupe des difféomorphismes d'espace-temps — est déterminant pour établir l'équation d'Einstein reliant le tenseur d'Einstein et le tenseur métrique au tenseur d'énergie-impulsion. Cette équation permet de déterminer la structure métrique de l'espace-temps et donc de mesurer les effets gravitationnels avec une précision tout à fait remarquable. Un haut niveau de prédictivité va ici de pair avec un principe d'invariance extrêmement contraignant.

Les principes d'invariance servent donc de critère suffisant pour distinguer une généralisation accidentelle et une loi de la nature. En effet, une généralisation accidentelle n'est jamais formellement invariante par un groupe de transformations. Une loi de la nature l'est forcément. Nous avons cependant noté qu'il existe des énoncés qui satisfont à des principes d'invariance

68. *ibid.*, p. 293.

mais qui demeurent physiquement vides de sens. C'est par exemple le cas de l'équation de Klein-Gordon. De plus, ils ont une fonction heuristique pour construire des lois de la nature comme en témoigne l'exemple remarquable de la mécanique relativiste. Mais il y a plus. Nous avons montré qu'ils ne dérivent pas de l'expérience au sens où ils seraient induits à partir de certaines données empiriques. En réalité, ils peuvent recevoir le statut de connaissances *a priori* en un sens affaibli, i.e. en tant qu'ils sont régulateurs de l'acquisition et de la formulation d'un savoir empirique selon l'argument de Granger. Pour le dire autrement, ils viennent structurer notre connaissance de la réalité empirique. Cela est particulièrement vrai en physique atomique et subatomique puisque certains principes de symétrie ordonnent les données empiriques issues de la spectroscopie. Ainsi, ils ont une fonction régulatrice et structurante en physique. Plus radicalement, comme le souligne Wigner, ils sont des conditions sans lesquelles il serait tout simplement impossible de formuler la moindre loi de la nature.

Ajoutons à cela qu'il s'agit généralement de *principes de correspondance*, que ce soit d'ailleurs en mathématiques ou en physique mathématique. Le théorème fondamental de la théorie de Galois est une correspondance entre des objets mathématiques distincts — corps et extensions de corps d'une part, groupe des permutations d'une équation et ses sous-groupes d'autre part. Ce constat s'étend au théorème fondamental du *Programme d'Erlangen*. De même, les principes de relativité font correspondre une classe de lois de la nature à un groupe de transformations convenablement choisi. Enfin, le principe de Wigner et les théorèmes de Noether sont également des principes de correspondance. D'une part, un principe de correspondance n'est pas et ne peut pas être un jugement analytique. Par suite, il est inexact de réduire les mathématiques à un ensemble de jugements analytiques. D'autre part, les principes d'invariance qui viennent structurer la plupart des théories physiques et mathématiques sont *homologues* et ils expliquent au moins en partie la profonde intrication entre la physique et les mathématiques.

Cependant, il serait excessif de croire en une harmonie préétablie entre ces deux domaines. Il n'est pas plus fondé d'instaurer un fossé infranchissable entre la forme d'une théorie et son contenu empirique, à l'image des positivistes logiques lorsqu'ils établissent une dichotomie aussi tranchée que discutable entre les jugements analytiques *a priori* d'une part, les jugements synthétiques *a posteriori* d'autre part. Nous avons montré que Weyl et Wigner évitent soigneusement ce second écueil précisément parce que les principes d'invariance dont ils soulignent l'importance servent d'interface ou de moyen terme entre les lois de la nature et les concepts mathématiques nécessaires à la formalisation d'une théorie physique. Nous avons illustré ce point en nous référant au principe de Wigner qui est un mixte d'un point

de vue épistémologique puisqu'il ne s'agit ni d'une régularité empirique, ni d'un théorème mathématique, mais d'un principe d'invariance qui fait correspondre concepts physiques et mathématiques.

Conclusion générale de la troisième partie

Les réflexions de Weyl et Wigner sur les symétries ont pour fonction de montrer l'importance que joue la théorie des groupes dans le développement des mathématiques et de la physique mathématique au cours du XIX^{e} siècle et durant la première moitié du XX^{e} siècle. D'abord attachée à des problèmes relevant de la théorie des équations et adossée à certains ensembles spécifiques de transformations — nous pensons aux permutations des racines d'une équation algébrique à coefficients dans le corps des rationnels —, la théorie des groupes cesse d'être circonscrite à l'algèbre dès la fin des années 1860, avec les travaux de Jordan, Klein et Lie. Elle se caractérise par sa transversalité d'un point de vue tant théorique que disciplinaire. Elle intervient de manière essentielle pour classer les géométries élémentaires (Programme d'Erlangen), elle s'étend à la théorie des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles dans les années 1870 à 1890 et elle connaît explicitement ses premières applications en physique mathématique dès les années 1880 avec le développement de la cristallographie.

Certes, il existe de nombreux points de contacts entre la théorie des groupes et l'« algèbre », à condition d'admettre la pluralité de leurs significations et de leurs usages. Par exemple, la théorie abstraite et combinatoire des groupes finis de Cayley (1854) est conforme aux exigences pratiques et épistémologiques de l'école d'algèbre symbolique qui se développe à Cambridge essentiellement entre les années 1830 et les années 1850. De même, l'approche conceptuelle adoptée par Weber en théorie des groupes dans le second tome de son *Lehrbuch der Algebra* (1896) reflète une certaine orientation prise par l'algèbre comme discipline avec les travaux de Dedekind, Weber ou encore Hölder en Allemagne au cours du dernier tiers du XIX^{e} siècle. Toujours est-il que l'histoire de l'algèbre à la fin du XIX^{e} siècle ne se réduit certainement pas au *Lehrbuch der Algebra* ; inversement, l'histoire de la théorie des groupes déborde largement de ce cadre disciplinaire, aussi flottant soit-il.

L'intérêt de Weyl pour la théorie des groupes ne survient pas subitement en 1924. En effet, il reprend très tôt à son compte le projet de Klein qui consiste à faire converger les idées géométriques de Riemann et la théorie des groupes. Ainsi, en 1916, il utilise le langage de la théorie de Galois pour classer les revêtements d'une surface de Riemann. En 1921-1923, il se fonde sur la théorie des groupes et des algèbres de Lie pour résoudre le problème de l'espace

qu'il commence à construire au contact du *Habilitationsvortrag* de Riemann. À partir de 1924-1925, Weyl étudie la théorie des groupes et des représentations de groupes en tant que telle, en insistant néanmoins sur les liens qu'elle entretient avec le calcul tensoriel et la théorie des invariants. Or, pour lui la théorie des représentations de groupes ne relève pas strictement de l'algèbre et il ne l'envisage pas en algébriste. À la rigueur, la théorie des représentations des groupes finis ne requiert que des raisonnements de nature algébrique, comme en témoignent les travaux de Frobenius et de Schur au tournant du XX^{e} siècle. Mais Weyl s'intéresse avant tout aux représentations des groupes de Lie. Justement, il accorde une place fondamentale aux propriétés d'*analysis situs* que les groupes de Lie le conduisent à réinvestir. Certes, il s'approprie les méthodes algébriques de Cartan — qui portent sur l'étude des algèbres de Lie et de leurs représentations —, mais il les complète par des méthodes transcendantes portant sur les propriétés topologiques globales des groupes de Lie.

Ainsi, les travaux de Weyl manifestent la complexité de la théorie des groupes, qu'il est rigoureusement impossible de localiser à l'intérieur d'une discipline — nous pensons en particulier à l'algèbre. Encore faut-il ajouter la remarque suivante. Non seulement Weyl ne raisonne pas en algébriste lorsqu'il aborde les représentations des groupes continus, mais de plus, il refuse de le faire et il se positionne ainsi contre l'algèbre abstraite dont les principaux représentants demeurent à ses yeux Noether et Artin. Les méthodes de l'algèbre abstraite ne peuvent pas être transposées aussi aisément aux autres domaines des mathématiques, à commencer par la topologie. En outre, l'unité de cette science repose davantage sur une dialectique entre des méthodes opposées que sur une prétendue hégémonie que l'on accorderait à une discipline en particulier.

Bref, Weyl n'aborde pas la théorie des groupes en algébriste et il se réfère même à elle pour contrer les prétentions des algébristes. Mais notre argument demeure incomplet tant que nous ne précisons pas que Weyl considère la théorie des représentations de groupes comme un aboutissement dans l'histoire du concept de groupe et de ses diverses ramifications. En effet, d'abord circonscrite aux groupes finis, elle s'étend aux groupes « continus ». De plus, appliquée à des groupes de Lie, elle implique une synthèse remarquable entre les domaines de l'algèbre, de l'analyse et de la topologie. Il s'agit donc de la théorie de référence que Weyl invoque pour reconstruire l'histoire du concept de groupe et pour se positionner par rapport aux algébristes. Ajoutons une nuance supplémentaire à notre propos. Comme nous l'avons souligné, la prise de position de Weyl à l'encontre de l'algèbre abstraite au début des années 30 ne signifie pas qu'il rejette catégoriquement l'usage des méthodes de l'algèbre abstraite dans ses propres cours, ainsi que dans ses publications, comme en témoigne le chapitre III

de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*.

Weyl reconduit la transversalité de la théorie des groupes en mathématiques au domaine de la physique. Non seulement il montre que la théorie des représentations de groupes doit intervenir de manière essentielle pour formaliser la mécanique quantique, mais de plus un regard rétrospectif sur d'autres théories physiques — essentiellement la cristallographie, la mécanique classique, la relativité restreinte et la relativité générale — lui permet de mesurer la diversité des usages et la portée du concept de groupe en physique mathématique. Tel est d'ailleurs l'objectif de ses conférences sur les symétries à l'université de Princeton en 1951.

D'un côté, la théorie des groupes lui sert de référence pour relativiser voire même critiquer de manière trop radicale l'algèbre abstraite ; de l'autre, il lui assigne des vertus programmatiques pour formaliser diverses théories physiques. En effet, le concept de groupe est central pour dégager les principes d'invariance sur lesquels elles sont fondées. De plus, il a un rôle structurant pour saisir et relier une diversité de données empiriques. L'exemple de la mécanique quantique est ici remarquable. En effet, nous avons montré que les travaux de Wigner et de Weyl rendent compte avec une grande cohérence des résultats qualitatifs issus de la spectroscopie pour des systèmes quantiques de complexité croissante. Ils s'appuient alors systématiquement sur la théorie des représentations de groupes. S'il refuse l'hégémonie de l'algèbre abstraite dans les mathématiques pures, Weyl consacre inversement l'hégémonie de la théorie des groupes et des représentations de groupes en physique mathématique. Il est sans doute le promotteur le plus acharné des méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique, mais il tient de plus sous silence d'autres moyens pour formaliser cette théorie. Certes, sur le long terme, ses prises de position s'avèrent justifiées. La théorie des groupes et des représentations de groupes joue un rôle essentiel en physique subatomique, comme en témoigne le « eightfold way » de Gell-mann et Ne'emann dans les années 60. Weyl semble néanmoins donner la part belle aux principes d'invariance en physique mathématique au détriment d'autres principes tout aussi structurant et régulateurs de l'acquisition et de la formulation d'un savoir empirique, pour reprendre l'expression de Granger.

Au cours de cette dernière partie, nous avons pu mesurer quatre changements majeurs dans l'œuvre de Weyl. En premier lieu, la théorie des groupes, qui était demeurée périphérique, devient centrale. En second lieu, il délaisse en partie la théorie de la relativité générale au profit de la mécanique quantique et de ses extensions — mécanique quantique relativiste, seconde théorie de jauge. Elle suppose le recours à quasiment tous les aspects de la théorie des représentations de groupes. Même si la mécanique quantique n'est ni la seule, ni la première théorie physique impliquant la théorie des groupes, elle reçoit un statut privilégié

aux yeux de Weyl parce qu'elle fait intervenir et exige même de combiner les représentations du groupe symétrique et les représentations de certains groupes continus. En troisième lieu, l'épistémologie de Weyl connaît un tournant empirique qui montre à quel point il marque ses distance par rapport à la démarche très spéculative qui était la sienne en 1918-1921. Par extension, il n'adhère plus sans réserves au *credo* selon lequel il existerait une harmonie préétablie entre les mathématiques et la physique. Enfin, en dernier lieu, il adopte une voie moyenne entre l'intuitionnisme et le formalisme pour caractériser le statut des connaissances mathématiques. Ses travaux en mécanique quantique et sa seconde théorie de jauge reflètent son « tournant empirique » qui est cependant très différent des positions incarnées par les principaux représentants du positivisme logique, à savoir Schlick, Reichenbach ou encore Carnap. De même, son article sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples manifeste la complémentarité entre procédures axiomatiques et procédures constructives qu'il met en avant dès 1924. Durant la seconde moitié des années 20 et au début des années 30, sa pratique des mathématiques et de la physique mathématique est donc conforme aux positions épistémologiques qu'il adopte sur les mathématiques et les sciences de la nature.

Conclusion

Philosophie et pratique des mathématiques dans l'œuvre de Weyl

Au cours de notre thèse, nous avons voulu montrer que la trajectoire scientifique de Weyl est indissociable de son parcours philosophique. Pour être bien compris, ce constat exige deux précautions. En premier lieu, les réflexions philosophiques de Weyl ne sont pas circonscrites aux *fondements* des mathématiques, elles portent sur des questions d'unité et de généralité rapportées à une diversité de domaines (essentiellement l'algèbre, la topologie et la géométrie) et de théories (théorie des surfaces de Riemann, théorie du corps de classes, théorie des surfaces et des variétés, théorie des groupes de Lie et de leurs représentations, etc.). Elles s'étendent à des problèmes spécifiques dont la portée est tant épistémologique que mathématique. En second lieu, l'adjectif « indissociable » ne signifie pas que ses contributions mathématiques et philosophiques seraient parfaitement coordonnées ou homologues. Nous avons montré au moins à deux reprises le hiatus qu'il peut exister entre ses prises de positions épistémologiques et sa pratique des mathématiques. Ainsi, alors qu'il adhère à l'intuitionnisme de Brouwer en 1919, il continue d'utiliser la méthode des définitions implicites dans une veine hilbertienne. En outre, au début des années 30, il polémique contre les méthodes de l'algèbre abstraite. Pourtant, dans le troisième chapitre de sa monographie sur la mécanique quantique comme dans ses cours à Princeton, il a recours à des concepts et des modes de raisonnement qu'il emprunte à Noether, Artin ou encore van der Waerden. Preuve que cette prise de position est sans doute excessive mais aussi que ses réflexions philosophiques et / ou épistémologiques ne conditionnent pas sa pratique des mathématiques de manière unilatérale.

