

THESE

présentée à

l'Université de Bordeaux

Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux

par

Emilie DIOT

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ès Informatique

**Etude Structurelle et Algorithmique des graphes pouvant être séparés
par des plus courts chemins.**

Soutenue le 8 décembre 2011

Devant

Cyril GAVOILLE	Professeur	Directeur
Michel HABIB	Professeur	Rapporteur
Ioan TODINCA	Professeur	Rapporteur
Eric SOPENA	Professeur	Examineur
Stephan THOMASSE	Professeur	Examineur

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier Cyril Gavaille, le directeur de cette thèse qui m'a fait confiance il y a maintenant plus de trois ans en acceptant de devenir mon maître de stage et d'accepter de poursuivre notre collaboration en thèse. J'ai beaucoup appris en travaillant avec lui, et le remercie de m'avoir laissé choisir des chemins de recherche tout en me guidant.

Je voudrais aussi remercier Ioan Todinca et Mathieu Chapelle qui m'ont invité à travailler avec eux une semaine au LIFO. J'ai également eu la chance d'aller travailler avec Dimitrios Thilikos et Dimitrios Zorros, et je les remercie de leur accueil. Merci également à Pascal Ochem avec qui j'ai eu la chance de travailler.

Je remercie également mon mari, Yann, qui m'a accompagné et soutenu. Il a accepté de me suivre pour une nouvelle vie à Bordeaux. Je m'excuse ici également des moments pas forcément très agréables ces dernières années et je pense notamment à la rédaction de cette thèse. Finalement un doctorat c'est aussi une épreuve pour la famille.

Je tiens également à remercier ma famille : ma mère, mes grands-parents, mes beaux-parents et mon frère. Ils ont tous une part de responsabilité dans le fait que j'ai réussi à mener à bien cette thèse et ils ont toujours été derrière moi quel que soit mes choix d'études. C'est un soutien essentiel !

Anne-Laure, Nicolas, Frédéric et Marc... Mes co-bureaux sans lesquels la thèse n'aurait sûrement pas été la même ! Merci pour les crises de fou-rires, les gâteaux, l'écoute dont vous avez fait preuve pendant les moments plus durs ! Bon courage à vous pour la suite !

Je tiens également à remercier l'équipe administrative du LaBRI. Quel bonheur de ne pas avoir à se soucier de problèmes administratifs ! Pouvoir compter sur les compétences et l'aide de l'équipe système a été également un soulagement durant ces trois années.

Je remercie Michel Habib et Ioan Todinca d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je remercie également Eric Sopena et Stephan Thomassé à pour leur participation au jury.

Plus globalement j'ai énormément apprécié ces années passées au LaBRI et je remercie toutes les personnes qui y travaillent / y ont travaillé et qui contribuent à entretenir cette ambiance. Et tout particulièrement l'équipe « Combinatoire et Algorithmique » dans laquelle j'ai passé ces trois années. Les petits cafés d'avant GT du vendredi me manquent !

Table des matières

Introduction	8
1 Définitions	14
1.1 Introduction	14
1.2 Définitions	14
1.3 Conclusion	19
2 La Chemin-séparabilité	20
2.1 Introduction	20
2.2 Définition	20
2.3 Relation entre les mesures connues et la CHEMINS SÉPARABILITÉ.	24
2.4 Motivations pour l'étude des graphes séparables.	27
2.5 Conclusion	31
3 Face-séparation et clotûre par mineurs	32
3.1 Introduction	32
3.2 Face-séparabilité	33
3.3 Clotûre par mineurs	41
3.4 Conclusion	44
I Etude algorithmique des graphes k-chemins séparables.	46
4 La famille PS_1	48
4.1 Introduction	48
4.2 Résultats pour quelques famille connues	49
4.3 Méthode pour décider de l'appartenance à PS_1	53
4.4 Le graphe des conflits	56
4.4.1 Règle d'égalité	60

4.4.2	Règle d'inclusion lourde	60
4.4.3	Règle d'inclusion légère	61
4.4.4	Règle de disjonction	61
4.4.5	Règle de comptage	61
4.5	Conclusion	67
5	De la difficulté de la chemins-séparabilité	69
5.1	Introduction	69
5.2	De la difficulté de calculer un 1-chemin séparateur	69
5.3	NP-difficulté de CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE	73
5.3.1	Problème k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE	73
5.3.2	NP-difficulté de CHEMINS SÉPARABILITÉ	76

Table des figures

1.1	Sur cette figure, nous avons les 4 premiers graphes complets.	15
1.2	Le graphe pondéré (G, ω) donné ici a deux composantes connexes : l'une est représentée en bleu tandis que la seconde est donnée en vert. Les chiffres associés à chaque sommet représentent le coût associé par la fonction de pondération	16
1.3	La clique à 5 sommets est mineur du graphe de Petersen représentée à gauche ici puisqu'elle peut être obtenue en contractant les arêtes entourées sur cette figure.	17
1.4	Ces quatre graphes sont les mineurs exclus pour la famille des graphes de largeur arborescente au plus 3.	17
1.5	Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ sont les mineurs exclus pour la classe des graphes planaires.	17
1.6	Cette figure donne les étapes de construction d'un graphe série-parallèle avec une opération série suivie d'une opération parallèle. Les terminaux sont ici représentés avec un cerclage autour des sommets.	18
1.7	Cette figure donne un exemple d'un globe-graphe avec $r = 6$	18
1.8	Un graphe G et une décomposition arborescente de ce graphe.	19
2.1	Le graphe de Petersen auquel on a appliqué une fonction de pondération unitaire sur les sommets et les arêtes, possède un 1-chemin séparateur fort. En effet, lorsqu'on retire le plus court chemin qui est représenté en rouge sur la figure, on obtient une composante connexe ayant un poids de 4, soit inférieur à $\frac{10}{2}$	21
2.2	Cette figure exhibe pour chacun des sous-graphes induits de K_4 un 1-chemin séparateur ; ce qui prouve que la clique à 4 sommets est 1-chemin séparable.	22
2.3	La grille à laquelle on a appliqué une fonction de pondération unitaire sur les sommets et les arêtes est 2-chemins séparable mais pas fortement 2-chemins séparable. Le chemin P_1 est représenté ici en rouge et le chemin P_2 est le chemin bleu.	23
2.4	Le <i>sac-centre</i> est ici représenté en rouge. Les sommets sont regroupés par paire.	26
2.5	Sur cette figure nous pouvons voir tous les marqueurs du sommet v	29
2.6	31

3.1	Le dodécaèdre auquel une fonction de pondération unitaire est appliquée aux sommets et aux arêtes.	33
3.2	Le bord de la face représentée en bleu sur cette figure est un face-séparateur du graphe G auquel une fonction de pondération unitaire a été appliquée aux sommets et aux arêtes. En effet, quand on retire les sommets du bord de cette face, on obtient des composantes connexes ayant un poids maximum de $3 < 11/2$	33
3.3	Le face-séparateur B_0 , qui n'est pas un cycle est le bord de la face F	36
3.4	Un graphe uniformément pondéré avec 19 sommets qui n'est pas face-séparable alors que toutes ses composantes biconnexes le sont.	36
3.5	Illustration pour le théorème. Le chemin T_v est en bleu, le chemin T_u devient rouge après son préfixe commun avec T_v (w est l'ancêtre commun de u et v).	39
3.6	Ce tableau donne le nombre de sommets du le graphe G_i à chaque profondeur i ainsi que le degré de ses sommets.	40
3.7	Le graphe face-séparable G avec une profondeur $i = 4$	40
3.8	La graphe G de gauche admet comme mineur le graphe H de droite.	42
3.9	Le plus court chemin représentée en violet correspond au 1-chemin séparateur de H représentée en bleu.	43
4.1	L'ensemble A est représenté en bleu sur cette figure et l'ensemble B en magenta. La flèche donne le sens de parcours de la face extérieure. Ici $i_0 = 6$	49
4.2	Le globe-graphe G présenté ici est composé de 6 chemins entre x et y . L'arbre de plus courts chemins est donné ici en rouge.	50
4.3	Cette figure donne le sur-graphe pondéré de $K_{3,3}$ que nous considérons dans cette preuve.	52
4.4	Le graphe à 6 sommets donné par cette figure appartient à la famille PS_1	53
4.5	Sur cette figure, on voit la composante connexe la plus lourde C après le retrait du plus court chemin P entre x et y représenté en voir sur la figure. Le chemin Q donné en bleu est un chemin compatible avec le chemin P qui respecte les trois conditions nécessaires.	56
4.6	Voici un exemple d'un graphe des conflits du graphe. Les sommets paires sont représentés en noir, les sommets «chemins» en blanc et les sommets «composantes» en bleu	57
4.7	Le graphe G à 7 sommets présenté dans cette figure appartient à PS_1 . Le graphe des conflits qui lui est associé est donné dans la figure 4.8.	58
4.8	Cette figure nous montre le graphe des conflits correspondant au graphe donné par la figure 4.7 avec sa résolution complète en appliquant les règles de propagation décrites ultérieurement. Il faut cependant utiliser la technique du forçage de variables pour montrer que ce graphe appartient à la famille PS_1	59

4.9	Dans cet exemple de graphe de conflits, il y a deux composantes connexes $\{1, 2, 4\}$ issues de deux paires de sommets différentes. Elles reçoivent alors la même valeur a	60
4.10	La composante $1, 2, 4, 5$ issue de la paire de sommets $(0, 3)$ est incluse dans la composante $1, 2, 3, 4, 5$ issue de la paire $(0, 6)$. La première composante ayant reçu la valeur 0, alors la seconde reçoit également la même valeur.	60
4.11	La composante connexe $0, 4, 5$ issue de la paire $(1, 2)$ a reçu la valeur 0; on peut donc affecter la valeur 1 à la composante connexe $1, 2, 3$ issue de la paire $(0, 4, 6)$ reçoit la valeur 1, puisqu'elle est disjointe de la première.	61
4.12	La composante connexe $0, 2, 4, 5$ issue de la paire $(1, 6)$ a reçu la valeur 0; on peut donc affecter la valeur 1 à la composante connexe $1, 3, 6$ issue de la paire $(0, 2)$ reçoit la valeur 1, puisqu'elle est disjointe de la première.	62
4.13	La figure ci-dessus donne tous les mineurs à 5,6 et 7 sommets pour la classe PS_1	63
4.14	Ces quatre graphes sont les quatre graphes à 7 sommets qui restent après le passage du test, et la suppression de ceux admettant un graphe connu pour ne pas être PS_1 comme mineurs.	65
4.15	Ces trois graphes sont les trois graphes à 8 sommets qui restent après le passage du test, et la suppression de ceux admettant un graphe connu pour ne pas être PS_1 comme mineurs.	66
4.16	Cette figure nous donne tous les mineurs connus pour la famille PS_1	67
4.17	Cette figure nous donne tous les mineurs connus pour la famille PS_1 avec leur fonction de pondération. Les sommets en blanc reçoivent le poids 1, les sommets en noir le poids 2, les sommets en bleu le poids 3, les sommets en vert le poids 4 et les sommets en rouge le poids 5. Pour les arêtes, nous avons utilisé la même coloration que pour les sommets.	68
5.1	Cette figure exhibe le fait que le graphe G_B est un mineur de la grille $6 \times 0(n)$. Les sommets en bleu sont les sommets de poids 0 dans le graphe G_B et les sommets en cyan sont les sommets non nuls dans G_B	71
5.2	Cette figure représente tous les mineurs exclus pour les graphes de largeur arborescente 3.	71
5.3	Construction du graphe G_B à partir de l'instance $B = (b_1, \dots, b_6)$ de PARTITION. Le plus court chemin séparateur (en bleu) correspond à la partition $(b_2, b_5, b_6), (b_1, b_3, b_4)$. D'autres plus courts chemins définissant la même partition sont possibles.	72
5.4	Sur cette figure, on remarque que le retrait du plus court chemin S permet d'obtenir deux composantes connexes; chacune ayant un poids inférieur ou égal à la moitié du poids du graphe.	72

- 5.5 Construction du graphe $G(I_k)$ à partir de l'instance I_k avec $k = 3$. Il y a un biparti complet entre $V(G_1)$ et $V(G_2)$, et $V(G_2)$ et $V(G_3)$ (toutes les arêtes ne sont pas représentées). Ce graphe est fortement 3-chemin séparable. . . . 74
- 5.6 Construction du graphe $G(I_k)$ à partir de l'instance I_k avec $k = 3$. Il y a un biparti complet entre $V(G_1)$ et $V(G_2)$, et $V(G_2)$ et $V(G_3)$ (toutes les arêtes ne sont pas représentées). Ce graphe est fortement 3-chemin séparable. . . . 76

Introduction

Introduction générale

Les graphes sont des objets couramment utilisés pour modéliser de nombreuses situations réelles comme des réseaux routiers, informatiques ou encore électriques. Ils permettent de résoudre des problèmes sur ces réseaux comme le routage (aller d'un sommet à un autre en suivant les arêtes du graphe) ou encore leur exploration (obtenir une carte du graphe étudié). Les réseaux étudiés, et donc les graphes qui les modélisent, peuvent être grands, c'est-à-dire avoir un très grand nombre de sommets. Dans ce cas, comme dans le cas de l'étude de grandes données en général, nous pouvons utiliser le paradigme « Diviser pour mieux régner » pour répondre aux questions posées. En effet, en travaillant sur des petites parties du graphe et en fusionnant les résultats obtenus sur ces petites parties, on peut obtenir le résultat sur le graphe global.

Dans ce document, nous présenterons une manière de décomposer les graphes en utilisant des plus courts chemins comme séparateurs. Cette décomposition permet d'obtenir, par exemple, un routage efficace, un étiquetage compact pour pouvoir estimer les distances entre les sommets d'un graphe ou encore une navigation efficace dans les graphes « petit monde ». Cette méthode va nous permettre de définir de nouvelles classes de graphes.

Routage compact

La communication ou le passage de messages d'un noeud à un autre dans un réseau est appelé « routage ». Cette communication repose sur les en-têtes des messages, les tables de routage qui permettent d'associer à chaque voisin du noeud considéré une liste de destinataires, et un algorithme de routage. Il existe plusieurs critères pour évaluer les différents types de routage. Un critère naturel est le ratio obtenu entre la route optimale et la route réellement empruntée. Ce critère est appelé « étirement » dans la littérature. Une autre mesure utilisée pour évaluer un schéma de routage est l'encombrement moyen des routeurs. On cherche alors à ne pas surcharger un routeur mais au contraire à répartir la charge du réseau sur l'ensemble des routeurs. Un dernier critère, et c'est celui qui nous va intéresser ici est la taille des tables de routage.

Le routage compact est un défi important de nos jours. En effet, le nombre d'entrées

des tables de routage d'Internet augmente chaque année d'un facteur compris entre 1,2 et 1,3. Or la taille des tables de routage a un impact direct sur la latence du réseau. De plus, chaque mise à jour des réseaux induit une période d'instabilité. Cet accroissement du réseau est cependant trop important pour être contré par l'amélioration technologique des routeurs. Il est donc à craindre une augmentation importante du délai de transmission des messages dans les prochaines années.

Une manière de contre-balancer ce grossissement du réseau est de repenser entièrement la manière de concevoir les tables de routage. On peut pour cela utiliser la notion de séparateurs de graphes. On cherche alors à avoir des séparateurs de petite taille qui induisent une décomposition du graphe considéré. Les tables de routage ont alors une taille dépendante de la taille de ces séparateurs. Cependant certaines famille de graphes telle que les graphes planaires par exemple n'admettent pas de petits séparateurs. Nous allons alors nous intéresser à leur topologie, en relaxant la condition d'optimalité des routes empruntées. Un exemple est lorsque les séparateurs ont un petit diamètre (voir le travail sur la longueur arborescente [DG07, CDE⁺08, UY09]). On peut alors approximer la meilleure route possible en utilisant un unique représentant du séparateur dans la table de routage.

Il existe beaucoup de travaux sur le routage dans différentes classes de graphes. Dans [FG01], Fraigniaud et Gavoille ont donné un schéma de routage asymptotiquement optimal en ce qui concerne l'espace mémoire, la taille des messages ainsi que le temps de routage. Laing traite quant à lui le cas du routage dans les arbres indépendant du nombre des noeuds des graphes dans [Lai04]. Il obtient un étirement de $2^k - 1$. Dans [FL], les auteurs présentent un nouveau schéma de routage pour les graphes séries-parallèles.

Dans ce document, nous allons considérer un autre type de séparateur : les k -CHEMINS SÉPARATEURS.

Chemin-séparabilité

La notion de CHEMINS SÉPARABILITÉ a été définie en 2006 par [AG06]. On cherche à découper des graphes en utilisant des plus courts chemins.

Il est connu que les graphes planaires peuvent être séparés par au plus trois plus courts chemins. Ce résultat a été généralisé dans [AG06]. En effet, il est montré dans cet article qu'il existe une fonction $f(H)$ pour la classe des graphes excluant le mineur H telle que les graphes appartenant à cette classe sont $f(H)$ -chemins séparables.

Ce document présente des résultats sur la structure de tels graphes ainsi que des résultats de complexité concernant le problème qui consiste à déterminer le plus petit nombre de plus courts chemins permettant la décomposition d'un graphe donné.

Plan de la thèse

Ce document est constitué de deux parties. Dans la première partie, nous allons donner les définitions utiles à la lecture de ce document ainsi que des résultats sur les familles de graphes dont on connaît le plus petit entier k que les graphes appartenant à cette famille soient k -chemins séparables.

Dans une seconde partie nous allons également donner des résultats théoriques sur la k -chemins séparabilité des graphes. Néanmoins dans cette nouvelle partie, nous utiliserons une méthode algorithmique pour obtenir ces résultats.

Partie 1 : Etude structurelle des graphes k -chemins séparables.

Chapitre 1 : Généralités

Dans ce chapitre, nous donnerons les définitions courantes en théorie des graphes que nous utiliserons dans ce document. Nous donnerons également les définitions des familles de graphes auxquelles nous ferons référence dans ce document.

Chapitre 2 : Chemins-séparabilité

Il existe plusieurs manières connues pour décomposer un graphe. Dans ce document, nous utiliserons la notion de k -chemins séparabilité définie dans [AG06]. Intuitivement, l'ensemble des sommets du séparateur S que l'on considérera sont des sommets constituant k plus courts chemins du graphe et tels que le poids des composantes connexes de $G \setminus S$ est au plus la moitié du poids total du graphe.

Chapitre 3 : Face-séparabilité et clôture par mineurs

Il est bien connu que les graphes planaires pondérés sont 3-chemins séparables [Tho04]. Nous avons également montré qu'il existe des graphes planaires qui ne peuvent pas être séparés avec 1 plus court chemin grâce au lemme 9. Une question naturelle est de se demander si deux plus courts chemins ne suffisent pas pour séparer tout graphe planaire pondéré.

Dans cette partie, nous définirons une famille de graphes planaires dont un séparateur est composé des sommets composant le bord d'une face. Nous montrerons que les graphes appartenant à cette famille sont 2-chemins séparables et contiennent des graphes de largeur arborescente non-bornée si la pondération des sommets est unitaire.

Nous allons aussi définir des familles de graphes constituée de graphes k -chemins séparables quelle que soit la fonction de pondération sur les sommets et les arêtes. Dans ce chapitre, nous allons montrer que ces familles sont closes par mineurs 5.

Partie 2 : Etude algorithmique des graphes k -chemins séparables.

Chapitre 4 : La famille PS_1

Dans ce chapitre, nous étudierons plus précisément la famille des graphes qui sont séparables par un plus court chemin pour toutes fonctions de pondération sur les sommets et les arêtes. Nous avons montré dans la partie précédente, qu'une telle famille est close par mineurs. Nous donnerons ici une liste non-exhaustive des mineurs à exclure pour cette famille. Plus précisément, on établit la liste complète des mineurs minimaux à exclure avec moins de 9 sommets. Pour cela, nous avons développé un algorithme qui s'il répond vrai démontre que G est dans PS_1 . Sinon, l'algorithme donne des indications (sous forme de contraintes entre des sous-ensembles de sommets) sur une pondération de G qui n'est peut-être pas 1-chemin séparable, ce qui permet manuellement d'identifier de nouveaux mineurs. Dans certains cas cependant (qui sont très rares pour les graphes à moins de 9 sommets), l'algorithme ne permet pas de décider.

Il faut noter qu'on ne sait pas si le problème de savoir si G est dans la famille PS_1 ou pas possède un certificat positif ou un certificat négatif à part ceux utilisant la liste des mineurs minimaux à exclure. Autrement dit, sans cette liste, aucun algorithme (même exponentiel) n'est actuellement connu pour ce problème.

Chapitre 5 : Sur la difficulté de séparer des graphes par des plus courts chemins

Dans cette partie, nous donnerons des résultats de NP-complétude et de NP-difficulté sur des problèmes concernant les graphes k -chemins séparables.

Nous allons dans un premier temps montrer que déterminer si un graphe pondéré (G, ω) possède un 1-chemin séparateur est NP-complet. La preuve que nous allons donner montre que cette question est également NP-complet quand bien même le graphe est planaire et a un petit degré maximum et une largeur arborescente bornée.

Nous allons ensuite montrer que savoir si un graphe pondéré (G, ω) possède est k -chemins séparable ou fortement k -chemins séparable sont des problèmes NP-difficiles.

Conclusion et perspectives

Dans la conclusion, nous reprendrons les principaux résultats obtenus durant les trois dernières années et présentés dans ce document. Nous présenterons également des questions qui restent ouvertes et qui mériteraient de faire l'objet de recherche.

Etude structurelle des graphes k -chemins séparables.

Chapitre 1

Définitions

1.1 Introduction

Dans cette section nous allons donner les définitions usuelles en théorie des graphes. Néanmoins pour approfondir, les lecteurs peuvent se reporter à un livre en français [CLRS02] et un livre en anglais [GY04].

1.2 Définitions

Un *graphe* $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets noté V et un ensemble d'arêtes E qui sont des couples de sommets $V \times V$. Les sommets x, y qui constituent une arête sont appelés *extrémités de l'arête*. Les arêtes de type (x, x) sont appelés des *boucles*.

On appelle des sommets *adjacents* des sommets qui sont reliés par une arêtes. De tels sommets sont également appelés *voisins*.

Un *graphe simple* est un graphe dans lequel il n'y a pas de boucles, et pour lequel, pour chaque paire de sommets x, y du graphe, il existe au plus une arête entre x et y . Dans tout le reste de ce document, nous parlerons uniquement de ce type de graphes. Nous nous autoriserons cependant à ne pas le préciser à chaque fois.

Une fonction de pondération ω sur les sommets d'un graphe G est une fonction qui associe à chaque sommet du graphe G un réel \mathbb{R} . On peut également définir une fonction de pondération sur les arêtes d'un graphe G de la même manière. Dans ce cas, les poids doivent être positifs ou nuls. En effet, dans le cas contraire, on pourrait avoir des cycles absorbants et alors ne plus pouvoir définir des plus courts chemins. Dans la littérature, le poids sur les arêtes est également appelé *coût* ou *longueur*.

Dans ce document, nous définirons un graphe G pondéré, noté (G, ω) comme un graphe sur lequel on a appliqué une fonction de pondération sur les sommets et sur les arêtes. En l'occurrence, nous aurons donc : $\omega : E \cup V \rightarrow \mathbb{R}$.

Un *chemin* dans un graphe G est une suite de sommets u_1, u_2, \dots, u_n du graphe tel que

pour chaque i , $(u_i, u_{i+1}) \in E$, l'ensemble des arêtes du graphe G .

Un *cycle* est un chemin x_1, x_2, \dots, x_p tel que $x_1 = x_p$ et pour lesquels tous les autres sommets sont différents deux à deux.

Un *plus court chemin* P entre deux sommets u, v est un chemin de coût minimum connectant u et v , le coût d'un chemin étant la somme des poids de ces arêtes. Il est à remarquer qu'un plus court chemin entre deux sommets u et v d'un graphe n'est pas nécessairement unique. Notons qu'un plus court chemin ne peut donc pas contenir de cycle, et donc deux fois un même sommet.

Un *sous-graphe* $G' = (V', E')$ d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe défini comme suit : $V' \subseteq V$ et $E' = \{(x, y) \in E \text{ et } x, y \in V'\}$. Un *sous-graphe propre* est un sous-graphe qui n'est pas le graphe d'origine. Un *sous-graphe induit* est un sous-graphe $G' = (V', E')$ tel que toutes les arêtes ayant leur extrémités dans V' appartiennent à l'ensemble E' .

Un *graphe complet* ou une *clique* est un graphe simple si pour toute paire de sommets est reliée par une arête. Un graphe complet à n sommets a donc $n(n-1)/2$ arêtes.

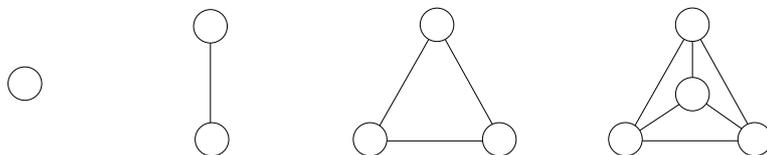


FIG. 1.1 – Sur cette figure, nous avons les 4 premiers graphes complets.

Un graphe est dit *connexe* si pour tous couples de sommets (x, y) , il existe un chemin permettant d'aller de x à y et vice-versa.

On peut alors définir les composantes connexes d'un graphe comme les ensembles maximum de sommets du graphe qui restent connexes.

Le *degré* d'un sommet s d'un graphe G est le nombre d'arêtes adjacentes. On peut alors définir le degré maximum des graphes comme étant le plus grand degré parmi les degrés de tous les sommets du graphe.

Le *diamètre* d'un graphe pondéré (G, ω) est la longueur du plus long plus court chemin de G .

Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Une *forêt* est un graphe où chaque composante connexe est un arbre. Nous pouvons caractériser ces graphes avec le nombre de leur arêtes. En effet, un graphe est un arbre si et seulement si il possède $(|V| - 1)$ arêtes.

Un *arbre couvrant* T d'un graphe G est un arbre dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des sommets de G . L'ensemble des arêtes de T est un sous-ensemble des arêtes de G .

