

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Spécialité

Mathématiques Appliquées

Présentée par

Pierre-Elie NORMAND

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Bordeaux

Sujet de la thèse

**APPLICATION DE MÉTHODES D'ORDRE ÉLEVÉ EN
ÉLÉMENTS FINIS POUR L'AÉRODYNAMIQUE**

Soutenue le 15 décembre 2011 en présence du jury composé de :

M. Rémi ABGRALL	Directeur de thèse
M. Frédéric CHALOT	Examineur
M. Christophe CORRE	Rapporteur
M. Yann DOUTRELEAU	Examineur
M. Hervé GUILLARD	Rapporteur
M. Luc MIEUSSENS	Président
M. Mario RICCHIUTO	Examineur

Remerciements

Il n'y a pas de thèse sans dilemmes, sans sociétés, sans opinions et surtout sans antécédents, ni besoins.

Une thèse, ce n'est pas une accumulation de connaissances, c'est la volonté d'en faire quelque chose, peu importe le volume.

Sans accompagnement, sans ligne directrice et sans un avis une thèse n'est rien.

C'est à ce titre que je voudrais remercier la Direction générale de l'armement pour avoir la perspicacité de délivrer des bourses conjointement avec les entreprises afin de faire progresser le savoir-faire et la compétence.

L'équipe de l'université de Bordeaux, de l'INRIA et mon directeur de thèse pour les informations qu'ils ont pu m'apporter et me distiller, sans que j'en vienne à "rompre l'os et sucer la substantifique moelle".

Le service d'aérodynamique avancée de *Dassault Aviation*, pour m'avoir donné l'opportunité de faire cette recherche, m'avoir dispensé leur expérience et m'avoir fait confiance.

Enfin, à toutes les personnes qui ont répondues à mes questions, soulevées des problèmes, accompagnées une réflexion, pris un café avec moi, m'ont fait rire pendant ces années.

Et surtout à celle qui est garant de mon équilibre mental et qui me rend heureux.

A tous, Merci.

Table des matières

Introduction	9
Contexte et motivation	9
Cadre de la thèse	10
Objectifs de l'étude	11
1 Méthodes numériques	13
1.1 Problème général	13
1.1.1 Définitions	13
1.1.2 Subdivision continue de Ω	14
1.1.3 Problème discret et estimation d'erreur a priori	17
1.2 Schémas numériques et formulation algébrique	20
1.2.1 Problème linéaire d'advection, diffusion, réaction avec terme source	20
1.2.2 Formulation variationnelle	20
1.2.3 La méthode "streamline diffusion" : Streamline Upwind <i>Petrov-Galerkin</i> SUPG	22
1.2.3.1 Le principe de la méthode	22
1.2.3.2 Discussion sur le paramètre τ	23
1.2.4 Schéma de distribution du résidu (RDS)	33
1.3 Calcul des intégrales	37
1.3.1 Dérivée dans le domaine physique	37
1.3.1.1 Dérivée première dans le domaine physique K	37
1.3.1.2 Dérivée seconde dans le domaine physique K	38
1.3.2 Calcul intégral sur les éléments	38
1.3.3 Evaluation du degré des intégrales	39
1.3.4 Calcul intégral approché : Règles d'intégration	41
1.4 Conclusion	43
2 Aérodynamique	45
2.1 Equations des fluides	45
2.1.1 <i>Navier-Stokes</i>	45
2.1.2 Variables entropiques.	48
2.1.3 Equations du mouvement : <i>Euler</i>	49
2.1.4 Formulation variationnelle SUPG et GLS	50
2.1.4.1 Méthode résidu pondéré	50
2.1.4.2 Méthode de <i>Galerkin</i>	50
2.1.4.3 Terme SUPG et GLS	50
2.1.4.4 Terme de capture de chocs	51
2.1.4.5 Méthode complète : GLS avec capture de chocs	51
2.1.4.6 Traitement du terme temporel	51
2.1.5 Formulation faible discrétisée	52

2.2	Modélisation de la turbulence	53
2.3	Equations moyennées	54
2.3.1	Equations k- ϵ	55
2.3.2	Equations Spalart-Allmaras	55
2.4	Résolution des équations en couplage faible	56
2.5	Conclusion	57
3	Eléments et Maillages	59
3.1	Notions préliminaires	59
3.1.1	Espaces de polynômes	59
3.1.2	Produit de fonctions	60
3.1.2.1	Dérivées d'un produit de fonctions	60
3.1.2.2	Dérivées d'un produit de fonctions linéaires	60
3.1.3	Numérotation des noeuds	61
3.2	Description des éléments implémentés dans LEA	62
3.2.1	Implémentation générique des éléments	62
3.2.2	Fonctions d'interpolation générale en dimension d	63
3.2.2.1	Fonctions d'interpolation de <i>Lagrange</i> et de <i>Bernstein</i> sur un d-Hypercube à noeuds équidistants	63
3.2.2.2	Fonctions d'interpolation de <i>Lagrange</i> et de <i>Bernstein</i> sur un d-Simplexe à noeuds équidistants	65
3.2.2.3	Positivité des éléments iso-paramétriques dans un cadre général	67
3.2.2.4	Réciproque de la transformation géométrique et projection	67
3.2.3	Eléments implémentés	69
3.2.3.1	Élément 1D	69
3.2.3.2	Triangle (P)	71
3.2.3.3	Quadrangle (Q)	72
3.2.3.4	Tétraèdre (P)	72
3.2.3.5	Héxaèdre (Q)	73
3.2.3.6	Prisme (T)	74
3.3	Calcul approché de fonctions et de gradients de fonctions	76
3.3.1	Vérification de l'estimation d'erreur a priori	76
3.3.2	Commentaires	79
3.3.2.1	Effet de l'erreur numérique	79
3.3.2.2	Destruction de l'ordre pour des transformations géométriques particulières	82
3.3.3	Cas des éléments très allongés	82
3.3.4	Reconstruction de gradient	86
3.3.4.1	Reconstruction sur une cellule	86
3.3.4.2	Reconstruction sur un élément	90
3.4	Erreur d'interpolation par changement de variables	91
3.4.1	Interpolation de solution pour le post-processing	94
3.5	Création de maillage d'ordre élevé	95
3.5.1	Les outils de création de maillage	96
3.5.2	Stratégie de déformation	98
3.5.2.1	Equations de l'élasticité linéaires	98
3.5.2.2	Formulation faible	99
3.5.3	Cas tests	99
3.5.3.1	Géométries	99
3.5.3.2	Résultats	101

3.5.4	Discussion sur la réussite de la méthode	103
3.6	Conclusion	105
4	Résultats et analyses	107
4.1	Calcul numérique : Calcul de haute performance	107
4.2	Estimation de l'efficacité numérique	111
4.3	Cas académique	113
4.3.1	Solution exacte	114
4.3.2	Advection de choc et de profil	115
4.3.3	Bilan	116
4.4	Cas <i>Euler</i> 2D	117
4.4.1	NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2°	117
4.4.2	NACA0012, Mach=0.8, angle d'attaque 2°	118
4.4.3	Effet du facteur τ de la méthode SUPG	120
4.5	Cas <i>Euler</i> 3D	121
4.5.1	Sphère Mach 0.35, angle d'attaque 0°	121
4.5.2	Aile M6 Mach 0.6, angle d'attaque 2°	123
4.6	Bilan cas <i>Euler</i>	127
4.7	Cas <i>Navier-Stokes</i> 2D	128
4.7.1	NACA0012, Mach=0.50, angle d'incidence= 2° , Reynolds=5000	128
4.8	Cas <i>Navier-Stokes</i> 2D instationnaire	132
4.9	Cas <i>Navier-Stokes</i> avec modèle de turbulence	134
4.9.1	RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$	135
4.9.2	Géométries complexes. Navier-Stokes 3D avec modèle de turbulence	142
4.10	Bilan cas <i>Navier-Stokes</i> avec modèle de turbulence	143
4.11	Conclusion	145
	Conclusion	147
	Bibliographie	150

Introduction

Contexte et motivation

Les méthodes numériques sont devenues un enjeu majeur dans le monde industriel. Elles sont le reflet d'une volonté d'idéalisation mathématique des phénomènes, traduisent le besoin croissant de prédiction et entrent en parfaite adéquation avec une société de service et de conseil qui recherche la valeur ajoutée dans l'optimisation de l'existant.

Mathématiquement, elles sont un paradis de diversité. Elles nous font traverser les méthodes d'approximation, les équations aux dérivées partielles, la topologie, la géométrie différentielle, l'étude des systèmes dynamiques, l'algèbre linéaire et la résolution des systèmes qui en découlent... Mais elles seraient encore balbutiements sans l'informatique et les mathématiques discrètes, l'algèbre de Boole, la théorie des graphes, les interpréteurs, les compilateurs, la théorie des réseaux... Enfin elles resteraient vides de sens si les multiples problèmes à résoudre ne germaient pas dans le terrain fertile des domaines comme la biologie, la physique, la finance, ou plus anecdotiquement la sociologie ou l'archéologie.

Les équations différentielles trouvent un cadre d'étude théorique dans la théorie des distributions et des espaces de Sobolev. Ces théories permettent de statuer quant à l'appartenance des fonctions solutions de l'équation à certains espaces. Ce décor étant posé, la problématique de l'obtention de la fonction solution reste entière.

La recherche de méthodes permettant la résolution des équations aux dérivées partielles a créé deux grandes classes : la méthode des éléments finis et celle des volumes finis. Ces méthodes reposent sur un socle commun : la discrétisation d'une fonction grâce à un nombre fini d'"informations" que nous nommons de façon générale les degrés de liberté. Elles se distinguent alors par des "schémas numériques" différents.

De manière générale on nomme "schéma numérique" la formulation algébrique d'un problème discret. Cette formulation algébrique n'est donc évidemment pas unique et chaque schéma comporte des propriétés variées (décentré, positivité, stabilité, linéarité,...) qu'il est nécessaire de connaître avant d'aborder la résolution d'un problème.

Cette thèse se focalise sur la discrétisation des équations d'*Euler*, de *Navier-Stokes* ainsi que sur de multiples équations de modélisation de la turbulence. Ces équations différentielles ont des structures analogues à savoir qu'elles contiennent toutes des termes d'advection, de diffusion, de réaction et parfois des termes sources. Elles sont, de plus, toutes non-linéaires, ce qui implique un processus itératif coûteux et par extension des temps de calcul prohibitifs. Or, dans le contexte industriel la problématique principale est d'obtenir des solutions qui sont dans un intervalle de confiance suffisant pour être exploitées et dans un temps en accord avec les demandes d'un projet.

De ce constat on en déduit qu'il est nécessaire de chercher les critères et les méthodes permettant d'obtenir le meilleur ratio qualité/temps. Cette démarche touche des problématiques extrêmement variées, il en va du placement des degrés de liberté ainsi qu'à leur quantité, à la discrétisation des modèles géométriques en passant par les schémas numériques employés. En gardant à l'esprit ces composantes, l'attention peut être portée sur la possibilité de discrétiser

l'information continue par des fonctions élémentaires polynômiales de degré plus grand que 1.

Cadre de la thèse

L'idée de l'amélioration de l'approximation d'une fonction par projection sur une base polynomiale de degré croissant est ancienne et elle trouve toute sa justification dans le domaine de la simulation numérique. En effet, on cherche à approximer au mieux la solution d'une équation différentielle en la cherchant dans des espaces de fonctions polynomiales par morceaux.

Toute l'alchimie de ce processus consiste à trouver l'équilibre entre complexité d'application, mise en place numérique, efficacité, tout en gardant en mémoire qu'une solution linéaire ne sera jamais mieux approximée que par un polynôme de degré 1.

De plus l'application de méthodes d'ordre élevé ainsi que l'utilisation d'éléments de *Lagrange*, d'*Hermite* et *Argyris* a été largement appliquée dans le domaine des structures.

En revanche, dans le cadre de la mécanique des fluides leur essort reste encore timide. Une des raisons est la dominance des méthodes de type volume fini dont l'avantage principale est l'aspect conservatif de la méthode. Or ces méthodes, tels les méthodes MUSCL ([Lax54], [vL79], [Lev02]), impliquent des schémas qui sont de moins en moins local à la cellule, la mise en oeuvre de l'ordre élevé passant dans ce cas par une interpolation des flux, ce qui sous-tend le besoin d'interaction avec les cellules de plus en plus éloignées.

La difficulté de mise en oeuvre de ces méthodes est aussi liée au théorème de *Godunov* ([God54], [God59]) qui implique qu'il ne peut y avoir de schéma numérique linéaire monotone et positif d'ordre élevé. Ainsi on peut uniquement espérer avoir des méthodes d'ordre élevé avec des schémas non-linéaires, ce que sont les méthodes MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) par exemple, le corollaire étant que ces schémas ne peuvent aboutir à un système linéaire d'équations et donc la résolution de la solution s'en trouve complexifiée.

Néanmoins cette problématique est, en un sens, peu importante puisque les équations de la mécanique des fluides (*Euler*, *Navier-Stokes*) sont elles-mêmes des équations différentielles non-linéaires.

L'utilisation de méthodes telles que la méthode des éléments finis permet la construction de schémas d'ordre élevé se faisant en restant local à l'élément. Cette caractéristique est intéressante et fondamentale pour des méthodes qui veulent tirer l'avantage de la parallélisation massive. Cet aspect est d'autant plus crucial que la tendance actuelle d'augmentation de puissance de calcul passe surtout par l'augmentation du nombre de coeurs plutôt que par des ruptures technologiques en terme de taille de gravure et de fréquence d'horloge.

La méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) utilisée dans le code industriel AETHER de *Dassault Aviation* permet une bonne parallélisation et une facilité d'implémentation des méthodes d'ordre élevé. Néanmoins cette méthode n'est pas monotone et positive.

D'autres méthodes se sont développées de type RDS (Residual Distribution Scheme). Cette méthode est quant à elle utilisée dans le cas de la résolution des équations de la turbulence dans le code AETHER. Le travail d'implémentation des schémas d'ordre élevé dans le cas des méthodes RDS est en cours dans travaux suivants ([Abg01], [AAM05], [AR03], [AM07]).

Enfin la méthode DG (Discontinuous Galerkin), qui a pour but de résoudre un problème local par élément et de préserver la continuité des flux aux interfaces, l'idée sous-jacente étant d'avoir éventuellement des solutions non continues aux interfaces entre éléments et des propriétés très locales ([BCM05], [BBC⁺09], [BCF⁺09], [HHLP09]). La contrepartie étant un nombre de degrés de liberté bien plus grand.

Comme pour les méthodes éléments finis continues, il est facile d'implémenter des méthodes d'ordre élevé en DG, on peut facilement imaginer des méthodes de raffinement et de montée en ordre localement. Pour des raisons de temps, d'évaluation de coûts des méthodes, l'investigation des méthodes DG, dans le cadre de cette thèse, n'a pas été menée.

La publication [KBD⁺09] est un recueil de l'ensemble de ces méthodes qui sont disponibles pour le monde de l'ingénierie. Cette publication contient une compilation des travaux effectués dans le cadre du projet européen ADIGMA qui a débuté en 2006.

Cette thèse a démarré dans le cadre du projet ADIGMA. Ce projet a pour objectif de factoriser les technologies disponibles pour l'amélioration de la précision des simulations numériques.

Il regroupe deux aspects :

- Méthodes d'ordre élevé
- Adaptation de maillages

De manière plus général, il s'attache à présenter les méthodes disponibles et montrer les points difficiles à surmonter.

La thèse démarre donc dans le contexte d'un code industriel, AETHER, utilisé par *Dassault Aviation* et de technologie de maillage comprenant uniquement des éléments simples linéaires.

En terme d'étapes à accomplir afin de mener cette étude à bien les majeurs étaient :

- Adapter le code pour prendre en compte des éléments d'ordre élevé en 2D
- Vérifier la précision des règles d'intégration en fonction des équations à résoudre
- Créer des maillages d'ordre élevé non déformé en 2D
- Créer des maillages d'ordre élevé déformé en 2D
- Créer des maillages d'ordre élevé déformé en 2D pour maillage de type *Navier-Stokes*
- Effectuer des tests pour les équations d'*Euler* en 2D
- Effectuer des tests pour les équations de *Navier-Stokes* en 2D
- Adapter le code pour prendre en compte des éléments d'ordre élevé en 3D
- Créer des maillages d'ordre élevé non déformé en 3D
- Créer des maillages d'ordre élevé déformé en 3D
- Créer des maillages d'ordre élevé déformé en 3D pour maillage de type *Navier-Stokes*
- Effectuer des tests pour les équations d'*Euler* en 3D
- Effectuer des tests pour les équations de *Navier-Stokes* en 3D
- Implémenter les méthodes RDS d'ordre élevé pour la turbulence en 2D
- Effectuer des tests pour les équations de *Navier-Stokes* en 2D avec modèle de turbulence
- Effectuer des tests instationnaires en 2D et 3D
- Trouver des critères permettant une évaluation de la qualité des solutions et conclure.

L'ensemble de ces étapes ont été accomplies avec des conclusions variées sur la faisabilité et l'efficacité. Le processus ainsi que des discussions concernant ces étapes sont détaillés dans cette thèse.

Objectifs de l'étude

Le but est ainsi d'élaborer des méthodes permettant d'obtenir une meilleure précision pour un nombre de degrés de liberté constant en utilisant des fonctions d'interpolation élémentaires polynômiales de degré plus grand que 1. Ces méthodes devraient impacter deux composantes dans la problématique de l'étude numérique :

- La discrétisation des géométries
- La précision de la méthode numérique

Cette attente est motivée par les études théoriques dont les résultats principaux seront redonnés dans le premier chapitre. Le plus important d'entre eux permet d'affirmer que l'approximation dépend du degré du polynôme d'approximation, d'une taille caractéristique de l'élément et de la régularité de la fonction. Cette propriété est l'idée centrale derrière les méthodes d'ordre élevé. Elle consiste à penser que pour des fonctions régulières il est plus précis et par extension moins coûteux d'évaluer une valeur intégrale à l'aide d'une interpolation sur une base de fonctions polynômiales de degré plus élevé.

Nous introduirons dans cette thèse la notion d'efficacité numérique, vue comme la comparaison

entre l'erreur et le temps de calcul.

$$\mathcal{E}^k = \tilde{\mathcal{E}} h^{\alpha d - (k+1)}$$

On a le comportement suivant lorsque $h \rightarrow 0$ avec h une taille de barre, k le degré de l'approximation polynomiale et $\alpha \in [1, 2]$:

$$\begin{cases} \mathcal{E}^k \rightarrow 0 & k < \alpha d - 1 \\ \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}_0^k & k = \alpha d - 1 \\ \mathcal{E}^k \rightarrow \infty & k > \alpha d - 1 \end{cases}$$

Théoriquement, plus le degré est grand plus l'efficacité augmente.

Ces méthodes ont été appliquées avec succès sur des problèmes elliptiques. Elles restent plus problématiques à mettre en oeuvre pour des équations d'advection-diffusion-réaction. La raison principale étant la nécessité de traiter les termes d'advection en utilisant des schémas qui tendent à décentrer la distribution de l'information alors que la diffusion est mieux approximée par des schémas centrés. Il est alors nécessaire de discriminer les zones et d'utiliser des schémas qui se comportent différemment selon la prépondérance des termes tout en restant consistants. Nous considérerons dans cette étude une approximation continue de la discrétisation. Cette approche sera discutée brièvement dans le premier chapitre. Nous nous appliquerons, dans ce contexte, à l'implémentation des méthodes d'ordre élevé pour les schémas de type SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) ainsi que pour les schémas de type RDS (Residual Distribution Scheme). Ces schémas apportent des visions différentes sur la manière d'approximer les équations et comportent ainsi des problématiques diverses qui seront abordées dans le premier chapitre et discutées dans le quatrième chapitre en abordant les résultats obtenus.

Les configurations aérodynamiques que l'on cherche à modéliser nécessitent l'utilisation de modèles de turbulence. Ces modèles, ainsi que les équations fondamentales de l'aérodynamiques, seront rappelées dans le deuxième chapitre. La discrétisation de ces équations ainsi que l'implémentation seront explicitées dans ce même chapitre.

Une composante importante de l'étude reste l'obtention de maillages composés d'éléments courbes. Le troisième chapitre regroupera un rappel de la topologie des éléments finis pour l'ordre élevé. Il sera aussi l'occasion d'une discussion concernant l'obtention de maillages courbes à partir d'outils générant des maillages composés d'éléments linéaires. En effet cette problématique est encore aujourd'hui un sujet largement ouvert. L'utilisation d'éléments courbes complexifie les algorithmes qui rentrent en jeu dans la création d'un maillage complet. Les ingrédients principaux seront rappelés et les challenges dans ce domaine seront explicités.

Le quatrième chapitre présentera les résultats obtenus pour des cas tests variés et tentera de conclure sur l'apport de ces méthodes sur les problèmes industriels.

Chapitre 1

Méthodes numériques

La résolution des problèmes numériques nécessite un certain nombre d'outils et de connaissances que l'on classe sous le nom de “méthodes numériques”.

Ces méthodes ont pour objectif de rendre disponible la théorie mathématique sous forme d'outils de calcul informatique. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux problématiques liées à la résolution d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.).

Pour ce faire nous rappellerons dans un premier temps les outils fondamentaux nécessaires à la formulation des E.D.P. . Nous introduirons la notion de discrétisation, puis d'interpolation pour enfin donner des estimateurs d'erreur *a priori*.

Dans un deuxième temps nous introduirons les schémas numériques qui ont fait l'objet d'une tentative d'extrapolation à l'ordre élevé.

Les schémas sur lesquels nous nous attarderons plus longuement sont les *éléments finis* de type *Galerkin*, *SUPG*, puis aux schémas de type *Residual Distribution Scheme* (R.D.S.).

Dans un dernier temps nous verrons les méthodes employées pour le calcul intégral. Nous expliciterons les termes que l'on rencontre dans les schémas numériques pour donner une estimation de leur degré polynomial afin d'utiliser les règles d'intégration appropriée.

1.1 Problème général

Notons $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, et aussi la norme associée sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des endomorphismes sur $\mathbb{R}^d$.

Définissons $\mathcal{B}_K(x, r)$, avec K un domaine borné sur $\mathbb{R}^d$, comme $\mathcal{B}_K(x, r) = \{y \in K \mid |x - y| < r\}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout fermé K sur $\mathbb{R}^d$ considérons l'espace $\mathcal{C}^k(K)$ des restrictions à K de toutes les fonctions aux dérivées d'ordre k continues sur $\mathbb{R}^d$, et l'espace $P_k(K)$ des restrictions à K des polynômes de degré inférieur ou égal à k sur $\mathbb{R}^d$.

Soit $\mathcal{D}(K)$ l'espace des fonctions sur $\mathcal{E}(K) = \mathcal{C}^\infty(K)$ à support compact sur K . $\mathcal{D}'(K) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(K), \mathbb{R})$

1.1.1 Définitions

On généralise les problèmes rencontrés dans le cadre des équations différentielles partielles. Les définitions et les notations suivantes sont extraites de [DL84]

Définition 1 (Opérateur différentiel) Soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}(\Omega)$ sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ où Ω est un sous-espace de $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} P & : & \mathcal{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ & & u & \rightarrow & P(u) \end{cases} \quad (1.1)$$

Cet opérateur peut être écrit, avec a_α appartenant à $\mathcal{E}(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \sum a_\alpha D^\alpha \quad , D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_n}} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Définition 2 ($H^m(\Omega)$) Pour $m \in \mathbb{N}$:

$$H^m(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega) \mid |\alpha| \leq m\} \quad (1.3)$$

$H^m(\Omega)$ hérite du produit scalaire suivant et de sa norme associée

$$(u, v)_{m, \Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx$$

$$\|u\|_{m, \Omega} = \left((u, u)_{m, \Omega} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

Notons $\langle u, v \rangle_{\Omega} = (u, v)_{0, \Omega}$ la norme associée sur $L^2(\Omega)$

Définition 3 (Problème mathématique) On cherche à résoudre le problème général, P et C_i étant des opérateurs différentiels sur respectivement Ω et Γ_i tel que $\bigcup_i \Gamma_i = \partial\Omega$ et $\Gamma_j \cap \Gamma_i = \partial\Gamma_j \cap \partial\Gamma_i$.

$$\left\{ \begin{array}{lll} r(u) & = & P(u) - f = 0 \quad f \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ r_{|\Gamma_i}(u) & = & C_i(u) - g_i = 0 \quad g \in \mathcal{D}'(\Gamma_i) \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Toute supposition quant à l'aspect de problème "bien-posé" ne sera pas, bien sur, abordée ici. Ce problème mathématique peut toujours être vu comme l'équivalent d'un problème physique avec conditions aux limites.

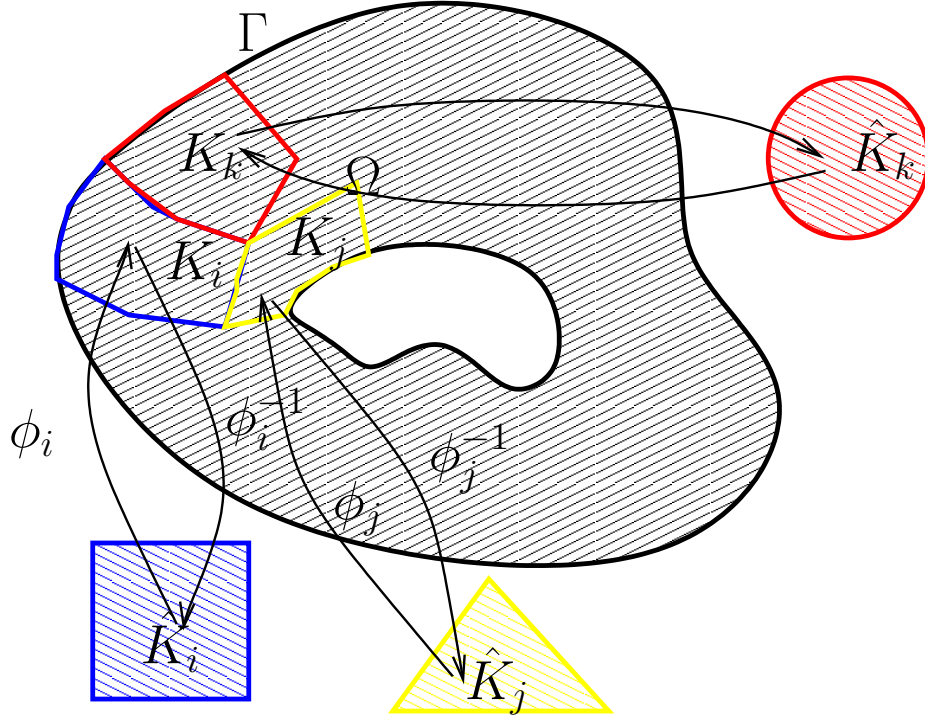
1.1.2 Subdivision continue de Ω

Considérons un ouvert Ω avec une frontière $\Gamma = \partial\Omega$ telle que $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

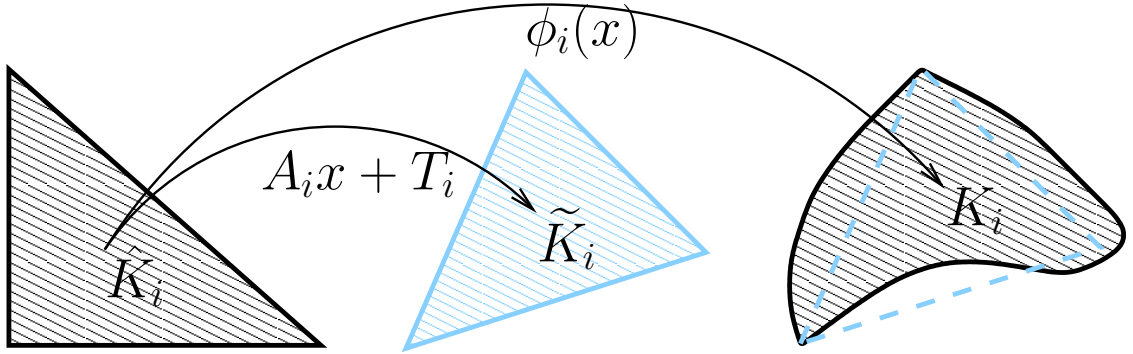
Le domaine Ω est divisé tel que $\bigcup_k K_k = \overline{\Omega}$ ainsi que sa frontière Γ tel que $\bigcup_k K_{\Gamma, k} = \Gamma$, $K_{\Gamma, k} = K_k \cap \Gamma \neq \emptyset$, avec les propriétés suivantes K_k et $K_{\Gamma, k}$ sont respectivement des fermés connexes de $\overline{\Omega}$ et Γ .

- $K_{\Gamma, j} \cap K_{\Gamma, i} = \partial K_{\Gamma, j} \cap \partial K_{\Gamma, i}$
- $K_j \cap K_i = \partial K_j \cap \partial K_i$
- $\forall k \exists i | (\partial K_k \cap \Gamma) \subset K_{\Gamma, i}$
- $\forall i \exists \phi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que $\phi_i(\hat{K}_i) = K_i$ avec ϕ_i un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme (de plus, le jacobien de ϕ_i , $J_{\phi_i} = \det(D\phi_i) > 0$ sur $\hat{K}_i$).
- $\psi_{ij}(K_i \cap K_j) = \phi_i \circ \phi_j^{-1}(K_i \cap K_j) = \phi_j \circ \phi_i^{-1}(K_i \cap K_j)$ et ψ_{ij} soit une application $\mathcal{C}^r$
- $\forall i \exists A_i \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ $T_i \in \mathbb{R}^d$ $\gamma_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que pour $x \in \hat{K}_i$ alors $\phi_i(x) = A_i x + T_i + \gamma_i(x)$ avec $C_{K_i} = \sup_{x \in K_i} |D\gamma_i(x) A_i^{-1}| < 1$, $\det(A_i) > 0$, $\det(\phi_i) > 0$,

Le but de cette discrétisation est l'évaluation des intégrales sur un domaine en créant une cartographie locale sur des petites portions de ce domaine et en associant une application pour laquelle l'image du domaine de référence est une partie de la partition de Ω , voir (Fig. 1.1). Avec l'hypothèse que l'application est un difféomorphisme, il y a toujours un moyen de représenter toute géométrie, plus ou moins régulière, comme l'image de plusieurs domaines de référence. Nommons $\hat{K}_i$ les éléments de référence. Il est à noter qu'aucune hypothèse n'a été faite sur les

FIGURE 1.1 – Ouvert Ω avec sa frontière Γ et leurs subdivisions Ω_k et Γ_k

propriétés géométriques de l'élément de référence. Le but d'une telle formulation est de pouvoir considérer chaque élément $\hat{K}_i$ séparément sans se préoccuper de la propriété de l'image K_i . La dernière propriété est une conséquence directe de l'analyse numérique faite dans [Ber89]. Elle peut être interprétée comme une condition pour que l'application ϕ_i préserve grossièrement la forme de l'élément et une perturbation non linéaire afin de coller à la géométrie désirée, voir (Fig. 1.2).

FIGURE 1.2 – Application ϕ_i

Lemme 1 (Intégrale sur Ω) Pour u et v dans $\mathcal{D}(\Omega)$. $\tilde{u}(\xi) = u(\phi_i(\xi)) |J_{\phi_i}|^{1/2}$

$$\langle u, v \rangle_{\Omega} = \sum_i \langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle_{\hat{K}_i} \quad (1.6)$$

Lemme 2 voir [CR72]

$$\sup_{x \in \hat{K}_i} \|D\phi_i(x)\| \leq (1 + C_{K_i}) \|A_i\| \quad (1.7)$$

$$(1 - C_{K_i}) \|A_i\| \leq \sup_{x \in \hat{K}_i} \|D\phi_i(x)\| \leq (1 + C_{K_i}) \|A_i\| \quad (1.8)$$

$$\forall x \in \hat{K}_i, (1 - C_{K_i})^d \det(A_i) \leq \det(D\phi_i(x)) \leq (1 + C_{K_i})^d \det(A_i) \quad (1.9)$$

Preuve : On peut écrire $D\phi_i(x) = (I + D\gamma_i(x)A_i^{-1})A_i$ et $D\phi_i^{-1}(x) = A_i^{-1}(I + D\gamma_i(x)A_i^{-1})^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-D\gamma_i(x)A_i^{-1})^n$. Sachant que $C_{K_i} = \sup_{x \in \hat{K}_i} |D\gamma_i(x)A_i^{-1}| < 1$ Alors $\|A\| = \|A(D\phi)^{-1}D\phi\| \leq \|D\phi\| \|A(D\phi)^{-1}\| \leq \|D\phi\| \|AA^{-1}(I + D\gamma A^{-1})^{-1}\| \leq \|D\phi\| \|\sum_{n \in \mathbb{N}} (-D\gamma_i(x)A_i^{-1})^n\| \leq \|D\phi\| (1 - C_{K_i})^{-1}$ On obtient les résultats voulus. La dernière équation est obtenue en notant que le déterminant est une forme continue d -linéaire sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

On cherche maintenant une dimension caractéristique du sous-domaine Ω_i que l'on obtient en appliquant la transformation ϕ_i . L'intuition nous amène à penser que la dimension caractéristique du sous-domaine serait le diamètre de l'ensemble convexe K'_i tel que $K_i \subset K'_i$.

Mais cette définition ne prend pas en compte la non-linéarité de ϕ_i . Ainsi la dimension caractéristique est mieux décrite comme le plus grand ratio entre une longueur sur un segment de l'espace de référence appartenant à $\hat{K}_i$ et son image dans K_i . Ceci n'est rien d'autre que la constante de Lipschitz de ϕ_i .

Définition 4 (Dimensions caractéristiques)

$$h_{K_i} = \sup_{(x,y) \in \hat{K}_i | x \neq y} \left(\frac{\|\phi_i(x) - \phi_i(y)\|}{\|x - y\|} \right) = \sup_{x \in \hat{K}_i} \|D\phi_i(x)\| \quad (1.10)$$

$$\bar{h}_{K_i} = \|A_i\| \quad (1.11)$$

$$\rho_{K_i} = \sup_{r \in \mathbb{R}} (r \mid \mathcal{B}_{K_i}(x, r) \subset K_i) \quad (1.12)$$

Théorème 1 (Householder) Soit $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Avec $\rho(P) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp(P)\}$

$$\rho(P) = \inf\{\|P\| \mid \|\cdot\|\} \quad (1.13)$$

Lemme 3 (Déterminant et norme) Soit $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$

$$\det(P) \leq \rho(P)^d \leq \|P\|^d \quad (1.14)$$

Preuve : Conséquence directe de (Thm. 1) $\square$.

Lemme 4 (Estimation et dimensions caractéristiques) $\exists C_1 > 0, C_2 > 0$

$$C_1 h_{K_i} \leq \bar{h}_{K_i} \leq C_2 h_{K_i} \quad (1.15)$$

$$\det(D\phi_i) = J_{\phi_i} \leq h_{K_i}^d \quad (1.16)$$

$$\det(A_i) \leq \bar{h}_{K_i}^d \quad (1.17)$$

Preuve : Conséquence directe de (Def. 4), (Lem. 2) et (Lem. 3) $\square$.

Définition 5 (Dimensions caractéristiques de la subdivision) $N_e \in \mathbb{N}$ le nombre de subdivisions de Ω

$$h_{min} = \min_i \{h_{K_i}\}, \quad h = h_{max} = \max_i \{h_{K_i}\} \quad (1.18)$$

$$mes(\Omega) = \int_{\Omega} dx, \quad N_e \bar{V} = \sum_i mes(K_i) \quad (1.19)$$

A partir de (Lem. 1) et (Lem. 4) on obtient

Lemme 5 (Nombre de subdivisions)

$$\exists C, \frac{h_{\min}}{h_{\max} \bar{V}} \leq C \leq \frac{1}{\bar{V}}, N_e = C m_{\text{es}}(\Omega) h^{-d} \quad (1.20)$$

1.1.3 Problème discret et estimation d'erreur a priori

Dans la section précédente nous avons donné une subdivision de Ω . Pour résoudre numériquement le problème posé, il faut passer en dimension finie. L'idée de base a toujours été la même depuis l'existence des problématiques de représentation de fonctions. Afin de représenter toute fonction on évalue ses valeurs en un nombre fini de points et on interpole continuellement grâce à une base de fonctions choisie arbitrairement. On peut se référer à [Lor66] pour plus de détails sur l'approximation de fonction. Bien sur ce domaine est extrêmement vaste mais dans tous les cas (que nous connaissons) il n'y a que trois types de fonctions interpolantes :

- Polynômiales
- Polynômiales trigonométriques
- Polynômiales rationnelles

On espère que le plus de points d'interpolation on a, le mieux on représente la fonction. Ceci peut être vu comme l'approche standard de h -raffinement. De même si les fonctions d'interpolation choisies ont des propriétés de régularité similaires à la fonction que l'on désire interpoler alors là encore on représente mieux la fonction. Ceci peut être vu comme l'approche k -raffinement où k est l'ordre de régularité de la fonction.

Notre objectif est de discuter *a priori* l'erreur générée par l'approximation. Ceci a été fait dans un cadre très général pour les polynômes en estimant la différence entre la fonction et l'opérateur d'interpolation de la fonction. Les résultats les plus importants sont extraits de [Cia78], [CR71] et [Ber89].

Définition 6 (Élément fini (K, P_K, Σ_K)) Avec $D = d^{\text{ordre du tenseur}}$.

- K est un ensemble fermé $\mathbb{R}^d$
- P_K est un espace de fonctions de dimension finie sur K
- Σ_K est un ensemble de formes linéaires continues sur $\{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^D + P_K\}$, avec leur support sur K
- L'ensemble Σ_K est P_K -unisolvant, i.e., pour tout μ dans Σ_K il existe une unique fonction $\rho \in P_K$ telle que $\mu(\rho) = 1$ et $\forall \mu' \in \Sigma_K, \mu' \neq \mu, \mu'(\rho) = 0$

Lemme 6 (Condition d'unisolvance) Σ_K est P_K -unisolvant si et seulement si

- Il existe N_v fonctions ϕ_i linéairement indépendantes telles que $\mu_j(\phi_i) = \delta_{ij}$
- $N_v = \dim(P) = \text{card}(\Sigma_K)$

Remarque 1 (Formes linéaires courantes) Les formes linéaires sont souvent parmi ces types avec $\nu \in \mathbb{R}^d, \eta \in \mathbb{R}^d$ et a_i des points de K :

- $\mu_i : \varphi \rightarrow \int_{B \in K} \nu_i \cdot \nabla \varphi \, ds$
- $\mu_i : \varphi \rightarrow \int_{B \in K} \varphi \, ds$
- $\mu_i : \varphi \rightarrow \varphi(a_i)$
- $\mu_i : \varphi \rightarrow \nu_i \cdot \nabla \varphi(a_i)$
- $\mu_i : \varphi \rightarrow \nu_i^t (\nabla(\nabla \varphi))(a_i) \eta_i$

Les deux premières formes linéaires correspondent souvent à éléments finis de type Morley. La troisième forme linéaire correspond à des éléments de type Lagrange. La quatrième à des éléments de type Hermite. La cinquième à des éléments de type Argyris.

Définition 7 (Fonction d'interpolation) Par (Def. 6) $\forall i \in [1, N_v]$, $\exists \varphi_i$ est définie sur $\bar{\Omega}$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \varphi_i|_K \in P_K \quad (1.21)$$

$$\forall j \in [1, N_v], \quad \mu_j(\varphi_i) = \delta_{ij} \quad (1.22)$$

Définition 8 (Approximation d'un ensemble) Avec les notations précédentes notons $\mathcal{T}_h$ une subdivision avec $\Omega_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ et $\Gamma_h = \partial\Omega_h$.

Définition 9 (Subdivision régulière) $\mathcal{T}_h = \{K_i | i \in [1, N_e]\} = \{\phi_i(\hat{K}_i) | i \in [1, N_e]\} \exists \sigma$ tel que pour tout $K_i \in \mathcal{T}_h$ on ait $\frac{h_i}{\rho_i} \leq \sigma$ avec ρ_i le rayon du cercle circonscrit à K_i .

Définition 10 (Système maximal des formes indépendantes sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^D$) De $\Sigma = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K$ on peut extraire un système maximal des formes continues linéairement indépendantes que nous dénoterons $\{\mu_1, \dots, \mu_{N_v}\}$

Définition 11 (Cellule)

$$\forall i \in [1, N_v], \quad \Delta_i = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \{K | \text{supp}(\mu_i) \subset K\} \quad (1.23)$$

Notons que $\text{supp}(\varphi_i) \subset \Delta_i$.

Définition 12 (Elément fini d'espace)

$$X_h = \text{Span}\{\varphi_i, i \in [1, N_v]\} \quad (1.24)$$

Définition 13 (Compatibilité) Les éléments finis d'ordre k (K, P_K, Σ_K) , K dans $\mathcal{T}_h$ sont compatibles si :

- P_K est borné indépendamment de h
- Pour $i \in [1, N_v]$ soit le support Δ_i de μ_i est K soit μ_i peut être étendue aux formes continues linéaires sur $\mathcal{C}^0(\Delta_i)^D$
- Il existe une constante L indépendante de h et pour $i \in [1, N_v]$ un entier $l_i \geq 0$ un élément p_i de $[1, \infty[$ et un réel η_i tel que

$$\forall \rho \in P_K, \quad |\mu_i(\rho)| \leq L h_K^{l_i - d/p_i + \eta_i} \quad (1.25)$$

$$\forall m \in [0, k], \quad \forall q \in [1, \infty[, \quad \|\varphi_i\|_{m,q,K} \leq h_K^{-m - d/q - \eta_i} \quad (1.26)$$

Définition 14 (Elément fini de référence) $(\hat{K}, \hat{P}_{\hat{K}}, \hat{\Sigma}_{\hat{K}})$ est appelé élément fini de référence de (K, P_K, Σ_K) si il existe une application inverse ϕ avec son support sur $\hat{K}$ tel que :

$$K = \phi(\hat{K}) \quad (1.27)$$

$$P_K = \{\rho = \hat{\rho} \circ \phi^{-1}, \hat{\rho} \in \hat{P}_{\hat{K}}\} \quad (1.28)$$

$$\Sigma_K = \{\mu, \forall v \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))^D + P_K, \mu(v) = \hat{\mu}(v \circ \phi), \hat{\mu} \in \hat{\Sigma}_{\hat{K}}\} \quad (1.29)$$

Avec (Def. 14) on peut définir $\hat{\Delta}_i$ tel que si $\Delta_i = \bigcup_{j=1}^M K_j$ et $\hat{K}_i$ l'élément de référence de

K_i avec la transformation ϕ_i alors $\Delta_i = \bigcup_{j=1}^M \phi_j(\hat{K}_j)$ et $\hat{\Delta}_i = \{\phi_j^{-1}(K_j) | j \in [1, M]\}$. On note que $\phi_j(\hat{\Delta}_i) = K_j$ et on note ϕ_{Δ_i} la transformation de $\hat{\Delta}_i$ sur Δ_i .

Définition 15 (Opérateur d'interpolation) Définissons $\Pi_h : L^1(\Omega_h)^D \rightarrow X_h$ par une projection locale L^2 .

Soit u une fonction de $L^1(\Omega_h)^D$. Pour tout $i \in [1, N_v]$ il existe un unique élément $\hat{\rho}_i$ dans $P_k(\hat{\Delta}_i)^D$ tel que

$$\forall \hat{\rho} \in P_k(\hat{\Delta}_i)^D, \int_{\hat{\Delta}_i} (\hat{u} - \hat{\rho}_i) \hat{\rho} dx = 0 \quad (1.30)$$

alors, l'interpolé $\Pi_h u$ de u sur X_h est défini par

$$\Pi_h u = \sum_{i=1}^{N_v} \mu_i(\rho_i) \varphi_i, \quad \rho_i = \hat{\rho}_i \circ \phi_{\Delta_i} \quad (1.31)$$

Théorème 2 (Estimation d'erreur a priori) Supposons une subdivision régulière et des éléments finis (K, P_K, Σ_K) d'ordre k compatibles. Soit l et m des entiers positifs, p et q deux éléments de $[1, \infty[$ tel que $l \in [0, k+1]$

$$P_K \subset \bigcap_{i=1}^{N_v} W^{l_i, p_i}(K)^D \bigcap W^{m, q}(K)^D, \quad W^{l, p}(K) \subset W^{m, q}(K) \quad (1.32)$$

Alors pour tout $K \in \mathcal{T}$, nous avons pour toute fonction u dans $L^1(\Omega_h)^D \cap W^{l, p}(\Delta)^D$, où Δ est l'union de tous les Δ_i contenant K , $i \in [1, N_v]$,

$$\|u - \Pi_h u\|_{m, q, K} \leq Ch_K^{l-m+d(1/q-1/p)} \|u\|_{l, p, \Delta} \quad (1.33)$$

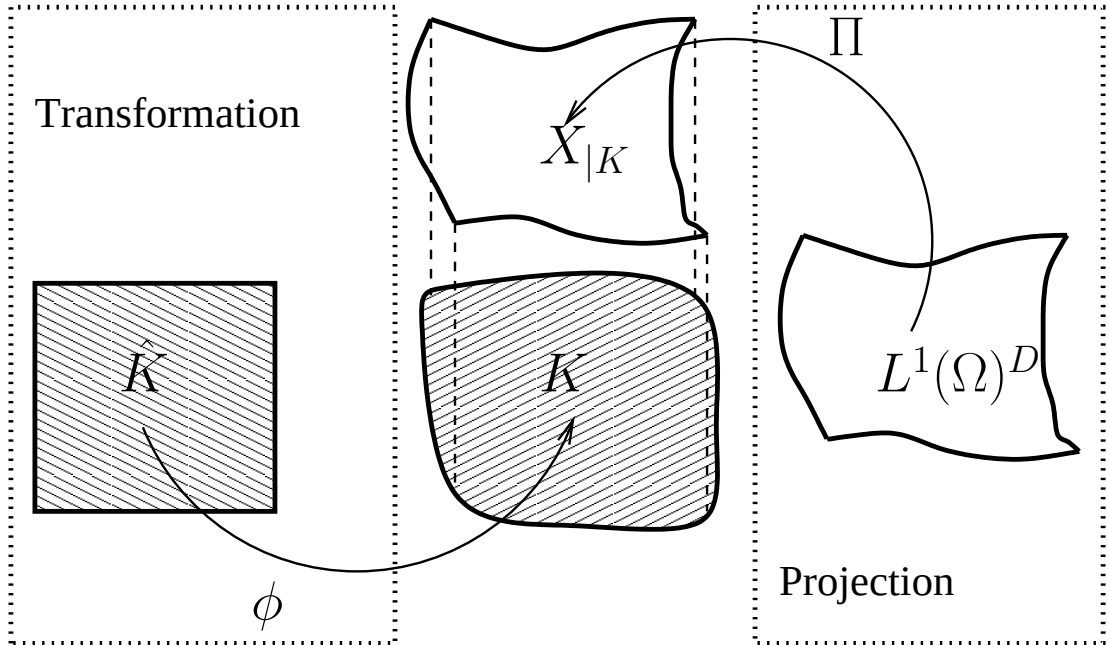


FIGURE 1.3 – Description complète d'un élément fini

Comme montré sur (Fig. 1.3) on définit complètement un élément fini à partir d'un élément fini de référence et deux fonctions, une qui définit la transformation du domaine et l'autre qui projette la solution sur la base interpolante.