Malgré ces précautions, nous pouvons relever un dénominateur commun à sa pratique des mathématiques et à ses réflexions sur les mathématiques. À ces deux niveaux, il s'agit pour lui de dialectiser des points de vue distincts, voire opposés. Cela est déjà partiellement vrai

dans sa monographie sur les surfaces de Riemann. Sur un plan épistémologique, Weyl adhère alors au formalisme qu'il tempère cependant en reprenant à son compte les réflexions de Klein sur le rôle et les fonctions de l'intuition en mathématiques que ce dernier formule dans sa célèbre conférence de 1895 intitulée « Sur l'arithmétisation des mathématiques ». Dans cette même monographie, Weyl montre la complémentarité entre les méthodes de Riemann et de Weierstrass en analyse complexe. Un autre exemple vient confirmer notre hypothèse. Nous avons vu que, pour des raisons pragmatiques, Weyl adopte en 1924 une voie moyenne entre l'intuitionnisme et le formalisme. Il met ainsi en avant leur complémentarité en conciliant deux types de méthodes : les procédures constructives et les procédures axiomatiques. Non seulement son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie complexes semi-simples reflète cette voie moyenne, mais de plus il est le lieu d'une dialectique entre les méthodes infinitésimales et algébriques de Cartan et les méthodes intégrales et topologiques de Hurwitz-Schur. Par « voie moyenne », nous ne voulons pas entendre une demi-mesure mais bien la mise en tension de procédures et de méthodes opposées pour produire des mathématiques nouvelles. Dans le fond, le raisonnement mené par Weyl d'un point de vue tant philosophique que mathématique est essentiellement *dialectique*, il n'a rien d'*hypothético-déductif*. Encore faut-il préciser que cette dialectique ne porte pas sur des couples de concepts, mais sur des méthodes et des styles de mathématiques opposés.

Une autre caractéristique fondamentale de l'œuvre de Weyl consiste à envisager d'un seul tenant un certain héritage des mathématiques du XIX^{e} siècle — essentiellement incarné par Riemann et Klein — et une pratique des mathématiques centrée sur le recours à la méthode axiomatique et représentée sous des modalités différentes par Hilbert, Noether, Artin, von Neumann, etc. Seulement, une telle synthèse entraîne d'importantes tensions et lignes de fracture qui se manifestent diversement dans l'œuvre de Weyl. Donnons deux exemples pour clarifier notre propos. Dans sa célèbre conférence de 1931 sur l'algèbre abstraite et la topologie, Weyl admet certes la fécondité de l'algèbre abstraite — notamment dans le développement de la géométrie algébrique —, mais il adopte un ton pessimiste, craignant qu'un abandon de l'héritage du XIX^{e} siècle en mathématiques ne conduise les mathématiciens à rechercher la généralité pour la généralité et donc à perdre de vue tout contenu mathématique. La tonalité des propos de Weyl est un peu différente dans la préface à la première édition de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928). Il situe la mécanique quantique dans le prolongement de l'algèbre abstraite et il trace une ligne de démarcation sans doute excessive entre la mathématique moderne, fondée sur la méthode axiomatique, et la mathématique « classique » du XIX^{e} siècle qui atteint son paroxysme avec la théorie des fonctions d'une

variable complexe. Ajoutons par anticipation que Lautman construit la problématique de sa thèse secondaire en remettant en question l'opposition établie par Weyl dans sa monographie sur la mécanique quantique.[69] Pessimisme à l'encontre de l'algèbre abstraite d'un côté, constat d'une incommensurabilité entre les mathématiques classiques et les mathématiques modernes de l'autre, en tous les cas ces deux prises de position montrent combien il est difficile pour Weyl de concilier l'héritage de Klein et de Riemann d'une part, la méthode axiomatique représentée par l'école hilbertienne d'autre part.

Nous mentionnons plus spécifiquement les noms de Klein et de Riemann pour les raisons suivantes : (i) comme nous l'avons montré, Weyl prolonge le projet kleinéen qui consiste à faire converger la théorie des groupes et les idées géométriques de Riemann, (ii) les *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in dem 19. Jahrhundert* de Klein constituent l'un des ouvrages de référence de Weyl dans ses cours à Princeton, (iii) Weyl se situe dans le prolongement de Riemann lorsqu'il publie sa monographie sur les surfaces de Riemann en 1913 et lorsqu'il participe au développement de la géométrie différentielle en 1918-1923. Pourtant, plusieurs travaux de Weyl montrent que les mathématiques « classiques » et « modernes » ne sont pas totalement inconciliables. Évoquons d'abord *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Nous avons montré qu'il ne s'agit pas d'un ouvrage de mathématiques structurales : les théorèmes qui y sont démontrés renvoient au développement de la théorie des fonctions d'une variable complexe durant la seconde moitié du XIX^{e} siècle (théorème de Riemann-Roch, principe de Dirichlet, théorème d'uniformisation, etc.). Mais, d'un autre côté, Weyl réalise un coup de force en définissant les surfaces topologiques et les surfaces de Riemann par une liste d'axiomes. Autre exemple fondamental : son article de 1925-1926 sur les représentations des groupes de Lie complexes semi-simples. Il se fonde alors sur la définition par axiomes d'une algèbre de Lie abstraite dans une veine hilbertienne. Toutefois, lorsqu'il s'agit de concevoir les revêtements d'un groupe de Lie, Weyl s'appuie sur des intuitions et des concepts hérités de l'analyse complexe et de la théorie des surfaces de Riemann, ce qui confirme son ancrage dans des traditions issues des mathématiques du XIX^{e} siècle. Ainsi, dans ses réflexions épistémologiques, il tend à opposer les mathématiques classiques et la méthode axiomatique dont l'algèbre abstraite constitue l'Eldorado à ses yeux. En revanche, sa pratique des mathématiques indique qu'il n'a cessé de les concilier, non sans difficulté.

Sans être parfaitement homologues, la pratique des mathématiques et les réflexions philosophiques de Weyl sur les mathématiques se conditionnent multuellement. Cinq exemples

69. A. Lautman, « Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel », *op. cit.*, p. 83 et suiv.

nous permettent de confirmer notre hypothèse : (a) la conception weylienne de l'espace et la tonalité très spéculative des arguments qu'il défend lorsqu'il développe sa théorie unifiée des champs sont au moins en partie d'inspiration fichtéenne, la référence à Fichte étant justement centrale chez Weyl entre 1916 et 1920 (cf. deuxième partie, sections 3.3 et 3.4) ; (b) le problème de l'espace permet à ce dernier d'appliquer à l'espace les méthodes de la phénoménologie en tant que science des essences entre 1921 et 1923 (cf. deuxième partie, section 4.4) ; (c) en vertu de sa pratique des mathématiques, Weyl mesure en 1923-1924 à quel point les contraintes imposées par le programme intuitionniste de Brouwer sont trop coûteuses pour le mathématicien, en particulier lorsqu'il renonce au principe du tiers-exclu et qu'il ne peut présumer de l'existence d'un objet mathématique qu'en se donnant les moyens de le construire effectivement ; (d) son article de 1925-1926 sur les groupes de Lie concilie procédures constructives et procédures axiomatiques, il est donc conforme à la voie moyenne entre l'intuitionnisme et le formalisme qu'il propose dès 1924 et à laquelle il sera attaché jusqu'à sa mort (cf. troisième partie, sections 2.2 et 2.4) ; (e) le « tournant empirique » qui caractérise ses réflexions en physique va de pair avec l'importance qu'il accorde aux données empiriques issues de la spectroscopie pour formaliser la mécanique quantique (cf. troisième partie, sous-sections 3.3.3 et 3.3.4).

Nous devons cependant ajouter une restriction que Weyl formule lui-même dans sa *mathematische Analyse des Raumproblems* (1923). Il y affirme que rares sont les problèmes susceptibles de recevoir le même degré d'effectivité en mathématiques et en philosophie. Des pans entiers des mathématiques les plus avancées sont inaccessibles à la réflexion philosophique, au moins à titre provisoire. Inversement, des énoncés que les mathématiciens jugeraient triviaux ou trop élémentaires peuvent être la source de distinctions conceptuelles décisives au point de vue philosophique et épistémologique. Ainsi, dans sa *Théorie transcendantale de la méthode*, Kant s'appuie sur le tracé d'un triangle pour introduire une distinction cruciale entre les mathématiques comme connaissance par la construction de concepts et la philosophie comme connaissance par concepts. Pourtant, Weyl est prêt à admettre qu'il existe des problèmes dont la portée philosophique et l'effectivité mathématique sont du même ordre. C'est le cas du problème de l'espace qu'il construit et qu'il résout entre 1921 et 1923. Sur un plan philosophique, ce problème le conduit à une analyse critique de la théorie kantienne de l'espace. En outre, il distingue nettement à cette occasion le conventionnalisme de Poincaré et la phénoménologie de Husserl. Enfin, il montre très clairement, par des arguments mathématiques et épistémologiques, que le conventionnalisme de Poincaré n'est pas adapté au cadre de la relativité générale. En outre, d'un point de vue mathématique, ce problème

lui permet d'effectuer des avancées significatives en géométrie différentielle et de mesurer l'effectivité de la théorie des groupes et des algèbres de Lie linéaires.

Si donc réflexion philosophique et pratique des mathématiques se conditionnent mutuellement, il est rare qu'elles se rencontrent avec un même degré d'élaboration pour traiter d'un même problème. D'un autre côté, en insistant sur la complémentarité entre philosophie et mathématiques, Weyl entend contourner les écueils qui guettent respectivement le philosophe lorsqu'il ignore tout des sciences et le scientifique lorsqu'il ignore tout de la philosophie. Ainsi, on peut lire l'argument suivant dans le texte de Weyl intitulé ≪ Comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques ≫ (écrit après 1953 et publié pour la première fois en 1985) :

> On peut, me semble-t-il, distinguer deux sphères dans la vie intellectuelle des hommes. L'une, celle de l'action, de la production de formes, de la construction ou de la création, est la sphère de l'artiste, du savant, du technicien, de l'homme d'état. L'autre, celle de la réflexion où l'on s'interroge sur le sens de toute activité, peut être considérée comme l'apanage du philosophe. L'activité créative non contrôlée par la réflexion risque de se détacher de toute signification, de perdre contact et perspective, de dégénérer en routine, tandis que le danger de la réflexion est de devenir un irresponsable "parler sur", paralysant la puissance créatrice. [70]

Plus précisément, une pratique des mathématiques qui ne serait jamais accompagnée d'une authentique réflexivité philosophique entraîne plusieurs écueils : le *platonisme naïf* qui résulte d'une mécompréhension des procédés et méthodes utilisés par le mathématicien pour construire ses objets et élaborer ses théories : le mathématicien s'imagine avoir affaire à des essences platoniciennes parce qu'il feint d'ignorer ou qu'il ignore les conditions d'élaboration des connaissances mathématiques ; le *scientisme* qui revient non seulement à croire que la science serait auto-suffisante, mais également à penser toutes les activités humaines sur le modèle des sciences ; l'≪ *utilitarisme* ≫ au sens où seule l'efficacité à court terme sanctionnerait une connaissance mathématique. Weyl n'invoque pas l'importance de la réflexion (philosophique) dans le seul but de lutter contre une routine, mais pour faire face à ces trois écueils que sont le platonisme naïf, le scientisme et l'≪ utilitarisme ≫ au sens strict.

Mais inversement, Weyl refuse la perspective d'une philosophie en ≪ apesanteur ≫ qui ne serait jamais adossée à une pratique ou, au moins, à une connaissance des sciences et / ou des arts. Dans ces conditions, la philosophie serait donc un ≪ irresponsable parler sur ≫, i.e. elle serait constituée de réflexions dénuées de tout objet et elle ne ferait que manifester la paresse

70. H. Weyl, ≪ Comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques ≫, in Hermann Weyl, *Le continu et autres écrits*, textes rassemblés et traduits par J. Largeault, *op. cit.*, p. 267.

intellectuelle de son auteur. Si elle n'est rapportée à aucun objet, tantôt la philosophie induit une inflation de concepts dont on ne mesure pas la nécessité, tantôt elle s'apparente à un jeu d'échec stérile dans lequel on se contente d'anticiper les objections de ses contradicteurs au lieu de confronter ses hypothèses à des données objectives et d'analyser les procédures qui permettent d'aboutir à ces données.

Moderne, ou contre-moderne ?

Au cours de notre thèse, nous avons pu mesurer combien Weyl est à la fois redevable de Klein et de Hilbert. Ainsi, il emprunte à Klein une méthode d'enseignement qui accorde une place importante aux intuitions physico-géométriques. Entre 1910 et 1913, il se situe au moins partiellement dans le prolongement des leçons de Klein sur les surfaces de Riemann (1881) et il reprend à son compte les réflexions de Klein sur la place de l'intuition dans la production de connaissances mathématiques et dans leur enseignement. Ceci lui permet de nuancer ses positions en faveur du formalisme. Mais, de manière plus significative et à plus long terme, il prolonge au moins deux grands projets kleinéens : d'une part, il entend faire converger les idées géométriques de Riemann et la théorie des groupes ; d'autre part, il systématise l'usage des méthodes de théorie des groupes dans une diversité de théories physiques, à commencer par la cristallographie et la mécanique quantique. Enfin, Weyl se montre sensible à la conception kleinéenne de l'unité des mathématiques : il s'agit de faire apparaître diverses corrélations entre des domaines à première vue très éloignés des mathématiques pour résoudre un problème ou démontrer un théorème.