Un graphe *biparti* est un graphe $G = (V, E)$ tel que l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles A et B tels que toutes les arêtes de G ont une extrémité dans l'ensemble A et l'autre dans l'ensemble B . Par analogie aux graphes complets, on définit les graphes *biparti complets* comme étant les graphes bipartis avec toutes les arêtes possibles entre les sommets des deux ensembles.

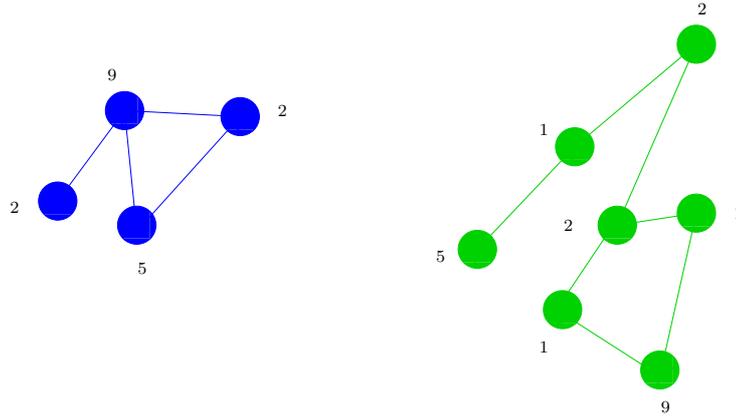


FIG. 1.2 – Le graphe pondéré (G, ω) donné ici a deux composantes connexes : l'une est représentée en bleu tandis que la seconde est donnée en vert. Les chiffres associés à chaque sommet représentent le coût associé par la fonction de pondération

Un graphe *biconnexe* est un graphe dans lequel la suppression d'au moins deux sommets est nécessaire pour le déconnecter. Nous pouvons alors définir les composantes biconnexes d'un graphe G comme étant l'ensemble maximal de sommets qui induit un sous-graphe biconnexe.

Nous allons également utiliser dans ce document la notion de mineurs de graphes.

Définition 1 *Un graphe H est un mineur d'un graphe G s'il peut être obtenu depuis G en combinant les trois opérations suivantes :*

- *Suppression de sommets*
- *Suppression d'arêtes*
- *Contraction d'arêtes*

Nous pouvons remarquer dans un premier temps que les graphes de largeur arborescente bornés peuvent être caractérisés par leur mineurs exclus. Les graphes de largeur arborescente au maximal 3 sont les graphes qui n'admettent pas comme mineurs les graphes représentés dans la figure 1.4.

Ces définitions de base vont maintenant nous permettre de définir des familles de graphes que nous étudierons ultérieurement.

Un *graphe planaire* est un graphe que l'on peut plonger dans le plan, c'est-à-dire que l'on peut dessiner dans le plan ou sur la sphère sans aucun croisement d'arêtes. En 1930, Kuratowski a donné une caractérisation de ces graphes [Kur30] en montrant que les graphes planaires correspondaient aux graphes excluant K_5 et toutes subdivisions de $K_{3,3}$ comme sous-graphe. Ce résultat a été précisé en 1937 dans [Wag] dans lequel l'auteur montre que K_5 et $K_{3,3}$ sont les mineurs exclus permettant de caractériser la classe des graphes planaires.

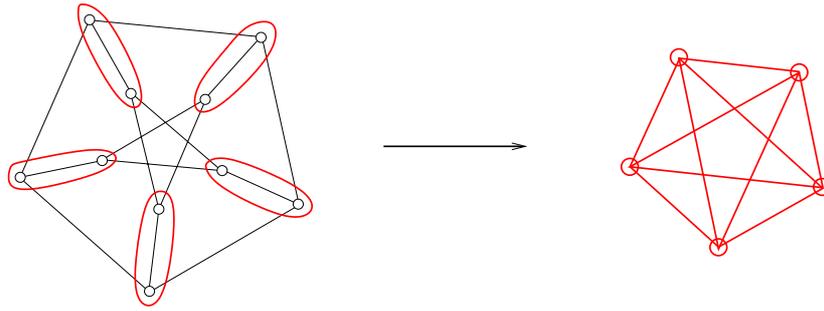


FIG. 1.3 – La clique à 5 sommets est mineur du graphe de Petersen représentée à gauche ici puisqu'elle peut être obtenue en contractant les arêtes entourées sur cette figure.

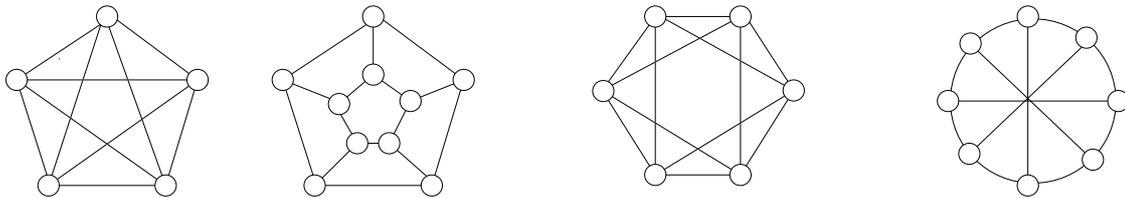


FIG. 1.4 – Ces quatre graphes sont les mineurs exclus pour la famille des graphes de largeur arborescente au plus 3.



FIG. 1.5 – Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ sont les mineurs exclus pour la classe des graphes planaires.

Un graphe *planaire-extérieur* est un graphe planaire tel que tous les sommets peuvent être mis sur la face extérieure du graphe.

Les graphes planaires-extérieurs excluent $K_{2,3}$ et K_4 comme mineurs.

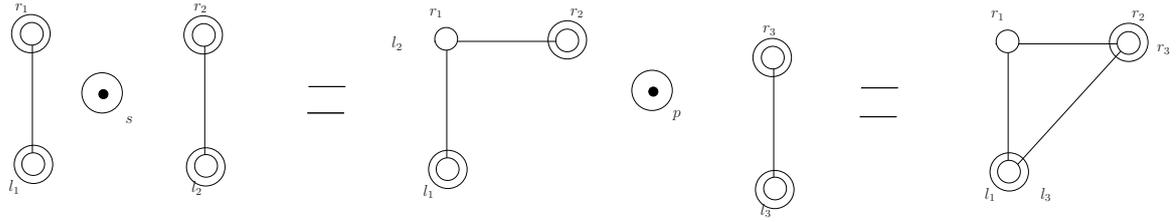


FIG. 1.6 – Cette figure donne les étapes de construction d’un graphe série-parallèle avec une opération série suivie d’une opération parallèle. Les terminaux sont ici représentés avec un cerclage autour des sommets.

Les graphes *série-parallèle* avec deux sommets distincts r et l , appelés terminaux, noté (G, l, r) sont définis récursivement comme suit :

- Le graphe constitué d’une unique arête (v_1, v_2) est un graphe série-parallèle (G, l, r) avec $l = v_1$ et $r = v_2$.
- Opération série $(G_1, l_1, r_1) \odot_s (G_2, l_2, r_2)$ forme un graphe série-parallèle en identifiant r_1 avec l_2 . Les terminaux du nouveau graphe sont l_1 et r_2 , ou bien l_1 et r_1 .
- Opération parallèle $(G_1, l_1, r_1) \odot_p (G_2, l_2, r_2)$ forme un graphe série-parallèle en identifiant l_1 avec l_2 et r_1 avec r_2 . Les terminaux du graphe ainsi obtenu sont l_1 et r_1 .

Ces graphes peuvent également être caractérisés par exclusion de mineurs. En effet les graphes séries-parallèles sont les graphes qui excluent K_4 comme mineurs.

Un *globe-graphe* est une subdivision de $K_{2,r}$ pour un entier r ou les deux sommets de degrés r peuvent être adjacents. Une illustration d’un tel graphe est donnée dans la figure 1.7.

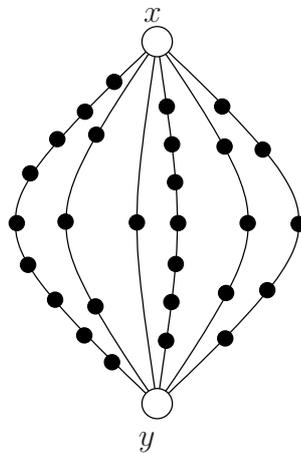


FIG. 1.7 – Cette figure donne un exemple d’un globe-graphe avec $r = 6$.

Robertson et Seymour ont donné en 1986 dans [RS86] la définition d’une nouvelle décomposition : la décomposition arborescente.

Définition 2 La décomposition arborescente d'un graphe $G = (V, E)$ est un couple $D = (T, X)$ ou $X = \{X_i\}$ est une famille de sous-ensemble de sommets de V et T est un arbre dont les noeuds sont étiquetés par ces sous-ensembles X_i tels que :

- Tous les sommets de G appartiennent à un sous-ensemble X_i
- Toutes les arêtes de G appartiennent à un sous-ensemble de X_i
- Si deux sous-ensembles X_i et X_j contiennent le même sommet x de G , alors tous les sous-ensembles X_k sur le chemin entre X_i et X_j dans T contiennent également le sommet x .

Les ensembles X_i sont appelés « sacs » dans la suite.

Une telle décomposition n'est pas unique pour un graphe G donné.

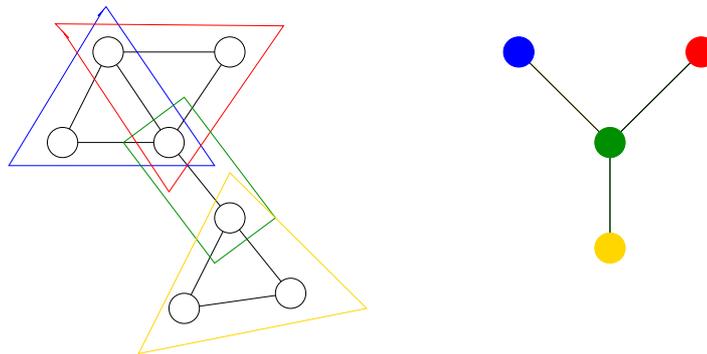


FIG. 1.8 – Un graphe G et une décomposition arborescente de ce graphe.

Définition 3 La largeur arborescente d'un graphe G est donné par le nombre de sommets - 1 dans le plus gros sac de la plus petite décomposition arborescente parmi toutes celles possibles pour le graphe G .

La largeur arborescente d'un arbre est donc de 1, puisque la plus petite décomposition arborescente est celle qui met une arête dans chacun des sacs.

La largeur arborescente d'une grille de taille $n \times m$ est de $\min(n, m)$.

Il est connu que le calcul de la largeur arborescente d'un graphe G donné est un problème NP-complet (voir [ACP87]). Néanmoins il existe un algorithme linéaire qui permet de déterminer si un graphe a une largeur arborescente inférieure à k pour tout entier k .

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné les définitions couramment utilisées en théorie des graphes et plus précisément celle qui seront utilisées dans ce document. Dans la suite de ce document nous utiliserons régulièrement les définitions données dans cette partie.

Chapitre 2

La Chemin-séparabilité

2.1 Introduction

La notion de k -CHEMINS SÉPARABILITÉ que nous allons étudier dans ce document a été définie en 2006 dans [AG06]. Dans cette décomposition, la taille des séparateurs n'importe pas, mais c'est leur topologie qui nous intéresse.

Dans ce chapitre, nous allons donner les définitions utilisées tout au long de ce document. Nous allons ensuite donner des exemples de familles de graphes connues pour lesquels on connaît le plus petit entier k tel que les graphes appartenant à ces familles sont k -chemins séparables.

Nous allons également donner des propriétés connues sur ces graphes. Nous verrons notamment que de tels graphes ont des propriétés intéressantes pour le routage compact, ou l'estimation de distances dans un graphe.

Dans cette section nous considérerons des graphes pondérés. La fonction de pondération ω sur les sommets associe à chaque sommet du graphe un réel \mathbb{R} . La somme des poids sur les sommets constituera *le poids du graphe* : $\omega(G) = \sum_{u \in V(G)} \omega(u)$.

2.2 Définition

Dans cette section, nous allons donner les définitions des graphes k -chemins séparables. Intuitivement, nous allons séparer les graphes en retirant des plus courts chemins. Nous considérons ici une séparation telle que les composantes connexes du graphe auquel on a retiré les plus courts chemins ont un poids d'au plus la moitié du poids total du graphe.

Un *demi-séparateur* d'un graphe pondéré (G, ω) est un sous-ensemble de sommets S tel que chaque composante connexe de $G \setminus S$ a un poids $\leq \frac{1}{2}\omega(G)$.

Il est à noter que les tailles des composantes connexes peuvent être très différentes d'une composante à une autre. On ne s'attache ici qu'à leur poids par rapport au poids du graphe d'origine. Observons également que le retrait d'un demi-séparateur ne déconnecte pas néces-

sairement le graphe.

Définition 4 *Un k -chemins séparateur fort S d'un graphe pondéré (G, ω) est un demi-séparateur de G dont les sommets sont les sommets d'un sous-graphe qui est l'union de k plus courts chemins de G .*

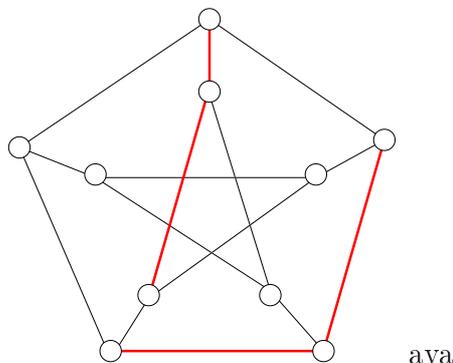


FIG. 2.1 – Le graphe de Petersen auquel on a appliqué une fonction de pondération unitaire sur les sommets et les arêtes, possède un 1-chemins séparateur fort. En effet, lorsqu'on retire le plus court chemin qui est représenté en rouge sur la figure, on obtient une composante connexe ayant un poids de 4, soit inférieur à $\frac{10}{2}$.

Il existe une définition plus généraliste. Intuitivement, plutôt que de retirer tous les plus courts chemins simultanément dans le graphe d'origine, on retire quelques plus courts chemins, puis d'autres plus courts chemins dans le graphe obtenu suite au premier retrait. On procède ainsi jusqu'à avoir séparé le graphe. La somme des nombres des plus courts chemins ainsi retirés à chaque étape nous donne l'entier k . Plus formellement :

Définition 5 *Un k -chemins séparateur d'un graphe pondéré (G, ω) est un demi-séparateur de G correspondant aux sommets d'un sous-graphe $P_0 \cup P_1 \cup \dots$ où chaque P_i est composé d'une union de k_i plus courts chemins de $G \setminus \bigcup_{j < i} P_j$ avec $\sum_i k_i \leq k$.*

Les k -chemins séparateurs d'un graphe permettent de définir une décomposition T définie comme suit. Les sommets de T sont les k -chemins séparateurs tandis que les sous-arbres sont les composantes. Il est important de noter que pris indépendamment les uns des autres, chaque plus court chemin ne représente pas un séparateur ; mais c'est bien l'ensemble de ces plus courts chemins qui constituent le séparateur. Il est également à noter que contrairement à la décomposition arborescente, les noeuds de T forment une partition des sommets de G .

L'arbre de décomposition ainsi obtenu est alors d'une profondeur de $\lceil \log \frac{\omega(G)}{\min(\omega(v))} \rceil$. Notons alors que les noeuds de T ne sont pas des séparateurs au sens courant du terme. En effet, soit x et y deux sommets de deux feuilles de la décomposition. Alors, tout chemin entre x et y ne passent pas nécessairement par des sommets de leur plus petit ancêtre commun. On peut

uniquement savoir que ce chemin traverse des sommets d'un des noeuds de la décomposition. En effet, c'est cet ensemble S qui constitue un séparateur.

Notons que lorsque $k = 1$, les notions de k -CHEMINS SÉPARATEUR et de k -CHEMINS SÉPARATEUR FORT sont équivalentes.

Nous pouvons alors définir les notions de k -CHEMINS SÉPARABILITÉ et k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE comme suit :

Définition 6 *Un graphe pondéré est k -chemins séparable si tout sous-graphe induit possède un k -CHEMINS SÉPARATEUR. De manière analogue, un graphe est dit fortement k -chemins séparable si tout sous-graphe induit possède un k -CHEMINS SÉPARATEUR FORT.*

Nous pouvons remarquer qu'un k -CHEMINS SÉPARATEUR FORT est un k -CHEMINS SÉPARATEUR. Donc si G est fortement k -chemins séparables, alors G est également k -chemins séparables.

La figure 2.2 montre que le graphe complet à 4 sommets est 1-chemin séparable.

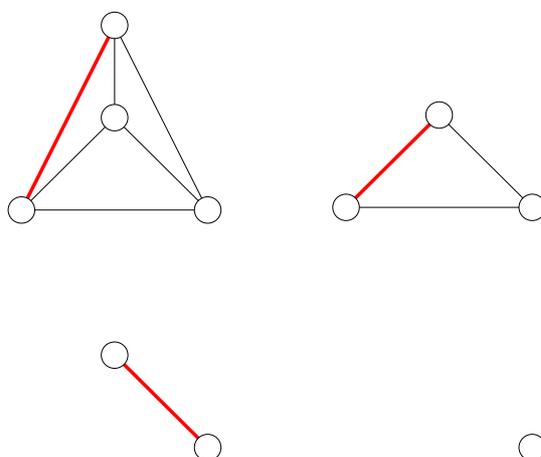


FIG. 2.2 – Cette figure exhibe pour chacun des sous-graphes induits de K_4 un 1-chemin séparable ; ce qui prouve que la clique à 4 sommets est 1-chemin séparable.

Dans la suite, nous allons appeller CHEMINS SÉPARABILITÉ d'un graphe G le plus petit entier k tel que G est k -CHEMINS SÉPARABILITÉ. Par analogie, nous définissons également la CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE d'un graphe comme étant le plus petit entier k tel que le graphe considéré est fortement k -chemins séparables.

Il est à noter que les notions de k -CHEMINS SÉPARABILITÉ et k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE ne sont pas équivalentes. En effet, il existe des graphes qui nécessitent moins de plus courts chemins pour être séparer en utilisant la définition de k -CHEMINS SÉPARABILITÉ qu'avec la notion de k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE. C'est ce que montre la proposition 2. Nous allons cependant commencer par donner un lemme donnant une condition sur le nombre de sommets permettant de séparer une grille.

Dans la suite, nous pourrions utiliser le terme de « chemin-séparabilité » pour désigner le plus petit entier k tel que le graphe considéré est k -chemins séparables.

Proposition 1 *Tout demi-séparateur S de la grille $p \times p$ à laquelle on a appliqué une fonction de pondération unitaire sur les sommets et les arêtes est tel que $|S| \geq \frac{p}{2}$.*

Preuve. Soit (G, ω) une grille de taille $p \times p$ dans laquelle tous les sommets et toutes les arêtes reçoivent un poids unitaire. Soit S un demi-séparateur de (G, ω) tel que $|S| < \frac{p}{2}$. Nous pouvons donc remarquer qu'il existe au moins $\frac{p}{2}$ lignes (respectivement colonnes) complètes dans le sous-graphe $G \setminus S$. Soient L et L' deux lignes complètes de ce même sous-graphe. Alors il existe p colonnes connectant ces deux lignes entre elles. Donc, pour que L et L' appartiennent à deux composantes connexes différentes, il faut que S retire p colonnes. Or c'est impossible avec moins de $\frac{p}{2}$! Le sous-graphe $G \setminus S$ est donc constitué d'une unique composante connexe. De plus le nombre de sommets de $G \setminus S$ est égal à $p^2 - |S|$; donc supérieur à $\frac{p}{2}$. Le séparateur S n'est donc pas un demi-séparateur de la grille unitairement pondéré. \square

Proposition 2 *Il existe un graphe pondéré qui est 2-chemins séparables mais qui n'est pas fortement 2-chemins séparables.*

Preuve. Soit (G, ω) avec G une grille de taille $n \times m$ à laquelle on a ajouté un sommet universel. La fonction de pondération ω qui lui est appliquée associe le poids 1 à chaque sommet et 1 à chaque arête. Le graphe est représenté par la figure 2.2.

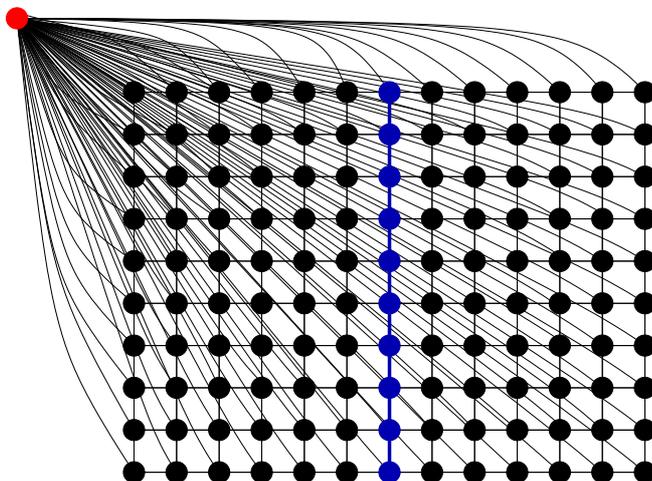


FIG. 2.3 – La grille à laquelle on a appliqué une fonction de pondération unitaire sur les sommets et les arêtes est 2-chemins séparables mais pas fortement 2-chemins séparables. Le chemin P_1 est représenté ici en rouge et le chemin P_2 est le chemin bleu.

Le graphe G est donc de diamètre 2, ce qui signifie que chaque plus court chemin est composé d'au plus 3 sommets. Le retrait de 2 plus courts chemins de manière simultanée nous permet de retirer au plus 6 sommets. Or, d'après la proposition 1, tout demi-séparateur d'une telle grille est composé d'au moins $\frac{n}{2}$. Nous pouvons donc en conclure que 2 plus courts chemins dans le graphe G ne suffisent pas à séparer ce graphe.

Une autre méthode consiste à retirer dans un premier temps le sommet universel comme premier plus court chemin P_1 . On considère alors le plus court chemin P_2 qui passe par tous les sommets de la $\lceil \frac{n}{2} \rceil^{me}$ colonne. Il s'agit bien d'un plus court chemin puisque toutes les arêtes ont reçues une pondération unitaire. Le graphe résultant est alors composé de deux composantes connexes. Par construction du plus court chemin P_2 , chacune des ces composantes contient au plus la moitié des sommets, et donc a un poids d'au plus la moitié du poids total du graphe d'origine puisque la pondération sur les sommets est unitaire. Nous avons donc un 2-chemins séparateur pour le graphe G ; ce qui conclut la preuve de cette proposition. \square

Nous pouvons remarquer qu'avec la méthode proposée dans la preuve précédente, nous pouvons alors également trouver un 2-chemins séparateurs pour le grille dont les sommets ont une valuation réelle mais pour lesquelles les arêtes ont toujours un poids 1.

Nous allons dans la section suivante donnée des correspondances entre les décompositions classiques telle que la décomposition arborescente et la décomposition en plus courts chemins.

2.3 Relation entre les mesures connues et la CHEMINS SÉPARABILITÉ.

Certains résultats sont connus sur les graphes k -chemins séparables. Notamment, il existe des familles pour lesquelles le plus petit entier k tel que les graphes des familles considérées sont k -chemins séparables est connu.

Un des premiers résultats que nous pouvons donner est que les arbres sont 1-chemin séparables. Cette propriété repose sur la propriété 1 des centres des arbres.

Propriété 1 *Soit T un arbre à n sommets. Il existe un ou deux sommets c_1 et c_2 , appelés centres, tels que $T \setminus c_1$ (respectivement $T \setminus c_2$) est composé de composantes connexes contenant au plus la moitié des sommets de T .*

Cette propriété donnée ici dans le cas est arbres non-pondéré est toujours valable dans le cas des arbres pondérés : les arbres résultants ont un poids valant au plus la moitié de l'arbre d'origine. Il nous suffit donc de retiré l'un de ces sommets pour avoir séparé l'arbre considéré. Or un sommet est bien un plus court chemin de lui vers lui-même. Les arbres sont donc bien 1-chemin séparables.

Le résultat précédent peut être généralisé par le lemme 3 qui donne une borne sur le nombre de plus courts chemins nécessaires pour séparer un graphe de largeur arborescente

bornée. Les arbres ayant une largeur arborescente égale à 1, il s'agit donc bien d'une généralisation. La preuve de cette proposition repose sur le lemme ??.

Lemme 1 *Toute largeur arborescente d'un graphe pondéré possède un sac qui est un demi-séparateur du graphe. Un tel graphe sera appelé sac-centre dans la suite.*

Preuve. Soit T une décomposition arborescente d'un graphe G auquel on a appliqué une fonction de pondération ω . Prenons un sac arbitraire R comme racine de T , et notons $\pi(X)$ le père du sac X dans T . Pour un sac X , notons par T_X le sous-arbre de T enraciné en X . Par abus de notation, T_X désignera également tous les sous-graphes induits par les sommets de tous les sommets contenus dans les sacs composant T_X .

Pour tous les sacs, nous définissons la valeur ρ comme le poids de tous les sommets qui sont dans $T_X \setminus \pi(X)$ avec la convention que $\pi(R) = \emptyset$. Plus formellement :

$$\rho(X) = \sum_{v \in T_X \setminus \pi(X)} \omega(v).$$

Notons qu'avec cette définition, nous avons $\rho(R) = \omega(G)$. Considérons une composante connexe H de $G \setminus X$. Si H appartient à $T \setminus T_X$, nous avons alors l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \omega(H) &\leq \rho(R) - \rho(X) \\ &\leq \omega(G) - \rho(X) \end{aligned}$$

Si H appartient à T_F pour un fils F de X , alors $\omega(H) \leq \rho(F)$ puisque les sommets de $\pi(F) = X$ ne sont pas dans F .

Le centre C peut alors être trouvé en traversant T à partir de sa racine R comme suit :

1. Si $\rho(F) \geq \omega(G)/2$ pour tous les fils F du sac courant X , alors $C = X$.
2. Dans tous les autres cas, prenons un fils F de X tel que $\rho(F) \geq \omega(G)/2$, et posons $X < -F$ et retournons à la première étape.