On peut voir ces deux propriétés par l'évaluation d'une intégrale.

$$\int_{\Omega} u dx \simeq \sum_i \int_{K_i} (\Pi(u))(x) dx = \sum_i \int_{\hat{K}_i} \underbrace{(\Pi(u))}_{\text{projection}} \underbrace{(\phi_i(\xi))J_{\phi_i}}_{\text{transformation}} d\xi$$

On peut distinguer 3 catégories d'éléments :

- Eléments isoparamétriques : L'opérateur local Π est utilisé à la fois pour définir la projection ainsi que la transformation géométrique.
- Eléments isogéométriques : L'application de transformation géométrique est aussi utilisée pour définir la projection de la solution.
- Eléments généraux : La projection et la transformation sont indépendantes.

Les éléments isoparamétriques sont communément utilisés dans la communauté des utilisateurs des méthodes de type éléments finis. L'utilisation des éléments isoparamétriques n'est pas synonyme d'abandon de la description de la géométrie exacte. On peut d'ailleurs se poser la question de la signification de la géométrie exacte. Dans ce contexte on considérera la géométrie exacte comme étant la géométrie obtenue à l'aide d'un modèleur 2D ou 3D. Comme cité dans [Ber89] les travaux de Scott [Sco73] et Lenoir [Len86] permettent d'adapter la projection de façon à ce que la face $K_i \cap \Gamma$ colle à la géométrie. Néanmoins cette procédure implique la connaissance a priori des applications définissant la géométrie, ce qui est rarement le cas puisque le module de résolution des équations et le modèleur sont souvent des programmes séparés.

Récemment, l'analyse isogéométrique est apparu comme un outil peu anodin, grâce notamment à [Baz09]. Les fonctions de base utilisées sont exactement celle du modèleur (les fonctions NURBS, Non-Rational B-Splines). Ainsi on garde implicitement les informations de la géométrie dans le solveur.

1.2 Schémas numériques et formulation algébrique

Afin de présenter les schémas numériques sur lesquels cette étude s'appuie, nous présentons l'équation standard d'un problème linéaire d'advection, diffusion, réaction avec terme source.

Notre but est ensuite de discuter les propriétés de l'approche Galerkin puis corriger ses défauts en introduisant la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin). Enfin nous introduirons les notions principales des méthodes de type RDS (Residual Distribution Scheme).

1.2.1 Problème linéaire d'advection, diffusion, réaction avec terme source

Pour $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, on considère le problème linéaire d'advection, diffusion, réaction avec terme source.

$$Lu := au + \nabla \cdot (bu - c\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \quad (1.34)$$

$$u|_{\Gamma_D} = g_D, \quad b \cdot \nabla u|_{\Gamma_N} = g_N \quad (1.35)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{b} \in [C^1(\Omega)]^d$, $a \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $g_D \in L^2(\Gamma_D)$, $g_N \in L^2(\Gamma_N)$.

$\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ et $\Gamma_N \cup \Gamma_D = \Gamma = \partial\Omega$

De plus on ajoute les hypothèses suivantes : $a + \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{b} \geq 0$, $c \geq 0$ et $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ on Γ_N , $\mathbf{n}$ étant la normale à la frontière Γ_N .

1.2.2 Formulation variationnelle

L'existence de l'intégrale de gauche requiert l'appartenance de Lu à l'espace $L^2(\Omega)$, il est suffisant sous la forme faible que $u \in H^1(\Omega)$.

Soit $v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_D} = 0\}$ étant une fonction test.

$$\int_{\Omega} auv d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \cdot (bu)v d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \cdot (c\nabla u)v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x}$$

Grâce au théorème de flux-divergence (Green-Ostrogradski) et $v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ ainsi que $\nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N$ sur Γ_N

$$\int_{\Omega} auv d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \cdot (bu)v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c\nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} c g_N v d\mathbf{s}$$

Définition 16 (Formulation variationnelle) Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.36)$$

$$B(u, v) = \int_{\Omega} auv d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \cdot (bu)v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c\nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}, \quad F(v) = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} c g_N v d\mathbf{s}$$

Les théorèmes suivants sont repertoriés dans [DL84].

Théorème 3 (Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert.

Soit une forme linéaire $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ continue (i.e. il existe $C_F > 0$ tel que $F(v) \leq C_F \|v\|_V$, $\forall v \in V$).

Soit une forme bilinéaire $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ continue (i.e. il existe $C_B > 0$ tel que $B(u, v) \leq C_B \|v\|_V \|u\|_V$, $\forall u, v \in V$).

Soit B V -coercive (i.e. il existe $\gamma > 0$ tel que $B(v, v) \geq \gamma \|v\|_V^2$, $\forall v \in V$).

Alors, il existe une unique solution $u \in V$ telle que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V$$

Théorème 4 (Inégalité de Poincaré) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ contenu dans un cube de $\mathbb{R}^d$ de côté de longueur s . Alors, il existe une constante $C_p = s > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p |v|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1$$

Théorème 5 (Trace) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert sur un domaine borné possédant une frontière régulière par morceaux. De plus, Ω satisfait une condition du cône.

Alors il existe une unique application continue linéaire

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \quad (1.37)$$

et une constante $C > 0$ telles que

$$\|\gamma(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \quad (1.38)$$

$$\gamma(u) = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad (1.39)$$

où $\gamma(u)$ se nomme la trace de u sur $\partial\Omega$ et γ l'opérateur trace.

Proposition 1 Le problème 1.36 est bien posé avec les hypothèses $v \in H_0^1$, $a + \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{b} \geq 0$, $c \geq 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ sur Γ_N et $\max_K(a + \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{b}, |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|) \leq c$.

Preuve : H_0^1 est une espace de Hilbert. F est linéaire, B est bilinéaire.

Avec 5, le fait que $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + |v|_{H^1(\Omega)}^2$ et que $\int_{\Gamma_N} c g_N v d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} c g_N v d\mathbf{s}$ car $v \in H_0^1$.

$$|F(v)| \leq \left| \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Gamma_N} c g_N v d\mathbf{s} \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g_N\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

avec $C = C_f \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_{g_N} \|g_N\|_{L^2(\partial\Omega)}$. F est continue

De plus $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \|v\|_{L^2(\Omega)} + |v|_{H^1(\Omega)}^2$.

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq (\|a\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \cdot b\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \max_i (\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}) |u|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ |B(u, v)| &\leq (\|a\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla \cdot b\|_{L^\infty(\Omega)} + \max_i (\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}) + \|c\|_{L^\infty(\Omega)}) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ |B(u, v)| &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

B est continue

Remarquons $\nabla \cdot (bv)v = \frac{1}{2}(\nabla \cdot b)v^2 + \frac{1}{2}\nabla \cdot (bv^2)$. On obtient l'égalité suivante.

$$B(v, v) = \int_{\Omega} (a + \frac{1}{2}\nabla \cdot b)v^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c|\nabla v|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} (b \cdot n)v^2 d\mathbf{x}$$

On peut remarquer que $\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} (b \cdot n)v^2 d\mathbf{x}$ est une norme $H^1(\Omega)$.

Avec l'hypothèse $\max_K (a + \frac{1}{2}\nabla \cdot b, |b \cdot n|) \leq c$ on obtient la coercivité de B .

$$\exists C > 0 \quad B(v, v) \geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Si cette condition n'est pas respectée on a moins de contrôle sur $\|\nabla v\|$, il en résulte que la méthode est instable. $\square$

Quand v est pris égal à chaque fonction de la base élément fini, on nomme cette méthode : la méthode de *Galerkin*. On peut montrer que dans le cas du problème de diffusion réaction avec terme source cette méthode aboutit à un problème s'écrivant sous forme de matrices de rigidité symétriques et on peut montrer que la solution possède une propriété de "meilleure approximation". Néanmoins dès que l'on prend en compte des termes d'advection les matrices de rigidité ne sont plus symétriques et cette propriété est perdue. De plus dans la solution obtenue et pour des termes d'advections prépondérants on voit apparaître des oscillations noeuds-à-noeuds.

1.2.3 La méthode "streamline diffusion" : Streamline Upwind Petrov-Galerkin SUPG

1.2.3.1 Le principe de la méthode

Comme on l'a vu à la section précédente il est nécessaire d'établir une relation entre la diffusion et l'advection afin d'obtenir une méthode stable. Ainsi afin d'obtenir une méthode efficace il est nécessaire, dans le cas des problèmes dominés par l'advection, d'ajouter des termes pour créer une diffusion artificielle. Une introduction à cette méthode peut être vu dans [BH82]. On remplace donc la fonction test v par $v + \tau b \cdot \nabla v$. On appelle ceci la discrétisation *Petrov-Galerkin*. Le problème devient alors :

Définition 17 (Formulation variationnelle SUPG) Trouver $u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega} auv d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \cdot (bu)v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} au \tau b \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \cdot (bu) \tau b \cdot \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c \nabla u \cdot \nabla (\tau b \cdot \nabla v) d\mathbf{x} \\ F(v) &= \int_{\Omega} f(v + \tau b \cdot \nabla v) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} cg_N(v + \tau b \cdot \nabla v) ds \end{aligned}$$

Proposition 2 Le problème 17 est bien posé avec les hypothèses $v \in H_0^2$, $a + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b} \geq 0$, $c \geq 0$ et $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ sur Γ_N , on supposant que l'on trouve une valeur appropriée à $\tau \geq 0$.

Preuve : H_0^2 est un espace de Hilbert. F est linéaire, B est bilinéaire. F et B sont continus. Ceci grâce au théorème (Thm. 4).

$$\begin{aligned} B(v, v) &= \int_{\Omega} (a + \frac{1}{2}((a-1)\tau + 1) \nabla \cdot \mathbf{b}) v^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c \nabla v \cdot \nabla (v + \tau \mathbf{b} \cdot \nabla v) + \tau |\mathbf{b} \cdot \nabla v|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} ((1 + \tau(a + \nabla \cdot \mathbf{b})) \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) v^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Considérons que le problème est dominé par l'advection. Ainsi les termes de diffusion c ont les mêmes affects que τ .

$$\begin{aligned} B(v, v) &\geq \int_{\Omega} (a + \frac{1}{2}((a-1)\tau + 1) \nabla \cdot \mathbf{b}) v^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c \nabla v \cdot \nabla v + \tau |\mathbf{b} \cdot \nabla v|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} ((1 + \tau(a + \nabla \cdot \mathbf{b})) \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) v^2 d\mathbf{x} \\ &\geq \int_{\Omega} (a + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}) v^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c \nabla v \cdot \nabla v + \tau |\mathbf{b} \cdot \nabla v|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) v^2 d\mathbf{x} \end{aligned}$$

On choisit $\max_K (a + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}, |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|) \leq c + \tau \max_i (b_i)$

Dans ce cas B est coercif. On a donc suffisamment de control sur les termes d'advection. $\square$

Ce schéma résoud le problème inhérent aux méthodes de *Galerkin* dans les cas où les termes d'advection sont dominants. Néanmoins la méthode SUPG n'est ni monotone ni TVD (Total Variation Diminishing) Notamment on rencontre aussi des problèmes dans le cas de la présence de chocs, ceci est discuté dans [SHJ91] et [HFM87].

Nous revenons maintenant sur la problématique du paramètre τ en ordre élevé. Avant de rentrer plus en détail dans la topologie des éléments d'ordre élevé, nous faisons une première étude 1D d'un problème standard 1D pour évaluer l'impact de l'ordre élevé sur le paramètre τ .

1.2.3.2 Discussion sur le paramètre τ

Nous venons d'introduire la méthode SUPG. Elle fait apparaître un paramètre τ dont nous avons donné une formule suffisante pour que la coercivité du problème variationnel soit

vérifiée. Afin de tenter d'être plus précis nous allons tenter de trouver une autre formulation pour τ d'un point de vue minimisation d'erreur.

1.2.3.2.1 Problème de référence

On considère l'équation d'advection diffusion 1D :

$$\begin{cases} bu_{,x} = cu_{,xx} \\ u(0) = 0, u(1) = 1 \end{cases} \quad (1.41)$$

$x \in \Omega = [0, 1]$, b est le terme d'advection et c la diffusion (on considère b et c constants). Nous notons le nombre de Peclet adimensionnel $Pe = \frac{bL}{c}$ où L est une dimension caractéristique du problème. On peut alors définir un nombre de Peclet discret sur chaque élément (de même dimension caractéristique h) $\alpha = \frac{bh}{c}$.

La solution analytique de ce problème est donnée par :

$$u(x) = \frac{e^{\frac{b}{c}x} - 1}{e^{\frac{b}{c}} - 1}$$

1.2.3.2.2 Formulations Galerkin, SUPG et GLS

On introduit un espace de dimension finie de fonctions tests S^h et de fonctions poids V^h .

$$\begin{cases} S^h \subset S = \{u | u \in H^2(\Omega), u(0) = 0, u(1) = 1\} \\ V^h \subset V = \{v | v \in H^2(\Omega), v(0) = 0, v(1) = 0\} \end{cases}$$

La description de ces méthodes peut être vue dans [BH82], [HFM87], [Hug87] ou dans la section précédente. Pour simplifier la présentation de ces méthodes les termes supplémentaires imputables à la méthode GLS (Galerkin Least-Square) en gras. Avec cette convention les méthodes mentionnées s'écrivent :

Trouver $u^h \in S^h$ tel que pour tout $w^h \in V^h$,

$$\int_0^1 (w^h bu_{,x}^h - w_{,x}^h cu_{,xx}^h) dx + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{K_e} (bw_{,x}^h - \mathbf{c} \mathbf{w}_{,\mathbf{xx}}^h) \tau (bu_{,x}^h - \kappa u_{,xx}^h) dx \quad (1.42)$$

K_e est le e^{me} élément, n_{el} le nombre total d'éléments.

Avec $u^h = v^h + g^h$ où $v^h \in V^h$ et g^h est la fonction au bord du domaine telle que $u(1) = 1$.

On peut réécrire le problème :

Trouver $v^h \in S^h$ tel que pour tout $w^h \in V^h$,

$$A(w^h, v^h) = L(w^h) \quad (1.43)$$

$$\begin{cases} A(w^h, v^h) = \int_0^1 (w^h bv_{,x}^h - w_{,x}^h cv_{,xx}^h) dx + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} (bw_{,x}^h - \mathbf{c} \mathbf{w}_{,\mathbf{xx}}^h) \tau (bv_{,x}^h - cv_{,xx}^h) dx \\ L(w^h) = - \int_0^1 (w^h bg_{,x}^h - w_{,x}^h \kappa g_{,xx}^h) dx - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} (bw_{,x}^h - \mathbf{c} \mathbf{w}_{,\mathbf{xx}}^h) \tau (bg_{,x}^h - cg_{,xx}^h) dx \end{cases}$$

Un élément de V^h s'écrit sous la forme :

$$w^h(x) = \sum_{j=2}^{n_{np}-1} N_j(x) c_j$$

où N_j est la fonction de forme associée au noeud j et c_j est une constante. On suppose que le maillage contient n_{np} points avec $j = 1$ et $j = n_{np}$ correspondant respectivement à $x = 0$ et $x = 1$.

De la même façon, $v^h(x) = \sum_{j=2}^{n_{np}-1} N_j(x) v_j$ où v_j est la valeur de v^h au noeud j et $g^h(x) = N_{n_{np}}(x)$

1.2.3.2.3 Formulation algébrique correspondante

On considère une approximation discrète du domaine (i.e. $[0, 1]$).

La transformation entre le domaine de référence et le domain physique est donné par :

$$x^e(\xi) = \sum_{i=1}^{n_{en}} N_i(\xi) x_i^e$$

où ξ est la coordonnée dans le domaine de référence et n_{en} le nombre de noeuds dans l'élément e .

La formulation requiert la dérivée première et seconde des fonctions de forme par rapport à x :

$$N_{a,x}(\xi) = \frac{N_{a,\xi}(\xi)}{x_{,\xi}(\xi)}, \quad N_{a,xx}(\xi) = \frac{N_{a,\xi\xi}(\xi)}{x_{,\xi}^2(\xi)} - \frac{N_{a,\xi}(\xi)x_{,\xi\xi}(\xi)}{x_{,\xi}^3(\xi)}$$

La formulation algébrique est donc :

Trouver $U \in \mathbb{R}^p$ avec $p = n_{np} - 2 = n_{el}M - 1$:

$$\mathcal{A}U = f \tag{1.44}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A} = match(A_{el}), & \mathcal{A} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^p) \\ f_i = L(N_i), & f \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

L'opérateur d'assemblage *match* assemble correctement les coefficients des matrices de raideur A_{el} afin de compléter le problème algébrique. Ceci du au fait que les fonctions de forme ont leur support sur une cellule, voir (Def. 11), l'assemblage est donc fait en conséquence.

On peut détailler la composition des matrices A_{el} pour les méthodes. Les matrices dues à la formulation GLS sont en gras. La matrice A_{el} peut être décomposée en six matrices telles que $A_{ij}^k = A^k(N_i, N_j)$:

$$\begin{aligned} A^1(w^h, v^h) &= \int_0^1 w^h b v_{,x}^h dx, & A^2(w^h, v^h) dx &= \int_0^1 w_{,x}^h c v_{,x}^h dx \\ A^3(w^h, v^h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{K_e} (b w_{,x}^h) \tau(b v_{,x}^h) dx, & A^4(w^h, v^h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{K_e} (b w_{,x}^h) \tau(-c v_{,xx}^h) dx \\ \mathbf{A}^5(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{K_e} (c w_{,xx}^h) \tau(b v_{,x}^h) dx, & \mathbf{A}^6(\mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h) &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{K_e} (c w_{,xx}^h) \tau(-c v_{,xx}^h) dx \end{aligned}$$

On se propose de mener la fin de l'étude sur une subdivision avec des éléments de dimension identique h . On considère maintenant la subdivision au sein d'un élément 1D de degré M sur le domaine de référence $[0, 1]$. Pour plus de détail voir le chapitre 3.

Soit $(\xi)_{i \in [1, M+1]}$ une subdivision régulière homogène de $[0, 1]$. Alors $\xi_i = \frac{i-1}{M}$, $\xi_i - \xi_j = \frac{i-j}{M}$ et les fonctions de forme Lagrangienne associée à l'élément de référence sur $[0, 1]$ sont $N_i(\xi) = \prod_j \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$, $j \in [1, i-1] \cup [i+1, M+1]$, $i \in [1, M+1]$. On peut donc donner des formules générales pour le calcul de ces fonctions de forme.

Pour tout $i \in [1, M+1]$ avec $C(M, i) = \frac{(-1)^{M-i+1} M^M}{(i-1)!(M+1-i)!}$

$$N_i(\xi) = C(M, i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M+1} (\xi - \xi_j) \quad (1.45)$$

$$N_{i,\xi}(\xi) = C(M, i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \{i,j\}}}^{M+1} (\xi - \xi_k) \quad (1.46)$$

$$N_{i,\xi\xi}(\xi) = C(M, i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \{i,j\}}}^{M+1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq \{i,j,k\}}}^{M+1} (\xi - \xi_l) \quad (1.47)$$

Lemme 7 Soit $M \geq n$ et N_j la j -ème fonction de forme Lagrangienne d'un élément de référence 1D sur $[0, 1]$ de degré M avec ses noeuds equirépartis ξ_k $k \in [1, M+1]$. Alors :

$$\sum_{j=1}^{M+1} j^n N_j(\xi) = (M\xi + 1)^n \quad (1.48)$$

avec $P(\xi) = \prod_{j=1}^{M+1} (M\xi - j + 1)$ et $\gamma = \frac{M^2 + 3M + 4}{2}$ alors :

$$\sum_{j=1}^{M+1} j^{M+1} N_j(\xi) = (M\xi + 1)^{M+1} - P(\xi) \quad (1.49)$$

$$\sum_{j=1}^{M+1} j^{M+2} N_j(\xi) = (M\xi + 1)^{M+2} - P(\xi)(M\xi + \gamma) \quad (1.50)$$

Preuve : Cas $M \geq n$: $P(\xi) = \sum_{j=1}^{M+1} j^n N_j(\xi) - (M\xi + 1)^n$ est un polynôme de degré M . $N_j(\xi_i) = \delta_i^j$ et $(M\xi_i + 1)^n = i^n$ ainsi $P(\xi_i) = 0 \forall i \in [1, M+1]$. $P(\xi)$ a $M+1$ racines donc $P(\xi) = 0$ et (Eq. 1.48).

Cas $n = M+1$: $P(\xi) = \sum_{j=1}^{M+1} j^M + 1 N_j(\xi) - (M\xi + 1)^{M+1}$ est un polynôme de degré $M+1$. $N_j(\xi_i) = \delta_i^j$ et $(M\xi_i + 1)^{M+1} = i^{M+1}$ donc $P(\xi_i) = C_M \prod_{j=1}^{M+1} (\xi_i - \xi_j) \forall i \in [1, M+1]$. Comme $\sum_{j=1}^{M+1} j^{M+1} N_j(\xi)$ est un polynôme de degré M et $P(\xi)$ de degré $M+1$ alors $C_M = -M^{M+1}$, ce qui permet de conclure (Eq. 1.49)

Cas $n = M+2$: même raisonnement que pour $n = M+1$ sauf que l'on a une racine inconnue. Donc on pose $\sum_{j=1}^{M+1} j^{M+2} N_j(\xi) = (M\xi + 1)^{M+2} - P(\xi)(M\xi + \gamma)$ et on calcule γ sachant que $(M\xi + 1)^{M+2} - P(\xi)(M\xi + \gamma)$ est un polynôme de degré M . On obtient $\gamma = \frac{M^2 + 3M + 4}{2}$ et donc (Eq. 1.50). $\square$

Lemme 8 Soit $M \geq n$ et N_j la j -ème fonctions de forme Lagrangienne d'un élément de référence 1D sur $[0, 1]$ de degré M avec ses noeuds equirépartis ξ_k $k \in [1, M+1]$. Alors :

$$\sum_{j=1}^{M+1} j^n N_j^{(k)}(\xi) = M^k \frac{n!}{(n-k)!} (M\xi + 1)^{n-k} = M^k \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=1}^{M+1} j^{n-k} N_j(\xi) \quad (1.51)$$

Preuve : On prend la k -ème dérivée de (Eq. 1.48) $\square$

Lemme 9 Soit $\xi \in [0, 1]$, $P(\xi) = \prod_{j=1}^{M+1} (M\xi - j + 1)$ avec M pair. Alors :

$$P\left(\frac{1}{2} - \xi\right) = -P\left(\xi - \frac{1}{2}\right) \quad (1.52)$$

Soit v_h une fonction avec son support sur $[0, 1]$ et $v_h\left(\frac{1}{2} - \xi\right) = v_h\left(\xi - \frac{1}{2}\right)$, alors :

$$\int_0^1 v_h(\xi) P(\xi) d\xi = 0 \quad (1.53)$$

Preuve : Soit $M = 2p$. On fait le changement de variable $\eta = \xi - \frac{1}{2}$

$P(\eta) = \prod_{j=1}^{2p+1} (2p\eta - j + p + 1) = 2p\eta \prod_{j=1}^p (2p\eta + j) \prod_{j=1}^p (2p\eta - j)$. On obtient $P(-\eta) = -P(\eta)$. (Eq. 1.53) est alors évident. $\square$

On choisit de diviser le domaine physique de manière homogène et régulier.

Les points du maillage sont $(x_i)_{i \in [1, n_{np}]}$. Ainsi $x(\xi) = \sum_{j=1}^{M+1} N_j(\xi) x_j$, $x_i = x_1 + \frac{(i-1)h}{M}$

On retrouve logiquement, pour un élément :

$$x(\xi) = x_1 + \frac{h}{M} \left(\sum_{i=1}^{M+1} i N_i(\xi) - 1 \right) = x_1 + h\xi \quad (1.54)$$

$$x_{,\xi}(\xi) = \frac{h}{M} \sum_{i=1}^{M+1} i N_{i,\xi}(\xi) = h \quad x_{,\xi\xi}(\xi) = \frac{h}{M} \sum_{i=1}^{M+1} i N_{i,\xi\xi}(\xi) = 0 \quad (1.55)$$

On a donc l'expression des dérivées secondes et premières en x des fonctions de forme. Avec

$$C(M, i) = \frac{(-1)^{M-i+1} M^M}{(i-1)!(M+1-i)!}$$

$$N_{i,x}(\xi) = \frac{1}{h} C(M, i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M+1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \{i,j\}}}^{M+1} (\xi - \xi_k) \quad (1.56)$$

$$N_{i,xx}(\xi) = \frac{1}{h^2} C(M, i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M+1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \{i,j\}}}^{M+1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq \{i,j,k\}}}^{M+1} (\xi - \xi_l) \quad (1.57)$$

On fait l'hypothèse que les paramètres (b, c) sont constants dans un élément. On peut réécrire les équations avec le nombre de Peclet discret $\alpha = \frac{bh}{c}$, un réel $\bar{\xi} = \frac{a\tau}{h}$ et en effectuant le changement de variable $\bar{x} = \frac{x-x_{e1}}{h}$ avec x_{e1} la coordonnée du premier noeud de l'élément e

$$\begin{aligned}
A^1(N_i, N_j) &= b \int_0^1 N_i N_{j,\bar{x}} d\bar{x}, & A^2(N_i, N_j) &= \frac{b}{\alpha} \int_0^1 N_{i,\bar{x}} N_{j,\bar{x}} d\bar{x} \\
A^3(N_i, N_j) &= b\bar{\xi} \int_0^1 N_{i,\bar{x}} N_{j,\bar{x}} d\bar{x}, & A^4(N_i, N_j) &= -\frac{b\bar{\xi}}{\alpha} \int_{-1}^1 N_{i,\bar{x}} N_{j,\bar{x}} d\bar{x} \\
\mathbf{A}^5(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j) &= \frac{b\bar{\xi}}{\alpha} \int_{-1}^1 N_{i,\bar{x}} N_{j,\bar{x}} d\bar{x}, & \mathbf{A}^6(\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j) &= -\frac{b\bar{\xi}}{\alpha^2} \int_{-1}^1 N_{i,\bar{x}} N_{j,\bar{x}} d\bar{x}
\end{aligned}$$

On peut remarquer $A^3 = \bar{\xi}\alpha A^2$ et $\mathbf{A}^5 = -(A^4)^t$.

Souvenons-nous que $f_i = L(N_i)$ avec $L(w^h) = A(w^h, g^h)$. La fonction g^h est la fonction de forme associée au $x = 1$. Ce point n'est connecté qu'avec les noeuds du dernier élément. Ainsi : Pour $j \in \{\text{Dernier element}\}$, $f_j = L(N_j) = A(N_j, N_{np})$ et $j \notin \{\text{Dernier element}\}$, $f_j = 0$

$$f = (0 \dots 0 \ A(N_1, N_{np}) \dots A(N_j, N_{np}) \dots A(N_{np-1}, N_{np}))$$

1.2.3.2.4 Calcul d'un τ optimal

Le solution discrète exacte est :

$$u_n = \frac{e^{\frac{\alpha(n-1)}{M}} - 1}{e^{\frac{\alpha}{h}} - 1}, \quad n \in [2, n_{np} - 1] \quad (1.58)$$

En remplaçant dans le système algébrique précédent on obtient le système d'équations suivant : avec $v_k = kM + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_j \mathcal{A}_{i,j} u_j &= 0, & j &\in [v_0 + 1, v_1], & i &\in [v_0 + 1, v_1 - 1] \\
\sum_j \mathcal{A}_{v_1,j} u_j &= 0, & j &\in [v_0 + 1, v_2] \\
\sum_j \mathcal{A}_{i,j} u_j &= 0, & j &\in [v_{k-1}, v_k], & i &\in [v_{k-1} + 1, v_k - 1], & k &\in [2, n_{el} - 1] \\
\sum_j \mathcal{A}_{v_k,j} u_j &= 0, & j &\in [v_{k-1}, v_{k+1}], & k &\in [2, n_{el} - 2] \\
\sum_j \mathcal{A}_{v_{n_{el}-1},j} u_j &= A(N_1, N_{np}), & j &\in [v_{n_{el}-2}, v_{n_{el}} - 1] \\
\sum_j \mathcal{A}_{i,j} u_j &= A(N_i, N_{np}), & j &\in [v_{n_{el}-1}, v_{n_{el}} - 1], & i &\in [v_{n_{el}-1} + 1, v_{n_{el}} - 1]
\end{aligned}$$

On peut en déduire 4 règles pour $k \in [1, n_{el} - 1]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{i,j} &= \mathcal{A}_{i+kM, j+kM} = A(N_i, N_j), \quad i \neq v_k \text{ or } j \neq v_k \\
\mathcal{A}_{v_k, v_k} &= A(N_1, N_1) + A(N_{v_1}, N_{v_1}) = \gamma \\
\sum_{j=v_k+1}^{v_{k+1}} A(N_{v_k}, N_j) u_j &= \sum_{j=v_0+1}^{v_1} A(N_1, N_j) u_{j-v_0+v_k} \\
\sum_{j=v_{k-1}}^{v_k-1} A(N_{v_k}, N_j) u_j &= \sum_{j=v_0}^{v_1-1} A(N_{M+1}, N_j) u_{j-v_0+v_{k-1}}
\end{aligned}$$

On peut réécrire ces équations en utilisant $w_{j,k} = j - v_0 + v_k$:

$$\sum_{j=v_0+1}^{v_1} \mathcal{A}_{i,j} u_j = 0, i \in [v_0 + 1, v_1 - 1] \quad (1.59)$$

$$\sum_{j=v_0+1}^{v_1-1} \mathcal{A}_{v_1,j} u_j + \sum_{j=v_0+1}^{v_1} \mathcal{A}_{1,j} u_{w_{j,1}} + \gamma u_{v_1} = 0 \quad (1.60)$$

$$\sum_{j=v_0}^{v_1} \mathcal{A}_{i,j} u_{w_{j,k-1}} = 0, i \in [2, M], k \in [2, n_{el} - 1] \quad (1.61)$$

$$\sum_{j=v_0}^{v_1-1} \mathcal{A}_{v_1,j} u_{w_{j,k-1}} + \sum_{j=v_0+1}^{v_1} \mathcal{A}_{1,j} u_{w_{j,k}} + \gamma u_{v_k} = 0, k \in [2, n_{el} - 2] \quad (1.62)$$

$$\sum_{j=v_0}^{v_1-1} \mathcal{A}_{v_1,j} u_{w_{j,n_{el}-2}} + \sum_{j=v_0+1}^{v_1-1} \mathcal{A}_{1,j} u_{w_{j,n_{el}-1}} + \gamma u_{v_{n_{el}-1}} = A(N_1, N_{np}) \quad (1.63)$$

$$\sum_{j=v_0}^{v_1-1} \mathcal{A}_{i,j} u_{w_{j,n_{el}-1}} = A(N_i, N_{np}), i \in [v_0 + 1, v_1 - 1] \quad (1.64)$$

L'avantage de cette écriture est d'avoir des sommations entre v_0 et v_1 , on peut alors noter que tous les coefficients sont exprimés sur les fonctions de forme du premier élément.

Un τ optimal est donc un τ tel que (Eq. 1.61), (Eq. 1.62) soient toujours vraies. Une dernière propriété de ces équations est $\sum_{j=v_0}^{v_1} \mathcal{A}_{i,j} = 0$ alors (Eq. 1.61), (Eq. 1.62) sont toutes équivalentes quelque soit k .

On peut donc simplifier ces équations :

$$\sum_{j=1}^{M+1} A_{i,j} e^{\alpha j/M} = 0, i \in [2, M] \quad (1.65)$$

$$\sum_{j=1}^{M+1} e^{\alpha j/M} \{A_{M+1,j} e^{-\alpha/2} + A_{1,j} e^{\alpha/2}\} = 0 \quad (1.66)$$

On en déduit les formules suivantes pour τ

Soient $a_{i,j}^k$ les termes de la matrice A^k et $f_j^k = a_{M+1,j} e^{-\alpha/2} + a_{1,j} e^{\alpha/2}$

$$\overline{\xi_1} = \frac{\alpha \sum_{j=1}^{M+1} (\alpha f_j^1 + f_j^2) e^{\alpha j/M}}{\sum_{j=1}^{M+1} (-\alpha^2 f_j^3 + \alpha(f_j^4 - \mathbf{f}_j^5) + \mathbf{f}_j^6) e^{\alpha j/M}} \quad (1.67)$$

$$\overline{\xi_i} = \frac{\alpha \sum_{j=1}^{M+1} (\alpha a_{i,j}^1 + a_{i,j}^2) e^{\alpha j/M}}{\sum_{j=1}^{M+1} (-\alpha^2 a_{i,j}^3 + \alpha(a_{i,j}^4 - \mathbf{a}_{i,j}^5) + \mathbf{a}_{i,j}^6) e^{\alpha j/M}}, \quad i \in [2, M] \quad (1.68)$$

Faisons un petit constat d'échec à ce stade. On a M équations pour un paramètre. Hormis pour $M = 1$ on risque d'être assez déçu... Ou pas, car on fait cet exercice dans le but d'éviter d'avoir

un paramètre τ surdimensionné qui ajouterait trop de diffusion artificielle. Si on voulait obtenir un τ optimal au sens propre, il faudrait considérer le positionnement des noeuds milieux des éléments d'ordre élevé. Mais là encore, il est possible que des problématiques surviennent avec les limitations liées à la nécessité de respecter la condition de C^1 -difféomorphisme, voir (Def. 1.2). Donc notre intérêt n'est que d'obtenir des résultats asymptotiques pour $\alpha \rightarrow \infty$ et $\alpha \rightarrow 0$.

Résultat asymptotique pour $\alpha \rightarrow \infty$

Pour $\alpha \rightarrow \infty$

$$\overline{\xi}_i \sim -\frac{a_{i,M+1}^1}{a_{i,M+1}^3} \sim -\frac{\int_0^1 N_i N_{M+1,\xi} d\xi}{\int_0^1 N_{i,\xi} N_{M+1,\xi} d\xi}, \quad i \in [1, M] \quad (1.69)$$

Une des caractéristiques principales de ce résultat est son indépendance au type de la méthode

P1	1			
P2	1	$\frac{1}{2}$		
P3	$\frac{7}{13}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{19}{63}$	
P4	$\frac{107}{347}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{67}{254}$	$\frac{23}{107}$

TABLE 1.1 – Valeur des 2ξ pour les degrés ≤ 4

(SUPG ou GLS).

En dessous du degré 4 il n'y a pas de comportement particulier, on donne donc le tableau (Tab. 1.1). En revanche pour $M > 4$ on remarque que le τ "optimal" suit grossièrement la règle $\frac{1}{2M-5}$.

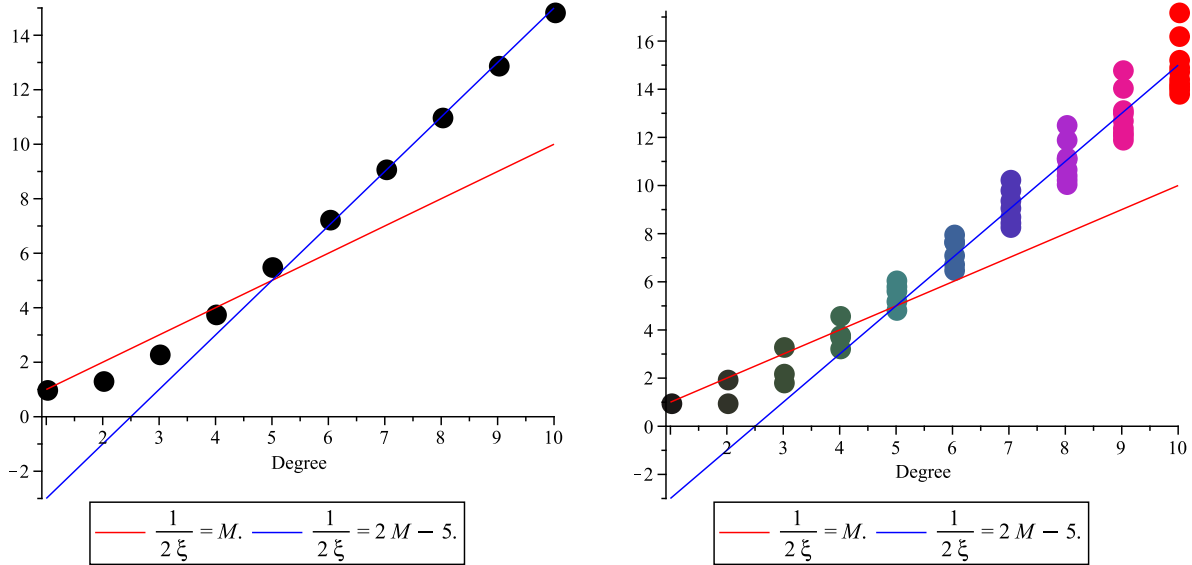


FIGURE 1.4 – Moyenne des $\frac{1}{2\xi}$ et les $\frac{1}{2M-5}$

Résultat asymptotique pour $\alpha \rightarrow 0$

Lemme 10 Soit N_j la j -ème fonctions de forme Lagrangienne d'un élément de référence 1D sur $[0, 1]$ de degré M avec ses noeuds equirépartis ξ_k $k \in [1, M+1]$, $M \geq k$, $p \geq 1$ and $v^h \in H^1(\Omega)$.

$$\int_0^1 v^h \left(\sum_{j=1}^{M+1} \frac{j^k}{Mk} N_j^{(p)} - \sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} N_j^{(p-1)} \right) = 0 \quad (1.70)$$

Supposons $v^h(0) = 0$ et $v^h(1) = 0$

$$\int_0^1 v_{,\xi}^h \sum_{j=1}^{M+1} \frac{j^k}{Mk} N_j^{(p)} + v^h \sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} N_j^{(p)} = 0 \quad (1.71)$$

Preuve : (Eq. 1.70) est une conséquence directe du Lemme 8. (Eq. 1.71) est d'abord intégrée par partie pour obtenir $\int_0^1 v_{,\xi}^h \left(\sum_{j=1}^{M+1} \frac{j^k}{Mk} N_j^{(p)} - \sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} N_j^{(p)} \right)$ sachant que $v^h(0) = 0$ et $v^h(1) = 0$. On utilise ensuite (Eq. 1.70). $\square$

Le développement en série de Taylor de $D_i(\alpha) = \alpha \sum_{j=1}^{M+1} (\alpha a_{i,j}^1 + a_{i,j}^2) e^{\alpha j/M}$ avec $i \in [2, M]$ quand $\alpha \rightarrow 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ est :

$$D_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{M+1} a_{i,j}^2 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{M^{k-1}(k-1)!} \left(\sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} (a_{i,j}^1 + \frac{j}{Mk} a_{i,j}^2) \right) + O(\alpha^{n+1})$$

Or $\sum N_{i,\xi} = 0$ et (Eq. 1.71) on obtient :

$$D_i(\alpha) = \sum_{k=M+1}^n \frac{\alpha^k}{M^{k-1}(k-1)!} \left(\sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} (a_{i,j}^1 + \frac{j}{Mk} a_{i,j}^2) \right) + O(\alpha^{n+1}), \quad n \geq M+1$$

Dans le cas où $M = 2p$, $p \in \mathbb{N}$ alors $N_{p-1}(\frac{1}{2} - \xi) = N_{p-1}(\xi - \frac{1}{2})$. Dérivée d'un fonction pair est impair et réciproquement. Avec le lemme 9 on obtient ce résultat asymptotique D_i , $i \in [2, M] \setminus \{p+1 | M = 2p\}$.

$$D_i(\alpha) \sim \begin{cases} \frac{-\alpha^{M+1}}{M^{M+1}(M+1)!} \int_0^1 N_{i,\xi} P(\xi)_{,\xi} d\xi \\ \frac{\alpha^{M+2}}{M^{M+1}(M+1)!} \int_0^1 N_{p,\xi} \left(P(\xi) \frac{M+1}{M+2} - \frac{M\xi + \gamma}{M(M+2)} P(\xi)_{,\xi} \right) d\xi \end{cases} \quad (1.72)$$

Le développement en série de Taylor de $R_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{M+1} (-\alpha^2 a_{i,j}^3 + \alpha(a_{i,j}^4 - \mathbf{a}_{i,j}^5) + \mathbf{a}_{i,j}^6) e^{\alpha j/M}$ avec $i \in [2, M]$ quand $\alpha \rightarrow 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ est :

$$\begin{aligned} R_i(\alpha) = & \alpha \left(\sum_{j=1}^{M+1} a_{i,j}^4 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{M^{k-1}(k-1)!} \left(\sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} (-a_{i,j}^3 + \frac{j}{Mk} a_{i,j}^4) \right) + O(\alpha^{n+1}) \right) \\ & + \sum_{j=1}^{M+1} \mathbf{a}_{i,j}^6 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{M^{k-1}(k-1)!} \left(\sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} (-\mathbf{a}_{i,j}^5 + \frac{j}{Mk} \mathbf{a}_{i,j}^6) \right) + O(\alpha^{n+1}) \end{aligned}$$

Encore $\sum N_{i,\xi} = 0$ et (Eq. 1.70) on obtient :

$$R_i(\alpha) = \alpha \left(\sum_{k=M+1}^n \frac{\alpha^k}{M^{k-1}(k-1)!} \left(\sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} (-a_{i,j}^3 + \frac{j}{Mk} a_{i,j}^4) \right) + O(\alpha^{n+1}) \right) \\ + \sum_{k=M+1}^n \frac{\alpha^k}{M^{k-1}(k-1)!} \left(\sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} (-\mathbf{a}_{i,j}^5 + \frac{j}{Mk} \mathbf{a}_{i,j}^6) \right) + O(\alpha^{n+1})$$

On utilise le lemme 9 et on obtient le résultat asymptotique R_i , $i \in [2, M] \setminus \{p+1 | M = 2p\}$.

$$R_i^{SUPG}(\alpha) \sim \frac{-\alpha^{M+2}}{M^{M+1}(M+1)!} \int_0^1 N_{i,\xi} P(\xi)_{,\xi\xi} d\xi \quad (1.73)$$

$$R_i^{GLS}(\alpha) \sim \begin{cases} \frac{-\alpha^{M+1}}{M^{M+1}(M+1)!} \int_0^1 N_{i,\xi\xi} P(\xi)_{,\xi\xi} d\xi \\ \frac{\alpha^{M+2}}{M^{M+1}(M+2)!} \int_0^1 N_{p,\xi\xi} \left(MP(\xi)_{,\xi} - \frac{1}{M} (M\xi + \gamma) P(\xi)_{,\xi\xi} \right) - (M+2) N_{p,\xi} P(\xi)_{,\xi\xi} d\xi \end{cases} \quad (1.74)$$

Et au final on a pour $i \in [2, M] \setminus \{p+1 | M = 2p\}$

$$\xi_i^{SUPG} \sim \frac{\int_0^1 N_{i,\xi} P(\xi)_{,\xi} d\xi}{\int_0^1 N_{i,\xi} P(\xi)_{,\xi\xi} d\xi} \quad (1.75)$$

$$\xi_p^{SUPG} \sim \frac{\alpha \int_0^1 N_{p,\xi} \left(P(\xi) \frac{M+1}{M+2} - \frac{M\xi + \gamma}{M(M+2)} P(\xi)_{,\xi} \right) d\xi}{\int_0^1 N_{i,\xi} P(\xi)_{,\xi\xi} d\xi} \quad (1.76)$$

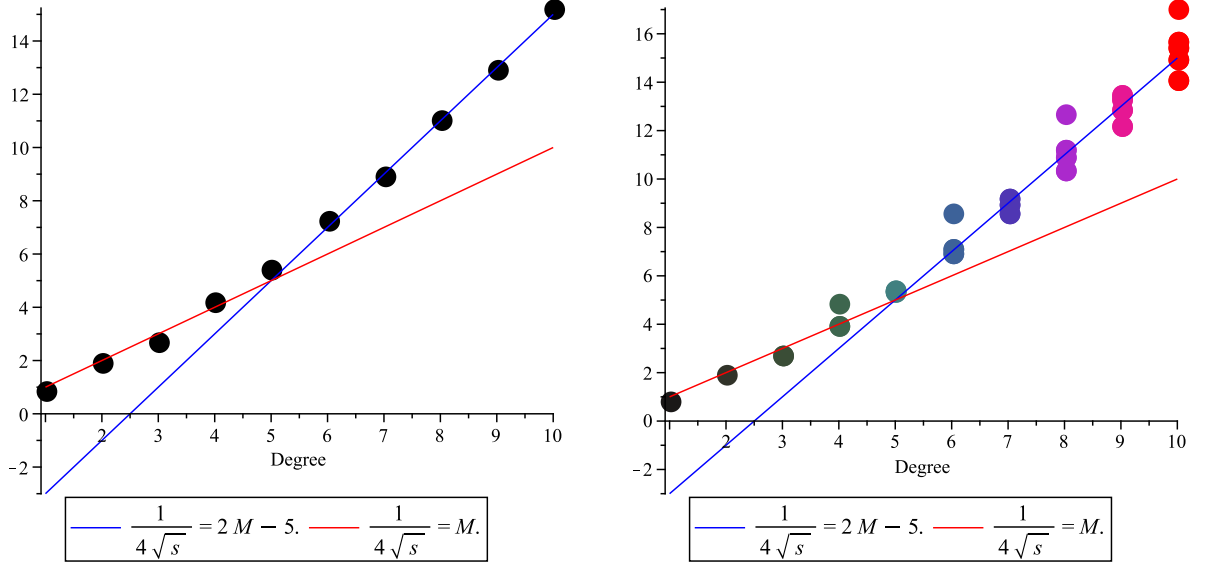
$$\xi_i^{GLS} \sim \frac{\alpha \int_0^1 N_{i,\xi} P(\xi)_{,\xi} d\xi}{\int_0^1 N_{i,\xi\xi} P(\xi)_{,\xi\xi} d\xi} \quad (1.77)$$

$$\xi_p^{GLS} \sim \frac{\alpha \int_0^1 N_{p,\xi} \left(P(\xi)(M+1) - \frac{M\xi + \gamma}{M} P(\xi)_{,\xi} \right) d\xi}{\int_0^1 N_{p,\xi\xi} \left(MP(\xi)_{,\xi} - \frac{M\xi + \gamma}{M} P(\xi)_{,\xi\xi} \right) - (M+2) N_{p,\xi} P(\xi)_{,\xi\xi} d\xi} \quad (1.78)$$

On peut remarquer que pour la méthode GLS on a toujours $\xi \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$. On ne donnera que la valeur de la pente initiale s as $\alpha \rightarrow 0$.

P1	$\frac{1}{3}$		
P2	$\frac{1}{15}$		
P3	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	
P4	$\frac{1}{68}$	$\frac{89}{8535}$	$\frac{1}{68}$

TABLE 1.2 – Valeur de $4s$ pour un degré ≤ 4

FIGURE 1.5 – Moyenne des $\frac{1}{4\sqrt{s}}$ et $\frac{1}{4\sqrt{s}}$

Pour ξ_1 nous ne donnerons pas de résultats, car les résultats sont similaires mais l'obtention de la formule est plus ardue car le lemme 10 ne s'applique pas, en fait il faudrait utiliser le lemme suivant :

Lemme 11 Soit N_j la j -ème fonctions de forme Lagrangienne d'un élément de référence 1D sur $[0, 1]$ de degré M avec ses noeuds equirepartis ξ_k $k \in [1, M + 1]$, $M \geq k$, $p \geq 1$ and $v^h \in H^1(\Omega)$. Supposons $v^h(0) = 0$ et $v^h(1) = 1$

$$\int_0^1 v_{,\xi}^h \sum_{j=1}^{M+1} \frac{j^k}{Mk} N_j^{(p)} + v^h \sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} N_j^{(p)} = -1 \quad (1.79)$$

$$\int_0^1 v_{,\xi}^h \sum_{j=1}^{M+1} \frac{j^k}{Mk} N_j^{(p)} + v^h \sum_{j=1}^{M+1} j^{k-1} N_j^{(p)} = (M+1)^{k-1} \quad (1.80)$$

1.2.4 Schéma de distribution du résidu (RDS)

La propriété de monotonie est essentielle pour un schéma quand on doit résoudre des problèmes ayant pour base un contexte physique.

