



Université de Monastir
Faculté des Sciences de Monastir
Département de Mathématiques



Université de Bourgogne
Institut de Mathématiques
de Bourgogne UMR 5584

THÈSE

présentée par

Amel ZERGANE

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DES UNIVERSITÉS DE MONASTIR ET DE BOURGOGNE

Discipline : MATHÉMATIQUES

Séparation des représentations des groupes de Lie par des ensembles moments

17 décembre 2011

Jury :

Leila BEN ABDELGHANI	Professeur, Université de Monastir	
Didier ARNAL	Professeur émérite, Université de Bourgogne	Directeur
Ali BAKLOUTI	Professeur, Université de Sfax	Rapporteur
Jean LUDWIG	Professeur, Université P. Verlaine (Metz)	Rapporteur
Dominique MANCHON	C.R. CNRS, Université B. Pascal (Clermont1)	
Mohamed SELMI	Professeur, Université de Sousse	Directeur

Remerciements

Ce travail de recherche est le résultat d'une convention de cotutelle entre la Faculté des Sciences de Monastir et l'Institut de Mathématiques de Bourgogne (Dijon).

Je tiens à remercier très vivement mes directeurs de thèse Didier Arnal et Mohamed Selmi pour leur suivi, leur soutien et leurs conseils judicieux tout au long de cette thèse. Leurs qualités scientifiques et leurs remarques précieuses ont largement contribué à l'aboutissement de ce travail. J'espère avoir été l'hauteur de leur confiance. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je suis ravie que Ali Baklouti et Jean Ludwig se soient intéressés à mon travail et aient accepté de rapporter dessus. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma reconnaissance.

J'adresse mes vifs remerciements à Leila Ben Abdelghani pour sa gentillesse, ses encouragements et avoir bien voulu me faire l'honneur de faire partie de Jury.

Un grand merci va également à Dominique Manchon pour sa gentillesse, et avoir bien voulu faire partie de Jury.

Je remercie chaleureusement les membres de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne pour m'avoir toujours très bien accueillie et pour leurs encouragements constants. J'associe à ces remerciements l'ensemble de mes collègues à la Faculté des Sciences de Monastir pour leur soutien et leur bonne humeur qui ont assuré le bon déroulement de ce travail.

Je souhaite exprimer ma sincère reconnaissance et mon profond respect à tous les professeurs qui m'ont fournis l'assistance nécessaire durant toutes ces années.

Je suis particulièrement reconnaissante à toutes les personnes avec lesquelles j'ai eu des discussions profitables, qui ont su me faire bénéficier de leurs connaissances et compétences et qui m'ont marquée par leur disponibilité et leur gentillesse.

Je souhaite exprimer mes vifs remerciements à mes parents, à mes frères et ma sœur pour leur soutien constant et leur patience et surtout ma mère qui m'a donné beaucoup de sa vie et de son temps et de ses sentiments chaleureuses. Les mots résonnent bien faiblement en comparaison de la reconnaissance que leur porte. Toute ma gratitude pour avoir enduré mon stress, mes doutes, mes craintes, mes hauts et mes bas avec amour et générosité.

Je remercie chaleureusement mon marie et mon petit fils qui m'ont encouragé avec l'amour, le soutien et la patience durant toutes ces années.

Je réserve un remerciement amical à Françoise pour avoir marqué mes séjours en France par sa gentillesse et sa sympathie avec son marie Didier Arnal. Je les remercie infiniment pour leur soutien et leur présence qui m'ont été d'un immense réconfort.

Mes remerciements vont également à mon oncle pour son soutien durant mes stages en France et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de cette thèse.

" La pensée a des ailes, nul ne peut empêcher son envol"

Ibn Rochd (Averroès)

Table des matières

Introduction	3
0 Préliminaires	11
0.1 Représentations d'un groupe de Lie	11
0.2 Variété symplectique	13
0.3 Action hamiltonienne	15
0.4 Le cas résoluble	16
0.5 Le cas semi simple	19
0.6 Calcul dans les Fréchet	22
1 Surgroupes quadratiques	25
1.1 Une propriété de stricte convexité	25
1.2 Groupes spéciaux	27
1.3 Groupes nilpotents	30
1.3.1 Algèbres de Lie spéciales	30
1.3.2 Invariants quadratiques	32
1.3.3 L'Algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{6,20}$	34
1.3.4 Les algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 6	40
1.4 Groupes résolubles	41
1.4.1 Les groupes de Lie exponentiels	41
1.4.2 Les groupes de Lie résolubles non exponentiels	43
1.4.3 Le groupe de Mautner	46
1.5 Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$	47
1.5.1 Orbites coadjointes et représentations associées	47
1.5.2 Définition de G^+ et séparation des orbites	50
1.5.3 Définition de G^{++} et séparation des représentations	51
1.5.4 Le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$	53
1.6 Le groupe $SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4$	55

2	Surgroupes de $SL(n, \mathbb{R})$	61
2.1	Orbites génériques	61
2.1.1	Fonctions invariantes et éléments génériques de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$	61
2.1.2	Orbites adjointes dans Ω	64
2.2	Suralgèbres de degré n	67
2.2.1	Enveloppe convexe des orbites dans Ω	67
2.3	Suralgèbre de degré p	73
2.4	Le cas $G = SL(n, \mathbb{R})$ et $p = 2$	75
2.4.1	Le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	75
2.4.2	Le cas $p = 2$	77
2.4.3	Non existence de suralgèbre presque séparante de degré 2 pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$	80
2.5	Le cas $n = 4$ et $p = 3$	83
2.5.1	Décomposition de $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$	83
2.5.2	Les formes trace et opérateurs d'entrelacement pour $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$	85
2.5.3	$\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré 3	86
3	Surgroupe universel	91
3.1	Dimension finie	91
3.1.1	Généralités	91
3.1.2	Application moment pour une action linéaire	93
3.1.3	Application moment associée à l'action projective	96
3.2	Calcul dans les Fréchets	98
3.3	Moment d'une action linéaire de dimension infinie	101
3.3.1	Préliminaires	101
3.3.2	Formes symplectiques	102
3.3.3	Application moment associée à l'action projective	104
3.3.4	Le groupe de Lie Fréchet $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$	107
3.3.5	Action hamiltonienne sur $V_{\mathbb{R}}$ et ensemble moment	110
3.3.6	Surgroupe universel de Fréchet	113
	Bibliographie	114

Introduction

La méthode des orbites est un moyen de construire des représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie G à partir d'une orbite coadjointe de G . Cela correspond à un problème de quantification d'une variété symplectique munie d'un groupe de symétrie qui agit transitivement.

Réciproquement, partant d'une représentation unitaire irréductible π d'un groupe de Lie G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on peut construire une application moment équivariante qui associe, à chaque vecteur C^∞ ξ non nul de $\mathcal{H}$, une forme $\psi(\xi)$ du dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G . L'image de l'application ψ est en général l'enveloppe convexe fermée de l'orbite coadjointe associée à la représentation π . Cette opération consiste donc à déquantifier l'espace $\mathcal{H}$.

Une question naturelle se pose : Deux représentations unitaires irréductibles inéquivalentes donnent-elles lieu à deux ensembles moments différents ?

Malheureusement, la réponse est négative : plusieurs orbites coadjointes peuvent avoir la même enveloppe convexe [Wil], la déquantification ci-dessus n'aboutit donc pas à une application réciproque de la méthode des orbites.

Notre but ici consiste à remplacer G par un groupe G^+ plus grand et à étendre les représentations unitaires irréductibles génériques π de G en des représentations unitaires irréductibles π^+ de G^+ , de façon qu'en séparant les orbites coadjointes de G^+ par leurs enveloppes convexes, on puisse séparer les orbites coadjointes de G .

Soient G un groupe de Lie réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de G et $\mathcal{H}^\infty$ le sous espace des vecteurs de classe C^∞ de $\mathcal{H}$. Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. Dans [Wi] en 1992, Wildberger a introduit l'application moment ψ_π d'une représentation unitaire π de dimension finie de G . Il s'agit de l'application moment naturelle de l'action fortement hamiltonienne de G sur la variété symplectique (et banachique) $\mathbb{P}\mathcal{H}$ de l'espace $\mathcal{H}$ de la représentation π . Il étend alors cette notion au cas où $\dim \mathcal{H}$ est infinie en posant :

Définition A :

- L'application moment est définie de $\mathbb{P}\mathcal{H}^\infty$ dans $\mathfrak{g}^*$, pour tout $\xi \in \mathcal{H}^\infty \setminus \{0\}$, par :

$$\psi_\pi([\xi])(X) = \frac{1}{i} \frac{(d\pi(X)\xi|\xi)}{(\xi|\xi)}, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

où $(|)$ désigne le produit scalaire sur $\mathcal{H}$. On notera simplement $\psi_\pi(\xi)$ l'élément $\psi_\pi([\xi])$ de $\mathfrak{g}^*$.

- L'ensemble moment I_π de la représentation π est l'adhérence dans $\mathfrak{g}^*$ de l'image de l'application moment :

$$I_\pi = \overline{\psi_\pi(\mathbb{P}\mathcal{H}^\infty)}.$$

Dans [Wil] et [Wild], Wildberger a alors donné une description explicite de l'ensemble moment I_π dans le cadre des groupes de Lie compacts puis celui des groupes de Lie nilpotents connexes et simplement connexes. Plus précisément, il a démontré qu'alors I_π est la fermeture de l'enveloppe convexe de l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\pi$ associée à π par la théorie de Kirillov c'est-à-dire

$$I_\pi = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_\pi).$$

Rappelons que le dual unitaire $\widehat{G}$ d'un groupe de Lie G nilpotent, connexe et simplement connexe est en bijection avec l'ensemble $\mathfrak{g}^*/G$ des orbites coadjointes de G .

Plus tard, ce résultat a été généralisé par D. Arnal et J. Ludwig [A-L] pour les groupes de Lie résolubles connexes et ils ont montré que ce résultat est vrai pour la plupart des représentations $\pi \in \widehat{G}$, quel que soit G .

Notons de même que les mêmes auteurs montrent que si π est une représentation unitaire quelconque d'un groupe de Lie résoluble, l'ensemble moment I_π est toujours une partie convexe de $\mathfrak{g}^*$.

Par ailleurs, M. Selmi donne dans [S] un critère de la non convexité de l'ensemble moment d'une représentation de la série discrète holomorphe.

Dans le but de caractériser les représentations unitaires irréductibles de G nilpotent, les auteurs, dans [Ba-L-S], définissent une extension de l'application moment :

Définition B :

On appelle application moment généralisée l'application $\widetilde{\psi}_\pi$ définie de $\mathcal{H}^\infty \setminus \{0\}$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^*$ par :

$$\widetilde{\psi}_\pi(\xi)(u) = \Re \left(\frac{1}{i} \frac{(d\pi(u)\xi|\xi)}{(\xi|\xi)} \right), \quad \forall u \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}), \xi \in \mathcal{H}^\infty \setminus \{0\}.$$

où $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

L'ensemble moment généralisé est $\widetilde{\psi}_\pi(\mathcal{H}^\infty \setminus \{0\})$ qui est une partie faiblement fermée du dual $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})^*$ de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$.

Remarquons que cette extension fait perdre à l'application moment ψ_π son interprétation géométrique initiale qui vient d'une action fortement hamiltonienne de G sur une variété symplectique de dimension infinie comme nous le verrons dans le troisième chapitre de cette thèse.

Supposons G nilpotent, connexe et simplement connexe.

Notons $\sigma : S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{g})$ la bijection :

$$\sigma(X_1 \dots X_k) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} X_{\tau(1)} \dots X_{\tau(k)} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{g}),$$

elle permet de définir la filtration usuelle de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{A}_n(\mathfrak{g}) = \sum_{k \leq n} \sigma(S^k(\mathfrak{g}))$.

Enfin, si $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_m = \mathfrak{g}$ est une suite de Jordan Hölder de $\mathfrak{g}$, on sait que cette suite définit un ouvert de Zariski $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$, invariant, union d'orbites de dimension maximale (voir [Puk].)

Nous dirons que les orbites de Ω sont les orbites génériques de $\mathfrak{g}^*$ et que les représentations associées sont les représentations génériques de G .

Les auteurs dans [Ba-L-S] démontrent alors le théorème suivant :

Théorème A : *Pour chaque groupe de Lie nilpotent, il existe un entier n tel que $\widetilde{\psi}_{\pi|_{\mathfrak{A}_n(\mathfrak{g})}}$ caractérise π .*

En se restreignant aux représentations π génériques, leur méthode donne explicitement $n = \text{Max} \{\text{degré}(P_k)\}$ où P_k est un système de générateurs polynomiaux des fonctions rationnelles invariantes.

En outre, la méthode des orbites décrit aussi très bien le dual unitaire $\widehat{G}$ d'un groupe de Lie G exponentiel : on a, ici aussi, $\widehat{G} \approx \mathfrak{g}^*/G$. On a une notion semblable d'orbites génériques dans ce cas là, mais les fonctions invariantes qui les caractérisent peuvent être transcendentes.

Le théorème A a été généralisé en 2000 au cas exponentiel par [A-Ba-L-S] en :

Théorème B : *Si G est un groupe de Lie exponentiel, alors $\widetilde{\psi}_{\pi|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{g})}}$ caractérise la représentation π ou, ce qui revient au même, l'orbite $\mathcal{O}$.*

Finalement, en utilisant la notion de vecteurs analytiques d'une représentation unitaire irréductible π d'un groupe de Lie quelconque, les auteurs de [A-A-L-S] étendent le théorème 2 à tous les groupes :

Théorème C : *Si G est un groupe de Lie quelconque alors $\widetilde{\psi}_{\pi|\mathfrak{A}(\mathfrak{g})}$ caractérise π .*

Revenant sur le théorème A, on cherche une extension d'une autre nature, plus géométrique, de ψ_π . Par exemple, si G est nilpotent connexe et simplement connexe, si n est l'entier de l'énoncé du théorème A et $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathfrak{A}(\mathfrak{g})$, on peut prendre le groupe G^+ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \ltimes (\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{A}_n(\mathfrak{g}))$. On voit que $\widetilde{\psi}_{\pi|\mathfrak{g} \oplus (\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{A}_n(\mathfrak{g}))}$ est l'application moment ψ_π^+ d'une représentation π^+ de G^+ , extension naturelle de π . Les ensembles moments I_{π^+} de ces extensions séparent les représentations génériques π de G .

Le but ici est de montrer que l'on peut séparer les représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie G en restant dans le cadre de l'application moment géométrique usuelle.

En 2007, dans [A-S], les auteurs supposent G exponentiel et définissent :

Définition C :

On appelle surgroupe séparant d'un groupe de Lie exponentiel G la donnée de :

- *un G -module V de dimension finie qui définit le surgroupe de Lie $G^+ = G \ltimes V$,*
- *une application non linéaire φ de $\mathfrak{g}^*$ dans $(\mathfrak{g}^+)^*$, telle que $G^+.\varphi(\xi) = \varphi(G.\xi)$ et φ sépare les représentations de G au sens suivant.*

Notons π^+ la représentation associée à $\varphi(\mathcal{O})$, si $\mathcal{O}$ est l'orbite de π . On impose que :

$$I_{\pi_1^+} = I_{\pi_2^+} \quad \text{si et seulement si} \quad \pi_1 \simeq \pi_2$$

ou, ce qui revient au même

$$\overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_1) = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_2) \quad \text{implique} \quad \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2.$$

On notera (G^+, φ) ce surgroupe séparant.

Les auteurs montrent qu'un tel surgroupe séparant existe toujours, mais avec une fonction φ très irrégulière.

Dans le premier chapitre de cette thèse, on va généraliser la définition C à un groupe de Lie quelconque.

Même si la méthode des orbites s'applique pour les représentations génériques de G , elle associe en général plusieurs représentations unitaires irréductibles à une orbite $\mathcal{O}$ donnée. Dans ce chapitre, on cherche d'abord à séparer les orbites génériques de $\mathfrak{g}^*$ au moyen d'un surgroupe (G^+, φ) , mais avec φ polynomiale de degré au plus 2. On dira alors que G^+ est un surgroupe quadratique de G . On cherche donc les conditions suffisantes pour l'existence d'un tel surgroupe.

Dans un second temps, on sépare les représentations unitaires irréductibles de G grâce à une extension G^{++} de G^+ et en définissant, à partir de φ , une application injective $\Phi : \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}^{++}$.

Par exemple, si G est nilpotent et si l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ est engendrée par les fonctions de degré au plus 2, une telle application quadratique φ peut être définie à valeurs dans le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \ltimes (\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{A}_2(\mathfrak{g}))$.

Donc l'existence d'un tel surgroupe quadratique semble être une limitation très forte sur la structure du groupe G . Dans le chapitre 1, on montre que les surgroupes quadratiques existent pour un grand nombre de groupes. Plus précisément, on commence par la preuve d'un lemme de stricte convexité : une application quadratique permet essentiellement de retrouver un sous ensemble fermé A de $\mathbb{R}^n$, à partir de l'enveloppe convexe de $\varphi(A)$ où φ est une application quadratique.

Si G est un groupe de Lie exponentiel spécial (l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G contient un idéal abélien $\mathfrak{a}$ de codimension la moitié de la dimension des orbites coadjointes génériques dans $\mathfrak{g}^*$), on utilise ce lemme pour l'ensemble moment d'une représentation irréductible générique π de G et pour le dual d'une algèbre de Lie d'un surgroupe G^+ construit à partir de $\mathfrak{a}$. Ceci prouve l'existence d'un surgroupe quadratique G^+ et une application Φ séparant les représentations génériques de G pour les groupes spéciaux.

Grâce à ces deux propriétés, on montre alors que tous les groupes de Lie nilpotents G connexes et simplement connexes de dimension inférieure ou égale à 6 à l'exception d'un seul groupe dont l'algèbre de Lie est notée $\mathfrak{g}_{6,20}$ admettent un surgroupe quadratique G^+ et une application séparante Φ . Pour $\mathfrak{g}_{6,20}$, on construit un surgroupe quadratique faiblement séparant (G^+, φ) , c'est à dire tel que

$$\text{Conv}(\varphi(\mathcal{O}_1)) = \text{Conv}(\varphi(\mathcal{O}_2)) \Rightarrow \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2.$$

On étudie ensuite les groupes de Lie résolubles de petite dimension $\dim G \leq 4$:

- Si G est exponentiel alors on sépare les orbites et donc les représentations.

- Parmi les G non exponentiels, il y a deux groupes de Lie tels que leurs stabilisateurs génériques ne sont pas connexes, on généralise alors la définition C et on sépare les représentations par une application Φ .
- Parmi les groupes de dimension 5, on a l'exemple du groupe de Mautner qui n'admet pas de surgroupe quadratique. On sait d'ailleurs que la méthode des orbites ne s'applique pas directement à ce groupe.

Ainsi, si G est un groupe de Lie résoluble de dimension inférieure ou égale à 4, alors G admet un surgroupe quadratique et une application séparante Φ .

Ensuite, on étudie le cas de $SL(2, \mathbb{R})$ et de son revêtement universel pour lesquels le même raisonnement s'applique et on peut séparer ses représentations génériques avec un surgroupe quadratique (G^+, φ) et une application Φ . On termine le premier chapitre par un exemple d'un groupe ni résoluble ni semi simple, le produit semi direct $G = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4$ qui n'est pas spécial et dont l'un des invariants est de degré 4. On construit cependant explicitement pour ce groupe un surgroupe quadratique et une application séparante Φ .

Dans le deuxième chapitre, on étudie le cas des groupes de Lie semi simples déployés, pour lesquels l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes est une algèbre $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_l]$ très bien décrite, en particulier on connaît le degré maximal n des fonctions T_k .

On montre ici que, contrairement au cas nilpotent, on ne peut probablement pas trouver de surgroupe (G^+, φ) séparant les orbites génériques avec φ polynomiale de degré $p < n$. Plus précisément, on considère le cas $G = SL(n, \mathbb{R})$, pour lequel le degré maximal des fonctions T_k est n et on étudie la séparation de ses orbites :

1. On décrit l'ensemble Ω des ξ génériques de $\mathfrak{g}^*$. Les fonctions polynomiales invariantes $x \mapsto Tr(x^k)$, $k = 2, \dots, n$ séparent presque les orbites $\mathcal{O}$ de Ω . D'autre part :

$$\overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}) = \mathfrak{g}^*, \quad \forall \mathcal{O} \subset \Omega.$$

On en déduit que $SL(n, \mathbb{R})$ admet un surgroupe de degré n séparant presque les orbites génériques.

2. Si $(G^+ = G \ltimes V, \varphi)$ est un surgroupe quadratique séparant les orbites de Ω , alors il existe un surgroupe quadratique de la forme $(G \ltimes (\mathfrak{g} + S^2(\mathfrak{g})), \phi)$ séparant presque les orbites génériques. Par l'étude du G -module $S^2(\mathfrak{g})$, on montre que ceci est impossible si $n > 2$.
3. Si $n = 4$, on montre de même que $SL(4, \mathbb{R})$ n'admet pas de surgroupe cubique (G^+, φ) séparant presque les orbites génériques (φ de degré 3.)

Dans le dernier chapitre, on revient à une étude géométrique et explicite du problème : on utilise la notion de variété de Fréchet pour interpréter ψ_π comme une vraie application

moment et au lieu des représentations d'un surgroupe, on utilise des actions hamiltoniennes naturelles de ce surgroupe. On montre ici :

1. pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ d'un groupe de Lie G , $\mathbb{P}\mathcal{H}^\infty$ est une variété de Fréchet 'symplectique' naturelle et π définit une action fortement hamiltonienne sur $\mathbb{P}\mathcal{H}^\infty$, d'application moment C^∞ ψ_π , donc l'ensemble moment I_π a une définition géométrique claire.
2. pour toute représentation $(\pi, \mathcal{H})$, $\mathcal{H}_\mathbb{R}^\infty$ est une variété de Fréchet symplectique, $G \ltimes \mathcal{H}_\mathbb{R}^\infty$ est un groupe de Lie Fréchet qui agit naturellement de façon hamiltonienne sur $\mathcal{H}_\mathbb{R}^\infty$. Notons λ cette action. L'ensemble moment I_λ correspondant se projette dans $\mathfrak{g}^*$ en $q(I_\lambda)$. On a $q(I_\lambda) = \mathcal{C}(I_\pi)$ où $\mathcal{C}(I_\pi)$ est le cône s'appuyant sur I_π .
3. En prenant $\mathcal{H} = \oplus_{\pi \in \widehat{G}} \mathcal{H}_\pi$, on peut étendre chaque représentation $\pi \in \widehat{G}$ de G en une action $\tilde{\pi}$ hamiltonienne de $\tilde{G} = G \ltimes \mathcal{H}_\mathbb{R}^\infty$ sur $(\mathcal{H}_\pi^\infty)_\mathbb{R}$.

En posant $\Phi(\pi) = \tilde{\pi}$, on montre que $(\tilde{G}, \Phi)$ est un surgroupe séparant universel, c'est-à-dire :

$$I_{\tilde{\pi}_1} = I_{\tilde{\pi}_2} \quad \text{si et seulement si} \quad \pi_1 \approx \pi_2.$$

Chapitre 0

Préliminaires et généralités

0.1 Représentations d'un groupe de Lie

Définition 0.1.1

Soient G un groupe de Lie et V un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie ou infinie. On appelle représentation de G dans V un homomorphisme de groupes π , continu de G dans $GL(V)$ pour la topologie de la convergence simple. On notera la représentation par (π, V) . La dimension de V s'appelle dimension de π .

On dit qu'un sous espace W de V est stable par π ou un sous espace invariant si $\pi(g)W \subset W$, $\forall g \in G$.

Dans la suite on ne considère que les deux cas suivants :

1. $\dim V$ est finie, on dira aussi que V est un G -module.
2. V est un espace de Hilbert de dimension finie ou infinie et π est unitaire : $\pi(g)$ est un opérateur unitaire pour tout $g \in G$.

Définition 0.1.2

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe. On dit qu'une représentation $(\pi, \mathcal{H})$ de G est unitaire si elle vérifie :

$$\pi(g)^* = \pi(g)^{-1} \quad \forall g \in G \quad \Leftrightarrow (\pi(g)v | \pi(g)v) = (v | v), \quad \forall g \in G, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Pour une représentation unitaire, si U est un sous espace fermé invariant alors son orthogonal $U^\perp$ est aussi fermé et invariant.

Définition 0.1.3

1. Soit (π, V) une représentation réelle ou complexe de dimension finie ou infinie de G . Alors (π, V) est dite irréductible si les seuls sous espaces fermés invariants sont V et $\{0\}$.
2. Soient (π_1, V_1) et (π_2, V_2) deux représentations de dimension finie (resp. unitaires) de G . Une application linéaire $T : V_1 \longrightarrow V_2$ est dite un opérateur d'entrelacement si :

$$T(\pi_1(g)v) = \pi_2(g)T(v), \quad \forall g \in G, v \in V_1.$$

Si π_1 et π_2 sont unitaires, on ne considère que des entrelacements T préservant les produits scalaires :

$$(T(v_1)|T(v_2)) = (v_1|v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V_1.$$

3. Si de plus l'opérateur d'entrelacement $T : V_1 \longrightarrow V_2$ est bijectif (resp. unitaire) alors les deux représentations (π_1, V_1) et (π_2, V_2) sont dites équivalentes. C'est là une relation d'équivalence, d'où la notion de classe d'équivalence de représentations.

Notation :

Les classes d'équivalences des représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie G forment un ensemble appelé le dual unitaire de G et noté $\widehat{G}$. On se permettra parfois d'écrire $\pi \in \widehat{G}$ pour désigner un représentant d'une classe $[\pi]$ de $\widehat{G}$.

Définition 0.1.4

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire d'un groupe de Lie G . Un vecteur v de $\mathcal{H}$ est dit un vecteur C^∞ si l'application

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \mathcal{H} \\ g &\mapsto \pi(g)v \end{aligned}$$

est C^∞ . L'ensemble des vecteurs C^∞ est un sous espace vectoriel invariant, noté $\mathcal{H}^\infty$, de $\mathcal{H}$. On notera que si $\mathcal{H}$ est de dimension finie, l'application $g \mapsto \pi(g)v$ est analytique quel que soit v .

Si $\mathcal{H}$ est de dimension infinie, l'ensemble $\mathcal{H}^\infty$ est dense dans $\mathcal{H}$, en dérivant l'application ci-dessus, on définit, pour tout $v \in \mathcal{H}^\infty$ les vecteurs

$$\pi'(X)v = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \pi(\exp tX)v, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad \pi'(X_1 \dots X_m)v = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \pi(\exp tX_1)(\pi'(X_2 \dots X_m)v).$$

On peut alors munir $\mathcal{H}^\infty$ d'une famille de semi-normes. L'espace $\mathcal{H}^\infty$ est alors un espace de Fréchet pour sa topologie naturelle définie par la famille de semi-normes, telle que, si $(X_1, \dots, X_k)$ est une base de $\mathfrak{g}$,

$$v \mapsto p_n(v) = \sup_{i_1, \dots, i_n} \|\pi'(X_{i_1}) \dots \pi'(X_{i_n})v\|.$$

Il est facile de voir que si T est un entrelacement unitaire entre deux représentations unitaires $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$ et $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$ de $\mathfrak{g}$, alors $T(\mathcal{H}_1^\infty) \subset \mathcal{H}_2^\infty$ et T est continu pour les topologies d'espaces de Fréchet sur $\mathcal{H}_1^\infty$ et $\mathcal{H}_2^\infty$.

0.2 Variété symplectique

Définition 0.2.1

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ . On dit que le couple (M, ω) est une variété symplectique si ω est une 2-forme différentielle sur M , qui vérifie :

- 1) ω est non dégénérée, c'est à dire, pour tout X de M , la forme bilinéaire $\omega(x)$ (définie sur $T_x M$) est non dégénérée
- 2) $d\omega \equiv 0$ c'est à dire ω est fermée.

Exemple :

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de dimension finie d'un groupe de Lie G . Alors si $(\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire sur $\mathcal{H}$, la 2 forme ω définie par :

$$\omega_v(w_1, w_2) = \Im(w_1 | w_2)$$

est une forme symplectique : l'espace sous-jacent $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ est un espace symplectique.

Notons $(\mathbb{P}\mathcal{H})_\mathbb{R}$ la variété réelle (de dimension $2 \dim \mathcal{H} - 2$) sous-jacente à l'espace projectif $\mathbb{P}\mathcal{H}$. Si $v \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, v définit une carte locale naturelle φ_v de $(\mathbb{P}\mathcal{H})_\mathbb{R}$, centrée en $[v]$:

$$\varphi_v([w]) = \|v\|^2 \frac{w}{(v|w)} - v \in (v)^\perp.$$

Avec ces cartes, on peut définir une forme ω sur $(\mathbb{P}\mathcal{H})_\mathbb{R}$, en posant :

$$\omega_{[v]}(W_1, W_2) = \frac{\Im(d\varphi_v(W_1) | d\varphi_v(W_2))}{(v|v)}.$$

On vérifie que ω est fermée et non dégénérée : $(\mathbb{P}\mathcal{H})_\mathbb{R}$ est une variété symplectique (cf. [Wild]).

Définition 0.2.2

Soit (M, ω) une variété symplectique. Alors pour tout $f \in C^\infty(M)$, il existe un unique champ de vecteurs $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ appelé champ de vecteurs hamiltonien associé à f vérifiant :

$$i(X_f)\omega = -df.$$

On définit alors le crochet de Poisson sur $C^\infty(M)$ par :

$$\forall f, g \in C^\infty(M), \quad \{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = i(X_f)\omega(X_g).$$

On a noté i le produit intérieur, si α est une p -forme, $i(v)\alpha$ est la $(p-1)$ -forme :

$$i(v)\alpha(u_1, \dots, u_{p-1}) = \alpha(v, u_1, \dots, u_{p-1}),$$

pour tout champ de vecteurs v sur M . L'ensemble des champs de vecteurs hamiltoniens est noté $\mathcal{H}(M)$.

Exemple :

Soit $M = \mathbb{R}^{2n}$, avec des coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. La forme $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ est symplectique, alors pour tout $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$X_f = \sum_i -\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{et} \quad \{f, g\} = \sum_i -\frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i}.$$

Un champ de vecteur hamiltonien préserve la forme ω : $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0$. En effet :

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = (i_{X_f} \circ d + d \circ i_{X_f})\omega = -d(df) = 0.$$

Cependant il existe des champs de vecteurs X qui préservent ω mais qui ne sont pas hamiltoniens. Par exemple, prenons $M = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$, si on note $([x], y)$ un point de M , la forme dx est une 1-forme fermée bien définie sur M . On munit M de la forme symplectique $\omega = dx \wedge dy$. Le champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial y}$ vérifie $i(X)\omega = -dx$, il préserve donc ω mais il n'est pas hamiltonien. Sur le tore, il n'existe pas de fonction f telle que $df = dx$.

0.3 Action hamiltonienne

Définition 0.3.1

1. Une action (à gauche) d'un groupe de Lie G sur une variété différentiable M est la donnée d'une application de classe C^∞ , $\lambda : G \times M \longrightarrow M$ qui à (g, x) associe $\lambda(g, x) = \lambda_g(x) = g.x$ vérifiant :
 - 1) $\lambda(g_1, \lambda(g_2, x)) = \lambda(g_1 g_2, x)$
 - 2) $\lambda(e, x) = x$, avec e est l'élément neutre de G .
2. On appelle orbite de x de l'action de G sur M , le sous ensemble :

$$\mathcal{O}_x = \{\lambda(g, x) \mid g \in G\} = G.x.$$

3. On appelle stabilisateur de G en x , le sous groupe fermé de G défini par :

$$G(x) = \{g \in G \mid \lambda(g, x) = x\}.$$

Définition 0.3.2

Soit G un groupe de Lie ayant une action à gauche λ sur une variété M et $X \in \mathfrak{g}$.
On appelle champ de vecteurs fondamental associé à X le champ de vecteurs

$$X_M(x) = \frac{d}{dt} \lambda(\exp - tX, x)|_{t=0}.$$

L'application $X \mapsto X_M$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie, pour tout X et Y de $\mathfrak{g}$,

$$([X, Y])_M = [X_M, Y_M].$$

Définition 0.3.3

Soit G un groupe de Lie ayant une action à gauche sur une variété symplectique (M, ω) .

1. On dit que l'action est symplectique si, pour tout g de G :

$$\lambda_g^* \omega = \omega \quad \text{On dit aussi que } \lambda_g \text{ est un symplectomorphisme de } M.$$

2. On dit que l'action est hamiltonienne si, pour tout X de $\mathfrak{g}$,
 - i) λ est symplectique (ceci implique que X_M préserve ω .)
 - ii) $X_M \in \mathcal{H}(M)$ c'est à dire pour chaque X de $\mathfrak{g}$, il existe une fonction C^∞ sur M , f , telle que $X_M = X_f$.

Proposition 0.3.1 Soit λ une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur (M, ω) , alors :

1. Il existe une application linéaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui à X associe J_X tel que pour tout $X \in \mathfrak{g}$, X_M est le champ hamiltonien associé à J_X c'est à dire $X_M = X_{J_X}$.
2. Il existe une application $\psi : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ définie par $\psi(x)X = J_X(x)$.

L'application ψ est appelée l'application moment associée à λ .

L'application ψ n'est pas unique, mais si x_0 est un point de M , il y a une seule application moment ψ telle que $\psi(x_0) = 0$.

Définition 0.3.4

On dit que l'action λ est fortement hamiltonienne si elle est hamiltonienne et si pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\{J_X, J_Y\} = J_{[X, Y]}.$$

Exemple :

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire de dimension finie d'un groupe de Lie G , G agit naturellement sur les variétés symplectiques $(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \omega)$ et $(\mathbb{P}\mathcal{H}_{\mathbb{R}}, \omega)$ par :

$$\lambda(g)v = \pi(g)(v), \quad v \in \mathcal{H}, g \in G \quad (\text{resp.} \quad \lambda(g)[v] = [\pi(g)(v)], \quad v \in \mathcal{H} \setminus \{0\}, g \in G)$$

Un calcul direct montre que la première action est hamiltonienne, puisque la fonction $J_X(v) = \frac{1}{2} \Im(\pi'(X)v|v)$ est une fonction hamiltonienne pour le champ $X_{\mathcal{H}_{\mathbb{R}}}$, cette action est fortement hamiltonienne, l'application moment ψ s'annule en $v = 0$.

De même l'action sur $\mathbb{P}\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ est fortement hamiltonienne, d'application moment (voir [Wild]) :

$$\psi([v])(X) = \frac{1}{2} \frac{\Im(\pi'(X)v|v)}{(v|v)}.$$

0.4 Le cas des groupes de Lie résolubles

Définition 0.4.1

1. Une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ est dite nilpotente si sa suite centrale descendante, définie par :

$$\mathcal{C}^1 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{C}^2 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \dots, \quad \mathcal{C}^{i+1} \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^i \mathfrak{g}]$$

vérifie $\mathcal{C}^p \mathfrak{g} = \{0\}$, pour un certain entier p .

2. Une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ est dite résoluble si sa suite dérivée

$$\mathcal{D}^0 \mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad \mathcal{D}^1 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \dots, \quad \mathcal{D}^{i+1} \mathfrak{g} = [\mathcal{D}^i \mathfrak{g}, \mathcal{D}^i \mathfrak{g}]$$

vérifie $\mathcal{D}^p \mathfrak{g} = \{0\}$, pour un certain entier p .

Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g}_0 = 0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ tels que $\dim \mathfrak{g}_k = k$ pour tout k , de plus on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k] \subset \mathfrak{g}_{k-1}$. On dit que $(\mathfrak{g}_k)$ est une suite de Jordan Hölder pour $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, sa complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{s}$ admet aussi une suite de Jordan Hölder $\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{s}_n = \mathfrak{s}$. Mais cette suite n'est en général pas réelle et pour tout k , il existe une racine $f_k \in \mathfrak{s}^*$ telle que si X_k appartient à $\mathfrak{s}_k \setminus \mathfrak{s}_{k-1}$, alors pour tout X de $\mathfrak{s}$, il existe U_{k-1} dans $\mathfrak{s}_{k-1}$ tel que :

$$[X, X_k] = f_k(X)X_k + U_{k-1}.$$

Définition 0.4.2

1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle, G son groupe de Lie connexe et simplement connexe et soit $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application exponentielle. Le groupe de Lie G est dit groupe de Lie exponentiel si l'application $\exp$ est un difféomorphisme global. Cette condition est équivalente à la suivante :

$\mathfrak{g}$ est résoluble et ses racines f_k sont presque réelles c'est à dire pour tout k , il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}$ et $g_k \in \mathfrak{g}^*$ tels que $f_k = (1 + i\alpha_k)g_k$.

2. Un groupe de Lie exponentiel G est dit spécial si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ contient un idéal abélien $\mathfrak{a}$ de codimension la moitié de la dimension des orbites coadjointes génériques dans $\mathfrak{g}^*$.

Il est bien connu que si G est exponentiel, chaque représentation unitaire irréductible π de G est associée à une orbite coadjointe $\mathcal{O}_\pi$ de $\mathfrak{g}^*$ par la construction suivante (voir [Ber]) : soit $\ell \in \mathfrak{g}^*$. On prend une polarisation en ℓ , c'est à dire une sous algèbre réelle $\mathfrak{h}$ telle que $\langle \ell, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle$ est de dimension maximale. Parmi ces polarisations, on peut en trouver une qui satisfait la condition de Pukanszky : $H.\ell = \ell + \mathfrak{h}^\perp$, avec $H = \exp(\mathfrak{h})$.

Pour une telle polarisation de Pukanszky, on définit $\pi_{\ell, \mathfrak{h}}$ par :

$$\pi_{\ell, \mathfrak{h}} = \text{Ind}_H^G \chi_\ell$$

où χ_ℓ est le caractère unitaire de H :

$$\chi_\ell(\exp X) = e^{i\ell(X)}, \quad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

On montre alors que $\pi_{\ell, \mathfrak{h}}$ est irréductible et sa classe $\pi \in \widehat{G}$ dépend uniquement de l'orbite coadjointe de ℓ . De plus $\ell \rightarrow [\pi_{\ell, \mathfrak{h}}]$ définit une bijection K , dite bijection de Kirillov, entre $\mathfrak{g}^*/G$ et $\widehat{G}$.

Si G est résoluble connexe et simplement connexe non exponentiel alors, si G est de type I c'est à dire les orbites coadjointes sont entières et ouvertes dans leurs adhérences, ses représentations unitaires irréductibles sont données par la théorie d'Auslander-Kostant (cf. [A-K]) qui est une généralisation de ce qui précède. En général, à une orbite, on associe plusieurs représentations inéquivalentes.

Le premier groupe de Lie résoluble qui n'est pas de type I est le groupe de Mautner de dimension 5 et pour lequel la méthode des orbites ne s'applique pas directement.

Supposons d'abord G nilpotent. On montre dans le premier chapitre que si G est spécial, alors il existe une application quadratique φ qui sépare les orbites génériques de $\mathfrak{g}^*$. De même, si l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ est engendrée par des fonctions de degré au plus 2, une telle application quadratique séparante existe. On donne ici un exemple d'une algèbre de Lie nilpotente de dimension 5 qui n'est pas spéciale mais telle que les invariants qui caractérisent ses orbites sont au plus quadratiques, en utilisant la méthode de M. Vergne ([Ver]) pour déterminer ces invariants.

Exemple :

Soit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4}$ de dimension 5, définie par les relations de commutations :

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$

On pose $\mathfrak{g}_{5-k} = \text{Vect}(X_{k+1}, \dots, X_5)$. Cela définit une suite de Jordan Hölder de $\mathfrak{g}$. L'idéal $\mathfrak{g}_3 = \text{Vect}(X_5, X_4, X_3)$ est abélien, mais $\mathfrak{g}_4$ n'est pas abélien puisque $[X_2, X_3] = X_5 \neq 0$ (on dit que les indices $3 = 6 - 3$ et $4 = 6 - 2$ sont des indices de saut de $\mathfrak{g}$.) On peut paramétrer l'union des orbites coadjointes génériques de $\mathfrak{g}_4$, ($\lambda_5 \neq 0$) en posant :

$$\ell = (x_5, \dots, x_2), \quad x_5 = \lambda_5, \quad x_4 = \lambda_4, \quad x_3 = \lambda_5 q, \quad x_2 = p.$$

Les fonctions λ_5 et λ_4 sont invariantes, caractérisées comme les coordonnées du point d'intersection de l'orbite de ℓ avec le plan $x_3 = x_4 = 0$. Les variables réelles p et q sont canoniques, elles vérifient $\langle \ell, [dp_\ell, dq_\ell] \rangle = 1$, elles paramètrent l'orbite de ℓ .

Les relations restantes apparaissent pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_5$. Elles ne font intervenir que X_1 et les X_{6-j} où j est un indice de saut. Ceci implique que la dimension des orbites coadjointes génériques de $\mathfrak{g}$ est toujours 2. Il n'y a pas d'autres indices de saut que 3 et 4. En particulier, si $\ell = (x_5, \dots, x_1)$ est un point de $\mathfrak{g}^*$ avec $x_5 \neq 0$, les fonctions p et q paramètrent l'orbite

de ℓ et x_1 s'écrit avec ce paramétrage :

$$x_1 = \lambda_1 + f(p, q), \text{ avec } f(0, 0) = 0.$$

Les relations de commutation deviennent des équations différentielles sur f , dont l'unique solution est :

$$x_1 = \lambda_1 + \frac{\lambda_4}{\lambda_5}p - \lambda_5 \frac{q^2}{2}.$$

Le corps des fonctions rationnelles invariantes sur $\mathfrak{g}^*$ est alors le corps des fonctions rationnelles en λ_1 , λ_4 et λ_5 . On a $\lambda_5 = x_5$, $\lambda_4 = x_4$ et $\lambda_1 = x_1 - \frac{x_4 x_2}{x_5} + \frac{x_3^2}{2x_5}$. On peut remplacer

λ_1 par $\mu = \lambda_1 \lambda_5 = x_1 x_5 - x_4 x_2 + \frac{1}{2} x_3^2$. Ainsi les fonctions polynomiales invariantes sont engendrées par des fonctions de degré ≤ 2 .

On voit alors qu'il reste une seule algèbre nilpotente qui n'est pas spéciale et telle qu'un de ses invariants génériques est de degré 3. On construit directement une application φ pour cette algèbre telle que pour deux orbites génériques $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$

$$\text{Conv}(\mathcal{O}_1) = \text{Conv}(\mathcal{O}_2) \quad \text{implique} \quad \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2.$$

Ces méthodes s'appliquent aussi dans le cas d'un groupe G résoluble de type I. Si G est connexe et simplement connexe, de type I exponentiel ou non exponentiel, de dimension inférieure ou égale à 4, on sépare les représentations unitaires irréductibles génériques de G en définissant une extension $\Phi : \widehat{G} \rightarrow \widehat{G}^{++}$ injective, à partir de φ .

0.5 Algèbre de Lie semi simple déployée

Définition 0.5.1 [D]

On appelle algèbre de Lie semi simple déployée un couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi simple et $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}$ c'est à dire que pour tout X dans $\mathfrak{h}$, $\text{ad}_{\mathfrak{g}} X$ est trigonalisable. Ces applications sont alors simultanément diagonalisables. Les éléments λ non nuls de $\mathfrak{h}^$ tels que le sous-espace propre correspondant $\mathfrak{g}^\lambda$ n'est pas nul s'appellent les racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.*

Dans le chapitre 2, on étudie l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. C'est une algèbre de Lie réelle semi simple déployée, pour la sous algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, donnée par l'ensemble des matrices diagonales $H = D(c_1, \dots, c_n)$. Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, on note $L_i(H) = c_i$, les L_i sont

des formes de $\mathfrak{h}^*$, vérifiant $L_1 + \dots + L_n = 0$. On choisie le système usuel de racines simples, c'est à dire les formes $\alpha_i = L_i - L_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$). Cela forme une base de $\mathfrak{h}^*$. Le système des racines positives est l'ensemble des formes $L_i - L_j$, avec $i < j$. Si $e_{ij} = (x_{rs})$ est la matrice $n \times n$ telle que $x_{rs} = \delta_{ri}\delta_{sj}$, alors pour tout H dans $\mathfrak{h}$,

$$\text{ad}(H)e_{ij} = \begin{cases} (\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1})(H) e_{ij}, & \text{si } i < j \\ -(\alpha_j + \dots + \alpha_{i-1})(H) e_{ij}, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Les modules réels de dimension finie sont semi simples : ce sont des sommes directes de modules irréductibles. Chaque module irréductible (π, V) est un module à poids, c'est à dire qu'on peut diagonaliser simultanément tous les $\pi(H)$. Les valeurs propres sont alors des formes sur $\mathfrak{h}$ qu'on appelle poids. Chaque module irréductible est caractérisé par son plus haut poids Λ : tous les poids λ de V sont tels que $\Lambda - \lambda$ est une somme à coefficients entiers naturels des racines simples.

Décrire les classes d'équivalence de modules simples réels, revient donc à décrire l'ensemble des plus haut poids. On appelle poids fondamental ω_i , ($1 \leq i \leq n-1$), la forme $\omega_i = L_1 + \dots + L_i$. L'ensemble des plus haut poids Λ est exactement l'ensemble des combinaisons $a_1\omega_1 + \dots + a_{n-1}\omega_{n-1}$, où les a_k sont des entiers naturels. On notera donc $\Gamma_{a_1 \dots a_{n-1}}$ le module irréductible correspondant (pour tout ceci, voir [F-H].)

Dans le cas de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, on sait réaliser explicitement ces modules irréductibles. En particulier, on peut indexer une base de $\Gamma_{a_1, \dots, a_{n-1}}$ par les tableaux de Young semi standards de forme $(a_1, \dots, a_{n-1})$.

Un tableau de forme $(a_1, \dots, a_{n-1})$ est un tableau ayant a_{n-1} colonnes formées de $(n-1)$ cases vides (colonnes de hauteur $n-1$), a_{n-2} colonnes de hauteur $n-2$ etc... a_1 colonnes de hauteur 1.

On remplit ensuite le tableau de forme $(a_1, \dots, a_{n-1})$ par des nombres entiers t_{ij} de façon semi standard, c'est à dire avec les conditions :

- t_{ij} est dans la case à la ligne i et la colonne j et $1 \leq t_{ij} \leq n$.
- $t_{ij} \leq t_{i(j+1)}$ si les cases (i, j) et $(i, j+1)$ existent.
- $t_{ij} < t_{(i+1)j}$ si les cases (i, j) et $(i+1, j)$ existent.

Le résultat est appelé un tableau de Young semi standard.

On montre que l'ensemble de ces tableaux de Young de forme $(a_1, \dots, a_{n-1})$ indexe une base naturelle du module $\Gamma_{a_1, \dots, a_{n-1}}$. On montre aussi, par exemple en dénombrant les tableaux ci-dessus, la formule de Weyl :

$$\dim(\Gamma_{a_1 \dots a_{n-1}}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i + \dots + a_{j-1}) + j - i}{j - i}.$$

Dans le chapitre 2, on est amené à étudier le module $S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$, c'est à dire l'espace des fonctions polynomiales homogènes de degré k sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$ sur lequel $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ agit par l'action adjointe ad définie par :

$$ad_X(X_{i_1} \cdot \dots \cdot X_{i_k}) = \sum_{r=1}^k X_{i_1} \cdot \dots \cdot [X, X_{i_r}] \cdot \dots \cdot X_{i_k}.$$

On a immédiatement $S^1(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = \Gamma_{10\dots 01}$, c'est un module simple. On déduit de ce qui précède la décomposition explicite de $S^2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$. Enfin on détermine la décomposition de $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$ en utilisant la méthode de Littelwood-Richardson pour déterminer la décomposition du produit tensoriel :

$$\Gamma_{a_1 a_2 a_3} \otimes \Gamma_{101} = \oplus_{b_1, b_2, b_3, b_4} N_{a_i, b_j} \Gamma_{b_1 b_2 b_3 b_4} = \oplus_{b_1, b_2, b_3, b_4} N_{a_i, b_j} \Gamma_{b_1 b_2 b_3}.$$

N_{a_i, b_j} est le nombre d'extensions strictes d'un tableau de forme (a_1, a_2, a_3) par un tableau de forme $(1, 0, 1)$ de façon à obtenir un tableau de forme (b_1, b_2, b_3, b_4) . Pour définir une extension stricte, on ajoute à droite des lignes du tableau de forme (a_1, a_2, a_3) successivement les cases du tableau :

1	1
2	
3	

lues de gauche à droite et de haut en bas de façon à obtenir à chaque étape la forme d'un tableau de Young et avec la condition suivante : pour chaque j , on lit les nombres des j premières cases du tableau ci-dessus, dans un nouveau tableau, de forme $(b_1^j, b_2^j, b_3^j, b_4^j)$, de droite à gauche et de haut en bas. Lorsqu'on arrive sur la case $\boxed{2}$, il faut avoir lu au moins une case $\boxed{1}$ avant, lorsqu'on arrive sur la case $\boxed{3}$, il faut avoir lu avant la case $\boxed{2}$ (et donc au moins une case $\boxed{1}$) avant. Enfin, on pose $(b_1, b_2, b_3) = (b_1^3, b_2^3, b_3^3)$, c'est à dire, si $b_4 > 0$, on identifie $\Gamma_{b_1 b_2 b_3 b_4}$ avec $\Gamma_{b_1 b_2 b_3}$.

Exemple :

La décomposition de $\Gamma_{101} \otimes \Gamma_{101}$ est

$$\Gamma_{101} \otimes \Gamma_{101} = \Gamma_{202} \oplus \Gamma_{210} \oplus \Gamma_{012} \oplus 2\Gamma_{101} \oplus \Gamma_{020} \oplus \Gamma_{000}.$$

Ce qui correspond aux extensions suivantes de

$\Gamma_{202} :$

		1	1
	2		
	3		

$\Gamma_{012} :$

		1
	1	2
	3	

$\Gamma_{020} :$

		1
	1	2
3		

$\Gamma_{000} :$

	1
	2
1	3

$\Gamma_{210} :$

		1	1
	2		
3			

$\Gamma_{101} :$

		1
	1	
	2	
3		

$\Gamma_{101} :$

		1
	2	
	3	
1		

0.6 Calcul différentiel dans les Fréchet

Définition 0.6.1 $[H]$

1. Soient V, W deux espaces de Fréchet. Soit $f : U \subset V \longrightarrow W$ une application continue. On dit que f est dérivable dans la direction de $h \in V$ s'il existe :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(u + th) - f(u)] := Df(u)(h) = \left\langle \frac{\delta f}{\delta u}, h \right\rangle.$$

2. f est C^1 sur U si elle est dérivable en tout point de U et dans toutes les directions, et si $(u, h) \mapsto Df(u)(h)$ est continu sur $U \times V$,
 f est C^2 si $\forall h_1, u \mapsto Df(u)(h_1)$ est continu, dérivable dans toute direction h_2 et $(u, h_1, h_2) \mapsto D^2 f(u)(h_1, h_2)$ est continu, etc. . .
3. Une variété de Fréchet est un espace topologique M séparé avec des cartes $\varphi_i : U_i \longrightarrow E$, où φ_i est un homéomorphisme de U_i sur un ouvert du Fréchet E , telles que pour tout i, j , $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un homéomorphisme C^∞ entre deux ouverts de E . On peut définir les espaces tangents, les fonctions C^∞ et les champs de vecteurs sur M , en les exprimant dans les cartes locales.
4. Un groupe de Lie-Fréchet G est une variété de Fréchet et un groupe tel que $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ et $g \mapsto g^{-1}$ sont C^∞ .
5. Si G est un groupe de Lie Fréchet, on peut définir son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, c'est l'espace tangent à l'origine et le crochet est celui des champs de vecteurs invariants à gauche.

L'exemple suivant montre que le théorème des fonctions implicites n'est plus vrai dans le cadre du calcul différentiel dans les Fréchet.

Exemple

Prenons $V = C_1^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions u réelles de la variable réelle qui sont C^∞ et 1-périodiques. Avec les semi-normes $p_n(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u^{(n)}(x)|$, V est un espace de Fréchet. Considérons l'application $F : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ définie par :

$$F(t, u)(x) = \int_0^1 u(x + ts) \, ds.$$

On vérifie que cette application est C^∞ . On a $F(0, u) = Id_V$ la dérivée de F en $(0, 0)$ dans les directions de $h \in V$ est $h \mapsto h$, elle est continument inversible. Si le théorème des fonctions implicites était vrai, il existerait une fonction locale $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow V$ telle que $F(t, u) = 0$ est équivalent à $u = \varphi(t)$.

Mais, si on fixe n et on pose $u_k(x) = \sin(2nk\pi x)$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $F(\frac{1}{n}, u_k) = 0$, pour tout k , donc il n'existe pas de φ locale.

Remarque 0.6.1 Une conséquence de ce qui précède est qu'il n'y a pas de lien naturel entre sous-algèbre et sous-groupe de Lie pour les groupes de Lie-Fréchet.

Cependant, dans le chapitre 3, on construira des groupes de Lie-Fréchet, produit semi-direct $G \ltimes V$ où G est un groupe de Lie et V l'espace des vecteurs C^∞ d'une représentation unitaire de G . G est un sous-groupe de Lie-Fréchet naturel de $G \ltimes V$.

Soit M une variété de Fréchet. Une fonction f , un champ de vecteur X une k -forme α sont C^∞ si leur expression dans les cartes locales sont C^∞ . Ainsi, si $(\pi, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire d'un groupe G , l'espace $V = \mathcal{H}_\mathbb{R}^\infty$ est un espace de Fréchet réel sur lequel G agit de façon C^∞ .

C'est aussi un espace symplectique pour la forme bilinéaire, continue, antisymétrique ω définie ci-dessus. ω est non dégénérée et il existe donc une application linéaire injective (bijiective si $\dim \mathcal{H}$ est finie), $\flat : V \rightarrow V^*$, telle que pour tout $v \in V$, on a : $\langle v^\flat, w \rangle = \omega(v, w)$, quel que soit $w \in V$.

On dit qu'une fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est hamiltonienne si elle est C^∞ et si $\frac{\delta f}{\delta u}$ est C^∞ de V dans $V^\flat$.

Notons $\#$ l'application $-\flat^{-1} : V^\flat \longrightarrow V$. Un champ de vecteurs W est hamiltonien s'il

existe f telle que $W = \left(\frac{\delta f}{\delta u}\right)^\#$.

Une fonction f peut être C^∞ mais pas hamiltonienne, en effet, on considère l'exemple suivant :

Exemple :

Soit $(\pi, \mathcal{H})$ la représentation usuelle du groupe de Heisenberg dans $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, alors l'espace des vecteurs C^∞ est l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$\omega(u, v) = \Im \int_{\mathbb{R}} \overline{u(t)} v(t) dt, \quad u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On pose $\phi(u) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) u(t) dt$ où $\varphi(t) = 0$ sur $] -\infty, 0[$ et 1 sur $[0, +\infty[$. ϕ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc c'est une fonction de classe C^∞ et pour tout u , $\frac{\delta \phi}{\delta u}(v) = \phi(v)$. Mais ϕ n'est pas une fonction hamiltonienne puisqu'il n'existe pas de $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que, pour tout v de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) v(t) dt = \frac{\delta \phi}{\delta u}(v) = \langle w^\natural, v \rangle = \omega(w, v) = \Im \int_{\mathbb{R}} \overline{w(t)} v(t) dt.$$

Enfin, dans le chapitre 3, on vérifiera que $M = (\mathbb{P}\mathcal{H}^\infty)_{\mathbb{R}}$ est une variété de Fréchet, que G agit de façon C^∞ sur M , on construira une 2-forme ω sur M , en la définissant dans les cartes, comme plus haut. On vérifiera que cette 2-forme est C^∞ , fermée et partout non dégénérée.

On pourra alors dire que M est une variété symplectique. Là encore, une fonction C^∞ n'est pas nécessairement hamiltonienne. Cependant on vérifiera que le moment :

$$J_X([v]) = \frac{\Im(\pi'(X)v|v)}{2(v|v)},$$

est une fonction hamiltonienne.

Chapitre 1

Séparation des représentations par des sousgroupes quadratiques

Résumé

Toute représentation unitaire irréductible π d'un groupe de Lie G définit un ensemble moment I_π , partie du dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G . Malheureusement, cet ensemble I_π ne caractérise pas la représentation π . Si G est exponentiel, il existe un sousgroupe G^+ de G , construit en utilisant les fonctions analytiques réelles sur $\mathfrak{g}^*$, et des extensions π^+ de toute représentation générique π à G^+ tel que I_{π^+} caractérise π . Dans ce chapitre, on prouve que, pour des classes variées de groupe G , G admet un sousgroupe quadratique séparant ses représentations : un tel sousgroupe est construit par l'utilisation des fonctions linéaires ou quadratiques uniquement.

1.1 Une propriété de stricte convexité

Le but de ce paragraphe est la preuve de :

Lemme 1.1.1 *Soit φ la fonction définie par :*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$$

et p la projection canonique $p : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, alors si $\overline{\text{Conv}}(B)$ désigne l'enveloppe convexe fermée de la partie B de $\mathbb{R}^{2n}$,

$$p(\overline{\text{Conv}}(\varphi(A)) \cap \varphi(\mathbb{R}^n)) = \bar{A}.$$

Preuve : Notons $\varphi(X) = (X, X^2)$. Soit $\varphi(X) \in \overline{\text{Conv}}(\varphi(A)) \cap \varphi(\mathbb{R}^n)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q, X^1, \dots, X^q \in A$ et $t_1, \dots, t_q > 0$ tels que $\sum_{j=1}^q t_j = 1$ et

$$\|(X, X^2) - \sum_{j=1}^q t_j (X^j, (X^j)^2)\|_{2n}^2 < \varepsilon^2.$$

où $\|\cdot\|_{2n}$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^{2n}$.

On a alors :

$$\sum_{k=1}^n |x_k - \sum_{j=1}^q t_j x_k^j|^2 + \sum_{k=1}^n |x_k^2 - \sum_{j=1}^q t_j (x_k^j)^2|^2 < \varepsilon^2. \quad (*)$$

Pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$, on considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^q$:

$$v_k = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} x_k^1 \\ \vdots \\ \sqrt{t_q} x_k^q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w_k = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} \\ \vdots \\ \sqrt{t_q} \end{pmatrix}$$

La borne inférieure de $\|v_k + s w_k\|_q^2$, ($s \in \mathbb{R}$) est atteinte au point

$$s_k = -\langle v_k, w_k \rangle = -\sum_{j=1}^q t_j x_k^j,$$

elle vaut

$$a_k = \inf_{s \in \mathbb{R}} \|v_k + s w_k\|_q^2 = \sum_{j=1}^q t_j (x_k^j)^2 - \left(\sum_{j=1}^q t_j x_k^j \right)^2. \quad (**)$$

On pose $Y = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. La relation (*) s'écrit :

$$\|X + Y\|_n^2 + \|X^2 - \sum_{j=1}^q t_j (X^j)^2\|_n^2 < \varepsilon^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k^2 - (\sum_{j=1}^q t_j x_k^j)^2| &= \sum_{k=1}^n |(x_k^2) - (s_k)^2| = \sum_{k=1}^n |x_k - s_k| |x_k + s_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \varepsilon (2|x_k| + \varepsilon) \leq \varepsilon^2 + 2\sqrt{n} \|X\|_n \varepsilon. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^q t_j (x_k^j)^2 - \left(\sum_{j=1}^q t_j x_k^j \right)^2 \right) \\ &\leq (\varepsilon^2 + 2\sqrt{n}\|X\|_n \varepsilon) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^q (t_j (x_k^j)^2 - x_k^2) \leq \varepsilon^2 + \sqrt{n}\varepsilon(2\|X\|_n + 1). \end{aligned}$$

Mais

$$a_k = \|v_k + s_k w_k\|_q^2 = \sum_{j=1}^q t_j (x_k^j + s_k)^2,$$

on a donc :

$$0 \leq \sum_{j=1}^q t_j \sum_{k=1}^n (x_k^j + s_k)^2 = \sum_{j=1}^q t_j \|X^j + Y\|_n^2 \leq \varepsilon^2 + \sqrt{n}\varepsilon(2\|X\|_n + 1).$$

Choisissons j_0 tel que $\|X^{j_0} + Y\|_n = \min_j \|X^j + Y\|_n$, on a :

$$\|X^{j_0} + Y\|_n^2 \leq \sum_{j=1}^q t_j \|X^j + Y\|_n^2 < \varepsilon(\varepsilon + \sqrt{n}(2\|X\|_n + 1)) = \varepsilon\varepsilon'.$$

Donc

$$\|X - X^{j_0}\|_n \leq 2\varepsilon' \quad \text{et} \quad X^{j_0} \in A.$$

D'où X appartient à $\bar{A}$. Ce qui prouve le lemme, puisque la réciproque est évidente (chaque X de $\bar{A}$ est la limite d'une suite (X^k) de points de A , $X^k = p(X^k, (X^k)^2)$, et $(X^k, (X^k)^2)$ appartient à $\text{Conv}(\varphi(A))$).

□

1.2 Les groupes de Lie exponentiels spéciaux

Définition 1.2.1 (Algèbre spéciale)

Une algèbre de Lie résoluble $\mathfrak{g}$ est dite spéciale si elle admet un idéal abélien $\mathfrak{a}$ dont la codimension est la moitié de la dimension des orbites coadjointes génériques.

Un groupe de Lie connexe G est dit spécial si son algèbre de Lie est spéciale.

Soit G un groupe de Lie résoluble spécial, alors l'idéal $\mathfrak{a}$ est unique et c'est une polarisation pour tous les points ℓ de $\mathfrak{g}^*$ tels que :

$$\frac{1}{2} \dim G.\ell = \text{codim } \mathfrak{a}.$$

En effet, ℓ définit un caractère de $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}(\ell)$ est un sous espace maximal totalement isotrope de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\ell)$. En fait, $\mathfrak{a}$ est une des polarisations construites par M.Vergne dans [Ber], à partir d'une base bien choisi.

Soit alors

$$\mathfrak{g}_{gen}^* = \{\ell, \quad 1/2 \dim G.\ell = \text{codim } \mathfrak{a}\},$$

c'est un ouvert de Zariski, G -invariant, non vide de $\mathfrak{g}^*$.

On note par $\widehat{G_{gen}}$ l'ensemble des représentations irréductibles de G associées aux orbites de $\mathfrak{g}_{gen}^*$.

Supposons maintenant que G est exponentiel et spécial. Donc, dans ce cas, G possède un surgroupe quadratique (cf. [A-S]).

Théorème 1.2.1 *Soit G un groupe de Lie exponentiel et spécial, $\mathfrak{a}$ l'idéal abélien de $\mathfrak{g}$ de codimension $\frac{1}{2} \max_{\ell \in \mathfrak{g}^*} (\dim G.\ell)$ et $\mathfrak{m}$ l'espace vectoriel $S^2(\mathfrak{a})$, vu comme un groupe additif.*

On définit :

- $G^+ = G \ltimes \mathfrak{m}$, avec l'action $Ad_g(XY) = Ad_g X Ad_g Y$, pour tout X et Y dans $\mathfrak{a}$,
- l'application quadratique

$$\varphi : \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^+)^* = \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{m}^*, \quad \ell \mapsto (\ell, (\ell|_{\mathfrak{a}})^2),$$

$$\text{où } (\ell|_{\mathfrak{a}})^2(XY) = \ell(X)\ell(Y).$$

- $\Phi : \widehat{G_{gen}} \rightarrow \widehat{G^+}$, où $\Phi(\pi)$ est l'unique extension irréductible de π à G^+ .

Donc, G^+ est un surgroupe quadratique de G et Φ sépare les représentations génériques de G .

On dira simplement que G admet un surgroupe quadratique séparant (G^+, φ) . On rappelle ici rapidement la preuve de [A-S] pour être complet :

Preuve : D'abord le dual unitaire $\widehat{G}$ d'un groupe exponentiel est homéomorphe avec l'ensemble $\mathfrak{g}^*/G$ de ses orbites coadjointes (voir [L-L]). L'ensemble $\widehat{G_{gen}}$ est donc dense dans $\widehat{G}$ pour sa topologie naturelle. De plus on sait (cf. [A-L]) que l'ensemble moment de la représentation π associée à l'orbite $\mathcal{O}_\pi$ est

$$I_\pi = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_\pi).$$

On montre alors que (cf. [A-S]), pour tout ℓ de $\mathfrak{g}_{gen}^*$,

$$G^+(\varphi(\ell)) = \varphi(G.\ell).$$

Si p est la restriction canonique $p : (\mathfrak{g}^+)^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$, on déduit de $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}^*}$, que p est un difféomorphisme de l'orbite coadjointe de $\varphi(\ell)$ sur celle de ℓ , pour tout ℓ de $\mathfrak{g}_{gen}^*$.

Soit $\pi \in \widehat{G_{gen}}$, il existe donc $\ell \in \mathfrak{g}_{gen}^*$ tel que si $f = \ell|_{\mathfrak{a}}$, $\pi = \text{Ind}_{\exp(\mathfrak{a})}^G e^{if}$.

Posons

$$\Phi(\pi) = \text{Ind}_{\exp(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{m}}^{G^+} e^{i(f, f^2)}.$$

(ici on a noté (f, f^2) la restriction de $\varphi(\ell)$ à $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$).

La représentation $\Phi(\pi)$ se réalise sur le même espace de Hilbert que π et $\Phi(\pi)$ est une extension de π . On en déduit que $\Phi(\pi)$ est irréductible, de plus $\Phi(\pi)$ est une représentation induite, son ensemble moment est d'après [A-L] :

$$I_{\Phi(\pi)} = \overline{\text{Conv}}(G^+((f, f^2) + (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp)).$$

Mais $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ est un idéal de $\mathfrak{g}^+$, et puisque G^+ est connexe :

$$g^+((\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp) = (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp, \quad \forall g^+ \in G^+.$$

(Remarquons que G^+ est un groupe de Lie résoluble mais il peut ne pas être exponentiel), alors :

$$I_{\Phi(\pi)} = \overline{\text{Conv}}(G^+((f, f^2)) + (\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp).$$

Maintenant, dans $\mathfrak{g}^*$, $\ell + \mathfrak{a}^\perp = f + \mathfrak{a}^\perp \subset G.\ell$ donc, dans $(\mathfrak{g}^+)^*$, $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m})^\perp$ est inclus dans $G^+.(f, f^2)$. On a donc :

$$I_{\Phi(\pi)} = \overline{\text{Conv}}(G^+(\ell, f^2)) = \overline{\text{Conv}}(G^+\varphi(\ell)) = \overline{\text{Conv}}(\varphi(G.\ell)).$$

Si π et π' sont deux représentations de $\widehat{G_{gen}^+}$ telles que

$$I_{\Phi(\pi)} = I_{\Phi(\pi')}$$

alors, si π' est associée à l'orbite $G.\ell'$:

$$I_{\Phi(\pi)} \cap \varphi(\mathfrak{g}^*) = I_{\Phi(\pi')} \cap \varphi(\mathfrak{g}^*)$$

c'est-à-dire

$$(\overline{\text{Conv}}(\varphi(G.\ell))) \cap \varphi(\mathfrak{g}^*) = (\overline{\text{Conv}}(\varphi(G.\ell'))) \cap \varphi(\mathfrak{g}^*)$$

et le lemme de stricte convexité donne $\overline{G.\ell} = \overline{G.\ell'}$.

Comme G est exponentiel, ses orbites sont ouvertes dans leurs adhérences donc $G.\ell = G.\ell'$ et $\pi = \pi'$.

□

1.3 Les groupes de Lie nilpotents de petite dimension

1.3.1 Algèbres de Lie spéciales

Dans cette partie, G est nilpotent, connexe et simplement connexe. Si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est spéciale, on vient de voir que G admet un surgroupe quadratique. Une algèbre de Lie est dite indécomposable si elle n'est pas la somme directe de deux idéaux. Les algèbres nilpotentes indécomposables réelles $\mathfrak{g}$ telles que $\dim \mathfrak{g} \leq 6$ sont connues (cf. [Mag, Gon]). Nous prenons ici la notation de [Mag].

La majorité de ces algèbres sont spéciales. A un isomorphisme complexe près, avec les notations de [Mag], les algèbres indécomposables spéciales de dimension inférieure ou égale à 6 sont :

Algèbre	Relations de commutations	Idéal $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{g}_1$	$\mathfrak{g}_1$ est abélienne	$\mathfrak{g}_1$
$\mathfrak{g}_3$	$[X_1, X_2] = X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_4$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{5,1}$	$[X_1, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{5,2}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{5,3}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_2, X_3] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{5,5}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{5,6}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5)$
$\mathfrak{g}_{6,1}$	$[X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_4] = X_6,$ $[X_2, X_3] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,2}$	$[X_1, X_2] = X_5, [X_1, X_5] = X_6,$ $[X_3, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_2, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,4}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_6,$ $[X_2, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,5}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_2, X_3] = X_6, [X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,6}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_2, X_3] = X_6,$ $[X_2, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_1, X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,7}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_3] = -X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$

Algèbre	Relations de commutations	Idéal $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{g}_{6,8}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_2, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,9}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_2, X_5] = X_6, [X_3, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_1, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,10}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_1, X_4] = X_6, [X_3, X_5] = X_6$	$\text{vect}(X_2, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,11}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,12}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_6,$ $[X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,13}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_5,$ $[X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_5,$ $[X_3, X_4] = -X_6$	$\text{vect}(X_2, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,14}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,15}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_5] = X_6, [X_2, X_3] = X_5,$ $[X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,16}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,17}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6,$ $[X_2, X_3] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,19}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6,$ $[X_2, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$

Il existe de plus quatre algèbres nilpotentes réelles de dimension inférieure ou égale à 6 qui sont isomorphes sur $\mathbb{C}$ à une de ces algèbres, mais pas sur $\mathbb{R}$. Ces quatre algèbres sont toutes spéciales :

Algèbre	Relations de commutations	Idéal $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{g}_{6,5a}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_3] = -X_6,$ $[X_2, X_4] = X_5$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,6a}$	$[X_1, X_3] = X_5, [X_2, X_4] = X_5,$ $[X_1, X_4] = X_6, [X_2, X_3] = -X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,9a}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_2, X_4] = X_6, [X_3, X_5] = X_6$	$\text{vect}(X_1, X_4, X_5, X_6)$
$\mathfrak{g}_{6,15a}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = -X_6, [X_2, X_3] = X_5$ $[X_2, X_5] = -X_6$	$\text{vect}(X_3, X_4, X_5, X_6)$

Remarque 1.3.1 Parmi ces algèbres, quelques unes ont des fonctions polynomiales invariants naturelles de degré supérieure à 2. Par exemple, pour $\mathfrak{g}_{5,5}$, si on note par $\ell = (x_1, \dots, x_5)$ un élément générique dans $\mathfrak{g}^*$ de coordonnées $x_j = \langle \ell, X_j \rangle$ ($x_5 \neq 0$), alors les fonctions invariants génératrices sont

$$x_5, \quad x_5 x_3 - \frac{x_4^2}{2}, \quad \text{et} \quad x_2 x_5^2 + \frac{1}{3} x_4^3 - x_3 x_4 x_5.$$

Donc, si on utilise la méthode de [Ba-L-S] pour $\mathfrak{g}_{5,5}$, pour séparer les orbites coadjointes génériques, on doit au moins étendre l'application moment aux éléments centraux dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{g}_{5,5})$, de degré au plus 3.