La procédure ci-dessus se termine après au plus la profondeur de T pas. En fait, à tout moment, $\rho(X) \geq \omega(G)/2$ et $\rho(X)$ n'est pas croissante puisque $\rho(X) \leq \rho(\pi(X))$ pour $X \neq R$. De plus, lorsqu'elle se termine avec une composante C , $\rho(C) \geq \omega(G)/2$ et $\rho(F) < \omega(G)/2$ pour tous les fils de C .

Considérons une composante connexe H de $G \setminus C$. Alors soit H est contenu dans $T \setminus T_C$, ou alors il est contenu dans T_F pour un fils F de C . Dans le premier cas $\omega(H) \leq \omega(G) - \rho(C) \leq \omega(G)/2$. Dans le dernier cas, $\omega(H) \leq \rho(F) < \omega(G)/2$. Dans tous les cas, C est le sac-centre.

□

Proposition 3 *Les graphes pondérés de largeur arborescente t sont fortement $\lceil \frac{t+1}{2} \rceil$ -chemins séparables.*

Preuve. Considérons dans un premier temps que si le graphe G n'est pas connexe, nous pouvons réduire l'étude à la plus grosse composante connexe. En effet, il ne peut y avoir qu'une unique composante connexe ayant un poids supérieur à la moitié du poids total du graphe d'origine. De plus, par définition tous les sous-graphes induits du graphe, et donc de toutes les composantes connexes de G est bornée par t .

Considérons tout sous-graphe H d'un graphe pondéré G . La largeur arborescente de H est bornée par la largeur arborescente de G . Donc H admet une décomposition arborescente de largeur au plus t , donc tous les sacs contiennent au plus $t + 1$ sommets. En utilisant le lemme 1, on peut en conclure que le centre C de la décomposition arborescente est un demi-séparateur. Ce sac-centre peut être couvert par au plus $\lceil |C|/2 \rceil$, soit $\lceil (t + 1)/2 \rceil$ plus courts chemins. Nous pouvons donc en conclure que H est un $\lceil (t + 1)/2 \rceil$ -chemins séparateur fort, et donc G est fortement $\lceil (t + 1)/2 \rceil$ -chemins séparables. \square

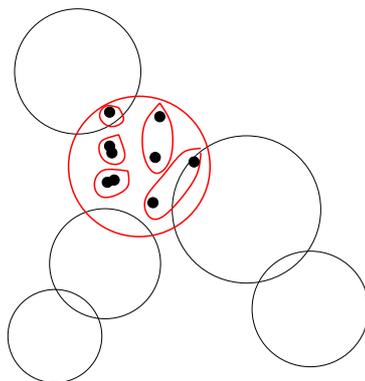


FIG. 2.4 – Le *sac-centre* est ici représenté en rouge. Les sommets sont regroupés par paire.

Nous avons donc un lien entre la largeur arborescente des graphes et leur k -CHEMINS SÉPARABILITÉ. La chemin-séparabilité est donc une généralisation puisqu'ainsi les graphes de largeur arborescente bornée sont aussi $0(1)$ -chemins séparables. Le contraire est cependant faux. En effet, il existe des graphes de largeur arborescente non-bornée qui sont néanmoins séparables par un très petit nombre de plus courts chemins. Nous donnerons l'exemple d'un tel graphe dans le chapitre 3.

Il existe également un lien entre la CHEMINS SÉPARABILITÉ et le nombre de sommets du graphe. Une relation triviale est que tout graphe à n sommets est trivialement $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -chemins séparables puisque ces graphes ont une largeur arborescente inférieure ou égale à $n - 1$. Nous pouvons néanmoins être un peu plus précis. C'est ce que montre le lemme ??

Proposition 4 *Les graphes pondérés ayant au plus $4r$ sommets sont fortement r -chemins séparables.*

Preuve. Commençons par remarquer que si (G, ω) n'est pas connexe, il nous suffit de considérer la composante connexe ayant le plus grand poids. En effet, il ne peut exister qu'une

seule composante connexe avec un poids supérieur à la moitié du poids du graphe. Notre étude peut donc se résumer à cette composante, toutes les autres étant de poids inférieur ou égal à la moitié.

Soit (G, ω) un graphe pondéré à $4r$ sommets. Nous allons ordonner les sommets selon la valeur qui leur est associée par la fonction de pondération ω tel que $\omega(u_0) \geq \omega(u_1) \geq \dots \geq \omega(u_{4r})$. Les sommets u_0, u_1, \dots, u_{2r} sont alors les sommets les plus lourds du graphe G et la somme de leur poids est supérieure ou égale à la moitié du poids total du graphe. Nous pouvons alors associer arbitrairement ces $2r$ sommets par paires. r plus courts chemins sont alors suffisants pour retirer tous ces sommets. De plus, le graphe $G \setminus \{u_0, u_1, \dots, u_{2r}\}$ est composé uniquement de composantes connexes ayant un poids d'au plus la moitié du poids du graphe G , puisque nous avons retiré la moitié des sommets les plus lourds. La même technique fonctionne sur tous les sous-graphes induits. Nous avons donc montré que r plus courts chemins sont suffisants pour séparer des graphes à $4r$ sommets. \square

La proposition suivante nous permet de montrer que la borne donnée par la proposition 4 est la meilleure possible.

Proposition 5 *La clique K_{4r+1} uniformément pondérée n'est pas r -chemins séparables.*

Preuve. Dans la clique K_{4r+1} uniformément pondérée, tous les plus courts chemins sont composés d'une unique arête. Donc tous r -CHEMINS SÉPARATEUR FORT S est constitué d'au plus $2r$ sommets. Nous savons alors que $K_{4r+1} \setminus S$ est une clique contenant au moins $4r + 1 - 2r \leq 2r + 1$ sommets. Nous pouvons donc conclure que S n'est pas un 1-chemin séparateur fort. \square

Nous avons donné des liens entre la largeur arborescente des graphes et leur k -chemins séparabilité ainsi qu'entre le nombre de sommets du graphe et sa k -chemins séparabilité.

Nous avons également vu précédemment que les graphes planaires pondérés sont 3-chemins séparables. Ce résultat a été généralisé dans [AG06] avec le théorème suivant.

Théorème 1 *Tout graphe pondéré excluant un mineur H est k -chemins séparables pour $k = k(H)$ et un k -chemins séparateur peut être calculé en temps polynomial.*

Il s'agit bien d'une généralisation du lemme 3 puisque les graphes planaires forment une sous-famille des graphes excluant K_5 ou $K_{3,3}$ comme mineurs. La preuve de ce théorème repose sur la structure arborescente des graphes excluant un mineur H donné de Robertson et Seymour [RS86]. Cependant, la fonction $k(H)$ n'est pas explicite.

2.4 Motivations pour l'étude des graphes séparables.

Nous avons défini les graphes k -CHEMINS SÉPARABLES et FORTEMENT k -CHEMINS SÉPARABLES dans les sections précédentes. Nous allons ici

donné des résultats connus sur leur propriétés.

La k -CHEMINS SÉPARABILITÉ est avant tout une décomposition des graphes, au même titre que la largeur arborescente ou la décomposition modulaire. A ce titre, elle peut être utilisée pour appliquer le paradigme « Diviser pour mieux régner ». En effet, dans le cas de calculs sur de très grosses structures de données (ici de très gros graphes), il peut être plus simple de travailler sur des petites parties, et ensuite de regrouper ces résultats pour obtenir le résultat sur l'ensemble des données. Dans le cas des graphes, nous travaillons en général sur des composantes connexes du graphe obtenu par le retrait d'un séparateur.

Pour beaucoup de problèmes, la complexité du problème est directement liée à la taille du séparateur. On cherche donc à avoir des «petits» séparateurs. Néanmoins, dans certains cas comme pour la topologie plane ou les réseaux routiers, il n'est pas possible d'obtenir des séparateurs composé d'un petit nombre de sommets. Il existe alors un autre type de séparateurs pour lesquels on s'intéresse plutôt à leur structure. Les graphes k -CHEMINS SÉPARABLES en sont un exemple.

De plus, nous avons vu dans l'introduction que ces graphes avaient de bonnes propriétés dans certains problèmes de routage ou d'estimation de distances. Ils sont également intéressants dans les graphes « petit monde ». En effet, dans le cas d'un graphe k -chemins séparables, il existe des algorithmes de navigation dans ce graphe en $O(k^2 \log n)$ sauts, comme montré dans ??.

Tarjan a montré dans [LT79], que tout graphe planaire pondéré (G, ω) peut être séparé en composantes connexes ayant un poids d'au plus $(2/3)\omega(G)$. La preuve donnée dans l'article utilise un arbre couvrant quelconque duquel il tire les séparateurs. En prenant alors un arbre de plus courts chemins, nous avons donc la propriété suivante.

Proposition 6 *Tout graphe planaire pondéré peut être séparé en composantes connexes d'un poids d'au plus $(2/3)\omega(G)$ avec deux plus courts chemins.*

Pour montrer ce théorème, les auteurs commencent par ajouter autant d'arêtes que possibles tout en garantissant la planarité du graphe. Ils obtiennent une triangulation du graphe, c'est-à-dire que toutes les faces sont des triangles. Il faut ensuite enraciner un arbre couvrant en un sommet u quelconque. Ce théorème repose sur le lemme du cycle fondamental énoncé comme ceci 2.

Lemme 2 *Soit G un graphe planaire connexe. Supposons que G a un arbre couvrant de hauteur h . Alors, les sommets de G peuvent être partitionnés en trois ensembles A , B et C tels qu'il n'existe pas d'arêtes ayant pour extrémité un sommet pris dans l'ensemble A et un sommet de B comme seconde extrémité. De plus A et B ne contiennent pas plus de $\frac{2}{3}n$ sommets et C est un cycle fondamental contenant au plus $2h + 1$ sommets.*

On choisit alors une arête (v, w) n'appartenant pas à l'arbre couvrant dont le cycle minimise le coût maximum soit à l'intérieur, soit à l'extérieur du cycle. Les auteurs montrent alors que les plus courts chemins de u à v et de u à w séparent le graphe tel que les composantes connexes ont un poids d'au plus $\frac{2}{3}n$.

En utilisant la proposition 6, nous pouvons donc conclure que la profondeur de la récursivité pour séparer un graphe planaire est de l'ordre de $2 \log_{3/2} n$. Cependant, un autre résultat connu est que 3 plus courts chemins [Tho04] suffisent pour séparer en composantes connexes d'au plus la moitié du poids total du graphe considéré les graphes planaires. Cela nous permet donc d'avoir une profondeur de récursivité de l'ordre de $3 \log_2 n$ afin de séparer récursivement tout graphe. Thorup a utilisé cette propriété pour donner un oracle de routage en espace $O(n \log n)$ [Tho04].

Comme vu dans la section précédente, Abraham et al. [AG06] ont démontré que ces graphes ont des propriétés intéressantes pour le routage compact. En effet, nous pouvons router dans un tel graphe en utilisant des tables de routage ayant une taille de $O(k \log^2 n)$ tandis que dans un graphe quelconque, des tables de routage linéaires en la taille de l'entrée sont nécessaires. Dans ce dernier cas, il faut effectivement, une entrée pour chacun des sommets du graphes. voir [FG96, GP].

De même, dans un tel graphe, la distance entre deux sommets u et v peut être estimée à un facteur $1 + \epsilon$ près. Pour cela, nous allons considérer le cas où u et v sont dans des composantes connexes différentes de $G \setminus S$ où S est un chemin-séparateur de G . En effet, le cas contraire où u et v sont situés dans une même composante est traité par récurrence.

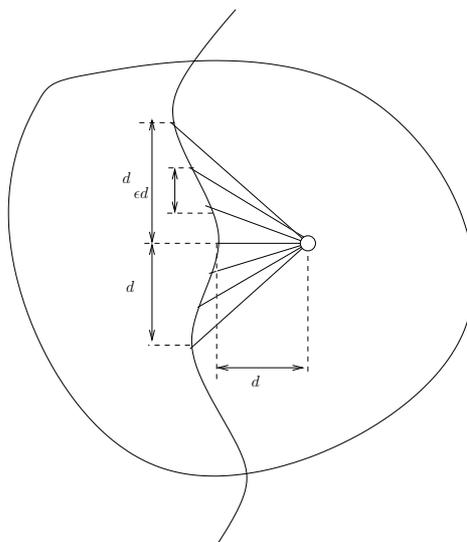


FIG. 2.5 – Sur cette figure nous pouvons voir tous les marqueurs du sommet v .

Soit d la distance entre v et le plus court chemin le séparant du séparateur. Le sommet v va sélectionner $\frac{2}{\epsilon}$ sommets sur les $k \log_2 n$ plus courts chemins constituant le séparateur S tel que $\frac{1}{\epsilon}$ sont situés au-dessus du sommet le plus proche de v et $\frac{1}{\epsilon}$ sont situés de part et d'autres de ce sommet. Le sommet v a donc maintenant une liste de sommets situés à ϵd les uns des autres. Le sommet u fait de même sur ce même plus court chemin S . La distance entre u et v peut donc être estimée en prenant la distance de v au plus court chemin, de la distance sur S qui permet de lier un landmark de u et le landmark de v , plus de la distance

entre u et le plus court chemin S .

Proposition 7 *Tout graphe planaire pondéré est fortement 3-chemins séparable.*

Preuve. Comme tout sous-graphe induit d'un graphe planaire est planaire, il nous suffit de montrer que tout graphe planaire G possède un 3-chemins séparateur fort.

Il est connu que (voir par exemple [FG06]) tout graphe planaire qui possède un arbre T couvrant et de profondeur h a une décomposition arborescente de largeur $3h$ où chaque sac est composé de 3-chemins de T issus de la racine de T .

Considérons un arbre couvrant de plus courts chemins T de G , et la décomposition arborescente \mathbb{T} comme décrite ci-dessus. \mathbb{T} possède un sac-centre C qui est un demi-séparateur (voir la propriété 1). C est composé de trois plus courts chemins de T , qui forme un 3-chemins séparateur fort. \square

Notons que cette preuve, par rapport à celle de [Tho04] s'applique aussi aux graphes planaires pondérés sur les sommets tandis que dans [Tho04] seules les arêtes sont valuées.

Nous allons également donner pour des grilles de taille $p * i$, le plus petit entier k tel que la grille est k -chemins séparables pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Proposition 8 *Les grilles de taille $p * i$ sont 1-chemin séparable pour $i = 1, 2$ tandis qu'elles sont 2-chemins séparables pour $i = 3, 4$.*

Preuve. En ce qui concerne la grille $p * 1$, ce graphe est facilement 1-chemin séparable puisqu'il s'agit d'un chemin, et donc plus généralement d'un arbre (voir la propriété 1).

Pour $i = 2$, le graphe obtenu est un graphe planaire extérieur. En utilisant le lemme 6 donné dans le chapitre 4, nous pouvons conclure que la grille $p * 2$ est 1-chemin séparable.

La grille $p * 3$ n'est pas 1-chemin séparable. Or, en prenant un plus court chemin entre le deuxième sommet de la première colonne et le deuxième sommet de la dernière colonne. On a alors soit séparer le graphe, soit il existe dans le graphe résultant un composante connexe ayant un poids supérieur ou égal à la moitié du poids total de la grille d'origine. Dans ce dernier cas, il est simple de voir que cette composante est nécessairement planaire-extérieure. En utilisant le lemme 6, nous savons que nous pouvons séparer cette composante avec un unique plus court-chemin. Nous avons donc montré que la grille $p * 3$ est 2-chemins séparables. Remarquons que nous avons utilisé ici la définition de chemin-séparabilité et non celle de chemin-séparabilité forte.

Pour séparer la grille $p * 4$, remarquons dans un premier temps qu'il existe une colonne c de ce graphe tel que les composantes connexes de $G \setminus V(c)$ ont un poids inférieur ou égal à la moitié du poids de G . Pour trouver cette colonne, il nous suffit de partir de la première colonne et il est donc clair que pour séparer cette grille il nous suffit de retirer tous les sommets de cette colonne. Or, par construction cette colonne contient 4 sommets. Deux plus courts chemins nous suffissent pour séparer ces sommets (chacun de ces sommets étant une extrémité des plus courts chemins).

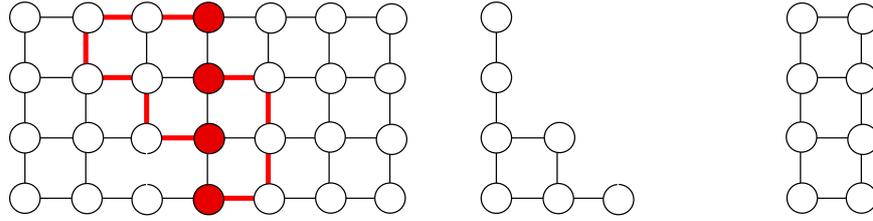


FIG. 2.6 –

□

2.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons motivé l'utilisation et l'étude des graphes k -chemins séparables. Nous avons également donné un aperçu des connaissances actuelles sur la structure ou les propriétés de ces graphes. Le reste du document présente des résultats structurels et algorithmiques obtenus ces trois dernières années. Cependant, certaines questions n'ont pas été traitées. Notamment, nous avons vu que les graphes excluant un mineur H sont $k(H)$ -chemins séparables. Il pourrait donc être intéressant de donner une borne au nombre de chemins $k(H)$ pour les graphes excluant un mineur H .

Nous avons également vu que les graphes planaires sont 3-chemins séparables (voir ??). Nous ne savons cependant pas si 3 est la borne inférieure. Il serait intéressant de le montrer. Dans la partie suivante, nous allons notamment définir une sous-famille des graphes planaires pour lesquelles la borne inférieure b du nombre de plus courts chemins tel que ces graphes soient b -chemins séparables.

Chapitre 3

Face-séparation et clotûre par mineurs

3.1 Introduction

Comme montré par la propriété 7, les graphes planaires sont 3-chemins séparables. D'après le lemme 9, nous savons également que les graphes planaires ne sont pas tous 1-chemin séparables.

Or, il est intéressant de connaître le nombre de plus courts chemins minimum nécessaires à la séparation des graphes puisque nous avons vu que ce nombre intervient directement dans les complexités des tables de routage (cf. chapitre 2). Il est donc intéressant de savoir si 2 plus courts chemins ne sont pas suffisants pour séparer n'importe quel graphe planaire pondéré.

Dans ce chapitre, le théorème 4 nous montrera qu'une sous-famille, les graphes *face-séparables*, sont 2-chemins séparables.

Nous définirons également les familles de graphes qui sont "structurellement" k -chemins séparables, à savoir les familles de graphes qui sont k -chemins séparables quel que soit la fonction de pondération appliquée sur leur sommet et leurs arêtes. Ces graphes forment des familles que l'on notera PS_k . Dans ce chapitre, nous allons montrer que pour tout entier k , ces familles sont closes par mineur.

Proposition 9 *Le dodécaèdre auquel on a appliqué une fonction de pondération unitaire sur les sommets et les arêtes n'est pas 1-chemin séparable.*

Preuve.

Le diamètre de ce graphe est de 4. Tout plus court chemin de ce graphe est alors composé d'au plus 5 sommets. De plus, il n'existe pas de plus courts chemins qui découpe le graphe, c'est-à-dire dont le retrait aboutit à un graphe composé d'au moins deux composantes connexes. Soit S un plus court chemin quelconque dans le dodécaèdre. Alors le nombre de sommets du $Dodcadre \setminus S$ contient au moins $20 - 5 = 15$ sommets. Le dodécaèdre n'est donc pas 1-chemin séparable. \square

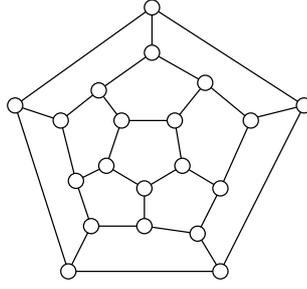


FIG. 3.1 – Le dodécaèdre auquel une fonction de pondération unitaire est appliquée aux sommets et aux arêtes.

3.2 Face-séparabilité

Nous allons ici identifier une sous-famille non-triviale des graphes planaires qui sont 2-chemins séparables quel que soit la pondération : les graphes *face-séparables*.

Définition 7 *Un graphe pondéré (G, ω) admet un face-séparateur S s'il existe un plongement de G dans le plan dont le bord d'une face est S et qui forme un demi-séparateur comme défini dans le chapitre 1.*

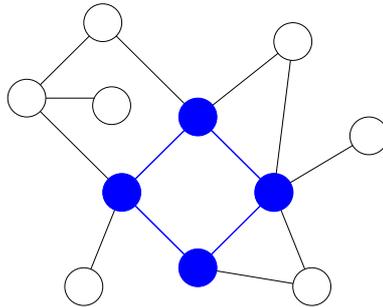


FIG. 3.2 – Le bord de la face représentée en bleu sur cette figure est un face-séparateur du graphe G auquel une fonction de pondération unitaire a été appliquée aux sommets et aux arêtes. En effet, quand on retire les sommets du bord de cette face, on obtient des composantes connexes ayant un poids maximum de $3 < 11/2$.

Notons que les graphes possédant un face-séparateur sont nécessairement planaires.

Nous pouvons donc définir maintenant les graphes face-séparables comme suit.

Définition 8 *Un graphe pondéré (G, ω) est face-séparable si tout sous-graphe induit de (G, ω) admet un face-séparateur.*

Dans un premier temps, nous allons voir que la famille des graphes face-séparables contient quelques familles de graphes bien connues.

Il est simple de voir que les graphes planaires extérieurs sont face-séparables. Tout d'abord, commençons par remarquer que tous les sous-graphes induits d'un graphe planaire-extérieur sont des graphes planaires extérieurs. Il nous suffit donc de montrer que les graphes planaires-extérieurs admettent un face-séparateur. Or, d'après la définition donnée dans le chapitre 1, les graphes planaires-extérieurs ont la particularité d'avoir tous leurs sommets sur le bord d'une même face. Il est donc clair que cette face est un demi-séparateur, et que donc les graphes planaires-extérieurs sont face-séparables.

Nous allons montrer grâce aux lemmes 2 et 3 que, de manière générale, les graphes séries-parallèles ou les subdivisions de K_4 sont face-séparables avec les théorèmes 2 et 3.

Théorème 2 *Tout graphe pondéré de largeur arborescente 2 est face-séparable.*

Preuve. Soit (G, ω) un graphe pondéré de largeur arborescente 2. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, tout graphe de largeur arborescente 2 est un sous-graphe d'un graphe série-parallèle, et donc planaire. Cette classe de graphes est héréditaire, c'est-à-dire que tous les sous-graphes induits d'un graphe appartenant à cette famille ont également cette propriété (dans notre cas, tous les sous-graphes induits ont une largeur arborescente 2). Il nous suffit donc de prouver que G a un face-séparateur.

Considérons le graphe H obtenu à partir de G en ajoutant autant d'arêtes que possible tout en préservant la largeur arborescente. Soit T une décomposition arborescente de H . Par construction, la largeur arborescente de H est de 2. Notons C le centre de T . Le sac C est alors composé d'un K_3 . Nous plongeons H dans le plan tel que C est le bord d'une face dans ce plongement. Cela est possible puisque H ne contient pas de K_4 (cela contredirait le fait qu'ils soient de largeur arborescente 2), et en faisant passer des sous-graphes de l'intérieur du K_3 à l'extérieur. Nous pouvons maintenant retirer les arêtes qui ont été ajoutées à H pour obtenir G et nous considérons le bord S de la face contenant les trois sommets de C . Une telle face existe puisque la suppression des arêtes peut uniquement agrandir les faces existantes du plongement. Nous avons $C \subseteq S$ et C est un demi-séparateur de H . Nous pouvons aussi remarquer que H a le même poids que G (nous avons ajouté uniquement des arêtes). Donc S est un demi-séparateur de G . Ce qui complète la preuve de ce théorème. \square

Théorème 3 *Toute subdivision pondérée de K_4 est face-séparable.*

Preuve. Considérons une subdivision G de K_4 ayant une fonction de pondération ω et H un sous-graphe induit de G . Si H est un sous-graphe propre de G (i.e. $H \neq G$), alors H est planaire-extérieur et admet un face-séparateur d'après le théorème 2. Nous supposons donc que $H = G$.

Supposons maintenant que nous avons un plongement planaire de H . Notons v_1, \dots, v_4 les quatre sommets de degré 3 de H , et $P_{i,j}$ le chemin entre v_i et v_j sans autre sommet de

degré 3, pour tout $i, j \in \{1, \dots, 4\}$. Soient $\omega_i = \omega(v_i)$ et $\rho_{i,j} = \omega(P_{i,j} \setminus \{v_i, v_j\})$, la somme des poids des sommets de $P_{i,j}$ excepté ceux des extrémités.

Supposons que H n'admette pas de face-séparateur. Il y a quatre faces possibles, notée F_1, \dots, F_4 chacune bordées par trois chemins. On ordonne les faces telles que lorsqu'on retire le bord de la face F_i , la composante connexe résultante est composée des trois chemins contenant le sommet v_i . Le poids total de cette composante est $\omega_i + \sum_{j \neq i} \rho_{i,j}$. Comme, par hypothèse, le bord de F_i n'est pas un face-séparateur, on a alors $\omega_i + \sum_{j \neq i} \rho_{i,j} > \omega(H)/2$. Et cela est vrai pour tout $i \in \{1, \dots, 4\}$. En additionnant ces quatre équations, nous obtenons donc :

$$\sum_i \omega_i + \sum_{i,j} \rho_{i,j} > 2\omega(H) = 2 \left(\sum_i \omega_i + \sum_{i,j} \rho_{i,j} \right)$$

Cela implique que la somme des poids sur les sommets est strictement négative, ce qui conduit à une contradiction puisque par définition $\omega(v) \geq 0$ pour tous sommets v . Donc une des faces F_i est un face-séparateur ; ce qui conclut la preuve de ce lemme. \square

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une corrélation entre les graphes face-séparables et la k -chemins séparabilité. Cette corrélation n'est pas triviale puisque la face-séparabilité ne prend en compte la pondération des arêtes à aucun moment. Or une pondération des arêtes peut modifier profondément la structure des composantes connexes d'un graphe. Plus précisément, nous allons montrer avec le théorème 4 que la famille des graphes face-séparables forme un sous-ensemble des graphes fortement 2-chemins séparables.