Par exemple, si on traite d'une équation de transport et que l'on transporte une quantité positive, il est préférable d'avoir un schéma qui n'introduit pas de valeurs négatives. Autrement on peut obtenir une solution valable mathématiquement mais inutilisable physiquement.

C'est notamment le cas dans les modèles de turbulence où les paramètres peuvent être la viscosité, l'énergie cinétique turbulente, une longueur caractéristique,... Ces paramètres ne peuvent être négatifs car ils en résulteraient une incompatibilité physique du modèle et une analyse erronée. On peut consulter [Kas95] pour une discussion sur le choix du schéma pour résoudre les équations de la turbulence.

On s'intéresse donc à des schémas qui auraient ces propriétés. Le schéma de distribution du résidu a été introduit par Roe [Roe87]. Les schémas RDS sont analogues aux éléments finis

dans le sens où ils héritent du formalisme éléments finis. En revanche ils diffèrent des méthodes précédentes dans la manière dont la solution est obtenue et notamment dans le concept de “distribution de l’information”.

L’idée est de pouvoir calculer le résidu associé à l’équation différentielle sur chaque élément puis de déterminer le ou les noeuds sur lesquels envoyer cette information pour passer d’une information élémentaire à une information nodale et corriger la solution afin de s’approcher de la solution exacte au problème discret.

Du fait que la “précision” provient du calcul du résidu (grâce à (Thm. 2)) on peut se donner toute latitude dans la manière dont on distribue ce résidu. Il existe ainsi un grand nombre de manière de distribuer le résidu on peut citer le schéma N ,LDA, PSI, de type *Lax-Friedrich*,... Seule l’imagination, les conditions de monotonie et surtout la stabilité sont la limite.

Ces méthodes sont données et discutées dans [Abg01] [Abg06] [ALR09]. Comme le souligne ces références le passage à l’ordre élevé est plus problématique pour deux raisons.

Tout d’abord la propriété “one-target”. A travers l’étude précédente sur les schémas de type SUPG, on comprend le besoin qu’il existe de traiter les termes d’advection de façon décentrée. C’est ce que se proposent de faire les différents schémas en distribuant le résidu vers le noeud pointé par le terme d’advection $\vec{\lambda}$. On remarque que dans le cas des simplexes il existe des cas où l’on distribue le résidu que vers un seul noeud. C’est la propriété “one-target”. En ce qui concerne les quadrangles ou cubes, cette propriété est perdue et il en résulte un schéma qui nécessite une stabilisation, voir [AM07].

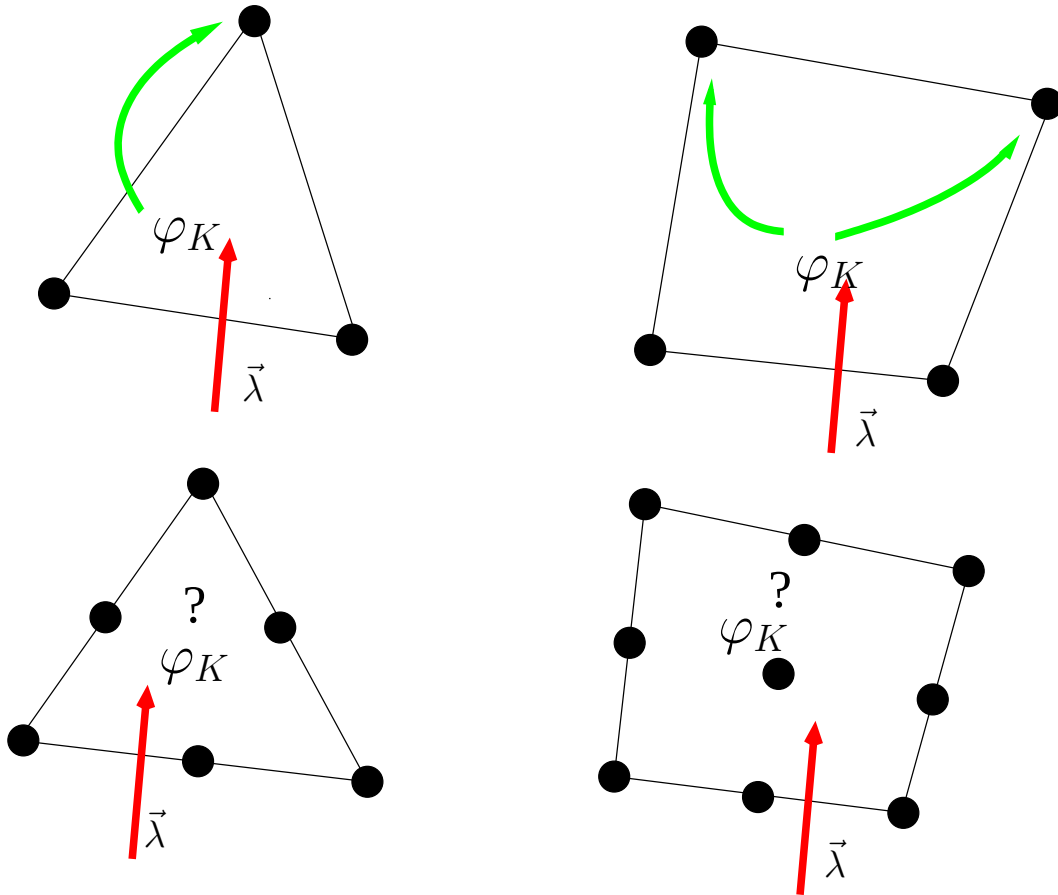


FIGURE 1.6 – Distribution du résidu φ_K dans le cas d’une équation d’advection de paramètre λ

Enfin dans le cas des éléments possédant une base polynomiale d'interpolation de degré plus grande la problématique de la distribution reste entière. Il est difficile d'imaginer un moyen de distribuer l'information équivalente aux éléments linéaires.

On pourrait imaginer un moyen où l'on considère le centre de gravité de l'élément G et de distribuer l'information selon le critère $\vec{\lambda} \cdot G\vec{M}$ où M parcourt les points de définition de l'élément fini et par l'utilisation d'un limiteur ψ tel que $\frac{1}{C} \sum_M \psi(\vec{\lambda} \cdot G\vec{M}) = 1$. Sans implémenter la méthode on voit que le problème lié à cette méthode intervient quand il existe des points à l'intérieur des éléments.

Une autre possibilité est de calculer les résidus d'ordre élevé sur les "sous-éléments" et appliquer un schéma "one-target" afin de distribuer le résidu d'ordre élevé ((Fig. 1.7)) .

La problématique évidente lié à ce schéma est son cout algorithmique. En effet le résidu

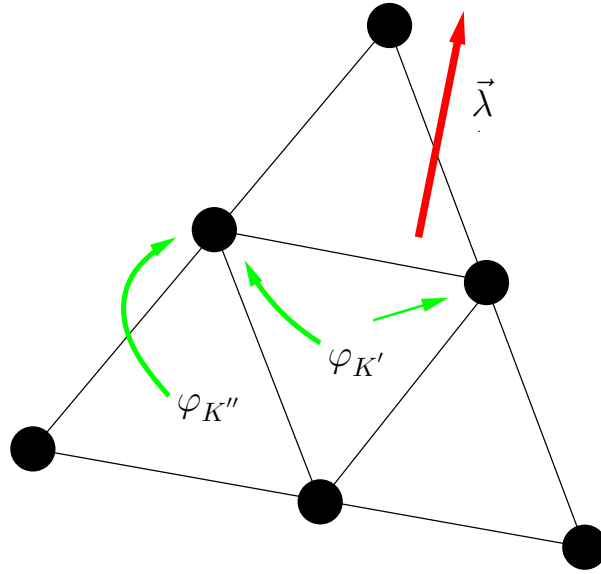


FIGURE 1.7 – Obtention de schéma d'ordre élevé par calcul du résidu sur les sous-éléments de degré élevé

sur chaque sous-élément doit être calculé avec une règle d'intégration suffisamment grande (voir 1.3.2). Le schéma d'ordre élevé est donc d'autant plus couteux que le rapport des points d'intégration entre l'élément linéaire et l'élément de degré élevé est grand.

On se propose de donner une construction générale au schéma d'ordre élevé en partant d'un point de vu "résidus pondérés".

Définition 18 (Résidu) Soit v dans l'espace fonctionnel.

On note $r^h(v) = r(\Pi(v))$ le résidu associé à l'opérateur différentiel appliqué à v

Le résidu intégral global sur Ω est $\langle r^h(v), r^h(v) \rangle_\Omega$

On cherche à résoudre v tel que $r^h(v) = 0$.

Définition 19 (Flux) Soit v dans l'espace fonctionnel.

$\varphi_K = \langle 1, r^h(v) \rangle_K$ est le flux global sur l'élément K

$\varphi_K^i = \langle \gamma_i, r^h(v) \rangle_K$ avec γ_i est une fonction à support sur K telle que $\sum_{i \in K} \gamma_i = 1$.

$S_K^i = \langle \mathbf{s} \cdot \nabla \gamma_i, r^h(v) \rangle_K$ est le flux de diffusion le long d'une ligne de courant

Remarque : $\sum_{i \in K} \varphi_K^i = \varphi_K$ on interprète donc γ_i comme une fonction de distribution. Dans le cas où les γ_i sont les fonctions de la base interpolante de l'élément fini on récupère une méthode de *Galerkin* et S_K^i est en un sens un terme SUPG.

Définition 20 (Paramètre de distribution) $\beta_K^i = \Psi(\frac{\varphi_K^i}{\varphi_K})$ où $\Psi(\cdot)$ est un limiteur tel que $0 \leq \Psi(r) \leq 1$ pour $r \in \mathbb{R}$ et si $\sum_{i \in K} r_i = 1$ alors $\sum_{i \in K} \Psi(r_i) = 1$

Remarque : Toute discussion sur le limiteur choisi $\Psi(\cdot)$ pourra être complétée en consultant [RS95].

Définition 21 (Schéma) Avec h_K le paramètre défini par (Def. 4)

$$\widetilde{\phi}_K^i = \beta_K^i \phi_K + h_K S_K^i \quad (1.81)$$

$$\widetilde{\phi}^i = \sum_{i \ni K} \widetilde{\phi}_K^i \quad (1.82)$$

$$v_i^{n+1} - v_i^n = -\delta t \widetilde{\phi}^i \quad (1.83)$$

Propriété 1 (Conservation)

$$\sum_{i \in K} \beta_K^i = \sum_{i \in K} \Psi(\frac{\phi_K^i}{\phi_K}) = 1 \quad \forall i \quad 0 \leq \beta_K^i \leq 1 \quad (1.84)$$

$$\sum_{i \in K} \widetilde{\phi}_K^i = \sum_{i \in K} \phi_K^i = \sum_{i \in K} \beta_K^i \phi_K = \phi_K \quad (1.85)$$

$$\sum_K \sum_{i \in K} \widetilde{\phi}_K^i = \sum_i \sum_{i \ni K} \widetilde{\phi}_K^i = \langle 1, r^h(v) \rangle_{\Omega_h} \quad (1.86)$$

$$\sum_i \phi^i = \langle 1, r^h(v) \rangle_{\Omega_h} \quad (1.87)$$

A cause du terme de type SUPG on ne peut garantir la positivité du schéma que lorsque $h_K \rightarrow 0$. Les propriétés d'estimation de l'erreur sont tirées de l'approche suivie dans [AR03]. Soit $w \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)$ et w^h un interpolant de $\{w(\sigma)\}_\sigma$ such that $w^h = \sum_\sigma \psi_\sigma w(\sigma)$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_\sigma w(\sigma) \sum_{K \ni \sigma} \phi_K^\sigma &= \sum_\sigma \sum_{K \ni \sigma} \frac{w(\sigma)}{\text{Card}\{\sigma \ni K\}} \phi_K^\sigma = \sum_K \sum_{\sigma \in K} \frac{w(\sigma)}{\text{Card}\{\sigma \in K\}} \phi_K^\sigma \\ \int_\Omega w^h r^h(v) dx &= \sum_K \frac{1}{\text{Card}\{\sigma \in K\}} \sum_{\sigma \in K} w_\sigma \int_K \psi_\sigma r^h(v) dx = \sum_K \frac{1}{\text{Card}\{\sigma \in K\}} \sum_{\sigma \in K} w_\sigma \phi_{K,G}^\sigma \\ \sum_{\sigma \in K} \phi_{K,G}^\sigma &= \sum_{\sigma \in K} \phi_K^\sigma \end{aligned}$$

D'où,

$$E(v^h, w^h) = \int_\Omega r^h(v) w^h dx + \sum_K \frac{1}{\text{Card}\{\sigma \in K\}} \sum_{\sigma, \sigma' \in K} (w^h(\sigma) - w^h(\sigma')) (\phi_K^\sigma - \phi_{K,G}^\sigma)$$

Proposition 3 (Précision) On suppose que le résidu vérifie la contrainte, avec $m \in \mathbb{N}$

$$\phi_K^\sigma(v) = O(h^{m+d}) \quad (1.88)$$

Alors l'erreur vérifie

$$E(v^h, w^h) \leq C(w, v, r)h^{m+1} \quad (1.89)$$

1.3 Calcul des intégrales

1.3.1 Dérivée dans le domaine physique

On considère des éléments finis de référence (Def. 14). On cherche à avoir des formules nous permettant de calculer la dérivée dans le domaine physique à partir des dérivées dans le domaine de référence. On rappelle que $u^h = \sum_{i=1}^N N_i(\boldsymbol{\xi})\mu_i$ et il existe une transformation géométrique telle que $\phi_K(\hat{K}) = K$, avec $\phi_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

1.3.1.1 Dérivée première dans le domaine physique K

On a la relation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$$

avec les notations suivantes $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$ et $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ on peut récrire la formule vectorielle équivalente, ou $(., x)$ est l'opérateur de dérivation par rapport au vecteur x

$$f, \mathbf{x} = f, \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}$$

Seule $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$, la matrice jacobienne, peut être évaluée analytiquement car elle reste polynomiale. On note la matrice jacobienne de la transformation $\phi(\boldsymbol{\xi})$:

$$J = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}$$

et son inverse

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}$$

On peut noter que $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} = \mathbb{I}$. Sachant que $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} = \mathbb{I}$ alors $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{-1}$. On a donc tous les ingrédients pour calculer la dérivée de f dans le domaine physique.

$$f, \mathbf{x} = u, \boldsymbol{\xi}^h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{-1} = f, \boldsymbol{\xi}(\phi_K(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})^{-1}$$

Le terme $(\phi_K(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})^{-1}$ est calculé analytiquement grâce à la méthodes des cofacteurs. Ainsi $(\phi_K(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})^{-1} = \frac{1}{\det(\phi_K(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})} \text{com}(\phi_K(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$, on peut noter que si la transformation ϕ_K est polynomiale alors $\det(\phi_K(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$ est polynomiale et les termes de la comatrice $\text{com}(\phi_K(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})$ sont aussi polynomiaux.

1.3.1.2 Dérivée seconde dans le domaine physique K

On rappelle tout d'abord le théorème de *Schwarz* : $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_l}) = \frac{\partial}{\partial x_l}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ On note la matrice hessienne par rapport au vecteur $\mathbf{x}$: $H_{\mathbf{x}}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. La matrice hessienne est symétrique.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \sum_l \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \\ &= \sum_l \left(\sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \\ &= \sum_{k,l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

On a donc la formule suivante :

$$H_{\mathbf{x}}(f) = (\xi, \mathbf{x})^t H_{\xi}(f)(\xi, \mathbf{x}) + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial \xi_k} H_{\mathbf{x}}(\xi_k) = (\phi_K(\xi), \xi)^{-1t} H_{\xi}(f)(\phi_K(\xi), \xi)^{-1} + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial \xi_k} H_{\mathbf{x}}(\xi_k)$$

On peut tout de suite remarquer que l'on a bien $(H_{\mathbf{x}}(f))^t = ((\xi, \mathbf{x})^t H_{\xi}(f)(\xi, \mathbf{x}))^t + (\sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial \xi_k} H_{\mathbf{x}}(\xi_k))^t = (\xi, \mathbf{x})^t (H_{\xi}(f))^t ((\xi, \mathbf{x})^t)^t + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial \xi_k} (H_{\mathbf{x}}(\xi_k))^t = (\xi, \mathbf{x})^t H_{\xi}(f)(\xi, \mathbf{x}) + \sum_{k=1}^d \frac{\partial f}{\partial \xi_k} H_{\mathbf{x}}(\xi_k) = H_{\mathbf{x}}(f)$.

Le problème majeur étant le calcul des termes du tenseur d'ordre 3 $H_{\mathbf{x}}(\xi) = ((\phi_K(\xi), \xi)^{-1})_{,\xi} (\phi_K(\xi), \xi)^{-1}$. Ce tenseur se calcule de la manière suivante :

$$\underbrace{\left(\underbrace{\text{com}(\phi, \xi)_{,\xi}}_{\mathbb{T}^3} - \underbrace{\frac{\det(\phi, \xi)_{,\xi}}{\det(\phi, \xi)} \otimes \text{com}(\phi, \xi)}_{\mathbb{T} \otimes \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^3} \right)}_{\mathbb{T}^3 \cdot \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2(\mathbb{T}) \cdot \mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2(\mathbb{T} \cdot \mathbb{T}^2) = \mathbb{T}^2(\mathbb{T}) = \mathbb{T}^3} \cdot \frac{\text{com}(\phi, \xi)}{(\det(\phi, \xi))^2}$$

Avec les opérations tensorielles appropriées :

$$H_{\mathbf{x}}(f) = \underbrace{(\xi, \mathbf{x})^t H_{\xi}(f)(\xi, \mathbf{x})}_{\text{terme 1}} + \underbrace{f_{,\xi} H_{\mathbf{x}}(\xi)}_{\text{terme 2}}$$

Le terme 1 correspond à la dérivée seconde paramétrique et le terme 2 à la dérivée seconde géométrique.

1.3.2 Calcul intégral sur les éléments

On note le déterminant de la matrice jacobienne :

$$j(\xi) = \begin{vmatrix} \ddots & & \\ & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} & \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$

Soient $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

On peut résumer l'ensemble des intégrales qu'il sera nécessaire de calculer pour les différents schémas numériques. Notre but est d'exprimer ces intégrales sur le domaine parent avec le changement de variable $\phi(\xi)$

Soit κ un élément de l'espace discrétisé $\mathcal{T}_h$ et $\tilde{\kappa}$ son équivalent sur le domaine parent tel que $\phi(\tilde{\kappa}) = \kappa$. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on prend dans $H^2(\Omega)$ et que l'on considérera comme polynômiale sur l'espace de référence $\tilde{\kappa}$.

Pour des raisons de simplification de notation on note abusivement pour toutes les applications suivantes que $f(\mathbf{x}) \equiv f(\phi(\xi))$, on distingue seulement les fonctions dans le contexte de leur domaine d'intégration.

$$\begin{aligned}
\int_{\kappa} a f g d\mathbf{x} &= \int_{\tilde{\kappa}} a f g j(\xi) d\xi \\
\int_{\kappa} b \cdot (\nabla f) g d\mathbf{x} &= \int_{\tilde{\kappa}} b \cdot (\nabla_{\xi} f \xi, \mathbf{x}) g j(\xi) d\xi \\
\int_{\kappa} a (\nabla f) \cdot (\nabla g) d\mathbf{x} &= \int_{\tilde{\kappa}} a (\nabla_{\xi} f \xi, \mathbf{x}) \cdot (\nabla_{\xi} g \xi, \mathbf{x}) j(\xi) d\xi \\
\int_{\kappa} b \cdot (\nabla f) \Delta g d\mathbf{x} &= \int_{\tilde{\kappa}} b \cdot (\nabla_{\xi} f \xi, \mathbf{x}) \left(\sum_{i,j,k} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i^2} \right) j(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

1.3.3 Evaluation du degré des intégrales

On suppose que les fonctions f et g sont polynômiales sur le domaine de référence. On note k_f le degré de la fonction f , $k_{max} = \max(deg(f), deg(g))$ et $k_{\phi} = deg(\mathbf{x}, \xi)$. On peut exprimer explicitement les termes de l'inverse de la matrice jacobienne.

$$\xi, \mathbf{x} = \frac{1}{j(\xi)} com(\mathbf{x}, \xi)^T$$

Avec la notation tensorielle on obtient une expression explicite avec $\mathbf{x}, \xi = a_j^i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ et $\epsilon_{i_1, \dots, i_d}$ le pseudo tenseur de Levi-Civita.

$$j(\xi) = |a_j^i| = \epsilon_{i_1, \dots, i_d} a_1^{i_1} \cdots a_d^{i_d} \quad com(\mathbf{x}, \xi)^T = \Delta_j^i \quad \xi, \mathbf{x} = \frac{1}{|a_j^i|} \Delta_j^i$$

On peut maintenant estimer le degré de chacun des termes.

$$deg(j(\xi)) = d(k_{\tau} - 1) = k_{det}, \quad deg(com(\mathbf{x}, \xi)^T) = (d - 1)(k_{\tau} - 1) = k_{J-1}$$

On doit aussi déterminer les termes non polynomiaux et les termes polynomiaux.

$$\begin{aligned}
& \underbrace{a(x(\xi))}_{\text{non-polynomial}} \underbrace{fgj(\xi)}_{\text{polynomial}} \\
b \cdot (\nabla_{\xi} f \xi, \mathbf{x}) g j(\xi) &= \underbrace{b(\xi)}_{\text{non-polynomial}} \underbrace{f_{,k}(\xi) \Delta_j^k g}_{\text{polynomial}} \\
a(\nabla_{\xi} f \xi, \mathbf{x}) \cdot (\nabla_{\xi} g \xi, \mathbf{x}) j(\xi) &= \underbrace{\frac{a}{j(\xi)}}_{\text{non-polynomial}} \underbrace{(f_{,i} \Delta_j^i) \cdot (g_{,i} \Delta_j^i)}_{\text{polynomial}} \\
b \cdot (\nabla_{\xi} f \xi, \mathbf{x}) \left(\sum_{i,j,k} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i^2} \right) j(\xi) \\
&= \underbrace{\frac{b}{j^2(\xi)}}_{\text{non-polynomial}} \underbrace{f_{,k} \Delta_j^k \sum_i \left(g_{,jk}(\xi) \Delta_i^j \Delta_i^k j(\xi) - g_{,j}(\xi) a_{p,l}^j \Delta_i^l \Delta_m^p \Delta_i^m \right)}_{\text{polynomial}} \\
\deg(fgj(\xi)) &= k_f + k_g + k_{det} \\
\deg(f_{,k}(\xi) \Delta_j^k g) &= k_f + k_g + k_{J-1} - 1 \\
\deg((f_{,i} \Delta_j^i) \cdot (g_{,i} \Delta_j^i)) &= k_f + k_g + 2(k_{J-1} - 1) \\
\deg(f_{,k}(\xi) \Delta_j^k \sum_i \left(g_{,jk}(\xi) \Delta_i^j \Delta_i^k j(\xi) - g_{,j}(\xi) a_{p,l}^j \Delta_i^l \Delta_m^p \Delta_i^m \right)) &= k_f + k_g + k_{max} + 4(k_{J-1} - 1)
\end{aligned}$$

En supposant que les fonctions f et g sont de même degré alors :

$$\begin{aligned}
\deg(fgj(\xi)) &= 2k + k_{det} = 2k + d(k_{\tau} - 1) \\
\deg(f_{,k}(\xi) \Delta_j^k g) &= 2k + k_{J-1} - 1 = 2k - k_{\tau} + d(k_{\tau} - 1) \\
\deg((f_{,i} \Delta_j^i) \cdot (g_{,i} \Delta_j^i)) &= 2(k + k_{J-1} - 1) = 2(k - k_{\tau} + d(k_{\tau} - 1)) \\
\deg(f_{,k}(\xi) \Delta_j^k \sum_i \left(g_{,jk}(\xi) \Delta_i^j \Delta_i^k j(\xi) - g_{,j}(\xi) a_{p,l}^j \Delta_i^l \Delta_m^p \Delta_i^m \right)) &= 3k - 4k_{\tau} + 4d(k_{\tau} - 1)
\end{aligned}$$

Un certain nombre de remarques sont essentielles à ce point.

On peut tout d'abord dire que les termes des schémas numériques doivent être intégrés avec l'ordre correcte d'approximation (impliquant l'utilisation d'une règle d'intégration suffisante), autrement on peut supposer que l'ordre du schéma sera détérioré.

La deuxième remarque concerne les termes non polynomiaux, nous venons de statuer sur le degré des termes polynomiaux, en revanche, il est évident que pour des éléments suffisamment déformés $\frac{1}{j(\xi)}$ deviennent prépondérant et détruisent l'ordre du schéma. Pour éviter ce désagrément il

est alors nécessaire de recourir à une règle d'intégration plus grande car $\frac{1}{j(\xi)} \sim 1 + \sum_{n=1} (1-j(\xi))^n$, ce qui, en considérant un développement de *Taylor* à l'ordre n , nécessite une règle majorée de $\deg(\frac{1}{j(\xi)}) = n(k_{\tau} - 1)$, pour peu que les variations de $j(\xi)$ soient faibles. D'où

$$\begin{aligned}
\deg(fgj(\xi)) &= k_f + k_g + k_{det} \\
\deg(f_{,k}(\xi) \Delta_j^k g) &= k_f + k_g + k_{J-1} - 1 \\
\deg((f_{,i} \Delta_j^i) \cdot (g_{,i} \Delta_j^i)) &= k_f + k_g + 2(k_{J-1} - 1) + n(k_{\tau} - 1) \\
\deg(f_{,k}(\xi) \Delta_j^k \sum_i \left(g_{,jk}(\xi) \Delta_i^j \Delta_i^k j(\xi) - g_{,j}(\xi) a_{p,l}^j \Delta_i^l \Delta_m^p \Delta_i^m \right)) &= k_f + k_g + k_{max} + 4(k_{J-1} - 1) + 2n(k_{\tau} - 1)
\end{aligned}$$

On en déduit donc deux aspects fondamentaux pour permettre l'utilisation de règles d'intégration avec un nombre de points relativement peu élevé :

- Considérer des éléments dont le degré de la transformation géométrique reste faible
- Faire en sorte que le déterminant de la transformation ait des variations très limitées sur $\tilde{\kappa}$

Nous verrons dans le deuxième chapitre que l'on peut avoir des éléments très déformés mais dont le déterminant de la transformation reste constant à travers (Prop. 2).

(Tab. 1.3) donne le degré de chacun des termes en fonction des paramètres k et k_τ .

k	k_τ	2D				3D			
		$N_1 N_2$	$N_1 \nabla N_2$	$\nabla N_1 \nabla N_2$	$\nabla N_1 \Delta N_2$	$N_1 N_2$	$N_1 \nabla N_2$	$\nabla N_1 \nabla N_2$	$\nabla N_1 \Delta N_2$
1	1	2	1	0		2	1	0	
2	1	4	3	2	2	4	3	2	2
2	2	6	4	4	6	7	5	6	10
3	1	6	5	4	5	6	5	4	5
3	2	8	6	6	9	9	7	8	13
3	3	10	7	8	13	12	9	12	21
4	1	8	7	6	8	8	7	6	8
4	2	10	8	8	12	11	9	10	16
4	3	12	9	10	16	12	9	10	16
4	4	14	10	12	20	17	13	18	32
5	1	10	9	8	11	10	9	8	11
5	2	12	10	10	15	13	11	12	19
5	3	14	11	12	19	16	13	16	27
5	4	16	12	14	23	19	15	20	35
5	5	18	13	16	27	22	17	24	43

TABLE 1.3 – Degré des termes polynomiaux pour k et k_τ en 2D et 3D

1.3.4 Calcul intégral approché : Règles d'intégration

Le calcul intégral approché repose sur le principe suivant : trouver N points sur le domaine d'intégration tels que de coordonnées $\boldsymbol{\nu}_i = \{\nu_j^i\}_{j=1,\dots,d}$ et avec un poids associé w_i :

$$\int_K f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \simeq \sum_{i=1}^N w_i f(\boldsymbol{\nu}_i)$$

Les règles d'intégration pour les triangles et tétraèdres utilisées sont celles du travail de compilation de [Coo03], [Coo99] and [CR93].

Les points de *Gauss* ont été recalculés par un algorithme en quadruple précision pour intégrer des polynômes jusqu'au degré 27 (soit 14 points de *Gauss*). Le principe est simple : calculer les racines a_j de $L_n = (1 - x^2)^{n(n)}$ par une méthode de *Newton-Raphson* puis résoudre un système de *Vandermonde* ($Aw = b$) pour obtenir les poids avec $A_{ij} = (a_j)^i$ et $b_i = \frac{1 - (-1)^n}{n + 1}$. Pour

repasser sur l'intervalle $K = [0, 1]$ on applique $y = \frac{x + 1}{2}$

Afin de tester ces règles on peut évaluer l'erreur commise sur chaque monôme en utilisant les

formules suivantes avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}$ sur l'espace K des simplexes.

$$\begin{aligned} \int_K x^\alpha dx &= \frac{1}{(\alpha + 1)} \\ \int_K x^\alpha y^\beta dx dy &= \sum_{k=0}^{\alpha+1} C_{\alpha+1}^k \frac{(-1)^k}{(\alpha + 1)(k + 1 + \beta)} \\ \int_K x^\alpha y^\beta z^\gamma dx dy dz &= \sum_{k=0}^{\alpha+1} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{j+\beta+1} C_{\alpha+1}^k C_k^j C_{j+\beta+1}^i \frac{(-1)^{k+i}}{(\alpha + 1)(j + 1 + \beta)(k - j + i + 1 + \gamma)} \end{aligned}$$

Les résultats ci-dessous ((Fig. 1.9) et (Fig. 1.10)) sont obtenus en calculant l'intégral exacte (I_{exact}) et l'approximation (I_{approx}), puis on trace l'erreur pour un (α, β) donné en double précision :

$$Err = \log_{10} \left(\left| \frac{I_{exact} - I_{approx}}{I_{exact}} \right| \right)$$

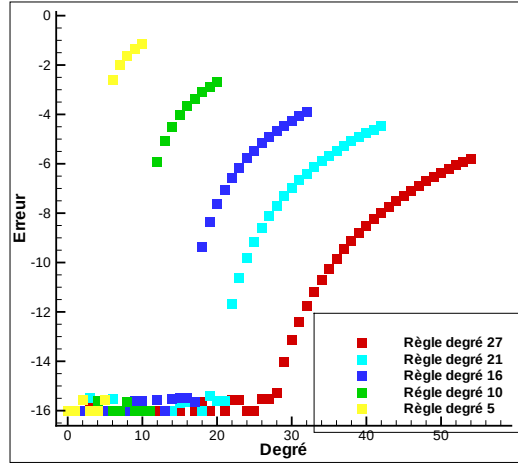


FIGURE 1.8 – Erreur d'approximation pour les règles de quadrature 1D sur le domaine $[0, 1]$

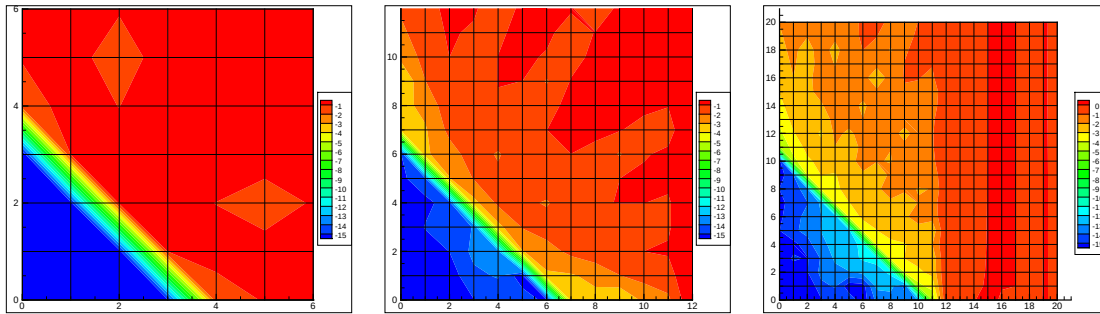


FIGURE 1.9 – Erreur d'approximation pour les règles de quadrature 2D sur un triangle. α est abscisse et β en ordonnée. De gauche à droite : Erreur calculée pour une règle de degré 3, puis de degré 6 et enfin de degré 10

La figure suivante 1.11 représente l'erreur maximum commise par une formule de quadrature pour $\alpha + \beta \leq k$ en 2D et $\alpha + \beta + \gamma \leq k$ en 3D sur des éléments P en double précision, avec k le degré maximum du polynôme intégré.

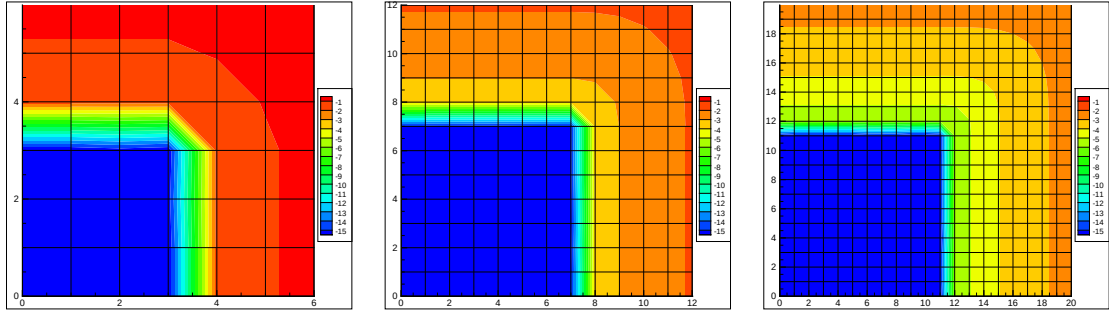


FIGURE 1.10 – Erreur d'approximation pour les règles de quadrature 2D sur un quadrangle. α est abscisse et β en ordonnée. De gauche à droite : Erreur calculée pour une règle de degré 3, puis de degré 7 et enfin de degré 11

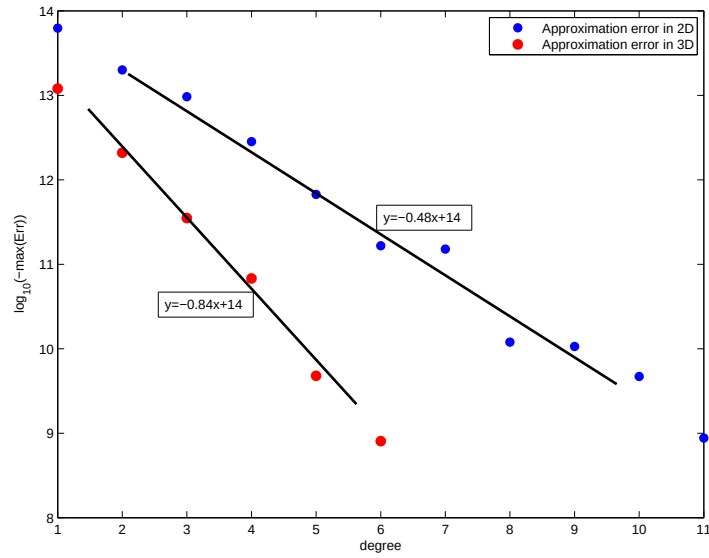


FIGURE 1.11 – Evolution de l'erreur maximum pour l'augmentation du degré du polynome

On peut tout d'abord remarquer que les résultats d'erreur ne sont pas symétriques pour les simplexes alors qu'il serait logique d'avoir cette propriété comme pour les éléments de type cube. Ceci est dû à la forme de la formule permettant le calcul de l'intégral exacte qui a été obtenue par une intégration d'abord sur x puis sur y , ce qui détruit la symétrie sachant que la sommation est bien plus sensible à l'erreur numérique que la multiplication. Cette remarque est aussi un argument qui justifie (Fig. 1.11), puisque nous avons une sommation en 2D et 3 sommations en 3D.

On peut aussi voir, grâce à (Fig. 1.9) et (Fig. 1.10), que la sous-intégration peut générer des erreurs qui sont très loin de l'erreur machine. (On rappelle qu'en double précision l'erreur machine est de l'ordre de $1e^{-15}$, en effet en double précision $1 + 1e^{-15} = 1$.) La conséquence directe pouvant être une invalidation des propriétés intrinsèques des schémas numériques.

1.4 Conclusion

A travers ce chapitre nous avons introduit les notations standards employées dans le domaine de la résolution des équations différentielles partielles (E.D.P.). Nous avons ensuite introduit le concept de discrétisation du domaine de travail dans lequel nous avons amené l'idée

de découpage du domaine et d'éléments. Ceci nous a permis de donner des dimensions caractéristiques aux éléments à partir de l'espace discrétisé.

L'espace physique dans lequel les phénomènes physiques, modélisés par des (E.D.P.), se déroulent, ayant été approximatés géométriquement, on introduit alors l'interpolation de fonction. Cette interpolation est faite sur chaque élément et l'on considère que les fonctions de base de l'interpolation sont définies sur un support local défini par la cellule (Def. 11). Cette notion est fondamentale car elle implique que la résolution d'une équation sur un domaine entier peut être faite en ne considérant que des problèmes locaux. On comprend que numériquement cette approximation évitera des calculs coûteux.

L'interpolation d'une fonction continue est donc obtenue sur un espace discrétisé. Il est alors légitime de se demander si il est possible d'estimer l'erreur intrinsèque due à cette interpolation. Une telle estimation est donnée par (Thm. 2). Elle est locale à chaque élément et est liée à deux paramètres principaux :

- la taille caractéristique de l'élément
- le degré de la base d'interpolation

Le cadre numérique est donc complété, on sait discrétiser et interpoler. Afin de résoudre les E.D.P., on rappelle les schémas numériques se basant sur les méthodes éléments finis et méthode des résidus distribués (R.D.S). La stabilité des schémas de type *Streamline Upwind Petrov Galerkin* (SUPG) est alors discutée. Une étude du paramètre de stabilisation τ du schéma SUPG est conduite dans le cas des problèmes 1D et elle aboutit à des résultats asymptotiques où le paramètre τ dépend directement du degré d'interpolation. En revanche on a pu noter que contrairement au cas linéaire ce paramètre τ n'est pas optimal en ordre élevé. Puis les problématiques liées à la création de schémas R.D.S. d'ordre élevé sont discutées et un schéma est proposé.

Les schémas numériques faisant intervenir des intégrales d'opérateurs différentielles, la dernière partie est une analyse de la dérivation sur l'espace physique dans le cas des éléments finis de référence. On montre alors le lien entre la dérivée sur l'espace physique et la dérivée dans l'espace de référence, le jacobien de la transformation et la comatrice de la matrice jacobienne. L'exercice est aussi conduit dans le cas de la dérivée seconde ce qui mène à une formulation plus complexe, notamment due à la dérivation de l'inverse de la matrice jacobienne.

Ces calculs permettent d'aboutir à une estimation du degré de chacun des termes du schémas numériques. Ces estimations sont rappelées dans (Tab. 1.3). On a pu noter aussi que la non-linéarité de la transformation géométrique introduit un terme non polynômial dans les intégrales.

On introduit alors le calcul intégral approché, à travers les règles d'intégration. Ces règles permettent d'estimer l'intégrale d'un polynôme. On montre que la sous-estimation de la règle d'intégration dans le calcul de l'intégrale d'un monôme mène à un résultat très éloigné du résultat exact. La conséquence d'une telle mésestimation pouvant être un résultat erroné du schéma numérique. Enfin on souligne aussi l'augmentation de l'erreur numérique en recourant à des règles avec un nombre grandissant de points d'intégration.

Chapitre 2

Aérodynamique

Dans ce chapitre nous présentons succinctement les équations de la mécanique des fluides que nous allons tenter de résoudre avec les méthodes présentées précédemment. On introduit tout d'abord les équations de *Navier-Stokes* et de *Euler*.

Dans un deuxième temps nous introduirons la notion de variables entropiques qui sont les variables qui sont interpolées dans le code. Quelques propriétés des variables entropiques seront rappelées.

On réécrira alors la formulation variationnelle pour ces équations dans l'objectif de clarifier les termes calculés dans le code numérique. Les termes de stabilisation et de capture de choc seront explicités.

On donne deux modèles de turbulence sur lesquels des travaux d'implémentation ont été menés. Il ne sera en aucun cas question de discuter leur validité ou leur jeu de constantes.

Enfin on rappelle l'architecture globale de résolution de ces équations dans le code de calcul.

2.1 Equations des fluides

2.1.1 *Navier-Stokes*

1. Conservation de la masse :

La forme intégrale de la loi de conservation de la masse est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}.$$

La variation de masse par unité de temps à l'intérieur du volume V est équivalente à la masse sortante à travers S par unité de temps (voir fig 2.1).

La forme locale de la loi de conservation de la masse est donnée par :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.1)$$

$\rho(x,y,z,t)$ désigne la masse volumique ($kg.m^{-3}$).

$\frac{D}{Dt}$ désigne l'opérateur "dérivée particulaire" ($\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$).

2. Conservation de la quantité de mouvement :

La forme intégrale de la loi de conservation de la quantité de mouvement est donnée par :

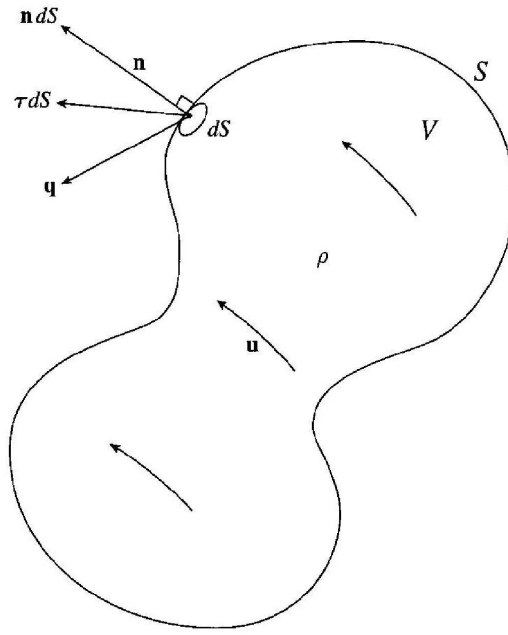


FIGURE 2.1 – Élément volumique de fluide V de densité ρ et vitesse $\mathbf{u}$, limité par une surface S , fixé dans le temps. Un élément de surface dS a une normale extérieure $\mathbf{n}$, τ le tenseur des efforts visqueux et $\mathbf{q}$ le flux de chaleur, τdS est la force sur dS .

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \tau dS.$$

$\mathbf{f}(x,y,z,t)$ désigne la force de volume ($N.kg^{-1}$).

$\tau(x,y,z,t)$ désigne le tenseur des efforts visqueux ($N.m^{-2}$).

La variation de quantité de mouvement à l'intérieur du volume V du fluide par unité de temps plus la quantité de mouvement sortant du fluide par unité de temps à travers S est égal à la force exercée sur le volume V plus la force totale exercée sur la surface S du fluide (pression + contrainte).

On décompose les vecteurs selon les axes du repère (cartésien) et on les note ainsi :

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3); \tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3); \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

On définit σ le tenseur des contraintes associées à τ :

D'après l'hypothèse de Cauchy, τ ne dépend pas des rayons de courbures à la frontière $\partial\Omega = S$, mais seulement de $\mathbf{n}$. D'où :

$$\tau = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

ou sous forme matricielle :

$$[\tau] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Pour $1 \leq (i, j) \leq 3$, on a alors :

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$\tau_i dS = \sigma_{ij} n_j dS = \sigma_{ij} dS_j$$

On adopte la convention de sommation sur les indices répétés.

En appliquant le théorème de la divergence sur la forme intégrale, on a :

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) dV = \int_V \rho f_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) dV.$$

On en déduit la forme locale :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}). \quad (2.2)$$

On va maintenant expliciter l'élément de matrice σ_{ij} dans (2.2) :

$$\sigma_{ij} = -p_m \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}. \quad (2.3)$$

La relation (2.3) est valable pour un grand nombre de fluides, l'eau et l'air inclus. Un fluide vérifiant cette relation est dit *Newtonien*.

(a) p_m désigne la pression mécanique : $p_m = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$

(b) μ désigne la viscosité dynamique du fluide.

On simplifie l'équation (2.3) par :

$$\sigma_{ij} = -p_m \delta_{ij} + 2\mu \tilde{e}_{ij}.$$

$\tilde{e}_{ij}$ représente la partie déviatrice de e_{ij} ($e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$, élément du tenseur des déformations.)

$\tilde{e}_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij}$ par définition.

Le terme $2\mu \tilde{e}_{ij}$ correspond donc à la partie déviatrice de σ_{ij} ($\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu \tilde{e}_{ij}$).

L'équation locale est donc donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) + \frac{\partial p_m}{\partial x_i} = \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\mu \tilde{e}_{ij}).$$

3. Conservation de l'énergie :

La forme intégrale de la loi de la conservation de l'énergie est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \iota + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2) dV + \int_S (\rho \iota + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} dS - \int_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}.$$

$\iota(x,y,z,t)$ désigne l'énergie interne par unité de masse ($J.kg^{-1}$).

Par conséquent, le terme $\rho \iota$ désigne la densité d'énergie interne volumique ($J.m^{-3}$).

D'autre part, le terme $\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2$ désigne l'énergie cinétique volumique ($J.m^{-3}$). La somme des deux termes correspond à l'énergie volumique totale du système.

$\mathbf{q}$ désigne le flux de chaleur ($W.m^{-3}$).

Cette relation traduit le fait que la variation d'énergie par unité de temps à l'intérieur de V plus l'énergie sortant de V à travers S par unité de temps est égale au travail de la force exercée sur le volume V par unité de temps plus le travail de la force exercée sur la surface S par unité de temps plus le flux de chaleur entrant par S .