De même, citons l'exemple donné dans [Wil], noté $\mathfrak{g}_{6,13}$, où l'application moment usuelle ne sépare pas les orbites coadjointes et pour lequel une telle fonction invariante est :

$$x_2 x_6^2 + \frac{1}{3} x_5^3 - x_4 x_5 x_6,$$

de degré 3.

Puisque ces algèbres sont spéciales, on est capable maintenant de séparer leurs orbites génériques (ou leurs représentations), en utilisant uniquement des fonctions quadratiques.

1.3.2 Invariants quadratiques

On sait que l'algèbre $J(\mathfrak{g})$ des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{g}$ invariants sous l'action de G est de la forme $J(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r)$, où les μ_j sont des fonctions polynomiales invariants sur $\mathfrak{g}^*$ (cf. [Ver]).

Lemme 1.3.1 *Si $\mathfrak{g}$ est telle qu'on peut choisir les μ_j tous de degré au plus 2, alors G admet un surgroupe quadratique séparant.*

Preuve : On pose $G^+ = G \times \mathbb{R}^r$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{g}^* &\rightarrow (\mathfrak{g}^+)^* \\ \ell &\mapsto (\ell, \mu_1(\ell), \mu_2(\ell), \dots, \mu_r(\ell)) \end{aligned}$$

Les représentations génériques de G sont en bijection avec les orbites génériques $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}^*$, qui sont caractérisées par la valeur des μ_j sur $\mathcal{O}$ (cf. [Ver]). Le groupe de Lie G^+ est nilpotent, connexe et simplement connexe. Si π est la représentation de G associée à une orbite générique $G.\ell$ de $\mathfrak{g}^*$, on pose :

$$\Phi(\pi) = \pi \times e^{i(\mu_1(\ell), \mu_2(\ell), \dots, \mu_r(\ell))}.$$

Par construction, $I_{\Phi(\pi)}$ est :

$$I_{\Phi(\pi)} = I_\pi \times \{(\mu_1(\ell), \mu_2(\ell), \dots, \mu_r(\ell))\}.$$

Cet ensemble caractérise donc bien $G.\ell$ et donc π . Par suite G^+ est un surgroupe quadratique pour G . □

Parmi les algèbres non spéciales celles dont les invariants sont engendrés par des polynômes au plus quadratiques sont les suivantes, on note ici $\ell = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ un point quelconque de $\mathfrak{g}^*$.

Algèbre	Relations de commutation	Invariants
$\mathfrak{g}_{5,4}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_2, X_3] = X_5$	$x_5, x_4,$ $\mu_1 = x_1x_5 - x_4x_2 + \frac{1}{2}x_3^2$
$\mathfrak{g}_{6,3}$	$[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_3] = X_5,$ $[X_2, X_3] = X_6$	$x_6, x_5, x_4,$ $\mu_1 = x_6x_1 - x_5x_2 + x_4x_3$
$\mathfrak{g}_{6,18}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = X_4,$ $[X_1, X_4] = X_5, [X_2, X_5] = X_6,$ $[X_3, X_4] = -X_6$	$x_6,$ $\mu_1 = x_6x_1 + x_3x_5 - \frac{x_4^2}{2}$

1.3.3 L'Algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{6,20}$

Il reste une seule algèbre de Lie nilpotente indécomposable qui n'est pas spéciale et dont un des invariants est cubique.

Cette algèbre est $\mathfrak{g}_{6,20}$, définie par les relations de commutations :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, [X_1, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = X_5, \\ [X_2, X_3] &= X_5, [X_2, X_5] = X_6, [X_3, X_4] = -X_6. \end{aligned}$$

Pour $\ell = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ appartenant à $\mathfrak{g}_{6,20}^*$ et générique ($x_6 \neq 0$), l'orbite $G.\ell$ est de dimension 4, elle contient un seul point $\ell_0 = (\lambda_1, 0, \dots, 0, \lambda_6)$. On paramètre cette orbite par :

$$G.\ell_0 = \left\{ (\lambda_1 - p_1 q_2 - \frac{\lambda_6}{6} q_2^3 + \frac{\lambda_6}{2} q_1^2, p_2, p_1 + \frac{\lambda_6}{2} q_2^2, -\lambda_6 q_1, \lambda_6 q_2, \lambda_6) \right\}$$

avec $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^4$. Le polynôme invariant μ_1 associé à λ_1 est donc cubique :

$$\mu_1 = \lambda_1 \lambda_6^2 = x_1 x_6^2 + x_3 x_5 x_6 - \frac{1}{3} x_5^3 - \frac{1}{2} x_4^2 x_6.$$

Un calcul direct semblable à celui de [A-S] montre que les deux orbites génériques

$$\mathcal{O} = G.(0, 0, 0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}' = G.(\frac{2}{3}, 0, 0, 0, 0, 1)$$

ont même enveloppe convexe. En effet :

$$\ell_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 1) \text{ et } \ell_2 = (0, 0, 1, 0, \sqrt{3}, 1) \text{ sont des points de } \mathcal{O} \text{ et}$$

$$\ell' = \frac{1}{\sqrt{3}} \ell_1 + (1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \ell_2 = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

est dans $\mathcal{O}'$. De même, $\ell'_2 = (0, 0, 1, 0, -2, 1)$ est dans $\mathcal{O}'$ et $\ell_1 = \frac{2}{3} \ell'_1 + \frac{1}{3} \ell'_2$ est dans $\mathcal{O}$.

Un surgroupe (G^+, φ) , quadratique ($\varphi : \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^+)^*$ est polynomiale de degré inférieure ou égale à deux) est faiblement séparant si :

1. Pour toute orbite générique $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{g}^*$, $\varphi(\mathcal{O})$ est une G^+ -orbite dans $(\mathfrak{g}^+)^*$.
2. Si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont deux orbites génériques $\text{Conv}(\varphi(\mathcal{O})) = \text{Conv}(\varphi(\mathcal{O}'))$ implique $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.

Lemme 1.3.2 *Le groupe de Lie $G = \exp(\mathfrak{g}_{6,20})$ admet un surgroupe quadratique faiblement séparent.*

Preuve : Puisque l'idéal $\mathfrak{a} = \text{Vect}(X_4, X_5, X_6)$ est abélien, on peut donc construire le groupe nilpotent :

$$G^+ = G \ltimes S^2(\mathfrak{a}) = G \ltimes \mathfrak{m}$$

comme ci-dessus. L'application $\varphi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow (\mathfrak{g}^+)^*$ définie, comme ci-dessus, par :

$$\varphi(\ell) = (\ell, f^2), \quad \text{si } f = \ell|_{\mathfrak{a}}$$

est quadratique, vérifie $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}^*}$ et $\varphi(G.\ell) = G^+(\varphi(\ell))$ pour tout ℓ dans $\mathfrak{g}_{gen}^*$ (ℓ tel que $x_6 \neq 0$).

Posons donc $\Phi(\pi) = \pi^+$, où π^+ est la représentation de $\widehat{G}^+$ associée à l'orbite $\varphi(G.\ell)$, π^+ est irréductible, c'est en fait une extension de π , réalisée dans le même espace.

Soient maintenant $\ell_0 = (\lambda_1, 0, 0, 0, 0, \lambda_6)$ dans $\mathfrak{g}_{gen}^*$. On note :

$$\varphi(\ell) = ((x_1, x_2, x_3), (f, f^2)) = ((x_1, x_2, x_3), \tilde{\varphi}(f))$$

et $q : (\mathfrak{g}^+)^* \longrightarrow \mathfrak{a}^* \oplus \mathfrak{m}^*$ la projection obtenue par restriction.

On a :

$$G^+(\varphi(\ell_0)) \subset \text{Conv } G^+(\varphi(\ell_0)) \cap q^{-1}(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}^*)).$$

Réciproquement, soit ℓ^+ un élément de $\text{Conv } G^+(\varphi(\ell_0)) \cap q^{-1}(\tilde{\varphi}(\mathfrak{a}^*))$. Il existe des $t_j > 0$ tels que $\sum_j t_j = 1$ et g_j dans G tel que :

$$\begin{aligned} \ell^+ = ((x_1, x_2, x_3), (f, f^2)) &= \sum_j t_j (g_j \ell_0, (g_j f_0)^2) \\ &= \sum_j t_j (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, (f_j, f_j^2)), \end{aligned}$$

avec $f_j = (x_{4j}, x_{5j}, x_{6j})$. Par stricte convexité de $u \mapsto u^2$, on en déduit que si

$$g_j p(\ell_0^+) = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j}, x_{5j}, x_{6j})$$

alors $x_{6j} = x_6$ et

$$\left(\sum_j t_j x_{5j}\right)^2 = \sum_j t_j x_{5j}^2 = x_5^2.$$

Donc, pour tout j , $x_{5j} = x_5$. Le même argument donne $x_{4j} = x_4$, pour tout j .

On peut maintenant calculer $\mu_1 \circ p(\ell^+)$:

$$\begin{aligned}\mu_1(p(\ell^+)) &= x_6^2 \left(\sum_j t_j x_{1j} \right) + x_5 x_6 \left(\sum_j t_j x_{3j} \right) - \left(\frac{1}{3} x_5^3 + \frac{1}{2} x_4^2 x_6 \right) \\ &= \sum_j t_j \mu_1(g_j \ell_0) = \sum_j t_j \mu_1(\ell_0) = \mu_1(\ell_0).\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\ell^+ = \varphi(p(\ell_0^+))$ appartient à $G^+.\varphi(\ell_0)$.

□

Cependant, ce groupe n'admet pas de surgroupe quadratique séparant "naturel". Rappelons que $\mathfrak{g}_{6,20}$ est une variété de Poisson pour le crochet de Kostant-Souriau :

$$\{f, g\}(\ell) = \langle \ell, [df, dg] \rangle.$$

Si V est un sous espace vectoriel de $S^2(\mathfrak{g})$ (un espace de fonctions polynômes de degré 2 sur $\mathfrak{g}^*$) tel que :

- V est un sous module de $S^2(\mathfrak{g})$, ce qui s'écrit $\{\mathfrak{g}, V\} \subset V$,
- $\{V, V\} = 0$,

alors on peut faire le produit semi direct

$$G^+ = G_{6,20} \ltimes V.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^+$ de G^+ apparaît comme une sous algèbre de l'algèbre de Poisson $S(\mathfrak{g})$. Si on pose :

$$\varphi : \mathfrak{g}_{6,20}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^+)^* = \mathfrak{g}_{6,20}^* \times V^*$$

$$\ell \mapsto (\ell, \psi(\ell))$$

où $\psi(\ell)$ est la forme de V dans $\mathbb{R}$ définie par $\langle \psi(\ell), v \rangle = v(\ell)$ pour tout v de V . Par construction, φ est $G_{6,20}$ -covariante :

$$\langle \varphi(g.\ell), X + v \rangle = \langle g.\ell, X \rangle + v(g.\ell) = \langle g.\varphi(\ell), X + v \rangle.$$

En particulier,

$$\varphi(G_{6,20}.\ell) \subset G^+.\varphi(\ell).$$

De plus, si $u = \sum a_{ij} X_i X_j$ est un élément de V , alors un calcul direct donne :

$$\langle \exp u.\varphi(\ell), X + v \rangle = \langle \varphi(\ell), X + v \rangle + \sum a_{ij} \langle (\langle \ell, X_j \rangle X_i + \langle \ell, X_i \rangle X_j).\ell, X \rangle.$$

En différenciant, on obtient :

$$\begin{aligned} u.\varphi(\ell) &= \left(\sum a_{ij}(\langle \ell, X_j \rangle X_i + \langle \ell, X_i \rangle X_j). \ell, 0 \right) \\ &= \left(\sum a_{ij}(\langle \ell, X_j \rangle X_i + \langle \ell, X_i \rangle X_j) \right). \varphi(\ell) \end{aligned}$$

On en déduit, puisque G^+ est nilpotent, connexe et simplement connexe que :

$$G^+.\varphi(\ell) \subset G_{6,20}.\varphi(\ell) = \varphi(G_{6,20}.\ell)$$

et donc on a l'égalité :

$$G^+.\varphi(\ell) = \varphi(G_{6,20}.\ell).$$

On pose donc :

Définition 1.3.1

Les surgroupes G^+ de la forme $G^+ = G_{6,20} \ltimes V$ où V est un sous module de $S^2(\mathfrak{g}_{6,20})$ tel que $\{V, V\} = 0$ s'appellent des surgroupes quadratiques naturels de $G_{6,20}$.

Proposition 1.3.1 $G_{6,20}$ n'admet pas de surgroupe quadratique naturel G^+ séparant c'est-à-dire tel que

$$\overline{\text{Conv}}(\varphi(\mathcal{O})) = \overline{\text{Conv}}(\varphi(\mathcal{O}')) \quad \text{implique} \quad \mathcal{O} = \mathcal{O}'.$$

Preuve :

- Etape 1 : Montrons d'abord qu'un sous module V de $S^2(\mathfrak{g}_{6,20})$ tel que $\{V, V\} = 0$ est un sous espace de :

$$W = \text{Vect} (X_4^2, X_4X_5, X_4X_6, X_5^2, X_5X_6, X_6^2, X_1X_6 + X_3X_5).$$

Comme V est un $\mathfrak{g}_{6,20}$ -module nilpotent, si $V \neq \{0\}$, par le théorème d'Engel, il contient un vecteur annulé par $\mathfrak{g}_{6,20}$, le seul vecteur de $S^2(\mathfrak{g}_{6,20})$ qui a cette propriété est X_6^2 .

Si $V \neq \text{Vect} (X_6^2)$, le module $V/\text{Vect} (X_6^2)$ contient un vecteur annulé par $\mathfrak{g}_{6,20}$, c'est-à-dire V contient $\text{Vect} (X_6^2, X_5X_6)$ et V est inclus dans le commutant de $\text{Vect} (X_6^2, X_5X_6)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \text{Vect} (X_6^2, X_5X_6) &\subset V \\ &\subset \text{Vect} (X_1^2, X_1X_3, X_1X_4, X_1X_5, X_1X_6, X_3^2, X_3X_4, X_3X_5, X_3X_6, \\ &\quad X_4^2, X_4X_5, X_4X_6, X_5^2, X_5X_6, X_6^2) = \mathcal{C}(X_5X_6, X_6^2) \end{aligned}$$

En fait $\{X_2X_a, X_5X_6\} = (a+1)X_6^2$ ou $2(a+1)X_6^2$.

Si $V \neq \text{Vect} (X_6^2, X_5X_6)$, alors $V/\text{Vect} (X_6^2, X_5X_6)$ contient un vecteur annulé par

$\mathfrak{g}_{6,20}$ c'est-à-dire au moins un vecteur de $\text{Vect}(X_5^2, X_4X_6)$.

On vérifie que $\{X_5^2, \mathcal{C}(X_5X_6, X_6^2)\} = 0$ et que :

$$\begin{aligned} \{X_1^2, X_4X_6\} &= 2X_1X_5X_6 & \{X_1X_3, X_4X_6\} &= -X_1X_6^2 + X_3X_5X_6 \\ \{X_1X_4, X_4X_6\} &= X_4X_5X_6 & \{X_1X_5, X_4X_6\} &= X_5^2X_6 \\ \{X_1X_6, X_4X_6\} &= X_5X_6^2 & \{X_3^2, X_4X_6\} &= -2X_3X_6^2 \\ \{X_3X_4, X_4X_6\} &= -X_4X_6^2 & \{X_3X_5, X_4X_6\} &= -X_5X_6^2 \\ \{X_3X_6, X_4X_6\} &= -X_6^3 \end{aligned}$$

On a donc deux cas :

- **Cas 1** : Il existe a tel que $aX_5^2 + X_4X_6 \in V$, dans ce cas :

$$V \subset \mathcal{C}(aX_5^2 + X_4X_6, X_5X_6, X_6^2) = W.$$

- **Cas 2** : Il n'existe pas de tel a , mais $X_5^2 \in V$. Dans ce cas, $X_4X_6 \notin V$. On voit que ce vecteur n'apparaît pas dans la décomposition des $\{X_j, X_rX_s\}$ si $j = 5$ ou 6 . On calcule tous les $\{X_j, X_rX_s\}$ pour $j = 1, 2, 3, 4$ et $X_rX_s \in \mathcal{C}(X_5X_6, X_6^2) = \mathcal{C}(X_5^2, X_5X_6, X_6^2)$. Explicitement, on trouve des compositions linéaires de vecteurs ne contenant pas le vecteur X_4X_6 et :

$$\begin{aligned} \{X_1, X_4X_5\} &= X_5^2 & \{X_2, X_4X_5\} &= X_4X_6 & \{X_3, X_4X_5\} &= -X_5X_6 \\ \{X_1, X_4^2\} &= 2X_4X_5 & \{X_2, X_4^2\} &= 0 & \{X_3, X_4^2\} &= -2X_4X_6 \\ \{X_1, X_3X_6\} &= X_4X_6 & \{X_2, X_3X_6\} &= X_5X_6 & \{X_3, X_3X_6\} &= 0 \\ \{X_1, X_3X_4\} &= X_3X_5 + X_4^2 & \{X_2, X_3X_4\} &= X_4X_5 & \{X_3, X_3X_4\} &= -X_3X_6 \\ \{X_1, X_1X_6\} &= 0 & \{X_2, X_1X_6\} &= -X_3X_6 & \{X_3, X_1X_6\} &= -X_4X_6 \\ \{X_4, X_4X_5\} &= 0 & \{X_4, X_4^2\} &= 0 & \{X_4, X_3X_6\} &= X_6^2 \\ \{X_4, X_1X_6\} &= -X_5X_6 & \{X_4, X_3X_4\} &= X_4X_6 \end{aligned}$$

On en déduit que X_4X_5 , X_3X_4 et X_3X_6 n'appartiennent pas à V et que V peut contenir $2X_1X_6 - X_4^2$. Donc :

$$V \subset \text{Vect}(X_1^2, X_1X_3, X_1X_4, X_1X_5, 2X_1X_6 - X_4^2, X_3^2, X_3X_5, X_5^2, X_5X_6, X_6^2)$$

On calcule les crochets $\{X_j, X_rX_s\}$ et on cherche ceux dans lequel X_4X_5 apparaît. On trouve :

$$\begin{aligned} \{X_1, X_1X_4\} &= X_1X_5 & \{X_2, X_1X_4\} &= -X_3X_4 & \{X_3, X_1X_4\} &= -X_1X_6 - X_4^2 \\ \{X_1, X_1X_5\} &= 0 & \{X_2, X_1X_5\} &= X_1X_6 - X_3X_5 & \{X_3, X_1X_5\} &= -X_4X_5 \\ \{X_1, X_3X_5\} &= X_4X_5 & \{X_2, X_3X_5\} &= X_3X_6 + X_5^2 & \{X_3, X_3X_5\} &= 0 \\ \{X_4, X_1X_4\} &= -X_4X_5 & \{X_4, X_1X_5\} &= -X_5^2 & \{X_4, X_3X_5\} &= X_5X_6, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \{X_1, 2X_1X_6 - X_4^2\} &= -2X_4X_5 & \{X_2, 2X_1X_6 - X_4^2\} &= -2X_3X_6 \\ \{X_3, 2X_1X_6 - X_4^2\} &= 0 & \{X_4, 2X_1X_6 - X_4^2\} &= -2X_5X_6. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$V \subset \text{Vect} (X_1^2, X_1X_3, 2X_1X_6 + 2X_3X_5 - X_4^2, X_3^2, X_5^2, X_5X_6, X_6^2).$$

On répète le raisonnement pour les vecteurs X_1X_4 et X_3X_4 qui ne sont pas dans V , on trouve :

$$\begin{aligned} \{X_1, X_1^2\} &= 0 & \{X_2, X_1^2\} &= -2X_1X_3 & \{X_3, X_1^2\} &= -2X_1X_4 \\ \{X_1, X_1X_3\} &= X_1X_4 & \{X_2, X_1X_3\} &= X_1X_5 - X_3^2 & \{X_3, X_1X_3\} &= -X_3X_4 \\ \{X_1, X_3^2\} &= 2X_3X_4 & \{X_2, X_3^2\} &= X_3X_5 & \{X_3, X_3^2\} &= 0 \\ \{X_4, X_1^2\} &= -2X_1X_5 & \{X_4, X_1X_3\} &= X_1X_6 - X_3X_5 & \{X_4, X_3^2\} &= 2X_3X_6, \end{aligned}$$

Finalement, $V \subset \text{Vect} (2(X_1X_6 + X_3X_5) - X_4^2, X_5^2, X_5X_6, X_6^2) \subset W$.

- Etape 2 : Si le groupe $G^+ = G_{6,20} \ltimes V$, équipé de $\varphi : \mathfrak{g}_{6,20}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^+)^*$, $\varphi(\ell) = (\ell, \psi(\ell))$ est séparant, alors il en est de même du groupe $G'^+ = G_{6,20} \ltimes W$ équipé de la même application. Montrons que ce dernier groupe n'est pas séparant.

Rappelons que la paramétrisation des orbites génériques de $\mathfrak{g}_{6,20}^*$ est donnée par :

$$\ell = (x_6, \dots, x_1) = (\lambda_1, \lambda_1q_2, -\lambda_1q_1, p_1 + \lambda_1 \frac{q_2^2}{2}, p_2, \lambda_6 - \frac{\lambda_1}{6}q_2^3 + \frac{\lambda_1}{2}q_1^2 - q_2p_1)$$

L'orbite $G.\ell$ contient un seul point $\ell^0 \in \text{Vect} (X_1^*, X_6^*)$:

$$\ell^0 = (\lambda_1, 0, 0, 0, 0, \lambda_6).$$

Les nombres λ_1 et λ_6 caractérisent $G.\ell^0$: on notera $G.\ell^0 = \mathcal{O}_{\lambda_1, \lambda_6}$. On a :

$$\begin{aligned} \psi(\ell) &= (x_6^2, x_5x_6, x_5^2, x_6x_4, x_5x_4, x_4^2, x_1x_6 + x_3x_5) \\ &= (\lambda_1^2, \lambda_1^2q_2, \lambda_1^2q_2^2, -\lambda_1^2q_1, -\lambda_1^2q_1q_2, \lambda_1^2q_1^2, \lambda_1\lambda_6 + \frac{\lambda_1^2}{3}q_2^3 + \frac{\lambda_1^2}{2}q_1^2) \end{aligned}$$

En particulier,

$$(\ell^0)^+ = \varphi(\ell^0) = (\ell^0, (\lambda_1^2, 0, 0, 0, 0, \lambda_1\lambda_6))$$

Soit a un nombre réel, pour tout entier n , on définit le point $\ell_n^+ = \varphi(\ell_n)$ de l'orbite $\varphi(G.\ell^0)$ comme le point des coordonnées $p_2 = q_1 = 0$, $q_2 = an$ et $p_1 = -\frac{\lambda_1}{2}a^2n^2$.

Ensuite , on pose :

$$\begin{aligned}\ell'_n &= (1 - \frac{1}{n^3})(\ell^0)^+ + \frac{1}{n^3}\ell_n^+ \\ &= (\lambda_1, \frac{\lambda_1 a}{n^2}, 0, \frac{\lambda_1 a^2}{n}, \lambda_6 + \frac{\lambda_1 a^3}{3}, \lambda_1^2, \frac{\lambda_1^2 a}{n^2}, 0, \frac{\lambda_1^2 a^2}{n}, 0, 0, \lambda_1 \lambda_6 + \frac{\lambda_1^2 a^3}{3})\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, ℓ'_n tend vers le point :

$$(\ell'^0)^+ = \varphi(\ell'^0) = (\lambda_1, 0, 0, 0, \lambda'_6, \lambda_1^2, 0, 0, 0, 0, \lambda_1 \lambda'_6)$$

avec $\lambda'_6 = \lambda_6 + \frac{\lambda_1 a^3}{3}$.

Donc $\overline{\text{Conv}} \varphi(\mathcal{O}_{\lambda_1, \lambda_6}) \supset \varphi(\mathcal{O}_{\lambda_1, \lambda'_6})$ pour tout λ'_6 , autrement dit, pour tout λ_6 :

$$\overline{\text{Conv}} \varphi(\mathcal{O}_{\lambda_1, \lambda_6}) = \overline{\text{Conv}} \varphi(\mathcal{O}_{\lambda_1, 0}).$$

Ceci veut dire que $G_{6,20} \ltimes W$ n'est pas séparant pour $G_{6,20}$.

□

1.3.4 Les algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 6

Soit maintenant une algèbre nilpotente réelle $\mathfrak{g}$ décomposable, de dimension inférieure ou égale à 6, c'est-à-dire $\mathfrak{g}$ est le produit direct $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \times \dots \times \mathfrak{g}_k$ d'algèbres de Lie indécomposables. Alors :

Lemme 1.3.3 *Si $\mathfrak{g}$ est décomposable réelle de dimension inférieure ou égale à 6, alors $G = \exp \mathfrak{g}$ admet un surgroupe quadratique et une application séparante Φ .*

Preuve : On fait cette preuve pour $k = 2$, le cas général est similaire.

En identifiant $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}_1^* \times \mathfrak{g}_2^*$, on pose $\mathfrak{g}_{gen}^* = \mathfrak{g}_{1gen}^* \times \mathfrak{g}_{2gen}^*$ et

$$G = \exp(\mathfrak{g}) = G_1 \times G_2 = \exp(\mathfrak{g}_1) \times \exp(\mathfrak{g}_2).$$

Notons G_1^+ (resp G_2^+) un surgroupe quadratique pour G_1 (resp G_2). Pour tout $\ell = (\ell_1, \ell_2)$ de $\mathfrak{g}_{gen}^*$, on a :

$$G.\ell = G_1.\ell_1 \times G_2.\ell_2 \quad \text{et} \quad \widehat{G} = \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}.$$

En gardant les notations ci-dessus, on pose :

$$G^+ = G_1^+ \times G_2^+, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{et} \quad \Phi = (\Phi_1, \Phi_2).$$

On vérifie immédiatement que G^+ est un surgroupe quadratique pour G d'application séparante Φ .

□

On a finalement prouvé :

Théorème 1.3.1 *Soit G un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe de dimension inférieure ou égale à 6, alors si $G \neq G_{6,20}$, G admet un surgroupe quadratique séparant et si $G = G_{6,20}$, G admet un surgroupe quadratique faiblement séparant.*

1.4 Les groupes de Lie résolubles de petite dimension

1.4.1 Les groupes de Lie exponentiels

Les algèbres de Lie résolubles réelles de dimension au plus 4 ont été classées par J. Dozias (cf. [Doz] et [Ber], chapitre 8). Une telle algèbre $\mathfrak{g}$ est exponentielle si ses racines sont de la forme $\rho(1+i\alpha)$, avec $\rho \in \mathfrak{g}^*$, α réel. Les algèbres exponentielles, indécomposables, non nilpotentes de dimension au plus 4 sont toutes spéciales, sauf une $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$. On donne ci-dessous leurs liste et l'idéal $\mathfrak{a}$ correspondant :

Algèbre	Relations de commutations	Idéal $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{g}_2$	$[X_1, X_2] = X_2$	$\text{vect}(X_2)$
$\mathfrak{g}_{3,2}(\alpha),$ $ \alpha \geq 1$	$[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = \alpha X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_{3,3}$	$[X_1, X_2] = X_2 + X_3,$ $[X_1, X_3] = X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_{3,4}(\alpha),$ $\alpha > 0$	$[X_1, X_2] = \alpha X_2 - X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2 + \alpha X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_{4,1}$	$[X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = X_4,$ $[X_2, X_3] = X_4$	$\text{vect}(X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$

Algèbre	Relations de commutations	Idéal $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{g}_{4,5}(\alpha, \beta),$ $-1 < \alpha \leq \beta < 0$ ou $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ou $(0 < \beta \leq 1 \text{ et } -1 \leq \alpha < 0)$	$[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = \alpha X_3,$ $[X_1, X_4] = \beta X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,6}(\alpha),$ $\alpha \neq 0$	$[X_1, X_2] = \alpha X_2, [X_1, X_3] = X_3 + X_4,$ $[X_1, X_4] = X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,7}$	$[X_1, X_2] = X_2 + X_3,$ $[X_1, X_3] = X_3 + X_4, [X_1, X_4] = X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, \beta),$ $\alpha > 0, \beta \neq 0$	$[X_1, X_2] = \alpha X_2, [X_1, X_3] = \beta X_3 - X_4,$ $[X_1, X_4] = X_3 + \beta X_4$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,9}(\alpha),$ $\alpha \neq 1, 0 < \alpha \leq 2$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_2] = (\alpha - 1)X_2,$ $[X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = \alpha X_4$	$\text{vect}(X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,10}$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_2] = X_2 + X_3,$ $[X_1, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = 2X_4$	$\text{vect}(X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,11}(\alpha),$ $\alpha > 0$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_2] = \alpha X_2 - X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2 + \alpha X_3, [X_1, X_4] = 2\alpha X_4$	$\text{vect}(X_3, X_4)$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{4,9}(0)$ n'est pas spéciale mais ses orbites génériques ($x_4 \neq 0$) contiennent un unique point $(\lambda_1, 0, 0, \lambda_4)$. Elles peuvent être paramétrées comme suit :

$$\ell = (\lambda_1 + pq, p, \lambda_4 q, \lambda_4) = (\lambda_1 + \frac{x_2 x_3}{x_4}, x_2, x_3, \lambda_4).$$

Donc ces orbites sont caractérisées par les valeurs de fonctions invariantes :

$$\lambda_4 = x_4, \quad \mu_1 = x_4 \lambda_1 = x_4 x_1 - x_2 x_3.$$

Le degré de ces fonctions polynomiales est inférieure ou égale à 2. Il existe donc un surgroupe quadratique et une application séparante Φ pour le groupe de Lie $\exp(\mathfrak{g}_{4,9}(0))$.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie exponentielle décomposable, de dimension inférieure ou égale à 4, le même argument que dans le cas nilpotent nous fournit un surgroupe quadratique séparant. Par conséquent :

Proposition 1.4.1 *Tout groupe de Lie G exponentiel de dimension inférieure ou égale à 4 admet un surgroupe quadratique séparant.*

1.4.2 Les groupes de Lie résolubles non exponentiels

Si G est résoluble, connexe et simplement connexe, de dimension au plus 4, non exponentiel alors G est de type I (les orbites coadjointes sont ouvertes dans leur adhérence), ses représentations unitaires irréductibles π sont données par la théorie d'Auslander-Kostant (cf. [A-K]). Elles sont associées à une orbite coadjointe $G.\ell$ et d'après [A-L] : $I_\pi = \overline{\text{Conv}} G.\ell$.

Cependant, en général, plusieurs représentations inéquivalentes sont associées à la même orbite. L'objet géométrique naturellement associé à la représentation est un fibré au dessus de l'orbite. Si de plus la dimension de G est inférieure ou égale à 4, l'ensemble de ces fibrés pour les orbites génériques peut être représenté comme une partie M de $\mathfrak{g}_{gen}^* \times \mathbb{R}$.

Dans ce qui suit, nous construirons donc un surgroupe de Lie résoluble G^{++} de G , une application polynomiale $\varphi^{++} : M \rightarrow (\mathfrak{g}^{++})^*$ de degré 2 et une application $\Phi : \widehat{G} \rightarrow \widehat{G^{++}}$ telles que si $p(\ell^{++})$ est la restriction de $\ell^{++} \in (\mathfrak{g}^{++})^*$ à $\mathfrak{g}$:

$$p \circ \varphi^{++} = id_{\mathfrak{g}^*} \quad \text{et} \quad G^{++}\varphi^{++}(\ell, \varepsilon) = \varphi^{++}(G.(\ell, \varepsilon)), \quad \forall (\ell, \varepsilon) \in M.$$

Si $m = (\ell, \varepsilon)$ de M caractérise l'élément π de $\widehat{G}$ alors $\Phi(\pi)$ est un prolongement canonique de π à G^{++} . Si π et π' dans $\widehat{G_{gen}}$ sont tels que $I_{\Phi(\pi)} = I_{\Phi(\pi')}$ alors $\pi = \pi'$.

En généralisant nos définitions, on dira alors que G admet un surgroupe quadratique et une application séparante Φ .

En fait, il y a 4 algèbres résolubles non exponentielles, de dimension inférieure ou égale à 4 dont 3 sont spéciales.

Algèbre	Relations de commutations	Idéal $\mathfrak{a}$
$\mathfrak{g}_{3,4}(0)$	$[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_3] = X_2$	$\text{vect}(X_2, X_3)$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_4] = X_4,$ $[X_2, X_3] = -X_4, [X_2, X_4] = X_3,$	$\text{vect}(X_3, X_4)$
$\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, 0),$ $\alpha > 0$	$[X_1, X_2] = \alpha X_2, [X_1, X_3] = -X_4,$ $[X_1, X_4] = X_3$	$\text{vect}(X_2, X_3, X_4)$

La dernière, $\mathfrak{g}_{4,11}(0)$ admet un invariant quadratique :

Algèbre	Relations de commutations	Invariants
$\mathfrak{g}_{4,11}(0)$	$[X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_2] = -X_3,$ $[X_1, X_3] = X_2$	$x_4,$ $\mu_1 = 2x_1x_4 - x_3^2 - x_2^2$

Avec les mêmes raisonnements que ci-dessus pour chacune de ces algèbres, on construit une suralgèbre $\mathfrak{g}^+$ et une application de degré 2, $\varphi^+ : \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^+)^*$, telle que $p \circ \varphi^+ = id_{\mathfrak{g}^*}$ et $\varphi^+(G.\ell) = G^+\varphi(\ell)$.

Par exemple, pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, 0)$, on considère $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \ltimes S^2(\mathfrak{a})$ et $\varphi(\ell) = (\ell, (\ell|_{\mathfrak{a}})^2)$. Maintenant, comme ci-dessus, $\overline{\text{Conv}}(G^+.\varphi(\ell)) = \overline{\text{Conv}}(G^+.\varphi(\ell'))$ implique $G.\ell = G.\ell'$, (ℓ et ℓ' dans $\mathfrak{g}_{gen}^*$). On a alors séparation des orbites. Mais nous n'avons toujours pas séparation des représentations associées à l'orbite $G.\ell$.

Pour cela, on détermine d'abord le stabilisateur d'un point ℓ_0 de chaque orbite coadjointe générique.

Par exemple, les orbites coadjointes génériques pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, 0)$ sont les orbites des points :

$$\ell_0 = (0, \pm 1, r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r > 0 \quad \text{et} \quad \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Le stabilisateur $G_{4,8}(\ell_0)$ au point ℓ_0 est connexe :

$$G_{4,8}(\ell_0) = \exp \left\{ \pm \frac{1}{\alpha} \Im(re^{i\theta}(x_3 + ix_4))X_2 + x_3X_3 + x_4X_4 \right\} \sim \mathbb{R}^2.$$

Avec les mêmes calculs, on obtient le tableau suivant :

Algèbre	Point de base ℓ_0 pour l'orbite générique	$G(\ell_0)$
$\mathfrak{g}_{3,4}(0)$	$\ell_0 = (0, r, 0), r > 0$	$\exp \mathbb{R}X_2 \times \exp 2\pi\mathbb{Z}X_1$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$\ell_0 = (0, 0, 1, 0)$	$\exp 2\pi\mathbb{Z}X_2$
$\mathfrak{g}_{4,11}(0)$	$\ell_0 = (\lambda_1, 0, 0, \lambda_4)$	$\exp \mathbb{R}X_4 \times \exp \mathbb{R}X_1$

Pour les groupes connexes et simplement connexes d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{4,8}(\alpha, 0)$ et $\mathfrak{g}_{4,11}(0)$, les orbites génériques sont simplement connexes. On associe à chaque orbite une seule représentation unitaire irréductible. Donc, il n'est pas nécessaire de considérer de fibré M et les constructions précédentes s'appliquent directement : chacun de ces groupes admet un surgroupe quadratique séparant.

D'autre part, pour les groupes de Lie connexes et simplement connexes d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}_{3,4}(0)$ et $\mathfrak{g}_{4,2}$, les orbites coadjointes génériques ne sont pas simplement connexes. Il y a plusieurs représentations associées à une de ces orbites.