Théorème 4 *Tous les graphes pondérés face-séparables sont fortement 2-chemins séparables.*

Pour montrer ce résultat, il nous suffit de prouver que si un graphe pondéré admet un face-séparateur, alors il admet un 2-chemins séparateur fort. En effet, la face-séparabilité et la k -chemins séparabilité sont deux propriétés héréditaires. Considérons donc un graphe pondéré (G_0, ω) ayant un face-séparateur B_0 .

Notons que B_0 n'est pas nécessairement un cycle (voire par exemple Fig.3.3).

Il peut également ne pas être connexe, notamment si B_0 est le bord de la face extérieure et si G_0 n'est pas connexe. Notons également qu'il est possible que toutes les composantes biconnexes de G_0 soient face-séparables sans que G_0 le soit, comme suggéré dans la figure 3.4. La face-séparabilité des graphes ne peut donc pas se résumer à la face-séparabilité de ses composantes 2-connexes.

Nous allons montrer cependant (3) que B_0 contient toujours un cycle qui est un face-séparateur de G_0 . Il s'agit du cycle bleu de la figure 3.3.

Lemme 3 *Le séparateur B_0 soit contient un sommet ou une arête qui est un demi-séparateur de G_0 , ou contient un cycle qui est un face-séparateur de G_0 .*

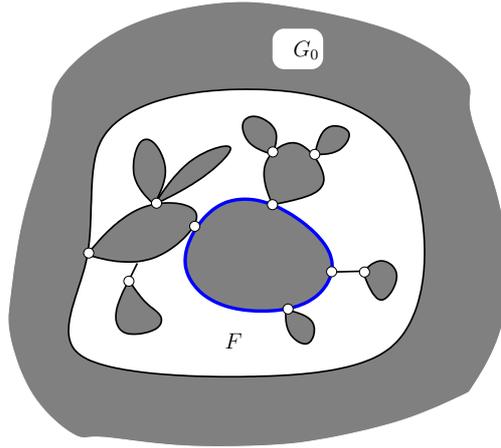


FIG. 3.3 – Le face-séparateur B_0 , qui n'est pas un cycle est le bord de la face F .

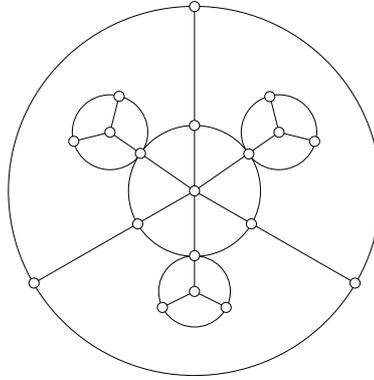


FIG. 3.4 – Un graphe uniformément pondéré avec 19 sommets qui n'est pas face-séparable alors que toutes ses composantes biconnexes le sont.

Preuve. Concentrons nous sur la composante connexe la plus lourde de G_0 intersectant B_0 , notée G . Notons $B = B_0 \cap G$, la partie du face-séparateur dans la composante G . Nous pouvons remarquer que B est connexe. De plus, toutes les composantes connexes de $G_0 \setminus B$ ont un poids inférieur ou égal à la moitié du poids total de G_0 puisque B contient tous les sommets de B_0 , le demi-séparateur de G_0 .

Considérons un plongement planaire de G tel que B est le bord de sa face extérieure. Notons que tous les sommets de $G \setminus B$ sont contenus dans une région délimitée par un cycle de B . Les composantes biconnexes de B forment un arbre de cycles, connectés ensemble par des points d'articulation ou par des isthmes. Nous considérons une décomposition arborescente T de B où chaque sac correspond à une composante biconnexe ou un isthme de B . Prenons un sac R comme la racine de T . Notons par $\pi(x)$ le sac père du sac X , avec $\pi(R) = \emptyset$. Nous notons par $G(X)$ le sous-graphe induit par les sommets de G qui sont dans $X \setminus \pi(X)$ ou dans

la région interne délimitée par X . Notons que $\{G(X)\}_X$ forment une partition des sommets de G , tandis que l'ensemble des sacs de T , $\{X\}_X$, n'est pas une partition des sommets de B (à cause des points d'articulation).

Nous définissons maintenant une fonction de pondération ω_B appliquée sur les sommets de B dans le but de trouver un demi-séparateur de G . Grossièrement, nous distribuons uniformément sur les sommets de n'importe quel sac X le poids des sommets de $G(X)$ (inférieur à ω). Plus précisément, pour chaque sac X de l'arbre T , et pour chaque sommet $u \in X \setminus \pi(X)$, nous posons $\omega_B(u) = \omega(G(X))/|V(G(X))|$. Donc nous avons $\sum_{u \in X \setminus \pi(X)} \omega_B(u) = \omega(G(X))$ et $\omega_B(B) = \omega(G)$.

D'après le lemme 1 du chapitre 2, T a un centre C qui est un demi-séparateur du graphe pondéré (B, ω_B) . Les composantes connexes de $G \setminus (C \cap G(C))$ ont un poids qui n'est pas supérieur au poids des composantes de $G \setminus C$, qui sont inférieurs à $\omega_B/2 = \omega(G)/2$. Par conséquent, $C \cap G(C)$ est un demi-séparateur de G . Nous pouvons observer que le poids de chaque composante connexe de $G(C) \setminus C$ est inférieur à $\omega(G)/2$, puisque B est un demi-séparateur de G et que les sommets de $G(C) \setminus C$ ne peuvent être adjacents à aucun sommet à l'extérieur de C . Donc C est en fait un demi-séparateur de G . C'est donc également un demi-séparateur de G_0 puisque nous savons que $\omega(G) \leq \omega(G_0)$, et que toutes les composantes connexes de $G_0 \setminus G$ ont un poids inférieur à $\omega(G_0)/2$.

Le centre C est un sac de la décomposition arborescente de B . C'est pourquoi il est soit composé d'un sommet (si $|B| = 1$), ou d'une arête, ou encore d'un cycle. Nous avons étudié les deux premiers cas. Dans la suite, nous supposons donc que le centre C est un cycle. Remarquez qu'il est possible de plonger G tel que C soit le bord de la face extérieure de G . Cela est dû au fait que toutes les composantes biconnexes liées à C sont rattachées par des points d'articulation ou des isthmes. Il est possible de redessiner chacune des composantes connexes dans C en préservant la planarité du plongement. C est alors un face-séparateur de G et donc de G_0 . Cela conclut donc la preuve. \square

Si B_0 contient un sommet ou une arête qui est un demi-séparateur de G_0 , alors il forme un 1-chemin séparateur de G_0 ce qui nous permet de conclure. Supposons donc que nous sommes dans le second cas du lemme 3, et notons B le cycle de B_0 qui est le face-séparateur de G_0 . Notons également G la composante connexe de G_0 contenant B . Nous allons maintenant redessiner le graphe G sur le plan de manière à ce que la face (notée F) dont le cycle B est le bord ne soit pas la face extérieure ; comme illustré par la figure 3.5.

Soit T un arbre couvrant de plus court chemins de G , enraciné en un sommet r de B . Pour tous les sommets u de T , notons $P_{r,u}$ le chemin de r à u dans T . Nous allons montrer qu'il existe une arête uv de B telle que $P_{r,u} \cup P_{r,v}$ est un demi-séparateur de G_0 .

Soient deux sommets u et v de B . Nous pouvons potentiellement avoir $u = v$. Notons par $X_{u,v}$ la plus lourde composante connexe de $G \setminus (P_{r,u} \cup P_{r,v})$ et par $B_{u,v} = B \cap X_{u,v}$. Nous pouvons vérifier que $B_{u,v}$ est connexe parce que sinon, par planarité $X_{u,v}$ intersecterait $P_{r,u}$ ou $P_{r,v}$.

Supposons maintenant que u, v sont voisins dans B tel que $|V(B_{u,v})|$ est minimum, c'est-à-dire, tel que le nombre de sommets de B appartenant à la plus grande composante connexe de $G \setminus (P_{r,u} \cup P_{r,v})$ est minimum.

Si $\omega(X_{u,v}) \leq \omega(G_0)/2$, alors $P_{r,u} \cup P_{r,v}$ est le demi-séparateur recherché pour G_0 puisque $X_{u,v}$ est la plus grosse composante connexe de $G \setminus (P_{r,u} \cup P_{r,v})$ et G est également la plus lourde composante connexe de G_0 , c'est pourquoi toutes les autres composantes de G_0 ont un poids d'au plus $\omega(G_0)/2$. Si $|V(B_{u,v})| = 0$, alors $P_{r,u} \cup P_{r,v}$ est aussi un demi-séparateur de G_0 puisque dans ce cas $X_{u,v}$ ne contient pas de sommets de B , et B est un demi-séparateur de G_0 .

Supposons donc que $\omega(X_{u,v}) > \omega(G_0)/2$ et $|V(B_{u,v})| \geq 1$. Soit x un sommet de $B_{u,v}$ et supposons que r, u, v, x, r sont rencontrés dans cet ordre quand B est parcouru dans le sens anti-horaire. Sinon, nous considérons un dessin renversé de G (comme un miroir). Cela est possible parce que u, v sont voisins dans B , et x n'est pas entre u et v . Notons que $u = r$ est possible, cependant $v \neq r$. Une observation importante est que chaque chemin $P_{r,u}$ est inutile pour minimiser $|V(B_{u,v})|$, $P_{r,v}$ suffit. Cela est montré plus formellement par le lemme 4.

Lemme 4 $X_{v,v} = X_{u,v}$ et donc $B_{v,v} = B_{u,v}$

Preuve. Ces égalités sont dues au fait que le chemin $P_{r,v}$ « sépare » u de $X_{u,v}$, c'est-à-dire que chaque chemin enraciné en u vers n'importe quel sommet de $X_{u,v}$ rencontre $P_{r,v}$. En effet, c'est trivialement vrai si $u = r$. Dans les autres cas, u et $X_{u,v}$ sont situés dans différentes régions du plan délimité par la courbe fermée définies par $P_{r,v}$ et la courbe dans F joignant r et v (courbe en pointillé sur la figure 3.5). De plus, aucun sommet de la partie du chemin $P_{r,u} \setminus P_{r,v}$ ne peuvent être adjacent à des sommets de $X_{u,v}$. Autrement dit, dans $G \setminus T_v$ il y a une composante qui correspond exactement à $X_{u,v}$. Donc, la plus grosse composante connexe de $G \setminus P_{r,v}$, c'est-à-dire $X_{v,v}$ a un poids d'au moins $\omega(X_{u,v})$. Mais une seule composante connexe de $G \setminus P_{r,v}$ peut avoir un poids plus grand que la moitié du poids total du graphe, donc $X_{v,v} = X_{u,v}$. \square

Selon le lemme 4, les deux sommets délimitant $B_{u,v}$, appartiennent nécessairement à $P_{r,v}$. Parmi ces deux sommets de $P_{r,v}$, définissons u' comme étant le plus proche sommet sur $P_{r,v}$ de v (voir la figure 3.5. Nous pouvons remarquer que $u' = v$ est possible. En fait, le lemme 4 est valable non seulement pour v , mais également pour ces ancêtres $u' : X_{u',u'} = X_{u,v}$ et $B_{u',u'} = B_{u,v}$. La partie du chemin $P_{r,v} \setminus P_{r,u'}$ est inutile pour minimiser $|V(B_{u,v})|$, seul le chemin $P_{r,u'}$ suffit.

Notons v' le voisin de u' dans $B_{u,v}$. Nous pouvons remarquer que $v' \notin P_{r,v}$ parce que $B_{u,v}$ contient au moins un sommet. Considérons la composante $X_{u',v'}$, la plus lourde composante dans $G \setminus (P_{r,u'} \cup P_{r,v'})$. Nous pouvons donc en déduire que soit $\omega(X_{u',v'}) \leq \omega(G_0)/2$ et $P_{r,u'} \cup P_{r,v'}$ est le demi-séparateur recherché ou bien $\omega(X_{u',v'}) > \omega(G_0)/2$. Dans ce dernier cas, $X_{u',v'}$ est inclus dans $X_{u,v}$ puisque $X_{u',u'} = X_{u,v}$, puisqu'il existe une unique composante connexe ayant un poids supérieur à la moitié du poids total du graphe. On peut donc en déduire que $|V(B_{u',v'})| < |V(B_{u,v})|$ à cause de v' . Cela contredit donc le fait que u, v est une arête de B minimisant $|V(B_{u,v})|$.

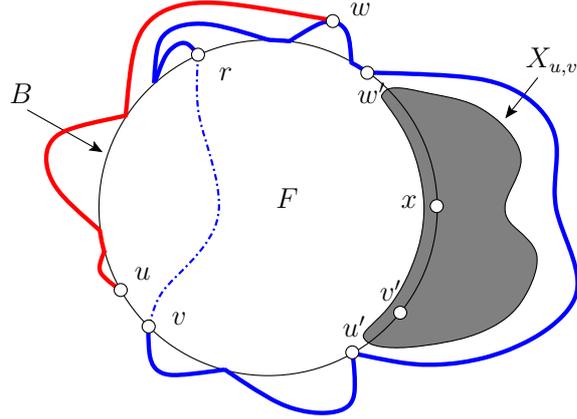


FIG. 3.5 – Illustration pour le théorème. Le chemin T_v est en bleu, le chemin T_u devient rouge après son préfixe commun avec T_v (w est l’ancêtre commun de u et v).

Cela termine donc la preuve du théorème 4.

Nous avons donc identifié des familles de graphes qui sont face-séparables. Néanmoins tous les graphes donnés ont une largeur arborescente valant 2. Or, d’après la chapitre 2, ces graphes sont déjà connus comme étant 2-chemins séparables car $\frac{\lceil(2+1)\rceil}{2} = 2$. En fait, tous les graphes de largeur arborescente inférieure ou égale à 3 sont 2-chemins séparables. Dans la suite, nous allons montrer qu’il existe des graphes de largeur arborescente non-bornée qui sont pourtant face-séparables.

Dans la suite, nous allons donner quelques exemples de familles de graphes qui sont face-séparables, et donc, d’après le théorème 4, 2-chemins séparables.

Proposition 10 *Pour tout n , il existe un graphe planaire uniformément pondéré sur les sommets qui est face-séparable avec au plus n sommets et dont la largeur arborescente est $\omega(\log \log n)$.*

Preuve. La preuve est basée sur la construction d’un graphe, qu’on notera G_p pour un entier $p \geq 1$. Le graphe G_p est composé d’un arbre T_p de profondeur p où chaque sommet de profondeur $i < p$ a exactement $d(i)$ fils dans le niveau $i + 1$ pour une fonction d que l’on définira ultérieurement. De plus, pour chaque profondeur i , on ajoute un chemin qui relie tous les sommets de profondeur i dans l’arbre T_p pour obtenir le graphe G_p . Notons $L(i)$ le nombre de sommets de profondeur i dans l’arbre T_p . Les valeurs $L(i)$ et $d(i)$ sont données par l’induction suivante : $L(0) = 1$ et $L(i) = L(i - 1) * d(i)$, avec $d(i) = \sum_{j=0}^i L(j)$. Les premières valeurs de $L(i)$ et $d(i)$ sont données dans le tableau plus loin par le tableau ??, et G_4 est dessiné sur la figure 3.7.

Le graphe G_p a une largeur arborescente d’au moins $k = p - O(\log \log p)$ parce que nous pouvons prouver qu’il contient une grille de taille $k \times k$ comme mineur et le nombre de

i	0	1	2	3	4	5
L	1	1	2	8	96	10368
d	1	2	4	12	108	10464

FIG. 3.6 – Ce tableau donne le nombre de sommets du le graphe G_i à chaque profondeur i ainsi que le degré de ses sommets.

sommets de G_p est $n < 2^{2^p}$. Autrement dit, la largeur arborescente est d'au moins $\log \log n - O(\log^4 n)$.

En utilisant le lemme ??, nous pouvons donc conclure la preuve de cette proposition. \square

Lemme 5 *Tous les sous-graphes induits H du graphe G_p possèdent un face-séparateur.*

Preuve. Commençons par remarquer que si le sous-graphe H de G_p est planaire-extérieure, alors en utilisant le lemme 3 nous pouvons en conclure que H est 1-chemin séparable puisque de tels graphes ont une largeur arborescente égale à 2.

Dans le cas contraire, il existe donc au moins un sommet qui n'appartient à la face extérieure. Or, par construction du graphe G_p , nous savons que ce sommet de niveau disons i a $\sum_{j=0}^i L(j)$ voisins au niveau $i + 1$, soit autant de sommets qu'il n'y en a dans le graphe G_p dans tous les niveaux inférieurs au niveau i . Nous pouvons donc en conclure que la face-extérieure de tous les sous-graphes induits du graphe G_p possèdent plus de la moitié des sommets du sous-graphe considéré. Or, tous les sommets reçoivent une pondération unitaire. Donc la face extérieure a un poids supérieur ou égal à la moitié du poids du sous-graphe ; il s'agit donc d'un face-séparateur. Nous avons donc conclu la preuve de ce lemme. \square

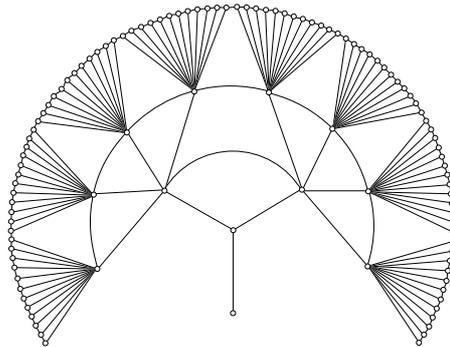


FIG. 3.7 – Le graphe face-séparable G avec une profondeur $i = 4$.

3.3 Clotûre par mineurs

Pour tout entier $k \geq 1$, nous notons PS_k la famille de tous les graphes G qui sont k -chemins séparables pour toutes fonctions de pondération ω . Plus formellement,

$$PS_k = \{G \mid \forall \omega, (G, \omega) \text{ est } k\text{-chemins séparable}\}$$

. Nous définissons, de manière analogue, la famille SPS_k de tous les graphes qui sont fortement k -chemins séparables pour toutes fonctions de pondération.

Nous avons vu dans le chapitre précédent, que tous les graphes planaires pondérés sont fortement 3-chemins séparables. Autrement dit, les graphes planaires appartiennent à la famille SPS_3 . Dans la section 3.2, nous avons également vu que les graphes de largeur arborescente 2 sont face-séparable, et donc fortement 2-chemins séparables. Nous étudierons dans le chapitre suivant plus particulièrement la famille PS_1 .

Dans cette section, nous allons montrer que les familles PS_k et SPS_k sont closes par mineurs. D'après le «Théorème de Mineurs de Graphes» de Robertson et Seymour [?], de telles familles peuvent être caractérisées par une liste finie de mineurs interdits. De plus, étant donnée la liste des mineurs interdits, l'appartenance pour ces familles peut être calculée en $O(n^3)$ pour un k fixé.

Théorème 5 *Pour chaque $k \geq 1$, les familles PS_k et SPS_k sont closes par mineurs.*

Preuve. Nous allons donner la preuve pour la famille SPS_k . La preuve pour PS_k est similaire. Soit H un mineur du graphe G . Nous allons montrer que si G est k -chemins séparables, alors H admet un k -chemins séparateur pour tout sous-graphe induit de H . Cependant, comme chaque sous-graphe de H est également un mineur de G , nous avons simplement à montrer que H admet un k -chemins séparateur.

Il n'est pas difficile de voir que si H est un mineur de G , alors à chaque sommet de H , nous pouvons associer un sous-graphe connexe de G , appelé « super-sommet », tel que si (u, v) est une arête de H , alors il existe une arête de G , appelé « super-arête » de (u, v) , reliant un sommet du super-sommet de u et un sommet du super-sommet de v . Dans le cas, où il existerait plusieurs arêtes, on en sélectionne uniquement une.

Soit ω_H une fonction de pondération appliquée sur H . Depuis ω_H , nous construisons une fonction de pondération ω_G sur G comme ceci. Pour toutes arêtes (x, y) de G qui est une super-arête de (u, v) (donnée en noire sur la figure 3.8), nous appliquons $\omega_G(u, v) = \omega_H(u, v)$. Pour toutes les arêtes (x, y) de G les sommets x et y appartiennent au même super-sommet (appelé *arête interne* et en vert sur la figure 3.8), nous mettons $\omega_G(u, v) = 0$. Et pour toutes les autres arêtes (x, y) de G (appelée *arête externe* et donnée en rouge sur la figure), nous mettons $\omega_G(x, y) = 1 + \sum_{e \in E(H)} \omega_H(e)$. Le coût d'un plus court chemin dans G utilisant n'importe lesquelles de ces arêtes est donc strictement plus grand que le coût d'un chemin simple dans H . Le poids d'un sommet x qui appartient au super-sommet de u est $\omega_G(x) = \omega_H(u)/t_u$, où t_u est le nombre de sommets du super-sommet de u . Notons que la somme des

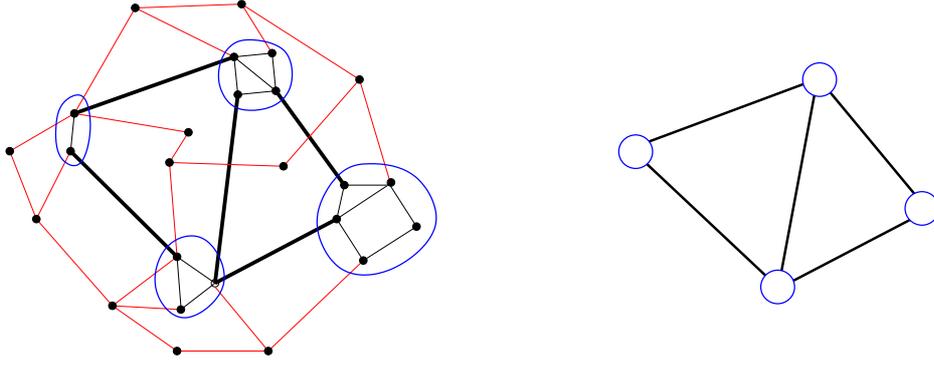


FIG. 3.8 – La graphe G de gauche admet comme mineur le graphe H de droite.

poids des sommets du super-sommet de u est exactement $\omega_H(u)$. Le poids de tous les autres sommets est nul. Nous pouvons alors remarquer que $\omega_G(G) = \omega_H(H)$.

Par hypothèse $G \in SPS_k$. Nous savons donc que (G, ω) admet un k -chemins séparateur S_G composé de k plus courts chemins de G . Notons H_0, H_1, \dots les composantes connexes de H , et supposons que $\omega_H(H_0)$ est maximal. A chaque chemin P de S_G qui intersecte un super-sommet d'un sommet de H_0 , nous associons un chemin Q dans H_0 comme suit. Soient (U_0, \dots, U_t) la séquence ordonnée de tous les super-sommes des sommets de H_0 traversée par P . Notons u_i le sommet de H_0 tel que U_i est le super-sommet de u_i . Le chemin Q est obtenu en ajoutant une arête entre u_{i-1} et u_i , pour tous les $i \in \{1, \dots, t\}$. Nous aimerions donc conclure que l'ensemble de chaque chemin Q construit à partir de P comme décrit précédemment, et notée S_H est un demi-séparateur de H .

Premièrement, démontrons que Q est un plus court chemin de H_0 (et donc de H). Le chemin P entre le dernier sommet de U_{i-1} et le premier sommet de U_i suit la super-arête (u_{i-1}, u_i) , puisque H_0 est connexe et que le poids de cette super-arête est moins grand que le poids de n'importe quelle arête externe. Donc le chemin Q est un chemin de H_0 . Maintenant, supposons qu'il existe un chemin Q' de H_0 de u_0 à u_t , qui est plus court que le chemin Q . Alors, depuis Q' nous pouvons construire un plus court chemin dans G (plus court que P depuis le dernier sommet de U_0 au premier sommet de U_t . Cela est dû au fait que chaque super-sommet est connexe et que chaque arête interne a un poids nul). Cela contredit le fait que P est un plus court chemin. Donc Q est un plus court chemin dans H_0 .

Il nous reste donc à démontrer que S_H est un demi-séparateur de H . Observons dans un premier temps que pour $i \neq 0$, $\omega_H(H_i) \leq \omega_H(H)/2$ puisque H_0 est maximum. Soit X_{H_0} l'ensemble des sommets de toutes les composantes de $H_0 \setminus S_H$. Il existe alors une composante X_G dans $G \setminus S_G$ qui contient entièrement tous les super-sommes des sommets de X_{H_0} . Soit v le sommet de X_{H_0} dont le super-sommet n'appartient à aucune composante de $G \setminus S_G$. Alors, il existe un sommet de ce super-sommet qui est dans S_G . D'après notre construction, v appartient à S_H (les sommets de Q et les super-sommes de P correspondants). Cela conduit donc à une contradiction. Par conséquent, $\omega_H(X_{H_0}) \leq \omega_G(G)/2 = \omega_H(H)/2$. Donc

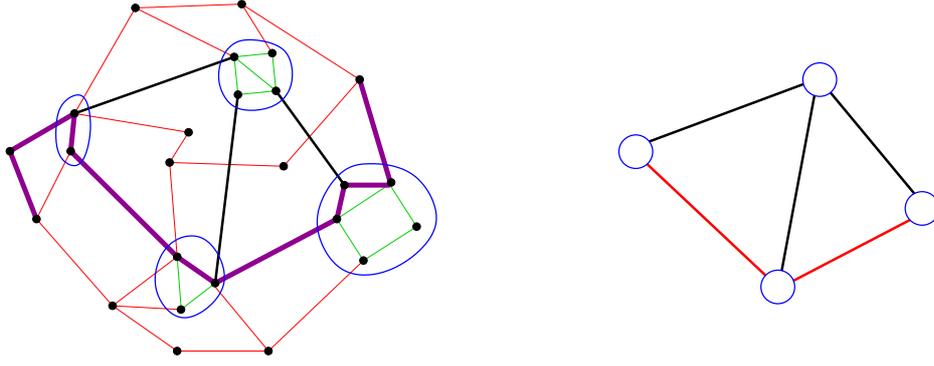


FIG. 3.9 – Le plus court chemin représentée en violet correspond au 1-chemin séparateur de H représentée en bleu.