En appliquant le théorème de la divergence sur la forme intégrale, on obtient pour un

volume V quelconque :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\iota + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2) + \nabla \cdot ((\rho\iota + \frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2)\mathbf{u}) &= \rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(p_m u_i)}{\partial x_j} \delta_{ij} &= \rho u_i f_i + \frac{\partial(2\mu \tilde{e}_{ij} u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Avec $E = \iota + \frac{1}{2}u_i u_i$ et les équations constitutives :

$$\begin{aligned} q_j &= -\kappa(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} & (\text{loi de Fourier}). \\ \iota &= c_v \theta, \quad p = (\gamma - 1)\rho\iota & (\text{loi des gaz par faits}). \end{aligned}$$

Bilan :

On écrit les équations de *Navier-Stokes* sous forme de système matriciel, en posant :

$$\underbrace{\mathbf{U} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ E \end{pmatrix}}_{\text{inconnues}} ; \underbrace{\mathbf{F}_i^{adv} = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p_m \delta_{1i} \\ \rho u_i u_2 + p_m \delta_{2i} \\ \rho u_i u_3 + p_m \delta_{3i} \\ \rho u_i E + p_m u_i \end{pmatrix}}_{\text{flux d'Euler selon la direction } i} ; \underbrace{\mathbf{F}_i^{diff} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{1i} \\ \tilde{\sigma}_{2i} \\ \tilde{\sigma}_{3i} \\ \tilde{\sigma}_{ij} u_j - q_i \end{pmatrix}}_{\text{flux diffusif selon la direction } i} ; \underbrace{\mathfrak{F} = \rho \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_i u_i + r \end{pmatrix}}_{\text{source}}$$

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ désigne un vecteur de force massique ($N.kg^{-1}$)

$\mathbf{r}$ désigne l'apport en puissance massique ($W.m^{-1}.kg^{-1}$)

On obtient donc le système suivant :

$$\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{adv} = \mathbf{F}_{i,i}^{diff} + \mathfrak{F} \quad (2.4)$$

On peut réécrire l'équation (2.4) sous forme quasi-linéaire :

$$\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{,i} = (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{U}_{,j})_{,i} + \mathfrak{F} \quad (2.5)$$

Où $\mathbf{A}_i = \mathbf{F}_{i,U}^{adv}$ désigne la $i^{\text{ème}}$ matrice Jacobienne d'advection et $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{ij}]$ désigne la matrice de diffusion, définie par $\mathbf{F}_i^{diff} = \mathbf{K}_{ij} \mathbf{U}_{,j}$. Ce système matriciel définit ce que l'on appelle les équations de *Navier-Stokes* pour un fluide compressible sous *forme conservative*.

Ce système présente l'inconvénient de ne pas s'exprimer à l'aide de matrice symétrique ou de matrice symétrique définie positive. On introduit donc un changement de variables sur les inconnues.

2.1.2 Variables entropiques.

Il existe un changement de variables permettant de symétriser le système sous sa forme conservative, si celui-ci possède une fonction d'entropie généralisée $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{U})$.

[HFM87] ont proposé d'introduire la fonction d'entropie généralisée :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{U}) = -\rho(s - s_0)$$

s désigne l'entropie par unité de masse ou spécifique ($s = \ln(\frac{p}{\rho^\gamma})$, avec $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ rapport des chaleurs spécifiques et s_0 l'entropie référence). A partir de cette fonction d'entropie généralisée, on définit un nouveau jeu d'inconnues :

$$\mathbf{V}^T = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{U}}$$

On parle du vecteur des variables entropiques. Le changement de variable donne :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho\iota} \begin{pmatrix} -\rho E + \rho\iota(\gamma + 1 - s + s_0) \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors en utilisant (2.5) , le système sous sa forme entropique :

$$\widetilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{V}_{,t} + \widetilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{V}_{,i} = (\widetilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i} + \mathfrak{F} \quad (2.6)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{A}}_0 &= \mathbf{U}_{,V} \\ \widetilde{\mathbf{A}}_i &= \mathbf{A}_i \widetilde{\mathbf{A}}_0 \\ \widetilde{\mathbf{K}}_{ij} &= \mathbf{K}_{ij} \widetilde{\mathbf{A}}_0 \end{aligned}$$

- La matrice $\widetilde{\mathbf{A}}_0$ est symétrique définie positive.
- Les matrices $\widetilde{\mathbf{A}}_i$ sont symétriques.
- $\widetilde{\mathbf{K}} = [\widetilde{\mathbf{K}}_{ij}]$ est symétrique définie semi-positive.

Le passage aux variables entropiques permet d'obtenir des propriétés de symétrie qui peuvent être exploitées par les algorithmes numériques et en analyse mathématique. De plus, on peut obtenir un résultat de stabilité en utilisant un produit de dualité.

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{V} \cdot (\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i}^{adv} - \mathbf{F}_{i,i}^{diff} - \mathfrak{F}) = \mathbf{V} \cdot (\widetilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{V}_{,t} + \widetilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{V}_{,i} - (\widetilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{V}_{,j})_{,i} - \mathfrak{F}) \\ &= -(\rho s)_{,t} - (\rho s u_i)_{,i} + \mathbf{V}_{,i} \cdot (\widetilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{V}_{,j}) - \left(\frac{q_i}{\theta}\right)_{,i} + \rho \frac{r}{\theta} \end{aligned}$$

Sachant que $\widetilde{\mathbf{K}}_{ij}$ est une matrice définie positive et (2.1) on obtient le résultat suivant :

$$\begin{array}{lll} (\rho s)_{,t} + (\rho s u_i)_{,i} & \geq & \rho \frac{r}{\theta} - \left(\frac{q_i}{\theta}\right)_{,i} \\ \rho \frac{Ds}{Dt} & \geq & \rho \frac{r}{\theta} - \text{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) \\ \underbrace{\int_V \rho \frac{Ds}{Dt} dV}_{\text{variation d'entropie}} & \geq & \underbrace{\int_V \rho \frac{r}{\theta} dV}_{\text{apport de chaleur}} - \underbrace{\int_S \frac{\mathbf{q}}{\theta} \mathbf{n} dS}_{\text{flux de chaleur}} \end{array}$$

Ce résultat se résume par l'inégalité de Clausius-Duhem ($\Delta S_{syst} \geq \frac{Q}{T}$) qui est un critère de respect de la stabilité numérique.

2.1.3 Equations du mouvement : *Euler*

Les équations d'*Euler* peuvent être considérées comme un cas particulier des équations de *Navier-Stokes* où l'on a : $\mathbf{F}_{i,i}^{diff} = 0$ et $\mathfrak{F} = 0$.

En conséquence les équations d'Euler sous forme conservative sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{,t} + \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{,i} &= 0 \\ \widetilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{V}_{,t} + \widetilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{V}_{,i} &= 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas la condition de stabilité devient $\Delta S_{syst} = 0$ qui traduit la conservation de l'entropie. On peut remarquer que la méthode de Galerkin est inadéquate pour résoudre les problèmes d'*Euler compressible* où de l'entropie est produite, comme dans les cas de chocs.

2.1.4 Formulation variationnelle SUPG et GLS

2.1.4.1 Méthode résidu pondéré

En posant,

$$\mathcal{L} = \tilde{A}_0 \frac{\partial}{\partial t} + \tilde{A}_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{K}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$$

l'opérateur *Navier-Stokes* différentiel, dans (2.6) le problème devient :

$$\mathcal{L} \mathbf{V}^h = 0$$

Pour chaque éléments Q , la formulation variationnelle peut alors s'écrire ainsi :

Trouver $\mathbf{V}^h$, le vecteur des variables entropiques tel que $\forall \mathbf{W}^h \in L^2(Q)$,

$$\int_Q \mathbf{W}^h \mathcal{L} \mathbf{V}^h dQ = 0 \quad (2.7)$$

2.1.4.2 Méthode de Galerkin

Par intégration par partie et réarrangement le problème de Galerkin s'exprime par :

Pour chaque Q et P l'élément de frontière associé, trouver $\mathbf{V}^h \in \mathcal{S}_n^h$ tel que pour tout $\mathbf{W}^h \in \mathcal{V}_n^h$, l'équation suivante soit vérifiée :

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\mathbf{W}^h \cdot \mathbf{U}_{,t}(\mathbf{V}^h) - \mathbf{W}_{,i}^h \cdot \mathbf{F}_i^{\text{adv}}(\mathbf{V}^h) + \mathbf{W}_{,i}^h \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{V}_{,j}^h + \mathbf{W}^h \cdot \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{V}^h \right) dQ \\ = \int_P \mathbf{W}^h \cdot \left(-\mathbf{F}_i^{\text{adv}}(\mathbf{V}^h) + \mathbf{F}_i^{\text{diff}}(\mathbf{V}^h) \right) n_i dP \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ces intégrales représentent la formulation de Galerkin intégrée par partie.

Cette méthode manque de stabilité numérique lorsque le nombre de Reynolds $\frac{\rho U_\infty D}{\mu}$ est trop élevé et que le problème n'est pas suffisamment discretisé.

2.1.4.3 Terme SUPG et GLS

Pour remédier à ce problème on introduit soit l'opérateur moindres-carrés (GLS, Galerkin Least Square), soit l'opérateur SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin).

Ces termes ont pour objectif de rajouter artificiellement de la diffusion sans changer le problème physique, voir Chapitre 1.

– Terme SUPG

$$\sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q^e} \left(\tilde{\mathbf{A}}_i \mathbf{W}_{,i}^h \right) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathcal{L} \mathbf{V}^h) dQ$$

L'opérateur associé à la fonction poids ne contient que la partie d'ordre 1 de l'opérateur différentiel *Navier-Stokes*. La partie $\mathcal{L} \mathbf{V}^h$ assure que le terme SUPG ne perturbe pas le problème physique puisque le problème est de trouver $\mathbf{V}^h$ tel que $\mathcal{L} \mathbf{V}^h = 0$. Enfin $\boldsymbol{\tau}$ est une matrice dont la construction est essentielle au succès de la méthode. [SHJ91]

– Terme GLS

$$\sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q^e} \left(\mathcal{L} \mathbf{W}^h \right) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathcal{L} \mathbf{V}^h) dQ$$

La dénomination de ce terme est héritée des méthodes des moindres-carrés pondérées dont l'objectif est la minimisation de $J = \int_{\Omega} w r^2$ où w est la pondération et r la fonction à minimiser. Comme pour le terme SUPG, τ est une matrice dont la construction est essentiel au succès de la méthode. [SHJ91]

On peut remarquer que dans la cas des fonctions d'approximation d'ordre 1 ($\mathcal{P}_1$) les termes SUPG et GLS sont équivalents.

Dans les deux termes l'action de ces opérateurs n'est opérante que sur les éléments intérieurs au domaine Q . Il n'y a donc pas de termes de frontière.

2.1.4.4 Terme de capture de chocs

Une autre forme d'oscillation apparait dans les zones de discontinuités (au niveau d'un choc par exemple). Cela se manifeste par l'apparition d'"overshoot" et d'"undershoot" dans le voisinage immédiat d'une discontinuité. Un moyen d'éliminer ces oscillations sans pour autant affecter la qualité de la solution dans les régions dites "lisses" (faible gradient), est d'introduire un opérateur non-linéaire de capture de discontinuités qui agira principalement dans les zones non régulières.

– Terme de capture de chocs

$$\sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q^e} \nu^h \nabla_{\xi} \mathbf{W}^h \cdot \begin{bmatrix} \nearrow & & \\ & \tilde{\mathbf{A}}_0 & \\ & & \searrow \end{bmatrix} \nabla_{\xi} \mathbf{V}^h dQ$$

où $\begin{bmatrix} \nearrow & & \\ & \tilde{\mathbf{A}}_0 & \\ & & \searrow \end{bmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{\mathbf{A}}_0 \end{bmatrix}$ et avec deux definitions pour ν^h

1. Forme linéaire $\nu^h = |\mathcal{L}\mathbf{V}^h|_{\tau} \left/ \left| \begin{bmatrix} \nearrow & & \\ & \tilde{\mathbf{A}}_0 & \\ & & \searrow \end{bmatrix} \nabla_{\xi} \mathbf{V}^h \right|_{\tau} \right|$
2. Forme quadratique $\nu^h = 2|\mathcal{L}\mathbf{V}^h|_{\tau}^2 / |\nabla_{\xi} \mathbf{V}^h|_{\tilde{\mathbf{A}}_0}^2$

avec par définition $|V|_A^2 = V \cdot AV$

2.1.4.5 Méthode complète : GLS avec capture de chocs

Le problème final est donc :

$$\begin{aligned} \int_{Q_n} \left(\mathbf{W}^h \cdot \mathbf{U}_{,t}(\mathbf{V}^h) - \mathbf{W}_{,i}^h \cdot \mathbf{F}_i^{\text{adv}}(\mathbf{V}^h) + \mathbf{W}_{,i}^h \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{ij} \mathbf{V}_{,j}^h + \mathbf{W}^h \cdot \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{V}^h \right) dQ + \sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q_n^e} \left(\mathcal{L} \mathbf{W}^h \right) \cdot \tau \left(\mathcal{L} \mathbf{V}^h \right) dQ \\ + \sum_{e=1}^{(n_{el})_n} \int_{Q_n^e} \nu^h \nabla_{\xi} \mathbf{W}^h \cdot \begin{bmatrix} \nearrow & & \\ & \tilde{\mathbf{A}}_0 & \\ & & \searrow \end{bmatrix} \nabla_{\xi} \mathbf{V}^h dQ = \int_{P_n} \mathbf{W}^h \cdot \left(-\mathbf{F}_i^{\text{adv}}(\mathbf{V}^h) + \mathbf{F}_i^{\text{diff}}(\mathbf{V}^h) \right) n_i dP \end{aligned}$$

2.1.4.6 Traitement du terme temporel

Le terme temporel $\mathbf{U}_{,t}(\mathbf{V}^h)$ est discrétisé par une méthode de type *Backward Differentiation Formulas* (B.D.F.). Dans ce cas $\mathbf{U}_{,t}^{(n)}(\mathbf{V}^h)$ s'approxime par $\mathbf{U}_{,t}^{(n)} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^k a_{kj} \mathbf{U}^{(n-j)}$ pour le B.D.F. d'ordre k avec $\mathbf{U}^{(n)}$ le champ $\mathbf{U}$ au temps n .

On a le développement suivant $\mathbf{U}^{(n-j)} = \mathbf{U}(t - j\Delta t) = \mathbf{U}(t) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \mathbf{U}}{\partial t^i} (-j\Delta t)^i + O(\Delta t^{k+1})$.

Ce qui implique que $\mathbf{U}_{,t}^{(n)} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^k \left[a_{kj} \mathbf{U}(t) + \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \mathbf{U}}{\partial t^i} (-j\Delta t)^i + O(\Delta t^{k+1}) \right]$.

D'où $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{j=0}^k a_{kj} \mathbf{U}(t) + \sum_{j=0}^k a_{kj} (-j) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \Delta t + \sum_{i=2}^k \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \mathbf{U}}{\partial t^i} \Delta t^i \sum_{j=0}^k a_{kj} (-j)^i \right] + O(\Delta t^k)$

On trouve donc les coefficients a_{kj} en résolvant le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & -j & \cdots \\ & & & \vdots & \\ 0 & (-1)^i & \cdots & (-j)^i & \cdots \\ & & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k0} \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Formulation faible discrétisée

On choisit les polynômes d'interpolation de *Lagrange* de degré k :

$\forall x \in \Omega, t \in I_n$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^h(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{(n_{np})} N_i(\mathbf{x}) v_{i;(n+1)} \\ \mathbf{W}^h(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{(n_{np})} N_i(\mathbf{x}) w_{i;(n+1)} \end{aligned}$$

où,

1. $v_{i;(n+1)}$ est le vecteur $(m \times 1)$ des inconnues au noeud i sur Q au temps $n+1$ et $w_{i;(n+1)}$ la valeur de la fonction de poids associée, au noeud i .
2. (n_{np}) est le nombre de noeuds contenu dans Q .
3. $N_i(\mathbf{x})$ représente le polynôme de Lagrange de degré k associé au noeud i .

En posant,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \{\mathbf{v}_{1;(n+1)}^T, \mathbf{v}_{2;(n+1)}^T, \dots, \mathbf{v}_{(n_{np});(n+1)}^T\}^T \\ \mathbf{w} &= \{\mathbf{w}_{1;(n+1)}^T, \mathbf{w}_{2;(n+1)}^T, \dots, \mathbf{w}_{(n_{np});(n+1)}^T\}^T \\ \mathbf{v}_{(n)} &= \{\mathbf{v}_{1;(n)}^T, \mathbf{v}_{2;(n)}^T, \dots, \mathbf{v}_{(n_{np});(n)}^T\}^T \end{aligned}$$

En utilisant les fonctions discrétisées dans la formulation faible (2.9), on obtient le nouveau système matriciel :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_{(n)}) = 0$$

$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_{(n)})$ est un système non-linéaire de taille $(n_{np} \cdot m) \times 1$, qui dépend du vecteur des inconnues $\mathbf{v}$ et du ou des vecteurs des conditions initiales $\mathbf{v}_{(n)}$. Le système (2.1.5) étant valable pour tout $\mathbf{w}$ non contraint et en ne tenant pas compte des conditions aux limites de type Dirichlet, on a :

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_{(n)}) = 0$$

Le problème se réduit donc à résoudre un système non-linéaire à $n_{np} \times m$ équations et $n_{np} \times m$ inconnues. Pour résoudre ce système non-linéaire, on utilise un algorithme prédicteur/multi-correcteur :

Le vecteur $\mathbf{v}_{(n)}$ sert de prédicteur, on l'utilise pour initialiser $\mathbf{v}$ sur I_n .

1. $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}_{(n)}$ par définition (prédicteur).
2. Soit $\mathbf{v}^{(i)}$, $i^{\text{ème}}$ correction de $\mathbf{v}$ (multi-correcteur).

En effectuant un développement de Taylor de $\mathbf{G}$ autour de $\mathbf{v}^{(i+1)}$, on a :

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}^{(i+1)}, \mathbf{v}_{(n)}) \simeq \mathbf{G}(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}_{(n)}) + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}_{(n)}) \Delta \mathbf{v}^{(i)} = 0$$

avec $\Delta \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i+1)} - \mathbf{v}^{(i)}$

En posant,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(i)} &= \mathbf{G}(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}_{(n)}) \\ \mathbf{M}^{(i)} &= \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}_{(n)}) \end{aligned}$$

le résidu et la matrice tangente sur I_n respectivement, à la $i^{\text{ème}}$ itération, on réécrit l'éq. (2.1.5) :

$$\mathbf{M}^{(i)} \Delta \mathbf{v}^{(i)} = -\mathbf{R}^{(i)}$$

On résoud enfin cette équation pour obtenir $\mathbf{v}^{(i+1)}$.

Cette méthode étant semblable à une méthode de type *Newton-Raphson*, elle pâtit des mêmes problèmes. A savoir qu'elle diverge pour des valeurs initiales "trop écartées" de la solution finale.

Pour éviter ce désagrément on relaxe la résolution en introduisant un terme $\frac{I}{\Delta t_D}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(i)} &= \mathbf{G}(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}_{(n)}) \\ \mathbf{M}^{*(i)} &= \frac{I}{\Delta t_D} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}_{(n)}) \end{aligned}$$

On résoud alors :

$$\mathbf{M}^{*(i)} \Delta \mathbf{v}^{(i)} = -\mathbf{R}^{(i)}$$

Ce système linéaire est résolu avec une méthode itérative *Generalized minimal residual method* (G.M.R.E.S.), voir [SHJ89].

2.2 Modélisation de la turbulence

On considère des modélisations de la turbulence à travers l'explicitation d'un modèle du champ scalaire μ_t , la viscosité turbulente, qui survient dans l'approximation de *Boussinesq*, voir [Bou77] [Bou97]. Un rappel plus général peut être vu dans [Cat99].

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial (\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u}) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{u} - \mathbf{q}) \end{aligned} \right. \quad (2.9)$$

ρ	densité	T	température
p	pression	$\mathbf{q}$	flux de chaleur
$\mathbf{u}$	vitesse	$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur des efforts
E	énergie	$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des efforts visqueux
e	densité d'énergie interne	C_v	capacité thermique massique à volume constant
$\frac{1}{2}\mathbf{u}^2$	énergie cinétique	C_p	capacité thermique massique à pression constante
λ, μ	coefficients de viscosité	Pr	nombre de Prandtl laminaire (0.72)
κ	coefficient de conductivité thermique	γ	ratio des capacités thermiques

TABLE 2.1 – common variables

Le tenseur des efforts est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}$$

On suppose un fluide newtonien :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$$

Avec l'hypothèse de *Stokes* :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu + 3\lambda = 0 \\ \boldsymbol{\tau} = \mu \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right) \end{array} \right.$$

L'énergie totale et l'énergie interne sont définis par :

$$E = e + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 \quad e = C_v T$$

Le flux de chaleur est déterminé par la loi de *Fourier* :

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad \kappa = \mu \frac{C_p}{Pr}$$

2.3 Equations moyennées

Avec l'approximation de *Boussinesq*, $\langle \cdot \rangle$ étant la valeur moyenne de *Favre*, $\bar{\cdot}$ étant la valeur moyenne totale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\bar{\rho})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \otimes \langle \mathbf{u} \rangle) = \nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{p} \mathbf{I}) \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \langle E \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle E \rangle \langle \mathbf{u} \rangle) = \nabla \cdot ((\hat{\boldsymbol{\tau}} - \hat{p} \mathbf{I}) \langle \mathbf{u} \rangle - \hat{\mathbf{q}}) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\tau} = (\bar{\mu} + \mu_t) \left(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle) \mathbf{I} \right) \\ \hat{p} = \bar{p} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k = (\gamma - 1) \bar{\rho} \langle e \rangle \\ \langle E \rangle = \langle e \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u} \rangle^2 + k \\ \hat{\mathbf{q}} = (\bar{\kappa} + \kappa_t) \nabla \langle T \rangle \\ k = \frac{1}{2} \mathbf{u}'^2 \\ \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle \\ \kappa_t = \mu_t \frac{C_p}{Pr_t} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

2.3.1 Equations k- ϵ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\bar{\rho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle k) - \nabla \cdot \left(\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) = P_k - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \bar{\rho} \epsilon \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \epsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \epsilon) - \nabla \cdot \left(\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) = C_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - \frac{2}{3} \bar{\rho} C_1 \epsilon \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \bar{\rho} C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \\ P_k = \mu_t \left(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle) \mathbf{I} \right) : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Les équations k- ϵ 2.12 sont couplées avec les équations de *Navier-Stokes* moyennées 2.10 et peuvent être réécrites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \frac{\partial (k)}{\partial t} + \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla (k) - \nabla \cdot \left(\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) = P_k - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \bar{\rho} \epsilon \\ \bar{\rho} \frac{\partial (\epsilon)}{\partial t} + \bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla (\epsilon) - \nabla \cdot \left(\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) = C_1 \frac{\epsilon}{k} P_k - \frac{2}{3} \bar{\rho} C_1 \epsilon \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle - \bar{\rho} C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \\ P_k = \mu_t \left(\nabla \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \langle \mathbf{u} \rangle^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle) \mathbf{I} \right) : \nabla \langle \mathbf{u} \rangle \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

Les constantes du modèle sont :

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

2.3.2 Equations Spalart-Allmaras

$$\frac{\partial (\tilde{\nu})}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle \cdot \nabla (\tilde{\nu}) - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\sigma} (\bar{\nu} + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \right) = C_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{C_{b2}}{\sigma} \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu} - C_{\omega_1} f_\omega \frac{\tilde{\nu}^2}{d^2} \quad (2.14)$$

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v_1}$$

d est la distance à la paroi, les constantes et fonctions du modèle sont :

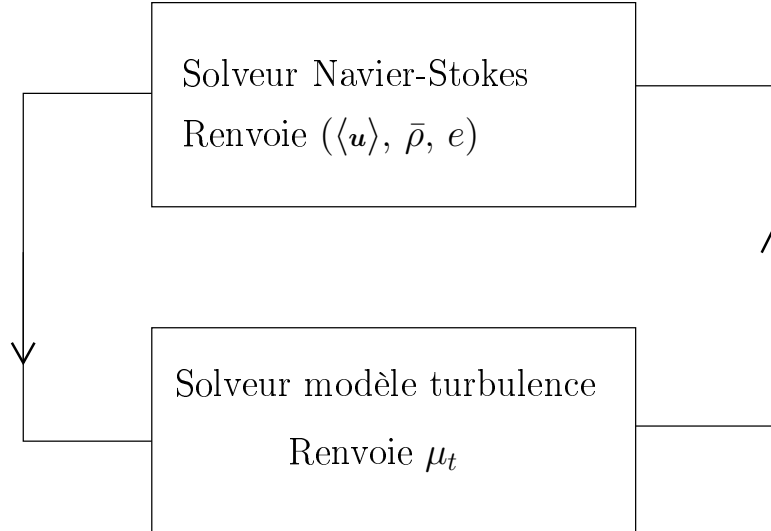
$$f_{v_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v_1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\bar{\nu}}$$

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= f_{v_3} S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v_2}, \quad S = \sqrt{2 \nabla \wedge u : \nabla \wedge u} \\ f_{v_2} &= (1 + \frac{\chi}{C_{v_2}})^{-3}, \quad f_{v_3} = \frac{(1 + \chi f_{v_1})(1 - f_{v_2})}{\chi} \\ f_{\omega} &= g \left(\frac{1 + C_{\omega_3}^6}{g^6 + C_{\omega_3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad g = r + C_{\omega_2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \\ C_{b_1} &= 0.1355, \quad \sigma = \frac{2}{3}, \quad C_{b_2} = 0.622, \quad C_{\omega_2} = 0.3, \quad C_{\omega_3} = 2 \\ C_{\omega_1} &= \frac{C_{b_1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b_2}}{\sigma}, \quad C_{v_1} = 7.1, \quad C_{v_2} = 5, \quad \kappa = 0.41\end{aligned}$$

2.4 Résolution des équations en couplage faible

De façon simpliste le code fonctionne de la manière suivante pour introduire un modèle de turbulence. Les variables qui sortent de chacun des modules sont considérées comme des constantes dans le module suivant. Ceci est fait pour chaque itérations non-linéaires jusqu'à ce que les équations de *Navier-Stokes* soient suffisamment résolues.

Les équations de *Navier-Stokes* et les modèles de turbulence sont ainsi couplés faiblement. L'intérêt principal de cette manière de procéder est d'éviter de réécrire un problème tout couplé



pour chaque modèle de turbulence qui surgit. On dénombre tellement de modèles de turbulence qu'il est impensable de réécrire le code pour chacun.

En revanche cette méthode peut présenter un certain nombre de désagréments.

- Pas de contrôle global sur le problème complet N.S. + turbulence
- Câler le pas de temps local des itérations non linéaires pour ne pas résoudre un problème plus rapidement que l'autre.
- Instabilité
- Evaluation de l'erreur ?

On comprend qu'à ce niveau de complexité de simulation, on ne maîtrise plus vraiment ce qui se passe. On doit simplement partir du principe que l'on fait confiance au schéma numérique pour fournir une "certaine qualité" de résultat.

L'évaluation des résultats ne peut donc être que qualitative.

2.5 Conclusion

Un rappel des équations fondamentales de la mécanique des fluides a été fait afin de mieux appréhender les problèmes que l'on souhaite résoudre.

Ce chapitre a été l'occasion d'une présentation de la méthode utilisée dans le code de calcul, à savoir la méthode SUPG appliquée aux équations sous leur forme entropiques. Nous avons décrit le terme de capture de chocs employé, qui ne semble pas nécessiter d'adaptation dans le cadre de l'utilisation d'élément de degré supérieur à 1.

La méthode de discrétisation du terme temporel a été abordée et on note qu'il est aussi possible d'avoir recours à des méthodes d'ordre élevé pour le traitement de ce terme.

Une explication synthétique concernant la méthode de résolution de ces équations, qui ont un fort caractère non-linéaire, a été explicitée.

On a souligné l'utilisation de l'algorithme G.M.R.E.S. (Generalized Minimal Residual Method) dans la résolution des systèmes linéaires.

Une bref introduction des équations de turbulence ($k - \epsilon$ et *Spalart-Allmaras*) qui ont été implémentées avec des schémas d'ordre élevé a été faite.

Pour terminer, la méthode de résolution du problème complet *Navier-Stokes* + turbulence a été expliquée. On souligne que la manière "couplée faiblement" présente un certain nombre d'inconvénients : des problèmes de stabilité, un faible contrôle sur la convergence du résidu et une difficulté d'évaluation de l'erreur.

Chapitre 3

Eléments et Maillages

Ce chapitre contient une description de la topologie des éléments finis. Il tente de proposer une description des éléments, de leurs caractéristiques et de montrer certaines propriétés intrinsèques. Les propriétés des éléments tels que les simplexes, hypercubes, prismes seront étudiés. Il est à noter au passage que la description faite ici reflète l'état actuel de la librairie informatique LEA (Library for Elements and Analysis), implémentée par mes soins pour la gestion des maillages en ordre élevé.

Nous présenterons brièvement les espaces de polynômes dans lesquels nous travaillerons, suivi de quelques propriétés sur la dérivation de polynômes. Nous décrirons les propriétés des différents éléments implémentés et leurs propriétés. Enfin nous présenterons une technique de création de maillage d'ordre élevé dans des configurations variées.

3.1 Notions préliminaires

3.1.1 Espaces de polynômes

Soit α un multi-indice tel que : $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ and $|\alpha| = \sum \alpha_i$
L'espace de polynôme associé aux d-Simplexes :

$$\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}^\alpha, \quad |\alpha| \leq k\} \quad \dim \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d) = \frac{(k+d)!}{k!d!}$$

L'espace de polynôme associé aux d-Hypercubes :

$$\mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}^\alpha, \quad \forall i \alpha_i \leq k\} = \overbrace{\mathbb{P}_k(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{P}_k(\mathbb{R}) \dots \otimes \mathbb{P}_k(\mathbb{R})}^d \quad \dim \mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^d) = (k+1)^d$$

L'espace de polynôme associé aux d-Prismes :

$$\mathbb{PQ}_k(\mathbb{R}^d) = \mathbb{P}_k(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^{d-1}) \quad \dim \mathbb{PQ}_k(\mathbb{R}^d) = (k+1) \frac{(k+d-1)!}{k!(d-1)!}$$

On peut remarquer :

$$\frac{\dim \mathbb{Q}_k}{\dim \mathbb{P}_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} d! \quad \frac{\dim \mathbb{PQ}_k}{\dim \mathbb{P}_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} d \quad \frac{\dim \mathbb{Q}_k}{\dim \mathbb{PQ}_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (d-1)!$$

Ce qui est une façon peu intuitive de voir qu'en dimension 6 on peut diviser un cube en 720 simplexes ou en 120 prismes.

3.1.2 Produit de fonctions

3.1.2.1 Dérivées d'un produit de fonctions

Soit $F_{\{\emptyset\}} = \prod_{i=1}^n f_i(\xi)$ avec $\xi \in \mathbb{R}^d$ le produit des fonctions f_i et $F_{\{i_j, j=\{\dots\}\}} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \{i_j, j=\{\dots\}\}}}^n f_i(\xi)$.

Les dérivées s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\{\emptyset\}}}{\partial \xi_{j_1}} &= \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f_{i_1}}{\partial \xi_{j_1}} F_{\{i_1\}} \\ \frac{\partial^2 F_{\{\emptyset\}}}{\partial \xi_{j_1} \partial \xi_{j_2}} &= \sum_{i_1=1}^n \left[\frac{\partial^2 f_{i_1}}{\partial \xi_{j_1} \partial \xi_{j_2}} F_{\{i_1\}} + \frac{\partial f_{i_1}}{\partial \xi_{j_1}} \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq i_1}}^n \frac{\partial f_{i_2}}{\partial \xi_{j_2}} F_{\{i_1, i_2\}} \right] \\ \frac{\partial^3 F_{\{\emptyset\}}}{\partial \xi_{j_1} \partial \xi_{j_2} \partial \xi_{j_3}} &= \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial^3 f_{i_1}}{\partial \xi_{j_1} \partial \xi_{j_2} \partial \xi_{j_3}} F_{\{i_1\}} \\ &+ \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq i_1}}^n \left(\frac{\partial^2 f_{i_1}}{\partial \xi_{i_1} \partial \xi_{i_2}} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial \xi_{j_3}} + \frac{\partial^2 f_{i_1}}{\partial \xi_{i_1} \partial \xi_{i_3}} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial \xi_{j_2}} + \frac{\partial^2 f_{i_1}}{\partial \xi_{i_2} \partial \xi_{i_3}} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial \xi_{j_1}} \right) F_{\{i_1, i_2\}} \\ &+ \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq i_1}}^n \sum_{\substack{i_3=1 \\ i_3 \neq \{i_1, i_2\}}}^n \frac{\partial f_{i_1}}{\partial \xi_{j_1}} \frac{\partial f_{i_2}}{\partial \xi_{j_2}} \frac{\partial f_{i_3}}{\partial \xi_{j_3}} F_{\{i_1, i_2, i_3\}} \\ &\dots \end{aligned}$$

3.1.2.2 Dérivées d'un produit de fonctions linéaires

Soit $F_{\{\emptyset\}} = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\xi)$ avec $\xi \in \mathbb{R}^d$ le produit des fonctions linéaires $\mathcal{L}_i$ et $F_{\{i_j, j=\{\dots\}\}} =$

$\prod_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\xi)$. Alors on a la formule générale pour la dérivation.

$i \neq \{i_j, j=\{\dots\}\}$

Pour $m < n$:

$$\frac{\partial^m F_{\{\emptyset\}}}{\prod_{k=1}^m \partial \xi_{j_k}} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq i_1}}^n \sum_{\substack{i_3=1 \\ i_3 \neq \{i_1, i_2\}}}^n \dots \sum_{\substack{i_m=1 \\ i_m \neq \{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\}}}^n \frac{\partial \mathcal{L}_{i_1}}{\partial \xi_{j_1}} \frac{\partial \mathcal{L}_{i_2}}{\partial \xi_{j_2}} \frac{\partial \mathcal{L}_{i_3}}{\partial \xi_{j_3}} \dots \frac{\partial \mathcal{L}_{i_m}}{\partial \xi_{j_m}} F_{\{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m\}}$$

Pour $m = n$:

$$\frac{\partial^m F_{\{\emptyset\}}}{\prod_{k=1}^m \partial \xi_{j_k}} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq i_1}}^n \sum_{\substack{i_3=1 \\ i_3 \neq \{i_1, i_2\}}}^n \dots \sum_{\substack{i_m=1 \\ i_m \neq \{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\}}}^n \frac{\partial \mathcal{L}_{i_1}}{\partial \xi_{j_1}} \frac{\partial \mathcal{L}_{i_2}}{\partial \xi_{j_2}} \frac{\partial \mathcal{L}_{i_3}}{\partial \xi_{j_3}} \dots \frac{\partial \mathcal{L}_{i_m}}{\partial \xi_{j_m}}$$

Pour $m > n$:

$$\frac{\partial^m F_{\{\emptyset\}}}{\prod_{k=1}^m \partial \xi_{j_k}} = 0$$

On peut remarquer que pour toute fonction s'exprimant comme un produit de fonctions linéaires on peut facilement obtenir sa dérivée sachant que $\frac{\partial \mathcal{L}_{i_k}}{\partial \xi_{j_k}}$ est une constante.

3.1.3 Numérotation des noeuds

Les éléments de référence seront définis sur $[0, 1]^d$. Néanmoins le positionnement relatif des noeuds dans l'espace sera donné sur une base d'entier $\mathcal{B}_k = [0, k]^d$. L'avantage apparaîtra par la suite.

La numérotation des noeuds sera renseignée pour chaque élément. Cette numérotation est assez arbitraire, néanmoins on s'attache à ce que la numérotation suive, pour les éléments de degré 1, l'orientation positive (i.e. on numérote dans le sens d'un simplexe direct).

L'important c'est qu'il existe une transformation telle que à chaque coordonnée on associe un numéro et inversement. Il existe une fonction bijective telle que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} : & \mathbb{N}^d & \longrightarrow \mathbb{N} \\ & \tilde{\mathbf{I}} & \longrightarrow i \end{array}$$

$\tilde{\mathbf{I}}$ sont les coordonnées du noeud dans $\mathcal{B}_k$.

Dans cette base toute permutation de l'élément peut être aussi définie par des entiers, ainsi soit P_K une permutation de l'élément K et I_i les coordonnées dans la base $\mathcal{B}_k$ du noeud i alors $P_K(I_j) \in \mathcal{B}_k$.

Cette base permet donc de passer facilement de la numérotation à l'emplacement dans l'espace à travers l'application $\mathbb{I}$ et sa réciproque $\mathbb{I}^{-1}$. En revanche, rien n'a été dit sur les coordonnées "exacte" des noeuds. On peut citer ici deux grandes familles quand il s'agit d'ajout de points dans un élément de référence pour obtenir des éléments d'ordre élevé :

- Points équidistants : $a_i^n = \frac{i}{n}$
- Points de *Tchebychev* : $a_i^n = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}))$

Pour plus de détail on peut se référer à [Hes98].

Les résultats principaux sont rappelés ici. Soit une interpolation de *Lagrange*, utilisant les polynômes de *Lagrange* de degré n à m variables. $\Pi_n^m = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ les points nodaux, $N = C_m^{m+n}$.

$$\mathcal{I}_n^m f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) \mathcal{L}_i(\Pi_n^m, \mathbf{x})$$

On définit la norme $\|\cdot\|$:

$$\|\mathcal{I}_n^m\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|\mathcal{I}_n^m f\|_\infty}{\|f\|_\infty}, \quad \|f\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}^m} |f(\mathbf{x})|$$

Théorème 6 (*Lebesgue*) Soit $f[S^m] \in \mathcal{C}[S^m]$ et l'ensemble de noeuds, Π_n^m ; alors

$$\|f(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_n^m f\|_\infty \leq (1 + \Lambda(\Pi_n^m)) \|f(\mathbf{x}) - p^*(\mathbf{x})\|$$

où $\|f(\mathbf{x}) - p^*(\mathbf{x})\| = \inf_{p \in P_n^m} \|f - p\|$ et $\Lambda(\Pi_n^m) = \|\mathcal{I}_n^m\|$ est la constante de Lebesgue

Nous avons les résultats asymptotiques suivant pour la constante de *Lebesgue* :

- Points équidistants : $\Lambda_n^{Eq} \simeq \frac{2^{n+1}}{en(\log(n) + \gamma)}$
- Points de *Tchebychev* : $\Lambda_n^T \simeq \frac{2}{\pi} \log(n+1)$

En choisissant l'option des points équidistants on induit une plus grande erreur sur l'approximation compensée par une facilité de calcul des polynômes de *Lagrange*. De plus pour des degrés plus petits que 4 la constante de *Lebesgue* reste quasiment la même. L'utilisation des points de

Tchebychev semble donc conditionnée par l'utilisation d'éléments de degré très élevé.

Permutations :

On peut noter que, dans notre définition de la numérotation des noeuds, la numérotation n'est pas unique. En effet, en supposant une transformation affine $\hat{y} = A\hat{x} + T$ sur l'élément de référence telle que cette transformation envoie $\hat{K}$ sur K , si on numérote 1 le noeud $0_{\mathbb{R}^d}$ alors si il existe $\hat{x}$ tel que $A\hat{x} + T = 0_{\mathbb{R}^d}$ on peut aussi envisager la numérotation telle que $\mathbb{I}(\hat{x}) = 1$.

3.2 Description des éléments implémentés dans LEA

3.2.1 Implémentation générique des éléments

Le langage C++ offre des concepts informatiques qui permettent une classification extrêmement rationnelle et hiérarchique de l'information. De plus il autorise la surdéfinition d'opérateur ce qui permet d'approcher la programmation de l'écriture mathématiques formelle. Les propriétés d'héritage et de virtualisation autorisent la généralisation d'une information et le traitement de l'objet général au lieu de l'objet particulier. La spécification de l'information traitée devient alors superflue et transparente pour l'utilisateur. Il faut donc se demander qu'elles sont les informations générales qui seront nécessaires à l'utilisateur pour traiter tous les types d'éléments.

On se propose, ici, de définir les attributs et les méthodes essentielles à la description des éléments. Il est évident qu'afin de rester concis nous ne décrivons ici que les méthodes essentielles qui font appel aux informations détaillées élément par élément ci-après.

Attributs pour les éléments de volume :

- Le degré de l'élément
- Le nombre de noeuds
- Une connectivité (i.e. la liste des numéros globaux, dans le système maximal (Def. 10), pour cet élément)

Méthodes pour les éléments de volume :

- Egalité entre élément à la permutation prêt
- Fonctions $\mathbb{I}$ et $\mathbb{I}^{-1}$
- Extraction de frontières (i.e. extraire un élément "face")
- Vérification si un élément est une face
- Découpage d'élément de degré k en élément de degré p avec $k \bmod p = 0$
- Pour $\mathbf{x} \in K$ trouver $\boldsymbol{\xi} \in \hat{K}$ tel que $\mathbf{x} = \phi(\boldsymbol{\xi})$
- Calcul des fonctions de forme, leur gradient et dérivée seconde
- Calcul des gradients et dérivées secondes dans le domaine physique
- Chargement des points d'intégration
- Calcul du volume
- Calcul d'intégrales

Attributs pour les éléments de frontière :

- Attributs pour les éléments de volume +
- Un code
- Une connectivité de normales (normales calculées par le modeleur, vues comme "exacte")

Méthodes pour les éléments de frontière :

- Méthodes pour les éléments de volume +
- Calcul des normales
- Extrusion selon les normales

On crée donc un objet "Element" possédant les attributs d'un élément de volume avec toutes les méthodes décrites comme virtuelles et qui seront redéfinies dans la description "spécialisée" des différents éléments. On crée ensuite un pointeur de type "Element" sur un élément spécialisé et

l'appel aux méthodes sera fait par typage dynamique.

3.2.2 Fonctions d'interpolation générale en dimension d

3.2.2.1 Fonctions d'interpolation de *Lagrange* et de *Bernstein* sur un d-Hypercube à noeuds équidistants

On considère un élément de référence $K = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d | 0 \leq \xi_i \leq 1 \forall i \in [1, d]\}$ de degré k et la transformée géométrique ϕ .

On considère les points de référence équidistants :

$$\{\hat{x}_i\}_{i=1}^N = \{(\frac{i_1}{k}, \dots, \frac{i_d}{k}) | i_j \in [0, k]\}$$

et les points physiques tels que $x_i = \phi(\hat{x}_i)$.

Le noeud numéroté i a pour coordonnée $\frac{1}{k}\mathbb{I}^{-1}(i) = \{\frac{i_p}{k}\}_{p=1,d} = \hat{x}_i$.

Afin que $\text{Card}(\Sigma_K) = \dim(P_K)$ les fonctions de forme seront dans l'espace polynomial $\mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^d) = P_K$ en effet $\dim \mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^d) = (k+1)^d$. L'espace des contraintes Σ_K associé aux fonctions d'interpolation de type *Lagrange* est :

$$\mu_i(f) = f(\phi(\frac{i_1}{k}, \dots, \frac{i_d}{k})) = f(x_i)$$

et l'espace des contraintes Σ_K associé aux fonctions d'interpolation de type *Bernstein* est :

$$\mu_i(f) = \sum_j \gamma_j^i f(\phi(\frac{i_1}{k}, \dots, \frac{i_d}{k})) = \sum_j \gamma_j^i f(x_i)$$

L'existence des γ_j^i et leurs valeurs sont données par :

Lemme 12 (Base d'interpolation et contraintes) Soit $\{B^k\}_{k=1, \dim(P_K)}$ une base de P_K . $\exists (\gamma_j^i)_{j=1, \dim(P_K)}$ tels que pour toute contrainte de Σ_K avec $\text{card}(\Sigma_K) = \dim(P_K)$

$$\mu_i : p \rightarrow \sum_j \gamma_j^i p(\phi(\hat{x}_i)), \quad i = 1, \text{card}(\Sigma_K) = \dim(P_K)$$

on a :

$$\mu_i(B^k) = \delta_{ik}$$

Preuve : $\mu_i(B^k) = \sum_j \gamma_j^i B^k(\hat{x}_i) = \delta_{ik}$ se met sous la forme du système suivant $\Gamma B = Id$ or $\{B^k\}$ est une base et les points $\hat{x}_i$ sont distincts donc B est inversible et $\gamma_j^i = (B^{-1})_{ij}$ $\square$.

Etant donné que les fonctions de *Bernstein* sont une base sur $\mathbb{R}[X]$, leur produit cartésien est une base sur $\mathbb{R}^d[X]$ et la conséquence directe est qu'il existe des contraintes sur le d-Hypercube telles qu'on puisse définir un élément fini de référence avec des fonctions d'interpolations de type *Bernstein*.

3.2.2.1.1 Fonctions de *Lagrange*

La fonction d'interpolation $N_i \in \mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^d)$ associée au noeud i de coordonnées $\tilde{\mathbf{I}} = (i_1, \dots, i_d)$ sur la base $\mathcal{B}_k$ est :

$$N_i(\xi) = N_{\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{I}})}(\xi) = \prod_{j=1}^d \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i_j}}^k \frac{k\xi_j - p}{i_j - p}$$

On peut réécrire ces fonctions en notant $\mathcal{L}_j = \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq n_j}}^k \frac{k\xi_j - p}{i_j - p}$.

Remarquons que $\mathcal{L}_j$ dépend uniquement de $\xi_j \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}_j$ sont des produits de fonctions linéaires.

$$N_i(\boldsymbol{\xi}) = N_{\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{I}})}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{j=1}^d \mathcal{L}_j(\xi_j)$$

Preuve de l'unisolvence : $\mu_i(f) = f(\phi(\hat{x}_i))$ d'où $\mu_i(N_j) = N_j(\hat{x}_i) = \delta_{ij}$. Regardons les propriétés de la fonction linéaire $\mathcal{L}_j$. On peut facilement vérifier que :

$$\mathcal{L}_j\left(\frac{i_j}{k}\right) = 1 \quad \mathcal{L}_j\left(\frac{i_l}{k}\right) = 0, \quad i_j \neq i_l$$

La conclusion est évidente puisque les $\hat{x}_i$ sont dans la base $\mathcal{B}_k$. $N_j(\hat{x}_i) = \delta_{ij}$ $\square$.

Ces fonctions de forme sont des produits de fonctions linéaires avec les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \xi_l} = 0 \quad \forall l \neq j$$

$$F_{\{\emptyset\}} = \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_i(\xi) \quad \text{et} \quad F_{\{i_j, j=\{\dots\}\}} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \{i_j, j=\{\dots\}\}}}^n \mathcal{L}_i(\xi) \quad \text{d'où}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} = \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \xi_l} F_{\{l\}}$$

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_{l_1} \partial \xi_{l_2}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{l_1}}{\partial \xi_{l_1}} \frac{\partial \mathcal{L}_{l_2}}{\partial \xi_{l_2}} F_{\{l_1, l_2\}}$$

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_{l_1}^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{l_1}}{\partial \xi_{l_1}^2} F_{\{l_1\}}$$

3.2.2.1.2 Fonctions de Bernstein

La fonction d'interpolation $N_i \in \mathbb{Q}_k(\mathbb{R}^d)$ associé au noeud i de coordonnées $\tilde{\mathbf{I}} = (i_1, \dots, i_d)$ sur la base $\mathcal{B}_k$ est :

$$N_i(\boldsymbol{\xi}) = N_{\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{I}})}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{j=1}^d B_{k, i_j}(\xi_j) = \prod_{j=1}^d C_k^{i_j} \xi_j^{i_j} (1 - \xi_j)^{k-i_j}$$

L'unisolvence vient du fait que les fonctions de *Bernstein* forment une base puis on utilise le Lemme 12.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} = \frac{\partial B_{k, i_l}(\xi_l)}{\partial \xi_l} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^d B_{k, i_j}(\xi_j)$$

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_{l_1} \partial \xi_{l_2}} = \frac{\partial B_{k, i_{l_1}}(\xi_{l_1})}{\partial \xi_{l_1}} \frac{\partial B_{k, i_{l_2}}(\xi_{l_2})}{\partial \xi_{l_2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \{l_1, l_2\}}}^d B_{k, i_j}(\xi_j)$$

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_{l_1}^2} = \frac{\partial^2 B_{k, i_{l_1}}}{\partial \xi_{l_1}^2} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l_1}}^d B_{k, i_j}(\xi_j)$$

3.2.2.2 Fonctions d'interpolation de *Lagrange* et de *Bernstein* sur un d-Simplexe à noeuds équidistants

On considère un élément de référence $K = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d \xi_i \leq 1\}$ de degré k et la transformée géométrique ϕ .