Plus exactement, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3,4}(0)$, la sous algèbre $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$ est une polarisation en $\ell_0 = (0, r, 0)$, le caractère $e^{i\ell_0}$ défini sur $\exp \mathfrak{h}$ admet les prolongements suivants à $G(\ell_0) \cdot \exp \mathfrak{h}$:

$$\chi_{\ell_0, \varepsilon}(e^{2\pi k X_1} e^{x_2 X_2 + x_3 X_3}) = e^{2i\pi k \varepsilon + x_2 r}, \quad \varepsilon \in [0, 1[.$$

Pour chaque ε , la représentation irréductible $\pi_\varepsilon = \text{Ind}_{G(\ell_0) \cdot \exp \mathfrak{h}}^G \chi_{\ell_0, \varepsilon}$ est associée à l'orbite $G \cdot \ell_0$. D'après [A-L], son ensemble moment est :

$$I_{\pi_\varepsilon} = \overline{\text{Conv}} G \cdot \ell_0$$

qui ne dépend pas de ε .

On construit alors l'ensemble

$$M = \mathfrak{g}_{gen}^* \times \mathbb{R} = \{(\ell, \varepsilon), \quad \ell \in \mathfrak{g}_{gen}^*, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$

et on considère cet ensemble comme une partie de $(\mathfrak{g} \times \mathbb{R})^*$. Maintenant, puisque les orbites génériques sont caractérisées par l'invariant quadratique $\ell \mapsto r^2$, on pose :

$$\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}^{++} = \mathfrak{g}^+ \times \mathbb{R}.$$

On définit les fonctions :

$$\begin{aligned} \varphi^+ : \quad \mathfrak{g}^* &\longrightarrow (\mathfrak{g}^+)^* \\ \ell &\longmapsto (\ell, r^2) \end{aligned}$$

($r^2 = x_2^2 + x_3^2$) et

$$\begin{aligned} \varphi^{++} : \quad M &\longrightarrow (\mathfrak{g}^{++})^* \\ (\ell, \varepsilon) &\longmapsto (\ell, r^2, \varepsilon) \end{aligned}$$

alors

$$\varphi^{++}(G \cdot (\ell_0, \varepsilon)) = G^{++} \cdot \varphi^{++}(\ell_0, \varepsilon), \quad \forall (\ell_0, \varepsilon) \in (\mathfrak{g}^*)_{gen} \times \mathbb{R}.$$

Et on définit

$$\Phi^{++}(\pi_\varepsilon) = \pi_\varepsilon \times e^{ir^2} \times e^{i\varepsilon}$$

donc, on obtient

$$I_{\Phi^{++}(\pi_\varepsilon)} = I_{\pi_\varepsilon} \times \{(r^2, \varepsilon)\}.$$

Cet ensemble moment caractérise clairement la représentation π_ε .

Si maintenant, G est le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{4,2}$, il admet une seule orbite ouverte (et dense) $G \cdot \ell_0 = \mathfrak{g}_{gen}^*$. A cette orbite est associée comme ci-dessus une famille de représentations π_ε de la forme $\text{Ind}_{G(\ell_0) \cdot \exp \mathfrak{h}}^G \chi_\varepsilon$, où

$$\mathfrak{h} = \text{Vect}(X_3, X_4) \quad \text{et} \quad \chi_\varepsilon(e^{2\pi k X_2}) = e^{i2\pi \varepsilon k}.$$

On pose alors

$$M = \mathfrak{g}_{gen}^* \times \mathbb{R} = (\mathfrak{g} \times \mathbb{R})_{gen}^*, \quad \mathfrak{g}^{++} = \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$$

et

$$\varphi^{++}(g.(\ell_0, \varepsilon)) = (g.\ell_0, \varepsilon), \quad \Phi^{++}(\pi_\varepsilon) = \pi_\varepsilon \times e^{i\varepsilon}.$$

Ainsi $I_{\pi_\varepsilon} = \mathfrak{g}^* \times \{\varepsilon\}$ caractérise clairement π_ε .

Si G est résoluble, de dimension inférieure ou égale à 4 et décomposable, le même argument que dans le cas nilpotent permet de construire le surgroupe G^{++} , l'application quadratique φ^{++} et l'application Φ^{++} . Finalement :

Proposition 1.4.2 *Soit G un groupe de Lie résoluble, connexe et simplement connexe, de dimension inférieure ou égale à 4. Alors G admet un surgroupe quadratique et une application séparante Φ .*

1.4.3 Le groupe de Mautner

Si G est un groupe de Lie résoluble de dimension 5, G peut ne pas être de type I . L'exemple le plus simple est donné par le groupe de Mautner G , connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{vect}(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[X_1, X_2] = -X_3, [X_1, X_4] = -\alpha X_4, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_5] = \alpha X_5,$$

avec α irrationnel.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est spéciale, avec l'idéal abélien $\mathfrak{a} = \text{Vect}(X_2, X_3, X_4)$. Une orbite générique est un cylindre de base une ficelle sur un tore $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{aligned} G.\ell_0 &= G.(0, r, 0, R \cos \theta, R \sin \theta) \\ &= \{(p, r \cos q, r \sin q, R \cos(\alpha q + \theta), R \sin(\alpha q + \theta))\} \end{aligned}$$

A cette orbite, on peut associer les représentations $\pi_{\ell_0} = \text{Ind}_{\exp \mathfrak{a}}^G e^{i\ell_0}$. L'ensemble moment de π_{ℓ_0} est :

$$\begin{aligned} I_{\pi_{\ell_0}} &= \overline{\text{Conv}} G.\ell_0 \\ &= \{\ell = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad x_2^2 + x_3^2 \leq r^2, \quad x_4^2 + x_5^2 \leq R^2\} \\ &= \mathbb{R} \times \text{Conv}(\mathbb{T}^2). \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de θ : $I_{\pi_{\ell_0}} = I_{\pi_{\ell'_0}}$ si ℓ_0 et ℓ'_0 sont deux points sur le même tore, défini par r et R .

Supposons maintenant qu'il existe une suralgèbre $\mathfrak{g}^+$, une application de degré au plus 2, $\varphi : \mathfrak{g}_{gen}^* \longrightarrow (\mathfrak{g}^+)^*$ telle que $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}_{gen}^*}$, et $\varphi(G.\ell_0) = G^+.\varphi(\ell_0)$. Alors cette application φ ne peut pas séparer deux orbites $G.\ell_0$ et $G.\ell'_0$, si ℓ_0 et ℓ'_0 sont sur le même tore $\mathbb{T}^2$.

En effet, soit φ_{x_1} l'application

$$\varphi_{x_1}(x_2, x_3, x_4, x_5) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

L'application φ_{x_1} est polynomiale de degré inférieure ou égale à 2. On considère le compact $K_{x_1} = \varphi_{x_1}(\mathbb{T}^2)$. Pour tout ℓ_0 dans $\mathbb{T}^2$, et tout réel x_1 , $G.\ell_0 \cap (\{x_1\} \times \mathbb{R}^4)$ est dense dans $\{x_1\} \times \mathbb{T}^2$. De plus, l'orbite est un cylindre, alors $\overline{\varphi(G.\ell_0)} = \bigcup_{x_1 \in \mathbb{R}} K_{x_1}$.

Si ℓ_0 et ℓ'_0 sont deux points du tore, les adhérences de l'image par φ de leurs orbites coadjointes coïncident :

$$\overline{\varphi(G.\ell_0)} = \overline{\varphi(G.\ell'_0)}.$$

Donc on ne peut pas séparer ces orbites par les enveloppes convexes fermées de leurs images par φ .

Le groupe de Mautner n'admet alors pas de surgroupe quadratique séparant.

1.5 Le groupe de Lie $G = SL(2, \mathbb{R})$

Le premier exemple de groupe non résoluble et non compact est le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ ou son revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ a pour base :

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec les relations de commutations :

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_1, X_3] = X_2.$$

1.5.1 Orbites coadjointes et représentations associées

On ne s'intéresse ici qu'aux représentations génériques appelées depuis [Barg], représentations de la série principale et de la série discrète.

Série principale

On note $\pi_{\mu,\varepsilon}$, $\mu > 0$, $\varepsilon = 0, 1$, les représentations de la série principale associées à l'orbite :

$$\mathcal{O}_\mu = \{\ell = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \mu^2\}$$

L'orbite $\mathcal{O}_\mu$ est l'hyperboloïde à une nappe. Ces représentations sont réalisées dans l'espace $L^2([0, 4\pi])$ dont la base orthogonale est

$$\varphi_n(\theta) = e^{in\theta/2}, \quad n \text{ pair (si } \varepsilon = 0), \quad n \text{ impair (si } \varepsilon = 1).$$

L'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est :

$$\begin{aligned} \pi'_{\mu,\varepsilon}(X_3)\varphi_n &= \frac{in}{2}\varphi_n \\ \pi'_{\mu,\varepsilon}(X_2)\varphi_n &= \frac{1}{4i}((1+i\mu+n)\varphi_{n+2} - (1+i\mu-n)\varphi_{n-2}) \\ \pi'_{\mu,\varepsilon}(X_1)\varphi_n &= \frac{1}{4}((1+i\mu+n)\varphi_{n+2} + (1+i\mu-n)\varphi_{n-2}) \end{aligned}$$

L'ensemble moment est, pour tout μ et tout ε :

$$I_{\pi_{\mu,\varepsilon}} = \mathfrak{g}^* = \text{Conv}(\mathcal{O}_\mu).$$

Série discrète holomorphe

On note π_m , $m \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $m > \frac{1}{2}$, la représentation de la série discrète associée à l'orbite

$$\mathcal{O}_m = \{\ell = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -m^2 \text{ et } x_3 < 0\}.$$

Pour tout $m > 0$, $\mathcal{O}_m$ est une nappe de l'hyperboloïde à deux nappes et $\mathcal{O}_m$ est associée à une représentation seulement si elle est entière, c'est à dire si $2m$ est entier et $m > \frac{1}{2}$. Cette représentation est réalisée dans l'espace $L^2_{hol}(\mathbb{D}, \mu_m)$ des fonctions holomorphes sur le disque unité

$$\mathbb{D} = \{w = u + iv, \quad |w|^2 < 1\}$$

de carré intégrable pour la mesure μ_m du disque unitaire $\mathbb{D}$ donnée par

$$\mu_m = \frac{4}{4^m} (1 - |w|^2)^{2m-2} du dv.$$

Une base orthogonale de cet espace est donnée par :

$$\varphi_n(w) = w^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad w \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad \|\varphi_n\|^2 = \frac{\pi}{4^{m-1}} \frac{(2m-2)!n!}{(2m+n-1)!}.$$

L'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est la suivante :

$$\begin{aligned} \pi'_m(X_3)w^n &= -i(n+m)w^n \\ \pi'_m(X_2)w^n &= \frac{(-1)^m}{2}i((n+2m)w^{n+1} + nw^{n-1}) \\ \pi'_m(X_1)w^n &= \frac{(-1)^m}{2}((n+2m)w^{n+1} - nw^{n-1}) \end{aligned}$$

L'ensemble moment permet de retrouver m , en effet, cet ensemble moment est :

$$I_{\pi_m} = \text{Conv}(\mathcal{O}_m) = \{\ell = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \leq -m^2 \quad \text{et} \quad x_3 < 0\}.$$

Donc

$$m^2 = \sup\{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad \ell = (x_1, x_2, x_3) \in I_{\pi_m}\} \quad \text{et} \quad \text{sign}(m) = -\text{sign}(x_3).$$

On remarque que l'ensemble moment de la représentation π_m est l'enveloppe convexe d'une unique orbite coadjointe : l'orbite $\mathcal{O}_m$. Pour être compatible avec les formules de caractères, plusieurs auteurs préfèrent définir ici l'orbite correspondante autrement.

Série discrète antiholomorphe

Il suffit de remplacer dans la série discrète holomorphe m par $-m$ et w par $\bar{w}$. L'ensemble moment de π_{-m} est :

$$I_{\pi_{-m}} = \text{Conv}(\mathcal{O}_{-m}) = \{\ell = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \leq -m^2 \quad \text{et} \quad x_3 > 0\}.$$

Ici aussi, on retrouve m :

$$m^2 = \sup\{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad \ell = (x_1, x_2, x_3) \in I_{\pi_m}\} \quad \text{et} \quad \text{sign}(m) = -\text{sign}(x_3).$$

En plus de ces représentations, il y a la représentation triviale, les représentations limites de la série discrète, limite de la série principale et celles de la série complémentaire. Ici nous ne considérerons pas ces représentations "non génériques".

1.5.2 Définition de G^+ et séparation des orbites

Soient

$$\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \quad \text{et} \quad G^+ = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

Le sous groupe $\mathbb{R}$ est central dans G^+ donc toute représentation unitaire irréductible π^+ de G^+ est scalaire sur ce sous groupe. Par conséquent, sa restriction à $SL(2, \mathbb{R}) : \pi^+_{|SL(2, \mathbb{R})}$ est irréductible.

Réciproquement, toute représentation irréductible π de $SL(2, \mathbb{R})$ se prolonge en des représentations $\pi^+_\alpha = \pi \times e^{i\alpha}$ de G^+ . Dans ce cas, on a $I_{\pi^+_\alpha} = I_\pi \times \{\alpha\}$.

On se donne aussi l'application non linéaire de degré 2 :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathfrak{g}^* &\rightarrow (\mathfrak{g}^+)^* \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto ((x_1, x_2, x_3), x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) = (\ell, \mu^2(\ell)) \end{aligned}$$

Soit $p : (\mathfrak{g}^+)^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ la projection canonique, transposée de l'injection canonique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^+$, alors $p \circ \varphi = id_{\mathfrak{g}^*}$ et puisque la fonction μ^2 est invariante, alors :

$$\varphi(G.\ell) = G^+\varphi(\ell) \quad \text{et} \quad \Phi(\pi_{\mu, \varepsilon}) = \pi_{\mu, \varepsilon} \times e^{i\mu^2}, \quad \Phi(\pi_{\pm m}) = \pi_{\pm m} \times e^{im^2}.$$

On notera :

$$\widehat{G}_{gen} = \{\pi_{\mu, \varepsilon}\} \cup \{\pi_{\pm m}\}.$$

Proposition 1.5.1 *Soient π et π' dans $\widehat{G}_{gen}$ telles que :*

$$I_{\Phi(\pi)} = I_{\Phi(\pi')}$$

alors :

- 1) *Les orbites coadjointes associées à π et π' coïncident.*
- 2) *Ou bien π et π' sont toutes deux dans la série principale et*

$$\pi = \pi_{\mu, \varepsilon}, \quad \pi' = \pi_{\mu, \varepsilon'}, \quad (\varepsilon = \varepsilon' \quad \text{ou} \quad \varepsilon \neq \varepsilon').$$

- 3) *Ou bien π et π' sont toutes les deux dans la série discrète et $\pi \cong \pi'$.*

Remarque 1.5.1 *Comme dans le cas résoluble non exponentiel, on sait associer à une représentation une orbite, mais à certaines orbites on associe deux représentations et à d'autres on n'associe aucune représentation. On a maintenant séparé les orbites mais pas les représentations. On les sépare dans la section suivante, en appliquant une méthode similaire à celle des sections précédentes.*

1.5.3 Définition de G^{++} et séparation des représentations

On va généraliser la notion de l'ensemble moment pour les représentations génériques de G . Puisque il y a deux représentations dans la série principale, associées à l'orbite $\mathcal{O}_\mu$, on pose $\mathfrak{g}_{gen}^* = \{\ell \in \mathfrak{g}, \mu^2(\ell) \neq 0\}$, alors on définit le nouvel ensemble

$$M = \left\{ (\ell, \varepsilon), \ell \in \mathfrak{g}_{gen}^*, \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu^2 < 0 \\ 0 \text{ ou } 1 & \text{si } \mu^2 > 0 \end{cases} \right\}$$

Le groupe G agit naturellement sur M par $g.(\ell, \varepsilon) = (g.\ell, \varepsilon)$ et les représentations génériques de G sont caractérisées par une orbite intégrale dans M . Pour une généralisation de l'ensemble moment, on définit :

$$J_{\pi_{\mu, \varepsilon}} = \{(\ell, \varepsilon), \ell \in I_{\pi_{\mu, \varepsilon}}\} = I_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{\varepsilon\},$$

et

$$J_{\pi_m} = \{(\ell, 1), \ell \in I_{\pi_m}\} = I_{\pi_m} \times \{1\}.$$

Maintenant, on définit

$$G^{++} = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Un élément de G^{++} a la forme (g, t, s) , avec g dans $SL(2, \mathbb{R})$, t réel et $s = \pm 1$.

L'algèbre de Lie de G^{++} est :

$$\mathfrak{g}^{++} = \mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}.$$

Comme ci-dessus, on pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow (\mathfrak{g}^+)^* \\ \ell &\longmapsto (\ell, \mu^2). \end{aligned}$$

Mais, on peut aussi définir l'ensemble

$$M^{++} = \{(\ell, t, \varepsilon), \ell \in (\mathfrak{g}^+)^*_{gen}, \varepsilon = 0, 1\}.$$

Comme pour G , une représentation générique de G^{++} est caractérisée par une G^{++} -orbite dans M^{++} , l'action de G^{++} étant définie par

$$(g, u, v).(\ell, t, \varepsilon) = (g.\ell, t, \varepsilon).$$

On étend l'application φ à $\varphi^{++} : M \longrightarrow M^{++}$ par

$$\varphi^{++}(\ell, \varepsilon) = (\ell, \mu^2(\ell), \varepsilon).$$

Donc si $p^{++} : M^{++} \longrightarrow M$ est l'application restriction, $p^{++}(\ell, t, \varepsilon) = (\ell, \varepsilon)$, on a toujours

$$p^{++} \circ \varphi^{++} = Id_M, \quad \text{et} \quad \varphi^{++}(G.(\ell, \varepsilon)) = G^{++}.\varphi^{++}(\ell, \varepsilon).$$

Finalement, on définit les représentations de G^{++} par :

$$\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon}) = \pi_{\mu, \varepsilon}^{++}, \quad \text{où} \quad \pi_{\mu, \varepsilon}^{++}(g, t, s) = s^\varepsilon e^{it\mu^2} \pi_{\mu, \varepsilon},$$

et

$$\Phi^{++}(\pi_m) = \pi_m^{++}, \quad \text{où} \quad \pi_m^{++}(g, t, s) = e^{itm^2} \pi_m(g).$$

Avec ces notations, on obtient immédiatement :

Proposition 1.5.2 *On a :*

1) φ^{++} est une application quadratique et

$$p^{++} \circ \varphi^{++} = Id_M, \quad \varphi^{++}(G.(\ell, \varepsilon)) = G^{++}.\varphi^{++}(\ell, \varepsilon),$$

2) L'ensemble moment est

$$I_{\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon})} = I_{\Phi^+(\pi_{\mu, \varepsilon})} = I_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{\mu^2\}$$

et

$$I_{\Phi^{++}(\pi_m)} = I_{\Phi^+(\pi_m)} = I_{\pi_m} \times \{m^2\}.$$

3) L'ensemble moment généralisée est

$$J_{\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon})} = J_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{\mu^2\} = I_{\Phi^+(\pi_{\mu, \varepsilon})} \times \{(\mu^2, \varepsilon)\}$$

et

$$J_{\Phi^{++}(\pi_m)} = J_{\pi_m} \times \{m^2\} = I_{\Phi^+(\pi_m)} \times \{(m^2, 1)\}.$$

4) Si π et π' deux éléments de $\widehat{G_{gen}}$ alors

$$J_{\Phi^{++}(\pi)} = J_{\Phi^{++}(\pi')} \quad \text{si et seulement si} \quad \pi \cong \pi'.$$

Avec nos généralisations, on peut dire que $SL(2, \mathbb{R})$ admet un surgroupe quadratique (non connexe) G^{++} et une application séparante Φ^{++} .

Cependant, dans cette construction, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{++}$ coïncide avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^+$. Notre définition du surgroupe quadratique G^{++} et de l'application Φ^{++} utilise la nouvelle variable ε . Mais la valeur de cette variable n'est pas déterminée à partir d'une application moment usuelle. Par conséquent, notre construction n'a pas exactement la même

nature que la construction dans les sections précédentes, appliquée pour les groupes de Lie résolubles. De plus, cette construction ne s'applique pas au cas du revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$.

Pour toutes ces raisons, on considère maintenant un autre surgroupe quadratique (connexe) de $SL(2, \mathbb{R})$. On définit :

$$G^{++} = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2, \quad \text{et} \quad \varphi^{++}(\ell, \varepsilon) = (\ell, \mu^2(\ell), \varepsilon).$$

Et

$$\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon}) = \pi_{\mu, \varepsilon} \times e^{i\mu^2} \times e^{i\varepsilon}, \quad \Phi^{++}(\pi_m) = \pi_m \times e^{im^2}.$$

Donc

$$I_{\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon})} = \varphi^{++}(I_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{\varepsilon\}) = I_{\pi_{\mu, \varepsilon}} \times \{(\mu^2, \varepsilon)\}$$

et

$$I_{\Phi^{++}(\pi_m)} = I_{\pi_m} \times \{(m^2, 0)\}.$$

Alors, G^{++} est un surgroupe quadratique de $SL(2, \mathbb{R})$, et Φ^{++} est une application séparante.

Proposition 1.5.3 *On a :*

$$I_{\Phi^{++}(\pi_{\mu, \varepsilon})} = I_{\Phi^{++}(\pi_{\mu', \varepsilon'})} \quad \text{si et seulement si} \quad \pi_{\mu, \varepsilon} = \pi_{\mu', \varepsilon'}$$

1.5.4 Le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$

Notons $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$. Les représentations $\tilde{\pi}_{\mu, \varepsilon}$, avec $\varepsilon \in [0, 2[$ de la série principale de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ se réalisent dans $L^2([0, 4\pi[)$, mais au lieu de considérer une base (φ_n) telle que :

$$\varphi_n(2\pi) = \pm \varphi_n(0) = e^{i\pi\varepsilon} \varphi_n(0), \quad \varepsilon = 0, 1,$$

on considérera une base (φ_n) de fonctions telles que :

$$\varphi_n(2\pi) = e^{i\pi\varepsilon} \varphi_n(0), \quad \varepsilon \in [0, 2[.$$

Par exemple :

$$\varphi_n(\theta) = e^{i\theta(n + \frac{\varepsilon}{2})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ s'écrira alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}'_{\mu,\varepsilon}(X_3)\varphi_n &= i(n + \frac{\varepsilon}{2})\varphi_n \\ \tilde{\pi}'_{\mu,\varepsilon}(X_2)\varphi_n &= \frac{1}{4i}\left((1 + i\mu + n + \frac{\varepsilon}{2})\varphi_{n+2} - (1 + i\mu - n - \frac{\varepsilon}{2})\varphi_{n-2}\right) \\ \tilde{\pi}'_{\mu,\varepsilon}(X_1)\varphi_n &= \frac{1}{4}\left((1 + i\mu + n + \frac{\varepsilon}{2})\varphi_{n+2} + (1 + i\mu - n - \frac{\varepsilon}{2})\varphi_{n-2}\right).\end{aligned}$$

Son ensemble moment est toujours :

$$I_{\tilde{\pi}_{\mu,\varepsilon}} = \text{Conv}(\mathcal{O}_\mu) = \mathfrak{g}^*.$$

Pour la série discrète holomorphe $\tilde{\pi}_m$ et antiholomorphe $\tilde{\pi}_{-m}$, elles se réalisent dans l'espace $L^2(\mathbb{D}, \mu_m)$ des fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$, pour la mesure

$$\mu_m = \frac{4}{4^m}(1 - |w|^2)^{2m-2}, \quad \text{mais pour tous les } m > \frac{1}{2}.$$

Les formules sont les mêmes que pour la série discrète de $SL(2, \mathbb{R})$, l'ensemble moment est :

$$I_{\tilde{\pi}_{\pm m}} = \text{Conv}(\mathcal{O}_{\pm m}) = \{\ell = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \leq -m^2, \quad \pm x_3 < 0\}$$

(Il n'y a plus de condition d'intégralité sur m).

Posons donc :

$$\tilde{G}^{++} = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$$

et définissons :

$$\tilde{\varphi}^{++} = \varphi^{++}, \quad \tilde{\Phi}^{++}(\tilde{\pi}_{\mu,\varepsilon}) = \tilde{\pi}_{\mu,\varepsilon} \times e^{i\mu^2} \times e^{i\varepsilon}, \quad (\varepsilon \in [0, 2[)$$

et

$$\tilde{\Phi}^{++}(\tilde{\pi}_m) = \tilde{\pi}_m \times e^{im^2}, \quad (m \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]).$$

On obtient alors :

Proposition 1.5.4 *$\tilde{G}^{++}$ définit un surgroupe quadratique, connexe et simplement connexe du revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$ et $\tilde{\Phi}^{++}$ est une application séparante.*

Remarque 1.5.2 *Les orbites coadjointes du groupe $SU(2)$ sont des sphères, leurs enveloppes convexes sont les boules correspondantes. On montre que l'ensemble moment d'une représentation unitaire irréductible de $SU(2)$, même s'il n'est pas convexe, caractérise cette*

représentation (cf. [Kir, Wil, A-L]).

En outre, on sait que toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension inférieure ou égale à 4 est, soit résoluble, soit le produit direct d'une algèbre de Lie semi simple par un idéal résoluble. Dans ce dernier cas, les seules possibilités sont :

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{su}(2), \quad \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}.$$

On a finalement prouvé :

Corollaire 1.5.1 *Si G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe de dimension inférieure ou égale à 4, alors G admet un sousgroupe quadratique et une application séparante Φ .*

1.6 Le groupe de Lie $G = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4$

Dans cette section, on étudie le cas d'un groupe produit semi direct d'un compact par un sous groupe normal abélien, tel que les invariants repérant les orbites génériques ne sont pas quadratiques mais pour lequel nos méthodes donnent un sousgroupe quadratique.

Soit

$$G = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4,$$

l'action de $SO(4)$ sur $\mathbb{R}^4$ étant donnée par l'action usuelle. Son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de dimension 10 et est définie par :

$$\mathfrak{g} = \text{Vect} \left(T_i, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad R_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq 4 \right),$$

où (T_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et R_{ij} la matrice $E_{ij} - E_{ji}$ de $\mathfrak{so}(4)$.

Les éléments de $\mathfrak{g}$ vérifient :

$$[R_{ij}, R_{kl}] = \delta_{jk} R_{il} + \delta_{il} R_{jk} - \delta_{jl} R_{ik} - \delta_{ik} R_{jl}$$

et

$$[R_{ij}, T_k] = \delta_{jk} T_i - \delta_{ik} T_j, \quad [T_i, T_j] = 0, \quad \text{avec la convention} \quad R_{ji} = -R_{ij}.$$

L'idéal abélien de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{a} = \text{Vect}(T_i)$. Pour tout $\ell \in \mathfrak{g}^*$, on note $\ell = (t, r) = (t_i, r_{jk})$.

L'action coadjointe est donnée par les champs de vecteurs :

$$R_{ij}^- = \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} (\delta_{jk} r_{il} + \delta_{il} r_{jk} - \delta_{jl} r_{ik} - \delta_{ik} r_{jl}) \frac{\partial}{\partial r_{kl}} + t_i \frac{\partial}{\partial t_j} - t_j \frac{\partial}{\partial t_i}, \quad r_{ji} = -r_{ij}$$

et

$$T_i^- = \sum_{k < l} (\delta_{ik} t_l - \delta_{il} t_k) \frac{\partial}{\partial r_{kl}}.$$

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^4$ et $u.v$ le produit scalaire des vecteurs u et v . Si $\ell = (t, r)$ est tel que $|t|^2 = \sum t_i^2 \neq 0$, on peut, par l'action de $SO(4)$, trouver dans l'orbite de ℓ un vecteur de la forme $((0, 0, 0, |t|), r')$.

L'action du sous groupe $\exp(\text{Vect}(T_1, T_2, T_3))$ permet de se ramener à un point

$$((0, 0, 0, |t|), (r''_{12}, r''_{13}, r''_{23}, 0, 0, 0))$$

de l'orbite de ℓ . De plus, l'action du sous groupe $SO(3)$ de $SO(4)$ qui laisse stable $(0, 0, 0, |t|)$ permet de se ramener au point :

$$\ell_0 = (t_0, r_0) = ((0, 0, 0, |t|), (R, 0, 0, 0, 0, 0)), \quad R^2 = r''_{12}{}^2 + r''_{13}{}^2 + r''_{23}{}^2.$$

Donc, les orbites génériques sont celles des points ℓ_0 tels que $|t| > 0$ et $R > 0$. Elles sont repérées par les nombres $a = |t|$ et $b = aR$, et sont de dimension 8 (cf. [Raw]). L'algèbre de Lie du stabilisateur de ℓ_0 est :

$$\mathfrak{g}(\ell_0) = \text{Vect}(R_{12}, T_4).$$

La fonction (polynomiale quadratique) $(t, r) \mapsto |t|^2$ est clairement invariante et donne la valeur de a . Posons alors :

$$(r \wedge t)_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l} \varepsilon_{ijkl} r_{jk} t_l,$$

(ε_{ijkl} est nul sauf si $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, et dans ce cas, c'est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$). On définit ainsi un vecteur de $\mathbb{R}^4$, orthogonal à t et tel que, par exemple :

$$\begin{aligned} R_{12}^-(r \wedge t)_1 &= -(r \wedge t)_2, & T_1^-(r \wedge t)_1 &= 0 \\ R_{12}^-(r \wedge t)_2 &= (r \wedge t)_1, & T_1^-(r \wedge t)_2 &= 0 \\ R_{12}^-(r \wedge t)_3 &= 0, & T_1^-(r \wedge t)_3 &= 0 \\ R_{12}^-(r \wedge t)_4 &= 0, & T_1^-(r \wedge t)_4 &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction polynomiale de degré 4, $(t, r) \mapsto |r \wedge t|^2$ est invariante et sa valeur sur l'orbite de (t_0, r_0) est $a^2 R^2 = b^2$. On a prouvé que l'orbite de ℓ_0 est (si $a > 0$ et $b > 0$) :

$$\mathcal{O}_{a,b} = G\ell_0 = \{(t, r), \quad \text{tels que} \quad |t|^2 = a^2, \quad |r \wedge t|^2 = b^2\}.$$

Cette orbite est associée à une représentation si elle est entière, c'est-à-dire si $\frac{b}{a}$ est un entier naturel.

En ℓ_0 , une polarisation (complexe) positive est donnée par :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} + \text{Vect}_{\mathbb{C}}(R_{12}, R_{13} - iR_{23}).$$

On associe donc à $G.\ell_0$ l'induite holomorphe du caractère $e^{i\ell_0|_{\mathfrak{p}}}$:

$$\pi_{a,b} = \text{Ind}_{\exp \mathfrak{p}}^G e^{i\ell_0|_{\mathfrak{p}}}.$$

Il est plus simple d'effectuer une induction par étage et de réaliser $\pi_{a,b}$ comme l'induite unitaire de la représentation $\rho_{b/a} \times e^{i\ell_0|_{\mathfrak{p}}}$ du groupe $SO(3) \ltimes \mathfrak{a}$, où $\rho_{b/a}$ est la représentation unitaire de dimension $2\frac{b}{a} + 1$ de $SO(3)$.

De plus, puisque $\pi_{a,b}$ est une représentation induite unitaire, on a (cf. [A-L]) :

$$I_{\pi_{a,b}} = \overline{\text{Conv}}(G.\ell_0) \subset \{(t, r), \text{ tels que } |t| \leq a\},$$

car la fonction $(t, r) \mapsto |t|^2$ est convexe.

Réciproquement, soient R_1 et R_2 deux nombres positifs. Pour tout s de $]0, 1[$, les points

$$\ell = ((0, 0, 0, a), (0, R_1, 0, 0, 0, 0))$$

et

$$\ell' = ((0, 0, a, 0), (R_1, \frac{R_2 - R_1}{1 - s}, 0, 0, 0, 0))$$

sont sur la même orbite, $\mathcal{O}_{a, R_1 a}$, caractérisée par a et R_1 . Le point

$$\begin{aligned} \ell(s) &= s\ell + (1 - s)\ell' \\ &= ((0, 0, (1 - s)a, sa), ((1 - s)R_1, R_2 - (1 - s)R_1, 0, 0, 0, 0)) \end{aligned}$$

appartient à l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_{a, R_1 a}$. En faisant tendre s vers 1, on en déduit que le point

$$\ell(1) = ((0, 0, 0, a), (0, R_2, 0, 0, 0, 0))$$

qui est dans l'orbite $\mathcal{O}_{a, R_2 a}$ caractérisée par a et R_2 , appartient à $\overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_{a, R_1 a})$.

En particulier, $I_{\pi_{a,b}}$ contient l'adhérence de l'union de toutes les orbites $\mathcal{O}_{a, b'}$. Cette réunion est l'ensemble $\{(t, r), \text{ tels que } |t| = a\}$. Par convexité, pour tout b :

$$I_{\pi_{a,b}} = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_{a,b}) = \{(t, r), \text{ tels que } |t| \leq a\}.$$

Les représentations génériques du groupe G ne sont pas séparées par leurs ensembles moments.