S_H est un demi-séparateur de H , ce qui complète la preuve. \square

Pour l'étude des familles de graphes PS_k et SPS_k , la proposition suivante va nous permettre de réduire notre étude au k -chemins séparateurs des composantes biconnexes.

Proposition 11 *Un graphe G appartient à PS_k (respectivement SPS_k) si et seulement si toutes les pondérations des composantes biconnexes de G admettent un k -chemins séparateur (respectivement un k -chemins séparateur fort).*

Preuve. La preuve étant similaire pour les familles PS_k et SPS_k , nous noterons dans la suite $P_k \in \{PS_k, SPS_k\}$. Considérons $G \in P_k$. Il est facile de voir, à partir des définitions de la k -CHEMINS SÉPARABILITÉ et de P_k que tout sous-graphe induit pondéré de G doivent avoir un k -chemins séparateur. Nous allons montrer l'autre sens de la proposition.

Supposons que toute composante biconnexe arbitrairement pondérée de G admet un k -chemins séparateur. Nous allons montrer que $G \in P_k$. Nous devons montrer que tout sous-graphe induit pondéré de G , noté (H, ω_H) , a un k -chemins séparateur. Nous allons restreindre notre étude au cas où H est connexe (dans le cas contraire, il nous suffit de considérer la composante connexe la plus lourde de H). Considérons la fonction de pondération ω_G de G défini par : pour tous sommets $x \in V(H)$, posons $\omega_G(x) = \omega_H(x)$, et $\omega_G(x) = 0$ dans tous les autres cas. Nous pouvons remarquer que $\omega_G(G) = \omega_H(H)$. Pour toutes les arêtes $e \in H$, posons $\omega_G(e) = \omega_H(e)$ et $\omega_G(e) = 1 + \sum_{e' \notin H} \omega_H(e')$ pour toutes les autres arêtes. Remarquons que tout plus court chemin dans G entre deux sommets de H traverse uniquement des arêtes de H .

Il n'est pas difficile de voir que la décomposition dans laquelle chaque sac est constitué d'une composante biconnexe de G est une décomposition arborescente de G . En utilisant le lemme REF du chapitre 1, le sac-centre C de cette décomposition arborescente est une composante biconnexe de G , et un demi-séparateur pour (G, ω_G) . Les sommets de C constituent également un demi-séparateur de (H, ω_H) .

Définissons maintenant la fonction de pondération sur les sommets ω_C pour C comme suit. Pour toutes les arêtes $e \in C$, posons $\omega_C(e) = \omega_H(e)$ et posons $\omega_C(e) = 1 + \sum_{e' \in G} \omega_G(e')$ pour toutes les autres arêtes. Nous pouvons remarquer que chacun des plus courts chemins dans G entre deux sommets de C traverse uniquement des arêtes de H . Pour chaque sommet de H connecté à x par un chemin de H qui ne contient aucun sommet de C (sauf x). Posons $\omega_C(x) = 0$ pour tous les autres sommets. Nous pouvons remarquer que $H(C, x) = \emptyset$ si x n'est pas un sommet d'articulation de G . Notons également que $\omega_C(H) = \omega_H(H)$. Par hypothèses, chaque composante biconnexe de G arbitrairement pondéré admet un k -chemins séparateur, et donc en particulier, (C, ω_C) a un k -chemins séparateur, noté S . Nous pouvons observer que H chaque chemin constituant S traversent les sommets de H en un sous-chemin. Ceci est dû au fait que H est connexe et qu'une fois que le chemin rencontre un sommet de H , il traverse uniquement des sommets de H puisque les arêtes qui ne sont pas dans H sont trop lourdement pondérées. Donc, S est composé de k plus courts chemins de H . Nous posons donc $S_H = SH$.

Il nous reste donc à prouver que S_H est un k -chemins séparateur pour (H, ω_H) . Le poids de chaque composante de $C \setminus S$ qui apparaissent dans $H \setminus S_H$ sont les mêmes. De plus, ces poids sont inférieurs ou égaux à $\omega_H(H)/2$ par construction. Il y a cependant des composantes connexes de $H \setminus S_H$ qui ne sont pas à des composantes connexes de $C \setminus S$. Cela se produit à chaque fois qu'une telle composante connexe de H *setminus* S_H , noté X , est lié par des sommets d'articulation de G appartenant à S . Puisque C est le centre de (G, ω_G) , $\omega_G(X) \leq \omega_G(G)/2$. De plus, nous avons vu précédemment que $\omega_G(X) = \omega_H(X)$ et $\omega_G(G) = \omega_H(H)$. Donc $\omega_H(X) \leq \omega_H(H)/2$. Nous pouvons donc conclure que S_H est un demi-séparateur pour (H, ω_H) comme voulu et donc un k -chemins séparateur pour (H, ω_H) . \square

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons identifié une grande famille de graphes planaires ayant une largeur arborescente non-bornée qui sont 2-chemins séparables. Cependant la question de savoir si les graphes planaires sont 2-chemins séparables reste ouverte. Pour résoudre cette question, nous pourrions trouver la réponse sur la grille. En effet, dans cette partie, nous avons montré que les graphes k -chemins séparables pour toutes fonctions de poids forment une famille close par mineurs. Or, tous les graphes planaires sont mineurs d'une grille. Malheureusement nous savons uniquement que les grilles auxquelles on applique une fonction de pondération unitaire sur les sommets et les arêtes sont 1-chemin séparables.

Notons aussi que l'existence d'un graphe planaire 2-chemins séparables pour toutes fonctions de pondération et de largeur arborescente non-bornée suffirait à montrer que tous les graphes planaires sont 2-chemins séparables. Cela donnerait une preuve existentielle. En effet, si G exclut un graphe planaire H comme mineur, alors la largeur arborescente est bornée par une fonction de $|V(H)|$. La proposition 10 atteint presque cet objectif. Malheureusement

le contre-exemple utilise une fonction unitaire sur les sommets (cependant arbitraire sur les arêtes).

Première partie

Etude algorithmique des graphes
k-chemins séparables.

Chapitre 4

La famille PS_1

4.1 Introduction

Nous avons montré dans le chapitre précédent que les familles de graphes PS_k c'est-à-dire les graphes k -chemins séparables, quel que soit la fonction de pondération qui leur ont été appliquée sur les sommets et les arêtes, sont closes par mineurs. Dans cette partie, nous allons étudier plus précisément la classe PS_1 .

Nous avons montré qu'il existait des graphes planaires en dehors de cette famille dans le chapitre 2. Cependant, on pourrait se poser la question de savoir si tous les graphes appartenant à la famille PS_1 sont planaires ou non. Le lemme 8 de ce chapitre nous montre qu'il existe un unique graphe biconnexe non-planaire appartenant à cette famille : $K_{3,3}$.

Nous allons également donner quelques exemples de familles de graphes bien connues incluses dans la famille PS_1 .

Par la « Théorie des Mineurs de Graphes » de Robertson et Seymour, nous savons que les familles closes par mineurs peuvent se caractériser avec un nombre fini de mineurs exclus. Dans ce chapitre, nous donnerons une liste non-exhaustive des mineurs minimaux pour la classe PS_1 . Ce travail a fait l'objet d'une publication dans une conférence internationale [DG10a] et d'un rapport technique [DG10b].

Malheureusement, nous n'avons pas la liste complète des mineurs exclus pour caractériser cette classe. Cependant nous allons présenter un algorithme nous permettant, dans beaucoup de cas, de déterminer si un graphe donné appartient à PS_1 .

Enfin, quand les cas où le test précédent ne nous permet pas répondre à la question de l'appartenance, notre algorithme nous fournit une structure de données, le *graphe des conflits*, nous permettant de déterminer cette appartenance plus facilement.

4.2 Résultats pour quelques famille connues

Dans cette section, nous allons donner quelques familles de graphes connus qui sont 1-chemin séparables.

Lemme 6 *Tous les graphes planaires-extérieurs pondérés sont 1-chemin séparables.*

Preuve. Soit (G, ω) un graphe planaire-extérieur pondéré. Comme les graphes planaires-extérieurs forment une famille héréditaire, c'est-à-dire close par sous-graphes induits, il nous suffit de montrer que (G, ω) admet un 1-chemin séparateur.

Soit v_1 un sommet de G . Supposons qu'un plongement planaire de G est donné tel que tous les sommets sont sur le bord de la face extérieure. Depuis v_1 , on traverse tous les sommets en suivant le bord de la face extérieure, et on note v_i le i^{me} sommets rencontrés. Soit i_0 le plus petit entier tel que $\sum_{i=1}^{i_0} \omega(v_i) \geq \omega(G)/2$. Considérons alors un plus court chemin P entre v_1 et v_{i_0} .

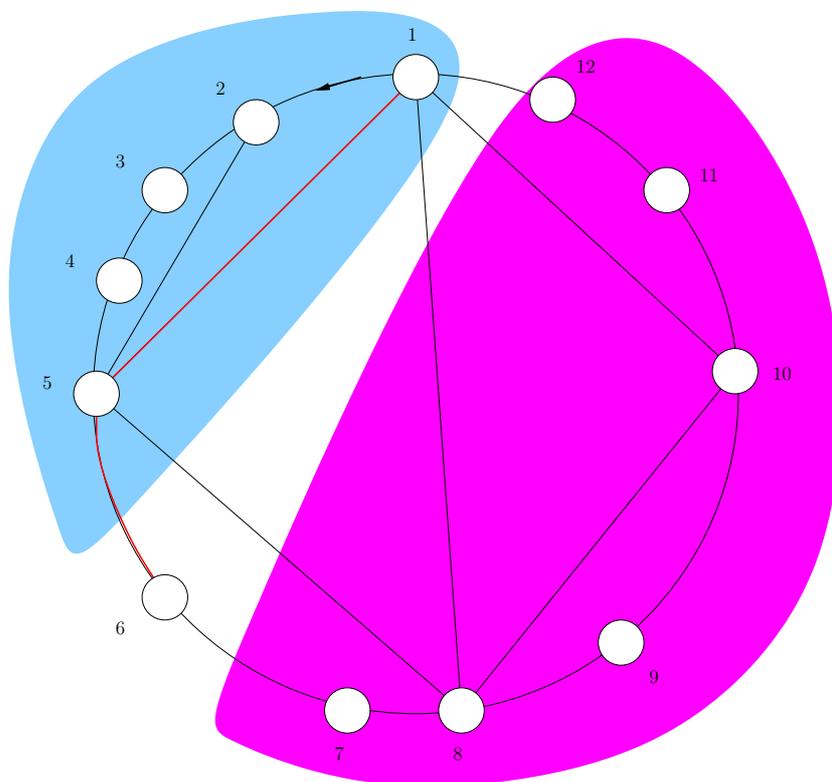


FIG. 4.1 – L'ensemble A est représenté en bleu sur cette figure et l'ensemble B en magenta. La flèche donne le sens de parcours de la face extérieure. Ici $i_0 = 6$.

Nous allons maintenant montrer que P est un 1-chemin séparateur. Soit A , l'ensemble des sommets qui ont un indice strictement inférieur à i_0 et B l'ensemble des sommets qui ont un

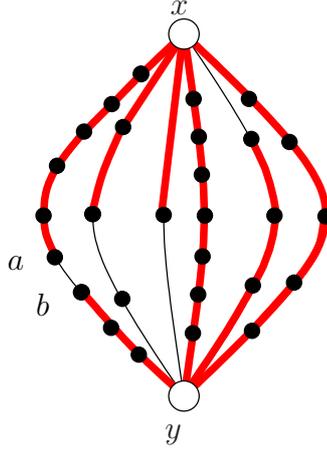


FIG. 4.2 – Le globe-graphe G présenté ici est composé de 6 chemins entre x et y . L’arbre de plus courts chemins est donné ici en rouge.

indice strictement supérieur à i_0 comme montré par la figure 4.1. Il est facile de remarquer que $\omega(A)$ et $\omega(B) \leq \omega(G)/2$. C’est pourquoi, nous avons juste à montrer qu’il n’y a pas d’arêtes entre les sommets de A et les sommets de l’ensemble B . Nous allons montrer cela par contradiction.

Soit a un sommet de A et b un sommet de B tel que (a, b) soit une arête. L’arête (a, b) ne peut pas traverser P puisque le graphe considéré est par définition planaire. De plus, l’arête appartient au bord de la face externe, ce qui implique que soit v_{i_0} soit v_1 n’appartient pas à la face externe ; ce qui est une contradiction. \square

Il existe d’autres familles de graphes qui appartiennent à la classe PS_1 . Le lemme 7 nous montre que les globe-graphes, définis dans le chapitre 2, sont également dans la famille PS_1 .

Lemme 7 *Tout globe-graphe pondéré est 1-chemin séparable.*

Preuve. Soit (G, ω) un globe-graphe pondéré. D’après la proposition 11 donnée dans le chapitre précédent, il suffit de montrer que (G, ω) admet un 1-chemin séparateur pour montrer que G appartient à PS_1 .

Soient P_1, \dots, P_r les r chemins formant G , et notons x et y les extrémités communes à tous ces chemins. Supposons, sans perte de généralités que $\omega(P_1)$ est maximum sur tous les chemins P_i . Considérons maintenant un arbre couvrant de plus court chemins T enraciné en x . La figure 4.2 en donne une illustration.

Si toutes les arêtes de P_1 sont dans T , alors on prend P_1 . C’est un plus court chemin et un demi-séparateur puisque toutes les composantes de $G \setminus P_1$ sont les chemins P_i privés de leurs extrémités x et y . De plus, chacune de ces composantes a un poids inférieur ou égal

à la moitié du poids total du graphe. En effet, sinon, cela contredit le fait que $\omega(P_1)$ est maximum.

Dans le cas contraire, soit (a, b) une arête de P_1 qui n'est pas dans l'arbre couvrant T . On peut remarquer qu'il n'y a seulement une telle arête dans le chemin P_1 sinon T n'est pas connexe. En parcourant P_1 de x vers y , supposons sans perte de généralité que a est traversé avant b . Notons A le chemin dans T de x vers a , et B le chemin dans T de x vers b . A et B sont donc des plus courts chemins dans le graphe G .

Si $\omega(A) \geq \omega(G)/2$, alors on choisit A comme demi-séparateur. Toutes les composantes de $G \setminus A$ ont donc un poids d'au plus $\omega(G) - \omega(A)$, et donc inférieur ou égal à la moitié du poids total du graphe G . Enfin, si $\omega(A) < \omega(G)/2$, alors on choisit B comme demi-séparateur. Les composantes connexes de $G \setminus B$ sont donc $A \setminus \{x\}$ et $P_i \setminus \{x, y\}$ pour tous $i > 1$. Elles ont toutes un poids inférieur à la moitié du graphe G . Dans tous les cas, nous avons trouvé un demi-séparateur de G . \square

La lemme 8 va nous permettre de caractériser en partie les graphes appartenant à la famille PS_1 . En effet, nous allons montrer qu'il n'y a qu'un graphe non-planaire biconnexe qui appartient à PS_1 . En utilisant le lemme 5 et le théorème 5 du chapitre précédent, nous savons donc qu'aucun graphe admettant K_5 comme mineur n'appartient pas à PS_1 .

Nous allons maintenant montrer que le graphe $K_{3,3}$ est 1-chemin séparable, et que c'est le plus petit graphe non-planaire qui appartient à PS_1 .

Lemme 8 *Le seul graphe non-planaire biconnexe de PS_1 est isomorphe à $K_{3,3}$.*

Preuve. Soit (G, ω) un graphe pondéré bi-connexe tel que $G \in \text{PS}_1$. Supposons G non planaire. D'après la caractérisation de Kuratowski donnée dans [Kur30], G contient une subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.

Nous avons précédemment vu que la clique K_5 n'est pas 1-chemin séparable avec la proposition 5. Donc, d'après le théorème 5 du chapitre précédent, G ne peut donc pas contenir une subdivision de K_5 et donc doit contenir une subdivision de $K_{3,3}$.

Nous allons donc montrer que le seul graphe non-planaire biconnexe appartenant à PS_1 est $K_{3,3}$.

Notons M , un graphe $K_{3,3}$ dans lequel une unique arête a été subdivisée en deux arêtes par un sommet. Appliquons maintenant une pondération unitaire à ce graphe. Nous avons donc $\omega(M) = 7$. De plus, son diamètre est de 2. Retirer n'importe quel plus court chemin enlève au plus 3 sommets. De plus, un tel retrait ne permet pas de découper le graphe M et donc il en résulte une composante avec au moins $4 > 7/2$ sommets. Donc M n'est pas 1-chemin séparable.

Prenons maintenant M' un sur-graphe de $K_{3,3}$ avec uniquement une arête supplémentaire. Notons alors $\{x_1, x_2, x_3\}$ et $\{y_1, y_2, y_3\}$, les ensembles de sommets de chaque part de $K_{3,3}$. Soit (y_2, y_3) l'arête supplémentaire comme sur la figure 4.3. La fonction de pondération ω pour M' est défini comme suit : $\omega(x_i) = 2$, $\omega(y_2) = \omega(y_3) = 3$, $\omega(x_1, y_2) = \omega(x_2, y_3) = 2$, tous les autres poids étant unitaires. Le poids total de M' est donc de $\omega(M') = 13$.

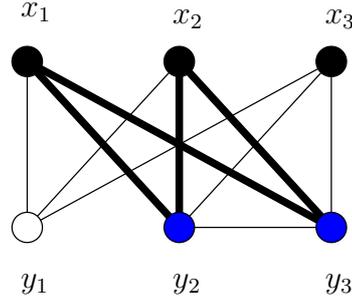


FIG. 4.3 – Cette figure donne le sur-graphe pondéré de $K_{3,3}$ que nous considérons dans cette preuve.

- Considérons maintenant un chemin P quelconque dans M' . Il y a alors trois cas possibles :
- P lie x_i à x_j ; il passe alors par y_1 et a une longueur égale à 2 et crée une composante connexe d'un poids de $2 + 3 + 3 = 8 > \omega(M')/2 = 6.5$.
 - P lie deux sommets adjacents. Il a alors une longueur unitaire, a un poids d'au plus 6 ; et crée donc une composante connexe de quatre sommets d'un poids d'au moins $7 > \omega(M')/2$.
 - P relie y_1 à y_2 ou y_3 . Sa longueur est alors de 2, et crée donc une composante connexe ayant un poids $3 + 2 + 2 = 7 > \omega(M')/2$.

Pour toutes les composantes connexes C de $\omega(M' \setminus P)$, on a $\omega(C) > \omega(M')/2$. Donc M' n'admet pas de 1-chemin séparateur. Nous pouvons donc conclure que si G est biconnexe mais n'est pas planaire, G est nécessairement isomorphe à $K_{3,3}$.

Nous allons maintenant prouver que le graphe $K_{3,3}$ appartient à la famille PS_1 . Selon la proposition 11, il nous suffit de montrer que tous les graphes $K_{3,3}$ pondérés admettent un 1-chemin séparateur. Sans pertes de généralités, nous pouvons poser : $\omega(x_1) \geq \omega(x_2) \geq \omega(x_3)$.

Posons P_1 un plus court chemin de x_1 à x_2 et contient au moins le sommet y_{i_1} . Définissons alors P_2 le plus court chemin entre y_{i_2} et y_{i_3} (avec i_1, i_2 et i_3 , des indices deux à deux différents) et supposons qu'il contient le sommet x_{j_1} . Nous noterons j_2 et j_3 les deux autres indices des sommets x . Nous allons montrer que P_1 ou P_2 est un 1-chemin séparateur.

Par l'absurde, si P_1 n'est pas un demi-séparateur, alors $\omega(P_1) < \omega(K_{3,3})/2$ et donc $\omega(G \setminus P_1) > \omega(K_{3,3})/2$. Comme $\omega(P_1)$ est borné par $\omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(y_{i_1})$ et $\omega(G \setminus P_1)$ est borné par $\omega(x_3) + \omega(y_{i_2}) + \omega(y_{i_3})$ (et de manière analogue pour P_2), on en déduit le système suivant :

$$\begin{aligned} \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_{j_1}) &< \omega(x_3) + \omega(x_{j_2}) + \omega(x_{j_3}) \\ \omega(x_{j_1}) + \omega(x_2) + \omega(x_3) &< \omega(x_{j_2}) + \omega(x_{j_3}) + \omega(y_{i_1}) \end{aligned}$$

En additionnant les équations, nous obtenons l'équation suivante :

$$\omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_{j_1}) < \omega(x_3) + \omega(y_{i_2}) + \omega(y_{i_3})$$

De plus, par hypothèses, on a :

$$\omega(x_3) \leq \omega(x_{j_1})$$

$$\omega(x_{j_2}) + \omega(x_{j_3}) \leq \omega(x_2) + \omega(x_1)$$

On obtient donc :

$$\omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) < \omega(x_3) + \omega(y_{i_2}) + \omega(y_{i_3}) \leq \omega(x_3) + \omega(x_2) + \omega(x_1)$$

Cela mène donc à une contradiction. Donc un des chemins P_1, P_2 est un 1-chemin séparateur de $K_{3,3}$. \square

4.3 Méthode pour décider de l'appartenance à PS_1

Dans cette section, nous allons présenter une méthode nous permettant de déterminer l'appartenance d'un graphe à la classe SPS_k pour tout entier k .

Pour montrer qu'un graphe G n'appartient pas à la famille PS_1 , il nous faut exhiber une pondération ω tel que le graphe (G, ω) n'est pas 1-chemin séparable.

A contrario, pour montrer qu'un graphe G appartient à PS_1 , et en utilisant la proposition 11, il nous faut prouver que, quel que soit la fonction de pondération qui pourra lui être appliquée, on pourra trouver un 1-chemin séparateur pour toutes ces composantes bi-connexes. Nous avons développé un test qui permet de savoir si un graphe appartient à la famille SPS_k et donc en particulier PS_1 .

Pour le graphe à 6 sommets représenté par la figure 4.4, nous allons donner une intuition de la méthode que nous avons développé et que nous allons présenter ultérieurement.

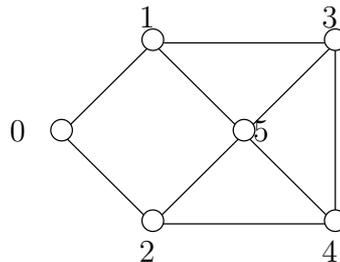


FIG. 4.4 – Le graphe à 6 sommets donné par cette figure appartient à la famille PS_1 .

Pour ce graphe considérons dans un premier temps le plus court chemin entre les sommets 1 et 4. Il y a plusieurs possibilités pour ce plus court chemin puisque nous devons considérer toutes les valuations possibles. Nous pouvons donc avoir $P_{1,4} = 1, 5, 4$ ou $P_{1,4} = 1, 0, 2, 4$

ou $P_{1,4} = 1, 0, 2, 5, 4$ ou $P_{1,4} = 1, 3, 5, 4$ ou enfin $P_{1,4} = 1, 3, 5$. Dans les quatre premiers cas, les composantes connexes de $G \setminus P_{1,4}$ contiennent au plus deux sommets. Or, si de telles composantes ont un poids supérieur à la moitié du graphe en entier, il nous suffit de retirer le plus court chemin entre ces deux sommets pour séparer le graphe (puisqu'alors nous aurons retiré des sommets suffisamment lourds). Il nous reste alors à considérer le dernier cas. En effet, si $P_{1,4} = 1, 3, 5$, alors $G \setminus P_{1,4}$ est constitué d'une unique composante connexe contenant les sommets $0, 1, 2$. Considérons maintenant le plus court chemin entre les sommets 1 et 2. Nous pouvons avoir $P_{1,2} = 1, 0, 2$ ou $P_{1,2} = 1, 5, 2$ ou $P_{1,2} = 1, 3, 5, 2$ ou $P_{1,2} = 1, 5, 4, 2$ ou $P_{1,2} = 1, 3, 4, 2$. Dans tous les cas sauf le premier, les composantes connexes de $G \setminus P_{1,2}$ sont constituées d'au plus 2 sommets et, pour les mêmes raisons que précédemment, on peut considérer que nous avons réussi à séparer le graphe dans ces cas. Par contre, si $P_{1,2} = 1, 0, 2$ il reste une composante connexe de trois sommets $3, 4, 5$ dans $G \setminus P_{1,2}$. Cependant cette dernière composante connexe ne peut avoir un poids supérieur à la moitié du poids du graphe. En effet, à l'étape précédente, nous avons considéré que la plus grosse composante connexe était $0, 1, 2$. Or ces deux composantes disjointes ne peuvent pas avoir toutes les deux un poids qui dépasse la moitié du poids total du graphe. Nous avons donc montré que le plus court chemin entre ces deux paires de sommets est un 1-chemin séparateur pour le graphe considéré.

Nous allons commencer par donner quelques définitions qui vont nous être utiles dans la suite de cette section.

Définition 9 Une k -réalisation d'un ensemble de sommets S d'un graphe pondéré (G, ω) est un ensemble d'au plus k de plus courts chemins de (G, ω) dont toutes les extrémités sont dans S .

Remarquons qu'une k -réalisation Q d'un ensemble S ne couvre pas forcément tous les sommets de S .

Définition 10 Deux ensembles P et Q de chemins de G sont k -compatibles s'il existe une valuation ω_0 telles que P et Q sont des ensembles de k plus courts chemins dans (G, ω_0) .

Dans la suite, si P est un ensemble de chemins de G par abus de langage, on notera également par P le sous-graphe de G composé de l'union des chemins de P .

Considérons la propriété booléenne $\text{TESTSPS}_k(G, P)$ définie pour tout entier strictement positif k , tout graphe G et tout ensemble P de k chemins de G tel que $G \setminus P$ est connexe vérifiant les conditions suivantes.

$\text{TESTSPS}_k(G, P)$ est VRAI si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.

C1. $|V(G)| - |V(P)| \leq 2k$; ou

C2. $\exists S$ un ensemble tel que toute k -réalisation Q de S k -compatible avec P vérifie les deux conditions suivantes :

C2a. Il n'y a pas d'arêtes entre les sommets de $P \setminus Q$ et de $G \setminus (P \cup Q)$

C2b. Pour toute composante connexe C de $G \setminus (P \cup Q)$, $\text{TESTSPS}_k(C \cup Q, Q) = \text{VRAI}$

Le test TESTSPS_k renvoie FAUX dans tous les autres cas.