On considère les points de référence équidistants :

$$\{\hat{x}_i\}_{i=1}^N = \{(\frac{i_1}{k}, \dots, \frac{i_d}{k}) \mid i_j \in [0, k] \wedge \sum_{j=1}^d i_j \leq k\}$$

et les points physiques tels que $x_i = \phi(\hat{x}_i)$. On introduit $i_0 = k - \sum_{j=1}^d i_j$, ainsi on a toujours

$$\sum_{j=0}^d i_j = k \mid i_j \in [0, k].$$

Afin que $Card(\Sigma_K) = dim(P_K)$ les fonctions de forme seront dans l'espace polynomial $\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d) = P_K$ en effet $dim \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d) = \frac{(k+d)!}{k!d!}$. L'espace des contraintes Σ_K associé aux fonctions d'interpolation de type *Lagrange* est :

$$\mu_i(f) = f(\phi(\frac{i_1}{k}, \dots, \frac{i_d}{k})) = f(x_i)$$

et l'espace des contraintes Σ_K associé aux fonctions d'interpolation de type *Bernstein* est :

$$\mu_i(f) = \sum_j \gamma_j^i f(\phi(\frac{i_1}{k}, \dots, \frac{i_d}{k})) = \sum_j \gamma_i^j f(x_j)$$

L'existence des γ_j^i trouve sa justification dans le Lemme 12.

3.2.2.2.1 Fonctions de *Lagrange*

On note $(\lambda_0(\xi), \lambda_1(\xi), \dots, \lambda_d(\xi))$ les coordonnées barycentriques de $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$:

$$\lambda_0(\xi) = 1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i(\xi), \quad \forall i \in [1, d] \quad \lambda_i(\xi) = \xi_i$$

La fonction d'interpolation $N_i \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)$ associée au noeud i de coordonnées $\tilde{\mathbf{I}} = (i_0, i_1, \dots, i_d)$ sur la base $\mathcal{B}_k$ est :

$$N_i(\xi) = \tilde{N}_{\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{I}})}(\xi) = \prod_{j=0}^d \frac{1}{i_j!} \prod_{p=0}^{i_j-1} (k\lambda_j - p)$$

Que l'on peut réécrire en notant $\mathcal{L}_j = \frac{1}{i_j!} \prod_{p=0}^{i_j-1} (k\lambda_j - p)$.

On remarque que $\mathcal{L}_0$ dépend de $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, les $\mathcal{L}_j$ dépendent seulement des $\xi_j \in \mathbb{R}$ et enfin $\mathcal{L}_i$ est un produit de fonctions linéaires.

$$N_i(\xi) = N_{\mathbb{I}(\tilde{\mathbf{I}})}(\xi) = \mathcal{L}_0(\xi) \prod_{j=1}^d \mathcal{L}_j(\xi_j)$$

Preuve de l'unisolvence : Regardons les propriétés de $\mathcal{L}_j$.

On vérifie facilement que :

$$\mathcal{L}_j(\frac{i_j}{k}) = 1 \quad \mathcal{L}_j(\frac{i_l}{k}) = 0, \quad i_l < i_j \quad \mathcal{L}_j(\frac{i_l}{k}) > 0, \quad i_j \leq i_l$$

car la valeur de $k\lambda_i$ au noeud $\hat{x}_j$ est exactement $(\tilde{\mathbf{I}}(\hat{x}_j))_i$.

La conséquence directe est que $N_i(a_i) = 1$.

Considérons le cas $N_i(a_j)$ $i \neq j$. Comme $\sum_{i=0}^d n_i = \sum_{i=0}^d (\tilde{\mathbf{I}}(\hat{x}_j))_i = k$, si $\hat{x}_j \neq \hat{x}_i$ alors au moins une des coordonnées de $\hat{x}_j$ dans $\mathcal{B}_k$ est plus petite qu'une des coordonnées de $\hat{x}_i$. Ce qui sous-entend qu'il existe au moins une fonction telle que $\mathcal{L}_m(\hat{x}_j) = 0$, et donc $N_i(a_j) = 0$ $i \neq j$ $\square$.

Les fonctions de forme sont des produits de fonctions linéaires ayant les propriétés : $\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial \xi_l} = 0 \forall l \neq j, l \geq 1$

$$F_{\{\emptyset\}} = \prod_{i=1}^d \mathcal{L}_i(\xi) \text{ and } F_{\{i,j,\dots\}} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \{i,j,\dots\}}}^d \mathcal{L}_i(\xi)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi_l} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_l} F_{\{\emptyset\}} + \mathcal{L}_0 \frac{\partial \mathcal{L}_l}{\partial \xi_l} F_{\{l\}}$$

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_{l_1} \partial \xi_{l_2}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_0}{\partial \xi_{l_1} \partial \xi_{l_2}} F_{\{\emptyset\}} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_{l_2}} \frac{\partial \mathcal{L}_{l_1}}{\partial \xi_{l_1}} F_{\{l_1\}} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_{l_1}} \frac{\partial \mathcal{L}_{l_2}}{\partial \xi_{l_2}} F_{\{l_2\}} + \mathcal{L}_0 \frac{\partial \mathcal{L}_{l_1}}{\partial \xi_{l_1}} \frac{\partial \mathcal{L}_{l_2}}{\partial \xi_{l_2}} F_{\{l_1, l_2\}}$$

$$\frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi_{l_1}^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_0}{\partial \xi_{l_1}^2} F_{\{\emptyset\}} + \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \xi_{l_1}} \frac{\partial \mathcal{L}_{l_1}}{\partial \xi_{l_1}} + \mathcal{L}_0 \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{l_1}}{\partial \xi_{l_1}^2} \right) F_{\{l_1\}}$$

3.2.2.2 Fonctions de Bernstein

On note $(\lambda_0(\xi), \lambda_1(\xi), \dots, \lambda_d(\xi))$ les coordonnées barycentriques de $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)$:

$$\lambda_0(\xi) = 1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i(\xi), \quad \forall i \in [1, d] \quad \lambda_i(\xi) = \xi_i$$

$\tilde{\mathbf{I}} = (i_0, i_1, \dots, i_d)$ sur la base $\mathcal{B}_k$ est considéré comme un multi-indice. Alors la fonction de Bernstein en dimension d de degré k associé au multi-indice avec $C_k^{\tilde{\mathbf{I}}} = \frac{k!}{\prod_{p=0}^d (i_p)!}$ est :

$$B_{k, \tilde{\mathbf{I}}}^d = C_k^{\tilde{\mathbf{I}}} \prod_{p=0}^d \lambda_p(\xi)^{i_p}$$

Preuve : $B_{k, \tilde{\mathbf{I}}}^d$ forment une base sur $\mathbb{P}_k^d$ l'espace des polynôme de dimension d et de degré k :

Pour tout k et d $\{B_{1, \tilde{\mathbf{I}}}^d\}$ et $\{B_{k, \tilde{\mathbf{I}}}^1\}$ sont des bases. On suppose $\{B_{k, \tilde{\mathbf{I}}}^{d-1}\}$ et $\{B_{k-1, \tilde{\mathbf{I}}}^d\}$ des bases.

$\{B_{k, \tilde{\mathbf{I}}}^d\}$ est une base si on montre $\sum_{i=1}^{dim(\mathbb{P}_k^d)} \beta_i B_{k, \mathbb{I}^{-1}(i)=\tilde{\mathbf{I}}}^d = 0 \Leftrightarrow \beta_i = 0$ pour $i \in [1, dim(P_K)]$.

On se fixe à chaque $\lambda_j(\xi) = 0$ pour $j = [1, d]$. Chaque $B_{k, \mathbb{I}^{-1}(i)}^d \neq 0$ tel que $\lambda_j(\xi) = 0$ appartient à $\{B_{k, \tilde{\mathbf{I}}}^{d-1}\}$ qui est une base par hypothèse.

On dérive par rapport à un λ_j quelconque les termes restant, la combinaison résultante est

$\sum_{i=1}^{dim(\mathbb{P}_{k-1}^d)} \gamma_i B_{k-1, \mathbb{I}^{-1}(i)=\tilde{\mathbf{I}}}^d = 0$ avec les $\gamma_i \neq 0$ et $\gamma_i = A(\beta_i)$ avec A une application linéaire de

noyau nul or par hypothèse $\{B_{k-1, \tilde{\mathbf{I}}}^d\}$ est une base. On a couvert tous les termes $\beta_i = 0$ donc

$\{B_{k, \tilde{\mathbf{I}}}^d\}$ est une base. $\square$.

L'unisolvence vient du fait que les fonctions de Bernstein forment une base puis on utilise le Lemme 12.

3.2.2.3 Positivité des éléments iso-paramétriques dans un cadre général

On rappelle que dans le cas de ces éléments la transformation géométrique est définie à l'aide des fonctions d'interpolations.

Soit $\mathbf{x} = \phi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_i N_i(\boldsymbol{\xi})x_i$, avec x_i les coordonnées des points de contrôles dans le domaine et $\boldsymbol{\xi}$ les coordonnées dans le domaine de référence.

Un élément est dit "positif" lorsque que ϕ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme soit $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}}) > 0$ sur $\hat{K}$ l'élément de référence. Dans le cas où les $N_i(\boldsymbol{\xi})$ forment une base interpolante on a $\sum_i N_i(\boldsymbol{\xi}) = 1$ d'où l'invariance de la positivité $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}})$ par transformation affine de déterminant positif.

En effet, soit A une matrice et T un vecteur, $A\mathbf{x}+T = A(\sum_i N_i(\boldsymbol{\xi})x_i) + (\sum_i N_i)\mathbf{T} = \sum_i N_i(\boldsymbol{\xi})(Ax_i + T)$, $\det(\frac{A\mathbf{x}+T}{\partial \boldsymbol{\xi}}) = \det(A)\det(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}})$.

Ainsi les éventuelles études de positivité pourront toujours être faites en ramenant le problème sur le domaine de référence $\hat{K}$ sans perdre de généralité.

De plus on peut noter la propriété suivante :

Propriété 2 (Critère suffisant pour $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}}) = 1$ (à la transformation affine près)) Soit $\mathcal{N}$ un ensemble de noeuds tel que la somme des fonctions de forme associées à ces noeuds soit égale à une fonction dont les variables sont dans l'espace $\mathbb{R}^{d-1}$ et tel que $\mathbb{R}^d = H \oplus \mathbb{R}^{d-1}$. Alors une perturbation $h \in H$ sur les noeuds de $\mathcal{N}$ ne modifie pas la valeur de $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}})$

Preuve : On se place sur l'élément de référence. On note $\hat{x}_i^j$ la j^{eme} , $j \in [1, d]$ composante du noeud de référence i . Dans ce cas la transformation géométrique est l'identité d'où $\sum_i N_i \hat{x}_i^j = \xi_j$ et par suite $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}}) = 1$. $\mathcal{N}$ un ensemble de noeuds ayant les propriétés ci-dessus et une perturbation $h \in H = \xi_d$ sur les noeuds $\mathcal{N}$. $\sum_i N_i \hat{x}_i^j = \xi_j$ pour $j \in [1, d-1]$ et $\sum_{i \notin \mathcal{N}} N_i \hat{x}_i^d + \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i (\hat{x}_i^d + h) = \sum_i N_i \hat{x}_i^d + (\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i)h = \xi_d + (\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i)h$ or par hypothèse $\sum_{i \in \mathcal{N}} N_i = f(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})$ d'où $\sum_{i \notin \mathcal{N}} N_i \hat{x}_i^d + \sum_{i \in \mathcal{N}} N_i (\hat{x}_i^d + h) = \xi_d + f(\xi_1, \dots, \xi_{d-1})h$. Ainsi $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\xi}}) =$

$$\det(I + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \\ 0 & \backslash & 0 & | & \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & 1 & | & \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}) = 1$$

3.2.2.4 Réciproque de la transformation géométrique et projection

On cherche la transformation géométrique inverse telle que $\boldsymbol{\xi} = \phi^{-1}(\mathbf{x})$. Pour ce faire on emploie une méthode de type *Newton-Raphson*. On reprend les notations du chapitre 1, $\phi(\boldsymbol{\xi}) = A\boldsymbol{\xi} + T + \gamma(\boldsymbol{\xi})$.

On cherche à résoudre $F(\boldsymbol{\xi}) = \phi(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{x} = 0_{\mathbb{R}^d}$. On initialise la méthode par $\boldsymbol{\xi}_0 = A^{-1}(\mathbf{x} - T)$ et l'erreur de départ est donc $F(\boldsymbol{\xi}_0) = \gamma(\boldsymbol{\xi}_0)$. En pratique pour les éléments positifs "très" déformés il faut replacer $\boldsymbol{\xi}_0$ dans le domaine de référence $\hat{K}$. La vérification du théorème de *Kantorovich* est fortement lié aux propriétés de $\gamma(\boldsymbol{\xi})$, empiriquement on présente ici l'algorithme employé qui semble ne pas faire défaut, même dans le cas d'éléments positifs très déformés.

Algorithme 1 (Réciproque avec *Newton-Raphson*) Initialisation $\boldsymbol{\xi} = A^{-1}(\mathbf{x} - T)$

$e = \|F(\boldsymbol{\xi})\|$, $e_o = e + 10\epsilon$, $t = 0$

tant que $e > \epsilon$ et $t < t_{max}$

si $e_o - e < 2\epsilon$ et $t > t_{min}$ renvoie faux
 $e_o = e$
 $\xi = \xi - D\phi^{-1}F(\xi)$
 $e = \|F(\xi)\|$ $t = t + 1$
 fin tant que
 si $t \neq t_{max}$ (sinon renvoie faux)
 si $\xi \in \hat{K}$ renvoie vrai et ξ

Les choix de t_{max} et t_{min} sont empiriques et permettent d'éviter les cas divergents après t_{min} itérations. Ils dépendent du type d'élément et de la dimension.

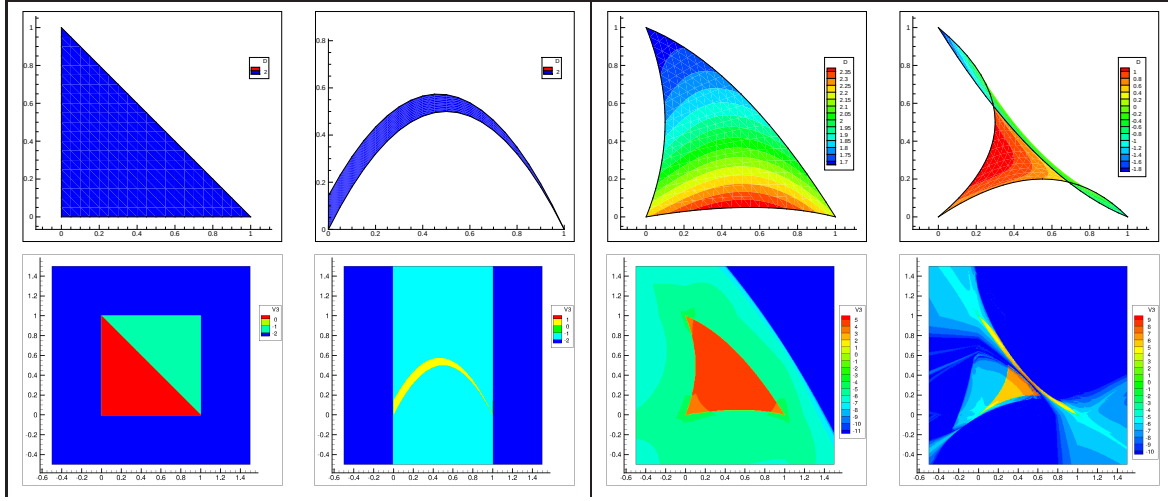


TABLE 3.1 – Représentation d'un élément P en 2D de degré 2 et sa déformation locale $D = \frac{\det(\frac{\partial \phi}{\partial \xi})}{\det(A)}$. Résultats sur une grille de points de l'algorithme (Algo. 1) avec $t_{max} = 10$ et $t_{min} = 4$, représentation du nombre d'itérations de l'algorithme (positif si l'algorithme renvoie *vrai*, négatif sinon).

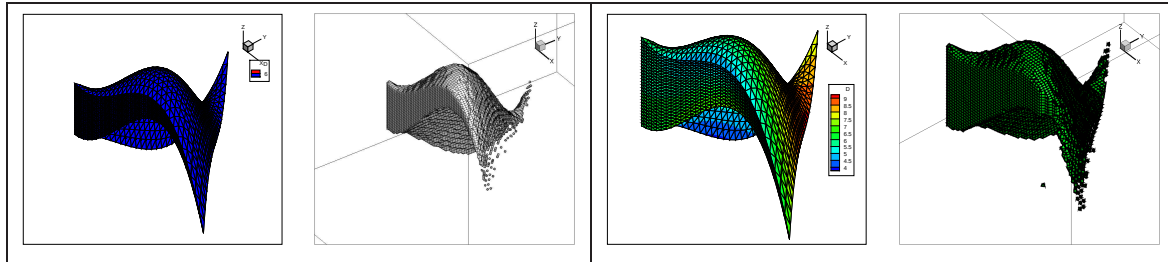


TABLE 3.2 – Représentation d'un élément P en 3D de degré 3 et sa déformation locale D . Résultats sur une grille de points de l'algorithme (Algo. 1) avec $t_{max} = 10$ et $t_{min} = 4$, représentation du nombre d'itérations de l'algorithme (positif si l'algorithme renvoie *vrai*, négatif sinon).

(Tab. 3.1) et (Tab. 3.2) montrent que l'algorithme est assez robuste même pour des éléments déformés. La deuxième figure montre un élément où s'applique (Prop. 2) et où l'algorithme converge en une itération. On peut donc intuitivement dire que l'algorithme converge d'autant

plus rapidement que $D = \frac{\det(\frac{\partial \phi}{\partial \xi})}{\det(A)}$ varie peu dans $\hat{K}$. Enfin la dernière figure montre que dans le cas d'un élément négatif l'algorithme converge mal dans les zones non bijectives. Les conclusions sont les mêmes dans les cas 3D montrés ci après avec un tétraèdre de degré 3 dans une configuration (Prop. 2) et une configuration où D varie.

3.2.3 Eléments implémentés

3.2.3.1 Élément 1D

Un segment est composé de $k + 1$ noeuds. Son espace de référence est $[0, 1]$. L'opérateur $\mathbb{I}$ est défini ainsi

$$\mathbb{I}_1(j) = \begin{cases} 1 & , \quad j = 0 \\ 2 & , \quad j = k \\ i + 2 & , \quad j = i \quad j \in [1, k - 1] \end{cases}$$

Les fonctions d'interpolation peuvent être déduites directement de la généralisation multi- d proposée ci-dessus. On montre l'allure des fonctions de *Lagrange* et de *Bernstein* (Tab. 3.3) ainsi que leur dérivée première et seconde.

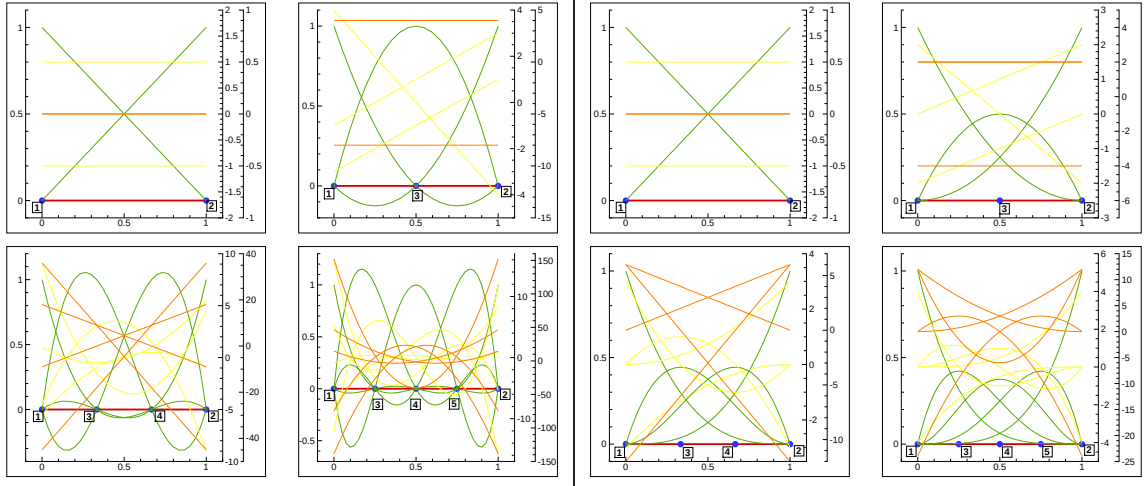


TABLE 3.3 – Eléments 1D sur $\tilde{K} = [0, 1]$, fonctions de *Lagrange* (à gauche) et de *Bernstein* (à droite) en vert (ordonnée de gauche), première dérivée en jaune (première ordonnée de droite), seconde dérivée en orange (deuxième ordonnée de droite).

Positivité des éléments 1D isoparamétriques

On peut aussi discuter des propriétés de positivité des éléments 1D dans le cas des éléments isoparamétriques (on utilise la base d'interpolation comme transformation géométrique).

Interpolation *Bernstein*

La transformation géométrique s'écrit $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^k B_{k,i}(\xi) c_{\mathbb{I}_1(i)}$. c_i sont des points de contrôle et non les points du domaine physique puisque nous n'avons pas la propriété $B_{k,i}(\hat{x}_j) = \delta_{ij}$. Pour simplifier les notations on note $d_i = c_{\mathbb{I}_1(i)}$.

Les propriétés des fonctions de *Bernstein* nous donnent : $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{k-1,i}(\xi)(d_{i+1} - d_i)$

ainsi pour les points c_i non permutés par rapport à l'élément de référence, tel que $c_1 < c_3 < \dots < c_{k+1} < c_2$ est une condition suffisante pour que $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}) > 0$.

Soit $P_B = \{d_0 = 0, d_k = 1, \{d_i\}_{i=1,k-1} | d_i < d_{i+1}, d_i \in [0, 1]\}$ l'espace des points de contrôle pour l'interpolation de *Bernstein*, à cet espace correspond des points de contrôle pour les polynômes de *Lagrange* tel que $\sum_{i=0}^k B_{k,i}(\xi) d_i = \sum_{i=0}^k L_{k,i}(\xi) x_i$ nommons $P_L = \{x_0 = 0, x_k = 1, \{m_{x_i} < x_i < M_{x_i}\}_{i=1,k-1} | x_i < x_{i+1}, x_i \in [0, 1]\}$ cet espace. Il existe une bijection γ telle que $P_L = \gamma(P_B)$. On peut donc remarquer qu'un élément dont les points physiques appartiennent à P_L est un élément avec interpolation de *Lagrange* qui est positif. C'est un critère suffisant mais assez restrictif comme nous allons le voir dans les cas particuliers suivants :

Degré 2 *Lagrange*

Supposons un élément de degré 2 avec des fonctions d'interpolation de *Lagrange*. La transformation géométrique s'écrit $\mathbf{x} = \phi(\xi) = (1 - \xi)(1 - 2\xi)x_1 + 4\xi(1 - \xi)x_3 + \xi(2\xi - 1)x_2$, avec la translation $T = -x_1$ puis la transformation $A = \frac{1}{x_2 - x_1}$, et avec la remarque précédente on se

ramène au problème équivalent $\mathbf{x} = \phi(\xi) = 4\xi(1 - \xi)h + \xi(2\xi - 1)$ avec $h = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$, $h \in [0, 1]$. $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}) = 4(1 - 2\xi)h + (4\xi - 1)$ pour $\xi \in [0, 1]$. Dans ce cas $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}) > 0$ pour $h \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$, soit $\pm \frac{1}{4}$ autour de sa position de référence.

Degré 3 *Lagrange*

On procède comme pour le degré 2, les paramètres h_1 et h_2 dans $[0, 1]$ sont les positions des noeuds milieux. Les positions de référence sont $h_1 = \frac{1}{3}$ et $h_2 = \frac{2}{3}$ correspondant respectivement à x_2 et x_3 .

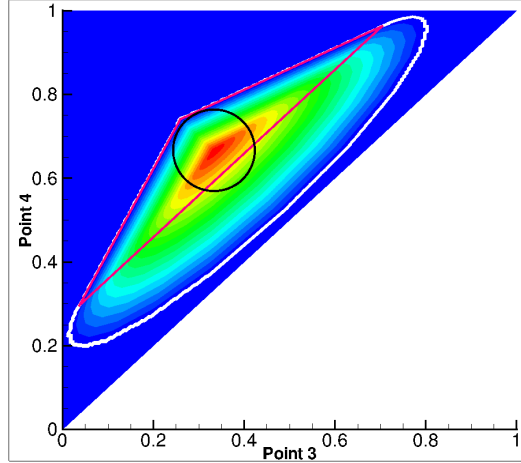


FIGURE 3.1 – Valeur de $\det(\frac{\partial \phi}{\partial \xi})$ en fonction de h_1 et h_2 .

Le cercle noir a pour rayon 0.09 et est centré aux points de référence que nous nommerons C . L'espace délimité par la borne violette correspond à l'espace P_L et l'espace délimité par la borne blanche est l'"espace de positivité" que nous nommerons E_P des éléments de *Lagrange*.

On peut remarquer que l'on peut dégager plusieurs conditions suffisantes, à savoir :

- h_1 et h_2 ne varient pas plus de ± 0.09 de leur position de référence, $(h_1, h_2) \in C$

– $(h_1, h_2) \in P_L$
 car $C \in E_P$ et $P_L \in E_P$

Degré 4 Lagrange

On procède comme pour le degré 2 et 3, les paramètres h_1, h_2 et h_3 dans $[0, 1]$ sont les positions des noeuds milieux. Les positions de référence sont $h_1 = \frac{1}{4}$, $h_2 = \frac{1}{2}$ et $h_3 = \frac{3}{4}$ correspondant respectivement à x_2, x_3 et x_4 . Les cercles noirs sur les coupes sont de rayons minimum 0.045

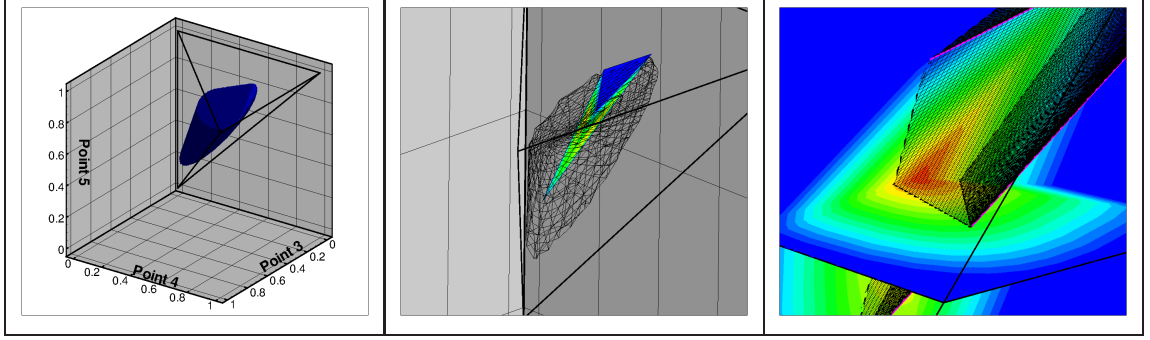


TABLE 3.4 – De gauche à droite : “espace de positivité” E_P , “espace de positivité” E_P maillé et espace P_L , “espace de positivité” E_P en coupe et espace P_L maillé

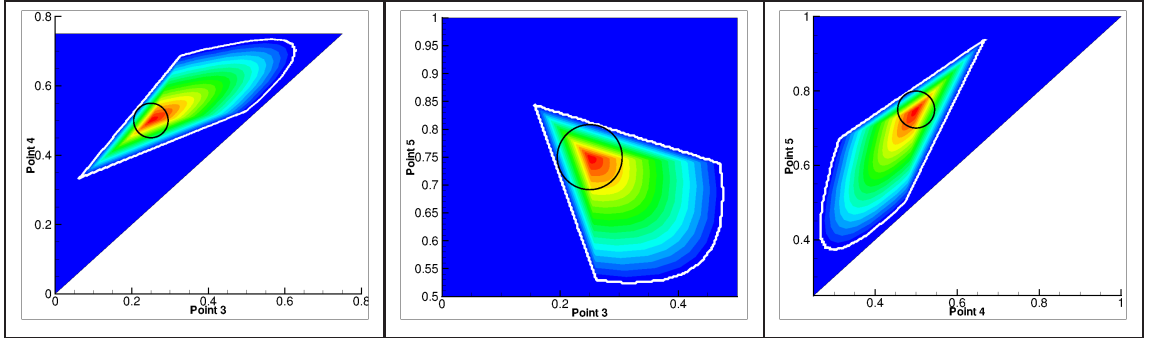


TABLE 3.5 – Coupe pour $Z = h_3^{ref} = \frac{3}{4}$, $Y = h_2^{ref} = \frac{1}{2}$ et $X = h_1^{ref} = \frac{1}{4}$

et sont centrés aux points de référence, ils appartiennent à une sphère que nous nommerons S . On peut remarquer que l’on peut dégager plusieurs conditions suffisantes, à savoir :

- h_1, h_2 et h_3 ne varient pas plus de ± 0.045 de leur position de référence, $(h_1, h_2, h_3) \in S$
 - $(h_1, h_2, h_3) \in P_L$
- car $S \in E_P$ et $P_L \in E_P$.

3.2.3.2 Triangle (P)

Pour $\tilde{K} = \{(x, y) \in [0, 1]^2 | x + y < 1\}$. Nombre de noeuds = $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

– Noeuds des angles :

$$\mathbb{I}_2^P(0, 0) = 1, \mathbb{I}_2^P(k, 0) = 2, \mathbb{I}_2^P(0, k) = 3$$

- Noeuds des cotés :

$$\mathbb{I}_2^P(i, 0) = 3 + i, \mathbb{I}_2^P(k - i, i) = k + 2 + i, \mathbb{I}_2^P(0, k - i) = 2k + 1 + i, i \in [[1, k - 1]]$$

- Noeuds intérieurs :

Les noeuds intérieurs sont sur un triangle de degré $k - 3$ dont le premier noeud est numéroté $3k + 1$. Ainsi on continue à numéroter les noeuds en suivant la même règle que précédemment avec $k \leftarrow k - 2$ et $1 \leftarrow 3k + 1$, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de noeuds.

Permutations :

On note les permutations dans la base $\mathcal{B}_k$ de l'élément sous la forme $\hat{y} = A\hat{x} + T$, (Tab. 3.6).

A	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
T	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$

TABLE 3.6 – Permutations pour le triangle

3.2.3.3 Quadrangle (Q)

Pour $\tilde{K} = [0, 1]^2$. Nombre de noeuds = $(k + 1)^2$.

- Noeuds des angles :

$$\mathbb{I}_2^Q(0, 0) = 1, \mathbb{I}_2^Q(k, 0) = 2, \mathbb{I}_2^Q(k, k) = 3, \mathbb{I}_2^Q(0, k) = 4$$

- Noeuds des cotés :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_2^Q(i, 0) &= 4 + i, \mathbb{I}_2^Q(k, i) = k + 3 + i \\ \mathbb{I}_2^Q(k - i, k) &= 2k + 2 + i, \mathbb{I}_2^Q(0, k - i) = 3k + 1 + i, i \in [[1, k - 1]] \end{aligned}$$

- Noeuds intérieurs :

Les noeuds intérieurs sont sur un quadrangle de degré $k - 2$ dont le premier noeud a pour numéro $4k + 1$. On numérote en suivant une spirale.

Permutations :

On note les permutations dans la base $\mathcal{B}_k$ de l'élément sous la forme $\hat{y} = A\hat{x} + T$, (Tab. 3.7).

A	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
T	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$

TABLE 3.7 – Permutations pour le quadrangle

3.2.3.4 Tétraèdre (P)

Pour $\tilde{K} = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 | x + y + z < 1\}$. Nombre de noeuds = $\frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{6}$.

– Noeuds d'angle :

$$\mathbb{I}_3^P(0,0,0) = 1, \mathbb{I}_3^P(k,0,0) = 2, \mathbb{I}_3^P(0,k,0) = 3, \mathbb{I}_3^P(0,0,k) = 4$$

– Noeuds d'arête du triangle du plan $i_3 = 0$:

$$\mathbb{I}_3^P(i,0,0) = 4 + i, \mathbb{I}_3^P(k-i,i,0) = k + 3 + i, \mathbb{I}_3^P(0,k-i,0) = 2k + 2 + i, i \in [[1, k-1]]$$

– Noeuds d'angle du triangle du plan $n_3 = i$:

$$\mathbb{I}_3^P(0,0,i) = 3k-1+3i, \mathbb{I}_3^P(k-i,0,i) = 3k+3i, \mathbb{I}_3^P(0,k-i,i) = 3k+1+3i, i \in [[1, k-1]]$$

– Noeuds intérieurs du triangle du plan $i_3 = 0$:

Numéroté en spirale. Il y a $m = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ noeuds

– Noeuds d'arête du triangle du plan $i_3 = j, j \in [[1, k-1]]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_3^P(j,0,i) &= m_i + j, \mathbb{I}_3^P(k-j,j,i) = m_i + k - 1 - i + j, \\ \mathbb{I}_3^P(0,k-j,i) &= m_i + 2(k-1-i) + j, j \in [[1, k-1-i]] \end{aligned}$$

$$\text{avec } m_i = \frac{(k+1)(k+2) + 3i(2k-i-3)}{2} + 1$$

– Noeuds intérieurs du triangle du plan $i_3 = j, j \in [[1, k-2]]$:

Numérotés en spirale. Il y a $m = \frac{(k-1-i)(k-2-i)}{2}$ noeuds intérieurs du triangle du plan $i_3 = j, j \in [[1, k-2]]$

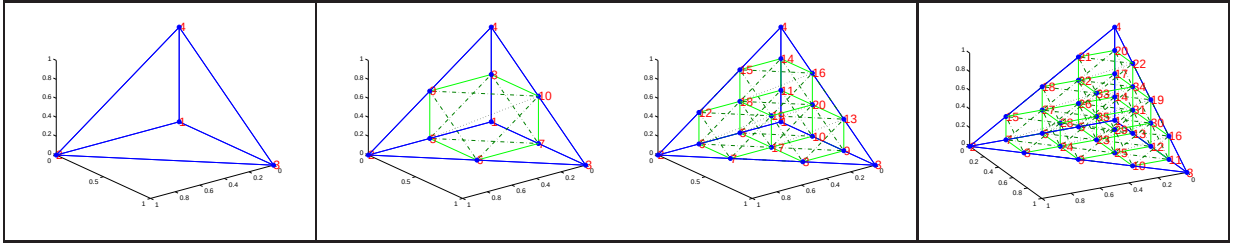


TABLE 3.8 – 3D elements $P_k, k=[1,4], \tilde{\mathbf{K}} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mid \tilde{x} \geq 0, \tilde{y} \geq 0, \tilde{z} \geq 0, \tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z} \leq 1\}$

Permutations :

On note les permutations dans la base $\mathcal{B}_k$ de l'élément sous la forme $\hat{y} = A\hat{x} + T$.

Il y a 4 permutations de l'élément et chaque face peut être permutée 3 fois. On note en colonne les permutations de l'élément et en ligne les permutations de face, (Tab. 3.9).

3.2.3.5 Héxaèdre (Q)

Pour $\tilde{\mathbf{K}} = [0,1]^3$. Nombre de noeuds = $(k+1)^3$.

– Noeuds d'angle :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_3^Q(0,0,0) &= 1, \mathbb{I}_3^Q(k,0,0) = 2, \mathbb{I}_3^Q(k,k,0) = 3, \mathbb{I}_3^Q(0,k,0) = 4 \\ \mathbb{I}_3^Q(0,0,k) &= 5, \mathbb{I}_3^Q(k,0,k) = 6, \mathbb{I}_3^Q(k,k,k) = 7, \mathbb{I}_3^Q(0,k,k) = 8 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

TABLE 3.9 – Permutations pour le tétraèdre

- Noeuds d'arête du quadrangle du plan $i_3 = 0$:

$$\mathbb{I}_3^Q(i, 0, 0) = 8 + i, \mathbb{I}_3^Q(k, i, 0) = k + 7 + i,$$

$$\mathbb{I}_3^Q(k - i, k, 0) = 2k + 6 + i, \mathbb{I}_3^Q(0, k - i, 0) = 3k + 5 + i, i \in [[1, k]]$$

- Noeuds d'angle du quadrangle du plan $i_3 = j, j \in [[1, k - 1]]$:

$$\mathbb{I}_3^Q(0, 0, i) = 4(k + i), \mathbb{I}_3^Q(k - i, 0, i) = 4(k + i) + 1,$$

$$\mathbb{I}_3^Q(k - i, k - i, i) = 4(k + i) + 2, \mathbb{I}_3^Q(0, k - i, i) = 4(k + i) + 3, i \in [[1, k]]$$

- Noeuds intérieurs du quadrangle du plan $n_3 = 0$:

Numérotés en spirale. Il y a $m = (k - 1)^2$ noeuds

- Noeuds d'arête du quadrangle du plan $n_3 = j, j \in [[1, k]]$:

$$\mathbb{I}_3^Q(j, 0, i) = m_i + j, \mathbb{I}_3^Q(k, j, i) = m_i + k - 1 - i + j,$$

$$\mathbb{I}_3^Q(k - j, k, i) = m_i + 2(k - 1 - i) + j,$$

$$\mathbb{I}_3^Q(0, k - j, i) = m_i + 3(k - 1 - i) + j, j \in [[1, k - 1 - i]]$$

with $m_i = (k + 1)^2 + 4k + 4(i - 1)(k - 1)$

- Noeuds intérieurs du quadrangle du plan $n_3 = k$:

Numérotés en spirale. Il y a $m = (k - 1)^2$ noeuds intérieurs du quadrangle du plan $n_3 = k$

- Noeuds intérieurs du quadrangle du plan $n_3 = i, i \in [[1, k - 1]]$:

Numérotés en spirale. Il y a $m = (k - 1)^2$ noeuds intérieurs du quadrangle du plan $n_3 = i$

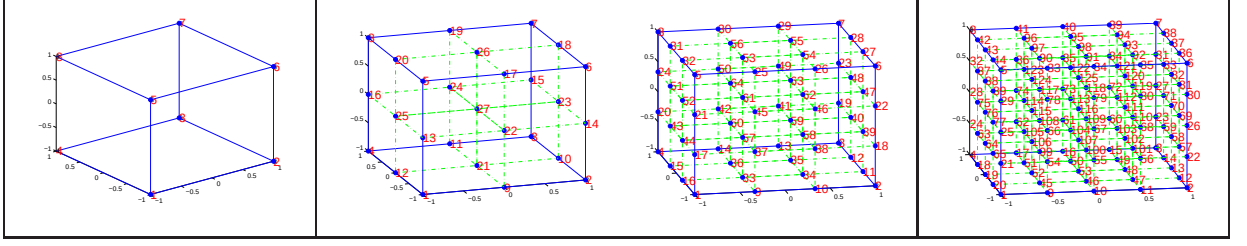
Permutations :

On note les permutations dans la base $\mathcal{B}_k$ de l'élément sous la forme $\hat{y} = A\hat{x} + T$.

Il y a 6 permutations de l'élément et chaque face peut être permutée 4 fois. On note en colonne les permutations de l'élément et en ligne les permutations de face, (Tab. 3.11).

3.2.3.6 Prisme (T)

Pour $\tilde{\mathbf{K}} = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 | x + y < 1\}$. Nombre de noeuds = $\frac{(k + 1)^2(k + 2)}{2}$.

TABLE 3.10 – 3D elements Q_k , $k=[1,4]$, $\tilde{K} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid |\tilde{x}| \leq 1, |\tilde{y}| \leq 1, |\tilde{z}| \leq 1\}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}$

TABLE 3.11 – Permutations pour l'hexaèdre

– Noeuds d'angle :

$$\mathbb{I}_3^T(0,0,0) = 1, \mathbb{I}_3^T(k,0,0) = 2, \mathbb{I}_2^T(0,k,0) = 3$$

$$\mathbb{I}_3^T(0,0,k) = 4, \mathbb{I}_3^T(k,0,k) = 5, \mathbb{I}_2^T(0,k,k) = 6$$

– Noeuds d'arête du triangle du plan $i_3 = 0$:

$$\mathbb{I}_3^T(i,0,0) = 6 + i, \mathbb{I}_3^P(k-i,i,0) = k + 5 + i, \mathbb{I}_3^P(0,k-i,0) = 2k + 4 + i, i \in [[1, k-1]]$$

– Noeuds d'angle du triangle du plan $i_3 = j$, $j \in [[1, k-1]]$:

$$\mathbb{I}_3^P(0,0,i) = 3(k+i)+1, \mathbb{I}_3^P(k-i,0,i) = 3(k+i)+2, \mathbb{I}_3^P(0,k-i,i) = 3(k+i)+3, i \in [[1, k-1]]$$

– Noeuds intérieurs du triangle du plan $n_3 = 0$:

$$\text{Numérotés en spirale. Il y a } m = \frac{(k-1)(k-2)}{2} \text{ noeuds}$$

– Noeuds d'arête du triangle du plan $n_3 = j$, $j \in [[1, k]]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_3^P(j,0,i) &= m_i + j, \mathbb{I}_3^P(k-j,j,i) = m_i + k - 1 - i + j, \\ \mathbb{I}_3^P(0,k-j,i) &= m_i + 2(k-1-i) + j, j \in [[1, k-1-i]] \end{aligned}$$

avec $m_i = (k+1)^2 + 3k + 3(i-1)(k-1)$

- Noeuds intérieurs du triangle du plan $n_3 = k$:
Numérotés en spirale. Il y a $m = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ noeuds intérieurs du triangle du plan $n_3 = k$
- Noeuds intérieurs du triangle du plan $n_3 = j$, $j \in [[1, k]]$:
Numérotés en spirale. Il y a $m = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$ noeuds intérieurs du triangle du plan $n_3 = i$

Permutations :

On note les permutations dans la base $\mathcal{B}_k$ de l'élément sous la forme $\hat{y} = A\hat{x} + T$.

Il y a 2 permutations de l'élément et chaque face peut être permutée 3 fois. On note en colonne les permutations de l'élément et en ligne les permutations de face, (Tab. 3.12).

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$

TABLE 3.12 – Permutations pour le prisme

Il existe 3 autres transformations pour déterminer les noeuds des faces quadrangulaires et chaque face peut être permutée 4 fois, mais ces transformations n'ont pas pour image $\hat{K}$, (Tab. 3.13).

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$

TABLE 3.13 – Transformations pour le prisme pour déterminer les faces quadrangulaires

3.3 Calcul approché de fonctions et de gradients de fonctions

3.3.1 Vérification de l'estimation d'erreur a priori

Afin de vérifier les résultats d'erreur donnés par (Thm. 2) on se propose de vérifier la convergence de la norme L^2 et de l'erreur locale pour $h_k \rightarrow 0$. Le principe est le suivant :

Soit un élément K et son élément de référence $\tilde{K}$ défini par l'ensemble de N points $\hat{x}_i$.

On considère des éléments isoparamétriques.

On choisit une fonction f “arbitraire” et une coordonnée $\hat{y}$ dans l’élément de référence ayant pour image $y = \phi(\hat{y})$.

On définit les coordonnées physiques associées à $\hat{x}_i$ comme une transformation non linéaire du type $x_i = h_K \hat{x}_i + x_0 + C_0 r_i h_K^p$, avec $p \in \mathbb{N}$, $C_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et r_i une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]^d$ et on définit en chaque point de K le degré de liberté correspondant à la valeur de f telle que $f_i = f(\phi(\hat{x}_i))$.

On note $f^h = \sum_i N_i(\xi) f_i$ et on calcule $|f(y) - f^h(\hat{y})|$, $\sqrt{\int_{\tilde{K}} |f(\phi(\xi)) - f^h(\xi)|^2 j(\xi) d\xi}$,

$\|\nabla_{\mathbf{x}} f(y) - \nabla_{\mathbf{x}} f^h(\hat{y})\|$, $\sqrt{\int_{\tilde{K}} \|\nabla_{\mathbf{x}} f(\phi(\xi)) - \nabla_{\mathbf{x}} f^h(\xi)\|^2 j(\xi) d\xi}$ et $\|\Delta_{\mathbf{x}} f(y) - \Delta_{\mathbf{x}} f^h(\hat{y})\|$.

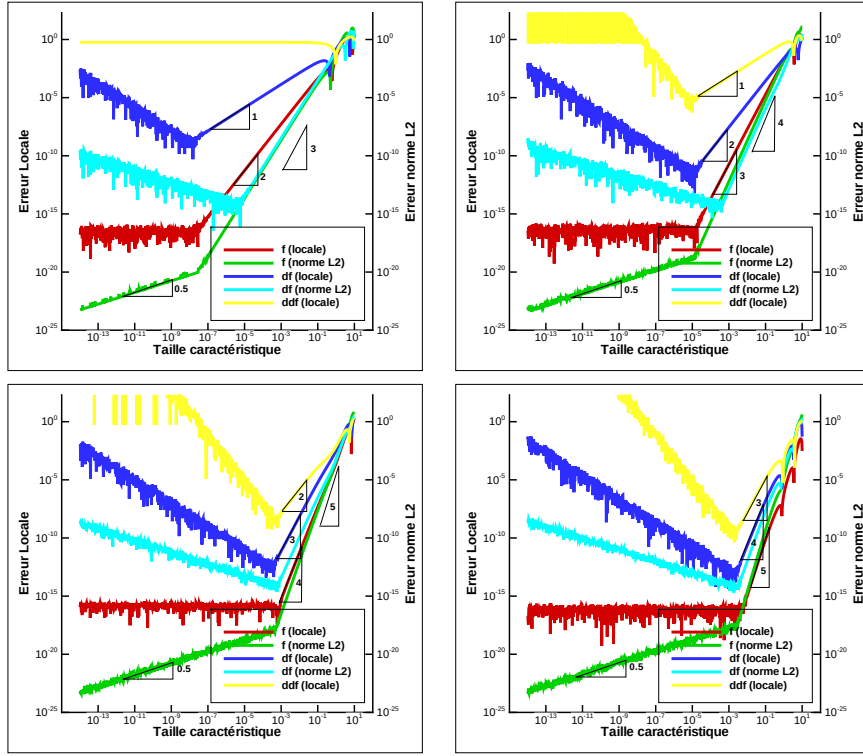
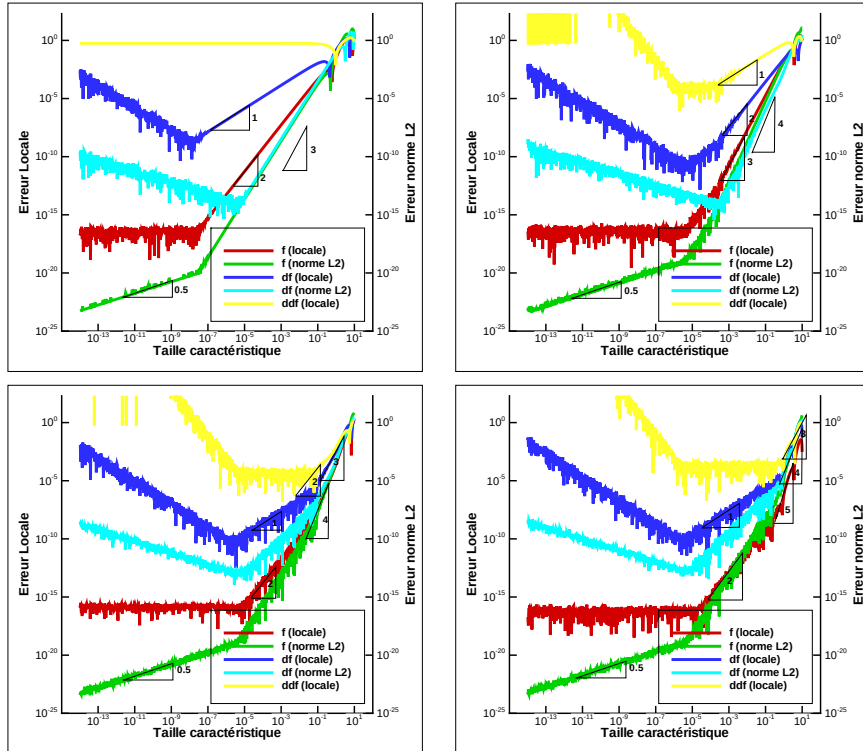
Rappelons que les résultats d’erreur a priori sur des fonctions f suffisamment régulières prédisent respectivement les erreurs suivantes avec k le degré de l’espace polynômial : h^{k+1} , $h^{k+1+\frac{d}{2}}$, h^k , $h^{k+\frac{d}{2}}$ et h^{k-1} .