Les emprunts de Weyl à Hilbert sont tout aussi nombreux. En 1911-1913, Weyl axiomatise les surfaces topologiques et les surfaces de Riemann dans le prolongement de Hilbert. Par extension, entre 1917 et 1931, il utilise très largement les définitions par axiomes qui sont caractéristiques des mathématiques hilbertiennes pour définir les concepts d'espace vectoriel, de variété à connexion affine, d'algèbre de Lie abstraite, etc. En outre, au moment où il participe à la formalisation de la relativité générale, Weyl s'approprie les méthodes variationnelles que Hilbert met alors systématiquement en avant — de manière quasiment dogmatique à en croire Klein. En outre, lorsqu'il projette d'unifier la théorie einsteinienne de la gravitation et la théorie de Maxwell, Weyl croit en une harmonie préétablie entre physique et mathématique conformément au mot d'ordre de Minkowski et de Hilbert.

Mais (i) Weyl sait qu'à bien des égards, les positions épistémologiques de Klein et de Hilbert sont antagonistes et que leurs pratiques respectives des mathématiques sont très

différentes. (ii) Il ne s'approprie donc pas les travaux mathématiques et les réflexions de ces deux protagonistes sans restrictions. (iii) Si l'on en croit H. Mehrtens, Hilbert est l'un des plus éminents représentants des mathématiques « modernes » ; en revanche, Klein serait un « contre-moderne » [Gegenmoderne].[71] Certes, Weyl ne traduit pas l'opposition Klein / Hilbert en ces termes, mais il est conscient qu'il ne va aucunement de soi de se réclamer de ces deux mathématiciens à la fois. De manière plus générale, l'œuvre de Weyl reflète une tension entre « modernes » et « contre-modernes » et ce, dès sa formation à l'université de Göttingen. En effet, nous avons insisté sur le fait que *Die Idee der Riemannschen Fläche* se situe à la fois dans le prolongement de Klein et de Hilbert. Nous avons également montré dans notre première partie que cet ouvrage ne saurait être situé exactement sur le même plan que les *Grundzüge der Mengenlehre* (1914) de Hausdorff que Mehrtens range sans équivoque du côté des modernes.

Précisons chacun de ces trois points. (i) Tout d'abord, dans le texte qu'il consacre aux procédures axiomatiques et aux procédures constructives en mathématiques (après 1953), Weyl insiste sur l'opposition entre Hilbert et Klein qu'il localise à deux niveaux : (a) la place qu'ils accordent à la méthode axiomatique, (b) leurs conceptions respectives de l'unité des mathématiques. Klein refuse catégoriquement le recours aux procédures axiomatiques en mathématiques. Les représentations intuitives issues de la géométrie ou de la physique constituent les éléments heuristiques essentiels à sa pratique des mathématiques. De plus, il met à l'épreuve l'unité des mathématiques en étudiant des objets spécifiques. En revanche, Hilbert insiste sur l'importance de la méthode axiomatique non seulement pour définir des concepts, mais également pour élaborer des connaissances, fonder des théories et unifier divers domaines des mathématiques.

> [Klein] n'aimait pas qu'on systématise en une axiomatisation rigoureuse sa compréhension des choses ; même en analysant il ne voulait pas perdre un instant de vue le tout. (...) Hilbert était différent du tout au tout. Il fut le champion de l'axiomatique. J'ai mentionné ses *Grundlagen*. En réalité l'axiomatique était pour lui une méthode universelle, *la* méthode centrale de la pensée scientifique.[72]

Weyl résume ici avec une grande acuité le clivage entre Klein et Hilbert que Mehrtens traduit dans des processus collectifs à travers l'opposition entre modernes et contre-modernes. Ainsi, Mehrtens range Hilbert parmi les modernes, aux côtés de Cantor, Zermelo ou encore

71. H. Mehrtens, *Moderne Sprache Mathematik*, Frankfurt am Main, éd. Surkhamp, 1990. Mehrtens décrit la « modernité » de Hilbert dans les pages 108 à 141 et la « contre-modernité » de Klein dans les pages 206 à 223.

72. H. Weyl, *op. cit.*, p. 274-275.

Hausdorff. En revanche, il considère Klein comme un « contre-moderne » au même titre que Kronecker, Poincaré et Brouwer. Les raisons qu'il invoque pour motiver cette classification sont bien sûr nuancées en fonction de chacun de ces protagonistes. Aux yeux de Mehrtens, la modernité en mathématiques se caractérise par la prééminence accordée à la théorie des ensembles et à la méthode axiomatique au détriment des représentations intuitives — même si celles-ci ne sont pas totalement mises de côté par Hilbert, loin s'en faut —, elle se traduit également institutionnellement par l'affirmation des mathématiques comme une science autonome. En revanche, les courants contre-modernes accordent clairement un primat à l'intuition et aux méthodes constructives au détriment de la méthode axiomatique. De plus, un acteur tel que Klein est également impliqué sur un plan institutionnel dans le développement d'une mathématique à finalité industrielle — pour lui, les mathématiques ne sont pas à elles-mêmes leur propre fin. L'argument de Weyl reflète l'opposition que construit systématiquement Mehrtens entre modernes et contre-modernes.

(ii) Ensuite, nous avons dit que Weyl ne s'approprie pas *sans restrictions* les travaux de Klein et de Hilbert. S'il admet avec Klein que l'intuition joue un rôle irréductible dans la construction des connaissances mathématiques et s'il reconnaît que l'unité des mathématiques ne peut s'obtenir de proche en proche qu'en résolvant des problèmes concrets, en revanche il ne rejette pas de manière catégorique le recours à la méthode axiomatique. D'un autre côté, il assigne des fonctions limitées aux procédures axiomatiques, ce qui montre qu'il ne leur accorde pas la portée que leur prête Hilbert. Nous avons montré à plusieurs reprises que pour Weyl la méthode axiomatique permet certes de clarifier et de généraliser des concepts, en revanche elle n'a pas de fonction heuristique et elle n'est pas suffisante pour unifier les mathématiques. Ces « restrictions » s'étendent à la physique mathématique. Weyl est sensible aux méthodes variationnelles de Hilbert, mais il n'est pas convaincu que la méthode axiomatique puisse s'étendre aux théories physiques. En outre, au moment où il participe à la mathématisation de la mécanique quantique, il exprime une certaine distance à l'égard de l'idée hilbertienne d'une harmonie préétablie entre mathématiques et physique.

(iii) D'après ces arguments, nous voyons qu'il est impossible de ranger Weyl du côté des modernes ou des contre-modernes. Pour être plus précis, son œuvre reflète avec une rare complexité la tension entre modernité et contre-modernité. Pour expliciter notre propos, prenons quelques exemples. Son ouvrage sur les surfaces de Riemann se situe dans une veine hilbertienne, mais la référence à Klein ne saurait être tenue sous silence. De plus, si l'on fait attention aux cours qu'il donne en 1910-1911 sur les fonctions d'une variable complexe, alors l'empreinte de Klein y est plus pregnante encore. Allons plus loin. Lorsqu'il publie

son article polémique sur la crise des fondements des mathématiques (1921), Weyl peut être rangé dans la catégorie des contre-modernes aux côtés de Brouwer dont il suit alors le programme. De même, le pessimisme qu'il exprime en 1931 à l'égard des méthodes de l'algèbre abstraite renvoie à une certaine forme de contre-modernité. Mais la donne se complique singulièrement lorsque l'on prend en compte son article sur les groupes de Lie de 1925-1926. Nous avons montré que dans ce texte coexistent à la fois des procédures constructives et axiomatiques. D'ailleurs, la voie moyenne qu'adopte Weyl dès 1924 nous amène à penser qu'il occupe une position d'entre-deux. Enfin, à bien des égards, sa monographie sur la mécanique quantique (1928) se situe dans le prolongement de la théorie des groupes, de l'analyse fonctionnelle et de l'algèbre abstraite, comme il l'affirme sans ambiguïté dans la préface à cet ouvrage. Rien ne distingue réellement le troisième chapitre de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* et la *Moderne Algebra* (1930-1931) de van der Waerden. Nous ne voulons pas dire par là que la dichotomie proposée par Mehrtens entre modernité et contre-modernité n'a aucune pertinence. Au contraire, l'œuvre de Weyl est extrêmement précieuse pour mesurer les tensions et les contradictions qui animent ces deux pôles. En effet, ses productions scientifiques reflètent sur près d'un demi-siècle cette opposition entre modernité et contre-modernité. Elles en parcourent même, si l'on peut dire, tout le spectre, comme en attestent les exemples précis que nous venons d'aborder.

Liens et divergences avec Cavaillès et Lautman

Weyl et Lautman

Nous avons déjà évoqué la thèse principale de Lautman au cours de notre première partie pour deux raisons : tout d'abord parce que Lautman et Weyl proposent une lecture différente de la *Dissertation* de Riemann, ensuite parce que Weyl établit une analogie remarquable entre la théorie des surfaces de Riemann et la théorie du corps de classes que Lautman approfondit d'un point de vue philosophique dans son chapitre intitulé « La montée vers l'absolu ». En première analyse, il est frappant de constater que Lautman et Weyl se réfèrent quasiment aux mêmes théories (théorie de Galois, théorie du corps de classes, théorie des revêtements, théorie des surfaces de Riemann, théorie des équations intégrales, applications de l'analyse fonctionnelle à la mécanique quantique, etc.) pour penser l'unité des mathématiques. Pourtant, les solutions qu'ils proposent sont différentes. Cela tient non seulement (i) aux sources philosophiques auxquelles ils font appel, mais aussi (ii) à leurs conceptions respectives

des connaissances mathématiques et de leur engendrement. Détaillons ces deux points.

(i) Lautman défend une forme très spécifique de platonisme qu'il développe essentiellement à la lecture du *Timée* : d'une manière très schématique, il privilégie donc la dialectique des *idées mathématiques* et il défend la thèse d'une participation du réel aux idées. Certes, dans sa préface à *Die Idee der Riemannschen Fläche* (1913), Weyl invoque implicitement l'argument platonicien de la ligne (livre VI de la *République*) pour dépasser le formalisme dont il ne se satisfait pas, même s'il en admet la pertinence pour saisir rigoureusement les concepts mathématiques. Mais nous venons de souligner que Lautman s'inspire davantage du *Timée* que de la *République*. De plus, Weyl bifurque très tôt vers des philosophies de la conscience : le criticisme kantien dont il reprend les distinctions conceptuelles tout en les déplaçant, l'idéalisme fichtéen qu'il s'approprie à ses dépens en produisant une théorie physico-mathématique qui outrepasse les conditions de l'expérience en 1918-1921, la phénoménologie de Husserl dont il se réclame dès 1916 et à plus forte raison encore dans les années 20 pour critiquer le positivisme et le conventionnalisme.

(ii) Lautman développe une philosophie mathématique immanente aux idées mathématiques et à leur réalisation historique sous la forme de théories dont il décrit le développement interne plutôt qu'il ne les envisage d'un point de vue extérieur. À ses yeux, la dialectique des idées mathématiques n'est pas induite à partir des théories mathématiques dans leur historicité. Pourtant, les thèses qu'il défend sont situées historiquement et Lautman insiste lui-même sur l'exemplarité que revêt à ses yeux l'école de Hilbert tant en mathématiques pures qu'en physique mathématique. Il fait sans doute allusion à certains « algébristes » — parmi lesquels E. Noether — mais aussi aux divers acteurs qui participent à la mathématisation de la mécanique quantique à Göttingen : Born, Jordan, Nordheim, Hilbert, auxquels il faudrait ajouter les noms de von Neumann et de Heisenberg. Nous avons insisté sur le fait que Weyl se montre réservé à l'égard des méthodes de l'algèbre abstraite au moment même où il vient remplacer Hilbert à Göttingen. De même, il accueille avec circonspection le projet d'une axiomatisation de la mécanique quantique. Ainsi, contrairement à Weyl, Lautman embrasse sans restriction la conception structurale des mathématiques qui se fait jour parmi certains membres de l'école hilbertienne de mathématiques.

En outre, sa thèse principale et sa thèse complémentaire montrent assez qu'il ne restreint pas le « structuralisme » à l'algèbre abstraite. Pour Lautman, les théories mathématiques sont des totalités organisées qui réalisent des grands schémas logiques. Cela est valable dans des domaines aussi différents que l'algèbre, la topologie et l'analyse. Lautman est d'ailleurs particulièrement attentifs aux « mixtes », i.e. aux structures mathématiques qui se situent

à l'intersection entre différents domaines des mathématiques. Le concept d'espace de Hilbert en est un bon exemple puisqu'il est redevable de l'algèbre — en tant qu'espace vectoriel —, de la topologie puisqu'il est normé et de l'analyse puisqu'il peut se réaliser comme espace de fonctions. Lautman n'identifie pas purement et simplement l'algèbre abstraite et les mathématiques structurales. S'il est sensible au discours des algébristes sur les fonctions de la méthode axiomatique en algèbre, il reprend également à son compte les derniers développements de la topologie et de l'analyse fonctionnelle qui vont dans le sens du structuralisme. Nous pensons au *Lehrbuch der Topologie* (1934) de Threlfall et Seifert qui constitue l'un des ouvrages de référence de Lautman à côté de *Die Idee der Riemannschen Fläche* de Weyl, mais aussi aux travaux de von Neumann en analyse fonctionnelle que Lautman évoque à plusieurs reprises dans son œuvre. Le projet de Lautman consiste à concevoir une diversité de théories mathématiques en fonction de concepts opposés qu'elles mettent en tension et qu'elles dialectisent. Lautman et Weyl se rejoignent ici jusqu'à un certain point : (a) l'unité des mathématiques s'éprouve dans un décloisonnement des différents domaines disciplinaires, (b) elle se réalise non pas à la faveur d'un raisonnement hypothético-déductif, mais par l'intermédiaire d'une dialectique. Mais nous devons immédiatement imposer des restrictions à ce rapprochement. Chez Lautman il est question d'une dialectique des idées, chez Weyl d'une dialectique des méthodes. De plus, si Lautman ne se limite pas à des théories relevant de l'algèbre — théorie des corps, des anneaux et des idéaux, etc. —, il accorde néanmoins une primauté aux méthodes issues de l'algèbre pour unifier les mathématiques puisqu'elles peuvent être adaptées à la topologie et à l'analyse. Il reprend ici le leitmotiv de Noether et Artin. Bref, l'unité des mathématiques se joue dans la mise en relation de concepts et de connaissances relevant de différents domaines des mathématiques. Mais, d'après Lautman, l'algèbre joue bien le rôle d'une discipline-modèle pour parvenir à cette fin [73], ce que conteste Weyl dans sa conférence sur l'algèbre abstraite et la topologie (1931).