Le théorème suivant nous montre que si le test renvoie VRAI, alors le graphe considéré appartient bien à la famille SPS_k .

Théorème 6 *Si $\text{TESTSPS}_k(G, \emptyset)$ renvoie VRAI et si le graphe G est connexe alors G appartient à la famille SPS_k .*

Preuve.

Nous allons montrer ce lemme par l'absurde. Supposons que G est un graphe connexe, que $\text{TESTSPS}_k(G, \emptyset)$ est VRAI mais que pourtant $G \notin \text{SPS}_k$. En utilisant la proposition 11, nous pouvons en conclure qu'il existe une fonction de pondération ω_0 telle que (G, ω_0) ne possède pas de k -chemins séparateur fort. Pour tout ensemble P de k plus courts chemins de G , on note $n(P)$ le nombre de sommets de la composante connexe de $G \setminus P$ de poids maximum.

Remarquons dans un premier temps que $n(P) > 2k$, et donc $|V(G)| > 2k$. En effet, supposons que pour un certain ensemble de k plus courts chemins P on ait $n(P) \leq 2k$. La composante C la plus lourde a un poids $\omega(C) > \omega(G)/2$ puisque (G, ω) n'admet pas de k -chemins séparateur fort. Or, par définition, $|C| = n(P) \leq 2k$. Donc C peut être couvert par un ensemble Q de k plus courts chemins car G étant connexe on peut appairer les sommets de C et créer k plus courts chemins. Donc

$$\begin{aligned} \omega(G \setminus Q) &\leq \omega(G \setminus C) \\ &\leq \omega(G) - \omega(C) \\ &\leq \omega(G)/2 \end{aligned}$$

Et Q serait un k -chemins séparateur fort de (G, ω) ; ce qui est une contradiction.

Comme $\text{TESTSPS}_k(G, \emptyset)$ est vrai et $|V(G)| > 2k$, le test détermine un ensemble S pour lequel toutes les k -réalisations sont testées. En particulier une k -réalisation P de S correspondant à k plus courts chemins de (G, ω) . Soit C la composante la plus lourde de $G \setminus P$. Cette composante est de poids $\omega(C) > \omega(G)/2$ puisque P ne peut pas être un k -chemins séparateur fort de (G, ω) . Elle est de plus unique.

De plus, $\text{TESTSPS}_k(C \cup P, P)$ est vraie. Donc il existe une k -réalisation Q k -compatible avec P qui sont des plus courts chemins de (G, ω) et qui vérifie les conditions suivantes :

- 1 Il n'y a pas d'arête entre les sommets de $P \setminus Q$ et de $(C \cup P) \setminus (P \cup Q) = C \setminus Q$;
- 2 Pour toute composante connexe C' de $C \setminus Q$, $\text{TESTSPS}_k(C' \cup Q, Q)$ est VRAI.
- 3 Les chemins P et Q diffèrent d'au moins un sommet.

Montrons que $n(Q) < n(P)$. Les composantes de $G \setminus Q$ qui n'intersectent pas C sont de poids inférieur ou égal à $\omega(G) - \omega(C)$ (et donc à $\omega(G)/2$). Par la propriété (1) que vérifie Q , il n'existe pas d'arête entre $C \setminus Q$ et les autres sommets de G , car il n'y en a pas vers P qui était un séparateur pour la composante C . Autrement dit les composantes de $G \setminus Q$ qui intersectent C sont complètement incluses dans C . Elles sont toutes de

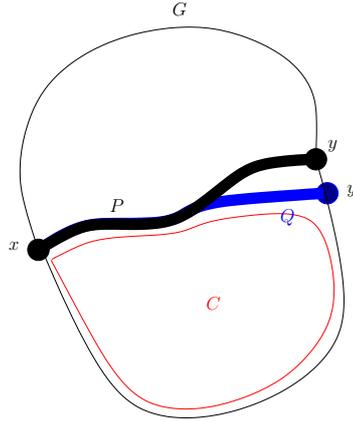


FIG. 4.5 – Sur cette figure, on voit la composante connexe la plus lourde C après le retrait du plus court chemin P entre x et y représenté en noir sur la figure. Le chemin Q donné en bleu est un chemin compatible avec le chemin P qui respecte les trois conditions nécessaires.

poids inférieur à $\omega(G)/2$ sauf une seule. Cette composante, notée C' dans la suite, est la plus lourde de $G \setminus Q$ et possède moins de $n(P)$ sommets car les extrémités de P et de Q diffèrent par au moins un sommet. Donc Q contient au moins un sommet de C . Le test TESTSPS_k construit une suite de k -réalisations de $(G, \omega) : P_1 = P, P_2 = Q, \dots, P_t$ telles que $n(P_1) > n(P_2) > \dots > n(P_t)$. Cela est en contradiction avec le fait que $n(P) > 2k$ pour tout ensemble de k plus courts chemins de (G, ω) . □

La méthode que nous avons décrite dans cette section permet de savoir si un graphe appartient à la classe SPS_k , et en particulier à PS_1 .

Cependant cette méthode ne permet de déterminer pour tous les graphes s'il appartient à la famille PS_1 ou non. En effet, dans certains cas, la méthode trouve une composante connexe pour lesquelles le TESTSPS_1 renvoie faux. Ceci est dû au fait que la fonction de pondération qui s'applique aux arêtes ne peut pas exister.

Dans ces derniers cas, l'algorithme nous retourne un graphe permettant de nous aider à trouver si les graphes appartiennent à PS_1 ou bien si ce sont des nouveaux mineurs. On appelle ce graphe le « graphe des conflits ». Sa construction et son utilisation fera l'objet de la section suivante.

4.4 Le graphe des conflits

D'après le Théorie des Mineurs des Graphes de Robertson et Seymour définie dans [RS86] et le théorème 5 du chapitre précédent, nous savons qu'il existe un nombre fini de mineurs exclus pour caractériser cette classe de graphes. Dans cette section, nous allons présenter une méthode qui nous permet de nous aider à trouver de nouveaux mineurs.

Il est important de noter que si cette méthode retourne VRAI alors il est certain que $G \in \text{PS}_1$. Le TESTSPS_1 donne toutefois quelques faux négatifs. En effet, il y a des cas où notre algorithme ne saura déterminer si le graphe considéré appartient à la classe PS_1 ou non.

Intuitivement, notre algorithme va essayer de chercher une pondération telle que le graphe ainsi pondéré n'admet pas de 1-chemin séparateur. Si il trouve une preuve qu'une telle pondération ne peut pas exister (cette condition sera précisée plus tard), il retourne alors que le graphe est 1-chemin séparable. Dans les autres cas, c'est une valeur signifiant qu'il ne peut pas répondre qui est retournée.

Notre algorithme repose sur la construction d'un « graphe des conflits ». Ce graphe de hauteur 3 est constitué de trois types de sommets : les sommets « paires », les sommets « chemins » et les sommets « composantes ». Ce graphe est construit comme suit :

- A chaque paire de sommets du graphe G considéré, on associe un sommet « paire » dans le graphe des conflits.
- A chacun des chemins entre deux sommets x et y , on associe un sommet « chemins » dans le graphe des conflits qui sont voisins du sommet « paires » x, y .
- A chacune des composantes connexes de $G \setminus P$ avec P un chemin entre deux sommets x, y de G , et pour lequel $\text{TESTSPS}_1(C \cup P, P)$ a retourné FAUX, on associe un sommet « composantes » dans le graphe des conflits qui sont voisins du sommet « chemins » P .

Les sommets « paires » sont adjacents aux sommets « chemins » qui correspondent aux chemins entre les sommets de la paire considérée. De même les sommets « composantes » sont reliés par une arête aux sommets « chemins » leur correspondant. Le graphe des conflits est en réalité une forêt où chaque arbre est de profondeur 3.

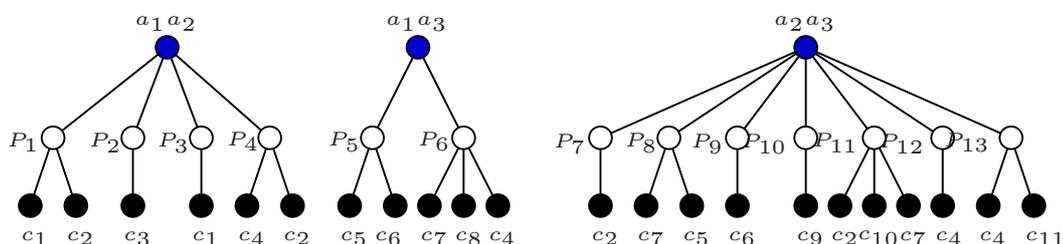


FIG. 4.6 – Voici un exemple d'un graphe des conflits du graphe. Les sommets paires sont représentés en noir, les sommets «chemins» en blanc et les sommets «composantes» en bleu

Notre algorithme va maintenant affecter à chacune de ces composantes C un booléen. Ce booléen va nous permettre de savoir si la composante a un poids supérieur à la moitié du poids total du graphe ou non. Pour la suite, nous posons 0 pour signifier que la composante a un poids nécessairement supérieur à la moitié du poids total du graphe et 1 si le poids est nécessairement inférieur ou égal à la moitié du poids total du graphe. Il est important de

noter que le booléen n'est pas toujours déterminé pour chacune des composantes, puisque les poids des sommets sont inconnus. Dans ce cas, on notera $*$.

Remarquons que pour que le graphe appartienne à la classes PS_1 , il suffit, que pour une paire de sommets (x, y) donnée, et quel que soit le chemin permettant d'aller de l'un à l'autre, toutes les composantes connexes qui en résultent sont associées au booléen 1, et ont donc un poids inférieur ou égal à la moitié du poids total du graphe. Autrement dit si, pour une paire de sommets x, y donnée, toutes les composantes connexes reçoivent le booléen 1, nous pouvons alors conclure que le graphe considéré est 1-chemin séparable. Dans ce cas, un quelconque plus court chemin entre x et y est un 1-chemin séparateur du graphe.

Donc, pour que le graphe considéré n'appartienne pas à PS_1 , nous pouvons en conclure qu'au moins une des composantes connexes C est associée au booléen 0, et ce pour chacune des paires de sommets du graphe. Dans le cas où une paire donnée possède une unique composante connexe, cette dernière est nécessairement associée au booléen 0.

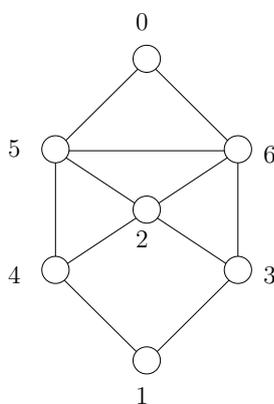


FIG. 4.7 – Le graphe G à 7 sommets présenté dans cette figure appartient à PS_1 . Le graphe des conflits qui lui est associé est donné dans la figure 4.8.

En fait la valeur de certains booléens peuvent être déduite afin d'affecter le maximum de booléens, nous utilisons les 5 règles de propagation données dans la suite qui sont :

- Règle d'égalité
- Règle d'inclusion lourde
- Règle d'inclusion légère
- Règle de disjonction
- Règle de comptage

Nous allons maintenant détailler l'application des règles dans le graphe des conflits du graphe donné sur la figure 4.7. Pour illustrer chacune des règles suivantes, nous allons considérer seulement prendre une partie de ce graphe des conflits.

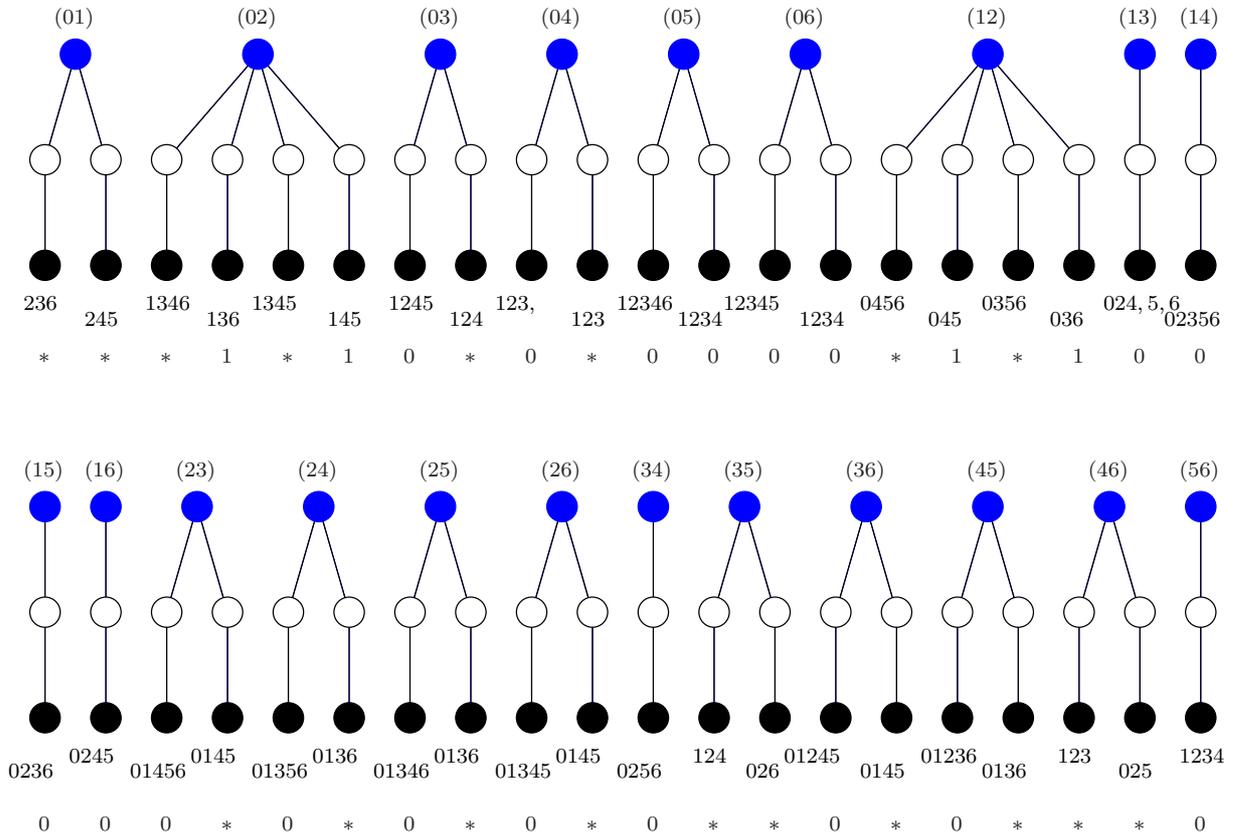


FIG. 4.8 – Cette figure nous montre le graphe des conflits correspondant au graphe donné par la figure 4.7 avec sa résolution complète en appliquant les règles de propagation décrites ultérieurement. Il faut cependant utiliser la technique du forçage de variables pour montrer que ce graphe appartient à la famille PS_1 .

4.4.1 Règle d'égalité

Si dans le graphe des conflits, il y a deux composantes connexes constituées des mêmes sommets, alors elles reçoivent la même valeur. Cette règle est illustrée par la figure 4.9.

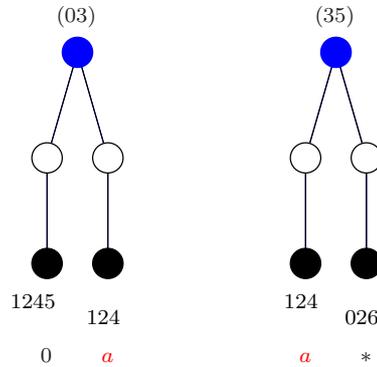


FIG. 4.9 – Dans cet exemple de graphe de conflits, il y a deux composantes connexes $\{1, 2, 4\}$ issues de deux paires de sommets différentes. Elles reçoivent alors la même valeur a .

4.4.2 Règle d'inclusion lourde

Si dans le graphe des conflits, il y a une composante connexe incluse dans une autre et que la plus petite des composantes a reçu 0 comme valeur ; alors la plus grosse composante recevra également 0. En effet, si une composante a un poids faisant plus de la moitié du poids total du graphe, alors c'est également le cas de toutes les composantes connexes incluant cette composante.

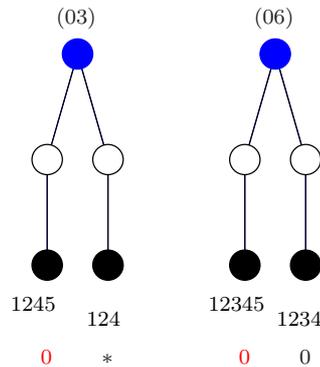


FIG. 4.10 – La composante 1, 2, 4, 5 issue de la paire de sommets $(0, 3)$ est incluse dans la composante 1, 2, 3, 4, 5 issue de la paire $(0, 6)$. La première composante ayant reçu la valeur 0, alors la seconde reçoit également la même valeur.

4.4.3 Règle d'inclusion légère

Si dans le graphe des conflits il y a une composante connexe C à laquelle on a assignée le booléen 1, alors toutes les composantes connexes qui sont incluses dans C reçoivent le booléen 0. En effet, si une composante connexe a un poids inférieur à la moitié du poids total du graphe, alors toutes les composantes connexes qui sont incluses dans cette composante ont trivialement un poids également à ce poids de référence.

4.4.4 Règle de disjonction

Si dans le graphe une composante connexe a reçu la valeur 0, alors toutes les composantes connexes disjointes à cette composante recevront la valeur 1. En effet, si une composante connexe a un poids dépassant la moitié du poids total du graphe, alors la somme des poids de tous les autres sommets ne peut pas être dépassée la moitié du poids total du graphe. Par conséquent, toutes les composantes connexes constituées de ces sommets ne peuvent pas avoir un poids trop lourd.

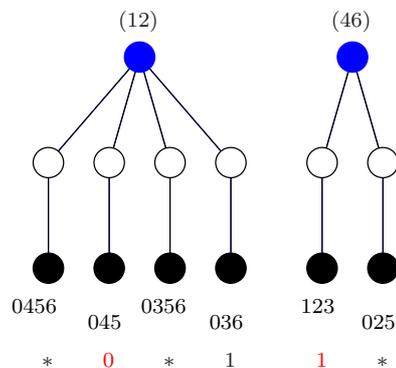


FIG. 4.11 – La composante connexe 0, 4, 5 issue de la paire (1, 2) a reçu la valeur 0 ; on peut donc affecter la valeur 1 à la composante connexe 1, 2, 3 issue de la paire (0, 4, 6) reçoit la valeur 1, puisqu'elle est disjointe de la première.

4.4.5 Règle de comptage

Cette règle repose sur le fait que pour que le graphe ne soit pas 1-chemins séparable, il doit exister une composante connexe trop lourde quel que soit la partition des sommets obtenus avec un plus court chemin. Dans le graphe des conflits toutes les composantes disjointes entre elles et dont l'union des sommets est égal à l'ensemble des sommets du graphe recevront des valeurs différentes, l'une 0 et l'autre 1. Cette règle repose sur le fait qu'on suppose que le graphe considéré n'appartient pas à la famille PS_1 . Il y a donc nécessairement une composante connexe trop lourde. De plus, comme pour la règle précédente,

deux composantes connexes disjointes ne peuvent pas être toutes les deux les plus lourdes. Nous avons donc nécessairement des valeurs différentes.

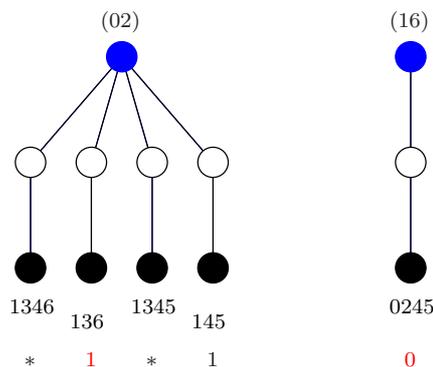


FIG. 4.12 – La composante connexe 0, 2, 4, 5 issue de la paire (1, 6) a reçu la valeur 0 ; on peut donc affecter la valeur 1 à la composante connexe 1, 3, 6 issue de la paire (0, 2) reçoit la valeur 1, puisqu’elle est disjointe de la première.

L’affectation des booléens est faite au fur et à mesure de la construction du graphes des conflits.

Il est important de remarquer que, même à la fin de la construction du graphe des conflits, toutes les valeurs des booléens associés aux composantes connexes ne sont pas nécessairement assignées.

L’utilisation de cet algorithme nous a permis de compléter notre liste de mineurs exclus pour la famille PS_1 . Pour cela, nous avons pris la liste de graphes planaires bi-connexes à n sommets pour $n = \{6, 7, 8, 9\}$. Notons qu’il n’est pas nécessaire de regarder les graphes à cinq sommets puisque nous avons montré précédemment qu’hormis la clique, tous les graphes à cinq sommets appartiennent à PS_1 . Nous pouvons donc montrer le théorème suivant :

Théorème 7 *La liste exhaustive des mineurs minimaux à 5, 6 et 7 sommets est donnée par la figure 4.13.*

Preuve. D’après le théorème 4, tous les graphes à 4 sommets appartiennent à PS_1 .

Le lemme ?? nous permet quant à lui de savoir que la clique à 5 sommets n’appartient pas à PS_1 . On peut néanmoins remarquer que c’est l’unique graphe à 5 sommets dans ce cas. C’est ce que montre la proposition suivante.

Proposition 12 *Tous graphes ayant au plus 5 sommets et de diamètre au moins 2 appartiennent à PS_1 .*

Preuve. Soit (G, ω) un graphe ayant $n \leq 5$ sommets et dont le diamètre est d’au moins 2.

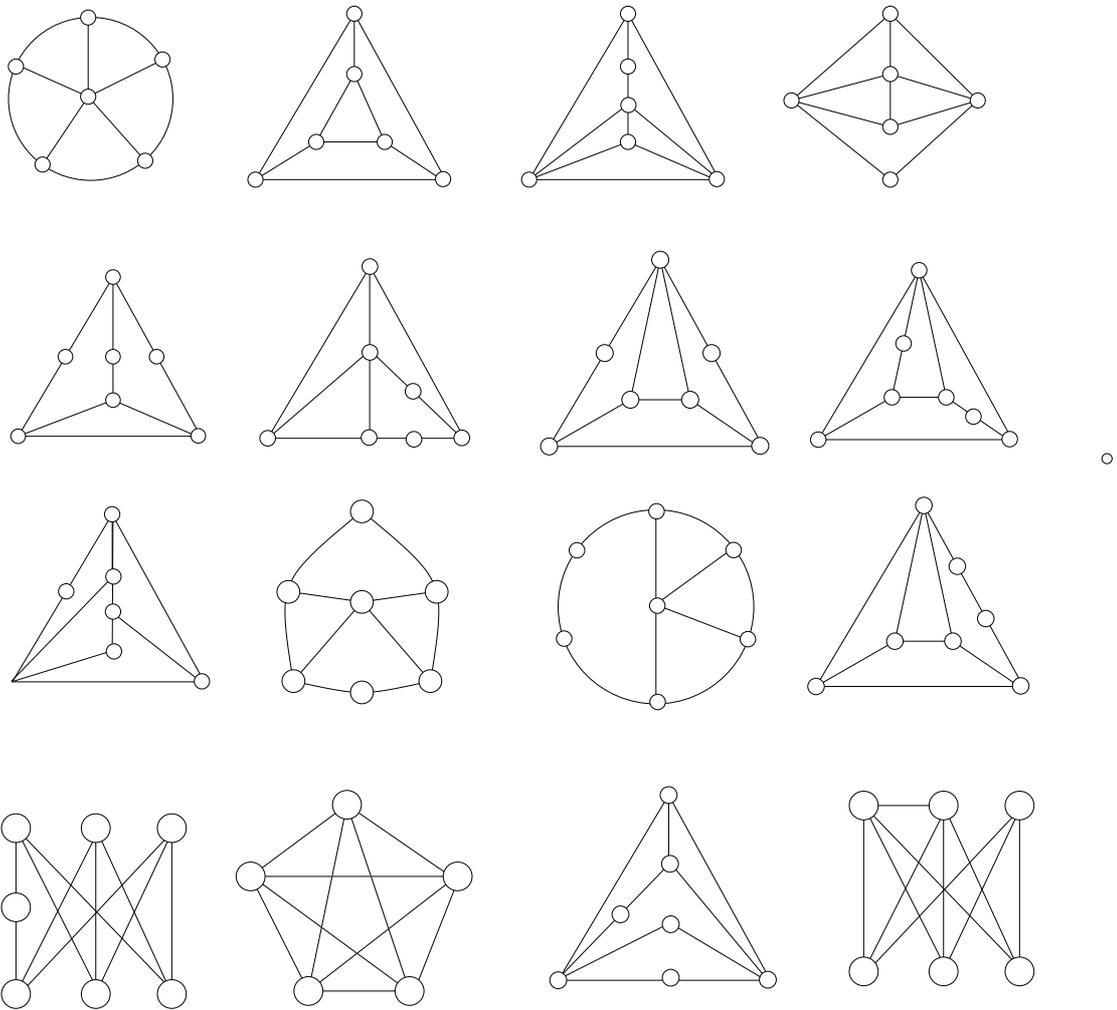


FIG. 4.13 – La figure ci-dessus donne tous les mineurs à 5,6 et 7 sommets pour la classe PS_1 .

Nous allons dans un premier temps considérer le cas où il existe deux sommets x, y de G tel que $\omega(x) + \omega(y) > \omega(G)$. Notons $P_{x,y}$, le plus court chemin entre x et y dans (G, ω) . Nous savons donc que $G \setminus P_{x,y}$ a un poids inférieur ou égal à la moitié de $\omega(G)$. Dans ce cas, le plus court chemin $P_{x,y}$ est donc un 1-chemin séparateur.

Considérons maintenant les graphes où l'on ne peut pas trouver un tel couple de sommets. Prenons alors x_1, y_1 deux sommets à distance au moins 2. Le plus court chemin entre x_1 et y_1 est donc constitué d'au moins trois sommets. Donc la composante connexe $G \setminus P_{x,y}$ est constitué d'au plus 2 sommets. Or, puisque pour tout couple de sommets x, y du graphe, on a $\omega(x) + \omega(y) \leq \omega(G)/2$, on peut donc en conclure que P_{x_1, y_1} est un 1-chemin séparateur. \square

Il nous reste donc à considérer les graphes à 6 sommets. Dans un premier temps, le lemme 8 nous montre que le seul graphe non-planaire à 6 sommets qui appartient à la classe PS_1 est le graphe $K_{3,3}$.