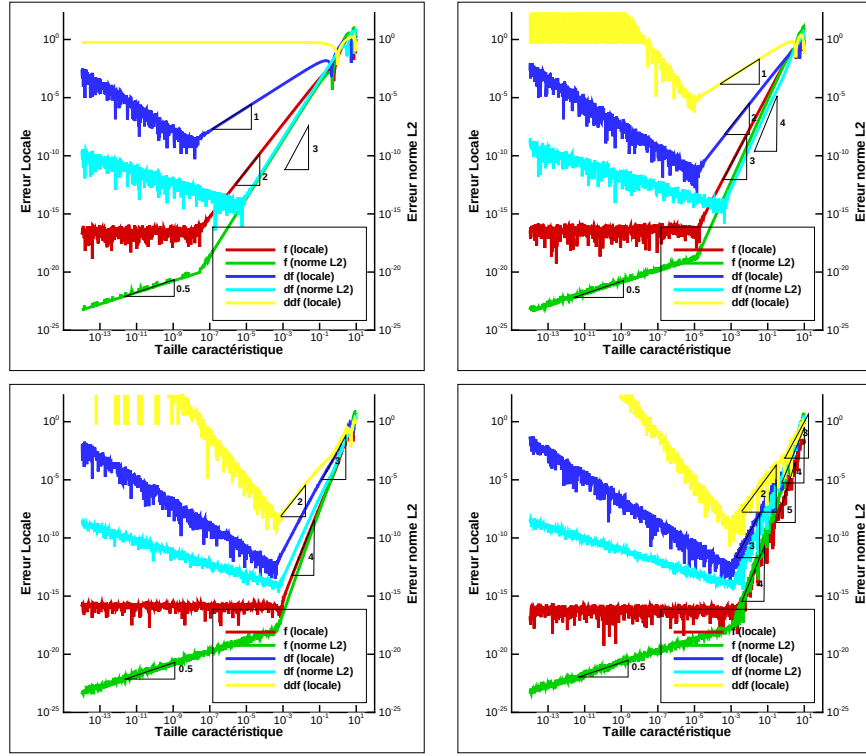
Résultats 1D :

On choisit $f(x) = \sqrt{x} \sin(x)$ d’où $f'(x) = \sqrt{x} \cos(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x)$ et $f''(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin(x) - \frac{\sin(x)}{4x\sqrt{x}}$.

On fixe $x_0 = \frac{1}{2}$, $\hat{y} = 0.25436$ on part de $h_K = 0.1$ jusqu’à $h_K = 1e^{-15}$.

On considère tout d’abord les transformations linéaires d’où $C_0 = 0$ voir (Tab. 3.14), puis des transformations avec un bruit r_i (défini ci-dessus) avec $C_0 = 1e^{-4}$ et $p = 1$ voir (Tab. 3.15) et enfin des transformations avec un bruit r_i (défini ci-dessus) avec $C_0 = 1e^{-3}$ et $p = 3$ voir (Tab. 3.16).

TABLE 3.14 – Etude de convergence sur les éléments 1D avec $C_0 = 0$ TABLE 3.15 – Etude de convergence sur les éléments 1D avec $C_0 = 1e^{-4}$ et $p = 1$

TABLE 3.16 – Etude de convergence sur les éléments 1D avec $C_0 = 1e^{-4}$ et $p = 3$ **Résultats 2D :**

On choisit $f(x, y) = e^y \sqrt{x} \cos(x)$ d'où $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y \sqrt{x} \left(\frac{1}{2x} \cos(x) - \sin(x) \right)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^y \sqrt{x} \left(\frac{1}{x} \sin(x) + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) \cos(x) \right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$.

On fixe $x_0 = (\frac{1}{2}, 1)$, $\hat{y} = (0.25436, 0.562538)$ on part de $h_K = 0.1$ jusqu'à $h_K = 1e^{-15}$.

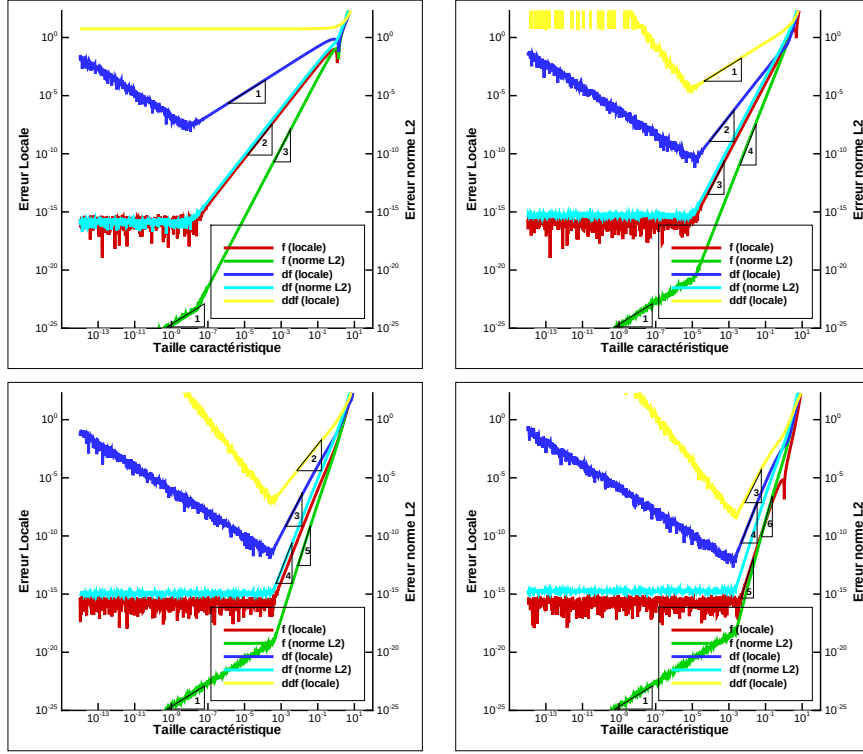
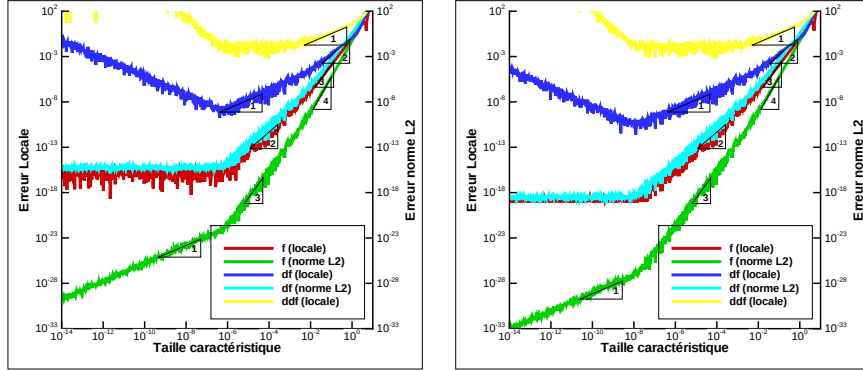
On considère tout d'abord les transformations linéaires d'où $C_0 = 0$ voir (Tab. 3.17), on considère des bruits uniquement rentrant dans le cadre de (Prop. 2) avec $C_0 = 1e^{-1}$, $p = 1$ en double précision puis quadruple précision voir (Tab. 3.18) et enfin des transformations avec un bruit r_i (défini ci-dessus) avec $C_0 = 1e^{-3}$ et $p = 2$ voir (Tab. 3.19).

3.3.2 Commentaires

Ces courbes sont révélatrices de deux composantes bien distinctes : la destruction de l'ordre pour des transformations géométriques où le paramètre p n'est pas suffisamment élevé et le rôle de l'erreur numérique.

3.3.2.1 Effet de l'erreur numérique

Dans un premier temps, nous discutons de l'erreur numérique. Nous supposons l'erreur numérique comme un bruit blanc d'amplitude maximum ϵ . En imaginant une erreur numérique sur toutes les composantes f_i et une transformation ϕ affine (Ax avec $\det(A) \leq O(h^d)$) on a la

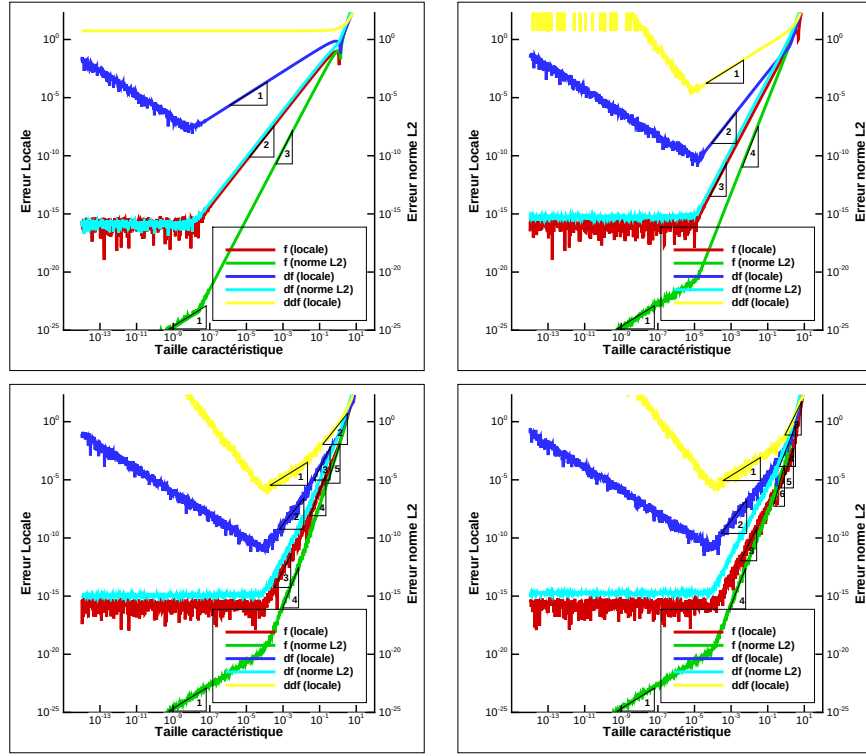
TABLE 3.17 – Etude de convergence sur les éléments P2D avec $C_0 = 0$ TABLE 3.18 – Convergence pour (Prop. 2), P2D degré 2, $p = 1$ (double et quadruple précision)

propriété suivante :

$$\sum_i N_i(f_i + \epsilon_i) = \sum_i N_i f_i + \sum_i N_i \epsilon_i$$

$$\left| f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})(f_i + \epsilon_i) \right| = \left| f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})f_i + \sum_i N_i(\hat{y})\epsilon_i \right| \leq \left| f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})f_i \right| + \epsilon \leq O(h^{k+1}) + \epsilon$$

$$\left\| f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})(f_i + \epsilon_i) \right\|_{L^2} \leq \left\| f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})f_i \right\|_{L^2} + \epsilon h^{\frac{d}{2}} \leq (O(h^{k+1}) + \epsilon) h^{\frac{d}{2}}$$

TABLE 3.19 – Etude de convergence sur les éléments P2D avec $C_0 = 0.001$ et $p = 2$

En ce qui concerne la dérivée :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\sum_i N_i \epsilon_i \right) = \sum_i \nabla_{\mathbf{x}} N_i \epsilon_i = \sum_i \nabla_{\boldsymbol{\xi}} N_i \frac{1}{j(\boldsymbol{\xi})} (\text{com}(D\phi))^t \epsilon_i$$

$$\left| \frac{1}{j(\boldsymbol{\xi})} \right| \leq O(h^{-d}), \quad \|(\text{com}(D\phi))^t\| \leq O(h^{d-1}), \quad \|\nabla_{\boldsymbol{\xi}} N_i\| \leq C_i$$

On en déduit donc que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\sum_i N_i \epsilon_i \right) \leq O(h^{-1})$$

Avec un raisonnement équivalent on a

$$\Delta_{\mathbf{x}} \left(\sum_i N_i \epsilon_i \right) \leq O(h^{-2})$$

D'où les résultats

$$\left| \nabla_{\mathbf{x}} \left[f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})(f_i + \epsilon_i) \right] \right| \leq \left| \nabla_{\mathbf{x}} \left[f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})f_i \right] \right| + \epsilon O(h^{-1}) \leq O(h^{k+1}) + \epsilon O(h^{-1})$$

$$\left\| \nabla_{\mathbf{x}} \left[f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})(f_i + \epsilon_i) \right] \right\|_{L^2} \leq \left\| \nabla_{\mathbf{x}} \left[f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})f_i \right] \right\|_{L^2} + \epsilon O(h^{-1}) h^{\frac{d}{2}} \leq O(h^{k+\frac{d}{2}}) + \epsilon O(h^{-\frac{d}{2}})$$

$$\left| \Delta_{\mathbf{x}} \left[f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})(f_i + \epsilon_i) \right] \right| \leq \left| \Delta_{\mathbf{x}} \left[f(y) - \sum_i N_i(\hat{y})f_i \right] \right| + \epsilon O(h^{-2}) \leq O(h^{k-1}) + \epsilon O(h^{-2})$$

3.3.2.2 Destruction de l'ordre pour des transformations géométriques particulières

On remarque un phénomène général indépendant de la dimension : une perte de l'ordre de convergence quand la transformation géométrique n'est pas une transformation affine. On peut aussi remarquer que cette perte d'ordre se produit même dans le cadre de (Prop. 2).

De plus on souligne que cette perte d'ordre intervient aussi bien dans le cas de la valeur locale que dans l'estimation de la norme L^2 . Tendant ainsi à montrer que c'est un phénomène qui est indépendant de la règle d'intégration, ce qui exonère, de ce fait, le caractère non constant du jacobien de la transformation dans la perte d'ordre.

En reprenant l'article qui fonde en partie le résultat d'erreur a priori (Thm. 2), à savoir [CR71] et [CR72], les ingrédients permettant l'obtention de cette estimation sont de deux types :

- Développement de *Taylor*, sur l'"espace physique", de la fonction à interpoler avec la formule de *Taylor multipoint*.
- Considérer une transformation affine $\hat{y} = Ax + T$ avec $\|Ax\| \leq h$, puis statuer sur le caractère équivalent de l'ensemble des points définissant l'élément fini.

Néanmoins dans le cas des éléments isoparamétriques ou bien avec une transformation géométrique générale ϕ non linéaire il est nécessaire de faire le développement de *Taylor* sur l'espace de l'élément de référence et non pas sur l'élément dans l'espace physique. La raison pour laquelle ce développement limité n'a aucun sens sur l'élément physique tient simplement au fait que les fonctions de forme sur l'élément physique ne sont pas polynômiales sauf dans le cas d'une transformation géométrique affine. De ce fait le théorème 1 de [CR71] n'est plus nécessairement exact. Pour prendre en compte le caractère non-linéaire, mais polynômial, de la transformation géométrique on suppose donc qu'elle est de la forme $x_i = A_K \hat{x}_i + T + C_0 r_i h_K^p$ avec $\|A_K \hat{x}\| \leq h_K$ que l'on peut donc réécrire $x_i = A_K \hat{x}_i + T + O(h_K^p)$.

Premier développement sur l'espace physique

$$u(a_i) = u(x) + Du(x) \cdot (a_i - x) + \dots + \frac{1}{k!} D^k u(x) (a_i - x)^k + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} u(\eta_i(x)) (a_i - x)^{k+1}$$

De plus en notant $\bar{x} = A\xi + T$ et $x = \bar{x} + O(h^p)$

$$u(x) = u(\bar{x}) + O(h^p)$$

d'où

$$u(a_i) - u(x) = Du(\bar{x})(a_i - \bar{x}) + \dots + \frac{1}{k!} D^k u(\bar{x})(a_i - \bar{x})^k + \frac{1}{(k+1)!} D^{k+1} u(\eta_i(\bar{x}))(a_i - \bar{x})^{k+1} + \underline{O(h^p)(a_i - \bar{x})}$$

On rappelle que $(a_i - \bar{x}) \leq h$. Donc on a une formule qui ressemble à s'y méprendre au développement de *Taylor* initial plus un terme en $O(h^{p+1})$.

En rajoutant ce terme dans le raisonnement de [CR71] on ne détruit rien tant que $p = k$, k le degré du polynôme d'interpolation. En revanche, si $p < k$ l'erreur est alors tronquée. On a alors une erreur qui se comporte, pour h "suffisamment petit", (ceci étant fortement dépendant de C_0) comme $|D^m(u - \tilde{u})| \leq O(h^{\min(k,p)+1-m})$ dans le cas d'éléments respectant $h \sim \rho$.

3.3.3 Cas des éléments très allongés

Dans les cas 2D et 3D des maillages *Navier-Stokes* il est d'usage, comme il sera précisé brièvement dans la suite, d'avoir recours à des éléments très étirés en paroi afin de capturer la couche limite et de ne pas surcharger le maillage.

On cherche à savoir si cet étirement n'a pas d'effet négatif sur l'ordre. Le test est le même que dans la partie précédente, excepté que l'on étire l'élément selon x d'une taille h_x et selon y d'une

taille h_y . Les résultats présentés sont tous faits pour des éléments ayant une transformation géométrique affine pour éviter de subir l'effet de perte d'ordre décrit précédemment. On utilise la même fonction test que dans l'exercice 2D précédent.

Les figures suivantes représentent le logarithme en base 10 de l'erreur par rapport au logarithme en base 10 de h_x et h_y . On s'intéresse ici uniquement à la valeur absolue de l'erreur locale.

Pour chaque élément P 2D de degré k on trace :

$$\log \left| f(x, y) - f^{h_x, h_y}(x, y) \right| = F_1(\log(h_x), \log(h_y)) \quad \log \left\| \nabla_{\mathbf{x}} f(x, y) - \nabla_{\mathbf{x}} f^{h_x, h_y}(x, y) \right\| = F_2(\log(h_x), \log(h_y))$$

$$\log \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f^{h_x, h_y}(x, y)}{\partial x} \right| = F_3(\log(h_x), \log(h_y)) \quad \log \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f^{h_x, h_y}(x, y)}{\partial y} \right| = F_4(\log(h_x), \log(h_y))$$

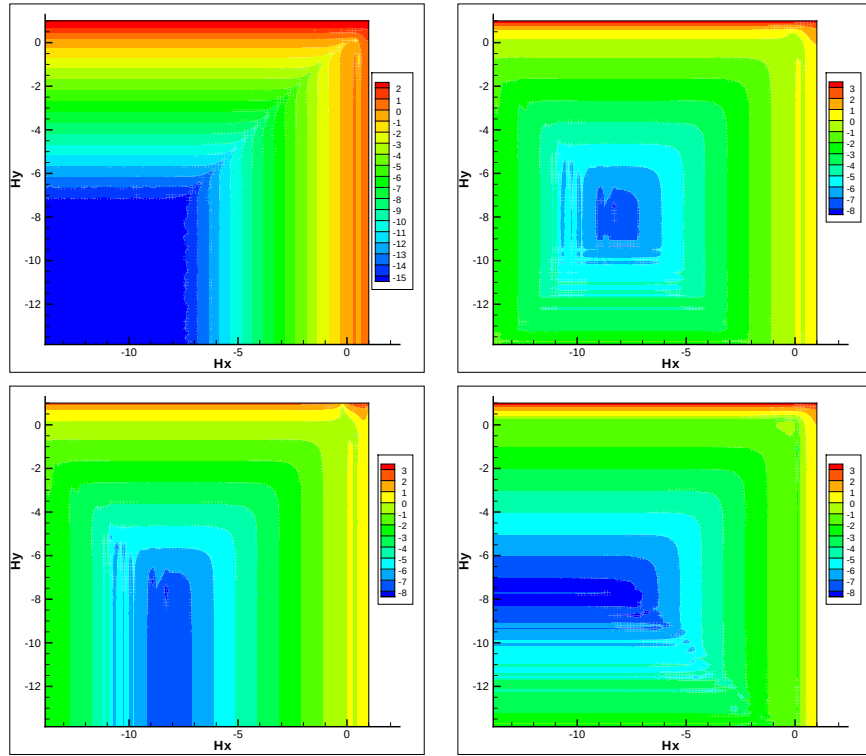


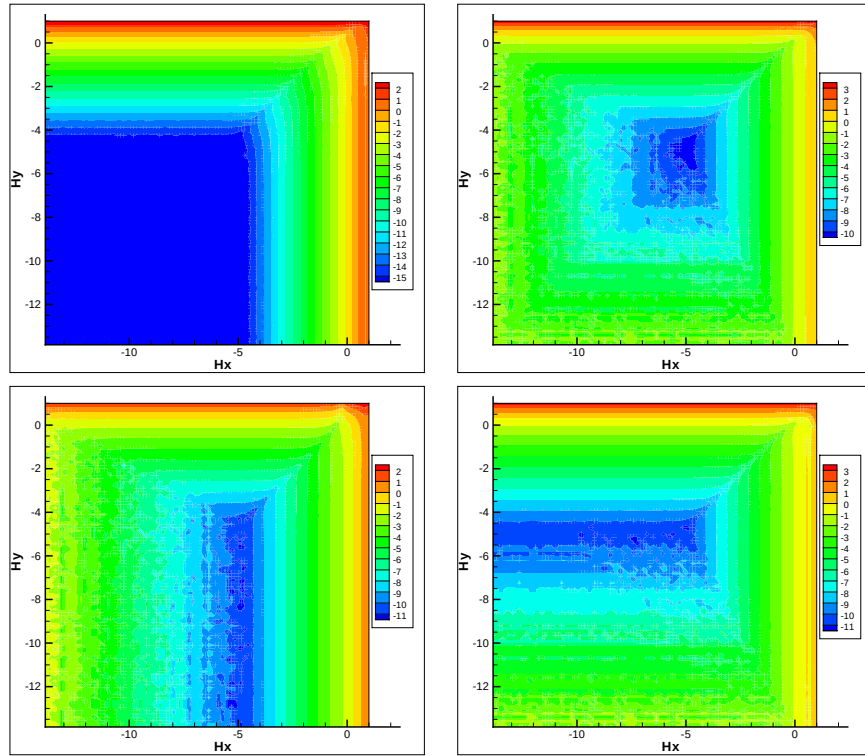
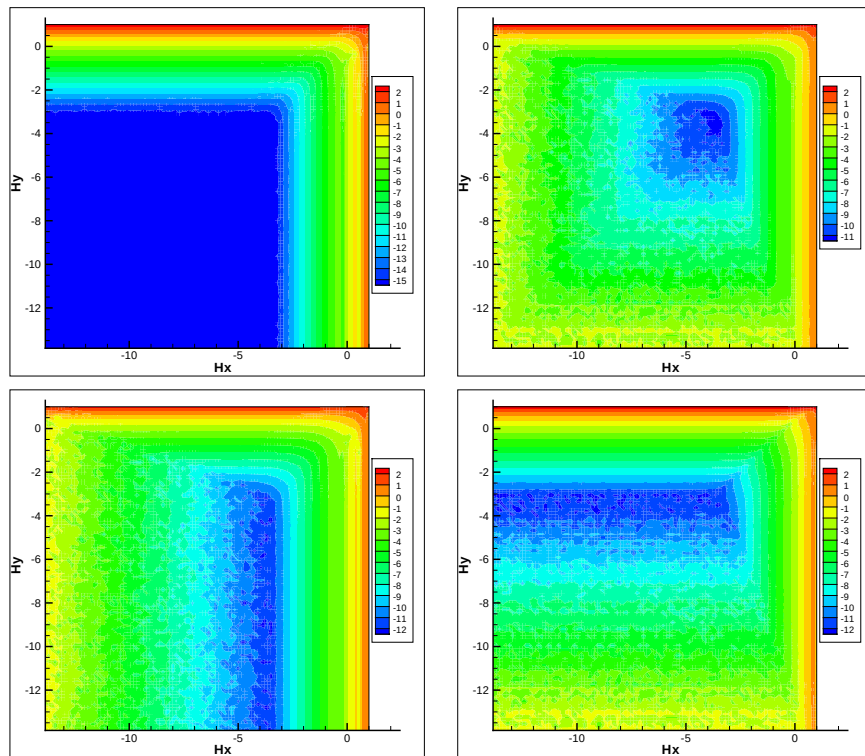
TABLE 3.20 – Etude de convergence sur h_x et h_y pour les éléments P2D de degré 1

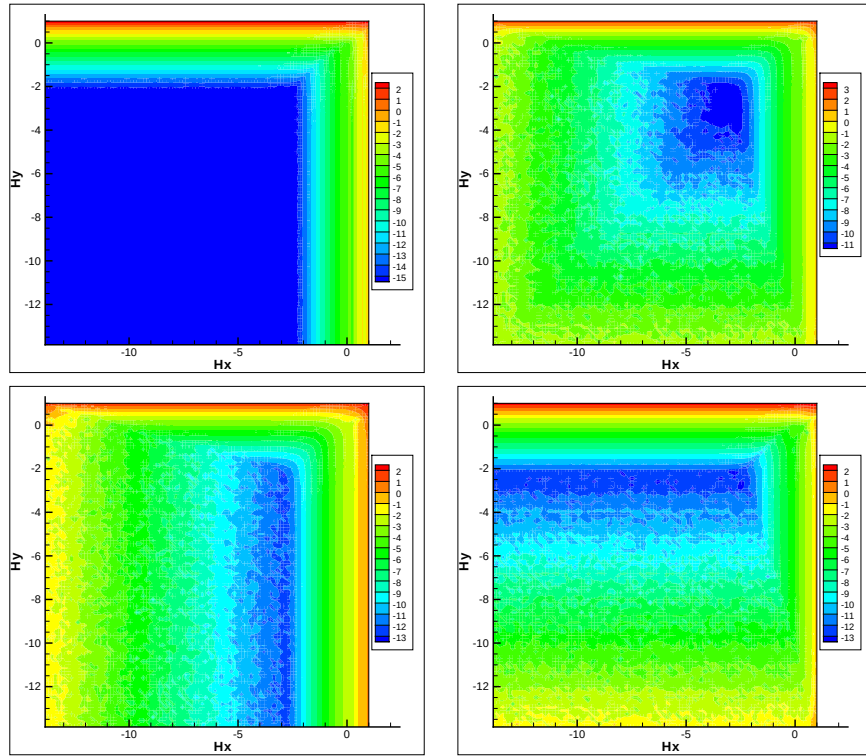
Commentaires : De la même manière que pour l'étude précédente on retrouve bien l'augmentation de l'ordre en passant à des degrés d'éléments de plus en plus élevé. On retrouve aussi les estimations d'erreur classique (avec le comportement dû à l'erreur numérique aussi) en prenant comme mesure $h = \max(h_x, h_y)$ en ce qui concerne la valeur absolue de l'erreur locale sur la fonction et sur la norme du gradient.

En revanche dans le cas où l'on considère uniquement la valeur absolue de la dérivée dans une direction w on obtient l'erreur suivante :

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial w} - \frac{\partial f^{h_x, h_y}(x, y)}{\partial w} \right| \leq O(h^k) + \epsilon(O(h_w^{-1}) + O(1))$$

La conclusion reste équivalente, on a bien détérioration de l'erreur dans le calcul du gradient en raffinant dans la direction du gradient en revanche on peut remarquer que l'on ne détériore pas cette valeur en raffinant de manière transverse.

TABLE 3.21 – Etude de convergence sur h_x et h_y pour les éléments P2D de degré 2TABLE 3.22 – Etude de convergence sur h_x et h_y pour les éléments P2D de degré 3

TABLE 3.23 – Etude de convergence sur h_x et h_y pour les éléments P2D de degré 4

On peut donc en déduire qu'il n'y a pas de raison particulière pour que le calcul soit détérioré par l'utilisation d'éléments très allongés. Il faut simplement être conscient du fait que l'erreur commise reste tout de même majorée par la plus grande barre $h = \max(h_x, h_y)$. Cette technique doit donc s'appliquer dans des zones où l'utilisateur est persuadé que la solution est très régulière dans la direction où il ne raffine pas.

3.3.4 Reconstruction de gradient

Le calcul des gradients de la fonction d'interpolation a un sens à l'intérieur des éléments. Il est nécessaire dans certains cas et notamment dans le cas des schémas R.D.S., où l'on cherche à évaluer les dérivées secondes des fonctions tests, de calculer la dérivée aux noeuds.

3.3.4.1 Reconstruction sur une cellule

On fait le choix de faire cette reconstruction en considérant que l'on sait calculer les gradients en chaque noeuds des éléments puis on effectue une sommation pondérée.

En notant $\mathcal{V}(i) = \{K | i \in K\}$, les éléments voisins du noeud i . On calcule alors le gradient de la façon suivante :

$$(\nabla u)_i = \frac{\sum_{K \in \mathcal{V}(i)} (\nabla u)_i^K \omega_K}{\sum_{K \in \mathcal{V}(i)} \omega_K} = \frac{\sum_{K \in \mathcal{V}(i)} \sum_j (\nabla N_j)(\xi_i) u_j^K \omega_K}{\sum_{K \in \mathcal{V}(i)} \omega_K} \quad (3.1)$$

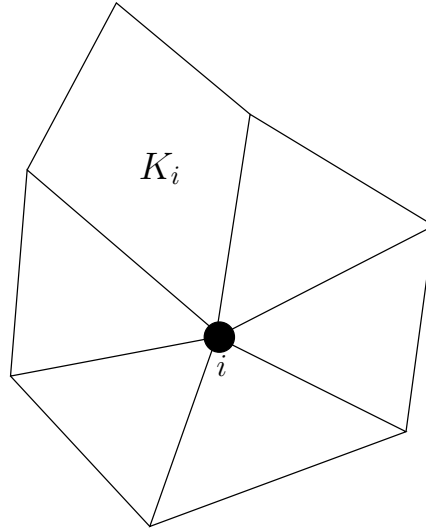


FIGURE 3.2 – Cellule $\mathcal{C}_i$: Eléments voisins du noeud i

La méthode provient de l'équation suivante, on cherche les $(\nabla u)_i$ telles que :

$$\sum_j \nabla N_j u_j = \sum_j N_j (\nabla u)_j$$

Soit φ une fonction de $L^2(\mathcal{C}_i)$ alors :

$$\int_{\mathcal{C}_i} \varphi \sum_j \nabla N_j u_j d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}_i} \varphi \sum_j N_j (\nabla u)_j d\mathbf{x}$$

On passe en coordonnées de références :

$$\sum_{K \in \mathcal{V}(i)} \sum_j \left(\int_{\tilde{K}} \varphi \nabla N_j j_K(\xi) d\xi \right) u_j = \sum_{K \in \mathcal{V}(i)} \sum_j \left(\int_{\tilde{K}} \varphi \sum_j N_j j_K(\xi) d\xi \right) (\nabla u)_j$$

On suppose que les N_j sont les fonctions d'interpolation de type *Lagrange*. Alors on prend φ comme la masse de dirac au point i . Ceci permet de s'affranchir des $(\nabla u)_j$ pour $j \neq i$.

$$\left[\sum_{K \in \mathcal{V}(i)} j_K(\xi_i) \right] (\nabla u)_i = \sum_{K \in \mathcal{V}(i)} \left[\sum_j (\nabla N_j)(\xi_i) u_j \right] j_K(\xi_i)$$

On retrouve bien la formule annoncée avec $\omega_K = j_K(\xi_i)$. De manière simpliste, on peut identifier $j_K(\xi_i)$ au volume de l'élément K .

On propose un cas test afin de tester cette reconstruction sur deux domaines pour la même fonction $f(x, y) = (\cos(\frac{\pi}{2}y)\sin(\frac{\pi}{2}x))^2 + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

Afin d'apprécier les différences (ou pas), on considère plusieurs poids : $\omega_K^0 = 1$, $\omega_K^1 = \text{mes}(K)$, $\omega_K^2 = \frac{1}{\text{mes}(K)}$, $\omega_K^3 = j_K(\xi_i)$.

Les deux maillages, sur lesquels les gradients sont reconstruits, sont les suivants :

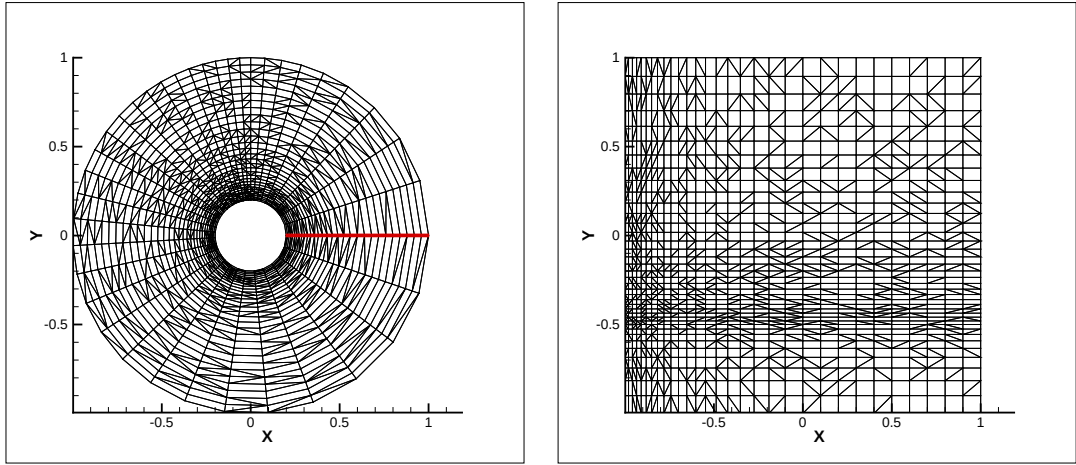


FIGURE 3.3 – Maillages utilisés pour le test de reconstruction

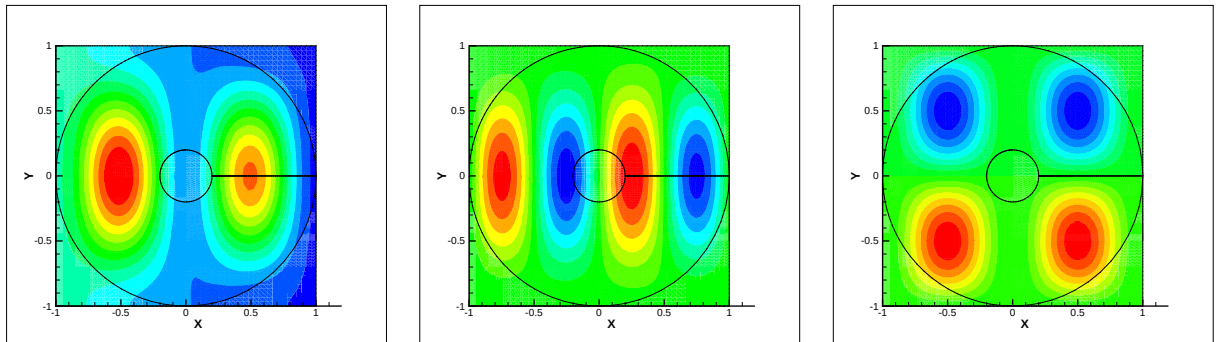


FIGURE 3.4 – Représentation de la fonction dont le gradient est reconstruit

On utilise un maillage circulaire afin d'avoir des éléments courbes sur l'ensemble du maillage. Au niveau de la ligne rouge le maillage n'est pas fermé, les noeuds se recouvrent mais ils sont différents. De plus on a fait un mélange aléatoire de triangle et de quadrangle. Enfin on a introduit quelques effets avec des éléments plus ou moins aplatis. Ceci dans le but de montrer

que la méthode n'est pas tellement sensible à ces problèmes. Tous les éléments de ces maillages ont une taille caractéristique proportionnelle à un paramètre h , que l'on prend comme référence pour raffiner les maillages et faire un test de convergence.

Le graphique suivant représente l'étude de convergence menée sur les deux maillages. On considère un raffinement uniforme en partant de $h = 0.2$ et en divisant h par 2 deux fois, un dernier test est fait à $h = 0.005$. On fait cette étude avec les différents poids ω_K^i proposés précédemment.

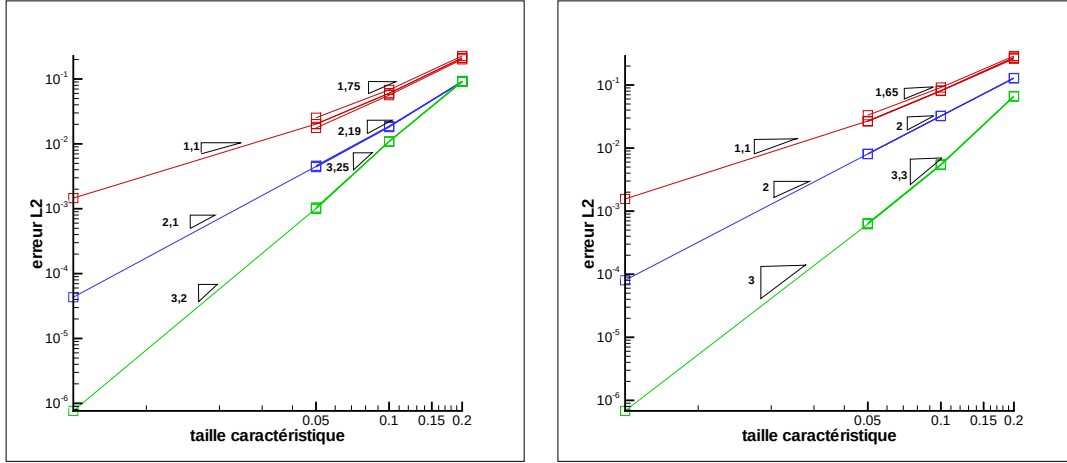


FIGURE 3.5 – Etude de convergence de la reconstruction. A droite pour le maillage carré et à gauche pour le maillage circulaire. Rouge degré 1. Bleu degré 2. Vert degré 3

Pour une étude plus qualitative on présente l'erreur commise sur le maillage le plus grossier en degré 1, 2 et 3 pour le gradient selon x et selon y , et pour les différents jeux de poids. De gauche à droite : jeux de poids ω_0 , ω_1 , ω_2 , ω_3 .

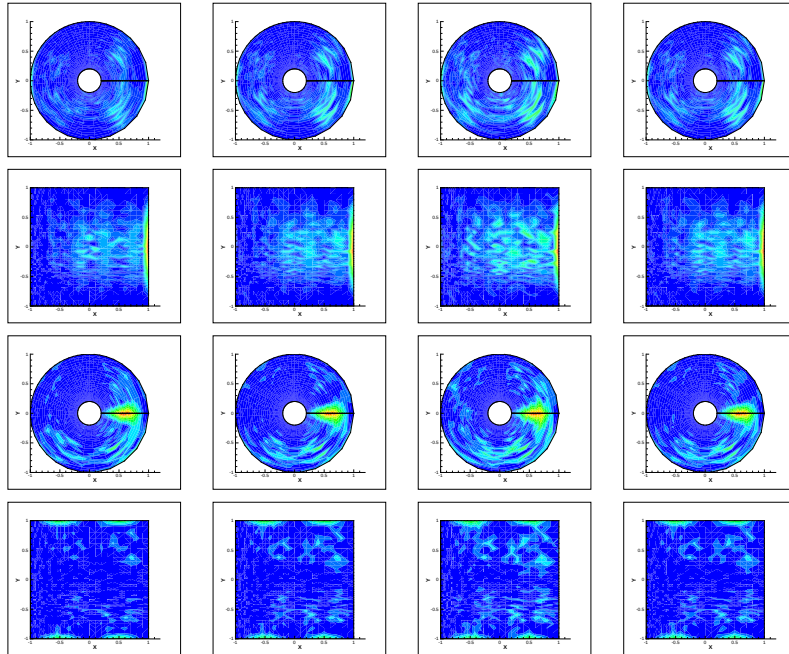
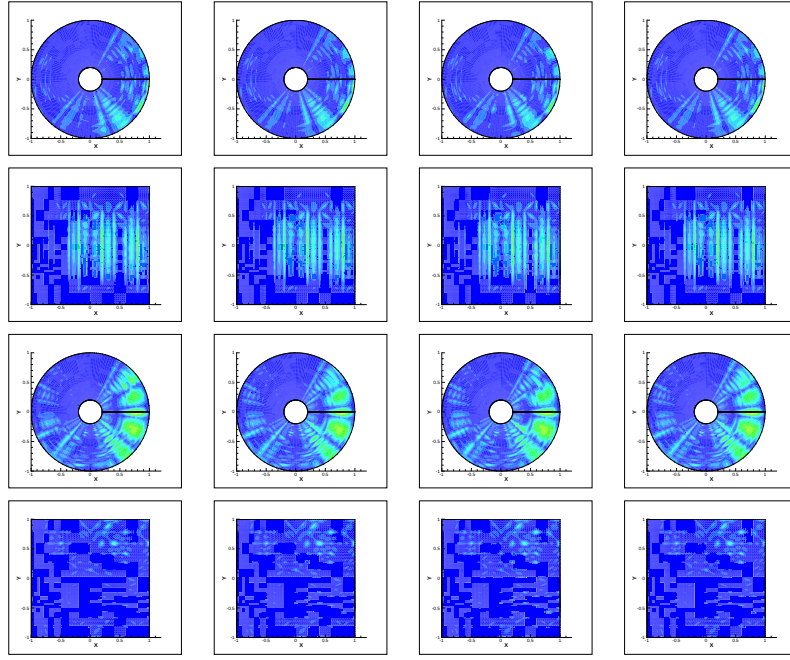
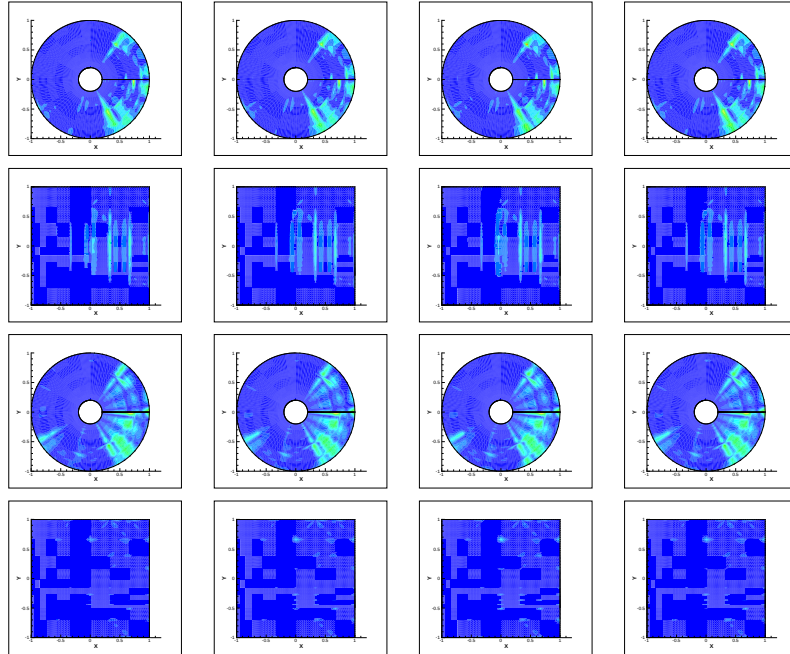


FIGURE 3.6 – Erreur commise sur le gradient selon x , puis y . Degré 1.

FIGURE 3.7 – Erreur commise sur le gradient selon x puis y . Degré 2.FIGURE 3.8 – Erreur commise sur le gradient selon x puis y . Degré 3.

Commentaires : D'après les estimations d'erreur *a priori*, nous devrions trouver des convergences de l'ordre de $\|E\|_{L^2} = O(h^k)$. Pour des valeurs de h encore grande, on trouve une convergence très accrue pour les éléments linéaires et des convergences qui suivent les estimations pour les degrés élevés. En revanche pour h petit (convergence entre $h = 0.05$ et $h = 0.005$) on retrouve les estimations d'erreur classique. On peut remarquer que les éléments déformés ne semblent pas avoir d'impact sur la convergence. Cette méthode de reconstruction

de gradient est donc cohérente avec une méthode qui se veut être d'ordre élevé.

Ce résultat n'est pas une surprise puisque localement pour chaque élément on a une erreur qui suit $\|E\|_{L^2} = O(h^k)$, et la sommation n'a pas de raison de détruire cette approximation.

Les méthodes de reconstruction exhibent des défauts aux noeuds appartenant aux frontières. Or il semble que l'utilisation d'éléments de degré plus élevé semble rendre la méthode moins sensible à ce phénomène bien qu'il reste présent.

De manière plus intéressante, on montre (Eq. 3.1) provient d'une intégration locale sur la cellule $\mathcal{C}_i$ suivie d'une technique de type *mass-lumping*. On peut donc se demander si les ω_K peuvent prendre d'autres valeurs que $j_K(\xi_i)$. L'étude de convergence nous montre qu'il ne semble pas y avoir de contre-indication au choix de ω_K différents. De plus l'étude qualitative ne montre pas de grands changement pour les différentes pondérations. On peut juste noter que $\omega_K = \frac{1}{mes(K)}$

semble donner des résultats sensiblement moins bon pour l'ensemble des cas. Cette pondération est motivée par le fait qu'elle privilégie le gradient calculé sur les petits éléments, sachant qu'ils sont censés générer le moins d'erreur. Clairement l'intuition n'est pas suivie d'effet, peut-être à cause du mélange quadrangle triangle. De plus cette méthode n'aura pas tendance à lisser les gradients ce qui sera surement préjudiciable. En revanche les autres pondérations semblent équivalentes. On préférera $\omega_K = j_K(\xi_i)$ qui évite le calcul des volumes des éléments (pas de recours à un calcul intégrale) et qui trouve une justification de type élément fini. De plus comme $j_K(\xi_i) \simeq mes(K)$ cette méthode aura tendance à lisser les gradients.

Coté coût de calcul elles sont toutes équivalentes, si on suppose que l'on a calculé les termes de pondérations au préalable. Le coût algorithmique est de l'ordre de $O(N_{el}N_{np})$ (N_{el} étant le nombre d'élément et N_{np} le nombre de noeuds par élément).

Soit $N_{el,k}$ le nombre d'éléments de degré k , on a relation simple $N_{el,k}k^d = N_{el,1}$ (voir dimension des espaces de polynômes pour s'en convaincre). De plus $N_{np,k}$ le nombre de noeuds par élément de degré k est environ $N_{np,k} = O((k+1)^d)$. Le coût algorithmique de la méthode en fonction du nombre d'éléments de degré 1 et du degré des éléments s'écrit donc :

$$C = O(N_{el,1}(1 + \frac{1}{k})^d)$$

Ce qui implique que la méthode est plus rapide en augmentant le degré.