Posons alors

$$\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \ltimes \mathbb{R}^4 = \mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{b} \quad \text{et} \quad G^+ = G \ltimes \mathbb{R}^4$$

L'action de G sur l'idéal abélien $\mathbb{R}^4$ est l'action usuelle de $SO(4)$ sur $\mathbb{R}^4$. On note (W_i) la base de l'idéal $\mathfrak{b}$ et (t, r, w) un point de $(\mathfrak{g}^+)^*$. On a alors par exemple :

$$\begin{aligned} R_{12}^- &= r_{13} \frac{\partial}{\partial r_{23}} - r_{23} \frac{\partial}{\partial r_{13}} + r_{14} \frac{\partial}{\partial r_{24}} - r_{24} \frac{\partial}{\partial r_{14}} + \\ &\quad + t_1 \frac{\partial}{\partial t_2} - t_2 \frac{\partial}{\partial t_1} + w_1 \frac{\partial}{\partial w_2} - w_2 \frac{\partial}{\partial w_1}, \\ T_1^- &= t_2 \frac{\partial}{\partial r_{12}} + t_3 \frac{\partial}{\partial r_{13}} + t_4 \frac{\partial}{\partial r_{14}} \\ W_1^- &= w_2 \frac{\partial}{\partial r_{12}} + w_3 \frac{\partial}{\partial r_{13}} + w_4 \frac{\partial}{\partial r_{14}}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que les fonctions polynomiales suivantes sont invariantes sous l'action de G^+ :

$$(t, r, w) \mapsto |t|^2, \quad |w|^2, \quad t.w, \quad (r \wedge t).w.$$

Maintenant, par action de $SO(4)$, une orbite coadjointe générique de G^+ contient un point de la forme (t_0, r, w_0) avec $t_0 = (0, 0, 0, a)$ ($a > 0$) et $w_0 = (0, 0, w_3, \frac{c}{a})$ ($w_3 > 0$). On a donc, sur cette orbite, $|t| = a$, $w.t = c$ et

$$|w| = \sqrt{w_3^2 + \frac{c^2}{a^2}} = b \quad \text{ou} \quad w_3 = \frac{\sqrt{a^2 b^2 - c^2}}{a} > 0.$$

En agissant avec l'idéal $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, on peut enfin se ramener à $\ell_0 = (t_0, r_0, w_0)$ tel que $r_0 = (R, 0, 0, 0, 0, 0)$ (R quelconque). On pose donc

$$d = (r \wedge t).w = Raw_3 \quad \text{ou} \quad R = \frac{d}{\sqrt{a^2 b^2 - c^2}}.$$

Les orbites coadjointes génériques de G^+ sont donc les orbites

$$\mathcal{O}_{a,b,c,d}^+ = \{(t, r, w), \quad \text{tel que} \quad |t| = a, \quad |w| = b, \quad t.w = c, \quad (r \wedge t).w = d\},$$

pour $a > 0$, $b > 0$, $ab > c$. Elles sont de dimension 10, le stabilisateur de (t_0, r_0, w_0) ayant pour algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g}^+((t_0, r_0, w_0)) = Vect \left(R_{12}, T_4, \frac{\sqrt{a^2 b^2 - c^2}}{a} T_3 + a W_4, \frac{c}{a} T_3 - a W_3 \right).$$

Définissons maintenant la fonction $\varphi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^{+*}$, polynomiale de degré 2, par $\varphi(t, r) = (t, r, r \wedge t)$. Si $\mathcal{O}_{a,b}$ est une orbite coadjointe générique de G , alors $\mathcal{O}_{a,b} = G \cdot (t_0, r_0)$ et $G^+ \cdot \varphi((t_0, r_0)) = \mathcal{O}_{a,b,0,b^2}^+$. Donc, on n'a pas $G^+ \cdot \varphi(\ell_0) = \varphi(G \cdot \ell_0)$. Cependant :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{a,b,0,b^2}^+ \cap \varphi(\mathfrak{g}^*) &= G^+ \cdot \varphi((t_0, r_0)) \cap \varphi(\mathfrak{g}^*) \\ &= \{(t, r, w), \quad |t| = a, \quad |w| = b, \quad w = (r \wedge t)\} \\ &= \varphi(\mathcal{O}_{a,b}). \end{aligned}$$

L'orbite $\mathcal{O}_{a,b,0,b^2}^+$ est entière si et seulement si $\frac{b}{a}$ est un entier naturel, à cette orbite on associe la représentation :

$$\pi_{a,b,0,b^2}^+ = \text{Ind}_{SO(2) \ltimes \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}}^{G^+} e^{i\frac{b}{a}} \times e^{it_0|_{\mathfrak{a}}} \times e^{i(r_0 \wedge t_0)|_{\mathfrak{b}}}.$$

Cette représentation est l'induite du caractère $\exp(i\frac{b}{a} \times it_0|_{\mathfrak{a}} \times i(r_0 \wedge t_0)|_{\mathfrak{b}})$ du groupe $SO(2) \ltimes \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$, d'algèbre de Lie la polarisation $\mathfrak{so}(2) \ltimes \mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{b}$ en (t_0, r_0, w_0) . On note cette représentation par $\Phi(\pi_{a,b})$, son ensemble moment est :

$$I_{\Phi(\pi_{a,b})} = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_{a,b,0,b^2}^+).$$

Par convexité des fonctions $t \mapsto |t|^2$ et $w \mapsto |w|^2$, on a immédiatement :

$$I_{\Phi(\pi_{a,b})} \subset \{(t, r, w), \quad |t| \leq a, \quad |w| \leq b\}.$$

Comme l'égalité est atteinte sur $\varphi(\mathcal{O}_{a,b})$, alors :

$$a = \sup\{|t|, \quad (t, r, w) \in I_{\Phi(\pi_{a,b})}\}, \quad \text{et} \quad b = \sup\{|w|, \quad (t, r, w) \in I_{\Phi(\pi_{a,b})}\}.$$

Les ensembles moments $I_{\Phi(\pi_{a,b})}$ caractérisent donc les représentations $\pi_{a,b}$.

Proposition 1.6.1 *Le groupe $G = SO(4) \ltimes \mathbb{R}^4$ admet un surgroupe quadratique et une application séparante Φ .*

Chapitre 2

Séparation des orbites et sous-groupes de $SL(n, \mathbb{R})$

Résumé

Nous revenons à la question d'existence de produit semi-direct $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \ltimes V$ pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, avec une application non linéaire Φ du dual de $\mathfrak{g}$ dans le dual de $\mathfrak{g}^+$ telle que, pour un élément générique ξ , les orbites coadjointes de $\Phi(\xi)$ admettent des enveloppes convexes distinctes. Dans le cas de groupes de Lie résolubles, il existe plusieurs exemples d'une telle construction, où Φ est polynomiale, de degré 2.

Pour le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, on donne au début une telle construction avec Φ polynomiale, de degré n , puis, si $n > 2$, on prouve qu'une telle construction n'existe pas avec Φ polynomiale, de degré 2, et, pour $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, cette construction n'existe pas non plus avec Φ polynomiale, de degré 3.

2.1 Orbites coadjointes génériques de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

2.1.1 Fonctions invariantes et éléments génériques de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$

Ceci est bien connu, on présente ces notions ici juste pour être complet et pour fixer nos notations.

Puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est simple, on peut identifier l'action adjointe et l'action coadjointe du groupe de Lie $G = SL(n, \mathbb{R})$, en utilisant la forme bilinéaire, invariante non dégénérée sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ définie par :

$$\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(XY).$$

Cependant, on utilisera les lettres grecques comme ξ pour les éléments de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$ et les lettres majuscules, comme X pour les éléments de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Ces objets sont tous des matrices réelles $n \times n$ de trace nulle.

Maintenant, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est déployée, donc la théorie des $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ -modules de dimension finie coïncide avec la théorie usuelle sur les corps algébriquement clos (voir [D]). Par conséquent, les fonctions polynomiales invariantes sur $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$, sont les usuelles, c'est à dire les fonctions trace :

$$T_k(\xi) = \text{Tr}(\xi^k), \quad 2 \leq k \leq n.$$

Plus précisément, l'anneau des fonctions polynomiales invariantes sur $\mathbb{R}$ est exactement $\mathbb{R}[T_2, \dots, T_n]$ (cf. [W]).

Pour toute matrice $n \times n$, ξ , de trace nulle, on note C_ξ son polynôme caractéristique,

$$C_\xi(t) = \det(\xi - tI).$$

On met ξ sous forme de Jordan, en utilisant une base complexe de $\mathbb{C}^n$, et on note $z_1, \dots, z_n$ les termes diagonaux de cette forme de Jordan. Alors :

$$\begin{aligned} C_\xi(t) &= \det(\xi - tI) = (-1)^n(t - z_1) \dots (t - z_n) \\ &= t^n - \left(\sum_i z_i\right)t^{n-1} + \left(\sum_{i < j} z_i z_j\right)t^{n-2} + \dots + (-1)^n z_1 \dots z_n \\ &= t^n - \alpha_{n-1}t^{n-1} + \alpha_{n-2}t^{n-2} + \dots + (-1)^n \alpha_0. \end{aligned}$$

Puisque C_ξ est une fonction polynomiale invariante, les α_k sont polynomiales en $T_j(\xi)$, en fait, une formule de Newton (cf. [W]), donne explicitement, pour tout k ,

$$(-1)^{k+1} \alpha_{n-k} = \text{Tr}(\xi^k) - \alpha_{n-1} \text{Tr}(\xi) + \alpha_{n-2} \text{Tr}(\xi^{k-1}) + \dots + (-1)^{k-1} \alpha_{k-1} \text{Tr}(\xi).$$

Cette formule permet d'exprimer tous les α_k comme fonctions des nombres $T_j(\xi)$, et réciproquement, d'exprimer tous les $T_j(\xi)$ comme fonctions des nombres α_k .

Autrement dit, deux matrices ξ et ξ' vérifient $C_\xi = C_{\xi'}$ si et seulement si $T_j(\xi) = T_j(\xi')$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

Posons maintenant ξ une matrice réelle $n \times n$ de trace nulle et notons $Sp(\xi)$ le spectre de ξ , vue comme une matrice complexe. On dira que ξ est générique si le cardinal de $Sp(\xi)$ est n .

Notons Ω l'ensemble des ξ génériques dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$. Cet ensemble est clairement invariant sous l'action (co)-adjointe de $SL(n, \mathbb{R})$. Si ξ est dans Ω ,

$$Sp(\xi) = \{c_1, \dots, c_r, a_1 \pm ib_1, \dots, a_s \pm ib_s, \text{ avec } c_j, a_k, b_k \in \mathbb{R}, b_k > 0, r + 2s = n\}.$$

Pour de telles données, on pose :

$$D(c_j, a_k + ib_k) = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_r & & & \\ & & & a_1 & b_1 & \\ & & & -b_1 & a_1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & a_s & b_s \\ & & & & & & -b_s & a_s \end{pmatrix}.$$

Fixons r et s telle que $r + 2s = n$. Si $r > 0$, posons :

$$\Sigma_{r,s} = \{D(c_j, a_k + ib_k), c_1 < c_2 < \dots < c_r, b_k > 0, (a_1, b_1) < (a_2, b_2) < \dots < (a_s, b_s)\}$$

où $(a, b) < (a', b')$ est l'ordre lexicographique :

$$(a, b) < (a', b') \iff \begin{cases} a < a' \\ \text{ou} \\ a = a' \text{ et } b < b'. \end{cases}$$

Si $r = 0$, on note :

$$\Sigma_{0,s}^+ = \{D(a_k + ib_k), b_k > 0, (a_1, b_1) < (a_2, b_2) < \dots < (a_s, b_s)\}$$

et

$$\Sigma_{0,s}^- = \{D^-(a_k + ib_k), b_k > 0, (a_1, b_1) < (a_2, b_2) < \dots < (a_s, b_s)\},$$

où

$$D^-(a_k + ib_k) = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & & & \\ b_1 & a_1 & & & & \\ & & a_2 & b_2 & & \\ & & -b_2 & a_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_s & b_s \\ & & & & & -b_s & a_s \end{pmatrix}.$$

On pose finalement

$$\Sigma = \begin{cases} \bigcup_{r>0, r+2s=n} \Sigma_{r,s} \bigcup \left(\Sigma_{0, \frac{n}{2}}^+ \cup \Sigma_{0, \frac{n}{2}}^- \right) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \bigcup_{r>0, r+2s=n} \Sigma_{r,s} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

2.1.2 Orbites adjointes dans Ω

Lemme 2.1.1 Σ est une section pour l'action de $SL(n, \mathbb{R})$ dans Ω , c'est à dire chaque orbite de Ω contient exactement un point dans Σ .

Preuve : Soit ξ une matrice de Ω , on diagonalise ξ sur $\mathbb{C}$. Avec nos notations, il existe des vecteurs $E_j \in \mathbb{C}^n$ et $F_k \in \mathbb{C}^n$ tels que $\xi E_j = c_j E_j$ et $\xi F_k = (a_k + ib_k) F_k$. On choisit E_j réel et on pose $F_k = E_{r+2k-1} + iE_{r+2k}$ (les E_{r+t} sont réels), alors on obtient une base réelle (E_s) de $\mathbb{R}^n$. Notons P la matrice de changement de bases, donc :

$$P\xi P^{-1} = D(c_j, a_k + ib_k).$$

- Si $\det P > 0$, alors il existe $g = \frac{1}{\sqrt[n]{\det P}} P$, tel que $\xi' = g\xi g^{-1}$ et g appartient à $SL(n, \mathbb{R})$. L'orbite adjointe $SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi$ contient le point $D(c_j, a_k + ib_k)$ de Σ .
- Si $\det P < 0$ et $r > 0$, on remplace E_1 par $E'_1 = -E_1$. Ainsi $P\xi P^{-1} = P'\xi P'^{-1}$ où P' est la nouvelle matrice de changement de bases et $\det(P') > 0$. Comme ci-dessus, l'orbite adjointe $SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi$ contient le point $D(c_j, a_k + ib_k)$ de Σ .
- Si $\det P < 0$ et $r = 0$, on remplace E_1 par $E'_1 = E_2$ et E_2 par $E'_2 = E_1$. Dans cette nouvelle base, $P'\xi P'^{-1} = D^-(a_k + ib_k)$ et $\det(P') > 0$. L'orbite adjointe $SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi$ contient le point $D^-(a_k + ib_k)$ de Σ .

Soit maintenant ξ_0 un élément de Σ et $\mathcal{O}$ son orbite. Les seules possibilités sont

$$\mathcal{O} \cap \Sigma = \{\xi_0\}, \text{ ou } \mathcal{O} \cap \Sigma = \{D(a_k + ib_k), D^-(a_k + ib_k)\} \text{ (uniquement si } r = 0).$$

Mais si on est dans ce dernier cas, il existe g dans $SL(n, \mathbb{R})$ tel que

$$D^-(a_k + ib_k) = gD^+(a_k + ib_k)g^{-1}.$$

En considérant les espaces propres complexes, on obtient les nombres complexes z_k tels que :

$$g(E_1 + iE_2) = z_1(E_1 - iE_2), \quad \text{et} \quad g(E_{2k-1} + iE_{2k}) = z_k(E_{2k-1} + iE_{2k}), \quad k > 1.$$

Par conséquent $\det(g) = -\prod_k |z_k|^2 < 0$, ce qui est impossible. Ceci prouve que Σ est une section pour l'action de $SL(n, \mathbb{R})$ sur Ω . □

Corollaire 2.1.1

Notons $\Omega_{r,s} = SL(n, \mathbb{R}) \cdot \Sigma_{r,s}$. Soit $\xi_0 \in \Omega_{r,s}$.

1. Si $r > 0$, $\{\xi, \text{ tel que } C_\xi = C_{\xi_0}\}$ est exactement l'orbite $SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi_0$.
2. Si $r = 0$, $\{\xi, \text{ tel que } C_\xi = C_{\xi_0}\}$ est l'union de deux orbites $SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi_0 \sqcup SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi_1$,
avec

$$\{\xi_0, \xi_1\} = \{D(a_k + ib_k), D^-(a_k + ib_k)\}.$$

Ce qui suit justifiera notre notion d'élément générique.

Lemme 2.1.2 Ω est un ensemble dense et ouvert de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$.

Preuve : Soit ξ une matrice arbitraire $n \times n$, de trace nulle. On peut réduire ξ sous forme de Jordan, en utilisant une base complexe de $\mathbb{C}^n$. Revenant comme ci-dessus à une base réelle, on pose, pour tout k , $D_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on peut donc écrire :

$$\xi' = P\xi P^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & u_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & c_{r-1} & u_{r-1} & & & & \\ & & & c_r & & & & \\ & & & & D_1 & v_1 I_2 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & D_{s-1} & v_{s-1} I_2 \\ & & & & & & & D_s \end{pmatrix},$$

ici la valeur des nombres réels u_j et v_k est 0 ou 1, et P est une matrice réelle.

Considérons maintenant des nombres réels tels que

$$x_1 < \cdots < x_r < y_1 < \cdots < y_s, \text{ et } x_1 + \cdots + x_r + 2y_1 + \cdots + 2y_s = 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose :

$$\xi_\varepsilon = \xi + \varepsilon P^{-1} D(x_1, \dots, x_r, y_1, y_1, \dots, y_s, y_s) P \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}).$$

Si ε est suffisamment petit, ξ_ε admet n valeurs propres distinctes, donc ξ_ε appartient à Ω et, pour toute norme, $\|\xi - \xi_\varepsilon\| = \varepsilon \|P^{-1} D(x_j, y_k) P\|$. Ceci prouve que Ω est dense.

Pour prouver que Ω est ouvert, on utilise le théorème des fonctions implicites. Soit ξ_0 une matrice de Ω . Le polynôme caractéristique C_{ξ_0} de ξ_0 admet n racines simples. Si $C_{\xi_0}(\alpha) = 0$, alors $C'_{\xi_0}(\alpha) \neq 0$.

Si $\alpha = c_j$ est une valeur propre réelle de ξ_0 , on définit l'application $F_j : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, par

$$F_j(\xi, x) = C_\xi(x).$$

Si $\alpha = a_k + ib_k$ est une valeur propre non réelle de ξ_0 , on note

$$C_\xi(x + iy) = A_\xi(x, y) + iB_\xi(x, y), \quad \text{avec } A_\xi, B_\xi \text{ réels,}$$

et on définit

$$F_k : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{par} \quad F_k(\xi, x, y) = (A_\xi(x, y), B_\xi(x, y)).$$

Un calcul direct montre que le Jacobien $\frac{DF_k}{D(x, y)}(\xi_0, a_k, b_k)$ ne s'annule pas.

Donc, il existe des sous ensembles ouverts U_j (resp. U_k) dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, contenant ξ_0 , des sous-ensembles ouverts V_j de $\mathbb{R}$ contenant c_j (resp. V_k de $\mathbb{R}^2$ contenant (a_k, b_k)), et des applications f_j (resp. f_k) définie sur U_j (resp. U_k), tels que :

$$\begin{cases} F_j(\xi, x) = 0 \\ (\xi, x) \in U_j \times V_j \end{cases} \iff \begin{cases} x = f_j(\xi) \\ \xi \in U_j \end{cases}$$

respectivement

$$\begin{cases} F_k(\xi, x, y) = (0, 0) \\ (\xi, x, y) \in U_k \times V_k \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) = f_k(\xi) \\ \xi \in U_k \end{cases}.$$

Choisissons V_r suffisamment petit, afin d'obtenir

$$V_j \cap \left(\bigcup_{j' \neq j} V_{j'} \right) = \emptyset, \quad V_k \cap \left((\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \bigcup_{k' \neq k} V_{k'} \right) = \emptyset,$$

puis posons $U = \bigcap_r U_r$. U est un sous ensemble ouvert contenant ξ_0 et, pour tout ξ de U , C_ξ admet n racines distinctes (réelle ou complexe), par suite $U \subset \Omega$ et Ω est un sous ensemble ouvert de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$.

□

En résumé, nous obtenons :

Proposition 2.1.1 *Sur le sous ensemble (ouvert et dense) Ω des éléments ξ génériques de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, les fonctions invariantes T_k séparent presque les $SL(n, \mathbb{R})$ -orbites.*

Plus précisément, on écrit comme ci-dessus $\Omega = \cup_{r+2s=n} \Omega_{r,s}$, et on pose $\xi_0 \in \Omega_{r,s}$.

1. *Si $r > 0$, $\{\xi, \text{ tel que } T_k(\xi) = T_k(\xi_0) \text{ pour tout } k = 2, \dots, n\}$ est exactement l'orbite adjointe $SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi_0$,*
2. *Si $r = 0$, $\{\xi, \text{ tel que } T_k(\xi) = T_k(\xi_0) \text{ pour tout } k = 2, \dots, n\}$ est l'union de deux orbites adjointes $SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi_0 \sqcup SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi_1$.*

2.2 Suralgèbres presque séparantes de degré n

2.2.1 Enveloppe convexe des orbites dans Ω

Revenons à notre problème, on considère d'abord l'enveloppe convexe d'une orbite générique dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$. On garde les notations précédentes.

Proposition 2.2.1 *Pour tout $n > 2$, l'enveloppe convexe des orbites (co)adjointes génériques (orbites dans Ω) est dense, plus précisément, pour tout $n > 2$ et ξ de Ω ,*

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi).$$

Preuve :

Le cas général est une conséquence des cas de petite dimension ($2 \leq n \leq 4$).

Le cas $n = 2$

Pour $n = 2$, les enveloppes convexes des orbites dans Ω sont bien connues (voir [A-S-Z] ou le chapitre 1). On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^\star &= \text{Conv}(SL(2, \mathbb{R}) \cdot D(-c, c)) & (c > 0), \\ &= \text{Conv}(SL(2, \mathbb{R}) \cdot D(ib) \cup SL(2, \mathbb{R}) \cdot D^-(ib)) & (b > 0). \end{aligned}$$

Le cas $n = 3$

Pour $n = 3$, on suppose $\xi = D(c_1, c_2, c_3)$, avec $c_1 < c_2 < c_3$, et on prouve $\Omega \subset \text{Conv}(SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, c_2, c_3))$.

En effet, si $c'_1 < c'_2 < c'_3$ sont tels que $c'_1 + c'_2 + c'_3 = 0$, alors ou bien $c'_1 \neq -2c_3$, ou $c'_2 \neq -2c_3$. Supposons par exemple $c'_1 \neq -2c_3$, prenons $c''_1 = c'_1 - \frac{c_1 + c_2}{2}$ et $c''_2 = -c'_1 - c_3$. On écrit :

$$\begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c_1 - c_2) & \\ & \frac{1}{2}(c_2 - c_1) \end{pmatrix} + \frac{c_1 + c_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

ainsi, il existe t dans $[0, 1]$ et $g \in SL(2, \mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c'_1 & \\ & c''_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c''_1 & \\ & -c''_1 \end{pmatrix} + \frac{c_1 + c_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= t \begin{pmatrix} \frac{c_1 - c_2}{2} & \\ & \frac{c_2 - c_1}{2} \end{pmatrix} + (1-t)g \begin{pmatrix} \frac{c_1 - c_2}{2} & \\ & \frac{c_2 - c_1}{2} \end{pmatrix} g^{-1} + \frac{c_1 + c_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= t \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix} + (1-t)g \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_2 \end{pmatrix} g^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'enveloppe convexe de $SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, c_2, c_3)$ contient $\begin{pmatrix} c'_1 & & \\ & c''_2 & \\ & & c_3 \end{pmatrix}$ avec

$$c''_2 = -c'_1 - c_3 \neq c_3.$$

Le même argument sur les indices 2 et 3 montre que cette enveloppe convexe contient $D(c'_1, c'_2, c'_3)$.

Considérons maintenant $D(c', a' + ib')$, avec $a' = -\frac{1}{2}c'$, et $b' > 0$, choisissons c'_2, c'_3 tels que $D(c', c'_2, c'_3) \in \Omega$, donc :

$$\begin{pmatrix} c'_2 & \\ & c'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c'_2 - c'_3) & \\ & \frac{1}{2}(c'_3 - c'_2) \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix},$$

comme ci-dessus, l'enveloppe convexe de $SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, c_2, c_3)$ contient aussi

$$D(c', a' + ib') = \begin{pmatrix} c' & & \\ & 0 & b' \\ & -b' & 0 \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi montré

$$\Omega \subset \text{Conv} SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, c_2, c_3).$$

Considérons maintenant le cas

$$\xi = D(c, a + ib) = \begin{pmatrix} c & & \\ & a & b \\ & -b & a \end{pmatrix},$$

on a vu que $\begin{pmatrix} c & & \\ & a & -b \\ & b & a \end{pmatrix}$ appartient à $SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(c, a + ib)$.

Supposons d'abord $a \neq 0$, alors $\text{Conv}(SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(c, a + ib))$ contient la matrice $\begin{pmatrix} c & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$, avec $c = -2a \neq a$. Comme ci-dessus, cette enveloppe convexe contient une matrice $D(c'_1, c'_2, a)$, telle que $c'_1 < c'_2$, $c'_1 \neq a$, $c'_2 \neq a$. Donc $D(c'_1, c'_2, a)$ appartient à Ω , et par le raisonnement précédent,

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(c, a + ib)).$$

Supposons, maintenant $a = 0$, $\text{Conv}(SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(0, ib))$ contient les matrices $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & D^+(ib) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & D^-(ib) \end{pmatrix}$. Comme, dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$,

$$D(1, -1) \in \text{Conv}(SL(2, \mathbb{R}) \cdot D(ib) \cup SL(2, \mathbb{R}) D^-(ib)),$$

ainsi, $\text{Conv}(SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(0, ib))$ contient la matrice $D(0, 1, -1)$, par conséquent contient Ω ,

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(3, \mathbb{R}) \cdot D(0, ib)).$$

Le cas $n = 4$

Si $n = 4$, si $\xi = D(c_1, \dots, c_4) \in \Omega$, on obtient comme plus haut

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, \dots, c_4)).$$

Par ailleurs, si $\xi = D(c_1, c_2, a + ib)$, à l'aide du cas de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, nous avons, pour tout $c'_2, \dots, c'_4$,

$$D(c_1, c'_2, c'_3, c'_4) \in \text{Conv}(SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, c_2, a + ib))$$

ainsi

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, c_2, a + ib)).$$

Finalement, si $\xi = D(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$, $a_1 \neq 0$, on a vu que

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & \\ b_1 & a_1 & & \\ & & a_2 & -b_2 \\ & & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2),$$

d'où

$$D(a_1, a_1, a_2, a_2) \in \text{Conv}(SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)) \quad \text{et } a_1 \neq a_2.$$

En appliquant le cas $n = 2$, on montre que $D(a_1, x, y, a_4)$ appartient à $\text{Conv}(SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2))$, pour tout x et y tels que $a_1 + x + y + a_4 = 0$. Par conséquent,

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)).$$

Pour le dernier cas, $\xi = D(ib_1, ib_2)$, on a vu que, dans $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^*$, l'orbite de $D(ib)$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}$ avec $z^2 - x^2 - y^2 = b^2$ et $z > 0$. Ainsi, $SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(ib_1, ib_2)$ contient une matrice comme suit :

$$\begin{pmatrix} x & z & & \\ -z & -x & & \\ & & 0 & b_2 \\ & & -b_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } 0 < b_1 < z.$$

En utilisant l'action adjointe de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\zeta = \begin{pmatrix} -x & -z & & \\ z & x & & \\ & & 0 & -b_2 \\ & & b_2 & 0 \end{pmatrix} \in SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(ib_1, ib_2).$$

Si $t = \frac{b_1}{z + b_1}$, la matrice

$$D(-tx, tx, i(1 - 2t)b_2) = t\zeta + (1 - t)D(ib_1, ib_2)$$

appartient à $\text{Conv}(SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(ib_1, ib_2))$, par suite

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(4, \mathbb{R}) \cdot D(ib_1, ib_2)).$$

Le cas $n > 4$

Par récurrence sur $n > 4$, on suppose que, pour tout $2 < p < n$, la proposition est vraie. On considère $D(c_j, a_k + ib_k) \in \Sigma_{r,s}$, avec $r + 2s = n$.

Si $r \geq 2$, on écrit :

$$D(c_j, a_k + ib_k) = \begin{pmatrix} D(c'_1, c'_2) & \\ & D(c'_3, \dots, c'_r, a'_k + ib'_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c_1 + c_2}{2} I_2 & \\ & -\frac{c_1 + c_2}{n - 2} I_{n-2} \end{pmatrix},$$

En utilisant le fait que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})^* = \text{Conv}(SL(2, \mathbb{R}) \cdot D(c'_1, c'_2))$ et l'hypothèse de récurrence pour $p = n - 2$, on obtient

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(n, \mathbb{R}) \cdot D(c_j, a_k + ib_k)).$$

Si $r = 1$, on décompose $D(c_1, a_k + ib_k)$ comme :

$$D(c_1, a_k + ib_k) = D(c'_1, a'_k + ib'_k) + \begin{pmatrix} \frac{c_1 + 2a_1}{3} I_3 & \\ & -\frac{c_1 + 2a_1}{n - 3} I_{n-3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en utilisant le cas $n = 3$, une matrice $D(c_1'', c_2'', c_3'', a_2 + ib_2, \dots, a_n + ib_n)$ appartient à $\text{Conv}(SL(n, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, a_k + ib_k))$, et le cas $r > 1$ donne le résultat :

$$\Omega \subset \text{Conv}(SL(n, \mathbb{R}) \cdot D(c_1, a_k + ib_k)).$$

Si $r = 0$, alors $s > 2$, on décompose $D(a_k + ib_k)$ comme :

$$D(a_k + ib_k) = D(a'_k + ib'_k) + \begin{pmatrix} \frac{2a_1 + 2a_2}{4} I_4 & \\ & -\frac{2a_1 + 2a_2}{n-4} I_{n-4} \end{pmatrix}.$$

Donc une matrice $D(c_1'', \dots, c_4'', a_3 + ib_3, \dots, a_n + ib_n)$ appartient à

$$\text{Conv}(SL(n, \mathbb{R}) \cdot D(a_k + ib_k)).$$

D'où, le premier cas s'applique, et ceci achève la preuve de notre proposition.

□

Corollaire 2.2.1

Considérons l'application ψ de l'ensemble $\Omega/SL(n, \mathbb{R})$ des orbites génériques vers l'ensemble $\mathcal{C}$ des sous ensembles fermés de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$, définie par

$$\psi(\mathcal{O}) = \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}).$$

L'application ψ est constante (loin d'être injective) : $\psi(\mathcal{O}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$ pour tout $\mathcal{O}$.

Cependant, on a :

Proposition 2.2.2 *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ admet une suralgèbre presque séparante de degré n .*

C'est à dire, il existe une suralgèbre de Lie $\mathfrak{g}^+$, contenant $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ et une application Φ , polynomiale de degré n , du dual de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ dans celui de $\mathfrak{g}^+$, telle que pour tout ξ de Ω , l'ensemble des orbites $\mathcal{O}$ dans Ω telles que $\overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}) = \overline{\text{Conv}}(G \cdot \xi)$ est fini.

Preuve : L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ admet une suralgèbre de degré n , donnée par le produit direct :

$$\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\Phi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^{+*}, \quad \Phi(X) = (X, \phi(X)) = (X, T_2(X), T_3(X), \dots, T_n(X)).$$

En effet, ϕ est polynomiale, de degré n , et $\phi(g \cdot \xi) = \phi(\xi)$ pour tout g de $SL(n, \mathbb{R})$.

Donc, pour chaque orbite $\mathcal{O} = SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi$ dans Ω ,

$$\begin{aligned} \overline{\text{Conv}}(\Phi(\mathcal{O})) &= \overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}) \times \{(T_2(\xi), \dots, T_n(\xi))\} \\ &= \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^* \times \{(T_2(\xi), \dots, T_n(\xi))\}. \end{aligned}$$

Posons $\psi^+(\mathcal{O}) = \overline{\text{Conv}}(\Phi(\mathcal{O}))$.

Donc $\mathcal{O}' = SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi'$ est une orbite dans Ω telle que $\psi^+(\mathcal{O}') = \psi^+(\mathcal{O})$ si et seulement si $T_k(\xi') = T_k(\xi)$ pour tout k .

On a vu que si n est impair, ou n est pair et ξ dans $\Omega_{r,s}$, avec $r > 0$, ceci implique $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$, et si n est pair, et ξ dans $\Omega_{0,s}$, alors il existe des nombres non réels $a_k + ib_k$ tel que :

$$\{\mathcal{O}, \mathcal{O}'\} \subset \{SL(n, \mathbb{R}) \cdot D(a_k + ib_k), SL(n, \mathbb{R}) \cdot D^-(a_k + ib_k)\}.$$

Ceci prouve que $(\mathfrak{g}^+, \Phi)$ est une suralgèbre presque séparante de degré n pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. $\square$

2.3 Suralgèbre presque séparante de degré p d'une algèbre de Lie

Définition 2.3.1

Soit G un groupe de Lie réel, et (π, V) une représentation de dimension finie de G . On note par $G^+ = G \ltimes V$ la structure de groupe de Lie définie sur $G \times V$ par la multiplication :

$$(g, v) \cdot (g', v') = (gg', v + \pi(g)v').$$

Si $X \mapsto \pi'(X)$ est la représentation de $\mathfrak{g}$, dérivée de π , alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{g} \ltimes V$ de G^+ est l'espace $\mathfrak{g} \oplus V$ muni du crochet :

$$[(X, u), (X', u')] = ([X, X'], \pi'(X)u' - \pi'(X')u).$$

Pour chaque u de V , on note ψ_u l'application linéaire $\psi_u : \mathfrak{g} \longrightarrow V$, définie par $\psi_u(X) = \pi'(X)u$. Donc, en identifiant $(\mathfrak{g}^+)^*$ avec $\mathfrak{g}^* \times V^*$, l'action coadjointe de G^+ est :

$$(g, v) \cdot (\xi, f) = (g \cdot \xi + {}^t\psi_v({}^t\pi(g^{-1})f), {}^t\pi(g^{-1})f).$$

On notera $\pi^*(g) = {}^t\pi(g^{-1})$.

Soit $\Phi : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^{+*}$ une application telle que $p \circ \Phi = id$, alors $\Phi(\xi) = (\xi, \phi(\xi))$. On ne suppose pas ϕ linéaire.

Supposons que $\Phi(G \cdot \xi) = G^+ \cdot \Phi(\xi)$, alors, pour tout g dans G , et tout v dans V , il existe g' dans G tel que

$$\begin{cases} \pi^*(g)\phi(\xi) = \phi(g' \cdot \xi), \\ g \cdot \xi + ({}^t\psi_v \circ \pi^*(g))\phi(\xi) = g' \cdot \xi = g \cdot \xi + {}^t\psi_v \circ \phi(g' \cdot \xi). \end{cases}$$

Si $v = 0$, la dernière relation est exactement $g \cdot \xi = g' \cdot \xi$, par suite $\pi^*(g)\phi(\xi) = \phi(g \cdot \xi)$. Ainsi :

Lemme 2.3.1 *ϕ est un opérateur d'entrelacement non linéaire entre la représentation coadjointe et la représentation π^* .*

A partir de maintenant, on suppose que ϕ est une application polynomiale de degré p , d'où ϕ s'écrit :

$$\phi(\xi) = b_1(\xi) + b_2(\xi \cdot \xi) + \cdots + b_p(\xi \cdot \cdots \cdot \xi),$$

où b_k est une application linéaire de $S^k(\mathfrak{g}^*)$ dans V^* . Maintenant, le lemme précédent implique que chaque application b_k est un opérateur d'entrelacement entre les actions naturelles de G :

$$b_k(g \cdot (\xi_1 \cdot \cdots \cdot \xi_k)) = b_k(g \cdot \xi_1 \cdots g \cdot \xi_k) = \pi^*(g)(b_k(\xi_1 \cdots \xi_k)).$$

Posons alors :

$$S_p(\mathfrak{g}^*) = \mathfrak{g}^* \oplus S^2(\mathfrak{g}^*) \oplus \cdots \oplus S^p(\mathfrak{g}^*),$$

et

$$b : S_p(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow V^*, \quad b(v_1 + v_2 + \cdots + v_p) = b_1(v_1) + \cdots + b_p(v_p).$$

Notons U le sous module $U = b(S_p(\mathfrak{g}^*))$ de V^* . Posons $W = V/U^\perp$, W est un module quotient de V et $W^* \simeq U$.

Lemme 2.3.2 *Si $(\mathfrak{g} \ltimes V, \phi)$ est une suralgèbre presque séparante de $\mathfrak{g}$, alors $(\mathfrak{g} \ltimes W, \tilde{\phi})$, où*

$$\tilde{\phi}(\xi) = b(\xi + \xi \cdot \xi + \cdots + \xi \cdot \dots \cdot \xi)$$

est aussi une suralgèbre presque séparante de $\mathfrak{g}$.

Preuve : On identifie W^* avec U , on note ι l'injection canonique de U dans V^* , et on pose $j(\xi, v) = (\xi, \iota(v))$. Alors $\phi(\xi) = \iota \circ \tilde{\phi}(\xi)$ et on remplace l'application Φ par $\tilde{\Phi} = j \circ \Phi$. Par conséquent

$$\overline{\text{Conv}} \left(\tilde{\Phi}(G \cdot \xi) \right) = j \left(\overline{\text{Conv}} \left(\Phi(G \cdot \xi) \right) \right),$$

et $\overline{\text{Conv}} \left(\tilde{\Phi}(G \cdot \xi) \right) = \overline{\text{Conv}} \left(\tilde{\Phi}(G \cdot \xi') \right)$ si et seulement si $\overline{\text{Conv}} \left(\Phi(G \cdot \xi) \right) = \overline{\text{Conv}} \left(\Phi(G \cdot \xi') \right)$.

Cela signifie que $(\mathfrak{g} \ltimes W, \tilde{\phi})$ est une suralgèbre presque séparante de $\mathfrak{g}$. □

Supposons maintenant $\mathfrak{g}$ semi-simple déployée, tous ses modules de dimension finie sont semi simples. Par conséquent W^* , isomorphe à $S_p(\mathfrak{g}^*) / \ker b$ est isomorphe à un sous module de $S_p(\mathfrak{g}^*)$. On considère donc W comme un sous module de $S_p(\mathfrak{g}) \simeq (S_p(\mathfrak{g}^*))^*$, b est vu comme un opérateur d'entrelacement linéaire de $S_p(\mathfrak{g}^*)$ dans lui même. Finalement, si τ est l'application canonique $\tau(\xi) = \xi + \xi \cdot \xi + \dots + \xi \cdot \dots \cdot \xi$, $\tilde{\phi}$ devient

$$\tilde{\phi}(\xi) = b_1(\xi) + \cdots + b_p(\xi \cdot \dots \cdot \xi) = b(\tau(\xi)).$$

Corollaire 2.3.1

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée, admettant une suralgèbre presque séparante de degré p , alors il existe un opérateur d'entrelacement b pour $S_p(\mathfrak{g}^)$ tel que $(\mathfrak{g} \ltimes S_p(\mathfrak{g}), b \circ \tau)$ est une suralgèbre presque séparante de $\mathfrak{g}$.*

2.4 Le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ et $p = 2$

2.4.1 Le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

On suppose maintenant $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Rappelons les notations usuelles (cf. [F-H]).