Pour nous assurer que nous avons trouvé tous les mineurs à 6 sommets, nous avons travaillé avec la liste de tous les graphes à 6 sommets planaires et bi-connexes. En effet, nous pouvons réduire notre étude à ces graphes en utilisant la proposition 11. En utilisant le théorème 5 prouvé dans la partie précédente, nous avons retiré de cette liste tous les graphes qui admettaient comme mineurs les graphes que nous avons d'ores et déjà obtenus. Il nous reste après cette étape une liste de 24 graphes. Nous avons lancé le $TESTSPS_1$ sur chacun des graphes de cette liste. Le test a répondu positivement pour chacun d'eux et donc tous les graphes appartiennent à la classe PS_1 . Nous pouvons alors certifier que les mineurs à 6 sommets ont tous été trouvés.

Nous avons utilisé la même méthode sur tous les graphes planaires bi-connexes à 7 sommets. Cette liste comprend 646 graphes. Après avoir retiré tous les graphes contenant un mineur de la classe PS_1 déjà identifié, il nous reste une liste de 98 graphes. Nous avons ensuite lancé le test $TESTSPS_1$. La liste des graphes résultants est composé des quatre graphes représentés dans la figure 4.14.

Pour chacun de ces graphes, le graphe des conflits leur étant associé contenaient des noeuds «composantes» associés à des valeurs indéterminées. Nous avons donc forcé la valeur d'un noeud à tous les entiers de l'ensemble $\{0, 1\}$ des valeurs possibles. En effet, nous savons que si le système d'équations n'admet pas de solutions lorsque l'on force la valeur d'un noeud à 0, et qu'il n'admet pas de solutions lorsqu'elle est forcée à l'autre valeur possible, soit 1, alors le graphe associé ne peut pas appartenir à la famille PS_1 puisqu'il ne peut exister de pondérations sur ces sommets tel que le graphe ne soit pas 1-chemin séparable. En appliquant les règles de propagation que nous avons développé précédemment, tous les noeuds ont alors eu des valeurs associées déterminées, sans que le test $TESTSPS_1$ ne détermine ces graphes comme appartenant à la classe PS_1 . Néanmoins, il nous reste à déterminer s'il ne s'agit pas de faux négatifs.

Pour cela, nous avons utilisé de la programmation linéaire. En effet, le graphe des conflits nous permet de connaître les sous-ensembles de sommets dont la somme des poids qui leur sont associés par la fonction de pondération doit être strictement supérieure à la somme

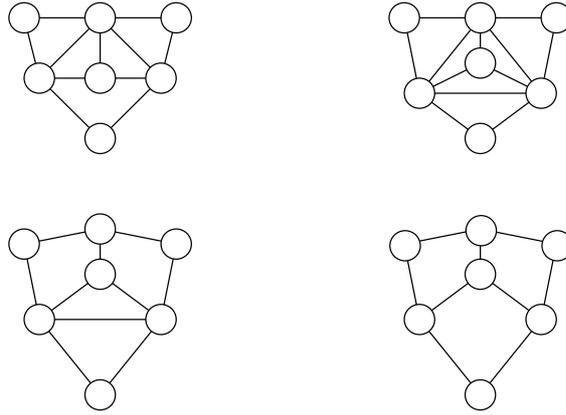


FIG. 4.14 – Ces quatre graphes sont les quatre graphes à 7 sommets qui restent après le passage du test, et la suppression de ceux admettant un graphe connu pour ne pas être PS1 comme mineurs.

du poids du graphe. Nous avons donc un système d'équations de programmation linéaire. Après avoir gardé uniquement les équations indépendantes les unes des autres, et les plus contraignantes.

Pour le premier graphe, le système d'équations que nous obtenons est le suivant :

$$\begin{aligned}
 \omega(x_2) + \omega(x_3) + \omega(x_6) &> \frac{1}{2} \cdot \omega(x_0) + \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + \omega(x_4) + \omega(x_5) + \omega(x_6) \\
 \omega(x_1) + \omega(x_3) + \omega(x_4)) &> \frac{1}{2} \cdot \omega(x_0) + \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + \omega(x_4) + \omega(x_5) + \omega(x_6) \\
 \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_5) + \omega(x_6)) &> \frac{1}{2} \cdot \omega(x_0) + \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + \omega(x_4) + \omega(x_5) + \omega(x_6) \\
 \omega(x_0) + \omega(x_3) + \omega(x_5)) &> \frac{1}{2} \cdot \omega(x_0) + \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + \omega(x_4) + \omega(x_5) + \omega(x_6) \\
 \omega(x_0) + \omega(x_2) + \omega(x_4) + \omega(x_5)) &> \frac{1}{2} \cdot \omega(x_0) + \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + \omega(x_4) + \omega(x_5) + \omega(x_6) \\
 \omega(x_0) + \omega(x_1) + \omega(x_4) + \omega(x_6)) &> \frac{1}{2} \cdot \omega(x_0) + \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + \omega(x_4) + \omega(x_5) + \omega(x_6)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons transformer ce problème en un problème de programmation linéaire comme suit :

Fonction d'optimisation : Minimiser $\omega(x_0) + \omega(x_1) + \omega(x_2) + \omega(x_3) + \omega(x_4) + \omega(x_5) + \omega(x_6)$

Sous les contraintes données par le système d'équations donné précédemment.

En utilisant un solveur, nous avons pu déterminer qu'aucun de ces systèmes d'équations n'admet de solutions. Il n'existe donc pas de pondération pour les sommets de ces graphes tel que les composantes connexes qui doivent avoir un poids supérieur à la moitié du poids totale du graphe le soit. Nous pouvons donc conclure que ces graphes sont donc des graphes de la classe PS_1 .

Il existe 5974 graphes planaires, biconnexes à 8 sommets. Là encore nous avons utilisé la même méthode. Après avoir retiré tous les graphes contenant les graphes déjà connus comme mineurs et avoir fait passer sur les graphes qui restaient le $TESTSPS_1$, il nous reste trois graphes donnés par la figure 4.15. Encore une fois, pour chacun des graphes le graphe des conflits donné par notre algorithme, certains noeuds sont associés à des valeurs non-déterminées. Néanmoins, comme pour les cas des graphes à 7 sommets, on peut forcer une

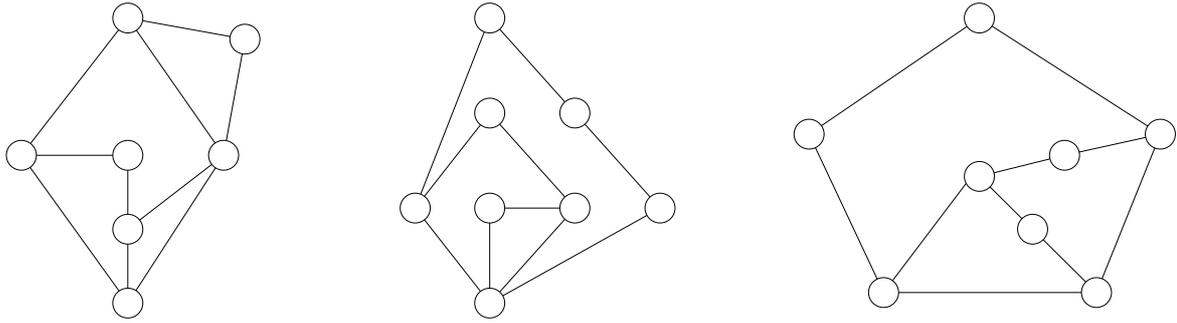


FIG. 4.15 – Ces trois graphes sont les trois graphes à 8 sommets qui restent après le passage du test, et la suppression de ceux admettant un graphe connu pour ne pas être PS_1 comme mineurs.

de ces valeurs de sorte que toutes les composantes soient maintenant associées à la valeur 0 ou à la valeur 1.

Après avoir résolu les systèmes d'équations comme pour les graphes à 7 sommets, il reste un graphe. En effet, pour ce dernier, il existe une pondération possible. Cependant, nous n'avons pas encore montré que ce graphe appartient à la classe PS_1 . En effet, il nous faut montrer qu'il ne peut pas exister de pondération tel qu'il existe un plus court chemin permettant de séparer le graphe. Nous n'avons pas eu le temps de vérifier cette propriété pour ce graphe.

Nous avons également considéré les 71885 graphes planaires et connexes à 9 sommets. Après avoir retiré tous les graphes contenant les mineurs d'ores et déjà connus comme étant exclus pour la classe PS_1 . Il nous reste alors une liste de graphes. Nous avons fait passer à ces graphes le test $TESTSPS_1$. Il nous reste alors une liste de 27 graphes. Nous n'avons cependant pas eu le temps d'écrire les programmes linéaires correspondants à chacun de ces graphes et donc de déterminer si ces graphes sont effectivement dans la classe PS_1 ou non.

Nous avons donc déterminé tous les mineurs exclus pour la classe PS_1 □

En ce qui concerne les graphes à 9 sommets, nous avons appliqué la même méthode. Après cela, il en résultait une liste de 24 graphes. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de les traiter afin de vérifier qu'ils sont de nouveaux mineurs ou bien qu'ils appartiennent à PS_1 . Afin de finir ces calculs, il reste à automatiser la méthode des équations.

Pour les graphes planaires bi-connexes à dix sommets, le temps de calcul est considérablement plus important. Nous n'avons pas eu le temps de la mener à terme avant la fin de la rédaction de ce document.

Nous n'avons donc pas la liste exhaustive des mineurs exclus pour la classe PS_1 . Cependant, nous avons pu déterminer une partie des mineurs pour cette classe. Ils sont donnés dans la figure 4.16. Nous avons néanmoins montré précédemment que cette liste contenait tous les mineurs à 6, 7 et 8 sommets.

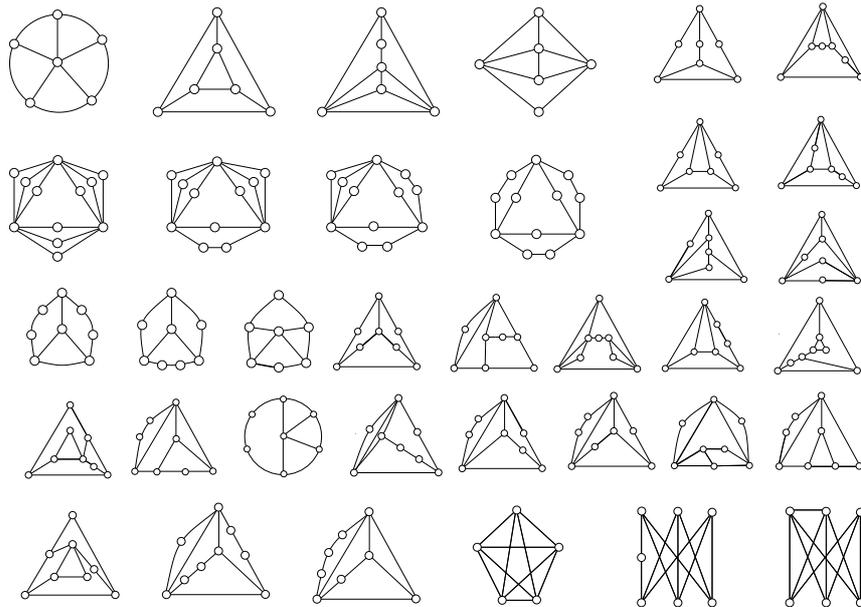


FIG. 4.16 – Cette figure nous donne tous les mineurs connus pour la famille PS_1 .

Pour chacun d'eux, nous pouvons exhiber une fonction de pondération pour laquelle ces graphes n'admettent pas de 1-chemin séparateur.

4.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons étudié plus précisément la famille des graphes PS_1 . Nous avons notamment montré que tous les graphes appartenant à cette famille ont des composantes connexes soit isomorphes au graphe $K_{3,3}$, soit planaires.

Nous avons également montré que plusieurs familles bien connues de graphes telles que les graphes planaires extérieurs ou les globe-graphes sont 1-chemin séparables.

Enfin, nous avons vu dans le chapitre précédent que les familles PS sont closes par mineurs. Nous avons donné ici une liste des mineurs minimaux exclus pour la famille PS_1 . Nous avons entre autres montré que tous les mineurs à au plus 8 sommets appartiennent à la liste qui a été donnée. Nous savons cependant qu'il existe des mineurs à 12 sommets. Tous ces mineurs sont des graphes séries-parallèles. Nous avons conjecturé que tous les mineurs séries-parallèles pour la classe 1-chemin séparables sont connus.

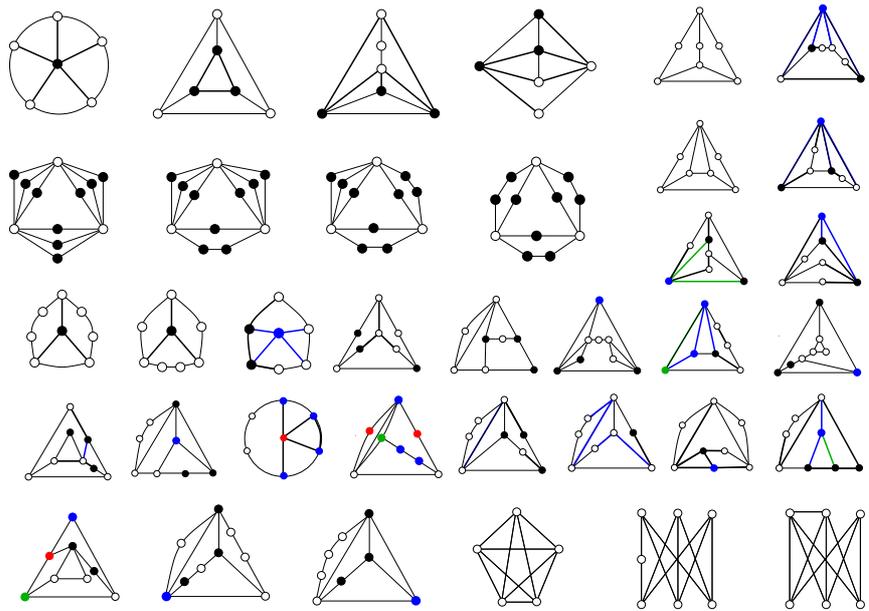


FIG. 4.17 – Cette figure nous donne tous les mineurs connus pour la famille PS_1 avec leur fonction de pondération. Les sommets en blanc reçoivent le poids 1, les sommets en noir le poids 2, les sommets en bleu le poids 3, les sommets en vert le poids 4 et les sommets en rouge le poids 5. Pour les arêtes, nous avons utilisé la même coloration que pour les sommets.

Chapitre 5

De la difficulté de la chemins-séparabilité

5.1 Introduction

La question qui consiste à savoir comment déterminer les séparateurs constitués de plus courts chemins est naturelle. Néanmoins dans ce chapitre, nous montrons que le problème consistant à savoir combien de plus courts chemins sont nécessaires afin de séparer un graphe pondéré est NP-complet.

Plus précisément, nous montrons que ce problème est encore NP-complet même lorsque les graphes sont de largeur arborescente 3. Cela montre qu'on ne pourra pas trouver d'algorithmes permettant de calculer un plus court chemin séparateur utilisant des techniques de programmation dynamique basées sur des décompositions arborescentes.

Les graphes qui sont intéressants, sont ceux qui nécessitent peu de plus courts chemins qui permettent de les séparer. En effet, comme on l'a vu au chapitre 2, la taille des tables de routage qui permettent de router dans un tel graphe dépendent du nombre de plus courts chemins nécessaires. Or, dans ce chapitre, nous allons également montrer que le problème de savoir combien de plus courts chemins sont nécessaires pour séparer le graphe quel que soit la fonction de pondération qui lui est appliquée sur les sommets et les arêtes, est NP-difficile, et ce dans la version classique de la séparation comme dans la version forte. Nous montrons également que ces problèmes appartiennent à la classe de complexité PSPACE.

Pour ce travail, nous avons beaucoup utilisé le livre [GJ79].

5.2 De la difficulté de calculer un 1-chemin séparateur

Comme nous avons vu dans le chapitre 2, un 1-chemin séparateur d'un graphe pondéré (G, ω) est un plus court chemin S dans G tel que $G \setminus S$ est constitué de composantes connexes ayant un poids inférieur ou égal à la moitié de $\omega(G)$.

Dans cette section, nous allons voir que déterminer si un graphe G admet un 1-chemin séparateur est un problème NP-complet.

Théorème 8 *Soit (G, ω) un graphe à pondération entière. Déterminer si (G, ω) possède un 1-chemin séparateur est NP-complet même si ω est unitaire pour les arêtes, G est planaire, de largeur arborescente 3 et de degré maximum 3.*

Ce problème se réduit au problème PARTITION, dont le but est de déterminer si une suite de n entiers strictement positifs peut être partitionnée en deux sous-suites de même somme, problème NP-complet [Kar72].

Soit $A = (a_i)_{i=1}^n$ une instance de PARTITION. On note $\sigma(X) = \sum_{x \in X} x$ la somme des éléments d'une suite X . On transforme l'instance A en une autre B en y ajoutant 4 termes de poids $\sigma(A)$ chacun; $B = (b_i)_{i=1}^{n+4} = (a_1, \dots, a_n, \sigma(A), \sigma(A), \sigma(A), \sigma(A))$. Nous avons donc $\sigma(B) = 5\sigma(A)$. La proposition suivante prouve que A et B sont équivalents.

Proposition 13 *A admet une solution si et seulement si B en admet une.*

Preuve. D'après une solution de A , il nous suffit d'ajouter à chaque part de cette solution deux termes de poids $\sigma(A)$. Nous obtenons donc une solution de B .

De même, les parts de toute solution pour B doivent contenir chacune exactement deux termes de poids $\sigma(A)$, sinon une des deux parts a une somme supérieure ou égale à $3\sigma(A) > \sigma(B)/2$. De cette solution, on peut obtenir une solution pour A en retirant les termes de poids $\sigma(A)$ dans chacune des parts; ce qui conclut la preuve. □

Dans la suite, on utilisera le fait que la suite B ne possède pas deux éléments dont la somme est $\geq \frac{1}{2}\sigma(B)$, ce qui n'est pas forcément vrai pour A .

À partir de B , on construit un graphe planaire pondéré, noté (G_B, ω) , avec $O(n)$ sommets (cf. figure 5.4). Le degré maximum est 3, la largeur arborescente de ce graphe est également de 3.

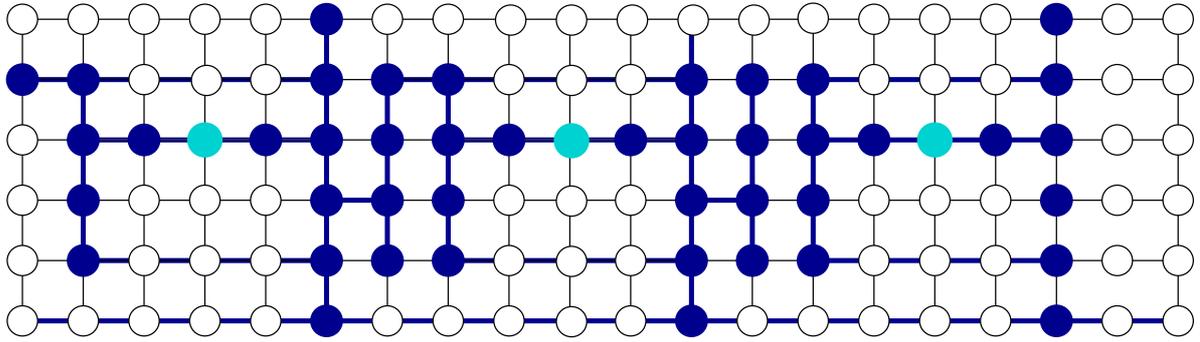
Le graphe G_B est de largeur arborescente (et même de pathwidth) bornée car c'est un mineur d'une grille $6 \times 0(n)$ comme illustré par la figure 5.1.

Pour montrer que sa largeur arborescente est seulement de 3, il suffit de montrer qu'il ne contient aucun des graphes de la figure 5.2 comme mineur.

Les $n + 4$ sommets « centraux » de G_B sont distingués (en noirs sur la figure) et correspondent aux éléments de B . La pondération des arêtes est unitaire, et celle des sommets est nulle sauf pour les sommets centraux où le i -ème sommet a pour poids b_i . Le poids de G_B est donc $\omega(G_B) = \sigma(B)$.

On montre, par le lemme suivant que l'instance B (et donc l'instance A) admet une solution si et seulement si le graphe (G_B, ω) admet un 1-chemin séparateur.

Lemme 9 *L'instance B a une solution si et seulement si l'instance (G_B, ω) qui lui est associée à une solution.*



•

FIG. 5.1 – Cette figure exhibe le fait que le graphe G_B est un mineur de la grille $6 \times 0(n)$. Les sommets en bleu sont les sommets de poids 0 dans le graphe G_B et les sommets en cyan sont les sommets non nuls dans G_B .

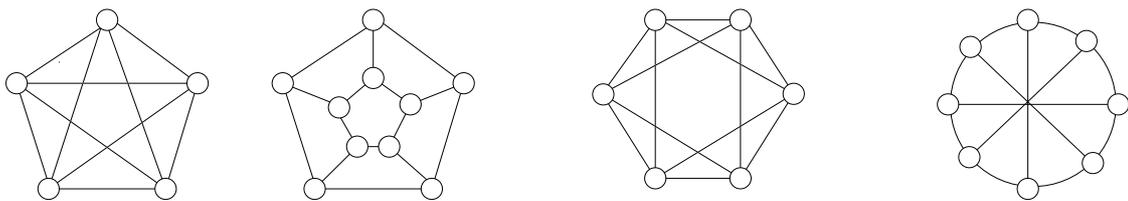


FIG. 5.2 – Cette figure représente tous les mineurs exclus pour les graphes de largeur arborescente 3.

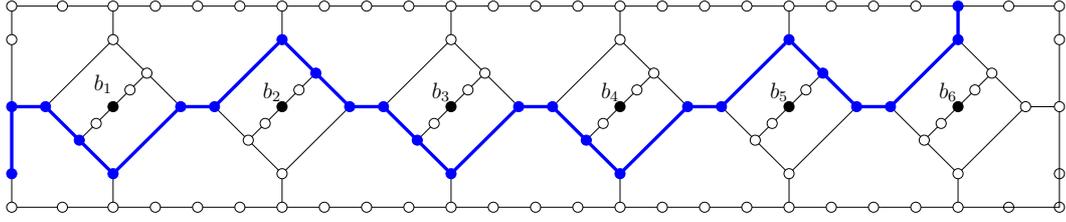


FIG. 5.3 – Construction du graphe G_B à partir de l'instance $B = (b_1, \dots, b_6)$ de PARTITION. Le plus court chemin séparateur (en bleu) correspond à la partition $(b_2, b_5, b_6), (b_1, b_3, b_4)$. D'autres plus courts chemins définissant la même partition sont possibles.

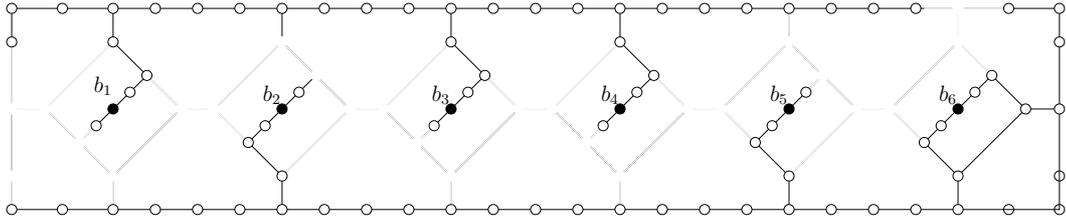


FIG. 5.4 – Sur cette figure, on remarque que le retrait du plus court chemin S permet d'obtenir deux composantes connexes ; chacune ayant un poids inférieur ou égal à la moitié du poids du graphe.

Preuve. Si l'instance B a une solution, il existe un plus court chemin Q traversant tous les carrés centraux de G_B soit par le haut, soit par le bas (cf. figure 5.4). Le chemin Q définit exactement deux composantes connexes, chacune de poids $\frac{1}{2}\sigma(B) = \frac{1}{2}\omega(G_B)$. Donc Q est un demi-séparateur et donc un 1-chemin séparateur.

Soit P un plus court chemin de G_B . On peut vérifier que P divise G_B en au plus deux composantes connexes, et que P contient au plus deux sommets de B . De plus, si P contient au moins un sommet de B , alors $G_B \setminus P$ possède une seule composante connexe, disons C . Dans ce dernier cas, tous les sommets de B , sauf ceux contenus dans P , contribuent au poids de C . Et donc $\omega(C) = \sigma(B) - \omega(P) \geq \sigma(B) - 2\sigma(A) = 3\sigma(A) > \frac{1}{2}\omega(G_B)$. C'est impossible si P est un demi-séparateur. Si P est un demi-séparateur, il suit que $G_B \setminus P$ a exactement deux composantes connexes qui doivent se répartir le poids de G_B . Comme P ne peut contenir de sommets de B , les composantes connexes induisent une partition de B dont la somme de chaque part vaut $\frac{1}{2}\sigma(B)$. Donc l'instance B admet une solution.

On a donc montré que l'instance B (et donc l'instance A) admet une solution si et seulement si le graphe (G_B, ω) possède un 1-chemin séparateur. \square

Nous avons donc montré que le problème k -CHEMINS SÉPARABILITÉ est NP-difficile. Il nous reste à montrer que ce problème appartient à NP. Il est facile de voir cela, puisqu'en ayant le chemin séparateur P , il suffit de vérifier que les composantes connexes de $G \setminus P$

ont un poids d'au plus la moitié du poids du graphe G . Il est clair que cela peut être fait en temps polynomial.

Il est à noter que le problème PARTITION est faiblement complet, c'est-à-dire que la complexité de ce problème dépend du codage de l'entrée. Nous avons donc montré que le problème de trouver un 1-chemin séparateur est également faiblement NP-complet.