Il est donc important de noter que la méthode de reconstruction des gradients formulée ici permet de conserver l'ordre et son coût est moindre en utilisant des éléments de degré plus élevé.

3.3.4.2 Reconstruction sur un élément

On procède toujours d'une manière similaire, mais on reste local à l'élément. On effectue une projection- $L2$.

$$\begin{aligned} \int_K \varphi \sum_j \nabla N_j u_j dx &= \int_K \varphi \sum_j N_j (\nabla u)_j dx \\ \int_{\tilde{K}} \varphi \sum_j \nabla N_j u_j j(\xi) d\xi &= \int_{\tilde{K}} \varphi \sum_j N_j (\nabla u)_j j(\xi) d\xi \end{aligned}$$

De façon classique on prend $\varphi = N_i$ et on considère uniquement la composante selon w de ∇ . On considère donc seulement la projection $L2$ de la dérivée selon w .

$$\int_{\tilde{K}} N_i \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial w} u_j j(\xi) d\xi = \sum_j \left(\int_{\tilde{K}} N_i N_j j(\xi) d\xi \right) \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)_j$$

La formulation algébrique s'écrit :

$$F_i = S_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)_j$$

D'où

$$\left(\frac{\partial u}{\partial w} \right) = S^{-1} F$$

Les résultats sont locaux. On peut aussi remarquer la dépendance linéaire du gradient $\frac{\partial u}{\partial w}$ par rapport aux valeurs u_j de K . En effet, S_{ij} ne dépend pas des valeurs de u_j .

De plus S est une matrice symétrique et définie positive (dans le cas où $\int_{\tilde{K}} N_i j(\xi) d\xi > 0$ ce qui est évident dans le cas de fonctions d'interpolation N_i linéaires mais pas dans le cas général d'une transformation isoparamétrique quelconque positive $j(\xi) > 0$, $\xi \in \tilde{K}$ et $N_i \in P_k$. On sait seulement que $\sum_i \int_{\tilde{K}} N_i j(\xi) d\xi = \text{mes}(K)$.) que l'on peut inverser assez facilement en écrivant sa décomposition de Cholesky.

Il est à noter que le cout de cette inversion est en $O(n^3)$ avec n le nombre de noeuds de l'élément ainsi cette méthode de reconstruction est relativement coûteuse en ordre élevé.

3.4 Erreur d'interpolation par changement de variables

On note le changement de variable entre U et V comme : $U = F(V)$

On suppose que l'interpolation est faite sur le champ V , telle que $V = \sum_i N_i V_i$ pour un élément

K dont les fonctions interpolantes sont N_i .

Afin de simplifier les calculs on interpole les solutions telles que la variable U s'écrive $U = \sum_i N_i F(V_i) = \sum_i N_i U_i$ au lieu de $U = F(\sum_i N_i V_i)$. On peut vérifier que les deux interpolations sont équivalentes aux noeuds dans le cas des fonctions de forme lagrangienne puisque $N_i(a_j) = \delta_j^i$, a_j , a_j étant les coordonnées des noeuds sur l'élément de référence. Partout ailleurs les deux interpolations ne sont pas équivalentes si F n'est pas linéaire, ainsi l'interpolation est différente aux points d'intégration.

On tente de donner une approximation de l'erreur commise à cause la simplification de ce changement de variables.

Cas général

On peut tout d'abord noter que si la solution est constante alors les deux interpolations sont égales. $U \in \mathbb{R}^d$, $V \in \mathbb{R}^d$

$$V_i = V_0 \forall i \Rightarrow \sum_i N_i V_i = V_0 \Rightarrow U = F(\sum_i N_i V_i) = F(V_0) = \sum_i N_i F(V_0) = \sum_i N_i F(V_i)$$

Ainsi V_0 sera notre référence. Soit v un vecteur représentant une perturbation sur les degrés de liberté et les deux interpolations $U_1 = F(\sum_i V_0(1 + v_i))$ et $U_2 = \sum_i N_i F(V_0(1 + v_i))$ avec la notation $(a \cdot b)_i = a_i b_i$.

On considère une perturbation sur un seul noeud.

$$U_1 = F(V_0 + N_1 V_0 v_1), U_2 = N_1 F(V_0(1 + v_1)) + (1 - N_1) F(V_0)$$

Pour $v_1 \ll 1$

$$U_1 = F(V_0) + \frac{\partial F}{\partial V} N_1 V_0 v_1 + o(N_1 V_0 v_1), U_2 = F(V_0) + \frac{\partial F}{\partial V} N_1 V_0 v_1 + o(N_1 V_0 v_1)$$

$$U_2 - U_1 = o(v_1)$$

Ce qui implique que pour une petite perturbation l'erreur est négligeable.

Néanmoins on ne peut pas statuer sur une éventuelle perte de l'ordre.

On tente d'estimer plus précisément l'erreur dans des cas particuliers de la fonction F .

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{T}) = \mathbf{V} + \mathbf{T}$$

$$(U_1, U_2) \in \mathbb{R}^2, (V, T) \in \mathbb{R}^2. U_1 = F(V, T), U_2 = \sum_i F(V_i, T_i).$$

$$U_1 = F(V, T) = F\left(\sum_i N_i V_i, \sum_i N_i T_i\right) = \sum_i N_i (T_i + N_i) = \sum_i F(V_i, T_i) = U_2$$

Dans ce cas il n'y pas de différence entre les deux interpolations.

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{T}) = \mathbf{V}\mathbf{T}$$

$$(U_1, U_2) \in \mathbb{R}^2, (V, T) \in \mathbb{R}^2. U_1 = F(V, T), U_2 = \sum_i F(V_i, T_i).$$

On considère, une fois de plus, une solution uniforme (V_0, T_0) perturbée par (v_i, t_i) sur le noeud i .

$$U_1 = V_0 T_0 (1 + \sum_i N_i v_i) (1 + \sum_i N_i t_i), U_2 = V_0 T_0 (1 + \sum_i N_i v_i + \sum_i N_i t_i + \sum_i N_i v_i t_i)$$

L'erreur relative commise peut être écrite :

$$Err = \left| \frac{U_2 - U_1}{U_1} \right| = \left| \frac{\sum_i N_i v_i t_i - \sum_i N_i t_i \sum_i N_i v_i}{(1 + \sum_i N_i v_i)(1 + \sum_i N_i t_i)} \right|$$

On note que l'erreur relative ne dépend pas de la valeur de la solution uniforme.

On supposant une simple perturbation sur le noeud 1 ($t_1 > -1$ et $v_1 > -1$).

$$Err = \left| \frac{U_2 - U_1}{U_1} \right| = \left| \frac{v_1 t_1 N_1 (1 - N_1)}{(1 + N_1 v_1)(1 + N_1 t_1)} \right|$$

– cas 2D linéaire $N_1 = 1 - x - y$

L'erreur maximum est obtenue pour $x + y = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ avec $\alpha = \sqrt{(1 + v_1)(1 + t_1)}$

$$Err \leq \left| \frac{v_1 t_1}{2(\alpha + 1) + v_1 + t_1} \right|$$

– cas 2D

$$N_1(1 - N_1) \leq \frac{1}{4}, C_0 = \max\left(\frac{1}{(1 + N_1 v_1)(1 + N_1 t_1)}\right) \geq 1$$

$$Err \leq \left| \frac{C_0 v_1 t_1}{4} \right|$$

L'erreur peut être évaluée :

$$Err \leq C \max_i (h_i v_i), C \in \mathbb{R}_*^+$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}, \mathbf{T}) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{T}}$$

$$(U_1, U_2) \in \mathbb{R}^2, (V, T) \in \mathbb{R}^2. U_1 = F(V, T), U_2 = \sum_i F(V_i, T_i).$$

On considère, une fois de plus, une solution uniforme (V_0, T_0) perturbée par (v_i, t_i) sur le noeud i .

$$U_1 = \frac{V_0(1 + \sum_i N_i v_i)}{T_0(1 + \sum_i N_i t_i)}, U_2 = \frac{V_0}{T_0} \sum_i N_i \frac{1 + v_i}{1 + t_i}$$

L'erreur relative commise peut être écrite :

$$Err = \left| \frac{U_2 - U_1}{U_1} \right| = \left| \frac{(1 + \sum_i N_i t_i) \sum_i N_i \frac{1 + v_i}{1 + t_i}}{(1 + \sum_i N_i v_i)} - 1 \right|$$

On note que l'erreur relative ne dépend pas de la valeur de la solution uniforme.

On supposant une simple perturbation sur le noeud 1 ($t_1 > -1$ et $v_1 > -1$).

$$Err = \left| \frac{U_2 - U_1}{U_1} \right| = \left| \frac{t_1(t_1 - v_1)}{1 + t_1} \right| \left| \frac{N_1(1 - N_1)}{1 + N_1 t_1} \right|$$

– cas 2D linéaire $N_1 = 1 - x - y$

L'erreur maximum est obtenue pour $x + y = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ avec $\alpha = \sqrt{(1 + v_1)}$

$$Err \leq \left| \frac{t_1(t_1 - v_1)}{(v_1 + 2(\alpha + 1))(1 + t_1)} \right|$$

– cas 2D

$$N_1(1 - N_1) \leq \frac{1}{4}, C_0 = \max\left(\frac{1}{(1 + N_1 v_1)}\right) \geq 1$$

$$Err \leq \left| \frac{C_0 t_1(t_1 - v_1)}{4(1 + t_1)} \right|$$

L'erreur peut être évaluée :

$$Err \leq C \max_i \left(\frac{t_i(t_i - v_i)}{1 + t_i} \right), C \in \mathbb{R}_*^+$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{e}^{\mathbf{V}} \quad (U_1, U_2) \in \mathbb{R}^2, V \in \mathbb{R}. U_1 = F(V), U_2 = \sum_i F(V_i).$$

On considère, une fois de plus, une solution uniforme V_0 perturbée par v_i sur le noeud i .

$$U_1 = e^{V_0} e^{V_0 \sum_i N_i v_i}, U_2 = e^{V_0} \sum_i N_i e^{V_0 v_i}$$

L'erreur relative commise peut être écrite :

$$Err = \left| \frac{U_2 - U_1}{U_1} \right| = \left| \sum_i N_i e^{V_0(h_i - \sum_j N_j h_j)} - 1 \right|$$

On note que l'erreur relative dépend de la valeur de la solution uniforme.

On supposant une simple perturbation sur le noeud 1 ($v_1 > -1$).

$$Err = \left| \frac{U_2 - U_1}{U_1} \right| = \left| e^{-V_0 v_1 N_1} (1 + N_1 (e^{V_0 v_1} - 1)) - 1 \right|$$

- cas 2D linéaire $N_1 = 1 - x - y$

L'erreur maximum est obtenue pour $x + y = \frac{e^\alpha - 1 - \alpha}{\alpha(e^\alpha - 1)}$ avec $\alpha = V_0 v_1$

$$Err \leq \left| \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} e^{\left(\frac{\alpha}{e^\alpha - 1} - 1\right)} - 1 \right|$$

- cas 2D

$$Err \leq |e^{\alpha N_1} (1 + N_1(e^\alpha - 1)) - 1|$$

On peut donner les résultats asymptotiques pour l'erreur relative :

Avec $\alpha = V_0 \max_i(v_i)$ – $\alpha \ll 1$ $Err \leq \left \frac{\alpha^2}{2} (1 - N_1) N_1 \right \leq C \alpha^2 , C \in \mathbb{R}_*^+$ – $\alpha \gg 1$ $Err \leq \left N_1 e^{\alpha(1 - N_1)} \right \leq \left C \frac{e^{\alpha - 1}}{\alpha} \right , C \in \mathbb{R}_*^+$
--

3.4.1 Interpolation de solution pour le post-processing

La plupart des outils utilisés pour le post-processing n'incluent pas la possibilité de traiter des solutions d'ordre élevé, pour pallier à ce manque il est possible d'interpoler sur un maillage plus fin afin d'affiner la solution obtenue et de mieux la représenter. Néanmoins il est à noter que la solution obtenue représente les variables physiques et non les variables entropiques, il existe donc une erreur d'interpolation donnée dans la section précédente.

Afin d'interpoler la solution on part d'une solution de degré k que l'on interpole sur des éléments de degré $3k$ puis on en fait le maillage équivalent de degré 1.

Afin de mieux visualiser l'apport de cette interpolation on présente ici le cas d'un écoulement autour d'une sphère dans le cas d'éléments $P2$ et $P3$. On compare le résultat obtenu par la simple création du maillage $P1$ équivalent et la solution obtenue après une interpolation faite au préalable sur un maillage $P3k$.

Le résultat présenté ici est obtenu suite à la résolution des équations d'*Euler* sur une sphère.

On constate, en regardant les lignes iso-Machs, une nette amélioration liée à l'interpolation sur un maillage plus fin. Cette étape ne coûte rien en terme de calcul et permet donc de mieux représenter la solution obtenue. Il est néanmoins évident que cette procédure ajoute un nombre considérable de points dans le maillage ce qui en fait une méthode bonne uniquement sur des petits maillages. On pourrait facilement imaginer des algorithmes de raffinement local avec un critère seuil d'erreur entre l'interpolation linéaire et l'interpolation de degré élevé.

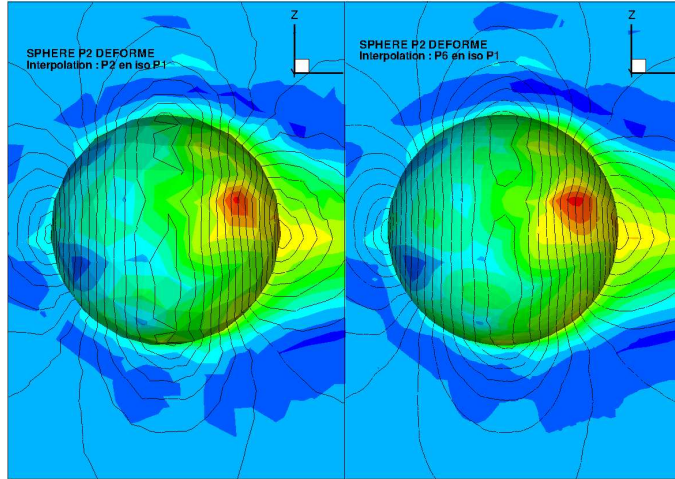


FIGURE 3.9 – Résolution des équations d'*Euler* sur un maillage $P2$. Les lignes noires sont les iso-Machs et les contours représentent l'entropie. Sur la gauche le maillage équivalent $P1$ du maillage $P2$. Sur la droite le maillage $P1$ équivalent au maillage $P6$.

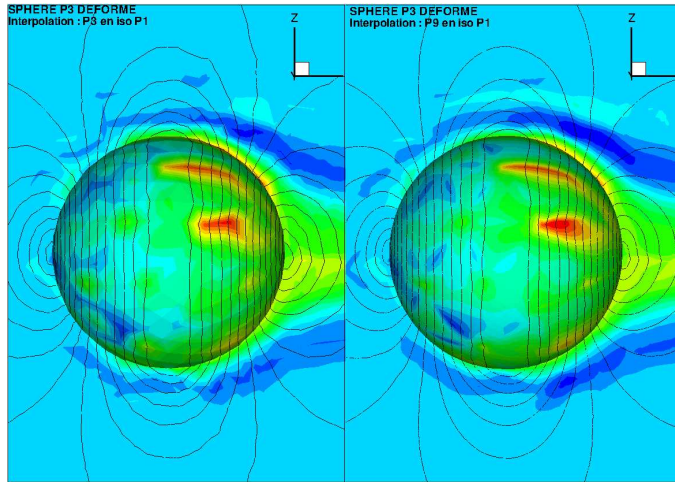


FIGURE 3.10 – Résolution des équations d'*Euler* sur un maillage $P3$. Sur la gauche le maillage équivalent $P1$ du maillage $P3$. Sur la droite le maillage $P1$ équivalent au maillage $P9$.

3.5 Création de maillage d'ordre élevé

Ayant les outils nécessaires à la création de maillages non structurés composés de tétraèdres linéaires, nous désirons créer des maillages d'ordre élevé sur une large gamme de géométrie d'une manière assez directe.

La création de maillages d'ordre élevé nécessite l'addition de nouveaux noeuds dans l'élément linéaire. Or, quand un élément partage une face avec la frontière, le noeud ajouté n'appartient pas nécessairement à la frontière, sauf dans le cas d'une frontière non-courbe. Ainsi une étape de projection est nécessaire afin de faire correspondre le maillage avec la géométrie désirée. Cette étape est critique car le maillage résultant peut contenir des éléments négatifs, ce qui est d'autant plus vrai quand un maillage contient des éléments de faible épaisseur et très étirés. Le but est alors d'obtenir un maillage valide (positif et conforme).

Comme les stratégies de déformation de maillage sont faites pour produire un maillage valide

pour un ensemble de déplacements de frontière, il était naturel de se pencher sur ces techniques [JT94], [JT96]. A partir d'un maillage d'ordre élevé, un maillage équivalent linéaire est fait sur lequel la déformation est appliquée. Néanmoins on subodore que, pour des déplacements suffisamment grands, ces méthodes vont tout de même produire des éléments négatifs, ceci nous obligeant à effectuer des permutations de barres, détruisant la topologie des éléments d'ordre élevé.

Les résultats obtenus sur des cas 2D avec ou sans éléments étirés ainsi que sur des cas 3D de maillages adaptés aux simulations numériques pour les équations d'*Euler* sont amplement satisfaisants. Malheureusement pour les géométries 3D avec des éléments très étirés la méthode ne satisfait pas à nos attentes.

Nous présenterons les outils de création de maillage, le principe de la méthode de déformation puis les résultats obtenus et nous discuterons de l'utilisation des méthodes d'ordre élevé pour résoudre la déformation afin d'obtenir des maillages valides.

3.5.1 Les outils de création de maillage

Le modèle géométrique est réalisé avec Catia®. Le modèle est ensuite maillé. On distingue deux types de maillage selon la simulation que l'on désire faire :

- Maillage de type *Euler* : Etant donné que pour cette simulation il n'y pas de couche limite, l'intégralité du maillage est fait grâce à une méthode de type *Delaunay-Voronoi* [Del34] [Vor07]

- Maillage de type *Navier-Stokes* : Afin de capturer la physique de la couche limite on maille la couche limite par une montée frontale. Pour cela on estime la physique de la couche limite par une *loi de paroi* avec les paramètres adimensionnés suivants : $y^+ = \frac{u_* y}{\nu}$ avec $u_* = \sqrt{\frac{\tau_\omega}{\rho}}$ la vitesse de friction et $\tau_\omega = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$ la contrainte de cisaillement pariétale (u, ρ, μ, ν étant respectivement la vitesse, la densité, la viscosité et la viscosité dynamique). La première maille est à une hauteur telle que $y^+ = 1$ sachant qu'on estime par une loi dépendante du nombre de *Reynolds* $\frac{u_*}{\nu} = f(Re)$ d'où

$$\text{la hauteur de première maille } y_1 = \frac{1}{f(Re)}$$

L'étape suivante, pour la création de maillage d'ordre élevé, consiste à créer les éléments d'ordre élevé en utilisant la librairie, puis projeter les noeuds de frontières et déformer. A cette étape la géométrie du modèle colle au maillage de surface.

Afin de le visualiser on crée un maillage linéaire équivalent. Bien sûr, la représentation est moins précise. Pour représenter plus précisément la géométrie obtenue avec le maillage d'ordre élevé on peut raffiner avec des éléments d'ordre plus élevé et faire un maillage équivalent (Tout comme ont été réalisées les vues des éléments dans les figures ci-avant).

Quand un maillage doit être projeté il faut repasser sur le modelleur afin d'effectuer la projection. Cette étape est assez longue et fastidieuse. Aussi on pourrait discuter de l'intérêt des éléments isogéométriques ou du stockage la définition propre de la transformation géométrique.



En 2D, on présente un petit exemple pour montrer la supériorité des éléments d'ordre élevé pour

approximer un maillage circulaire.

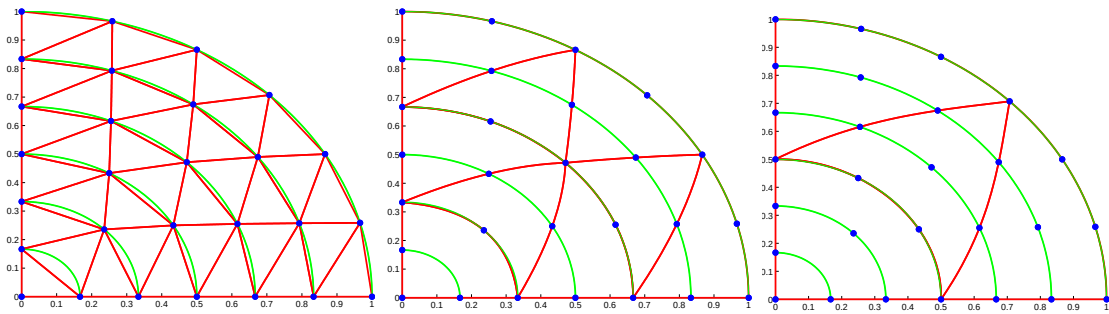


FIGURE 3.11 – Maillage P_1 , P_2 and P_3 en cercle

Exemple de maillage 2D de type *Euler* pour un profil de type NACA.

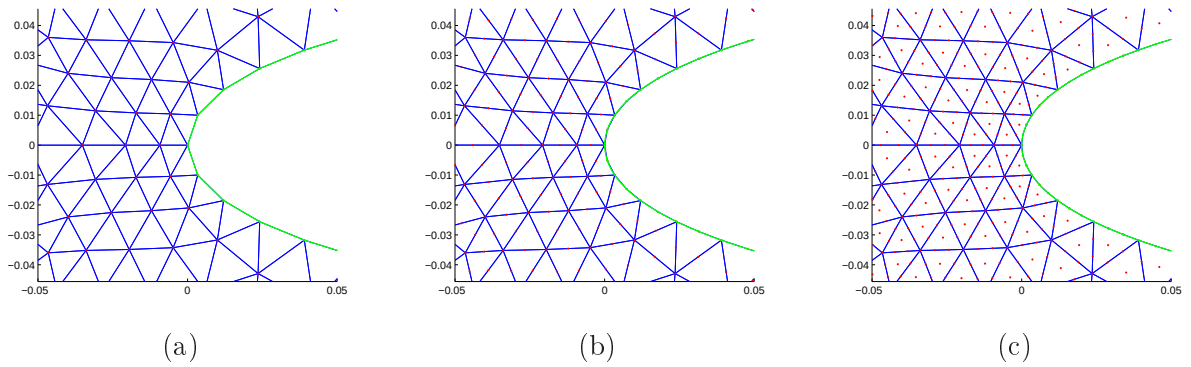


FIGURE 3.12 – Maillage sur un profil NACA (a) P_1 (b) P_2 (c) P_3

En 3D on présente le processus pour la sphère et la frontière résultante :

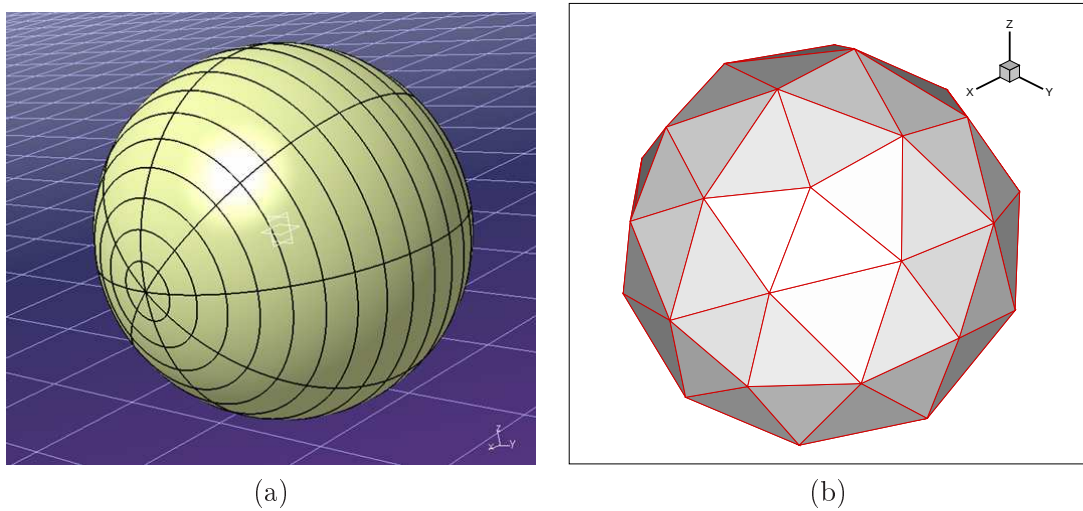


FIGURE 3.13 – (a) Géométrie de la sphère avec Catia®. (b) Maillage grossier

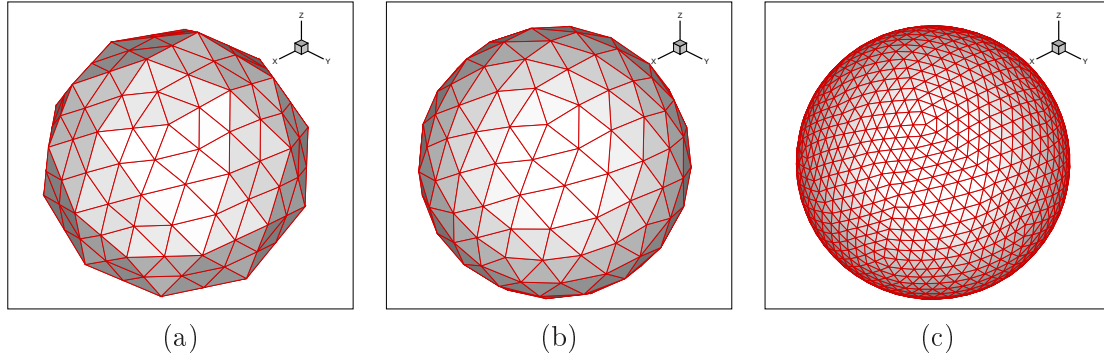


FIGURE 3.14 – (a) Raffinement P2. (b) Raffinement P2 avec les noeuds frontières projetés (c) Raffinement P2 avec les noeuds frontières projetés et interpolation sur des éléments P6

Exemple de maillage de domaine 3D de type *Navier-Stokes* pour un avion complet. La hauteur de première maille est de 5 microns. Obtenir un maillage déformé dans le cas de

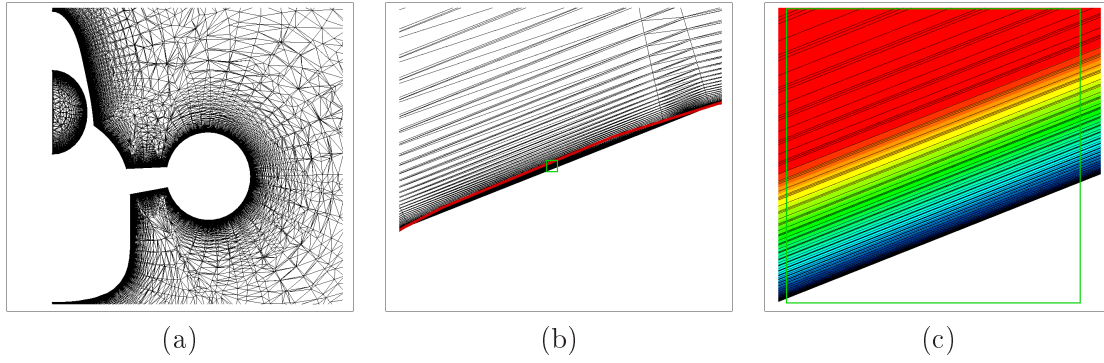


FIGURE 3.15 – Coupe d'un maillage 3D d'un avion complet

maillages de type *Navier-Stokes* est complexe, notamment à cause du ratio aire de l'élément de surface par rapport à la hauteur. Ainsi sur (b) de (Fig. 3.15) si la ligne rouge représente la géométrie et que l'on ajoute un point sur la surface, point qui devra être projeté sur cette ligne, on voit grâce à (c) la quantité d'éléments qui devront être déformés afin d'obtenir le maillage souhaité. De plus cette déformation est très atypique dans le sens où un noeud sur deux a un déplacement nul.

3.5.2 Stratégie de déformation

3.5.2.1 Equations de l'élasticité linéaires

L'approche élasticité linéaire pour des petits déplacements est définie ainsi :

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ les coordonnées et $\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}))) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{on } \Omega(\mathbb{R}^d) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{on } \partial\Omega(\mathbb{R}^d) \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé que l'on peut interpréter comme des fonctions du module d'Young (E) et du coefficient de Poisson (ν) grâce aux formules :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases} \quad (3.3)$$

Dans notre cas il n'y a pas de raison d'avoir une force locale qui s'applique, d'où $\mathbf{f} = 0$. De plus, en prenant en compte le fait que la compression d'un rectangle devrait rester un rectangle on choisit $\nu = 0$.

Le problème se réécrit donc :

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \\ \operatorname{div} (E (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) = 0 \quad \text{on } \Omega(\mathbb{R}^d) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{on } \partial\Omega(\mathbb{R}^d) \end{cases} \quad (3.4)$$

3.5.2.2 Formulation faible

En notant l'espace des fonctions tests $V^h = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d | \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0\}$ on obtient la formulation faible suivante, avec l'opérateur : défini tel que $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{v} \in V^h \\ \int_{\Omega} E \nabla \mathbf{v} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{on } \Omega(\mathbb{R}^d) \\ u = u^0 \quad \text{on } \partial\Omega(\mathbb{R}^d) \end{cases} \quad (3.5)$$

En utilisant la méthode *Galerkin* continue avec une discrétisation conforme sur le domaine Ω avec des éléments isoparamétriques K de l'espace T^h . Chaque K a un élément de référence $\tilde{K}_K$ tel qu'il existe une application bijective $\tau(\tilde{K}_K) = K$. Donc le jacobien de τ est positif sur l'élément de référence pour un élément positif $\tilde{J}_K(\tau(\xi)) = J_K(\xi) = \det(\frac{\partial \tau}{\partial \xi}) > 0$, $\xi \in \tilde{K}_K$.

On peut aussi remarquer que $\sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \epsilon_{ij} = \sum_{i,j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \epsilon_{ji} = \sum_{i,j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \epsilon_{ij}$ comme ϵ est un opérateur symétrique.

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{v} \in V^h \\ \sum_{K \in T^h} \int_{\tilde{K}_K} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) E(\tau(\xi)) J_K(\xi) d\xi = 0 \quad \text{on } \Omega(\mathbb{R}^d) \\ u = u^0 \quad \text{on } \partial\Omega(\mathbb{R}^d) \end{cases} \quad (3.6)$$

Le choix de module d'Young sera discuté plus tard mais on distingue deux possibilités :

- $E|_K = E_0$
- $E|_K = J_K(\xi)^{-\alpha}$ with $\alpha \in \mathbb{N}^*$

L'interpolation est faite avec des éléments de *Lagrange*.

3.5.3 Cas tests

3.5.3.1 Géométries

Notre premier cas test est une géométrie d'avion. En suivant le processus décrit, on souhaite créer un maillage d'ordre élevé en partant d'un maillage linéaire grossier. Après la

création du maillage d'ordre élevé à partir des éléments linéaires, les noeuds ajoutés sont projetés sur la géométrie d'où il en résulte un champ de déplacement dont la norme est montrée ci-après. On peut noter que le déplacement est bien tacheté, comme prévu, puisque uniquement la

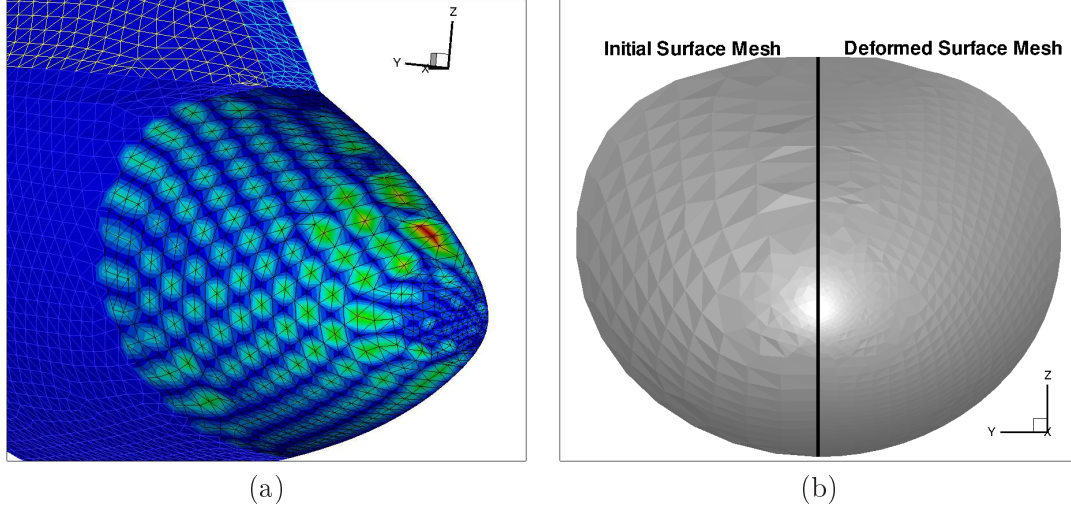


FIGURE 3.16 – (a) Déplacement à la frontière (échelle [0mm,13.9mm]) (b) Comparaison entre la frontière initiale et le maillage déformé

moitié des noeuds n'était pas sur la frontière. Avec ce champ de déplacement on peut résoudre le problème d'élasticité linéaire dans les configurations suivantes.

- Maillage linéaire équivalent avec $E|_K = E_0$
- Maillage linéaire équivalent avec $E|_K = J_K(\xi)^{-1}$
- Maillage linéaire équivalent avec $E|_K = J_K(\xi)^{-2}$
- Maillage d'ordre élevé avec $E|_K = E_0$
- Maillage d'ordre élevé avec $E|_K = J_K(\xi)^{-1}$
- Maillage d'ordre élevé avec $E|_K = J_K(\xi)^{-2}$

Le deuxième cas test est un demi-avion. Ce demi-avion comprend 146 460 noeuds sur la frontière de la géométrie avion et 23 999 404 noeuds dans le domaine complet. De même que précédemment, on montre la norme du champ de déplacement sur le maillage de surface (Fig. 3.17). Afin d'apprécier les déplacements, la représentation est faite à plusieurs échelles. Il est à noter que le déplacement maximum est de 10,6mm. Là encore, le déplacement est bien tacheté et on remarque que les plus grands déplacements se situent sur le nez de l'avion ainsi que sur le fuselage. Les géométries dont les courbures locales (voilure, mats de nacelle, dérive) sont faibles ne font pas apparaître de grands déplacements au regard des géométries à forte courbure (nez, fuselage, nacelles). Ceci est une conséquence directe du fait que, pour l'interpolation linéaire, l'erreur d'interpolation est majorée par la dérivée seconde de la courbe paramétrée. De manière plus générale, elle est liée à la courbure de la surface.

Définition 22 (Courbure) Soit $r(t)$ une courbe paramétrée et $s(t)$ l'abscisse curviligne, la courbure est la norme du vecteur $\frac{dr}{ds}$.

De façon plus générale on note $k(P)$ la courbure au point P que l'on peut définir de manière générale comme la trace du tenseur de Ricci

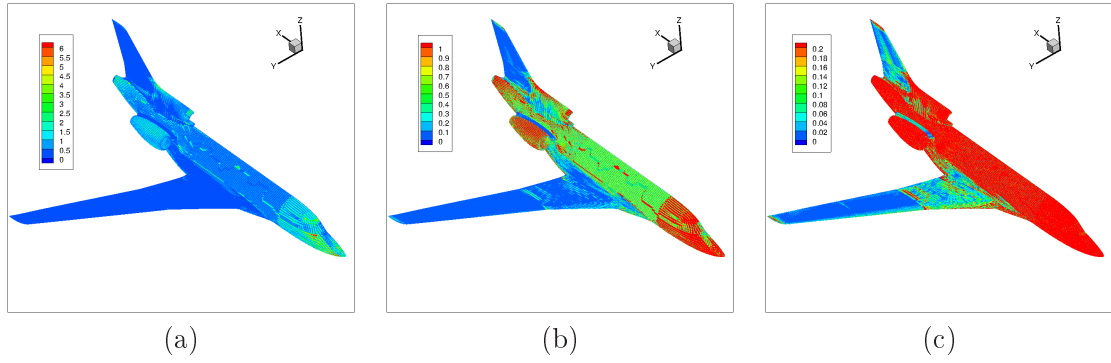


FIGURE 3.17 – (a) Déplacement à la frontière (échelle [0mm,6mm]) (b) Déplacement à la frontière (échelle [0mm,1mm]) (c) Déplacement à la frontière (échelle [0mm,0.2mm])

3.5.3.2 Résultats

On insiste sur le fait que les éléments d'ordre élevé négatifs peuvent avoir un volume positif. Afin de tester la positivité des éléments on teste le jacobien sur une grille suffisamment fine (de manière heuristique une grille donnée par un élément de degré k^2 est suffisant pour tester les éléments de degré k). Néanmoins, pour des raisons de coût de calcul, le nombre d'éléments négatifs est déterminé en vérifiant la valeur du jacobien uniquement aux points d'intégration utilisés pour évaluer les intégrales du schéma numérique.

Le premier résultat est le calcul de la déformation du nez de l'avion dans les différentes configurations données précédemment. On trace le résultat de l'évolution du nombre des éléments

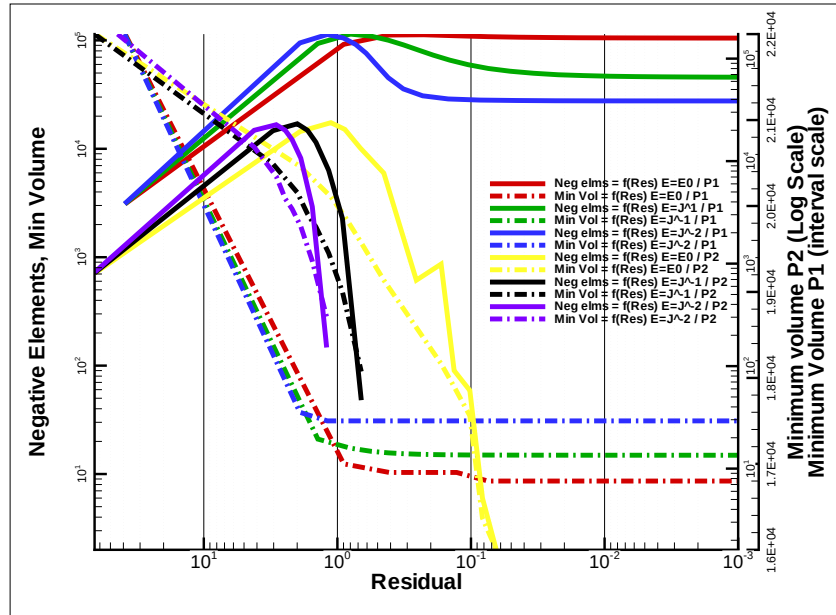


FIGURE 3.18 – Evolution du nombre d'éléments négatifs et volume négatif minimum durant la résolution du problème matriciel. Le volume minimum est tracé en échelle linéaire pour les éléments linéaires et en échelle logarithmique pour les éléments quadratiques.

négatifs ainsi que le volume négatif minimum de l'ensemble des éléments dans le maillage (Fig. 3.18). Pour ce qui est de la déformation sur le maillage linéaire, on peut remarquer que quand

α augmente le nombre d'éléments négatifs diminue, en revanche le volume minimum augmente. On comprend bien qu'il va être difficile d'obtenir un maillage conforme et positif sans recourir à des méthodes d'optimisation sur le paramètre E comme dans [YM07].

Néanmoins on peut remarquer qu'en utilisant directement le maillage d'ordre élevé et non son sous-découpage en éléments linéaires, on réussit à obtenir une solution qui ne comporte pas d'éléments négatifs. On peut aussi constater que l'utilisation de α toujours plus grand permet tout de même d'obtenir un maillage ne comportant que des éléments positifs avec un nombre d'itérations moins important.

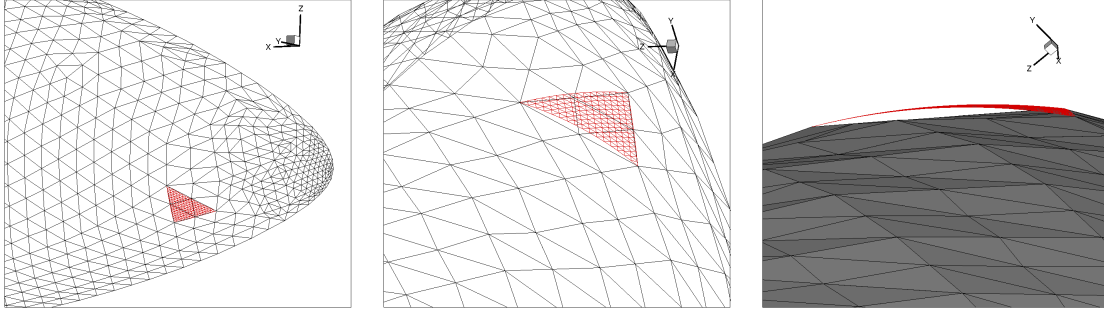


FIGURE 3.19 – Premier élément à la surface du nez de l'avion

Sur le deuxième cas test, on effectue la déformation dans le cas où $\alpha = 1$ et en ordre élevé. En terme de performance il faut moins de 6 heures sur une machine équipée d'un processeur Xeon Nehalem 4-Core à 3,20 GHz pour obtenir le résultat, en rappelant que le nombre de noeuds est de 23 999 404. Côté mémoire vive il faut 549 Mo pour stocker un champ de solution et 49 956 Mo pour stocker la matrice du problème. Une fois de plus on présente (Fig. 3.20) l'évolution du nombre d'éléments négatifs ainsi que le volume négatif maximum en échelle logarithmique.

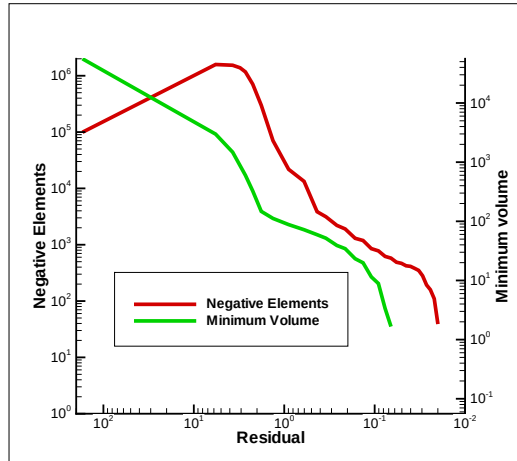


FIGURE 3.20 – Evolution du nombre d'éléments négatifs et volume négatif minimum durant la résolution du problème matriciel dans le cas de l'avion complet.

Enfin, il s'agit de connaître les limites de cette approche. La déformation ne fonctionne évidemment pas dans toutes les configurations. En effet, comme le montre l'exemple suivant, une déformation a été calculée sur une géométrie qui ne collait pas exactement avec le maillage d'origine au niveau de l'intersection entre la dérive et le plan horizontal. Sur (Fig. 3.21) on peut voir la norme du champ de déplacement obtenu et la localisation des éléments négatifs à la suite

du calcul de déformation.

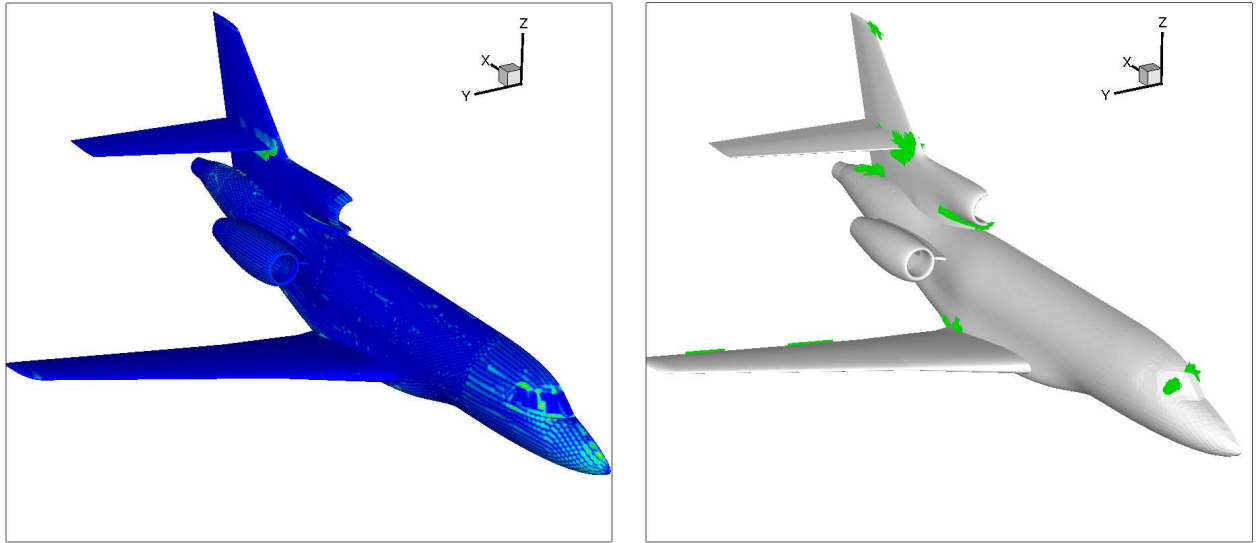


FIGURE 3.21 – Autre configuration d'avion où la géométrie ne correspond pas exactement avec le maillage d'origine, à gauche la norme du déplacement imposé et à droite la localisation des éléments négatifs à la suite du calcul.

Il est donc essentiel, pour que cette approche fonctionne, d'avoir un maillage d'origine qui est parfaitement sur la géométrie réelle. De plus, il faut s'assurer que le maillage d'origine est suffisamment bien maillé afin d'éviter de trop grands déplacements pour les noeuds ajoutés. En effet, on peut remarquer sur le cas "pathologique" que des éléments négatifs se créent aux endroits où il existe des forts contrastes de déplacements d'éléments à éléments.

3.5.4 Discussion sur la réussite de la méthode

On peut penser naïvement que la solution de déformation calculée en ordre élevé devraient donner des résultats similaires à la déformation calculée sur le maillage linéaire. Cette remarque est légitimée par le fait que, dans les maillages présentés, on a une bonne discrétisation de la paroi et "uniquement" une problématique d'éléments très allongés. Alors pourquoi cet échec pour le maillage linéaire ?

Remettons nous d'abord en mémoire (Prop. 2). Pourquoi cette propriété s'applique-t-elle bien dans ce cas ? Rappelons nous simplement que les trois noeuds de sommet (dans le cas d'un tétraèdre) appartenant à la face frontière ont un déplacement nul, puisque que l'on suppose que seuls les noeuds rajoutés n'appartiennent pas à la paroi. Etant donné que l'on suppose aussi que la géométrie est "bien" discrétisée on peut supposer que les noeuds rajoutés ont un déplacement qui est presque orthogonal à la face frontière donc on tombe parfaitement sous le coup de (Prop. 2) et on peut espérer obtenir un maillage avec des éléments positifs. C'est ce que l'on observe. Pourquoi la déformation du maillage linéaire produit des éléments négatifs ? Pour obtenir le maillage équivalent on a découpé l'élément d'ordre élevé en sous éléments linéaires. Or un élément $P2$ en $3D$ peut être découpé en 8 éléments $P1$ de 15 façons différentes !