Lautman et Weyl se rejoignent sur un autre point : ils ne s'accordent avec le positivisme logique ni en mathématiques, ni en physique. Les critiques que Lautman formule dès 1935 à l'encontre du positivisme logique sont de trois ordres. En premier lieu, il conteste leur filiation avec le « formalisme » de Hilbert, en second lieu il rejette leur projet logiciste, en troisième lieu il estime que leurs présupposés conduisent à une impasse pour penser le lien entre mathématiques et physique. Détaillons cela. Pour Schlick comme pour Carnap, Hilbert aurait réduit les mathématiques à un formalisme au sens strict, i.e. en tant que manipulation

73. A. Lautman, « Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel », *op. cit.*, p. 87.

de symboles vides de sens. Ils tirent ensuite prétexte de cet argument pour affirmer que les mathématiques sont exclusivement constituées de jugement analytiques *a priori* et qu'elles sont réductibles à la logique. Bref, leur définition du « formalisme » les conduit à assujettir les travaux de Hilbert à un projet explicitement logiciste, si l'on entend par là une thèse qui réduit en dernière instance les mathématiques à la logique. Or, Hilbert n'est pas logiciste : même s'il s'intéresse à la structure logique des axiomatiques qui se trouvent au fondement de la géométrie et de l'arithmétique, même s'il veut prouver *in fine* la consistance (absolue) des axiomes de l'arithmétique comme en témoigne sa théorie de la démonstration, il ne dit à aucun moment que les mathématiques dérivent régulièrement de la logique. En effet, Hilbert est holiste, il envisage les théories mathématiques comme des totalités organisées ; il défend une *begriffliche Mathematik* contre une vision stérile du formalisme comme manipulation de symboles vides de sens ; il affirme sans ambiguïté que l'engendrement des connaissances mathématiques n'est pas issu de la seule logique.

Carnap et Schlick peuvent certes revendiquer la paternité de Hilbert ; celle-ci est artificielle et elle n'est pas conforme aux arguments défendus par Hilbert lui-même. Lautman ne manque pas de souligner ce point sur un ton polémique dans sa communication intitulée « Mathématiques et réalité » (1935). Certes, au moment où il adhère au programme intuitionniste de Brouwer, Weyl est tenté de caricaturer le « formalisme » de Hilbert ; il rejoint alors la description qu'en font Schlick et Carnap, mais dans un tout autre but : il s'agit de souligner l'arbitraire des mathématiques formalistes pour mieux donner raison à l'intuitionnisme. Néanmoins, d'autres sources nous montrent que Weyl est sensible au holisme de Hilbert et qu'il reprend à son compte l'idée si chère à Hilbert selon laquelle les théories physico-mathématiques sont des totalités organisées. En outre, Weyl est conscient que les membres de l'école hilbertienne utilisent la méthode axiomatique pour expliciter les connexions entre des structures inter-reliées. Contrairement à Hilbert, ils se désintéressent de la question des fondements des mathématiques ; *a fortiori*, ils refusent de réduire les mathématiques à la logique contrairement à Schlick ou encore Carnap.

Pour résumer, Lautman et Weyl se réjoignent contre le positivisme logique en montrant que les mathématiques ne sont pas constituées exclusivement de jugements analytiques *a priori* et qu'elles ne se résorbent pas dans une manipulation de symboles vides de sens. Mais pour dépasser ce double argument, Lautman et Weyl empruntent des voies différentes. Lautman se situe dans une veine hilbertienne et il suspend les principales théories structurales qu'il investit à des schémas logiques fondés sur des idées opposées : le continu et le discontinu, le local et le global, le parfait et l'imparfait, les propriétés induites et les propriétés

intrinsèques. Une telle « dialectique » est irréductible à des jugements analytiques. En revanche, si Weyl reconnaît que les mathématiques structurales n'ont rien de commun avec une entreprise logiciste, il estime que le spectre de la généralité pour la généralité les guette. Par suite, la voie moyenne entre formalisme et intuitionnisme constitue à ses yeux la solution la plus pertinente pour contrer la conception réductionniste des sciences formelles proposée par les positivistes logiques.

Un autre point fait difficulté aux yeux de Lautman dans les thèses avancées par Schlick et Carnap. Une fois tracée la ligne de démarcation entre les énoncés vides de sens des mathématiques d'une part, les propositions vérifiables empiriquement d'autre part, il faut bien invoquer des principes de coordination qui permettent de faire le pont entre le contenu empirique d'une théorie physique et sa forme mathématique. Outre que ces principes de coordination appauvrissent considérablement le lien d'interdépendance entre physique et mathématiques, ils sont le symptôme d'une difficulté essentielle qui résulte des dichotomies instaurées par les positivistes logiques. Nous aurions affaire à une incommensurabilité entre les jugements analytiques *a priori* d'une part, les jugements synthétiques *a posteriori* d'autre part, qui se dissimule derrière l'invocation de principes de coordination. Mais alors, comment expliquer l'effectivité de branches aussi diverses des mathématiques que la géométrie riemannienne, l'analyse fonctionnelle, l'algèbre abstraite et la théorie des groupes pour structurer la réalité empirique dont les théories physiques rendent compte ? Ainsi, l'équation d'Einstein en relativité générale rend totalement indissociables la structure métrique de l'espace-temps, son « contenu en matière » et les effets gravitationnels. De même, le principe de Wigner se situe à l'interface entre les données empiriques issues de la spectroscopie et la théorie des représentations de groupes. Comme le souligne C. Chevalley, le formalisme dont se réclame Lautman

> n'est pas indépendant de la signification « réelle » des énoncés : cela est vrai en mathématiques, où l'introduction de la notion de groupe, par exemple, modifie l'appréhension globale des problèmes, cela est vrai aussi en physique, où la description de l'état d'un système à un moment donné ou de l'évolution de ce système avec le temps « revient à constater que les grandeurs du système sont ordonnables selon une loi de structure mathématique ». Carnap, pour sa part, ne voit dans les énoncés mathématiques qu'un ensemble de propositions tautologiques et il réduit la physique à « une langue dans laquelle on exprime des énoncés vérifiables expérimentalement ». Pour Lautman, cela conduit l'empirisme logique à une appréhension « triviale » des problèmes : les exemples pris ne peuvent être que d'une grande simplicité, afin d'autoriser le libre jeu de la réduction, et la pauvreté de l'interprétation est le corrélat de la séparation « à la hache » qu'opère le Cercle de Vienne entre « les mathématiques et la réalité ». [74]

74. C. Chevalley, « Albert Lautman et le souci logique », *Revue d'histoire des sciences*, 1987, Tome 40

La monographie de Weyl sur la mécanique quantique vient confirmer le propos de Lautman. Weyl y montre comment l'analyse fonctionnelle puis la théorie des représentations de groupes structurent notre connaissance des phénomènes quantiques. Il n'est à aucun moment question d'introduire des principes de coordination entre un vêtement d'idées mathématiques vides de sens et le contenu empirique d'une théorie. Au contraire, données empiriques et formalisme mathématique se conditionnent et s'éclairent mutuellement. Nous ne mentionnons pas cette monographie au hasard. Dans sa préface, Weyl met en exergue le ≪ parallélisme ≫ entre physique et mathématique, terme qui est sans doute plus faible que l'idée d'une harmonie préétablie entre physique et mathématiques prônée par Hilbert. En outre, Lautman utilise cette préface comme point de départ pour construire la problématique de sa thèse complémentaire. Il ne peut donc pas méconnaître *Gruppentheorie und Quantenmechanik* lorsqu'il critique la fragilité des thèses des empiristes logiques sur le rapport entre physique et mathématiques.

Précisons maintenant comment Lautman s'approprie la préface à la monographie de Weyl sur la mécanique quantique (éd. de 1928) dans sa thèse complémentaire. Lautman commence par reprendre à son compte l'opposition établie par Weyl entre la mathématique classique et la mathématique moderne. Lautman la résume en ces termes

> Il faudrait en effet distinguer l'une de l'autre la mathématique ≪ classique ≫ qui, partant de la notion de nombre entier aboutit à l'analyse, et la mathématique ≪ moderne ≫ qui s'opposant à la mathématique des nombres, affirme au contraire le primat de la notion de domaine par rapport aux nombres attachés à ce domaine. [75]

Plus explicitement, Lautman repère quatre critères de distinction entre ces deux mathématiques, les trois premiers figurant dans la préface de *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. (i) La mathématique classique serait fondée sur des procédures constructives, la mathématique moderne sur des procédures axiomatiques. (ii) La mathématique classique reste attachée à l'existence d'éléments dont la nature est spécifiée — par exemple des nombres —, en revanche la mathématique moderne porte essentiellement sur la structure d'un domaine d'objets qui est indépendante de leur nature. (iii) La mathématique moderne manipule des domaines pour lesquels l'opération de multiplication peut être non-commutative, cette non-commutativité intervenant de manière essentielle en mécanique quantique, en particulier pour formaliser les relations d'indétermination de Heisenberg. (iv) La mathématique classique se réalise pleinement avec l'≪ analyse du continu et de l'infini ≫, en revanche ≪ les méthodes de l'algèbre

n°1, p. 58.

75. A. Lautman, *op. cit.*, p. 84.

moderne consistent le plus souvent à imposer à ces éléments une division en classes d'éléments équivalents, et à substituer ainsi à un ensemble infini la considération d'un nombre de classes qui, dans les applications, est le plus souvent fini ≫.[76] Une fois ces distinctions établies, Lautman formule la problématique qui commande sa thèse : il s'agit de savoir s'il est question d'une dualité essentielle entre ces deux mathématiques comme tend à le suggérer Weyl. Pour Lautman, ce n'est pas le cas. Il s'inspire alors très directement de l'article de Hilbert intitulé « Eine methodisch einheitliche Gestaltung von Algebra und Analysis » (1909) qui décrit le programme d'une unification de l'algèbre et de l'analyse dans le cadre de la théorie des équations intégrales. Pour Lautman, une telle unification s'effectue en s'appuyant sur la mathématique moderne, ce qui revient à étendre les méthodes de l'algèbre à l'analyse :

> Nous nous proposons dans les pages qui vont suivre de faire voir comment la mathématique moderne est engagée dans la voie de cette unification de l'algèbre et de l'analyse, et cela par la pénétration de plus en plus poussée des méthodes structurales et finitistes de l'algèbre dans le domaine de l'analyse et du continu.[77]

La conclusion de la thèse complémentaire de Lautman confirme cette intention :

> Nous avons montré dans l'introduction de cet ouvrage comment la distinction des deux mathématiques de Weyl tendait à opposer à l'analyse de l'infini les méthodes synthétiques de l'algèbre moderne. Nous avons ensuite montré au cours de nos quatre chapitres, que cette distinction ne doit pas être conçue dans le sens d'une opposition essentielle entre disciplines irréductibles, puisqu'il est possible de retrouver dans les théories modernes de l'analyse les points de vue qui caractérisent l'algèbre.[78]

Il parvient donc à un décloisonnement des « disciplines » mathématiques et à un dépassement de l'opposition établie par Weyl en 1928. Pour ce faire, il polarise son raisonnement autour des méthodes de l'algèbre. Tel n'est pas le cas de Weyl : les méthodes de l'analyse et de la topologie sont *irréductibles* à celles de l'algèbre. Cela ne signifie pas qu'elles appartiennent à des disciplines cloisonnées, mais qu'il faut mesurer leur spécificité, leurs mérites respectifs et leurs limites avant de les corréler. Pour le dire de manière schématique, le rapport entre l'algèbre et l'analyse se fait à sens unique chez Lautman, i.e. de l'algèbre vers l'analyse. Au contraire, Weyl souligne à la fois l'irréductibilité de leurs méthodes respectives et leur réciprocité. Ainsi, dans son article sur les groupes de Lie (1925-1926), lorsqu'il adapte le processus de prolongement analytique aux groupes de Lie, on peut parler d'une pénétration des méthodes de l'analyse dans le domaine de la théorie des groupes.

76. *ibid.*, p. 86-87.
77. *ibid.*, p. 87.
78. *ibid.*, p. 121.

En résumé, Lautman s'approprie très directement deux ouvrages de Weyl : *Die Idee der Riemannschen Fläche* dans sa thèse principale, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* dont la préface sert de ligne directrice pour construire la problématique de sa thèse complémentaire. Malgré de tels emprunts, malgré leurs références communes aux mêmes théories mathématiques, ils développent des philosophies essentiellement distinctes. Weyl demeure attaché à la phénoménologie de Husserl, Lautman développe une certaine forme de la platonisme qu'il complète en reprenant à son compte certains aspects de l'ontologie heideggerienne. En outre, alors que Weyl est partagé entre modernité et contre-modernité, Lautman adhère au credo de l'école hilbertienne de mathématiques. Cela étant, Lautman et Weyl se rejoignent par leur refus du positivisme logique. Sans doute ce refus est-il plus prononcé d'ailleurs chez Lautman que chez Weyl.