L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est une algèbre réelle simple, déployée pour la sous algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, donnée par l'ensemble des matrices diagonales $H = D(c_1, \dots, c_n)$. Pour ces $H \in \mathfrak{h}$, on note $L_i(H) = c_i$, les L_i sont dans $\mathfrak{h}^*$, ils satisfont $L_1 + \cdots + L_n = 0$. On choisit

le système usuel des racines simples, i.e. les formes $\alpha_i = L_i - L_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-1$). Le système des racines positives est l'ensemble des formes $L_i - L_j$, avec $i < j$. Si $e_{ij} = (x_{rs})$ est la matrice $n \times n$ telle que $x_{rs} = \delta_{ri}\delta_{sj}$, alors pour tout H dans $\mathfrak{h}$,

$$\mathrm{ad}(H)e_{ij} = \begin{cases} (\alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1})(H)e_{ij} = (L_j - L_i)(H)e_{ij}, & \text{si } i < j \\ -(\alpha_j + \cdots + \alpha_{i-1})(H)e_{ij} = -(L_i - L_j)(H)e_{ij}, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Les poids fondamentaux sont $\omega_k = L_1 + \cdots + L_k$ ($1 \leq k \leq n-1$) et les modules simples sont exactement les modules notés $\Gamma_{a_1 \dots a_{n-1}}$ de plus haut poids $a_1\omega_1 + \cdots + a_{n-1}\omega_{n-1}$, a_k entier naturel. De plus, le module dual de $\Gamma_{a_1 \dots a_{n-1}}$ est le module $\Gamma_{a_{n-1} \dots a_1}$. (cf. [F-H]).

On considère maintenant le module $S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ i.e. l'espace engendré par les $X_{i_1} \cdots X_{i_k}$ sur lequel $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ agit par l'action adjointe ad définie par :

$$ad_X(X_{i_1} \cdots X_{i_k}) = \sum_{r=1}^k X_{i_1} \cdots [X, X_{i_r}] \cdots X_{i_k}.$$

Lemme 2.4.1 *L'espace $S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ est auto-dual i.e. $(S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})))^* \simeq S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$.*

Preuve : Soit $X \mapsto X^s$ l'opération de symétrie par rapport à la deuxième diagonale donnée par $X^s = (x_{ij}^s)$ avec $x_{ij}^s = x_{(n+1-j)(n+1-i)}$ si X est la matrice $X = (x_{ij})$. Cette opération s laisse $\mathfrak{h}$ invariante. Pour tout poids ω , on pose $\omega^s(H) = \omega(H^s)$. En particulier, $L_i^s = L_{n+1-i}$ et $\omega_j^s = -\omega_{n-j}$.

Par ailleurs, s permute les espaces radiciels, puisque $e_{ij}^s = e_{(n+1-j)(n+1-i)}$, ou, si H appartient à $\mathfrak{h}$ et $i < j$,

$$[H, e_{ij}^s] = -(L_i^s - L_j^s)(H)e_{ij}^s.$$

On étend s à $S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$, en posant $(X_{i_1} \cdots X_{i_k})^s = X_{i_1}^s \cdots X_{i_k}^s$. Maintenant, l'application $v \mapsto v^s$ est une involution.

Supposons maintenant que le module $\Gamma_{a_1 \dots a_{n-1}}$ apparaisse dans la décomposition de $S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$. Donc, il existe un vecteur non nul $v_{a_1, \dots, a_{n-1}}$ tel que, pour tout H dans $\mathfrak{h}$, et pour tout $i < j$,

$$ad_H(v_{a_1 \dots a_{n-1}}) = (a_1\omega_1 + \cdots + a_{n-1}\omega_{n-1})(H)v_{a_1 \dots a_{n-1}}, \quad ad_{e_{ij}}(v_{a_1 \dots a_{n-1}}) = 0.$$

Le vecteur non nul $v_{a_1 \dots a_{n-1}}^s$ vérifie, pour tout H dans $\mathfrak{h}$, et tout $i < j$,

$$\begin{aligned} ad_H(v_{a_1 \dots a_{n-1}}^s) &= -(a_1 \omega_1 + \dots + a_{n-1} \omega_{n-1})^s(H) v_{a_1 \dots a_{n-1}}^s \\ &= (a_{n-1} \omega_1 + \dots + a_1 \omega_{n-1})(H) v_{a_1 \dots a_{n-1}}^s, \\ ad_{e_{ij}}(v_{a_1 \dots a_{n-1}}^s) &= 0. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(\Gamma_{a_1 \dots a_{n-1}})^s \simeq \Gamma_{a_{n-1} \dots a_1} = (\Gamma_{a_1 \dots a_{n-1}})^*.$$

apparaît aussi dans $S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$. Ceci prouve le lemme. □

2.4.2 Le cas $p = 2$

Regardons, pour $k = 1$ et $k = 2$, les opérateurs d'entrelacement de $S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))^*$ et $(S^k(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})))^*$.

Pour $k = 1$, $S^1(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ est simple, isomorphe à $\Gamma_{10 \dots 01}$, l'espace de ces opérateurs d'entrelacement est unidimensionnel et engendré par l'application P_0 définie par :

$$\langle P_0(\xi), X \rangle = Tr(\xi X).$$

Par conséquent, un opérateur d'entrelacement b_1 est $b_1 = a_0 P_0$, avec a_0 réel.

Pour $k = 2$, le module $S^2(\mathfrak{g})$ est la somme de trois ou quatre modules irréductibles, tous de types différents. Avec nos notations :

- Le vecteur de plus haut poids dans $S^2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$ est

$$v_{20 \dots 02} = e_{1n} \cdot e_{1n}.$$

Le poids de ce vecteur est $2\omega_1 + 2\omega_{n-1} = 2L_1 - 2L_n$. Il existe un module simple $\Gamma_{20 \dots 02}$ de dimension (cf. [F-H]) :

$$\dim \Gamma_{20 \dots 02} = \frac{4+n-1}{n-1} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{2+n-j}{n-j} \frac{2+j-1}{j-1} = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}.$$

- Parmi les vecteurs poids de poids $\omega_2 + \omega_{n-2} = L_1 - L_n + L_2 - L_{n-1}$, et si $n > 3$, il en existe un qui est annulé par l'action de $e_{i(i+1)}$, $1 \leq i \leq (n-1)$. Ce vecteur poids est :

$$v_{010 \dots 010} = e_{2n} \cdot e_{1(n-1)} - e_{2(n-1)} \cdot e_{1n}.$$

Il existe un module simple $\Gamma_{010\dots 010}$ de dimension :

$$\begin{aligned} \dim \Gamma_{010\dots 010} &= \frac{n^2(n+1)}{4(n-2)^2(n-3)} \cdot \prod_{j=3}^{n-2} \frac{1+(j-1)}{j-1} \frac{1+(j-2)}{j-2} \frac{1+(n-1)-j}{n-1-j} \frac{1+n-j}{n-j} \\ &= \frac{n^2(n+1)(n-3)}{4}. \end{aligned}$$

Si $n = 3$, e_{22} n'est pas dans $\mathfrak{sl}(3)$, et cette dimension est 0. Le sous module correspondant n'apparaît pas.

- Parmi les vecteurs poids de poids $\omega_1 + \omega_{n-1} = L_1 - L_n$, il en existe un qui est annulé par l'action de $e_{i(i+1)}$, $1 \leq i \leq (n-1)$. Ce vecteur poids est :

$$v_{10\dots 01} = \sum_{i=1}^n e_{1i} \cdot e_{in} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n e_{jj} \cdot e_{1n}.$$

Donc, il existe un module simple $\Gamma_{10\dots 01}$ de dimension :

$$\dim \Gamma_{10\dots 01} = \frac{2+n-1}{n-1} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{1+n-j}{n-j} \frac{1+j-1}{j-1} = n^2 - 1.$$

- Parmi les vecteurs poids de poids 0, il en existe un qui est annulé par l'action de $e_{i(i+1)}$, $1 \leq i \leq (n-1)$. Ce vecteur poids est :

$$v_{00\dots 00} = 2n \sum_{1 \leq i < j \leq n} e_{ij} \cdot e_{ji} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_{ii} - e_{jj}) \cdot (e_{ii} - e_{jj})$$

Il existe un module simple trivial $\Gamma_{00\dots 00}$, de dimension 1.

Par conséquent, puisque la somme de ces dimensions est $\frac{n^2(n^2-1)}{2} = \dim(S^2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})))$, alors

$$S^2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) \simeq \begin{cases} \Gamma_{20\dots 02} \oplus \Gamma_{10\dots 01} \oplus \Gamma_{010\dots 010} \oplus \Gamma_{0\dots 0}, & \text{si } n > 3 \\ \Gamma_{22} \oplus \Gamma_{11} \oplus \Gamma_{00}, & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

Maintenant, on définit explicitement les opérateurs d'entrelacement P_1, P_2, P_3 et P_4 , de $S^2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*)$ dans $(S^2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})))^*$ par : pour tout $\xi, \eta \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$ et $X, Y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$:

- $\langle P_1(\xi \cdot \eta), X \cdot Y \rangle = Tr(\xi X \eta Y) + Tr(\xi Y \eta X),$
- $\langle P_2(\xi \cdot \eta), X \cdot Y \rangle = Tr(\xi X)Tr(\eta Y) + Tr(\xi Y)Tr(\eta X),$
- $\langle P_3(\xi \cdot \eta), X \cdot Y \rangle = Tr(\xi \eta X Y) + Tr(\xi \eta Y X) + Tr(\eta \xi X Y) + Tr(\eta \xi Y X),$
- $\langle P_4(\xi \cdot \eta), X \cdot Y \rangle = Tr(\xi \eta)Tr(XY).$

Un calcul direct donne :

- $P_2(v_{20\dots 02}) = P_3(v_{20\dots 02}) = P_4(v_{20\dots 02}) = 0$, et $\langle P_1(v_{20\dots 02}), e_{n1} \cdot e_{n1} \rangle = 1 \neq 0$,
- $P_3(v_{010\dots 010}) = P_4(v_{010\dots 010}) = 0$, et $\langle P_2(v_{010\dots 010}), e_{n2} \cdot e_{(n-1)1} \rangle = 4 \neq 0$ ($n > 3$),
- $P_4(v_{10\dots 01}) = 0$, et $\langle P_3(v_{10\dots 01}), e_{n2} \cdot e_{21} \rangle \neq 0$,
- $P_4(v_{00\dots 00}) \neq 0$.

Ainsi, si $n > 3$, tout opérateur d'entrelacement b_2 est de la forme :

$$b_2 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + a_4 P_4, \quad \text{où } a_i \text{ sont des constantes réelles.}$$

Si $n = 3$, on peut écrire :

$$b_2 = a_1 P_1 + a_3 P_3 + a_4 P_4, \quad \text{où } a_i \text{ sont des constantes réelles.}$$

Remarque 2.4.1 *D'abord, nous rappelons que pour $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, les formes*

$$(A_1, \dots, A_m) \mapsto Tr(A_{i_1} \dots A_{i_k})$$

sont des fonctions invariantes qui engendrent $K[End(V)^m]^{GL(V)}$ (voir [H-C]).

Remarquons qu'il y a 24 produits possibles de 4 matrices, qui dépendent de la position des matrices dans le produit. Si on prend la trace de ces produits, alors il y a uniquement 6 formes distinctes, puisque, pour tout $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$:

$$Tr(A_1 A_2 A_3 A_4) = Tr(A_2 A_3 A_4 A_1) = Tr(A_3 A_4 A_1 A_2) = Tr(A_4 A_1 A_2 A_3).$$

Puisqu'on cherche ici à construire des formes symétriques en ξ, η et X, Y , il y a uniquement 4 formes symétriques obtenues comme produit de traces de produit de matrices. Ces formes sont les 4 formes décrites ci-dessus.

2.4.3 Non existence de suralgèbre presque séparante de degré 2 pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$

Supposons que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ admette une suralgèbre presque séparante de degré 2, alors d'après le corollaire 2.3.1, on peut supposer que cette suralgèbre est

$$\mathfrak{g}^+ = (\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \ltimes S_2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})), b \circ \tau),$$

avec $b = a_0 P_0 + a_1 P_1 + \cdots + a_4 P_4$.

Pour tout ξ dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$ et tout $v \in S_2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$, posons $\zeta = \xi + {}^t \psi_v(b \circ \tau(\xi))$.

Lemme 2.4.2 *Si $\mathfrak{g}^+$ est une suralgèbre presque séparante pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, alors pour tout ξ de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ et tout v de $S_2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$, les polynômes caractéristiques de ξ et ζ coïncident : $C_\xi = C_\zeta$, en particulier, ξ et ζ ont les mêmes valeurs propres.*

Preuve : Pour toute matrice ξ de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^*$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe ξ_ε dans Ω tel que $\|\xi - \xi_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Puisque $(\mathfrak{g}^+, b \circ \tau)$ est presque séparante, ξ_ε est dans Ω , et $\zeta_\varepsilon = \xi_\varepsilon + {}^t \psi_v(b \circ \tau(\xi_\varepsilon))$ appartient à la projection de la G^+ -orbit de $\Phi(\xi_\varepsilon)$, il appartient donc à la $SL(n, \mathbb{R})$ -orbite de ξ_ε et

$$\det(\zeta_\varepsilon - tI) = \det(\xi_\varepsilon - tI), \quad \forall t.$$

Si ε tend vers 0, alors, pour tout t , $C_\xi(t) = C_\zeta(t)$.

□

Théorème 2.4.1 *Pour $n > 2$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré 2.*

Preuve :

Supposons qu'il existe une suralgèbre presque séparante comme ci-dessus pour $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, et on garde nos notations, en particulier :

$$b \circ \tau(\xi) = a_0 P_0(\xi) + (a_1 P_1 + \cdots + a_4 P_4)(\xi \cdot \xi).$$

Par conséquent, pour tout ξ de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, et tout v de $S_2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}))$, ξ et $\zeta = \xi + {}^t \psi_v(\phi(\xi))$ ont les mêmes valeurs propres. On montrera que ceci implique $a_0 = a_1 = \cdots = a_3 = 0$,

donc $b \circ \tau(\xi) = a_4 P_4(\xi \cdot \xi)$, mais cette fonction ne sépare pas les orbites coadjointes dans Ω .

Choisissons d'abord $v = U \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Ainsi $\zeta = \xi + a_0[U, \xi]$. Mais, en choisissant $U = e_{n1} + e_{(n-1)2}$ et $\xi = e_{1n} + e_{2(n-1)}$, on obtient alors

$$C_\zeta(t) = \det(\zeta - tI) = (-t)^{n-4}(t^2 - a_0^2)^2 = C_\xi(t) = (-t)^n,$$

Ceci implique $a_0 = 0$.

Maintenant on pose $v = X \cdot X$, donc un calcul direct donne :

$${}^t\psi_{X \cdot X}(b \circ \tau(\xi)) = \begin{cases} 4a_1[X, \xi X \xi] + 4a_2 \text{Tr}(\xi X)[X, \xi] + 4a_3[X^2, \xi^2], & \text{si } n > 3, \\ 4a_1[X, \xi X \xi] + 4a_3[X^2, \xi^2], & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

Choisissons $\xi = e_{1n}$ et $X = e_{n1}$. Donc $X^2 = \xi^2 = 0$ et :

$${}^t\psi_{X \cdot X}(b \circ \tau(\xi)) = \begin{cases} (4a_1 + 4a_2)(-e_{11} - e_{22} + e_{(n-1)(n-1)} + e_{nn}), & \text{si } n > 3, \\ 4a_1(e_{33} - e_{22}), & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

Par conséquent

$$(-t)^n = C_\xi(t) = C_\zeta(t) = \begin{cases} (-t)^{n-2}(t^2 - (4a_1 + 4a_2)^2), & \text{si } n > 3, \\ -t(t^2 - (4a_1)^2), & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

On obtient $a_1 + a_2 = 0$ si $n > 3$ et $a_1 = 0$ si $n = 3$.

Supposons maintenant $n > 3$, et choisissons $\xi = e_{1n} + e_{2(n-1)}$ et

$$X = {}^t\xi = e_{n1} + e_{(n-1)2}.$$

Ces matrices sont nilpotentes, et on obtient

$${}^t\psi_{X \cdot X}(\phi(\xi)) = (4a_1 + 8a_2)(-e_{11} - e_{22} + e_{(n-1)(n-1)} + e_{nn})$$

et

$$(-t)^n = C_\xi(t) = C_\zeta(t) = (-t)^{(n-4)}(t^2 - (4a_1 + 8a_2)^2)^2,$$

donc $a_1 + 2a_2 = 0$. Finalement, $a_1 = a_2 = 0$.

Maintenant on choisit $\xi = e_{1(n-1)} + e_{(n-1)n}$ et $X = {}^t \xi = e_{(n-1)1} + e_{n(n-1)}$, donc

$$X^2 = e_{n1}, \quad \xi^2 = e_{1n}, \quad [X^2, \xi^2] = -e_{11} + e_{nn}.$$

D'où

$${}^t \psi_{X \cdot X}(b \circ \tau(\xi)) = 4a_3(-e_{11} + e_{nn})$$

et

$$(-t)^n = C_\xi(t) = C_\zeta(t) = (-t)^{(n-2)}(t^2 - (4a_3)^2), \quad a_3 = 0.$$

Maintenant, la suralgèbre $\mathfrak{g}^+$ est $(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \ltimes S_2(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})), a_4 P_4 \circ \tau)$.

Mais cette suralgèbre n'est pas séparante, en effet, pour tout t dans $[0, 1/\sqrt{3}]$, et toute matrice $M = D(c_4, \dots, c_n) \in \mathfrak{sl}(n-3, \mathbb{R})$, avec $|c_k| > 2$, on pose

$$\xi_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t + \sqrt{4-3t^2}) & & & \\ & \frac{1}{2}(t - \sqrt{4-3t^2}) & & \\ & & -t & \\ & & & M \end{pmatrix}.$$

Pour tout t , ξ_t est dans Ω , et $\langle P_4(\xi_t \cdot \xi_t), X \cdot Y \rangle = (2 + \sum_k c_k^2) \text{Tr}(XY)$. Cela signifie que, si $\mathcal{O}_t = SL(n, \mathbb{R}) \cdot \xi_t$,

$$\psi^+(\mathcal{O}_t) = \overline{\text{Conv}}(\Phi(\mathcal{O}_t)) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})^* \times \{U + X \cdot Y \mapsto a_4(2 + \sum_k c_k^2) \text{Tr}(XY)\} = \psi^+(\mathcal{O}_0).$$

D'autre part, $\det(\xi_t) = t(1-t^2) \prod_k c_k$, et la fonction $t \mapsto t(1-t^2)$ est bijective sur $[0, 1/\sqrt{3}]$, donc pour tout $t \neq t'$, $\mathcal{O}_t \neq \mathcal{O}_{t'}$. □

Si $n = 2$, on a vu dans le chapitre 1 (voir aussi [A-S-Z]) que la suralgèbre $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}, [\xi \mapsto \text{Tr}(\xi^2)])$ est une suralgèbre presque séparante de degré 2 pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

De même, $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré 2 mais $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ admet une suralgèbre presque séparante de degré 3.

Dans la section suivante, on montrera que $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré 2 ou 3, mais elle admet une suralgèbre presque séparante de degré 4.

2.5 Le cas $n = 4$ et $p = 3$

Dans cette section, on utilise le même genre d'arguments que dans la section précédente. Cependant, on présente ici uniquement le résultat de ces calculs fastidieux.

2.5.1 Décomposition de $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$

Le module $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$ est un sous module auto-dual de $S^2(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})) \otimes \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$. La décomposition de $S^2(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})) \otimes \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ est donnée par la règle de Littlewood-Richardson (cf. [F-H]), comme suit :

$$\begin{aligned} S^2(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})) \otimes \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) &= (\Gamma_{303} + \Gamma_{121} + \Gamma_{202} + \Gamma_{101}) + (\Gamma_{121} + \Gamma_{202} + \Gamma_{101} + \Gamma_{311} + \Gamma_{113}) \\ &\quad + 3(\Gamma_{210} + \Gamma_{012}) + 2\Gamma_{020} + 3\Gamma_{101} + \Gamma_{000} \\ &= U + V + W, \end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned} U &= \Gamma_{303} + \Gamma_{121} + \Gamma_{202} + \Gamma_{101}, \\ V &= \Gamma_{121} + \Gamma_{202} + \Gamma_{101} + \Gamma_{311} + \Gamma_{113}, \\ W &= 3(\Gamma_{210} + \Gamma_{012}) + 2\Gamma_{020} + 3\Gamma_{101} + \Gamma_{000}. \end{aligned}$$

Il y a 4 vecteurs de plus haut poids naturels dans $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$ qui sont, avec nos notations, $w_{303} = v_{202} \cdot e_{14}$, $w_{121} = v_{020} \cdot e_{14}$, $w_{202} = v_{101} \cdot e_{14}$ et $w_{101} = v_{000} \cdot e_{14}$. Ces vecteurs sont les vecteurs de plus haut poids pour les modules simples Γ_{303} , Γ_{121} , Γ_{202} et Γ_{101} . On déduit l'inclusion :

$$U \subset S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})).$$

Dans $S^2(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})) \otimes \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, les vecteurs de plus haut poids $v_{020} \otimes e_{14} - v_{020} \cdot e_{14}$, $v_{101} \otimes e_{14} - v_{101} \cdot e_{14}$ et $v_{000} \otimes e_{14} - v_{000} \cdot e_{14}$ apparaissent aussi. Les modules simples correspondants de ces vecteurs sont, respectivement, Γ_{121} , Γ_{202} et Γ_{101} . Puisque ces vecteurs sont non symétriques, alors leurs modules correspondants ne sont pas des sous modules de $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$.

De même, le vecteur de plus haut poids de Γ_{311} est $e_{14} \otimes e_{13} \otimes e_{14} - e_{14} \cdot e_{13} \cdot e_{14}$ qui n'est pas symétrique, alors Γ_{311} n'apparaît pas dans $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$, et Γ_{113} n'apparaît pas non plus.

On a alors :

$$U \subset S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})) \subset S^2(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})) \otimes \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})/V.$$

De plus,

– A l'aide de l'argument de dimension, on obtient :

$$\dim(S^3(\mathfrak{sl}(4))) - \dim U = 680 - 574 = 106$$

– L'espace invariant supplémentaire W' dans $S^3(\mathfrak{sl}(4))$ à U est un sous-module de W .
Il a une décomposition (par symétrie) :

$$W' = a(\Gamma_{210} + \Gamma_{012}) + b\Gamma_{020} + c\Gamma_{101} + d\Gamma_{000} \subset W,$$

avec $a \leq 3, b \leq 2, c \leq 3, d \leq 1$.

– En calculant les dimensions, on a l'équation :

$$2a \times 45 + b \times 20 + c \times 15 + d \times 1 = 106,$$

avec les contraintes sur a, b, c , et d , la seule solution est : $a = 1, b = 0, c = 1$, et $d = 1$.

On obtient finalement :

$$S^3(\mathfrak{sl}(4)) = U + W' = \Gamma_{303} + \Gamma_{121} + \Gamma_{202} + \Gamma_{101} + \Gamma_{101} + \Gamma_{210} + \Gamma_{012} + \Gamma_{000}.$$

Les vecteurs de plus haut poids correspondants w_{303} , w_{121} , w_{202} et w_{101} sont connus. Recherchons maintenant les vecteurs de plus haut poids des quatre autres modules simples, nous trouvons d'abord

$$w_{210} = e_{12} \cdot e_{24} \cdot e_{13} - e_{12} \cdot e_{23} \cdot e_{14} - e_{14} \cdot e_{43} \cdot e_{14} + e_{13} \cdot e_{34} \cdot e_{13} + (e_{44} - e_{33}) \cdot e_{13} \cdot e_{14},$$

et $w_{012} = w_{210}^s$.

Pour les deux derniers modules, posons

$$e'_{ij} = 2(e_{i1} \cdot e_{1j} + e_{i2} \cdot e_{2j} + e_{i3} \cdot e_{3j} + e_{i4} \cdot e_{4j}) - (e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}) \cdot e_{ij}.$$

Alors on obtient les vecteurs de plus haut poids w'_{101} et w_{000} (w_{000} n'est pas développé) :

$$\begin{aligned}
w'_{101} &= 2(e_{11} \cdot e'_{14} + e_{12} \cdot e'_{24} + e_{13} \cdot e'_{34} + e_{14} \cdot e'_{44}) - (e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}) \cdot e'_{14} \\
&= 2e_{12} \cdot (2e_{23} \cdot e_{34} + 2e_{21} \cdot e_{14} + (e_{22} - e_{11}) \cdot e_{24} - (e_{33} - e_{44}) \cdot e_{24}) + \\
&\quad + 2e_{13} \cdot (2e_{32} \cdot e_{24} + 2e_{31} \cdot e_{14} + (e_{33} - e_{11}) \cdot e_{34} + (e_{44} - e_{22}) \cdot e_{34}) + \\
&\quad + (e_{11} - e_{22}) \cdot (2e_{12} \cdot e_{24} + 2e_{13} \cdot e_{34} + (e_{11} - e_{22}) \cdot e_{14} - \\
&\quad - (e_{33} - e_{44}) \cdot e_{14}) - (e_{33} - e_{44}) \cdot (2e_{12} \cdot e_{24} + 2e_{13} \cdot e_{34} + (e_{11} - e_{22}) \cdot e_{14} - (e_{33} - e_{44}) \cdot e_{14}), \\
w_{000} &= 4(e_{12} \cdot e'_{21} + e'_{12} \cdot e_{21} + e_{13} \cdot e'_{31} + e'_{13} \cdot e_{31} + e_{14} \cdot e'_{41} + e'_{14} \cdot e_{41} + \\
&\quad + e_{23} \cdot e'_{32} + e'_{23} \cdot e_{32} + e_{24} \cdot e'_{42} + e'_{24} \cdot e_{42} + e_{34} \cdot e'_{43} + e'_{34} \cdot e_{43}) + \\
&\quad + (e_{11} - e_{22}) \cdot (e'_{11} - e'_{22}) + (e_{11} - e_{33}) \cdot (e'_{11} - e'_{33}) + (e_{11} - e_{44}) \cdot (e'_{11} - e'_{44}) + \\
&\quad + (e_{22} - e_{33}) \cdot (e'_{22} - e'_{33}) + (e_{22} - e_{44}) \cdot (e'_{22} - e'_{44}) + (e_{33} - e_{44}) \cdot (e'_{33} - e'_{44}).
\end{aligned}$$

2.5.2 Les formes trace et opérateurs d'entrelacement pour $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$

Comme ci-dessus, on a 12 formes trace. Notons par ξ, η et ζ les éléments de $(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))^*$, et X, Y, Z les éléments de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$. Les formes trace sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
T_1 &= Tr(\xi\eta\zeta XYZ), & T_2 &= Tr(\xi\eta X\zeta YZ), & T_3 &= Tr(\xi\eta XY\zeta Z), \\
T_4 &= Tr(\xi X\eta Y\zeta Z), & T_5 &= Tr(\xi\eta\zeta X)Tr(YZ), & T_6 &= Tr(\xi\eta XY)Tr(\zeta Z), \\
T_7 &= Tr(\xi XYZ)Tr(\eta\zeta), & T_8 &= Tr(\xi X\eta Y)Tr(\zeta Z), & T_9 &= Tr(\xi\eta\zeta)Tr(XYZ), \\
T_{10} &= Tr(\xi\eta X)Tr(\zeta YZ), & T_{11} &= Tr(\xi\eta)Tr(\zeta X)Tr(YZ), & T_{12} &= Tr(\xi X)Tr(\eta Y)Tr(\zeta Z).
\end{aligned}$$

Pour chaque i , on pose

$$S_i(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3, X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3, \tau \in \mathfrak{S}_3} T_i(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \xi_{\sigma(3)}, X_{\tau(1)}, X_{\tau(2)}, X_{\tau(3)}).$$

Rappelons que, dans la section précédente, on a trouvé 8 vecteurs de plus haut poids de la décomposition de $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$, i.e. le système libre

$$(w^1, \dots, w^8) = (w_{303}, w_{121}, w_{202}, w_{210}, w_{012}, w_{101}, w'_{101}, w_{000}).$$

Notons $(e_{i_1 j_1} \cdot e_{i_2 j_2} \cdot e_{i_3 j_3})^t$ le vecteur $e_{j_1 i_1} \cdot e_{j_2 i_2} \cdot e_{j_3 i_3}$, soit M la matrice avec 8 lignes et 12 colonnes dont les entrées sont les nombres

$$\langle S_i(w^k), (w^k)^t \rangle \quad (i = 1, \dots, 12, \quad k = 1, \dots, 8).$$

A l'aide d'un programme informatique, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est 8, et on obtient la base suivante des opérateurs d'entrelacement :

$$\begin{aligned} \langle P_1(\xi \cdot \eta \cdot \zeta), X \cdot Y \cdot Z \rangle &= \text{Sym}(\text{Tr}(\xi \eta \zeta X Y Z)), \\ \langle P_2(\xi \cdot \eta \cdot \zeta), X \cdot Y \cdot Z \rangle &= \text{Sym}(\text{Tr}(\xi \eta X \zeta Y Z)), \\ \langle P_3(\xi \cdot \eta \cdot \zeta), X \cdot Y \cdot Z \rangle &= \text{Sym}(\text{Tr}(\xi \eta X Y \zeta Z)), \\ \langle P_4(\xi \cdot \eta \cdot \zeta), X \cdot Y \cdot Z \rangle &= \text{Sym}(\text{Tr}(\xi X \eta Y \zeta Z)), \\ \langle P_5(\xi \cdot \eta \cdot \zeta), X \cdot Y \cdot Z \rangle &= \text{Sym}(\text{Tr}(\xi \eta \zeta X) \text{Tr}(Y Z)), \\ \langle P_6(\xi \cdot \eta \cdot \zeta), X \cdot Y \cdot Z \rangle &= \text{Sym}(\text{Tr}(\xi X \eta Y) \text{Tr}(\zeta Z)), \\ \langle P_7(\xi \cdot \eta \cdot \zeta), X \cdot Y \cdot Z \rangle &= \text{Sym}(\text{Tr}(\xi \eta X) \text{Tr}(\zeta Y Z)), \\ \langle P_8(\xi \cdot \eta \cdot \zeta), X \cdot Y \cdot Z \rangle &= \text{Sym}(\text{Tr}(\xi \eta \zeta) \text{Tr}(X Y Z)). \end{aligned}$$

La notation 'Sym' signifie que l'expression est symétrisée d'une part en ξ, η, ζ et d'autre part en X, Y, Z .

Lemme 2.5.1 *Les applications $P_i : S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))^* \longrightarrow (S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})))^*$ définies ci-dessus, forment une base de l'espace des opérateurs d'entrelacement pour le module $S^3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$.*

2.5.3 $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré 3

Théorème 2.5.1 *L'algèbre $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré 3.*

Preuve : Si $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ admet une suralgèbre presque séparante de degré 3, alors $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ en admet une de la forme

$$(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) \ltimes S_3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})), (b_1 + b_2 + b_3) \circ \tau).$$

Les calculs des sections précédentes donnent $b_1 = 0$, $\langle b_2(\xi \cdot \eta), X \cdot Y \rangle = a_4 \text{Tr}(\xi \eta) \text{Tr}(XY)$ et b_3 est :

$$b_3(\xi \cdot \eta \cdot \zeta) = \sum_{j=1}^8 c_j P_j(\xi \cdot \eta \cdot \zeta).$$

Ainsi, on choisit $v = X \cdot X \cdot X$ dans $S_3(\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}))$ et on calcule ${}^t\psi_v(P_j(\xi \cdot \xi \cdot \xi))$. Explicitement :

$$\begin{aligned} {}^t\psi_v(P_1(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) &= [X^3, \xi^3], \\ {}^t\psi_v(P_2(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) &= [X^2 \xi^2 X, \xi] + [X \xi X^2, \xi^2], \\ {}^t\psi_v(P_3(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) &= [X^2 \xi X, \xi^2] + [X \xi^2 X^2, \xi], \\ {}^t\psi_v(P_4(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) &= 3[X \xi X \xi X, \xi], \\ {}^t\psi_v(P_5(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) &= \text{Tr}(X^2)[X, \xi^3], \\ {}^t\psi_v(P_6(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) &= 2\text{Tr}(\xi X)[X \xi X, \xi] + \text{Tr}(\xi X \xi X)[X, \xi], \\ {}^t\psi_v(P_7(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) &= \text{Tr}(\xi X^2)[X, \xi^2] + \text{Tr}(\xi^2 X)[X^2, \xi], \\ {}^t\psi_v(P_8(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) &= 0. \end{aligned}$$

Soit $\xi = e_{14}$, alors $\xi^2 = 0$ et ${}^t\psi_v(P_j(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) = 0$, pour $j = 1, 2, 3, 5, 7$.

Soit maintenant $X = e_{14} + e_{41}$, alors

$${}^t\psi_v(P_4(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) = -3(e_{11} - e_{44}) \quad \text{et} \quad {}^t\psi_v(P_6(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) = 3(e_{11} - e_{44}).$$

Donc, avec les notations ci-dessus,

$$\zeta = \xi + {}^t\psi_v(b \circ \tau(\xi)) = 3(c_6 - c_4)(e_{11} - e_{44}) + e_{14},$$

et

$$C_\zeta(t) = \det(\zeta - tI) = t^2(t^2 - 9(c_6 - c_4)^2) = C_\xi(t) = t^4.$$

On obtient la relation $c_6 - c_4 = 0$.

Soit maintenant $X = e_{14} - e_{41}$, on obtient

$${}^t\psi_v(P_6(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) = 3(e_{11} - e_{44}) \quad \text{et} \quad {}^t\psi_v(P_4(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) = 3(e_{11} - e_{44}).$$

Par conséquent

$$C_\zeta(t) = t^2(t^2 - 9(c_6 + c_4)^2) = t^4 = C_\xi(t),$$

donc $c_6 + c_4 = 0$. Ceci montre que $c_6 = c_4 = 0$.

Choisissons maintenant $\xi = e_{13} + e_{34}$, et $X = {}^t \xi$. Donc

$${}^t \psi_v(P_2(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) = e_{11} + e_{33} - 2e_{44} \quad \text{et} \quad {}^t \psi_v(P_3(\xi \cdot \xi \cdot \xi)) = 2e_{11} - e_{33} - e_{44}.$$

Par conséquent,

$$C_\zeta(t) = -t(c_2 + 2c_3 - t)(c_2 - c_3 - t)(-2c_2 - c_3 - t) = C_\xi(t) = t^4.$$

Ceci implique $c_2 = c_3 = 0$.

Maintenant, soit $\xi = e_{13} + e_{14} + e_{34}$ et $X = {}^t \xi$, alors

$$C_\zeta(t) = -t(-t^3 + t(5c_7^2 + c_7) + 2c_7^3 + c_7^2 + 2c_7) = C_\xi(t) = t^4.$$

Par conséquent $c_7 = 0$.

Choisissons maintenant $\xi = e_{12} + e_{23} + e_{34}$ et $X = {}^t \xi$, alors,

$$C_\zeta(t) = t^2(t^2 - c_1^2) = C_\xi(t) = t^4.$$

Ainsi $c_1 = 0$.