5.3 NP-difficulté de CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE

Nous allons maintenant donner des résultats de NP-difficulté. En effet, les théorèmes 9 et 10 prouvent que déterminer si un graphe pondéré est k -chemins séparable ou fortement k -chemins séparable pour un entier k donné.

Nous n'avons cependant pas montré l'appartenance de ces deux problèmes à la classe de complexité NP .

5.3.1 Problème k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE

Nous allons commencer par prouver la NP-difficulté du problème k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE grâce au théorème 9.

Théorème 9 *Soit (G, ω) un graphe à pondération entière et un entier k . Déterminer si (G, ω) est fortement k -chemins séparable NP-difficile.*

Le problème k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE se réduit au problème H -PARTITION défini comme suit.

Définition 11 *Probleme : Un graphe G et un graphe H tel que $|V(H)| \leq 3$.*

Question : *Est-ce que le graphe G peut être couvert avec des sous-graphes induits au graphe H .*

D'après [KH78], ce problème est NP-complet pour tout graphe H fixé ayant au moins trois sommets. Dans toute la suite, nous allons fixer $H = P_3$, un chemin à trois sommets. Nous allons utiliser le fait que si P_3 est un sous-graphe induit de G , alors c'est aussi un plus court chemin de G si tous les poids sur les arêtes sont unitaires.

Soit I_k un graphe à $3(k-1)$ sommets, instance¹ du problème P_3 -PARTITION. À partir de I_k , on construit comme suit le graphe $G(I_k)$ qui définira l'instance du problème k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE.

On crée trois copies disjointes de I_k , disons I_k^1, I_k^2, I_k^3 , et pour chacune d'elles on ajoute trois sommets : x_i, y_i, z_i . Pour chaque $i = 1, 2, 3$, on connecte le sommet z_i à x_i, y_i , et à

¹Sans perte de généralité, le problème reste NP-complet même si l'on suppose que le nombre de sommets de l'instance est un multiple de trois, puisque sinon I_k est trivialement fausse.

tous les autres sommets de I_k^i , et on note G_i ce graphe. Finalement, on forme un graphe biparti complet entre les sommets de G_1 et de G_2 , puis entre ceux de G_2 et de G_3 . Le graphe résultant est le graphe $G(I_k)$ (voir la figure 5.5 pour un exemple). Il possède $9k$ sommets.

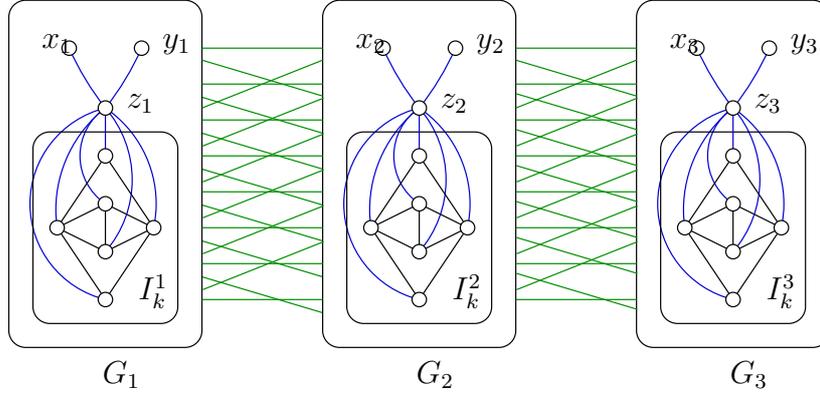


FIG. 5.5 – Construction du graphe $G(I_k)$ à partir de l'instance I_k avec $k = 3$. Il y a un biparti complet entre $V(G_1)$ et $V(G_2)$, et $V(G_2)$ et $V(G_3)$ (toutes les arêtes ne sont pas représentées). Ce graphe est fortement 3-chemin séparable.

La pondération de $G(I_k)$ est unitaire pour les sommets et les arêtes, *i.e.* qu'on pose $\omega(e) = \omega(v) = 1$ pour toute arête e et sommet v de $G(I_k)$. Il est facile de vérifier que $G(I_k)$ est de diamètre deux (z_2 est connecté à tous les sommets du graphe). Une autre propriété de $G(I_k)$ est liée au fait que chaque sommet de G_2 est connecté à tous ceux de $G_1 \cup G_3$: pour tout sous-graphe induit H de $G(I_k)$ ne contenant pas tous les sommets de G_2 , $G(I_k) \setminus S$ est composée d'une seule composante connexe de $9k - |V(H)|$ sommets.

On a deux parties à démontrer pour prouver la réduction :

Lemme 10 *Si $(G(I_k), \omega)$ est fortement k -chemins séparable, alors I_k est vraie.*

Preuve. Par simplicité, on notera $G = G(I_k)$. Si G est fortement k -chemin séparable, alors G possède un k -chemin séparateur fort S . L'ensemble S est composé de k plus courts chemins de G , et les composantes connexes de $G \setminus S$ doivent comprendre au plus $\frac{1}{2}\omega(G) = 4.5k$ sommets. Comme G est de diamètre 2, chaque plus court chemin du séparateur utilise au plus trois sommets de S , donc $|S| \leq 3k$.

Si S ne contient pas tous les sommets de G_2 , alors $G \setminus S$ est composé d'une seule composante connexe de $9k - |S| \geq 6k > \frac{1}{2}\omega(G)$. Ceci contredit le fait que S est un demi-séparateur.

Donc S contient tous les sommets de G_2 . Comme $|V(G_2)| = 3k$ et que $|S| \leq 3k$, on a de fait $S = V(G_2)$ et donc $|S| = |V(G_2)| = 3k$. Deux chemins de S ne peuvent avoir de sommets en commun, sinon $|S| < 3k$. Ainsi S induit une partition de G_2 en sous-graphe induits (tout plus court chemin doit être un chemin induit) isomorphes à P_3 . Comme dans

G_2 , les sommets x_2 et y_2 sont de degré 1, un seul et même plus court chemin de longueur deux peut les couvrir, celui passant par z_2 , qui est le seul plus court chemin possible. Ainsi les $k - 1$ autres chemins de S forment une partition de $G_2 \setminus \{x_2, y_2, z_2\} = I_k^2$ en P_3 . Donc l'instance I_k est vraie. \square

Lemme 11 *Si I_k est vraie, alors $(G(I_k), \omega)$ est fortement k -chemins séparable.*

Preuve. Par simplicité, on notera $G = G(I_k)$. Si I_k est vraie, alors il existe une partition des sommets de chaque I_k^i en $k - 1$ chemins induits, notés Q_1^i, \dots, Q_{k-1}^i , chacun de longueur 3. Pour montrer que G est fortement k -chemin séparable, il faut montrer que tout sous-graphe induit H de G possède un k -chemin séparateur fort. Si H n'est pas connexe, il suffit de montrer que sa composante connexe la plus lourde possède un demi-séparateur, puisqu'à part celle-ci, les autres composantes ont un poids $\leq \frac{1}{2}\omega(H)$. Donc sans perte de généralité, on supposera H connexe.

On va noter $S = V(H)$, et $S_i = S \cap V(G_i)$. On va d'abord montrer que l'un des S_i est un demi-séparateur de H . Sans perte de généralité, supposons que $|S_1| \leq |S_3|$. Notons que $H \setminus S_2$ contient au moins deux composantes connexes, une induite par S_1 et une autre par S_3 . Par contre, si $S_2 \neq \emptyset$, $H \setminus S_1$ (et similairement $H \setminus S_3$) est composé d'une seule composante connexe, celle induite par $S_2 \cup S_3$ (resp. $S_2 \cup S_1$).

Si S_2 n'est pas un demi-séparateur, alors $|S_3| > \frac{1}{2}|S| \geq |S_1| + |S_2|$. D'autre part, si S_3 n'est pas un demi-séparateur, c'est que $|S_1| + |S_2| > \frac{1}{2}|S| \geq |S_3|$. Donc soit S_2 , soit S_3 est un demi-séparateur.

On note S_j le demi-séparateur de H . Reste à montrer que S_j peut être couvert par au plus k plus court chemins de H , et donc la suppression de ces derniers éliminera au moins tous les sommets de S_j .

Les sommets de $S_j \cap I_k^j$ sont couverts comme suit : chaque chemin Q_t^j qui partitionnent I_k^j contient au plus trois sommets de S_j . Si Q_t^j contient un seul sommet, on l'utilise comme plus court chemin trivial. S'il contient deux sommets u, v , alors on considère un plus court chemin de H les connectant (c'est possible car H est connexe). Enfin si Q_t^j contient trois sommets, on utilise Q_t^j . C'est un plus court chemin de H puisque Q_t^j et H sont tous les deux des sous-graphes induits de $G(I_k)$ (les extrémités du chemin Q_t^j ne peuvent être adjacentes dans G et donc dans H). Comme les chemins Q_t^j couvrent tous les sommets de I_k^j , on a donc couvert tous les sommets de $S_j \cap I_k^j$ avec au plus $k - 1$ plus courts chemins de H .

Reste à couvrir les sommets de $S_j \setminus I_k^j$. Il y en a au plus trois : x_j, y_j, z_j . De la même façon, s'il y en a un seul, on l'utilise comme plus court chemin trivial. S'il y en a deux, on choisit un plus court chemin de H les connectant (c'est possible puisque H est connexe). Et si les trois sommets existent, on utilise le chemin $x_j - z_j - y_j$: c'est un plus court chemin de H car x_j et y_j ne sont pas adjacents.

Au total, k plus courts chemins de H suffisent à séparer H en composantes connexes de poids $\leq \frac{1}{2}\omega(H)$. Donc, G est fortement k -chemin séparable. \square

5.3.2 NP-difficulté de CHEMINS SÉPARABILITÉ

Nous allons maintenant prouver avec le théorème 10 que le problème k -CHEMINS SÉPARABILITÉ est également NP-difficile.

Théorème 10 *Soit (G, ω) un graphe à pondération entière et un entier k . Déterminer si (G, ω) est k -chemins séparable NP-difficile.*

Preuve. Le problème k -CHEMINS SÉPARABILITÉ se réduit également à P_3 -PARTITION définie dans la sous-section précédente 11. La réduction associe à toute instance I_k de P_3 -PARTITION avec $3(k-1)$ sommets, on construit un graphe $G'(I_k)$ qui sera l'instance de k -CHEMINS SÉPARABILITÉ. Le poids des sommets de des arêtes de I_k est unitaire. Comme précédemment on considère trois copies de I_k , I_k^1, I_k^2, I_k^3 . Pour chaque I_k^i on ajoute une clique K_i de $3k-2$ sommets. Les sommets de K_i sont notés v_1^i, \dots, v_{3k-2}^i . Le poids de l'arête $e_{j,t}^i$ entre v_j^i et v_t^i est $\omega(e_{j,t}^i) = |j-t|$. Un biparti complet est formé entre les sommets de K_i et de I_k^i . Ces dernières arêtes ont un poids unitaire, et on note G'_i ce graphe. Finalement, on forme un graphe biparti complet entre les sommets de G'_1 et de G'_2 , puis entre ceux de G'_2 et de G'_3 . Chaque arête e de ces bipartis dont les extrémités sont deux sommets appartenant à différentes cliques K_i reçoit le poids $\omega(e) = \lceil 1.5k \rceil$, les autres reçoivent un poids unitaire. \square

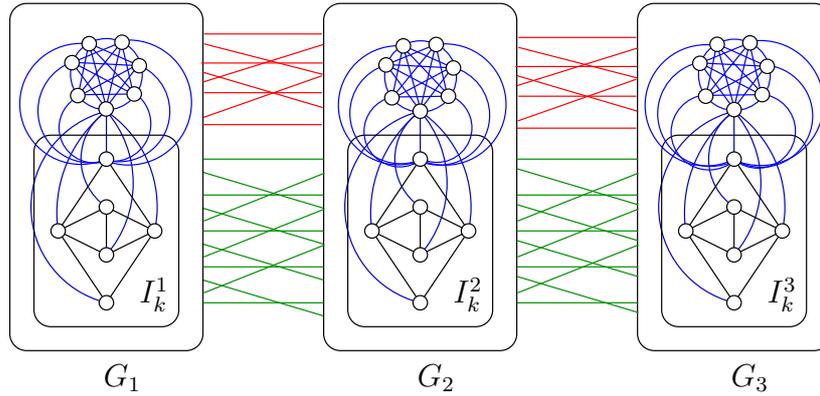


FIG. 5.6 – Construction du graphe $G(I_k)$ à partir de l'instance I_k avec $k = 3$. Il y a un biparti complet entre $V(G_1)$ et $V(G_2)$, et $V(G_2)$ et $V(G_3)$ (toutes les arêtes ne sont pas représentées). Ce graphe est fortement 3-chemin séparable.

Le graphe pondéré résultant est le graphe $(G'(I_k), \omega)$ (voir la figure 5.6 pour un exemple). Il possède $18k - 15$ sommets ce qui correspond à aussi à son poids.

La réduction est prouvée en deux temps avec les lemmes 12 et 13.

Lemme 12 *Si $(G'(I_k), \omega)$ est k -chemins séparable alors I_k est vraie.*

Preuve. Par simplicité, on notera $G = G'(I_k)$. Si G est k -chemins séparable, alors G possède un k -chemins séparateur $S = S_1 \cup \dots \cup S_q$ tel que chaque S_i est l'union de k_i plus courts chemins de $G \setminus \bigcup_{j < i} S_j$.

On peut remarquer dans un premier temps que si le séparateur S contient tous les sommets de G_1 et de G_3 , alors $G \setminus S$ a un poids inférieur à la moitié du poids de G . On va montrer que si S n'est pas constitué de tous les sommets de G_1 et de G_3 , alors si S ne contient pas tous les sommets de G_2 , alors $G \setminus S$ est composé d'une seule composante connexe de $18k - 15 - (5k + 3k - 2)$ sommets.

On peut vérifier que le diamètre du graphe G vaut 5. Ce diamètre est réalisé par le plus court chemin entre un sommet de K_1 et un sommet de K_3 . Tout plus court chemin entre ces deux sommets passe par un sommet de chacun des I_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$. En effet, la pondération donnée précédemment, induit le fait qu'une arête entre un sommet de K_1 et un sommet de I_2 est un plus court chemin. Comme il existe un biparti complet entre K_1 et I_1 ainsi qu'entre I_1 et I_2 ; I_2 et I_3 et entre I_3 et K_3 , la seule manière d'augmenter le diamètre de G est de retirer tous les sommets d'un de ces 5 ensembles. Chacun de ces ensembles possèdent au moins $3k - 3$ sommets. Il nous faut donc, pour retirer tous les sommets d'un des ces ensembles au moins $k - 1$ plus courts chemins. Donc $V(S) \leq 5(k - 1) + 3k - 2$. Donc, si il reste un sommet dans G_2 , nous obtenons une composante connexe de poids $|V(G)| - |S| \geq 18k - 15 - (5k + 3k - 2) > \omega(G)/2$.

Donc S contient tous les sommets de G_2 . Avec des arguments similaires à précédemment, on montre que pour couvrir tous les sommets de I_2 , on doit utiliser $k - 1$ plus courts chemins distincts, dont tous les sommets appartiennent à I_2 .

Le dernier chemin doit retirer tous les sommets restants de K_2 . On peut commencer par remarquer que les arêtes qui sortent de cette clique, possèdent un poids de $1,5k$ puisqu'il n'y a plus de sommets dans I_2 . Un chemin entre deux sommets de la clique qui passeraient par un sommet extérieur à cette clique auraient donc un poids minimum de $3k$. Or, d'après la construction que l'on a donnée, il existe un chemin de longueur maximale $3k - 2$ dans la clique, passant par tous les sommets de la clique. Ce chemin est donc un plus court chemin.

Les $k - 1$ premiers chemins donnent donc une partition de I_k en sous-graphes isomorphes à P_3 . Donc l'instance I_k admet une solution. □

Lemme 13 *Si I_k est vraie alors $(G'(I_k), \omega)$ est k -chemins séparable.*

Preuve. Par simplicité, on notera $G = G'(I_k)$. Si I_k est vraie, alors il existe une partition des sommets de chaque I_k^i en $k - 1$ chemins induits, notés Q_1^i, \dots, Q_{k-1}^i , chacun de longueur 3. Pour montrer que G est k -chemins séparable, il faut montrer que tout sous-graphe induit H de G possède un k -chemins séparateur. Pour les mêmes raisons que dans la preuve du lemme 11, on supposera que H est connexe.

On va noter $S = V(H)$, et $S_i = S \cap V(G_i)$. Remarquons que, que comme dans le lemme 11, $H \setminus S_2$ contient deux composantes connexes, une induite par S_1 et une autre par S_3 . De plus,

$H \setminus S_1$ (et similairement $H \setminus S_3$) est composé d'une seule composante connexe, celle induite par $S_2 \cup S_3$ (resp. $S_2 \cup S_1$). Par conséquent un des S_i est un demi-séparateur.

On note S_j le demi-séparateur de H . Reste à montrer que S_j peut être couvert par au plus k plus courts chemins (pas nécessairement de H), et donc la suppression de ces derniers éliminera au moins tous les sommets de S_j .

Similairement au lemme 11, les sommets de $S_j \cap I_k^j$ sont couverts comme suit : chaque chemin Q_t^j qui partitionnent I_k^j contient au plus trois sommets de S_j . Si Q_t^j contient un seul sommet, on l'utilise comme plus court chemin trivial. S'il contient deux sommets u, v , alors on considère un plus court chemin de H les connectant (c'est possible car H est connexe). Enfin si Q_t^j contient trois sommets, on utilise Q_t^j . C'est un plus court chemin de H puisque Q_t^j et H sont des sous-graphes induits (les extrémités du chemin Q_t^j ne peuvent être adjacentes dans G et donc dans H). Comme les chemins Q_t^j couvrent tous les sommets de I_k^j , on a donc couvert tous les sommets de $S_j \cap I_k^j$ avec au plus $k - 1$ plus courts chemins de H .

Soit $Q = \bigcup_{l=1}^{k-1} Q_l^j$. Il nous reste alors un plus court chemin pour retirer tous les sommets de $(K_j \cap S_j) \setminus Q$. Cet ensemble induit une clique K . On considère le chemin P construit en passant par tous les sommets v_t^j de K dans l'ordre croissant de leur indice t . D'après la valuation des arêtes de K , P est un plus court chemin de K . Sa longueur est $\leq 3k - 3$. C'est aussi un plus court chemin de $G \setminus Q$. En effet, toute arête qui n'est pas dans K , incidente à un sommet de K a un poids de $\lceil 1, 5k \rceil$. Par conséquent, tout chemin entre deux sommets de K utilisant un sommet n'appartenant pas à K_j a un coût supérieur ou égal à $3k$, ce qui est plus grand que la longueur de P . Nous pouvons donc tous les retirer avec P .

Ainsi, les chemins Q_l^j et P forment un k -chemins séparateur de H . Donc nous avons si I_k admet une solution, G est k -chemins séparable. \square

Les lemmes précédents montrent donc que les problèmes k -CHEMINS SÉPARABILITÉ et k -CHEMINS SÉPARABILITÉ FORTE sont NP-difficiles. Cependant, pour le moment, nous ne savons pas si ces problèmes appartiennent à la classe de complexité NP ou non. On pense cependant qu'ils sont dans la classe PSPACE, ce qui peut être un premier pas pour montrer que ces problèmes sont encore plus difficiles comme PSPACE-complet.

Il reste cependant des questions en suspens. En effet, le fait que le théorème 8 puisse être obtenu avec des poids unitaires reste une question ouverte. Nous ne savons pas non plus si ces problèmes ne sont pas plus simples si l'on se cantonne aux graphes planaires et aux fonctions de pondération unitaires .

Conclusion

Dans ce document nous avons étudié les graphes k -chemins séparables d'un point de vue structurel et d'un point de vue algorithmique.

Nous avons vu que les graphes planaires sont connus pour être 3-chemins séparables. Dans ce document, nous avons identifié une grande sous-famille de cette classe de graphes qui sont 2-chemins séparables. Nous n'avons cependant pas résolu la conjecture 1.

Conjecture 1 *Les graphes planaires appartiennent à la famille PS_2 .*

Or, le nombre de plus courts chemins nécessaires à la séparation des graphes influe la complexité pour beaucoup d'algorithmes. Il est donc intéressant de prouver (ou infirmer) cette conjecture.

Si cette conjecture est infirmée, alors il existe des graphes planaires qui ne sont pas 2-chemins séparables. Nous savons que pour les quatre premiers entiers, les grilles $p * i$ sont séparables par au plus 2 plus courts chemins. Il pourrait cependant être intéressant de répondre à la question suivante.

Question 1 *Déterminer le plus grand entier p tel que la grille $p * n$ est 2-chemins séparables.*

Notons que si p n'est pas borné, alors la question de la 2-chemins séparabilité des graphes planaires serait prouvée puisque toutes les grilles seraient 2-chemins séparables. Or, tous les graphes planaires sont mineurs d'une grille et d'après le théorème 5 nous savons que cette propriété est close par mineurs.

Nous avons également donné des relations entre la CHEMINS SÉPARABILITÉ et d'autres caractéristiques des graphes tel que le nombre de sommets ou encore la largeur arborescente. Il pourrait être aussi intéressant de regarder si des relations existent avec d'autres caractéristiques telles que le nombre de « Cop And Robber ».

Dans le chapitre 3, nous avons donné une liste de mineurs pour la famille des graphes séparables par un plus court chemin quel que soit la valuation des sommets et des arêtes. Néanmoins, nous n'avons pas obtenu la liste complète de ces mineurs mais uniquement 35. La question suivante est donc intéressante.

Question 2 *Combien existe-t-il de mineurs pour la famille PS_1 ?*

Nous avons également présenté une méthode nous aidant à obtenir ces mineurs. Nous n'avons pas eu le temps nécessaire pour poursuivre l'analyse sur des graphes ayant plus de neuf sommets. Il pourrait être intéressant de poursuivre cette analyse afin de compléter la liste des mineurs ainsi que de trouver les mineurs pour les autres classes PS_k .

De plus la méthode que nous avons présenté ici donne des faux-négatifs. Nous avons toutefois vu qu'en utilisant un solveur, nous pouvons résoudre certains de ces cas. Une des améliorations intéressante serait d'intégrer ce traitement dans notre algorithme. Nous pourrions alors avoir des résultats plus précis.

Dans le dernier chapitre de ce document, nous avons montré que déterminer si un graphe admet un 1-chemin séparateur est un problème NP-complet. Nous avons également montré que déterminer si un graphe est k -chemins séparable ou même fortement k -chemins séparable ou un k donné est NP-difficile. La question reste cependant ouverte quand l'entier k n'appartient pas à l'instance du problème. Il pourrait être intéressant de traiter ce problème. De plus, dans le cas, où il serait montré que ces derniers problèmes sont polynomiaux, il serait intéressant de chercher des algorithmes FPT pour ces problèmes.

Bibliographie

- [ACP87] Stephan Arnborg, Derek G. Corneil, and Andrzej Proskurowski. Complexity of finding embeddings in a k-tree. In *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, volume 8, pages 277–284, 1987.
- [AG06] Ittai Abraham and Cyril Gavoille. Object location using path separators. In *25th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC)*, pages 188–197. ACM Press, July 2006.
- [CDE⁺08] Victor D. Chepoi, Feodor F. Dragan, Bertrand Estellon, Michel Habib, and Yann Vaxès. Diameters, centers and approximating trees of delta-hyperbolic geodesic spaces and graphs. In *24th Annual ACM Symp. on Computational Geometry (SoCG)*, pages 59–68, 2008.
- [CLRS02] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction à l'algorithmique*. Dunod, 2002.
- [DG07] Yon Dourisboure and Cyril Gavoille. Tree-decompositions with bags of small diameter, 2007.
- [DG10a] Emilie Diot and Cyril Gavoille. Path separability of graphs. In *4th International Frontiers of Algorithms Workshop (FAW)*, pages 262–273. Lecture Notes in Computer Science, 2010.
- [DG10b] Emilie Diot and Cyril Gavoille. Path separability of graphs. Technical report, LaBRI, University of Bordeaux, 2010.
- [FG96] Pierre Fraigniaud and Cyril Gavoille. Local memory requirement of universal routing schemes. In *8th Annual ACM Symp. on Parallel Algorithms and Architectures (SPAA)*, pages 183–188. ACM Press, 1996.
- [FG01] Pierre Fraigniaud and Cyril Gavoille. Routing in trees. In *28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, volume 2076 of Lecture Notes in Computer Science, pages 757–772. Springer, July 2001.
- [FG06] Jörg Flum and Martin Grohe. Parametrized complexity theory. Springer, 2006.
- [FL] Paola Flocchini and Flaminia L. Luccio.
- [GJ79] Michael R. Garey and David S. Johnson. Computers and intractability - a guide to the theory of np-completeness. W.H. Freeman, 1979.
- [GP] Cyril Gavoille and Stéphane Pérennès. Memory requirement for routing in distributed networks. In *15th Annual ACM Symp. on Principles of Distributed Computing (PODC)*, pages 125–133. ACM Press.

- [GY04] Jonathan L. Gross and Jay Yellen. *Handbook of Graph Theory*. CRS PRESS, 2004.
- [Kar72] Richard Karp. Reducibility among combinatorial problems, 1972.
- [KH78] David G. Kirkpatrick and Pavol Hell. On the complexity of a generalized matching problem. In *10th Annual ACM Symp. on Theory of Computing*, pages 240–245, May 1978.
- [Kur30] Kazimierz Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930.
- [Lai04] Kofi A. Laing. Brief announcement : Name-independent compact routing in trees. In *23rd Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC)*, page 382. ACM Press, July 2004.
- [LT79] Richard J. Lipton and Robert Endre Tarjan. A separator theorem for planar graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 36(2) :177–189, 1979.
- [RS86] Neil Robertson and Paul Seymour. Graphs minor v. excluding a planar graph, 1986.
- [Tho04] Mikkel Thorup. Compact oracles for reachability and approximate distances in planar digraphs. *Journal of the ACM*, 51(6) :993–1024, November 2004.
- [UY09] Kaori Umezawa and Koichi Yamazaki. Tree-length equals branch-length, 2009.
- [Wag] Klaus Wagner. *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*, volume 1. Mathematische Annalen.