Weyl et Cavaillès

Autant les liens entre Weyl et Lautman sont obvies, tant il est vrai que les monographies de Weyl sur les surfaces de Riemann et en mécanique quantique constituent des références centrales dans les thèses principale et complémentaire de Lautman, autant les rapports entre Cavaillès et Weyl sont beaucoup plus ténus. Plusieurs faits montrent cependant que cette comparaison n'est pas totalement artificielle. Précisons tout d'abord que Cavaillès effectue plusieurs séjours à l'université de Göttingen au cours des années 30, tout d'abord en 1929-1930, ensuite en 1934, puis en 1935 et, enfin, en 1936.[79] Rappelons que Weyl succède à Hilbert à Göttingen entre 1930 et 1933. Cavaillès travaille conjointement avec E. Noether à la publication de la correspondance Dedekind / Cantor. À l'instar de Lautman, Cavaillès prend donc connaissance des méthodes de l'algèbre abstraite et il mesure leurs incidences dans divers domaines des mathématiques (topologie, analyse, etc.) dès le début des années 30.

Cependant, alors que Lautman aborde explicitement et en détail les théories qui relèvent de l'algèbre abstraite — à commencer par la réforme de la théorie de Galois par Artin —, Cavaillès demeure plus évasif à leur propos. Remarquons de plus que Noether et Artin ne s'intéressent pas aux fondements des mathématiques. Or, il s'agit de l'objet principal des investigations de Cavaillès dans ses deux thèses qu'il soutient en 1938, à savoir *Méthode axiomatique et formalisme* (thèse principale) et *Remarques sur la formation de la théorie abstraite*

79. Voir à ce propos H. Sinaceur, ≪ L'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès ≫, *Revue d'histoire des sciences*, Tome 40 n°1, p.7.

des ensembles (thèse complémentaire).[80] Ainsi, dans *Méthode axiomatique et formalisme*, il synthétise avec une grande acuité la théorie de la démonstration de Hilbert et le programme intuitionniste de Brouwer. Alors que les rapports entre Lautman et Weyl peuvent être localisés à deux niveaux : le statut qu'ils accordent à l'algèbre abstraite et leurs conceptions respectives de l'unité des mathématiques, les points de rencontre entre Weyl et Cavaillès se situent pour l'essentiel au niveau des fondements des mathématiques. Il n'est pas anodin de préciser que Cavaillès s'est déplacé à Rotterdam pour montrer à Brouwer et Heyting sa thèse principale. En outre, lorsqu'on la parcourt, on s'aperçoit que Cavaillès se réfère explicitement à l'ouvrage de Weyl sur le continu (1918) et à l'article polémique que ce dernier publie sur la crise des fondements en 1921. Pour être plus précis, Cavaillès écrit dans une note de bas de page :

> Weyl qui fut — ou se crut — un temps, brouwérien (ce que conteste actuellement Brouwer) avait rapproché cette intution originale de celle à laquelle se réfère Husserl : elle n'est pas définissable parce qu'elle se confond avec l'évidence de la conscience. (...) Pour Husserl au moins il importe de noter qu'il a lui-même une conception des mathématiques entièrement différente, beaucoup plus voisine de celle de Hilbert que de celle de Brouwer.[81]

Dans ce passage, Cavaillès entend souligner les divergences entre l'intuitionnisme de Brouwer et celui de Weyl. De plus, il estime que le rapprochement effectué par Weyl entre la phénoménologie de Husserl et le programme intuitionniste de Brouwer n'est pas conséquent. Pourtant, nous ne saurions surdéterminer ces deux critiques que Cavaillès adresse à Weyl. Leurs réflexions sur les fondements des mathématiques partent de constats relativement similaires. En effet, Cavaillès commence par reconnaître avec les intuitionnistes que les développements des mathématiques sont imprévisibles, ce qui ne signifie pas que la production de connaissances mathématiques relèverait de la pure contingence. Il accorde en conséquence une place centrale à l'intuition à côté de la logique, comme le souligne H. Sinaceur.[82] Ceci pourrait s'interpréter comme une concession faite à l'intuitionnisme. Mais, d'un

80. *ibid.*, p. 21 : ≪ Il est vrai que Cavaillès a été très séduit par la problématique du fondement des mathématiques. Et que celle-ci est étrangère aux algébristes de 1930, qui sont des working mathematicians au sens strict, et qui, en tant que tels, ont totalement ignoré le rôle fondateur que Hilbert a cru, un moment, pouvoir conférer à l'axiomatique ≫.

81. J. Cavaillès, *Méthode axiomatique et formalisme* (1938), in J. Cavaillès, *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris, éd. Hermann, 1994, p. 33.

82. H. Sinaceur, *Jean Cavaillès, philosophie mathématique*, Paris, P.U.F., 1994, p. 42 : ≪ La connaissance mathématique est affaire d'expérience et non de logique, le mouvement en est imprévisible, on ne peut le définir mais seulement le poursuivre, l'acte du mathématicien fait un avec son objet, l'insistance sur le devenir et la supposition d'une intuition — centrale pour Cavaillès, primordiale pour Brouwer —, autant de thèses intuitionnistes qui sont tout aussi bien celles de Cavaillès lui-même ≫.

autre côté, Cavaillès rejoint Weyl sur le point suivant : le rejet du principe du tiers-exclu et l'exigence de constructibilité qui caractérisent le programme intuitionniste impliquent de renoncer à des pans entiers des mathématiques. À l'instar de Weyl, Cavaillès refuse de s'y résoudre :

> À cause de cela Cavaillès ne peut renoncer à la position de Hilbert pour celle de Brouwer, en dépit des affinités évidentes de son épistémologie avec certaines thèses de ce dernier. Dans ces conditions, une seule issue se présente, sous la forme d'une question : peut-on conserver la logique classique tout en la transformant ? [83]

Mais s'ils partagent ce constat sur le caractère trop contraignant de la logique intuitionniste, ils n'aboutissent pas aux mêmes solutions. Alors que Weyl cherche à établir une voie moyenne entre le formalisme et l'intuitionnisme, Cavaillès opte en définitive pour un certain type de formalisme. Suivons ici le commentaire de Sinaceur. (i) Il maintient la distinction entre logique et mathématique et il ne souscrit donc pas au programme logiciste du Cercle de Vienne. (ii) Non seulement il n'adhère pas aux contraintes imposées par le programme intuitionniste, mais de plus il s'appuie sur un résultat établi par Gödel en 1934 pour montrer l'« inutilité des contraintes intuitionnistes » puisqu'il « est toujours possible de traduire l'arithmétique élémentaire classique dans celle de Heyting. Ce qui veut dire en particulier que toute proposition démontrable avec le tiers exclu est traduisible en une proposition démontrable sans tiers exclu ». [84] (iii) Il distingue les formalismes de von Neumann et de Hilbert. Le formalisme de von Neumann consiste à produire arbitrairement des systèmes formels selon une conception « hypothético-déductive » des mathématiques. Comme nous l'avons déjà souligné, le formalisme hilbertien ne se réduit pas à une manipulation de symboles vides de sens et il revient à envisager les théories mathématiques comme des totalités organisées dont le développement repose sur une nécessité intérieure.

Ainsi, contrairement à Weyl, Cavaillès n'opte pas pour une voie moyenne entre le formalisme et l'intuitionnisme. Il maintient dans ses grandes lignes le formalisme de Hilbert, malgré l'échec de la théorie hilbertienne de la démonstration, sanctionnée par les théorèmes de Gödel. De plus, il s'appuie explicitement sur la *begriffliche Mathematik* telle qu'elle est promue à la suite de Hilbert par les algébristes des écoles de Hambourg et de Göttingen — Artin, Noether, Hasse ou encore van der Waerden — pour développer une philosophie du concept, radicalement opposée aux philosophies de la conscience et, en particulier, à la phénoménologie de Husserl dont Weyl se réclame. Rappelons que la troisième partie de *Sur la logique et la théorie de la science* est consacrée à une analyse critique et à une réfutation

83. *ibid.*, p. 43.
84. *ibid.*, p. 72.

de la conception husserlienne des mathématiques issue de *Logique formelle et logique transcendantale* (1929). Une analyse exhaustive des arguments de Cavaillès dépasserait l'objectif de notre thèse. Retenons seulement la conclusion à laquelle il aboutit :

> Ce n'est pas une philosophie de la conscience mais une philosophie du concept qui peut donner une doctrine de la science. La nécessité génératrice n'est pas celle d'une activité, mais d'une dialectique. [85]

Dans une certaine mesure, les réflexions philosophiques de Weyl restent centrées sur ≪ l'activité ≫ du mathématicien et il s'agit donc de rapporter en dernière instance les concepts et les objets mathématiques à une conscience qui les vise. À notre sens, l'attachement de Weyl à des philosophies de la conscience est corrélatif des réserves qu'il exprime à l'égard d'une *begriffliche Mathematik* qui serait exclusivement fondée sur des procédures axiomatiques. Inversement, l'exemplarité de l'algèbre abstraite conduit Lautman à développer une dialectique des idées sur un mode platonicien et Cavaillès à développer une dialectique des concepts sur un mode spinoziste. [86]

85. J. Cavaillès, *Sur la logique et la théorie de la science*, *op. cit.*, p. 78.

86. H. Sinaceur, *op. cit.*, p. 118-119 : ≪ C'est bien entendu à Spinoza qu'il faut rapporter l'automatisme conceptuel de Cavaillès ainsi que le monisme par lequel il échappe aux dichotomies de l'intuition et du concept, de la matière et de la forme, du sujet et de l'objet, de la liberté et de la nécessité. C'est pour Spinoza en effet que l'idée vraie ne renvoie ni à un sujet ni à un objet, mais à une autre idée vraie ≫.

Bibliographie

[1] G. Bachelard – *La philosophie du non*, P.U.F., Paris, 1940.

[2] F. Balibar – *Galilée, Newton lus par Einstein*, P.U.F., Paris, 1984.

[3] — , *Einstein 1905, de l'éther aux quanta*, P.U.F., Paris, 1992.

[4] F. Balibar et J.-M. Lévy-Leblond – *Quantique*, Dunod, Paris, 2006.

[5] E. Barot – *Lautman*, Les Belles Lettres, Paris, 2009.

[6] R. Blanché – *Le raisonnement*, P.U.F., Paris, 1973.

[7] M. Bôcher – *Introduction to higher algebra*, The Macmillan Company, New York, 1907.

[8] L. Boi – *Le problème mathématique de l'espace, une quête de l'intelligible*, 1995, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.

[9] A. Borel – *Essays in the history of Lie groups, and algebraic groups*, American Mathematical Society, London Mathematical Society, History of mathematics 21, 2001.

[10] M. Born et P. Jordan – « Zur Quantenmechanik », *Zeitschrift für Physik* **34** (1925), p. 858–888.

[11] U. Bottazzini – « *Algebraic Truth* vs *Geometric Fantasies* : Weierstrass' response to Riemann », *Proceedings of the ICM* **3** (2002), p. 923–934.

[12] J. Bouveresse et P. Wagner (éds.) – *Mathématiques et expérience, l'empirisme logique à l'épreuve*, Odile Jacob, Paris, 2008.

[13] K. Brading – « Which symmetry ? Noether, Weyl and conservation of electric charge », *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics* **33** (2002), p. 3–22.

[14] — , « A note on general relativity, energy conservation and Noether's theorems », *Einstein Studies* **11** (2005), p. 125–135.

[15] F. Braudel – *Écrits sur l'histoire*, Flammarion, Paris, 1969.

[16] R. Brauer – « Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen », *Mathematische Zeitschrift* **41** (1936), p. 330–339.

[17] A. Brill et M. Noether – *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuer Zeit*, Reimer, Berlin, 1894.

[18] L. de Broglie – *La physique nouvelle et les quanta (1937)*, Flammarion, Paris, 1973.

[19] F. Burbage et N. Chouchan – *Leibniz et l'infini*, P.U.F., Paris, 1993.

[20] H. Burkhardt – « Endliche diskrete Gruppen (1898) », In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* I.1., p. 209-226, Teubner, Leipzig, 1898-1904.

[21] H. Burkhardt et L. Maurer – « Kontinuierliche Transformationsgruppen (1900) », In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* II.1., p. 402-436, Teubner, Leipzig, 1899-1916.

[22] W. Burnside – « On the representation of a group as an irreducible group of linear substitutions and the direct establishment of the relations between the group-characteristics », *Proceedings of the London Mathematical Society* **(2),1** (1904), p. 117–123.

[23] R. Carnap – *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft*, Nymphenburger Verlagshandlung, München, 1969.

[24] E. Cartan – « Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane », *Bulletin des sciences mathématiques* **41** (1913), p. 53–96.

[25] — , « Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* **175** (1922), p. 82–85.

[26] — , « Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique », *Journal de mathématiques pures et appliquées, neuvième série* **2** (1923), p. 167–192.

[27] — , « Sur les variétés à connexion affine (suite) », *Annales scientifiques de l'ÉNS* **41** (1924), p. 1–25.

[28] — , « La théorie des groupes et les recherches récentes en géométrie différentielle », *L'enseignement mathématique* **24** (1925), p. 5–18.

[29] — , « La théorie des groupes et la géométrie », *L'enseignement mathématique* **26** (1927), p. 200–225.

[30] — , *Notice sur les travaux scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[31] — , *Œuvres complètes, I. 1.*, éditions du CNRS, Paris, 1984.

[32] — , « Sur la structure des groupes finis et continus, (1894) », Œuvres complètes, I.1., p. 137-287, éditions du CNRS, Paris, 1984.

[33] H. B. G. Casimir et B. L. van der Waerden – « Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halb-einfacher Liescher Gruppen », *Mathematische Annalen* **111** (1935), p. 1–12.