Finalement, on choisit $\xi = e_{12} + e_{23} + e_{34}$ et $X = e_{14} + e_{41}$, d'où

$$C_\zeta(t) = t^2(t^2 - 4c_5^2) = C_\xi(t) = t^4.$$

Par suite $c_5 = 0$.

On obtient finalement :

$$\langle b \circ \tau(\xi), U + X \cdot Y + X' \cdot Y' \cdot Z' \rangle = a_4 \text{Tr}(\xi^2) \text{Tr}(XY) + c_8 \text{Tr}(\xi^3) \text{Tr}(X'Y'Z').$$

Mais alors on considère, pour $0 < t < 1/2$, les matrices

$$\xi_t = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t} & & & \\ & -\sqrt{1+t} & & \\ & & \sqrt{1-t} & \\ & & & -\sqrt{1-t} \end{pmatrix}.$$

Pour tout t , ξ_t est un élément de Ω , et $Tr(\xi_t^2) = 4$ et $Tr(\xi_t^3) = 0$. Posons

$$\mathcal{O}_t = SL(4, \mathbb{R}) \cdot \xi_t,$$

avec nos notations, on obtient comme ci-dessus $\psi^+(\mathcal{O}_t) = \psi^+(\mathcal{O}_0)$, pour tout t .

Par ailleurs, $\det(\xi_t) = (1 - t^2)^2$ et $t \mapsto (1 - t^2)^2$ est bijective sur $[0, 1/2]$, donc $\mathcal{O}_t \neq \mathcal{O}_{t'}$ si $t \neq t'$.

Ainsi, $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré 3.

□

Bien sûr, on peut formuler la conjecture suivante :

Conjecture 2.5.2 *Pour tout n , $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré $n - 1$, mais elle admet une suralgèbre presque séparante de degré n .*

Plus généralement, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle semi simple et déployée, si k est le plus haut degré des générateurs de l'algèbre des fonctions polynomiales invariantes sur $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ admet une suralgèbre presque séparante de degré k , mais elle n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré $k - 1$.

L'hypothèse ' $\mathfrak{g}$ déployée' est nécessaire. En effet, on remarque que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ n'admet aucune suralgèbre presque séparante de degré 1, mais l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ admet une suralgèbre presque séparante de degré 1, puisque ses orbites adjointes sont des sphères qui sont caractérisées par la fermeture de leurs enveloppes convexes.

Chapitre 3

Sur groupe universel

Résumé

Dans les chapitres précédents, pour séparer les représentations unitaires irréductibles π d'un groupe de Lie G par les ensembles moments on construit un surgroupe de Lie G^+ et des extensions de chaque représentation π en une représentation π^+ de G^+ , de telle sorte que l'ensemble moment de π^+ caractérise π .

Dans ce chapitre, nous construisons un surgroupe universel $\tilde{G}$, qui est un groupe de Lie Fréchet de dimension infinie. On étend chaque π en une action hamiltonienne $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$. L'ensemble moment de $\tilde{\pi}$ caractérise la représentation π .

3.1 Le cas d'un espace vectoriel de dimension finie

3.1.1 Généralités

Dans cette section, soient G un groupe de Lie et (π, H) une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert complexe de dimension finie H .

Ainsi l'action de G sur la variété réelle $H_{\mathbb{R}}$ (l'espace vectoriel H vu comme un espace réel), $(g, v) \mapsto \pi(g)(v)$ est de classe C^∞ . Si $(v|w)$ est le produit scalaire sur H (le produit scalaire $(u|v)$ est $\mathbb{C}$ -linéaire par rapport à la variable v et antilinéaire par rapport à la variable u), $H_{\mathbb{R}}$ est un espace de Hilbert réel complet pour le produit scalaire réel :

$$(u|v)_{\mathbb{R}} = \Re(u|v).$$

Donc, on peut identifier l'espace $H_{\mathbb{R}}^*$ des formes linéaires réelles continues de $H_{\mathbb{R}}$ avec $H_{\mathbb{R}}$ lui même : l'application $\flat : H_{\mathbb{R}} \longrightarrow H_{\mathbb{R}}^*$ définie par

$$\langle u^\flat, v \rangle = (u|v)_{\mathbb{R}}$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert réels.

Définition 3.1.1

On définit sur $H_{\mathbb{R}}$ une forme bilinéaire antisymétrique, en posant :

$$\omega^H(w_1, w_2) = \Im(w_1|w_2).$$

Cette forme est non dégénérée puisque $\omega^H(w_1, iw_1) = \|w_1\|^2 > 0$ si $w_1 \neq 0$. Alors $(H_{\mathbb{R}}, \omega^H)$ est une variété C^∞ symplectique.

Sur $(H_{\mathbb{R}}, \omega^H)$, les notions de champ de vecteurs hamiltonien, et de crochet de Poisson sont bien définies.

Le champ de vecteurs hamiltonien w_f défini par f est l'unique champ de vecteur tel que :

$$-df(u)(w) = \omega^H(w_f, w),$$

et le crochet de Poisson de deux fonctions C^∞ f et g est :

$$\{f, g\}(u) = dg(u)(w_f) = \omega^H(w_f, w_g).$$

Puisque, pour tout w_1 de H , l'application $w_2 \mapsto \omega^H(w_1, w_2)$ est une forme linéaire réelle, alors il existe un unique vecteur $w_1^\natural$ dans $H_{\mathbb{R}}^*$ tel que

$$\omega^H(w_1, w_2) = \langle w_1^\natural, w_2 \rangle.$$

Puisque $\omega^H(iw_1, w_2) = -(w_1|w_2)_{\mathbb{R}}$, l'application $\natural$ est, comme l'application $\flat$, un isomorphisme d'espaces réels. Dans la suite, on note par $\sharp$ l'application $-\flat^{-1}$. Ainsi :

Définition 3.1.2

L'isomorphisme $\sharp$ de $H_{\mathbb{R}}^*$ dans $H_{\mathbb{R}}$ est l'unique application linéaire réelle définie par :

$$\omega^H(a^\sharp, w) = -\langle a, w \rangle \quad (a \in H_{\mathbb{R}}^*, w \in H_{\mathbb{R}}).$$

Si f est une fonction réelle C^∞ sur $H_{\mathbb{R}}$, on note sa différentielle par :

$$df(u)(h) = \left\langle \frac{\delta f}{\delta u}, h \right\rangle.$$

Lemme 3.1.1 *Sur la variété symplectique $(H_{\mathbb{R}}, \omega^H)$, le champ de vecteur hamiltonien associé à la fonction f est,*

$$w_f = \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^{\#}.$$

Le crochet de Poisson de deux fonctions C^{∞} f et g est

$$\{f, g\} = \left\langle \frac{\delta g}{\delta u}, \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^{\#} \right\rangle.$$

Preuve :

Avec nos notations, le champ de vecteur hamiltonien w_f définie par f est $\left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^{\#}$, en effet :

$$-df(u)(w) = -\left\langle \frac{\delta f}{\delta u}, w \right\rangle = \omega^H \left(\left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^{\#}, w \right) = \omega^H(w_f, w).$$

Le crochet de Poisson sur $H_{\mathbb{R}}$ est donc

$$\{f, g\}(u) = dg(u)(w_f) = -\omega^H(w_g, w_f) = \left\langle \frac{\delta g}{\delta u}, \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^{\#} \right\rangle.$$

□

3.1.2 Application moment pour une action linéaire

En dérivant l'application $t \mapsto \pi(\exp(t\xi))$, pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, on définit la représentation π' de l'algèbre de Lie :

$$\pi'(\xi)(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi(\exp(t\xi))(v).$$

Rappelons que $\pi(\exp(t\xi)) = e^{t\pi'(\xi)}$ et $\pi'([\xi, \eta]) = [\pi'(\xi), \pi'(\eta)]$.

Remarquons qu'on obtient, avec ces notations :

$$\exp t(\xi, u) = \left(\exp t\xi, \frac{e^{t\pi'(\xi)} - Id}{\pi'(\xi)} u \right).$$

Maintenant $G \ltimes H_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Lie de dimension finie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \ltimes H_{\mathbb{R}}$: l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \times H_{\mathbb{R}}$ muni du crochet

$$[(\xi_1, w_1), (\xi_2, w_2)] = ([\xi_1, \xi_2], \pi'(\xi_1)w_2 - \pi'(\xi_2)w_1).$$

Rappelons que l'action d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique M est hamiltonienne si pour tout ξ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G , il existe une application C^∞ , J_ξ telle que $\xi \mapsto J_\xi$ est linéaire et le champ de vecteurs hamiltonien de J_ξ est le champ de vecteurs infinitésimal de l'action : $(g, x) \mapsto g.x$ tel que :

$$df_x(w_{J_\xi}) = w_{J_\xi} f|_x = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\exp -t\xi.x).$$

Si c'est le cas, on appelle application moment, l'application $\psi : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, définie par $\langle \psi(x), \xi \rangle = J_\xi(x)$.

Remarque 3.1.1

Supposons M connexe. Etant donné l'action de G sur M , chaque fonction hamiltonienne est unique à une constante près, donc l'application moment est unique à une forme fixée φ près dans le dual $\mathfrak{g}^$ de $\mathfrak{g}$. Autrement dit, si x_0 est un point fixé dans M , on peut choisir une unique application moment ψ , en imposant $\psi(x_0) = 0$.*

On considère maintenant le cas $M = H_{\mathbb{R}}$. Le groupe $G \ltimes H_{\mathbb{R}}$ agit sur $H_{\mathbb{R}}$ par :

$$\lambda(g, u)(v) = \pi(g)v + u.$$

On vérifie que c'est une action et que ω^H est préservée :

$$\begin{aligned} - \lambda(g, u)(\lambda(g', u')(v)) &= \pi(g)(\pi(g')v + u') + u \\ &= \pi(gg')v + (\pi(g)u' + u) = \lambda(gg', \pi(g)u' + u)(v), \\ - d(\lambda(g, u))_v(w) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \lambda(g, u)(v + tw) = \pi(g)w, \\ - \omega^H(d(\lambda(g, u))_v(w_1), d(\lambda(g, u))_v(w_2)) &= \mathfrak{Im}(\pi(g)w_1, \pi(g)w_2) = \omega^H(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Lemme 3.1.2 *L'action de $G \ltimes H_{\mathbb{R}}$ sur $H_{\mathbb{R}}$ est hamiltonienne, son application moment qui s'annule à l'origine est :*

$$\langle \psi(v), (\xi, u) \rangle = \frac{1}{2} \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v) + \mathfrak{Im}(u|v)$$

Preuve : Posons

$$J_{(\xi, u)}(v) = \frac{1}{2} \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v) + \mathfrak{Im}(u|v).$$

$J_{(\xi, u)}(0) = 0$ et le champ de vecteur hamiltonien associé est défini par

$$\omega^H(w_{J_{(\xi, u)}}(v), w) = - \left\langle \frac{\delta J_{(\xi, u)}}{\delta v}, w \right\rangle = - \frac{d}{dt}|_{t=0} J_{(\xi, u)}(v + tw) = - \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v + u|w)$$

donc $w_{J_{(\xi,u)}}|_v = -\pi'(\xi)v - u$.

D'autre part, pour toute fonction f de classe C^∞ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\lambda(\exp -t(\xi, u))(v)) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f \left(\pi(\exp -t\xi)(v) - \frac{e^{-t\pi'(\xi)} - Id}{-\pi'(\xi)} u \right) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f(v - t\pi'(\xi)v - tu + o(t^2)) = - \left\langle \frac{\delta f}{\delta v}, \pi'(\xi)v + u \right\rangle \\ &= df(v)(w_{J_{(\xi,u)}}). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $w_{J_{(\xi,u)}}$ est le champ de vecteur infinitésimal associé à (ξ, u) via la $G \ltimes H_{\mathbb{R}}$ -action sur $H_{\mathbb{R}}$. $\square$

Remarque 3.1.2

Une action hamiltonienne d'application moment J_ξ est fortement hamiltonienne si l'application moment vérifie la relation

$$\{J_\xi, J_\eta\} = J_{[\xi, \eta]}$$

pour tout ξ, η dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Etant donnée une application moment J , l'action est fortement hamiltonienne s'il existe $b \in \mathfrak{g}^*$, tel que $\{J_\xi + b(\xi), J_\eta + b(\eta)\} = J_{[\xi, \eta]} + b([\xi, \eta])$, ou

$$db(\xi, \eta) = b([\xi, \eta]) = \{J_\xi, J_\eta\} - J_{[\xi, \eta]} = c(\xi, \eta).$$

L'action de $G \ltimes H_{\mathbb{R}}$ n'est pas fortement hamiltonienne, puisqu'un calcul direct donne :

$$\{J_{(\xi_1, u_1)}, J_{(\xi_2, u_2)}\}(v) - J_{[(\xi_1, u_1), (\xi_2, u_2)]}(v) = \mathfrak{Im}(u_1|u_2).$$

En outre le cocycle $c((\xi_1, u_1), (\xi_2, u_2)) = \mathfrak{Im}(u_1|u_2)$ n'est pas un cobord puisque, s'il existait $b : \mathfrak{g} \ltimes V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$c((\xi_1, u_1), (\xi_2, u_2)) = b([(\xi_1, u_1), (\xi_2, u_2)]),$$

nous aurions, pour tout u_1, u_2 ,

$$0 = b([(0, u_1), (0, u_2)]) = c((0, u_1), (0, u_2)) = \mathfrak{Im}(u_1|u_2).$$

3.1.3 Application moment associée à l'action projective

Par définition, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}H$ est le quotient de $H^\times = H \setminus \{0\}$ par la relation $v \simeq w$ si et seulement si il existe un nombre complexe z ($z \neq 0$) tel que $w = zv$. On note par $[v]$ la classe d'équivalence de $v \in H^\times$.

On considère $\mathbb{P}H$ comme une variété C^∞ réelle. Pour tout v dans $H^\times$, l'application $\varphi_v : \mathbb{P}H \longrightarrow (v^\perp)_\mathbb{R}$, donnée par

$$\varphi_v([w]) = \|v\|^2 \frac{w}{(v|w)} - v$$

est une carte locale pour $\mathbb{P}H$ définie sur le voisinage ouvert U_v de $[v]$, composé des $[w]$ dans $\mathbb{P}H$ tel que $(v|w) \neq 0$, on a

$$\varphi_v([v]) = 0, \quad \varphi_{zv} = z\varphi_v \quad \text{et} \quad \varphi_v^{-1}(u) = [v + u].$$

Cette famille de cartes définit la structure d'une variété réelle sur $\mathbb{P}H$.

On définit une 2-forme $\omega_{[v]}^{\mathbb{P}H}$ sur $\mathbb{P}H$ par :

$$\omega_{[v]}^{\mathbb{P}H}(W_1, W_2) = \frac{\Im(d\varphi_v(W_1)|d\varphi_v(W_2))}{\|v\|^2}.$$

Puisque $d\varphi_{zv} \circ d\varphi_v^{-1}(w) = zw$, cette quantité dépend seulement de la classe $[v]$ de v , donc ceci définit une forme sur $\mathbb{P}H$, non-dégénérée en tout point. Un calcul fastidieux prouve que la forme $\omega^{\mathbb{P}H}$ est fermée. Il est plus simple de considérer la sphère unité S dans H comme une sous variété de $H_\mathbb{R}$ (on note par i l'injection canonique) et si $p : S \longrightarrow \mathbb{P}H$ est l'application $v \mapsto [v]$, alors $i^*\omega^H = p^*\omega^{\mathbb{P}H}$. En effet, pour tout v dans S et w_i dans $T_v S = (v^\perp)_\mathbb{R}$ ($i = 1, 2$), on a :

$$\begin{aligned} \omega_{i(v)}^H(di(v)(w_1), di(v)(w_2)) &= \omega_v^H(w_1, w_2) = \Im(w_1|w_2) \\ \omega_{p(v)}^{\mathbb{P}H}(dp(v)(w_1), dp(v)(w_2)) &= \omega_{[v]}^{\mathbb{P}H}(d\varphi_v^{-1}(0)(w_1), d\varphi_v^{-1}(0)(w_2)) = \Im(w_1|w_2). \end{aligned}$$

Puisque p est surjective, p^* est une application injective, d'où $d\omega^H = 0$ implique $d\omega^{\mathbb{P}H} = 0$.

L'action de G sur H est linéaire, elle induit une action sur $\mathbb{P}H$ par

$$\rho_g([v]) = \rho(g)([v]) = [\pi(g)(v)].$$

Soient W_i ($i = 1, 2$) deux vecteurs dans $T_{[v]}\mathbb{P}H$, posons $w_i = d\varphi_v([v])(W_i)$ ($w_i \in (v^\perp)_\mathbb{R}$), un calcul direct donne la relation :

$$d\rho_g([v])(W_i) = d\varphi_{\pi(g)(v)}^{-1}(\pi(g)(w_i)),$$

donc :

$$\omega_{d\rho_g([v])}^{\mathbb{P}H}(d\rho_g([v])(W_1), d\rho_g([v])(W_2)) = \frac{\Im(\pi(g)(w_1)|\pi(g)(w_2))}{\|\pi(g)(v)\|^2} = \omega_{[v]}^{\mathbb{P}H}(W_1, W_2).$$

L'action de G sur $\mathbb{P}H$ préserve la 2-forme $\omega^{\mathbb{P}H}$.

On cherche une application moment associée à cette action, on pose alors :

$$J_\xi([v]) = \frac{1}{2} \frac{\Im(\pi'(\xi)v|v)}{\|v\|^2} = \frac{1}{2i} \frac{(\pi'(\xi)v|v)}{\|v\|^2},$$

puisque $\pi'(\xi)$ est anti-adjoint. Comme ci-dessus, on fixe $W = d\varphi_v^{-1}(0)(w)$ dans $T_{[v]}\mathbb{P}H$ ($w \in (v^\perp)_\mathbb{R}$), on obtient :

$$\begin{aligned} dJ_\xi([v])(W) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} J_\xi([v + tw]) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{1}{2} \frac{\Im(\pi'(\xi)(v + tw)|(v + tw))}{\|v + tw\|^2} \\ &= \frac{\Im(\pi'(\xi)(v)|w)}{\|v\|^2} \\ &= \omega_{[v]}^{\mathbb{P}H}\left(d\varphi_v^{-1}(0)(\pi'(\xi)(v)), W\right). \end{aligned}$$

On a donc $w_{J_\xi} = -d\varphi_v^{-1}(0)(\pi'(\xi)(v))$. D'autre part,

$$-d\varphi_v^{-1}(0)(\pi'(\xi)(v)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [v - t\pi'(\xi)(v)] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [e^{-t\pi'(\xi)}v] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \rho_{\exp(-t\xi)}[v].$$

Ceci prouve que l'action de G sur $\mathbb{P}H$ est hamiltonienne, d'application moment J_ξ .

Finalement, l'action est fortement hamiltonienne, puisque, avec nos notations,

$$\begin{aligned}
\{J_\xi, J_\eta\}([v]) &= (w_{J_\xi} J_\eta(\varphi_v^{-1}(0))) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} J_\eta \left(\left[e^{-t\pi'(\xi)}(v) \right] \right) \\
&= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{2i} \frac{(\pi'(\eta)(e^{-t\pi'(\xi)}(v)) | e^{-t\pi'(\xi)}(v))}{\|e^{-t\pi'(\xi)}(v)\|^2} \\
&= -\frac{1}{2i} \frac{(\pi'(\eta)(\pi'(\xi)(v)) | v) + (\pi'(\eta)(v) | \pi'(\xi)(v))}{\|v\|^2} \\
&= \frac{1}{2i} \frac{((\pi'(\xi) \circ \pi'(\eta) - \pi'(\eta) \circ \pi'(\xi))(v) | v)}{\|v\|^2} \\
&= J_{[\xi, \eta]}([v]).
\end{aligned}$$

On a donc prouvé : $\{J_\xi, J_\eta\} = J_{[\xi, \eta]}$, l'action est fortement hamiltonienne. La fonction J_ξ est appelée l'application moment de la représentation π .

Proposition 3.1.1 *Si (π, H) est une représentation unitaire de dimension finie du groupe de Lie G , alors*

- $\mathbb{P}H$ muni de la 2-forme $\omega^{\mathbb{P}H}$ est une variété symplectique réelle,
- G agit naturellement sur $\mathbb{P}H$, et cette action préserve $\omega^{\mathbb{P}H}$,
- l'action est fortement hamiltonienne, d'application moment :

$$J_\xi([v]) = \frac{1}{2i} \frac{(\pi'(\xi)v | v)}{\|v\|^2}.$$

3.2 Calcul différentiel dans les Fréchets

Dans cette section, on rappelle le calcul différentiel défini par R. S. Hamilton (voir [H] pour une présentation détaillée).

Soient V, W deux espaces vectoriels de Fréchet, U un sous ensemble ouvert de V et $f : U \longrightarrow W$ une application continue.

On définit la dérivée de f en un point u dans U et dans la direction de h dans V comme la limite, si elle existe :

$$Df(u)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(u + th) - f(u)] = \left\langle \frac{\delta f}{\delta u}, h \right\rangle.$$

Définition 3.2.1

On dit que f est de classe C^1 sur U si $Df(u)(h)$ existe pour tout (u, h) dans $U \times V$ et si l'application

$$(u, h) \mapsto Df(u)(h)$$

est continue de $U \times V$ dans W .

Si f est C^1 sur U , $u \mapsto Df(u)(h)$ est continue pour tout h dans V . Si sa dérivée dans la direction k existe, on l'écrit :

$$D^2f(u)(h, k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Df(u + tk)(h) - Df(u)(h)].$$

Et on dit que f est de classe C^2 sur U si l'application $(u, h, k) \mapsto D^2f(u)(h, k)$ est continue de $U \times V \times V$ dans W .

R. S. Hamilton a prouvé dans [H] que si f est C^2 sur U , alors D^2f est symétrique et bilinéaire. Continuant dans cette voie, on définit récursivement $D^p f(u)(h_1, \dots, h_p)$ et on dit que f est C^p si l'application

$$(u, h_1, \dots, h_p) \mapsto D^p f(u)(h_1, \dots, h_p)$$

est continue de $U \times V^p$ dans W . Si c'est le cas, $D^p f$ est complètement symétrique et p -linéaire. On dit que f est de classe C^∞ si f est C^p pour tout p .

Evidemment, si V et W sont de dimension finie, f est C^p ou C^∞ sur U si et seulement si f est C^p ou C^∞ dans le sens usuel.

Rappelons le résultat utile (Corollaire 3.4.4 dans [H])

Lemme 3.2.1 Si V_1, V_2, W sont des espaces de Fréchet, et $f(u, v)$ est une application continue de $U_1 \times V_2$ dans W (U_1 est un sous ensemble ouvert dans V_1), séparément C^1 en u et linéaire en v , alors f est C^1 globalement en u et v et

$$Df(u, v)(h, k) = Df_v(u)(h) + f(u, k),$$

si f_v est l'application $u \mapsto f(u, v)$.

Maintenant on peut définir une variété de Fréchet (voir[H]).

Définition 3.2.2

Une variété de Fréchet M est un espace topologique de Hausdorff muni d'une famille de cartes locales $\varphi_i : U_i \longrightarrow E$, chaque carte est un homéomorphisme d'un sous ensemble ouvert U_i de M à valeurs dans un sous ensemble ouvert d'un espace de Fréchet E , tel que $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un homéomorphisme C^∞ entre deux sous ensembles ouverts de E .

Ainsi, une variété C^∞ usuelle de dimension finie, un groupe de Lie G et un espace vectoriel de Fréchet sont des variétés de Fréchet. Si M, N sont deux variétés de Fréchet, avec les cartes locales $\varphi_i : U_i \longrightarrow U'_i \subset E$ et $\psi_i : V_i \longrightarrow V'_i \subset F$, le produit $M \times N$ avec les cartes locales

$$\Phi_i = (\varphi_i, \psi_i) : U_i \times V_i \longrightarrow U'_i \times V'_i \subset E \times F,$$

est aussi une variété de Fréchet, puisque les applications

$$\begin{aligned} \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : U'_i \cap \varphi_i(U_i \cap U_j) \times V'_i \cap \psi_i(V_i \cap V_j) &\longrightarrow U'_j \cap \varphi_j(U_i \cap U_j) \times V'_j \cap \psi_j(V_i \cap V_j) \\ (x, y) &\mapsto (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x), \psi_j \circ \psi_i^{-1}(y)) \end{aligned}$$

sont C^∞ .

Les champs de vecteurs, les formes sur une variété de Fréchet M sont définis par leur expression locale dans les cartes de M (voir le chapitre 0).

Un groupe de Lie Fréchet est une variété de Fréchet et un groupe pour lequel les deux applications

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \quad \text{et} \quad g \mapsto g^{-1}$$

sont C^∞ .

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie Fréchet G est l'espace tangent à l'origine. Tout vecteur ξ de $\mathfrak{g}$ engendre un unique champ de vecteur invariant à gauche $\tilde{\xi}$ sur G . Si ξ et η sont dans $\mathfrak{g}$, le commutateur de deux champs de vecteurs $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\eta}$ est un champ de vecteur invariant à gauche, sa valeur à l'origine définit le crochet $[\xi, \eta]$ sur $\mathfrak{g}$.

Malheureusement, il n'existe pas une relation directe entre les sous algèbres fermées de $\mathfrak{g}$ et les sous groupes de Lie de G , comme un exemple donné par H. Omori dans [O] le montre. Dans cet exemple, Omori étudie le groupe de Lie Fréchet $\text{Diff}(\mathbb{T})$ des difféomorphismes du tore à une dimension.

Il montre que l'on peut construire des éléments ψ de $\text{Diff}(\mathbb{T})$ dans n'importe quel voisinage de l'identité tels qu'il n'existe pas d'élément X dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{X}(\mathbb{T})$ de $\text{Diff}(\mathbb{T})$ tel que $\psi = \exp X$. ($\mathfrak{X}(\mathbb{T})$ peut être identifiée à l'algèbre des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}$ et si $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{T})$, $\exp X$ est l'instant 1 du flot de X). Contrairement au cas d'un groupe de Lie, on n'obtient donc pas un voisinage de l'identité dans $\text{Diff}(\mathbb{T})$ en considérant l'ensemble des $\exp X$, $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{T})$.

3.3 Application moment associée à une action linéaire de dimension infinie

3.3.1 Préliminaires

Dans cette section, on a : un groupe de Lie G , d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et une représentation unitaire π de G dans un espace de Hilbert complexe H . Notons par $V = H^\infty$ le sous espace des vecteurs C^∞ de π . Si ξ est un vecteur de $\mathfrak{g}$, on définit $\pi'(\xi)$ sur V par :

$$\pi'(\xi)v = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \pi(\exp(t\xi))(v).$$

La topologie de H est donnée par la norme $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$, l'espace V est un espace de Fréchet, pour sa topologie définie par la famille de seminormes suivantes : si $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ est une base de $\mathfrak{g}$,

$$v \mapsto p_n(v) = \sup_{i_1, \dots, i_n} \|\pi'(\xi_{i_1}) \dots \pi'(\xi_{i_n})v\|.$$

On considère ces espaces comme des variétés réelles. Pour H , comme ci-dessus, l'espace vectoriel sous-jacent $H_{\mathbb{R}}$ est un espace de Hilbert réel complet pour le produit scalaire réel $(u|v)_{\mathbb{R}} = \Re(u|v)$.

D'où, on identifie l'espace $H_{\mathbb{R}}^*$ des formes linéaires réelles continues sur $H_{\mathbb{R}}$ avec $H_{\mathbb{R}}$ lui même grâce à l'application $\flat : H_{\mathbb{R}} \longrightarrow H_{\mathbb{R}}^*$ définie par

$$\langle u^\flat, v \rangle = (u|v)_{\mathbb{R}}.$$

Les mêmes formules définissent un produit scalaire réel sur l'espace vectoriel réel $V_{\mathbb{R}}$, mais cet espace n'est plus complet pour la norme associée.

D'après le théorème de Hahn-Banach, l'espace $V'_{\mathbb{R}}$ de formes linéaires réelles sur $V_{\mathbb{R}}$, continues par rapport à la norme de H est isomorphe à $H_{\mathbb{R}}$, donc l'application $\flat$ de $V_{\mathbb{R}}$ dans $V'_{\mathbb{R}}$ est maintenant une application non-surjective.

Si on munit $V_{\mathbb{R}}$ de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet, le dual continu $V_{\mathbb{R}}^*$ contient (en général strictement) $H_{\mathbb{R}}$ et $\flat$ reste continue et non-surjective, de $V_{\mathbb{R}}$ dans $V_{\mathbb{R}}^*$. On note par $V^{\flat}$ l'image de cette application $\flat$.

3.3.2 Formes symplectiques

Définition 3.3.1

Sur $H_{\mathbb{R}}$ (resp. $V_{\mathbb{R}}$), on définit une forme bilinéaire antisymétrique, par

$$\omega^H(w_1, w_2) = \Im(w_1|w_2), \quad \omega^V(w_1, w_2) = \Im(w_1|w_2).$$

Ces formes sont non-dégénérées puisque $\omega^{\bullet}(w_1, iw_1) = \|w_1\|^2 > 0$ si $w_1 \neq 0$.

Alors, $(H_{\mathbb{R}}, \omega^H)$ est une variété de Hilbert C^{∞} symplectique. De même, comme toute forme bilinéaire continue sur un espace de Fréchet est C^{∞} ([H]), on dira que $(V_{\mathbb{R}}, \omega^V)$ est une variété de Fréchet symplectique.

Sur $(H_{\mathbb{R}}, \omega^H)$, les notions des champs de vecteurs hamiltoniens, et de crochet de Poisson sont bien définies.

Puisque, pour tout $w_1 \in H$, l'application $w_2 \mapsto \omega^H(w_1, w_2)$ est une forme linéaire continue réelle, il existe un unique vecteur $w_1^{\flat}$ de $H_{\mathbb{R}}^*$ tel que

$$\omega^H(w_1, w_2) = \langle w_1^{\flat}, w_2 \rangle.$$

Puisque $\omega^H(iw_1, w_2) = -(w_1|w_2)_{\mathbb{R}}$, l'application $\sharp$ est, comme l'application $\flat$, un isomorphisme d'espaces de Hilbert réels. Dans la suite, on notera par $\sharp$ l'application $-\flat^{-1}$. Donc

Définition 3.3.2

L'isomorphisme $\sharp$ de $H_{\mathbb{R}}^*$ dans $H_{\mathbb{R}}$ est l'unique application linéaire réelle définie par :

$$\omega^H(a^{\sharp}, w) = -\langle a, w \rangle \quad (a \in H_{\mathbb{R}}^*, w \in H_{\mathbb{R}}).$$

Si f est une fonction réelle C^∞ sur $H_{\mathbb{R}}$, on note sa différentielle par :

$$df(u)(h) = \left\langle \frac{\delta f}{\delta u}, h \right\rangle.$$

Lemme 3.3.1 *Sur la variété symplectique $(H_{\mathbb{R}}, \omega^H)$, le champ de vecteur hamiltonien associé à la fonction f est*

$$w_f = \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^\sharp.$$

Le crochet de Poisson de deux fonctions C^∞ f et g est

$$\{f, g\} = \left\langle \frac{\delta g}{\delta u}, \left(\frac{\delta f}{\delta u} \right)^\sharp \right\rangle.$$

Preuve : Il s'agit d'une répétition du calcul correspondant aux espaces de dimension finie. $\square$

Le groupe G agit sur $H_{\mathbb{R}}$, et préserve la forme symplectique ω^H . En effet $\pi(g)$ est une application linéaire continue, donc C^∞ de $H_{\mathbb{R}}$ dans $H_{\mathbb{R}}$, sa différentielle est elle même et on a immédiatement pour tout w_1, w_2 :

$$\omega^H((d\pi(g))(u)(w_1), (d\pi(g))(u)(w_2)) = \mathfrak{Im}(\pi(g)(w_1)|\pi(g)(w_2)) = \omega^H(w_1, w_2).$$

Malheureusement, cette action n'est pas C^∞ , on ne peut pas différentier l'application $g \mapsto \pi(g)(u)$ pour tout u dans H , donc on ne peut pas considérer cette action comme une action fortement hamiltonienne. Par conséquent, on se restreint maintenant à l'espace $V_{\mathbb{R}}$.

Sur la variété de Fréchet symplectique $V_{\mathbb{R}}$, on peut définir des fonctions hamiltoniennes et des champs de vecteurs. On a vu que $\flat$ est une application continue bijective de V dans $V^\flat$, on a toujours :

$$\omega^V(iw_1, w_2) = -(w_1|w_2)_{\mathbb{R}} = \langle (iw_1)^\flat, w_2 \rangle.$$

Par conséquent, $\sharp$ est maintenant, comme l'application $\flat$, un isomorphisme de V dans $V^\flat$. On note par $\sharp$ l'application $-\flat^{-1}$.

Définition 3.3.3

Une fonction C^∞ réelle f sur $V_{\mathbb{R}}$ est une fonction hamiltonienne si sa différentielle $\frac{\delta f}{\delta u}$ est une application de classe C^∞ de $V_{\mathbb{R}}$ dans $V^\flat$.

Un champ de vecteur W est un champ de vecteurs hamiltonien s'il existe une fonction hamiltonienne f telle que $W = \left(\frac{\delta f}{\delta u}\right)^\#$.

Le crochet de Poisson de deux fonctions hamiltoniennes f et g est défini par :

$$\{f, g\} = \left\langle \frac{\delta g}{\delta u}, \left(\frac{\delta f}{\delta u}\right)^\# \right\rangle.$$

3.3.3 Application moment associée à l'action projective

Comme dans le cas de dimension finie, l'espace complexe projectif $\mathbb{P}H$ est le quotient de $H^\times = H \setminus \{0\}$ par la relation : $v \simeq w$ si et seulement s'il existe un nombre complexe z tel que $w = zv$.

On note par $[v]$ la classe d'équivalence de v . Maintenant, $\mathbb{P}H$ est une variété C^∞ réelle de dimension infinie avec les cartes locales (U_v, φ_v) :

$$U_v = \{[w], (v|w) \neq 0\}, \quad \text{et} \quad \varphi_v([w]) = \|v\|^2 \frac{w}{(v|w)} - v \in (v)^\perp.$$

En effet, puisque φ_v est une application continue bijective du sous ensemble ouvert U_v de $\mathbb{P}H$ dans l'espace vectoriel $v^\perp$, d'application inverse $(\varphi_v)^{-1} : w \mapsto [w + v]$, φ_v est un homéomorphisme et

$$\varphi_{v_2} \circ (\varphi_{v_1})^{-1}(w) = \|v_2\|^2 \frac{w + v_1}{(v_2|w + v_1)} - v_2$$

est C^∞ de $\varphi_{v_1}(U_{v_1} \cap U_{v_2})$ dans $\varphi_{v_2}(U_{v_1} \cap U_{v_2})$. Ces cartes définissent une structure de variété de Hilbert sur $\mathbb{P}H$.

De plus, exactement comme dans le cas d'un espace de dimension finie, on définit une 2-forme sur $\mathbb{P}H$ par :

$$\omega_{[v]}^{\mathbb{P}H}(W_1, W_2) = \frac{\Im(d\varphi_v(W_1)|d\varphi_v(W_2))}{\|v\|^2}.$$

Avec cette forme, $\mathbb{P}H$ est une variété de Hilbert symplectique.

Le groupe G agit sur $\mathbb{P}H$ par $\rho(g)([v]) = [\pi(g)v]$. Mais maintenant cette fonction n'est pas C^∞ et on ne peut plus avoir d'application moment.

On considère alors $\mathbb{P}V$ comme le quotient de $V^\times$ par la relation : $v \simeq w$ si et seulement s'il existe un nombre complexe z tel que $w = zv$. L'ensemble $\mathbb{P}V$ est un espace topologique de Hausdorff en effet, si $[v_1]$ et $[v_2]$ sont deux points distincts de $\mathbb{P}V$, alors la relation de Cauchy Schwartz donne : $|(v_1|v_2)| < \|v_1\|\|v_2\|$ et les deux sous ensembles disjoints :

$$U_1 = \left\{ [w] \in \mathbb{P}V, \frac{|(v_2|w)|}{\|v_2\|} < \frac{|(v_1|w)|}{\|v_1\|} \right\}, \quad U_2 = \left\{ [w] \in \mathbb{P}V, \frac{|(v_1|w)|}{\|v_1\|} < \frac{|(v_2|w)|}{\|v_2\|} \right\}$$

sont ouverts et contiennent respectivement $[v_1]$ et $[v_2]$.