[34] E. Cassirer – *Brief an Weyl, 18 01 1928*, *ETH-Bibliothek*, Hs 91 : 506, Zürich.

[35] — , *éléments pour une théorie du concept (1910), trad. Caussat*, éd. de Minuit, Paris, 1977.

[36] — , *La théorie de la relativité d'Einstein (1921), trad. Seidengart*, éd. du cerf, Paris, 2000.

[37] J. Cavaillès – *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Hermann, Paris, 1994.

[38] D. Chapuis-Schmitz – « Les empiristes logiques et l'expérience », L'Expérience, p. 133-154 (L. Perreau, éd.), Vrin, Paris, 2010.

[39] S. Chauvelot – *Introduction à la géométrie ou développement de l'idée d'étendue*, Brunswick, 1795.

[40] K. Chemla et S. Pahaut – « Histoire et préhistoire de la dualité, relecture des triangles sphériques avec et après Euler », *Cahiers du centre de logique* **12** (2002), p. 9–25.

[41] C. Chevalley – « Albert Lautman et le souci logique », *Revue d'histoire des sciences* **40** (1987), p. 49–77.

[42] R. Chorlay – « L'émergence du couple local/global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953) », Thèse, Paris 7, 2007.

[43] A. Clebsch – « Über diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines parameters sind », *Journal für reine und angewandte Mathematik* **64** (1865), p. 43–65.

[44] J. Clerck Maxwell – *Traité d'electricité et de magnétisme (1873), tome 1, trad. G. Sélignan-Lui*, Gauthier-Villars, Paris, 1885.

[45] R. A. Coleman et H. Korté – *Hermann Weyl : Mathematician, physicist, philosopher, in Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a general introduction to his scientific work*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 2000.

[46] H. P. de Saint-Gervais (ouvrage collectif) – *Uniformisation des surfaces de Riemann, retour sur un théorème centenaire*, ENS éditions, Lyon, 2010.

[47] L. Corry – *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 2004.

[48] G. Crocco – « Intuition, construction et convention dans la théorie de la connaissance de Poincaré », *Philosophiques* **31** (2004), p. 151–177.

[49] P. Curie – « Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique », *Journal de Physique, troisième série* **3** (1894), p. 393–415.

[50] R. Dedekind – « Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen », *Journal für reine und angewandte Mathematik* **83** (1877), p. 265–292.

[51] — , *Gesammelte mathematische Werke*, Braunschweig, 1930.

[52] J. Dieudonné – *Sur les groupes classiques*, Hermann, Paris, 1967.

[53] J. P. Dubucs – « L.J.E. Brouwer, topologie et constructivisme », *Revue d'Histoire des Sciences* **41** (1988), p. 133–155.

[54] P. Duhem – *La théorie physique, son objet, sa structure (1906)*, Vrin, Paris, 2006.

[55] M.-J. Durand-Richard (éd.) – *L'analogie dans la démarche scientifique*, L'Harmattan, Paris, 2008.

[56] H. Durège – *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse*, Teubner, Leipzig, 1864.

[57] A. Einstein – « Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie », *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* **33** (1915), p. 831–839.

[58] — , « Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie », *Annalen der Physik* **49** (1916), p. 769–822.

[59] — , *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, (1916)*, Springer, Berlin, 2009.

[60] B. Erdmann – *Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie*, Voss, Leipzig, 1877.

[61] B. Escoubès et J. L. Lopes – *Sources et évolution de la physique quantique*, EDP Sciences, Les Ulis, 2005.

[62] M. Fichant – « L'espace est représenté comme une grandeur infinie donnée, la radicalité de l'Esthétique », *Philosophie* **56** (1997), p. 20–48.

[63] J. G. Fichte – *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature, œuvres choisies de philosophie première, (1795), trad. Philonenko*, Vrin, Paris, 1964.

[64] B. C. van Fraassen – *Lois et symétrie (1989), trad. C. Chevalley*, Vrin, Paris, 1994.

[65] A. Fraenkel – « Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **145** (1914), p. 139–176.

[66] G. Frege – *Les fondements de l'arithmétique (1884), trad. Imbert*, Seuil, Paris, 1969.

[67] — , *Briefwechsel mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell, sowie ausgewählte Einzelbriefe*, Meiner, Hambourg, 1980.

[68] G. Frei et U. Stammbach – *Hermann Weyl und die Mathematik an der ETH Zürich*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 1992.

[69] M. Friedman – *Kant and the exact sciences*, Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts), 1992.

[70] — , *Reconsidering logical positivism*, Cambridge University Press, New York, 1999.

[71] F. G. Frobenius – « Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante », *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1896), p. 1343–1382.

[72] — , « Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen », *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1897), p. 994–1015.

[73] — , « Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe », *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1900), p. 516–534.

[74] E. Galois – « Œuvres mathématiques », *Journal de Liouville* **11** (1846), p. 381–444.

[75] C. F. Gauss – *Recherches générales sur les surfaces courbes (1828)*, Bachelier imprimeur libraire, Paris, 1852.

[76] — , *Werke, Bd. II*, Göttingen, 1863.

[77] — , *Werke, Bd. III*, Göttingen, 1866.

[78] — , *Werke, Bd. IV*, Göttingen, 1873.

[79] — , *Werke, Bd. VIII*, Göttingen, 1900.

[80] — , *Résolution générale du problème : Représenter les parties d'une surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original en les plus petites parties (1822), trad. laugel*, Hermann, Paris, 1915.

[81] — , *Recherches arithmétiques (1801), trad. Poullet-Deslisle (1807)*, Jacques Gabay, Paris, 1989.

[82] E. Ghys et L. A. (éds.) – *L'héritage scientifique de poincaré*, Belin, Paris, 2006.

[83] R. Godement – *Introduction à la théorie des groupes de lie (1982)*, Springer, Berlin, 2004.

[84] C. Goldstein – *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Presses universitaires de Vincennes, Saint-Denis, 1995.

[85] N. Goodman – *Faits, fictions et prédictions (1954), trad. P. Jacob*, éd. de Minuit, Paris, 1984.

[86] G.-G. Granger – *Formes, opérations, objets*, Vrin, Paris, 1994.

[87] — , *La pensée de l'espace*, Odile Jacob, Paris, 1999.

[88] J. Gray – *The symbolic universe, geometry, and physics 1890-1930*, Oxford University Press, Oxford, 1999.

[89] — , *Linear differential equations and group theory, from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 2000.

[90] — , « Berlin in the 19^{th} century », *EMS Newsletter* (2009), p. 29–33.

[91] G. Green – *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham, 1828.

[92] A. Haar – « Maasbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen », *Annals of Mathematics* **34** (1933), p. 147–169.

[93] B. C. Hall – *Lie groups, Lie algebras and representations : an elementary introduction*, Springer, New York, 2003.

[94] J. K. F. Hauff – *Euklids Elemente*, Marburg, 1807.

[95] F. Hausdorff – *Werke, bd. ii*, Springer, Berlin, 2002.

[96] T. Hawkins – *Emergence of the theory of Lie groups*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

[97] W. Heisenberg – « Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen », *Zeitschrift für Physik* **33** (1925), p. 879–893.

[98] — , « Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik », *Zeitschrift für Physik* **43** (1927), p. 172–198.

[99] H. Helmholtz – « Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen », *Nachrichten von der k. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.A. Universität zu Göttingen* (1868), p. 193–221.

[100] — , « *über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* » *(1870), in Vorträge und Reden, Bd. II*, Vieweg, Braunschweig, 1883.

[101] J. F. Herbart – *Über philosophisches Studium*, Göttingen, 1807.

[102] — , *Allgemeine Metaphysik, erster Teil*, Königsberg, 1828.

[103] — , *Allgemeine Metaphysik, zweiter Teil*, Königsberg, 1829.

[104] D. Hilbert – « Mathematische Probleme », *Göttinger Nachrichten* (1900), p. 253–297.

[105] — , « Über das Dirichlet'sche Prinzip », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **8** (1900), p. 184–188.

[106] — , « Über die Grundlagen der Geometrie », *Mathematische Annalen* **56** (1902), p. 381–422.

[107] — , « Über die Grundlagen der Geometrie », *Göttinger Nachrichten* (1902), p. 233–241.

[108] — , « Über das Dirichlet'sche Prinzip », *Mathematische Annalen* **59** (1904), p. 161–186.

[109] — , « Wesen und Ziel einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen », *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* **27** (1909), p. 59–74.

[110] — , « Zur Theorie der konformen Abbildung », *Göttinger Nachrichten* (1909), p. 314–323.

[111] — , « Die Grundlagen der Physik », *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse* (1916), p. 395–407.

[112] — , « Axiomatisches Denken », *Mathematische Annalen* **78** (1918), p. 405–415.

[113] — , « Adolf Hurwitz », *Mathematische Annalen* **83** (1921).

[114] — , *Gesammelte Abhandlungen, Bd., III*, Springer, Berlin, 1935.

[115] — , *Natur und mathematisches Erkennen, (1919-1920)*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 1991.

[116] D. Hilbert, J. von Neumann et L. Nordheim – « Über die Grundlagen der Quantenmechanik », *mathematische Annalen* **98** (1928), p. 1–54.

[117] D. Howard – « Einstein, Kant and the origins of logical empiricism », Language, Logic and Structure of Scientific Theories, Proceedings of the Carnap-Reichenbach Centennial, University of Konstanz, 21-24 may 1991, p.45-105 (W. Salmon et W. Gereon, éds.), University of Pittsburgh Press, Konstanz Universitätsverlag, 1994.

[118] D. Hume – *Enquête sur l'entendement humain, (titre donné en 1758 aux Essais philosophiques sur l'entendement humain (1748)), trad. Leroy (1947)*, Flammarion, Paris, 1983.

[119] A. Hurwitz – « Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich », *Mathematische Annalen* **41** (1893), p. 403–442.

[120] — , « Zur Invariantentheorie », *Mathematische Annalen* **45** (1894), p. 508–532.

[121] — , « Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration », *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1897), p. 71–90.

[122] E. Husserl – *Idées directrices pour une phénoménologie (1913), trad. Ricœur*, Gallimard, Paris, 1950.

[123] — , *Logique formelle et logique transcendantale, essai d'une critique de la raison logique (1929), trad. S. Bachelard*, P.U.F., Paris, 1957.

[124] C. Jordan – « Sur la déformation des surfaces », *Journal de Mathématiques pures et appliquées, deuxième série* **11** (1866), p. 105–109.

[125] P. Jordan – « Über eine neue Begründung der Quantenmechanik », *Zeitschrift für Physik* **40** (1927), p. 809–838.

[126] E. Kant – *Quelques opuscules précritiques, trad. S. Zac*, Vrin, Paris, 1970.

[127] — , *Critique de la raison pure (1781, 1787), trad. Barni*, Gallimard, Paris, 1980.

[128] — , *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature (1786), trad. Philonenko*, Vrin, Paris, 1982.

[129] W. Killing – « Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, erster Teil », *Mathematische Annalen* **31** (1888), p. 252–290.

[130] — , « Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, zweiter Teil », *Mathematische Annalen* **33** (1888), p. 1–48.

[131] — , « Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen dritter Teil », *Mathematische Annalen* **34** (1889), p. 57–122.

[132] M. Kistler – *Causalité et lois de la nature*, Vrin, Paris, 1999.

[133] F. Klein – « über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst », *Mathematische Annalen* **9** (1875-1876), p. 183–208.

[134] — , « Weitere Untersuchungen über das Ikosaeder », *Mathematische Annalen* **12** (1877), p. 503–560.

[135] — , « über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades », *Mathematische Annalen* **14** (1879), p. 111–172.

[136] — , « Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen », *Mathematische Annalen* **14** (1879), p. 428–471.

[137] — , « Zur Systematik der Theorie der elliptischen Modulfunktionen », *Mathematische Annalen* **17** (1881), p. 62–70.

[138] — , *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882.

[139] — , « Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes », *Annales Scientifiques de l'ÉNS* **8** (1891), p. 87–102, 173–199.

[140] — , *Riemannsche Fläche, cours donné lors du semestre d'été 1891-1892 à Göttingen*, Göttingen, 1894.

[141] — , « Über Arithmetisierung der Mathematik », *Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Heft 2.* (1895).

[142] — , « Sur la géométrie dit non euclidienne (1871) », *Annales de la faculté des sciences de Toulouse* **11** (1897), no. 4, p. 1–62.

[143] — , « Sur « l'arithmétisation » des mathématiques », *Nouvelles annales de mathématiques, troisième série* **16** (1897), p. 114–128.

[144] — , « Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (1910), p. 281–300.

[145] — , *Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. II*, Springer, Berlin, 1922.

[146] — , *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer, Berlin, 1979.

[147] — , *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade (1884)*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 1993.

[148] P. Koebe – « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven », *Göttinger Nachrichten* (1907), p. 191–210.

[149] — , « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, vierte Mitteilung », *Göttinger Nachrichten* (1909), p. 324–361.

[150] — , « Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode », *Nachrichten der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen* (1910), p. 61–65.

[151] — , « Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, erster Teil : das uniformisierende Prinzip », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **138** (1910), p. 192–254.

[152] Y. Kosmann-Schwarzbach – *Groupes et symétries*, éd. de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2005.

[153] — , *The Noether theorems, invariance and conservation laws in the twentieth century*, Springer, Berlin, 2010.

[154] Y. Kosmann-Schwarzbach et L. Meersseman – *Les théorèmes de Noether, invariance et lois de conservation au XX*e *siècle*, édition de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2004.

[155] W. Krull – « Algebraische Theorie der Ringe I », *Mathematische Annalen* **88** (1922), p. 80–122.

[156] J. Lacki – « Pensée physique et mathématique, à propos du problème de l'adéquation », actes du colloque de Peyrescq, « la pensée numérique », p. 199-210, 2002.