Comme ci-dessus, on définit les cartes locales (U_v, φ_v) :

$$U_v = \{[w] \in \mathbb{P}V, (v|w) \neq 0\}, \quad \text{et} \quad \varphi_v([w]) = \|v\|^2 \frac{w}{(v|w)} - v \in (v)^\perp \cap V_{\mathbb{R}}.$$

φ_v est une application continue, bijective du sous ensemble ouvert U_v de $\mathbb{P}V$ dans l'espace de Fréchet réel $v^\perp \cap V_{\mathbb{R}}$ (le noyau dans $V_{\mathbb{R}}$ de la forme continue $w \mapsto (v|w)_{\mathbb{R}}$) d'application inverse $(\varphi_v)^{-1} : w \mapsto [w + v]$, alors φ_v est un homéomorphisme et

$$\varphi_{v_2} \circ (\varphi_{v_1})^{-1}(w) = \|v_2\|^2 \frac{w + v_1}{(v_2|w + v_1)} - v_2$$

est C^∞ de $\varphi_{v_1}(U_{v_1} \cap U_{v_2})$ dans $\varphi_{v_2}(U_{v_1} \cap U_{v_2})$. Ces cartes définissent une structure de variété de Fréchet sur $\mathbb{P}V$.

En outre, comme ci-dessus, on définit une 2-forme sur $\mathbb{P}V$ par :

$$\omega_{[v]}^{\mathbb{P}V}(W_1, W_2) = \frac{\Im(d\varphi_v(W_1)|d\varphi_v(W_2))}{\|v\|^2}.$$

Avec cette forme, $\mathbb{P}V$ est une variété de Fréchet symplectique..

Le groupe G agit sur $\mathbb{P}V$ par $\rho(g)([v]) = [\pi(g)v]$. Maintenant, on va montrer que cette fonction est C^∞ et on pourra chercher une application moment.

Lemme 3.3.2 *L'application $(g, v) \mapsto \pi(g)(v)$ de $G \times V_{\mathbb{R}}$ dans $V_{\mathbb{R}}$ est C^∞ .*

Preuve :

On fixe un produit scalaire réel sur $\mathfrak{g}$ tel que la base (ξ_i) est une base orthonormale, on écrit

$$Ad_{g^{-1}}(\xi_i) = \sum_j a_{ij} \xi_j,$$

alors, si $d = \dim(G)$,

$$\begin{aligned} \|\pi'(\xi_{i_1}) \dots \pi'(\xi_{i_n})\pi(g)v\| &= \|\pi'(Ad_{g^{-1}}\xi_{i_1}) \dots \pi'(Ad_{g^{-1}}\xi_{i_n})(v)\| \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n} |a_{i_1 j_1} \dots a_{i_n j_n}| \|\pi'(\xi_{j_1}) \dots \pi'(\xi_{j_n})(v)\| \\ &\leq d^n \|Ad_{g^{-1}}\|_{op}^n \|\pi'(\xi_{j_1}) \dots \pi'(\xi_{j_n})(v)\|, \end{aligned}$$

puisque :

$$\sum_j |a_{ij}| \leq d \|Ad_{g^{-1}}\|_{op}.$$

Ceci prouve directement la continuité de notre application au point $(e, 0)$, si e est l'élément neutre dans G . En utilisant la continuité de $g \mapsto \pi(g)v_0$ (voir [War]) et

$$\pi(g)(v) - \pi(g_0)(v_0) = \pi(g_0) [\pi(g_0^{-1}g)(v - v_0) + (\pi(g_0^{-1}g)v_0 - v_0)],$$

on obtient alors la continuité de notre application.

Maintenant, l'application $g \mapsto \pi(g)(v)$ est C^∞ et l'application $v \mapsto \pi(g)(v)$ est linéaire et continue. Alors, d'après le Corollaire 3.4.4 de Hamilton ([H]) appliqué p fois, l'application $(g, v) \mapsto \pi(g)(v)$ est C^p , pour tout p .

□

Si $[w]$ est dans le domaine U_v de la carte locale φ_v et g est au voisinage de l'origine dans G alors $\pi(g)(w)$ reste dans U_v et l'application $(g, w) \mapsto \pi(g)(w)$ devient C^∞ . Ainsi, l'application $(g, w) \mapsto \varphi_v([\pi(g)(w)])$ est C^∞ et le groupe G agit d'une manière C^∞ sur la variété de Fréchet $\mathbb{P}V$ par $\rho(g)([w]) = [\pi(g)(w)]$. Comme dans le cas de $\mathbb{P}H$, cette action préserve la forme symplectique $\omega^{\mathbb{P}V}$.

Vue dans la carte locale (U_v, φ_v) , la différentielle de cette action est un vecteur dans le sous espace $v^\perp \cap V_{\mathbb{R}}$ donné par

$$\begin{aligned} D(\varphi_v \circ \rho)(\xi)([v]) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_v(\rho(\exp t\xi)([v])) = (v|v) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\pi(\exp t\xi)v}{(v|\pi(\exp t\xi)v)} \\ &= \pi'(\xi(v)) - \frac{(v|\pi'(\xi)(v))}{(v|v)} v. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.1 *L'action de G est hamiltonienne, son application moment est la fonction hamiltonienne :*

$$J_\xi([v]) = \frac{1}{2i} \frac{(\pi'(\xi)v|v)}{\|v\|^2}.$$

Preuve :

La fonction J_ξ est bien définie sur $\mathbb{P}V$. Dans une carte locale φ_v , J_ξ s'écrit :

$$v^\perp \cap V_{\mathbb{R}} \ni u \mapsto \frac{1}{2i} \frac{(\pi'(\xi)(v+u)|v+u)}{\|v\|^2 + \|u\|^2}.$$

Donc J_ξ est une fonction C^∞ réelle et, pour tout w dans $v^\perp \cap V_{\mathbb{R}}$, sa dérivée au point v , dans la direction $D\varphi_v^{-1}(0)(w)$, est :

$$\begin{aligned} D(J_\xi \circ \varphi_v^{-1})(0)(w) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{2i} \frac{(\pi'(\xi)(v+tw)|v+tw)}{\|v\|^2 + t^2\|w\|^2} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{(\pi'(\xi)(w)|v) + (\pi'(\xi)(v)|w)}{\|v\|^2} \\ &= \frac{1}{(v|v)} \Im \left(\pi'(\xi)(v) - \frac{(v|\pi'(\xi)(v))}{(v|v)} v | w \right) \\ &= \omega_{[v]}^{\mathbb{P}V}(D(\rho)(\xi)([v]), D\varphi_v^{-1}(0)(w)). \end{aligned}$$

Ceci prouve que le champ de vecteur $D(\rho)(\xi)([v])$ est un champ de vecteurs hamiltonien, de fonction hamiltonienne J_ξ .

□

Cette fonction J_ξ apparaît pour la première fois dans [Wil]. Puisqu'elle est appelée l'application moment de la représentation π . On appellera, dans la section suivante, l'image de cette application l'ensemble moment $\mathcal{J}_\pi$ de la représentation π :

$$\mathcal{J}_\pi = \{\xi \mapsto J_\xi([v]), \quad v \in V_{\mathbb{R}}\}.$$

3.3.4 Le groupe de Lie Fréchet $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$

On a vu que G et $V_{\mathbb{R}}$ sont des variétés de Fréchet, donc $G \times V_{\mathbb{R}}$ est une variété de Fréchet. Maintenant, l'espace $G \times V_{\mathbb{R}}$ peut être équipé d'une structure de groupe produit semi-direct par

$$(g_1, v_1)(g_2, v_2) = (g_1 g_2, \pi(g_1)(v_2) + v_1),$$

On note ce groupe $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$.

Proposition 3.3.2 *Le groupe $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ est un groupe de Lie Fréchet. Son algèbre de Lie, notée $\mathfrak{g} \ltimes V_{\mathbb{R}}$ est l'espace vectoriel de Fréchet $\mathfrak{g} \times V_{\mathbb{R}}$ muni du crochet :*

$$[(\xi, u), (\eta, v)] = ([\xi, \eta], \pi'(\xi)(v) - \pi'(\eta)(u)).$$

Preuve :

On doit prouver que l'application produit et l'application $(g, v) \mapsto (g, v)^{-1}$ sont C^∞ . Pour la première, c'est une simple conséquence du lemme 3.3.2. Pour la deuxième application, elle est de la forme :

$$(g, v) \mapsto (g^{-1}, -\pi(g^{-1})(v)).$$

Donc elle est aussi C^∞ .

L'algèbre de Lie de $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ est vue comme l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \times V_{\mathbb{R}}$. Chaque élément (ξ, u) dans l'algèbre de Lie donne un champ de vecteur invariant à gauche $(\tilde{\xi}, \tilde{u})$. En effet, on pose, avec des notations évidentes :

$$(\tilde{\xi}, \tilde{u})_{(g, v)} = (\tilde{\xi}_g, \pi(g)(u)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(g \exp t\xi, v + t\pi(g)(u)),$$

On obtient :

$$\begin{aligned} (\tilde{\xi}, \tilde{u})_{(g'g, v' + \pi(g')(v))} &= (\tilde{\xi}_{g'g}, \pi(g'g)(u)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(g'g \exp t\xi, v' + \pi(g')(v) + t\pi(g)(u)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(g', v')(g \exp t\xi, v + t\pi(g)(u)). \end{aligned}$$

Maintenant, le crochet de deux tels champs de vecteurs, qui agissent sur une fonction C^∞ réelle f est :

$$\begin{aligned} & \left([(\tilde{\xi}, \tilde{u}), (\tilde{\xi}', \tilde{u}')] f \right) (g, v) = \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \left((\tilde{\xi}', \tilde{u}') f(g \exp t\xi, v + t\pi(g)(u)) - (\tilde{\xi}, \tilde{u}) f(g \exp t\xi', v + t\pi(g)(u')) \right) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}|_{s=0} \left(f(g \exp t\xi \exp s\xi', v + t\pi(g)(u) + s\pi(g \exp t\xi)(u')) - \right. \\ & \quad \left. - f(g \exp s\xi' \exp t\xi, v + t\pi(g)(u') + s\pi(g \exp t\xi')(u)) \right) \\ &= \left(\widetilde{([\xi, \xi']}, (\pi'(\xi)(u') - \pi'(\xi')(u)) \sim) f \right) (g, v) \end{aligned}$$

□

Dans le cas de la dimension finie, $V_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}$ et l'application exponentielle de $\mathfrak{g} \ltimes V_{\mathbb{R}}$ dans $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ est :

$$\exp(\xi, u) = (\exp \xi, \frac{e^{\pi'(\xi)} - id}{\pi'(\xi)} u) = (\exp \xi, \int_0^1 \pi(\exp \tau \xi)(u) d\tau).$$

Dans notre cas $V_{\mathbb{R}}$ est un espace de Fréchet, l'application $s \mapsto \pi(\exp s\xi)(u)$ est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $V_{\mathbb{R}}$. Donc, d'après [H], section 1.2, pour tout u dans $V_{\mathbb{R}}$, on peut définir le vecteur

$$\psi(\xi)(u) = \int_0^1 \pi(\exp \tau \xi)(u) d\tau$$

dans $V_{\mathbb{R}}$. L'application $u \mapsto \psi(\xi)(u)$ est linéaire et continue, on peut écrire, pour tout t ,

$$\psi(t\xi)(tu) = \int_0^1 \pi(\exp t\tau\xi)(tu) d\tau = \int_0^t \pi(\exp \tau\xi)(u) d\tau.$$

Par conséquent, $\psi(\xi)(u)$ est la valeur à $t = 1$ de l'unique solution C^1 g de l'équation différentielle $g'(t) = \pi(\exp t\xi)(u)$ avec la valeur initiale $g(0) = 0$.

On obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \pi(\exp s\xi)\psi(t\xi)(tu) + \psi(s\xi)(su) &= \int_0^t \pi(\exp(s+\tau)\xi)(u) d\tau + \int_0^s \pi(\exp \tau\xi)(u) d\tau \\ &= \int_0^{t+s} \pi(\exp \tau\xi)(u) d\tau = \psi((s+t)\xi)((s+t)u). \end{aligned}$$

Ceci prouve que la courbe définie dans notre groupe $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ par $\gamma(t) = (\exp t\xi, \psi(t\xi)(tu))$ est un groupe à un paramètre : $\gamma(0) = (e, 0)$, et

$$\gamma(s)\gamma(t) = (\exp s\xi, \psi(s\xi)(su))(\exp t\xi, \psi(t\xi)(tu)) = (\exp(t+s)\xi, \psi((s+t)\xi)((s+t)u)) = \gamma(s+t).$$

Finalement γ est C^1 et sa dérivée est

$$\gamma'(t) = \left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \exp s\xi, \pi(\exp t\xi)(u) \right) = (\tilde{\xi}, \tilde{u})_{\gamma(t)}.$$

Supposons maintenant que $t \mapsto \gamma_1(t)$ est une autre courbe C^∞ dans notre groupe de Lie Fréchet telle que γ_1 est un sous groupe à un paramètre et $\gamma_1'(t) = (\tilde{\xi}, \tilde{u})_{\gamma_1(t)}$ à l'origine. Donc $\gamma_1(t) = (\exp t\xi, v(t))$, avec $v(0) = 0$ et $v'(t) = \pi(\exp t\xi)(u)$ pour tout t . Par conséquent, $\gamma_1(t) = \gamma(t)$ d'où l'unicité du sous groupe à un paramètre et de l'application exponentielle du groupe de Lie Fréchet $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$.

On pose donc

$$\exp(\xi, u) = (\exp \xi, \psi(\xi)(u)).$$

Définition 3.3.4

L'application exponentielle de $\mathfrak{g} \ltimes V_{\mathbb{R}}$ dans $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ est définie par :

$$\exp(\xi, u) = (\exp \xi, \psi(\xi)(u)).$$

C'est l'unique application telle que $t \mapsto \exp t(\xi, u)$ est un sous groupe à un paramètre tangent à l'origine à (ξ, u) .

Remarque 3.3.1

Pour toute représentation unitaire π de G , l'opérateur linéaire $\pi'(\xi)$ définie sur V est essentiellement anti autoadjoint. Si

$$\overline{\pi'(\xi)} = \int_{\mathbb{R}} i\lambda dE_{\lambda}$$

est sa décomposition spectrale, on peut définir un opérateur borné sur H par

$$\psi(\xi)(a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\lambda} - 1}{i\lambda} dE_{\lambda}(a).$$

Puisque la fonction $\lambda \mapsto \frac{e^{i\lambda} - 1}{i\lambda}$ est C^{∞} et bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\psi(\xi)(a)$ est bien définie pour tout a dans H et $a \mapsto \psi(\xi)(a)$ est un opérateur linéaire continu sur H .

Il est possible de prouver que cet opérateur $\psi(\xi)$ est l'unique extension à H de notre opérateur linéaire $\psi(\xi)$ défini ci-dessus sur $V_{\mathbb{R}}$.

Finalement, par définition, on a, pour tout g dans G

$$\psi(Ad_g(\xi))(u) = \int_0^1 \pi(g)\pi(\exp \tau\xi)\pi(g^{-1})(u) d\tau = (\pi(g) \circ \psi(\xi) \circ \pi(g)^{-1})(u).$$

3.3.5 Action hamiltonienne sur $V_{\mathbb{R}}$ et ensemble moment

On dit que $V_{\mathbb{R}}$, muni de ω^V est une variété de Fréchet symplectique. De plus :

Lemme 3.3.3 *L'action λ de $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ sur la variété $V_{\mathbb{R}}$, définie par*

$$\lambda(g, u)(v) = (g, u) \cdot v = \pi(g)(v) + u$$

est C^{∞} , elle préserve la forme symplectique ω^V .

Preuve :

La formule

$$\lambda(g, u)(v) = \pi(g)(v) + u$$

définit une action λ de $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ dans $V_{\mathbb{R}}$, cette action est aussi C^{∞} . Si w est un vecteur dans $V_{\mathbb{R}}$, on a $D[\lambda(g, u)](v)(w) = \pi(g)(w)$, d'où

$$\begin{aligned} \omega_v^V(w_1, w_2) &= \mathfrak{Im}(w_1|w_2) = \mathfrak{Im}(\pi(g)(w_1)|\pi(g)(w_2)) \\ &= \omega_{\lambda(g, u)(v)}^V(D[\lambda(g, u)](v)(w_1), D[\lambda(g, u)](v)(w_2)). \end{aligned}$$

□

Considérons maintenant la différentielle de λ , pour tout (ξ, u) dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \ltimes V_{\mathbb{R}}$, c'est le champ de vecteur sur $V_{\mathbb{R}}$ défini par

$$(D\lambda)(\xi, u)_v = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \lambda(\exp t(\xi, u))(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\pi(\exp t\xi)(v) + \psi(t\xi)(tu)) = \pi'(\xi)(v) + u.$$

En fait, ce champ de vecteur est un champ de vecteur hamiltonien, plus précisément,

Proposition 3.3.3 *L'action λ de $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ sur la variété symplectique $(V_{\mathbb{R}}, \omega^V)$ est hamiltonienne, d'application moment :*

$$J_{(\xi, u)}(v) = \frac{1}{2} \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)(v)|v) + \mathfrak{Im}(u|v).$$

Preuve :

Comme dans le cas de la dimension finie, on pose :

$$J_{(\xi, u)}(v) = \frac{1}{2} \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v) + \mathfrak{Im}(u|v).$$

$J_{(\xi, u)}(0) = 0$. En outre, puisque $v \mapsto \pi'(\xi)v$ et $(w, v) \mapsto \mathfrak{Im}(w|v)$ sont C^{∞} alors, puisque la composée de fonctions C^{∞} est C^{∞} (voir [H]), $J_{(\xi, u)}$ est C^{∞} en v . De plus, sa dérivée est le vecteur

$$(DJ_{(\xi, u)})(v)(w) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} J_{(\xi, u)}(v + tw) = \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v + u|w) = \omega^V(D\lambda(\xi, u)_v, w).$$

D'où $\frac{\delta J_{(\xi, u)}}{\delta v}$ est dans $V^{\flat}$ et la fonction $J_{(\xi, u)}$ est une fonction hamiltonienne. Son champ de vecteur hamiltonien est

$$w_{J_{(\xi, u)}}|_v = -D\lambda(\xi, u)_v.$$

Ceci prouve notre proposition. $\square$

Puisque l'action de $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$ est hamiltonienne, on définit l'application moment $v \mapsto \Psi(v)$ de $V_{\mathbb{R}}$ dans le dual de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g} \ltimes V_{\mathbb{R}})^* = \mathfrak{g}^* \times V_{\mathbb{R}}^*$ de $G \ltimes V_{\mathbb{R}}$. On écrit

$$\Psi(v) = (\theta(v), \mu(v)) \in \mathfrak{g}^* \times V_{\mathbb{R}}^*$$

avec

$$\theta(v) : \xi \mapsto \frac{1}{2} \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v) \quad \text{et} \quad \mu(v) : u \mapsto \mathfrak{Im}(u|v) = -\langle v^{\natural}, u \rangle.$$

Définition 3.3.5

Soit Ψ l'application moment associée à l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie ou d'un groupe de Lie Fréchet G sur une variété ou une variété de Fréchet M . L'ensemble moment $\mathcal{J}$ de cette action est l'image de l'application moment Ψ dans l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G .

On note par p la projection canonique de $\mathfrak{g}^* \times V_{\mathbb{R}}^*$ dans $V_{\mathbb{R}}^*$, définie par $p(\alpha, f) = f$. Puisque $p(\Psi(v)) = \mu(v) = -v^{\natural}$ réalise une identification entre $V_{\mathbb{R}}$ et le sous espace $V^{\flat}$ dans $V_{\mathbb{R}}^*$, l'application

$$\Psi(v) = (\theta(v), \mu(v)) \longmapsto (v, \theta(v))$$

est clairement bijective.

Par cette identification, l'ensemble $\mathcal{J}$ est le graphe de l'application $\theta : v \mapsto \theta(v)$.

D'autre part, si q est l'application projection de $\mathfrak{g}^* \times V_{\mathbb{R}}^*$ dans $\mathfrak{g}^*$ définie par $q(\alpha, f) = \alpha$, alors

$$q(\mathcal{J}) = \{\theta(v), v \in V_{\mathbb{R}}\} = \left\{ \frac{1}{2} \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v), v \in V_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Rappelons que l'ensemble moment usuel de la représentation π est le sous ensemble :

$$\mathcal{J}_{\pi} = \left\{ \xi \mapsto \frac{\mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v)}{2(v|v)}, v \in V_{\mathbb{R}} \setminus \{0\} \right\}.$$

Posons $\psi_{\pi}(v)(\xi) = \frac{\mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v)}{2(v|v)}$. On note par $\mathcal{C}(\mathcal{J}_{\pi})$ le cône positif de support $\mathcal{J}_{\pi}$:

$$\mathcal{C}(\mathcal{J}_{\pi}) = \{t\psi_{\pi}(v), \quad t \geq 0, \quad v \in V_{\mathbb{R}}\}.$$

Alors $\theta(v) \in q(\mathcal{J})$. Si $v = 0$, $\psi(v) = 0$ et si $v \neq 0$, $\theta(v) = (v|v)\psi_{\pi}(v)$, avec $(v|v) > 0$. Dans tous les cas, $\theta(v) \in \mathcal{C}(\mathcal{J}_{\pi})$.

Réciproquement, pour tout $t\psi_\pi(v)$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{J}_\pi)$, on a

$$t\psi_\pi(v)(\xi) = t \frac{\mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v)}{2(v|v)} = \mathfrak{Im} \left(\pi'(\xi) \left(\sqrt{t} \frac{v}{\|v\|} \right) \middle| \sqrt{t} \frac{v}{\|v\|} \right) = \theta \left(\sqrt{t} \frac{v}{\|v\|} \right).$$

Proposition 3.3.4 *L'ensemble moment $\mathcal{J}$ est le graphe de l'application*

$$\theta : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \quad v \mapsto (\xi \mapsto \mathfrak{Im}(\pi'(\xi)v|v)).$$

La projection de l'ensemble moment $\mathcal{J}$ sur le dual $\mathfrak{g}^$ est le cône positif de support l'ensemble moment usuel associé à la représentation π :*

$$q(\mathcal{J}) = \mathcal{C}(\mathcal{J}_\pi).$$

3.3.6 Surgroupe universel de Fréchet

Revenons à la séparation des représentations unitaires de G par des surgroupes et extensions de représentations. On cherche une construction générale de ce surgroupe qui est bien définie et s'applique pour tout groupe de Lie G .

On note par $\widehat{G}$ le dual unitaire de G . On considère tout élément π de $\widehat{G}$ comme une action hamiltonienne (linéaire) sur l'espace $V_{\mathbb{R},\pi}$ de vecteurs C^∞ de π (à une équivalence unitaire près).

Définition 3.3.6

Un surgroupe universel de Fréchet est un foncteur $G \mapsto \widetilde{G}$ de la catégorie des groupes de Lie à la catégorie des groupes de Lie Fréchet, avec extensions canoniques $\pi \mapsto \widetilde{\pi}$ de chaque action π dans $\widehat{G}$ en une action hamiltonienne $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{G}$ sur $V_{\mathbb{R},\pi}$, tel que les ensembles moment de ces actions séparent les représentations π .

On dit simplement que $\widetilde{G}$ est un surgroupe universel.

Dans cette section, on propose la définition d'un tel surgroupe universel $\widetilde{G}$ pour tout groupe de Lie G avec extensions $\pi \mapsto \widetilde{\pi}$, tel que l'ensemble moment de $\widetilde{\pi}$ caractérise la représentation elle-même :

$$\mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_1} = \mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_2} \iff \pi_1 \sim \pi_2.$$

On note $H = \oplus_{\pi \in \widehat{G}} H_\pi$ la somme directe orthogonale des espaces H_π pour toutes les classes de représentations unitaires irréductibles π . C'est l'espace portant de la représentation $\rho = \oplus_{\pi \in \widehat{G}} \pi$. Soient V l'espace des vecteurs C^∞ de ρ et π_0 dans $\widehat{G}$. Puisque la projection orthogonale $p_{\pi_0} : H \longrightarrow H_{\pi_0}$ est un entrelacement continu entre ρ et π_0 , alors p_{π_0} est une application continue surjective de V dans V_{π_0} . On écrit $p_{\pi_0}(V) = V_{\pi_0}$.

On définit maintenant l'extension $\widetilde{\pi}_0$ comme l'action de $\widetilde{G}$ sur l'espace vectoriel réel $V_{\mathbb{R}, \pi_0}$ défini par :

$$\widetilde{\pi}_0(g, v)(w_0) = (g, v) \cdot w_0 = \pi_0(g)w_0 + p_{\pi_0}(v).$$

Théorème 3.3.1 *La correspondance $G \mapsto \widetilde{G}$ avec les extensions $\pi \mapsto \widetilde{\pi}$ est un surgroupe universel de Fréchet de G .*

Plus précisément,

1. *L'action $\widetilde{\pi}_0$ est hamiltonienne, son ensemble moment est le graphe de l'application*

$$\theta_{\pi_0} : V_{\mathbb{R}, \pi_0} \longrightarrow \mathfrak{g}^*, \text{ définie par } \theta_{\pi_0}(v)(\xi) = \frac{1}{2} \mathfrak{Im}(\pi'_0(\xi)v|v).$$

2. *L'ensemble moment de cette action est relié à l'ensemble moment de π_0 par la relation*

$$q(\mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_0}) = \mathcal{C}(\mathcal{J}_{\pi_0}).$$

3. *Deux représentations non-équivalentes π_1 et π_2 donnent lieu à deux ensembles moment distincts $\mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_1}$ et $\mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_2}$.*

Preuve :

Le même argument que dans les sections précédentes prouve que l'ensemble moment $\mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_0}$ associé à $\widetilde{\pi}_0$ est

$$\mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_0} = \{\psi(v) = (\theta_{\pi_0}(v), \mu_{\pi_0}(v)), v \in V_{\pi_0}\} \subset \mathfrak{g}^* \times V^*.$$

où $\mu_{\pi_0}(v)(w) = \mathfrak{Im}(p_{\pi_0}(v)|w)$ ($w \in V_{\mathbb{R}}$).

Donc, comme dans la section précédente, on peut identifier l'ensemble moment de l'action $\widetilde{\pi}_0$ avec le graphe de l'application θ_{π_0} .

En outre, si p et q sont les projections définies dans la section précédente, alors $q(\mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_0}) = \mathcal{C}(\mathcal{J}_{\pi_0})$ est le cône positif de support l'ensemble moment usuel de la représentation π_0 .

Finalement, puisque $p(\mathcal{J}_{\widetilde{\pi}_0}) = p_{\pi_0}(V_{\mathbb{R}}) = V_{\mathbb{R}, \pi_0}$, le point 3. est vrai. □

Bibliographie

- [A] A. Zergane *Orbits separation and overalgebra for $sl(n, \mathbb{R})$* , preprint Institut de Mathématiques de Bourgne (2011).
- [A-A-L-S] L. Abdelmoula, D. Arnal, J. Ludwig et M. Selmi, *Separation of Unitary Representations of Connected Lie Groups by their moment sets*, J. Funct. Anal. 228 n 1, p.189-206 (2005).
- [A-Ba-L-S] D. Arnal, A. Baklouti, J. Ludwig et M. Selmi, *Separation of Unitary Representations of Exponential Lie Groups*, J. of Lie Theory. vol 10 , p.339-410(2000).
- [A-L] D. Arnal, J. Ludwig, *La convexité de l'application moment d'un groupe de Lie*, Journal of Functional Analysis 105, p. 205-300 (1992).
- [A-S] D. Arnal, M. Selmi, *Séparation des orbites coadjointes d'un groupe exponentiel par leur enveloppe convexe*, Bull. Sci.Math. 132, p. 54-69 (2008).
- [A-S-Z] D. Arnal, M. Selmi et A. Zergane *Separation of representations with quadratic overgroups*, Bulletin des Sciences Mathématiques **135** 141-165 December (2010).
- [A-S-Z 1] D. Arnal, M. Selmi et A. Zergane *Universal overgroup*, Journal of Geometry and Physics **61** p.217-229 (2011).
- [A-S-Z 2] D. Arnal, M. Selmi et A. Zergane *Erratum to "Separation of representations with quadratic overgroups"*, Bulletin des Sciences Mathématiques **135** (2) 1011-1013 (2011).

- [A-K] L. Auslander, B. Kostant, *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math. 14, p. 255-354 (1971).

- [Ba-L-S] A. Baklouti, J. Ludwig et M. Selmi, *Séparation des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, Proceedings of the II International Workshop, Clausthal, Lie theory and its applications in Physics II, Germany 17-20 August (1997).

- [Barg] V. Bargmann, *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. of Math. (2) 48, p. 568-640 (1947).

- [Ber] P. Bernat, M. Conze, M. Duflo, M. Lévy-Nahas, M. Raïs, P. Renouard, M. Vergne, *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographie de la Société Mathématiques de France, vol 4, Dunod, Paris, (1972).

- [D] J. Dixmier *Algèbres enveloppantes*, Editions Jacques Gabay, Gautier-Villars, (1974).

- [Doz] J. Dozias, *Sur les algèbres de Lie résolubles, réelles, de dimension inférieure ou égale à 5*, Faculté des sciences de l'université de Paris, thèse (1963).

- [F-H] W. Fulton et J. Harris *Representation theory* Graduate text in Mathematics, Springer-Verlag, New-York (1991).

- [Gon] M-P. Gong, *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (Over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$)*, University of Waterloo thesis, Waterloo, Canada, downloadable at [http ://etd.uwaterloo.ca/etd/mpgong1998.pdf](http://etd.uwaterloo.ca/etd/mpgong1998.pdf) (1998).

- [H] R.S. Hamilton *The Inverse Function Theorem of Nash and Moser* Bull. Amer. Math Soc. 7, (1) pp 65-222 (1982).

- [H-C] K. Hanspeter, P. Claudio *Classical invariant theory* , A primer, Preliminary version, July (1996).

- [Kir] F. Kirwan, *Convexity propriety of the moment mapping III*, Invent.Math. 77, p 547-552 (1984).
- [L-L] H. Leptin et J. Ludwig, *Unitary representation theory of exponential Lie groups*. de Gruyter Expositions in Mathematics, 18. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.
- [Mag] L. Magnin, *Adjoint and trivial cohomology tables for indecomposable nilpotent Lie algebras of dimension ≤ 7 over $\mathbb{C}$* , online book, (810 pages+ vi), 2d Corrected Edition (2007).
- [O] H. Omori, *On the group of diffeomorphisms on a compact manifold*. 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XV, Berkeley, Calif., 1968) p. 167-183 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [Puk] L. Pukansky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Monographie de la Société Mathématiques de France, vol 2, Dunod, Paris, (1967).
- [Raw] J. Rawnsley, *Representations of semi direct product by quantization*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 78 n2 P.345-350 (1975).
- [S] M. Selmi *Convexité de l'ensemble moment d'une représentation de la série discrète holomorphe*, C.R.Acad.Sci.Paris.t.313. Série I pp. 711-714(1991).
- [Ver] M. Vergne, *La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente*, Bull. Soc. Math. Fr 100 p. 301-335 (1972).
- [War] G. Warner *Harmonic Analysis on Semisimple Lie groups 1* Springer-Verlag New-York Berlin (1972).
- [W] H. Weyl *The classical groups, their invariants and representations*, Princeton Mathematical Series, vol 1. Princeton University press, Princeton (1946).
- [Wi] N. J. Wildberger *On the Fourier transform of a compact semi simple Lie group*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 56 (1994), no. 1, p. 64-116.

- [Wil] N. J. Wildberger *Convexity and unitary representations of nilpotent Lie groups* Invent. Math. 98 pp. 281-292 (1989).
- [Wild] N. J. Wildberger *The moment map of a Lie group representation* Transction of the American Mathematical Society. 330 pp. 257-268 (1992).

Résumé

Si $(\pi, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie G , on sait lui associer son application moment Ψ_π . La fermeture de l'image de Ψ_π s'appelle l'ensemble moment de π . Généralement, cet ensemble est $\overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_\pi)$, si $\mathcal{O}_\pi$ est l'orbite coadjointe associée à π . Mais il ne caractérise pas π : deux orbites distinctes peuvent avoir la même enveloppe convexe fermée.

On peut contourner cette non séparation en considérant un surgroupe G^+ de G et une application non linéaire ϕ de $\mathfrak{g}^*$ dans $(\mathfrak{g}^+)^*$ telle que, pour les orbites générique, $\phi(\mathcal{O})$ est une orbite et $\overline{\text{Conv}}(\phi(\mathcal{O}))$ caractérise $\mathcal{O}$.

Dans cette thèse, on montre que l'on peut choisir le couple (G^+, ϕ) , avec ϕ de degré ≤ 2 pour tous les groupes nilpotents de dimension ≤ 6 , à une exception près, tous les groupes résolubles de dimension ≤ 4 , et pour un exemple de groupe de déplacements.

Ensuite, on étudie le cas des groupes $G = SL(n, \mathbb{R})$. Pour ces groupes, il existe un tel couple avec ϕ de degré n , mais il n'en existe pas avec ϕ de degré 2 si $n > 2$, il n'en existe pas avec ϕ de degré 3 si $n = 4$.

Enfin, on montre que l'application moment Ψ_π est celle d'une action fortement hamiltonienne de G sur la variété de Fréchet symplectique $\mathbb{P}\mathcal{H}^\infty$. On construit un foncteur qui associe à tout G un surgroupe de Lie Fréchet $\tilde{G}$, de dimension infinie et, à tout π de G , une action $\tilde{\pi}$ fortement hamiltonienne, dont l'ensemble moment caractérise π .

Abstract

To a unitary irreducible representation $(\pi, \mathcal{H})$ of a Lie group G , is associated a moment map Ψ_π . The closure of the range of Ψ_π is the moment set of π . Generally, this set is $\overline{\text{Conv}}(\mathcal{O}_\pi)$, if $\mathcal{O}_\pi$ is the corresponding coadjoint orbit. Unfortunately, it does not characterize π : 2 distincts orbits can have the same closed convex hull.

We can overpass this difficulty, by considering an overgroup G^+ for G and a non linear map ϕ from $\mathfrak{g}^*$ into $(\mathfrak{g}^+)^*$ such that, for generic orbits, $\phi(\mathcal{O})$ is an orbit and $\overline{\text{Conv}}(\phi(\mathcal{O}))$ characterizes $\mathcal{O}$.

In the present thesis, we show that we can choose the pair (G^+, ϕ) , with $\deg \phi \leq 2$ for all the nilpotent groups with dimension ≤ 6 , except one, for all solvable groups with dimension ≤ 4 , and for an example of motion group.

Then we study the $G = SL(n, \mathbb{R})$ case. For these groups, there exists ϕ with $\deg \phi = n$, if $n > 2$, there is no such ϕ with $\deg \phi = 2$, if $n = 4$, there is no such ϕ with $\deg \phi = 3$.

Finally, we show that the moment map Ψ_π is coming from a strongly Hamiltonian G -action on the Fréchet symplectic manifold $\mathbb{P}\mathcal{H}^\infty$. We build a functor, which associates to each G an infinite dimensional Fréchet-Lie overgroup $\tilde{G}$, and, to each π a strongly Hamiltonian action, whose moment set characterizes π .

Keywords : Nilpotent, solvable and split semisimple Lie groups. Fréchet-Lie groups. Unitary representations. Hamiltonian action. Moment map. Overgroup. Coadjoint orbits.