[157] — , « La mécanique quantique, fille aînée de la théorie des groupes ? », in *Symétries*, Contributions au séminaire de Han-sur-Lesse septembre 2002 (P. Radelet-de Grave, éd.), Centre de recherche en histoire des sciences, éd. Brepols, Louvain-la-Neuve, 2005.

[158] O. Lahbib – « Husserl lecteur de Fichte », *Archives de Philosophie* **67** (2004), p. 421–443.

[159] P. S. de Laplace – *Œuvres complètes, tome I*, Gauthier-Villars, Paris, 1878.

[160] J. Largeault – *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Vrin, Paris, 1992.

[161] — , *Intuition et intuitionnisme*, Vrin, Paris, 1993.

[162] D. Laugwitz – *Bernhard Riemann 1826-1866, turning points in the conception of mathematics*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 2008.

[163] A. Lautman – *Les mathématiques et le réel physique*, Vrin, Paris, 2006.

[164] A.-M. Legendre – *Éléments de géométrie, sixième édition*, Firmin Didot, Paris, 1806.

[165] G. W. Leibniz – *Correspondance Leibniz-Clarke, présentée par A. Robinet*, P.U.F., Paris, 1957.

[166] — , *Nouveaux essais sur l'entendement humain (1704)*, Garnier-Flammarion, Paris, 1990.

[167] — , *Naissance du calcul différentiel, recueil d'articles traduits annotés et commentés par M. Parmentier*, Vrin, Paris, 1995.

[168] W. Leibniz, Gottfried – *Principes de la nature et de la grâce, monadologie et autres textes, 1703-1716*, Garnier-Flammarion, Paris, 1996.

[169] P. Lejeune Dirichlet – *Werke, Bd. II*, Berlin, 1897.

[170] T. Levi-Civita – « Nozione di parallelismo in una varietá qualunque e conseguente specificacione geometrica della curvatura Riemanniana », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **42** (1917), p. 173–205.

[171] S. Lie – *Gesammelte Abhandlungen Bd. II*, Teubner et Aschehoug, Leipzig, Oslo, 1935.

[172] S. Lie et F. Engel – *Theorie der Transformationsgruppen, Bd. III*, Teubner, Leipzig, 1893.

[173] S. Lie et G. W. Scheffers – *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*, 1893, Leipzig, 1893.

[174] F. London – « Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl », *Zeitschrift für Physik* **47** (1927), p. 375–389.

[175] E. Mach – *La connaissance et l'erreur (1905) trad. Dufour*, Flammarion, Paris, 1908.

[176] H. Mehrtens – *Moderne Sprache Mathematik*, 1990, Surkhamp, 1990.

[177] J. Merker – *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Helmholtz-Lie*, Hermann, Paris, 2010.

[178] W. F. Meyer – « Invariantentheorie (1899) », In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* I.1., p. 322-403, Teubner, Leipzig, 1898-1904.

[179] G. Mie – « Grundlagen einer Theorie der Materie », *Annalen der Physik* **37** (1912), p. 511–534.

[180] J. von Neumann – *Brief an Weyl, 16. 07. 1928*, *ETH-Bibliothek*, Hs 91 : 680, Zürich.

[181] — , « Mathematische Begründung der Quantenmechanik », *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1927), p. 1–57.

[182] — , « Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen », *Mathematische Zeitschrift* **30** (1929).

[183] — , *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.

[184] — , « The uniqueness of Haar's measure », *Matematicheskii Sbornik* **1** (1936), p. 721–736.

[185] E. Noether – « Körper und Systeme rationaler Funktionen », *Mathematische Annalen* **76** (1915), p. 161–196.

[186] — , « Invariante variationsprobleme », *Göttinger Nachrichten* (1918), p. 235–257.

[187] — , « Idealtheorie in Ringbereichen », *Mathematische Annalen* **81** (1921), p. 24–66.

[188] — , « Abstrakter Aufbau der Idealtheorie un algebraischen Zahl- und Funktionenkörper », *Mathematische Annalen* **96** (1926), p. 26–61.

[189] W. F. Osgood – *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Teubner, Leipzig, 1907.

[190] J.-C. Passeron et J. Revel (éds.) – *Penser par cas*, éd. de l'EHESS, Paris, 2005.

[191] M. Paty – « Formalisme et interprétation physique chez Schrödinger », Erwin Schrödinger. Philosophy and the birth of quantum mechanics. Philosophie et naissance de la mécanique quantique, p. 161-190 (M. Bitbol et O. Darrigol, éds.), Frontières, Paris, 1993.

[192] W. Pauli – « Relativitätstheorie », In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* V.2., p. 539-775, Teubner, Leipzig, 1904-1922.

[193] — , « Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons », *Zeitschrift für Physik* **43** (1927), p. 601–623.

[194] H. Poincaré – « Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires », *Mathematische Annalen* **19** (1882), p. 553–564.

[195] — , « Sur un théorème de la théorie générale des fonctions », *Bulletin de la Société mathématique de France* **11** (1883).

[196] — , « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *L'enseignement mathématique* **1** (1899), p. 157–162.

[197] — , « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques », *Compte-rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens* (1900), p. 115–130.

[198] — , *Œuvres, tome VI*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[199] — , *La science et l'hypothèse (1902)*, Flammarion, Paris, 1968.

[200] — , *La valeur de la science (1905)*, Flammarion, Paris, 1970.

[201] H. Reichenbach – *Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori*, Springer, Berlin, 1920.

[202] — , *Philosophie der Raum-Zeit Lehre*, De Gruyter, Berlin et Leipzig, 1928.

[203] — , *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre (1924), in Gesammelte Werke Bd. III*, Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1979.

[204] B. Riemann – *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1876.

[205] — , *über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, neu herausgegeben und erläutert von H. Weyl*, Springer, Berlin, 1919, 1921, 1923.

[206] — , *Œuvres mathématiques (1898), trad. Laugel*, Jacques Gabay, Paris, 1990.

[207] P. Riœur – *La mémoire, l'histoire, l'oubli*, Seuil, Paris, 2000.

[208] J. Ritter et C. Goldstein – *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics*, p. 93-149 (A. Ashtekar et al., éds.), Dordrecht.

[209] J. Rosen – *Symmetry in science*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1995.

[210] B. Russell – *An essay on the foundations of geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.

[211] T. Ryckman – *The reign of relativity*, Oxford university press, New York, 2005.

[212] M. Schlick – *Brief an Weyl 17 07 1926*, Hs 91 : 728, Zürich.

[213] — , *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik, zweite Auflage*, Springer, Berlin, 1919.

[214] — , *General theory of knowledge, deuxième édition (1925)*, Open Court, Chicago et La Salle, 2002.

[215] M. Schneider – « Die physikalischen Arbeiten des junge B. L. van der Waerden », Thèse, Wuppertal, 2009.

[216] E. Scholz – *Geschichte der Mannigfaltigkeitsbegriff, von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 1980.

[217] — , *Symmetrie, Gruppe, Dualität*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 1989.

[218] — , « Weyls Infinitesimalgeometrie, 1917-1925 », In Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie, and a general introduction to his scientific work, p. 48-104 (E. Scholz, éd.), Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 2000.

[219] — , « Hermann Weyl's analysis of « the problem of space » and the origin of gauge structures », *science in context* **17** (2004), p. 165–197.

[220] — , « Philosophy as a cultural resource and medium of reflection for Hermann Weyl », *Revue de synthèse* **126** (2005), p. 331–351.

[221] — , « Introducing groups in quantum theory (1926-1930) », *Historia Mathematica* **33** (2006), p. 440–490.

[222] — , « A. Einstein and H. Weyl, intertwining paths and mutual influences », *in Albert Einstein et Hermann Weyl, 1955-2005. Questions épistémologiques ouvertes*, p. 215-230 (C. Alunni, M. Castellana, D. Ria et A. Rossi, éds.), 2009.

[223] A. M. Schönflies – *Krystallsysteme und Krystallstructur, (1891)*, Springer, Berlin, 1984.

[224] E. Schrödinger – « Quantisierung als Eigenwertproblem, erste Mitteilung », *Annalen der Physik* **79** (1926), p. 361–376.

[225] — , « Quantisierung als Eigenwertproblem, zweite Mitteilung », *Annalen der Physik* **79** (1926), p. 489–527.

[226] I. Schur – « Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie », *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1924), p. 440–459.

[227] — , « Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, II. über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare Transformationen », *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1924), p. 297–321.

[228] J.-P. Serre – *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, W.A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1966.

[229] S. Sigurdsson – « Hermann Weyl, mathematics and physics, 1900-1927 », Thèse, Harvard, 1991.

[230] H. Sinaceur – « L'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès », *Revue d'histoire des sciences* **40** (1987), p. 5–30.

[231] — , *Jean Cavaillès, philosophie mathématique*, P.U.F., Paris, 1994.

[232] — , *Corps et modèles, (deuxième édition)*, Vrin, Paris, 1999.

[233] M. A. Sinaceur – « Dedekind et le programme de Riemann, suivi de la traduction de Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemann's Abhandlungen über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen par R. Dedekind », *Revue d'histoire des sciences* **43** (1990), p. 221–296.

[234] A. Speiser – *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, erste auflage*, Springer, Berlin, 1923.

[235] C. C. G. von Staudt – *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847.

[236] E. Steinitz – « Algebraische Theorie der Körper », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **137** (167-309).

[237] W. Threlfall – « La notion de recouvrement », *L'Enseignement mathématique* **34** (1935), p. 229–254.

[238] J. Tits – *Notice sur les travaux scientifiques*, 2001.

[239] M. Vorms – « Théories, modes d'emploi, une perspective cognitive sur l'activité théorique dans les sciences empiriques », Thèse, Paris 1, 2009.

[240] J. Vuillemin – *Philosophie de l'algèbre*, P.U.F., Paris, 1962.

[241] B. L. van der Waerden – *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.

[242] H. Weber – « Die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie », *Mathematische Annalen* **43** (1893), p. 521–549.

[243] K. Weierstrass – *Mathematische Werke, Bd. II*, Mayer und Müller, Berlin, 1895.

[244] A. Weil – *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, deuxième édition*, Hermann, Paris, 1953.

[245] H. Weyl – *Gesammelte Abhandlungen, Bd. I-IV*, Springer, Berlin, 1868.

[246] — , « Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe », *Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter* **7** (1910), p. 298–304, GA I, p. 298–304.

[247] — , *Die Idee der Riemannschen Fläche, (erste Auflage)*, Teubner, Leipzig et Berlin, 1913.

[248] — , « Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen », *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung* **25** (1916), p. 265–278, GA I, p. 600–613.

[249] — , *Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, von Veit, Leipzig, 1918.

[250] — , « Gravitation und Elektrizität », *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1918), p. 465–480, GA II, p. 29–42.

[251] — , « Reine Infinitesimalgeometrie », *Mathematische Zeitschrift* **2** (1918), p. 384–411, GA II, p. 1–28.

[252] — , *Raum, Zeit, Materie*, Springer, Berlin, 1918, 1919, 1921, 1923.

[253] — , « eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie », *Annalen der Physik* **59** (1919), p. 101–133, GA II, p. 55–87.

[254] — , « Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik », *Mathematische Zeitschrift* **10** (1921), p. 39–79, GA II, p. 143–180.

[255] — , « Das Raumproblem », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **31** (1922), p. 205–221, GA II, p. 212–228.

[256] — , « Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung », *Mathematische Zeitschrift* **12** (1922), p. 114–146, GA II, p. 263–295.

[257] — , *Temps, Espace, Matière, trad. par Leroy et Juvet de la quatrième édition de Raum, Zeit, Materie*, Blanchard, Paris, 1922.

[258] — , *Mathematische Analyse des Raumproblems*, Springer, Berlin, 1923.

[259] — , « Randbemerkungen zu Hauptproblemen der Mathematik », *Mathematische Zeitschrift* **20** (1924), p. 131–150, GA II, p. 433–452.

[260] — , « Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I », *mathematische Zeitschrift* **23** (1925).

[261] — , « Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen II », *Mathematische Zeitschrift* **24** (1926), p. 328–376.

[262] — , « Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen III », *Mathematische Zeitschrift* **24** (1926), p. 377–395, GA II, p. 544–645, pour les parties I, II, et III de l'article.

[263] — , *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Oldenbourg, München, 1927, 1949.

[264] — , *Gruppentheorie und Quantenmechanik, erste Auflage*, Hirzel, Leipzig, 1928.

[265] — , « Quantenmechanik und Gruppentheorie », *Zeitschrift für Physik* **46** (1928), p. 1–46, GA III, p. 90–135.

[266] — , *Application of group theory to quantum mechanics ; Theory of groups*, *ETH-Bibliothek*, Hs 91 a : 51, Zürich, 1929.

[267] — , « Der Zusammenhang zwischen der symmetrischen und der linearen Gruppe », *Annals of Mathematics* **30** (1929), p. 499–516, GA III, p. 170–188.

[268] — , « The problem of symmetry in quantum mechanics », *Journal of the Franklin Institute* **207** (1929), p. 509–518, GA III, p. 282–291.

[269] — , « The spherical symmetry of atoms », *The Rice Institute Pamphlet* **16** (1929), p. 266–279, GA III, p. 268–281.

[270] — , « Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart », *Die Naturwissenschaften* **18** (1930), p. 4–11, GA III, p. 292–299.

[271] — , « Geometrie und physik », *Die Naturwissenschaften* **19** (1931), p. 49–58, GA III, p. 336–345.

[272] — , *Axiomatik, Kap. II, die Raum-Zeit-Lehre der speziellen Relativitätstheorie*, ETH-Bibliothek, Hs 91 a : 45, Zürich, 1931-1932.

[273] — , *The structure and representation of continuous groups : Lectures at Princeton university*, ETH-Bibliothek, Hs 91a : 70, Zürich, 1934.

[274] — , *Struktur und Darstellung continuierlicher Gruppen, Princeton 1934*, ETH-Bibliothek, Hs : 91a 52, Zürich, 1934.

[275] — , « Emmy Noether », *Scripta Mathematica* **3** (1935), p. 201–220, GA III, p. 425–444.

[276] — , « Symmetry », *Journal of the Washington Academy of Sciences* **28** (1938), no. 6, p. 253–271, GA III, p. 592–610.

[277] — , « David Hilbert and his mathematical work », *Bulletin of the American mathematical Society* **50** (1944), p. 612–654, GA IV, p. 130–172.

[278] — , « Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen », *Eranos-Jahrbuch* (1948), p. 375–431, GA IV, 289–345.

[279] — , « Relativity theory as a stimulus in mathematical research », *Proceedings of the American Philosophical Society* **93** (1949), no. 7, p. 535–541, GA IV, p. 394–400.

[280] — , *Group theory and quantum mechanics (1931)*, Dover, New York, 1950.

[281] — , « A half-century of mathematics », *The American mathematical monthly* **58** (1951, GA IV, p. 464-494.), no. 8.

[282] — , *The concept of a Riemann surface (dritte Auflage, 1955)*, Addison-Wesley, Boston, 1964.

[283] — , *Symétrie et mathématique moderne, (1952), trad. Guilbaud*, Flammarion, Paris, 1964.

[284] — , *Le continu et autres écrits, trad. Jean Largeault*, Vrin, Paris, 1994.

[285] — , « Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension I », *The American mathematical monthly* **102** (1995), no. 5, p. 453–460.

[286] — , « Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension II », *The American mathematical monthly* **102** (1995), no. 7, p. 646–651, GA III, p. 348–358.

[287] — , *Einführung in der Funktionentheorie*, Birkhäuser, Basel, Berlin, Boston, 2008.

[288] — , *Mind and nature, selected writings on philosophy, mathematics, and physics*, Princeton University Press, Princeton, 2009.

[289] E. Wigner – « Einige Folgerungen aus der Schrödingenrschen Theorie für die Termstrukturen », *Zeitschrift für Physik* **43** (1927), p. 624–652.

[290] — , « Über nicht kombinierende Termen in der neueren Quantentheorie, erster Teil », *Zeitschrift für Physik* **40** (1927), p. 492–500.

[291] — , « Über nicht kombinierende Termen in der neueren Quantentheorie, zweiter Teil », *Zeitschrift für Physik* **40** (1927), p. 883–892.

[292] — , « Über die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik », *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1928), p. 375–381.

[293] — , *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra (1931)*, Academic Press Inc., New York, 1959.

[294] — , *Symmetries and reflections*, Ox Bow Press, Woodbridge, 1979.

[295] — , *The collected works, I*, Springer, Berlin, 1993.

[296] E. Wigner et J. von Neumann – « Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, erster Teil », *Zeitschrift für Physik* **47** (1928), p. 203–220.

[297] — , « Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, zweiter Teil », *Zeitschrift für Physik* **49** (1928), p. 73–94.

Table des matières

Introduction **5**

0.1 Une œuvre « hétérogène » 5

0.2 L'unité d'un projet, d'un mode opératoire et d'une écriture 7

0.3 Les difficultés qui orientent nos recherches sur Weyl 10

0.4 Délimitation et constitution du corpus 15

0.5 « Groupes », « invariants », « géométries » : trois concepts déclinés par Weyl dans son œuvre 19

0.6 Plan de la thèse 21

I Les surfaces de Riemann et l'*analysis situs* **27**

Introduction de la première partie **29**

1 La *Dissertation* et la *Théorie des fonctions abéliennes* de Riemann **41**

1.1 Caractérisations géométrique et analytique des fonctions dérivables d'une variable complexe 44

1.2 Sens et usage de « l'analysis situs » chez Riemann 52

1.3 Un usage contrôlé de l'intuition chez Riemann 63

1.4 Le principe de Dirichlet et les critiques de Weierstrass à son encontre 72

1.5 La question de la classification des surfaces de Riemann 77

1.6 La *Dissertation* et le *Habilitationsvortrag* 82

1.7 Une conception abstraite des surfaces de Riemann : commentaire du § 12 de la *Théorie des fonctions abéliennes* 86

1.8 Conclusion du premier chapitre 96

2 Les surfaces de Riemann et la théorie des groupes 99

2.1 Les fonctions modulaires chez Dedekind 103

2.1.1 Le modèle de la théorie des formes quadratiques binaires de Gauss . . 105

2.1.2 Comparaison entre Gauss et Dedekind 110

2.2 Les travaux de Klein sur l'icosaèdre, leur lien progressif avec la théorie des fonctions modulaires 114

2.2.1 Klein et la théorie des invariants 114

2.2.2 Les travaux de Klein sur l'icosaèdre : une unification « locale » des mathématiques 117

2.2.3 La quartique de Klein et la théorie générale des fonctions modulaires . 131

2.2.4 Quelle conception de l'unité des mathématiques et de l'intuition chez Klein ? 137

2.3 Klein 1882 : une théorie systématique des surfaces de Riemann 145

2.3.1 Klein et Maxwell 148

2.3.2 Une incursion du côté de la théorie des surfaces courbes 154

2.3.3 La classification des surfaces de Riemann compactes connexes 157

2.3.4 L'intuition et l'arithmétisation des mathématiques 165

2.4 Conclusion du deuxième chapitre 176

3 Weyl et l'axiomatisation des surfaces de Riemann 179

3.1 Le rejet de l'intuition naïve 184

3.2 La « rigueur » weierstrassienne dans la construction des surfaces de Riemann 189

3.3 Les emprunts de Weyl à Hilbert et ses réserves à l'égard du « formalisme » . 198

3.4 Revêtements et théorème d'uniformisation 210

3.5 La « montée vers l'absolu » : Weyl et Lautman 229

3.6 Conclusion du troisième chapitre 246

Conclusion générale de la première partie 248

II Variétés, univers et relativité générale 253

Introduction de la deuxième partie 255

1 De la théorie des surfaces aux variétés : Gauss et Riemann 267

1.1 La géométrie intrinsèque des surfaces courbes 271

1.1.1 Les conditions requises pour étudier les surfaces courbes en elles-mêmes 274
1.1.2 Caractérisations intuitive et analytique de la courbure de Gauss . . . 276
1.1.3 Le *theorema egregium* et la classification des surfaces courbes 281
1.2 La *Leçon d'habilitation* de Riemann, une généralisation de la théorie gaussienne des surfaces courbes ? 286
1.2.1 Qu'est-ce que Riemann entend par géométrie ? 292
1.2.2 Les variétés [Mannigfaltigkeiten] discrètes et « continues » 297
1.2.3 Déterminations métriques sur une variété 302
1.2.4 Mesure de courbure sur une variété et classification des variétés homogènes 307
1.2.5 Les hypothèses riemanniennes sur la nature de l'espace physique . . . 319
1.2.6 La géométrie infinitésimale de Riemann et la physique des actions de contact de Faraday 327
1.2.7 Riemann et Leibniz 331
1.3 Conclusion du premier chapitre 336

2 Vers un dépassement de la conception kantienne de l'espace 339
2.1 Rappels sur la conception kantienne de l'espace et de la géométrie 343
2.1.1 L'espace comme intuition pure 343
2.1.2 La « nécessité » de la géométrie euclidienne 346
2.1.3 Géométrie euclidienne et mathématisation de l'espace physique 348
2.2 Les critiques de Gauss contre la théorie kantienne de l'espace 352
2.3 Le *Habilitationsvortrag* de Riemann : quel dépassement de la conception kantienne de l'espace ? 367
2.4 Les objections de Weyl contre Kant 375
2.4.1 L'orientation dans l'espace est-elle de nature intuitive ? 376
2.4.2 Continuum amorphe et variétés métriques 385
2.5 Conclusion du deuxième chapitre 393

3 Généralisation de la géométrie riemannienne et théorie unifiée des champs 395
3.1 Quelques rappels sur la relativité générale 399
3.2 L'héritage de Hilbert 409
3.3 La géométrie purement infinitésimale de Weyl et *sa* théorie unifiée des champs 416
3.4 Lien avec l'idéalisme fichtéen 423

3.5 La réception critique de la théorie unifiée des champs de Weyl par Einstein, Reichenbach et Hilbert 434
3.5.1 Einstein et Weyl 435
3.5.2 Reichenbach et Weyl 439
3.5.3 Hilbert contre Weyl 445
3.6 La théorie de Weyl et le second théorème de Noether 449
3.7 Conclusion du troisième chapitre 456

4 Le problème de l'espace : une première incursion dans la théorie des groupes et des algèbres de Lie 459
4.1 La construction du problème de l'espace 461
4.2 Analyse du problème de l'espace et formulation des principes qui orientent sa résolution 467
4.3 La résolution du problème de l'espace 471
4.4 L'héritage de la phénoménologie de Husserl 477
4.5 Conclusion du quatrième chapitre 483

Conclusion générale de la deuxième partie 485

III Représentations de groupes, symétries et mécanique quantique 495

Introduction de la troisième partie 497

1 Les emprunts de Weyl à Cartan, Frobenius et Hurwitz 503
1.1 Cartan et les groupes de Lie semi-simples 507
1.1.1 La ≪ structure ≫ des algèbres de Lie 509
1.1.2 Caractérisation des algèbres de Lie résolubles et des algèbres de Lie semi-simples 513
1.1.3 Sous-algèbres de Cartan, systèmes de racines et classification des algèbres de Lie simples 519
1.1.4 L'article de 1913 : représentations irréductibles et poids 528
1.2 Les apports conceptuels et théoriques de Frobenius : caractères et représentations des groupes finis 533

1.2.1 La théorie des caractères et des déterminants de groupes de Dedekind à Frobenius . . . 536
1.2.2 De la théorie des caractères aux représentations matricielles de groupes 542
1.2.3 Les représentations du groupe symétrique . . . 547
1.3 Le « truc unitaire » de Hurwitz . . . 553
1.3.1 Théorie des invariants et groupes de transformations . . . 555
1.3.2 Méthode intégrale et raisonnement par analogie chez Hurwitz . . . 558
1.4 Conclusion du premier chapitre . . . 564

2 L'article de Weyl de 1925-1926 : un exemple fondamental pour penser l'unité des mathématiques chez Weyl 567
2.1 Conditions d'élaboration et structure de l'article de Weyl . . . 572
2.1.1 Schur et Weyl . . . 573
2.1.2 Structure d'ensemble de l'article de 1925-1926 . . . 583
2.2 Un exemple paradigmatique : $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ . . . 587
2.2.1 Représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ et poids dominants . . . 589
2.2.2 Le théorème de complète réductibilité et l'*analysis situs* . . . 594
2.3 Théorie générale des algèbres de Lie complexes semi-simples . . . 601
2.3.1 Généralisation de la restriction unitaire . . . 603
2.3.2 Une réforme de la théorie des algèbres de Lie complexes semi-simples . 605
2.4 Weyl et la méthode axiomatique dans l'article de 1925-1926 . . . 608
2.4.1 Singularités de Weyl par rapport à Noether sur l'usage de la méthode axiomatique . . . 612
2.4.2 Les critiques de Weyl à l'encontre de « l'algèbre abstraite » . . . 621
2.5 Conclusion du deuxième chapitre : prolongements et réception de l'article de Weyl de 1925-1926 . . . 629

3 Mécanique quantique, représentations de groupes et symétries 639
3.1 La mathématisation de la mécanique quantique . . . 643
3.1.1 La *mécanique ondulatoire* de Schrödinger . . . 646
3.1.2 La *mécanique matricielle* de Heisenberg-Born-Jordan . . . 657
3.1.3 L'axiomatisation de la mécanique quantique . . . 672
3.1.4 Les relations d'indétermination de Heisenberg . . . 677
3.1.5 Les fondements « mathématiques » de la mécanique quantique : von Neumann . . . 682

3.2 Représentations de groupes et mécanique quantique 700
3.2.1 Les méthodes de théorie des groupes : un instrument pour caractériser les niveaux d'énergie, les lois de conservation et les états quantiques d'un système 706
3.2.2 Motivations et structure de *Gruppentheorie und Quantenmechanik* . . 718
3.2.3 Justifications de Weyl, von Neumann et Wigner en faveur des méthodes de théorie des groupes en mécanique quantique 727
3.2.4 Application des représentations de groupes à des systèmes plus complexes, lien à l'empirie 733
3.2.5 Groupe symétrique et particules « indiscernables » : Heisenberg, Weyl et Wigner 740
3.2.6 Bilan de la comparaison Wigner / Weyl 751
3.3 La seconde théorie de jauge (1922-1929) 759
3.3.1 Les travaux inauguraux de Schrödinger, Fock et London 761
3.3.2 Weyl et la seconde théorie de jauge : la « géométrisation » de la physique en question 766
3.3.3 Le tournant « empirique » de Weyl 770
3.3.4 Quel lien entre le « tournant empirique » de Weyl et l'« empirisme » logique ? 773
3.4 Conclusion du troisième chapitre 787

4 Symétries, principes d'invariance et lois de la nature 791
4.1 Lois de la nature et principes d'invariance : un problème de définition 796
4.1.1 Lois de la nature et généralisations accidentelles 796
4.1.2 L'invariance : une tentative de conceptualisation 801
4.2 Le statut et les fonctions des principes d'invariance 811
4.2.1 Principes d'invariance et connaissances *a priori* en physique 812
4.2.2 Les principes d'invariance comme connaissances transcendantales . . . 818
4.2.3 Toutes les connaissances *a priori* en physique sont-elles des principes de symétrie ? 822
4.3 Vers un dépassement du kantisme et du positivisme logique ? 832
4.4 Conclusion du quatrième chapitre 842
Conclusion générale de la troisième partie 844

Conclusion **847**

1. Philosophie et pratique des mathématiques dans l'œuvre de Weyl 849
2. Moderne, ou contre-moderne ? 854
3. Liens et divergences avec Cavaillès et Lautman 857
   3.1. Weyl et Lautman 857
   3.2. Weyl et Cavaillès 864

Bibliographie **869**