Petite propriété évidente avant de continuer :

Propriété 3 (Positivité du découpage d'un élément) Soit une transformation ϕ telle que $\phi(\tilde{K}) = K$, de jacobien j positif sur $\tilde{K}$. On considère un découpage tel que $\bigcup_i \tilde{K}_i = \tilde{K}$ et

$\phi(\widetilde{K}_i) = K_i$. Alors K_i est un élément positif.

Supposons $j = j_0 > 0$ une constante. Si $\alpha_i \text{mes}(\widetilde{K}) = \text{mes}(\widetilde{K}_i)$ alors $\alpha_i \text{mes}(K) = \text{mes}(K_i)$

Preuve : Simple jeu d'intégral $\int_{K_i} d\mathbf{x} = \int_{\widetilde{K}_i} j d\xi = j_0 \int_{\widetilde{K}_i} d\xi = \alpha_i j_0 \int_{\widetilde{K}} d\xi = \alpha_i \int_K d\mathbf{x}$. Cette série d'égalité est suffisante pour prouver les deux propriétés. $\square$

Malgré cela, rien ne peut garantir que le découpage d'un élément d'ordre élevé en éléments linéaires produisent des éléments linéaires positifs, comme en atteste l'exemple (Fig. 3.22).

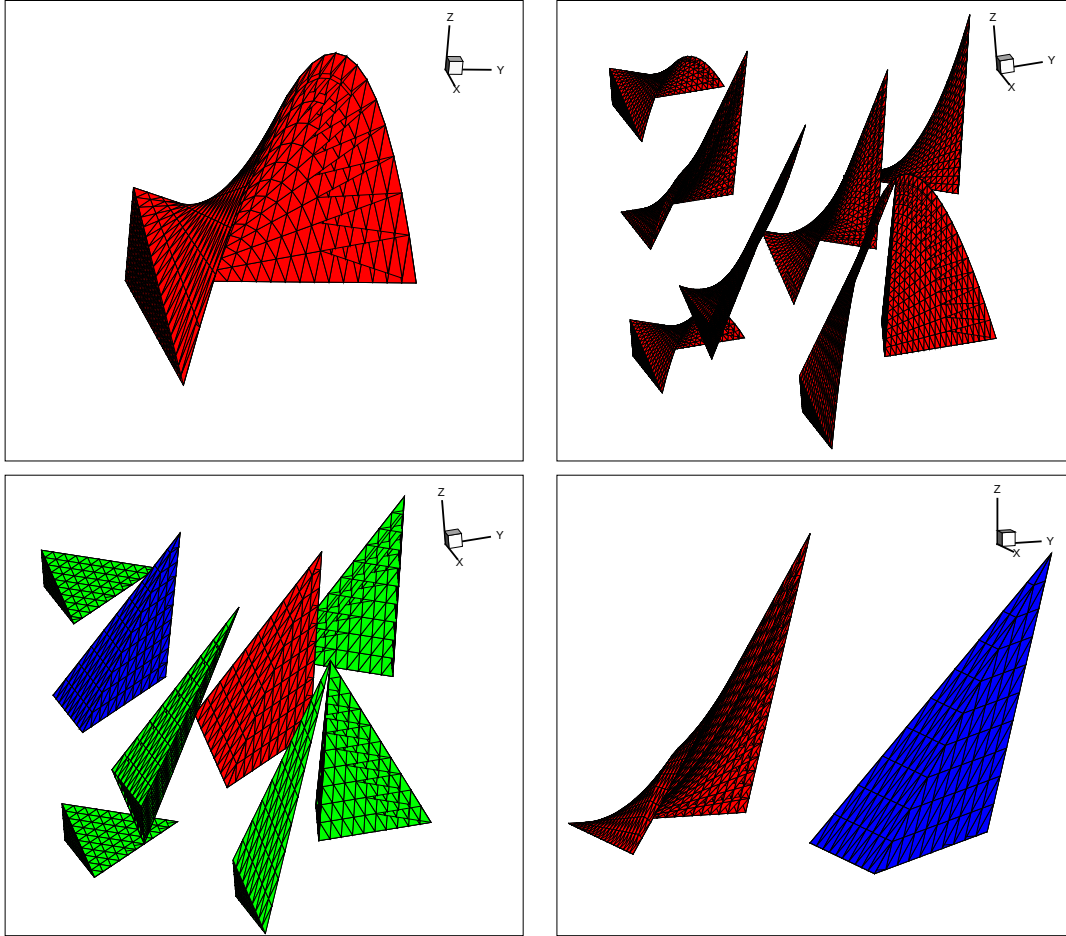


FIGURE 3.22 – Vue éclatée d'un découpage d'un élément P2 de jacobien constant en sous-élément courbes, puis en leur équivalent linéaire. La couleur rouge représente les éléments positifs, la couleur bleue les éléments négatifs.

De ce fait chaque découpage d'un élément d'ordre élevé implique une recherche de la configuration de découpage telle que les éléments linéaires produits soient positifs.

De plus une autre limitation intervient. Si l'on considère les 15 découpages possibles de l'élément P2 en sous-éléments, ils impliquent que les faces de l'élément seront découpées aussi de façon différente. Cette information devra donc être propagée aux éléments adjacents pour réussir à découper de façon conforme. Ce processus implique un algorithme de recherche itératif et dont le résultat est incertain. Pour éviter cette situation, il est nécessaire de n'avoir recours qu'à un découpage de la bipyramide centrale pour obtenir des éléments P1 positifs. Cette bipyramide n'admet que 3 sous-découpages (Fig. 3.23), ce qui limite donc les possibilités.

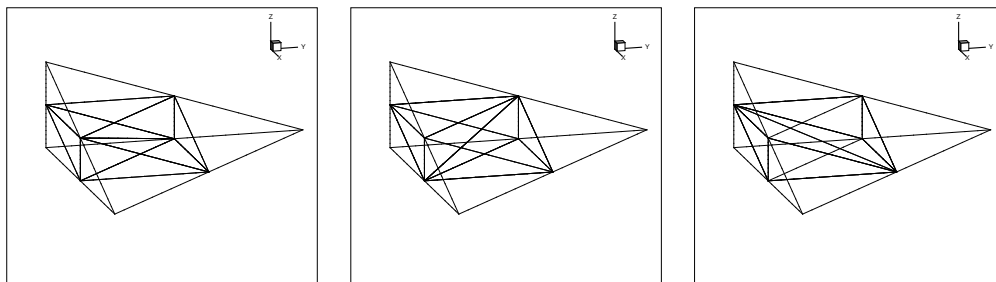


FIGURE 3.23 – Trois sous-découpages d'un P2 3D ne modifiant pas le découpage des faces.

Reprenons le raisonnement initial, consistant à supposer que la déformation calculée sur le maillage d'ordre élevé et le maillage linéaire donne approximativement le même champ de déformation. Si l'on découpe de manière arbitraire le maillage d'ordre élevé pour obtenir le maillage linéaire et que l'on sait que l'on obtient des éléments P2 positifs en déformant le maillage d'ordre élevé, alors il y a effectivement une forte probabilité que résulte des éléments linéaires négatifs de la déformation calculée sur le maillage linéaire.

L'échec de la déformation sur le maillage linéaire pour des maillages de type *Navier-Stokes* est donc lié à la topologie des éléments proche de la surface. Effectuer la déformation sur le maillage d'ordre élevé permet donc de s'affranchir du sous-découpage et d'obtenir un maillage d'éléments positifs.

3.6 Conclusion

Ce chapitre a introduit les espaces polynômiaux principaux permettant de décrire les bases d'interpolation sur les éléments finis de référence. Ces éléments finis ont ensuite été décrits et des propriétés singulières de positivité ont été énoncées. Ceci dans l'objectif de montrer que l'utilisation d'éléments dont la base polynômiale d'interpolation est de degré supérieur à 1 requiert un certain nombre de garde-fous. La méthode consistant à se replacer dans le cadre d'élément ayant pour base les polynômes de *Bernstein* semble prometteuse mais nécessite un développement plus approfondi pour les éléments de dimension 2 et 3.

L'analyse des erreurs et la vérification du théorème 2 d'estimation d'erreur *a priori*, nous a permis de pointer une limite quant à la "déformation acceptable" pour un élément courbe défini par un élément de référence et une transformation iso-paramétrique. En effet, un élément de degré k dont les noeuds milieux sont déplacés au delà d'une boule de rayon proportionnelle à h^k ne vérifie plus (Thm. 2). On amorce un début de preuve à ce phénomène en reprenant le développement limité qui a mené à l'estimation d'erreur *a priori* donnée par (Thm. 2). Cette étude permet de nuancer l'énoncé de l'estimation d'erreur dans le cadre des éléments finis définis par des éléments de référence.

La première partie a fait apparaître le besoin de calculer des dérivées secondes. On montre qu'il existe des méthodes de reconstruction de gradients qui permettent, non seulement, d'obtenir des approximations des gradients aux noeuds mais en plus que ces approximations suivent toujours l'estimation d'erreur *a priori*. Cette étude nous a permis de justifier les poids utilisés dans cette méthode. Enfin une étude concernant le cout algorithmique révèle que la méthode est sensiblement moins couteuse en utilisant des éléments de degré plus élevé.

Les éléments finis de référence et l'analyse de l'erreur ayant été introduits, il nous restait à discuter des problématiques de création de maillages d'ordre élevé sur des géométries variées et complexes. Nous avons fait le choix de conserver tous les avantages des outils déjà implémentés pour créer des maillages d'éléments linéaires et donc de partir d'un maillage d'éléments linéaires puis de créer le maillage d'ordre élevé en ajoutant des degrés de liberté. Les faces des éléments communes avec la frontière du maillage contiennent des noeuds qui sont reprojétés sur la géométrie puis le maillage est déformé grâce à la résolution d'un problème d'élasticité linéaire simplifié où localement le module d'*Young* est inversement proportionnel au volume de l'élément.

On montre que dans les cas de maillages 3D de type *Navier-Stokes* (contenant des éléments très allongés) la déformation produit des éléments négatifs si l'on effectue la déformation sur le maillage linéaire équivalent au maillage d'ordre élevé. Au contraire si la déformation est effectuée sur le maillage d'ordre élevé (avec un schéma d'ordre élevé implicitement), elle donne des résultats satisfaisants. On a avancé une explication à ce résultat, qui tient particulièrement au sous-découpage des éléments courbes en éléments linéaires. On a montré aussi des cas pathologiques en tentant d'identifier les problèmes annexes (notamment de sous-discrétisation initiale de la géométrie ou de la non-concordance du maillage initial avec la géométrie).

Chapitre 4

Résultats et analyses

Après avoir posé le cadre théorique, on présente des résultats sur une variété de problèmes.

Une première discussion sera menée sur la motivation autour des méthodes d'ordre élevé. Il est légitime de s'interroger sur l'évolution du calcul numérique. Alors que les unités de calcul mis à la disposition des numériciens continuent de doubler leur puissance et/ou leur nombre tous les deux ans, peut-on en dire autant du calcul numérique ? En quarante ans de calculs a-t-on vraiment multiplié le nombre d'inconnus par 2^{20} ? Et qu'en est-il de l'amélioration de l'erreur vis-à-vis des expériences ? Ces questions ont des ramifications complexes et nous n'y répondrons pas ici. Nous tenterons simplement de rationaliser la motivation derrière les méthodes d'ordre élevé en estimant les coûts algorithmiques d'un calcul numérique et en rappelant les résultats d'erreur *a priori*. Nous dégagerons ainsi une tendance entre la volonté d'obtenir un meilleur calcul et le coût que cette démarche implique.

Dans un deuxième temps nous étudierons des cas tests académiques afin de créditer les estimations d'erreur. Ces cas tests nous permettront aussi de discuter les problématiques liées à la déformation des éléments et aux éventuelles pertes d'ordre. Nous montrerons des cas tests de simulations numériques pour *Euler*. Ces cas sont intéressants car dans le cas des équations d'*Euler* la condition d'isentropie nous permet d'avoir accès directement à une mesure qualitative de l'erreur. Nous montrerons des cas de géométries déformées et non déformées, ainsi que des cas de sous-intégrations numériques et quelques résultats liés à l'utilisation de valeur de τ et l'effet sur la production d'entropie. Enfin nous montrerons des résultats *Navier-Stokes* ainsi que des résultats sur une configuration complète d'avion avec un modèle de turbulence.

4.1 Calcul numérique : Calcul de haute performance

Avant de présenter les résultats numériques, nous précisons le cadre dans lequel ces calculs ont été effectués et les outils qui ont été implémentés pour permettre leur réalisation.

L'ensemble des calculs *Euler* et *Navier-Stokes* ont été menés avec le code de *Dassault-Aviation*, dans lequel les méthodes présentées ci-avant ont été implémentées. Ce code permet la résolution des équations pré-citées ainsi qu'une collection de modèles de turbulence. Des modèles RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*) plus avancés tels que EARSIM (*Explicit Algebraic Reynolds Stress Model*) et RSM (*Reynolds Stress Model*) sont aussi disponibles. Il est aussi possible de faire de la LES (Large Eddy Simulation) ou de la DES (Detached Eddy Simulation).

Ce code a été porté sur un certain nombre d'architecture. Il est parallélisé pour des ma-

chines (IBM SP2 Series, IBM Blue Genen Itanium II et Bull Novascale processeur Xeon) à mémoires partagés ou distribués en utilisant la librairie MPI (*Message Passing Interface*).

La parallélisation dans le cadre des méthodes numériques présentées est triviale car la formulation compacte permet de considérer le calcul dans un certain groupement ou bloc d'éléments et le partage de l'information ne se fait qu'à l'interface entre les éléments qui partagent une face avec une frontière de blocs. Les méthodes de type éléments finis ou RDS permettent donc une parallélisation très aisée.

Le découpage du maillage a du être un peu retravaillé pour l'ordre élevé. Le principe du découpage, pour les éléments linéaires, se faisait, à la base, sur un découpage du graphe reliant les noeuds, graphe que nous appellerons *no2no*. On ajoute en remarque que ce graphe *no2no* est aussi important quand il s'agit de stocker la matrice implicite du problème éléments finis ou RDS, puisque ce graphe correspond à la notation en stockage morse de la matrice du problème. Ce graphe étant découpé, les noeuds étaient repartis dans chaque bloc. On repassait aux éléments appartenant à un bloc en regardant le nombre de noeuds de chaque bloc par élément et on statuait sur le bloc auquel l'élément appartenait.

Le choix a été fait, dès que la question s'est posée, de passer directement au découpage du maillage en découpant le graphe reliant les éléments, graphe que nous appellerons *nl2nl*.

On propose les maillages montrés ci-après, comprenant des éléments de même degré. L'objectif de ce cas test est simplement de montrer l'allure des graphes *nl2nl* et *no2no*, pour des maillages de degré différent.

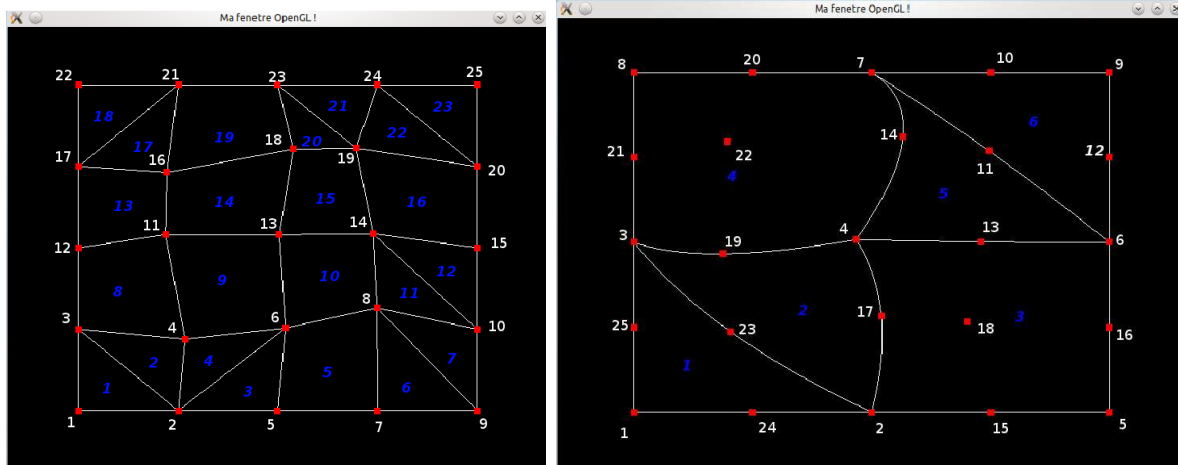


FIGURE 4.1 – Maillages mixte de degré 1 et degré 2. Numéros blancs : numérotation des noeuds. Numéros bleus : numérotation des éléments.

Pour faire ces maillages on a simplement déplacé les noeuds, qui n'appartiennent pas à la frontière, de façon aléatoire. Chose parfaitement inutile topologiquement tant que la transformation géométrique n'a pas un jacobien négatif, simplement les éléments de degré 2 sont plus à leur avantage dans cette configuration. La visualisation est réalisée en utilisant la librairie graphique *OpenGL*.

Les graphes *nl2nl* et *no2no* sont représentés pour les deux maillages dans les tableaux suivant.

4.2 Estimation de l'efficacité numérique

Nous dressons ici un schéma des routines essentielles du code de calcul utilisé et dans lequel les méthodes ont été implémentées, voir (Fig. 4.3).

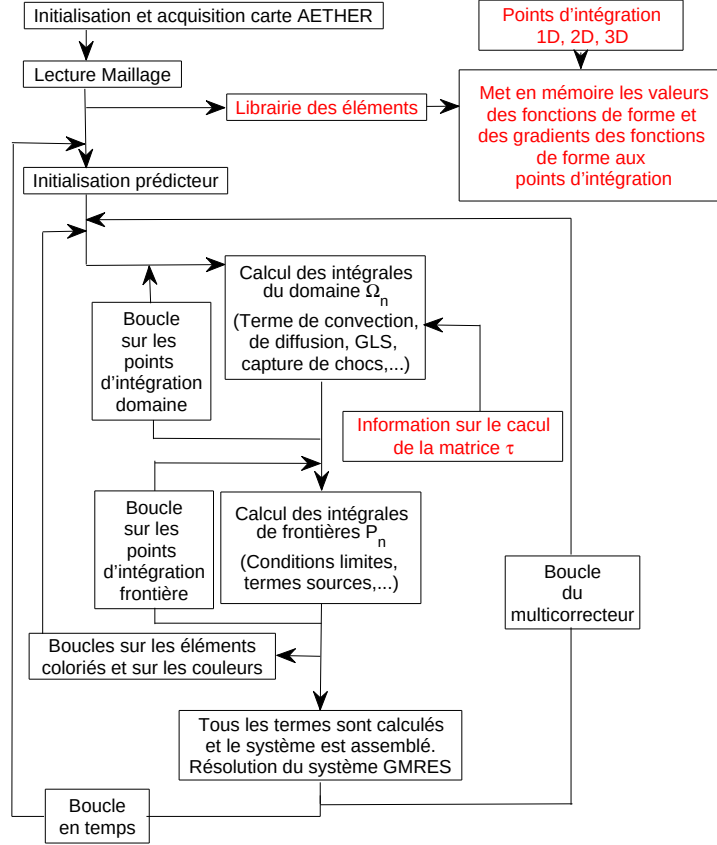


FIGURE 4.3 – Arbre d'exécution d'AETHER

Grâce à ce schéma on peut donner une première estimation du coût algorithmique, avec N_{BM} le nombre d'itérations non-linéaires, N_e le nombre d'éléments, N_{PI} le nombre de points d'intégration moyen, C_{GMRES} le coût algorithmique lié au solveur linéaire itératif *GMRES*, avec N_{ne} le nombre moyen de noeuds par élément et C_1 une constante représentative du calcul des fonctions d'états, de conversions, d'application de conditions aux bornes, ...

$$C_{calcul} \simeq N_{BM} (C_1 N_{PI} N_{ne} N_e + C_{GMRES})$$

On rappelle l'estimation trouvée au premier chapitre liant le nombre d'éléments et taille caractéristique moyenne des éléments $N_e = C_{mes}(\Omega) h^{-d}$. On suppose (et c'est souvent le cas) que la méthode employée permet d'obtenir un système linéaire que *GMRES* peut résoudre en un nombre fixe d'espace de *Krylov* N_{kr} et de redémarrage N_{re} , avec N_{np} le nombre moyen de noeuds voisins d'un noeud (estimation de la taille de la diagonale non nulle de la matrice à résoudre) d'où on obtient le résultat très simplifié de :

$$C_{GMRES} \simeq N_{re} N_{kr}^2 N_{np} N_e$$

En ce qui concerne le nombre d'itérations pour obtenir un système convergé N_{BM} on peut difficilement statuer. Nous estimerons simplement que $N_{BM} = f(N_e)$ où dans le pire des cas f

est une fonction linéaire et dans le meilleur cas une constante. On obtient alors le coût suivant :

$$C_{calcul} \simeq (C_1 N_{PI} N_{ne} + N_{re} N_{kr}^2 N_{np}) N_e f(N_e)$$

en fonction de la taille caractéristique cette estimation devient :

$$C_{calcul} \simeq \underbrace{\tilde{C} (C_1 N_{PI} N_{ne} + N_{re} N_{kr}^2 N_{np})}_{(a)} \underbrace{h^{-d} f(h^{-d})}_{(b)}$$

En analysant cette formule on distingue deux parties imputables l'une à l'utilisation d'un degré d'interpolation plus élevé (a) et l'autre à l'étape de raffinement du maillage (b).

Considérons que f est une fonction puissance telle que $f(x) = x^{\alpha-1}$ avec $1 < \alpha < 2$. On note A^k la partie (a) pour des éléments de degré k et on notera simplement que $h_k = kh$. Le rapport entre les coûts de calcul pour un maillage linéaire et un maillage d'ordre élevé peut donc être évalué de la manière suivante :

$$\frac{C_{calcul}^{E_1}}{C_{calcul}^{E_k}} = \frac{A^1}{A^k} k^{\alpha d}$$

Autrement dit l'utilisation de l'ordre élevé n'a pas de surplus de coût algorithmique si $A^1 = A^k k^{\alpha d}$. Or le seul fait de requérir une règle d'intégration suffisante rend cette condition caduque. L'intérêt réside donc ailleurs. On compense le coût de calcul supplémentaire par l'obtention d'une solution qui, d'après les estimations théoriques doit être meilleure. En effet on a l'estimation suivante avec $\widetilde{Err}$ une constante positive :

$$Err^k = \widetilde{Err} h^{k+1}$$

On note "efficacité" numérique la mesure qui fait intervenir le coût de la méthode et l'erreur intrinsèque résultante pour une méthode avec des éléments de degré k . On introduit ce concept en partant de l'intuition que l'efficacité augmente lorsque que le coût diminue ou que l'erreur diminue.

$$\mathcal{E}^k = \frac{1}{C_{calcul}^{E_k} Err^k}$$

En terme de taille de barre on obtient le résultat suivant avec $\tilde{\mathcal{E}}$ est une constante positive dépendante des constantes précédentes :

$$\mathcal{E}^k = \tilde{\mathcal{E}} h^{\alpha d - (k+1)}$$

On a le comportement suivant lorsque $h \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \mathcal{E}^k \rightarrow 0 & k < \alpha d - 1 \\ \mathcal{E}^k \rightarrow \mathcal{E}_0^k & k = \alpha d - 1 \\ \mathcal{E}^k \rightarrow \infty & k > \alpha d - 1 \end{cases}$$

C'est dans cette mesure que les méthodes d'ordre élevé prennent leur importance. En substance, on peut dire que dans les cas où les méthodes ne sont pas d'ordre élevé, à mesure que l'on raffine le maillage (dans le but d'obtenir une erreur plus acceptable), on produit un surcoût qui rend rapidement la méthode inutilisable. En revanche l'utilisation d'un degré k polynomial suffisamment élevé nous assure une efficacité constante, voir même en augmentation. Ce qui suggère que tous les efforts pour obtenir une solution plus acceptable ne seront pas annihilés par un surcoût ingérable, avec la technologie actuelle.

(Fig. 4.4) montre une estimation du paramètre α . Le principe est le suivant, pour un cas test de type *Euler*, on décide d'arrêter le calcul quand le résidu du problème complet a été divisé

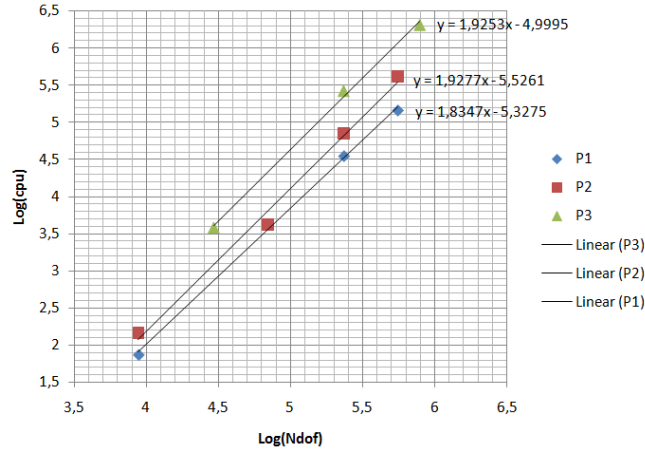


FIGURE 4.4 – $\log(\text{temps cpu}) = f(\log(\text{nombre de degré de liberté}))$ pour un cas test de type *Euler*

par 10^7 . On estime, à partir des sorties du code qui contient un compteur, le temps cpu effectif (on essaye de ne pas compter les lectures, écritures), que l'on compare au nombre de degrés de liberté. Dans le cas *P1* on obtient un α de l'ordre de 1.8 pour l'ordre élevé un α de l'ordre de 1.9. On peut remarquer que l'on obtient un α qui se situe dans la partie haute de la fourchette qui était supposée par l'analyse précédente.

Cette analyse confirme néanmoins que l'estimation précédente du coût de calcul, bien que sommaire, s'avère viable. On en déduit que le degré idéal pour résoudre des problèmes 2D, afin d'obtenir une "efficacité numérique" constante, serait environ $k = 3$ en 2D et $k = 4$ en 3D.

Cette analyse théorique sert de base à une justification des améliorations éventuelles attendues. D'autres méthodes, comme l'*analyse de sensibilité*, raffinement local par méthode adjointe, permettent d'estimer les zones permettant de diminuer significativement l'erreur sans tomber sur le problème de l'augmentation polynomial du coût. En revanche ces méthodes ont elles-même un coût non négligeable.

Comme on a pu le constater dans la section précédente, les équations que l'on cherche à résoudre sont non-linéaires, elles font intervenir un certain nombre de modèles complexes et on peut difficilement imaginer des solutions exactes à ces problèmes. Ainsi dans le cadre des équations de *Navier-Stokes* et de turbulence, l'appréciation d'une solution est faite grâce à une analyse physique ou à une comparaison avec une expérience. Nous nous attacherons uniquement à l'analyse physique dans ce cas.

4.3 Cas académique

Ces cas nous permettent de valider un certain nombre de propriétés qui ont été proposées dans les sections précédentes. On montre des cas majoritairement sur des problèmes d'advection pure. On montre d'abord que l'on retrouve les bons ordres de convergence en choisissant des solutions et en appliquant les termes sources correspondants.

Dans un deuxième temps on montre un cas d'advection de choc et nous discuterons de l'orientation des éléments et la répercussion sur la diffusion.

4.3.1 Solution exacte

Avant d'étudier les résultats sur les cas *Euler*, on cherche à faire une étude rapide sur un problème d'advection pure. On désire simplement savoir si les résultats théoriques tiennent. On veut résoudre avec une méthode SUPG :

$$\lambda \cdot \nabla u = f$$

avec des conditions de *Dirichlet* sur le bord du domaine $u|_{\partial\Omega} = 0$. $\lambda = (1,1)$ et f tel que $u = \cos(\frac{\pi}{2}y)\sin(\frac{\pi}{2}x)$.

On fait une série de tests où, pour chaque maillage, on introduit une perturbation aléatoire sur la position des noeuds, proportionnelle à la taille de leur cellule. Les nouvelles coordonnées sont $\tilde{x} = x + rc_0h_c$, avec h_c la taille de la cellule et r une variable aléatoire sur $[0,1]$ et c_0 un paramètre compris dans $[0,0.5]$.

On fait une analyse très succincte de l'ordre avec un maillage grossier et un maillage fin, où le maillage fin a une taille caractéristique deux fois plus petite.

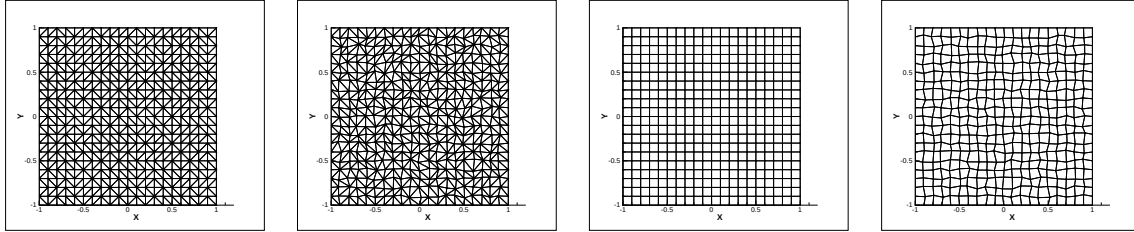


FIGURE 4.5 – Maillages grossiers. Les maillages perturbés sont obtenus avec un $c_0 = 0.2$

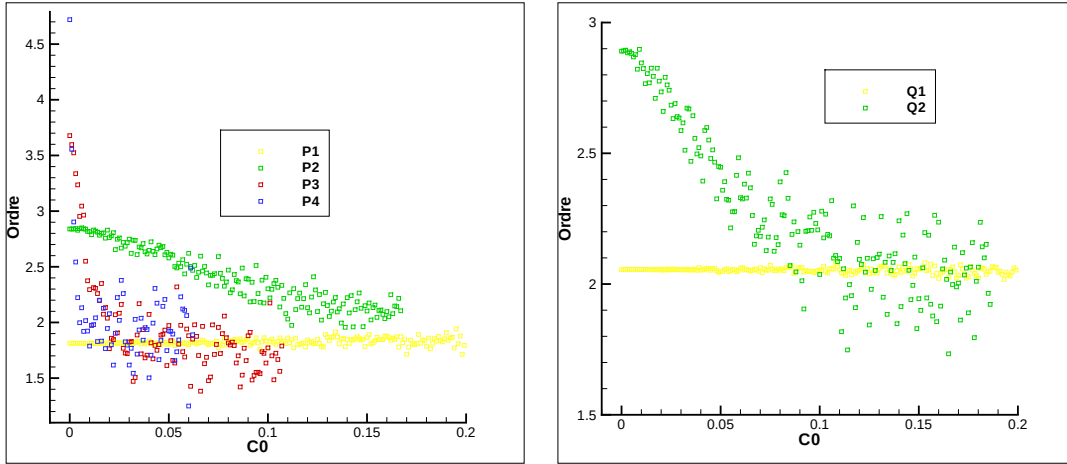


FIGURE 4.6 – Estimation de l'ordre de convergence pour une perturbation aléatoire de la position des noeuds d'amplitude c_0

L'erreur est évaluée avec une norme $L^2(\Omega)$. On cherche la relation entre l'erreur et la taille caractéristique sous la forme $E = \beta h^\gamma$. Sachant que $h_{fin} = h_{grossier}/2$ on a $\gamma = \frac{\log(E_{grossier}) - \log(E_{fin})}{\log(2)}$

On peut tout d'abord remarquer que dans les cas où $c_0 = 0$ on retrouve les ordres de convergence habituels dans le cas de l'advection pure, à savoir $\gamma \simeq k + \frac{1}{2}$. En perturbant le maillage on s'aperçoit que les cas P1 et Q1 ont un ordre de convergence stable. En revanche pour les éléments de degré plus élevé on remarque que l'ordre diminue jusqu'à stagner vers l'ordre obtenu pour les éléments linéaires.

Ce phénomène est rassurant car il nous permet de vérifier directement l'estimation d'erreur dans le cas des éléments droits et on vérifie bien la perte d'ordre qui avait été soulignée, d'un point de vue élémentaire, dans la section 3.3.2.2.

4.3.2 Advection de choc et de profil

On reprend le cas :

$$\lambda \cdot \nabla u = 0$$

On fixe $\lambda = (1, 1)$ sur une grille $[0, 6]^2$ avec les conditions limites suivantes : en $x = 0$ $u = 1$ et $y = 0$ $u = 0$.

On représente les solutions obtenues pour un schéma SUPG dans les cas P1, P2, P3, Q1, Q2, Q3. On représente les maillages équivalents, en revanche pour les solutions sont interpolées sur des éléments de degré $3k$ (voir 3.4.1).

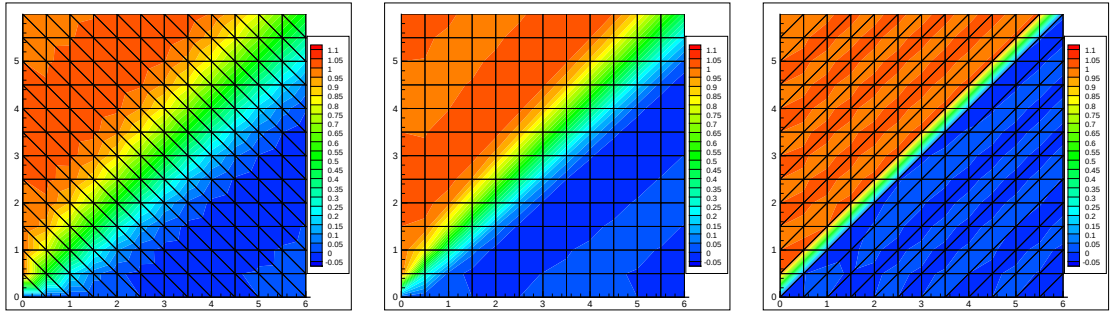


FIGURE 4.7 – Solution obtenue avec un schéma SUPG pour des éléments de degré 1.

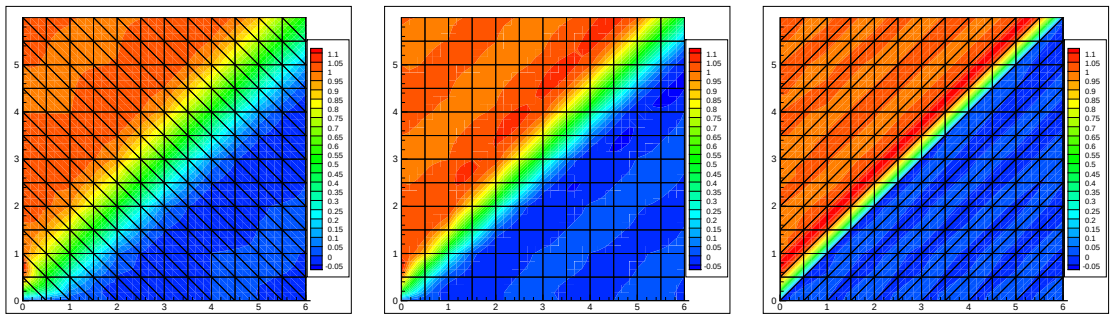


FIGURE 4.8 – Solution obtenue avec un schéma SUPG pour des éléments de degré 2.

L'intérêt de ce cas test est de vérifier, dans un premier temps, que l'utilisation de degré supérieur permet de conserver une bonne approximation du choc. Ce qui semble être bien le cas. On observe que le schéma est moins diffusif en utilisant des éléments de degré plus élevé. L'utilisation d'éléments quadrangulaires semble améliorer aussi le résultat.

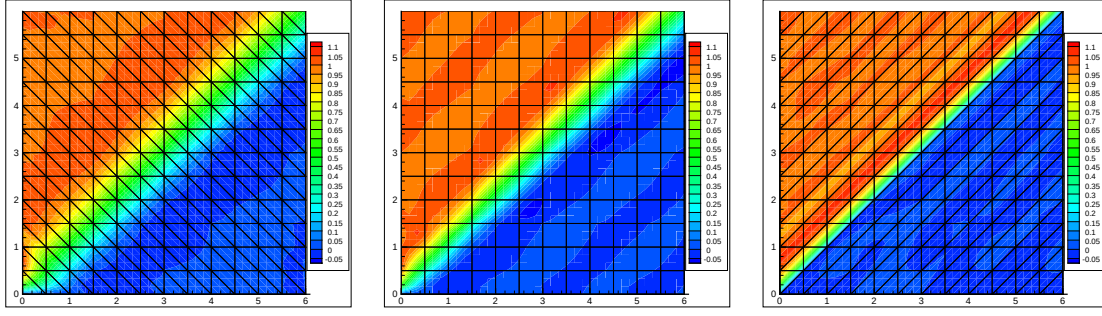


FIGURE 4.9 – Solution obtenue avec un schéma SUPG pour des éléments de degré 3.

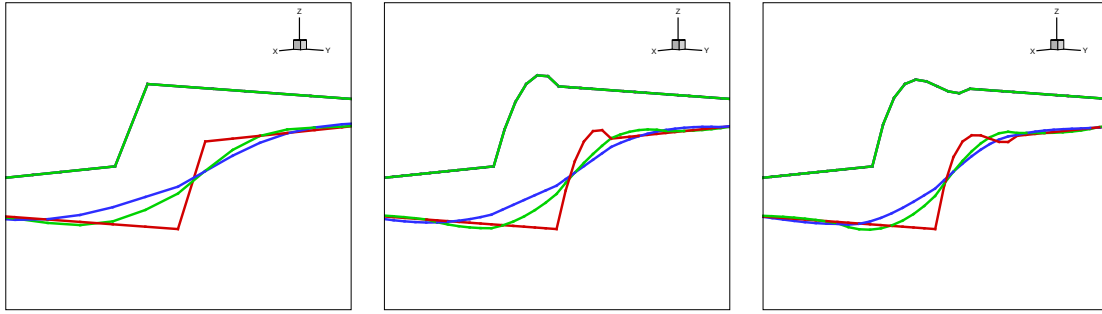


FIGURE 4.10 – Comparaison des chocs obtenus en sortie De gauche à droite : degré 1, 2 puis 3. Rouge : triangle avec hypothénuse parallèle au choc, Bleu : triangle avec hypothénuse perpendiculaire au choc, Vert : quadrangle

L'autre aspect intéressant est de remarquer que l'orientation des éléments influe directement la qualité de la solution et ceci dans tous les cas. On peut même constater que la solution obtenue n'a subi aucune diffusion numérique dans le cas où une face d'un triangle est alignée avec le choc.

Il est à noter qu'en entrée le profil advecté est en réalité la projection de ce profil sur l'espace d'approximation polynômial. Ce problème n'est clairement pas numérique mais relève entièrement du choix de l'espace d'approximation.

On montre un autre cas test pour le schéma RDS proposé précédemment. On ajoute un terme de diffusion.

$$\lambda \cdot \nabla u + \kappa \Delta u = 0$$

Dans ce cas $\lambda = (-y, x)$ sur une grille $[-2\pi, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Les conclusions qui peuvent être tirées de ce cas test sont similaires au cas précédents. Le profil est moins diffusé en utilisant des éléments de degré 2. Dans le cas où l'on ajoute un terme de diffusion, on peut aussi remarquer que le schéma est moins diffusif.

4.3.3 Bilan

Ces quelques tests sur des cas simples nous permettent de valider un certain nombre de propriétés. Dans un premier temps, la validation des estimations d'erreur a été faite et elle est cohérente avec la théorie. On peut aussi constater que la "qualité" des éléments et leur déformation joue un rôle sur la qualité de la solution obtenue, comme prévue dans la section 3.3.2.2.

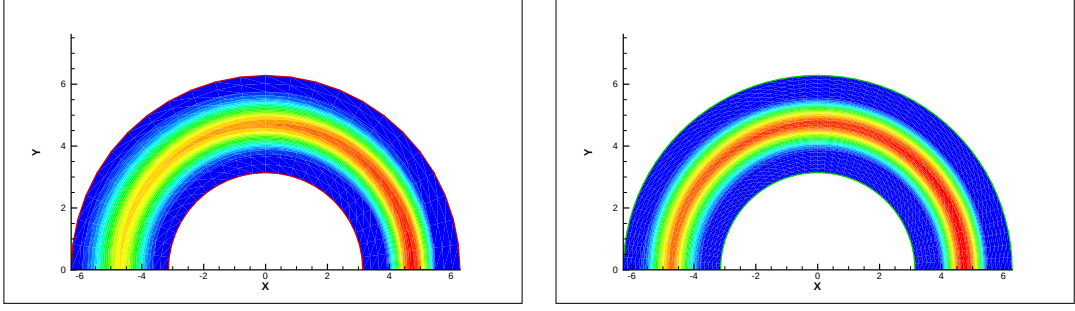
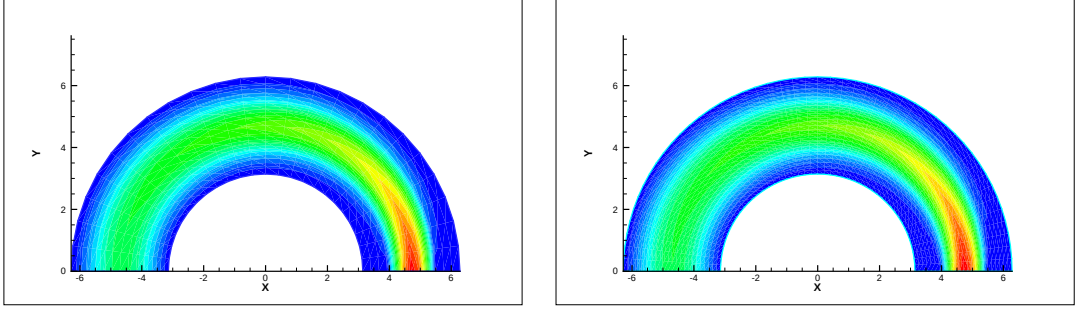


FIGURE 4.11 – Equation d’advection avec un profil sinusoidal en entrée.

FIGURE 4.12 – Equation d’advection diffusion avec $\kappa = 0.1$ avec un profil sinusoidal en entrée.

Dans un deuxième temps on s’assure que dans le cas d’advection de chocs, la solution ne se trouve pas détériorée par l’utilisation d’éléments de degré plus grand que 1. On vérifie que le choc est aussi bien capturé et que le schéma est moins diffusif, en revanche on retrouve bien la forme des fonctions d’interpolation d’où le fait que les valeurs de part et d’autre du choc soient donc surestimés ou sous-estimés. Néanmoins ces oscillations sont uniquement le résultat des fonctions d’interpolation et non pas du schéma SUPG en lui-même.

Enfin on montre qu’en ajoutant un terme de diffusion dans le cas du schéma RDS, les propriétés restent satisfaisantes et les conclusions quant à l’utilisation d’éléments de degré plus élevé restent les mêmes.

4.4 Cas Euler 2D

Ces cas tests proviennent du projet ADIGMA, [CN09]. On étudie ici des profils NACA0012. On regarde plus particulièrement dans les cas tests suivants les iso-valeurs de Mach et l’entropie. On rappelle que dans le cas *Euler*, l’écoulement est isentropique en l’absence de chocs.

4.4.1 NACA0012, Mach=0.5, angle d’attaque 2°

On compare les résultats obtenus dans le cas P2 et P3 avec les maillages équivalents (même nombre de degrés de liberté) P1.

En ce qui concerne les iso-valeurs de Mach dans le cas P1 on remarque des replis proche de la paroi qui s’amenuisent en utilisant un maillage plus raffiné. Ces replis disparaissent dans le cas des calculs en ordre élevé (Fig. 4.13). Ceci dès l’utilisation des éléments de degré 2 sur le

maillage le plus grossier.

On peut corrélérer ce résultat avec la production d'entropie proche de la paroi. Le point d'arrêt est l'endroit où la production d'entropie est la plus forte (Fig. 4.14), cette entropie est ensuite advectée le long du profil. La conséquence étant une détérioration de la solution et l'apparition de ces altérations sur les iso-valeurs de Mach.

L'utilisation de méthodes d'ordre élevé permet de diminuer drastiquement cette production. A l'échelle de l'entropie produite dans le cas du maillage P1, on constate que dans le cas P3 la production d'entropie est quasiment inexistante.

Il a été montré, dans le cadre d'une étude annexe, que dans le cas P1 la suppression de cette entropie parasite pouvait être envisagée en raffinant les éléments majoritairement dans la zone du point d'arrêt. Ce raffinement a eu un impact direct sur les replis observés.

L'utilisation de méthodes d'ordre élevé, dans ce cadre, permet d'obtenir un résultat bien meilleur et élimine le problème prépondérant de la création d'entropie au point d'arrêt. On note un effet d'ordre lorsque l'on fait un raffinement global du maillage. On considère la convergence des valeurs de trainée et de portance sur le profil NACA0012 vers la valeur cible avec un seuil d'erreur. L'intervalle de confiance autour de la valeur cible est atteint pour un nombre de degrés de liberté inférieur en utilisant les méthodes d'ordre élevé. Ce résultat rejoint l'analyse *a priori* faite au début de ce chapitre. Bien que les méthodes d'ordre élevé aient un coût sensiblement plus grand, elles permettent d'atteindre l'intervalle de confiance autour d'une valeur cible pour un nombre de degré de liberté moindre.

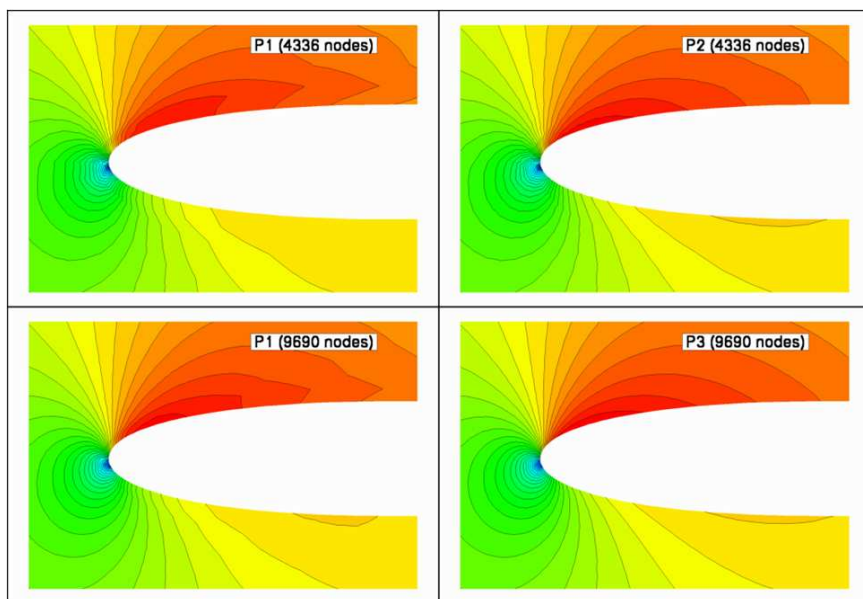


FIGURE 4.13 – NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2° , *Euler*. Iso-valeurs du nombre de Mach.

4.4.2 NACA0012, Mach=0.8, angle d'attaque 2°

Ce cas test présente un choc et permet d'analyser sur un cas plus complexe le comportement des méthodes d'ordre élevé. On note que le terme de capture de choc est présent dans ces simulations. Comme pour le cas précédent on s'intéresse aux iso-valeurs de Mach ainsi qu'à l'entropie.

Comme pour le cas précédent on note une diminution de la production d'entropie au point

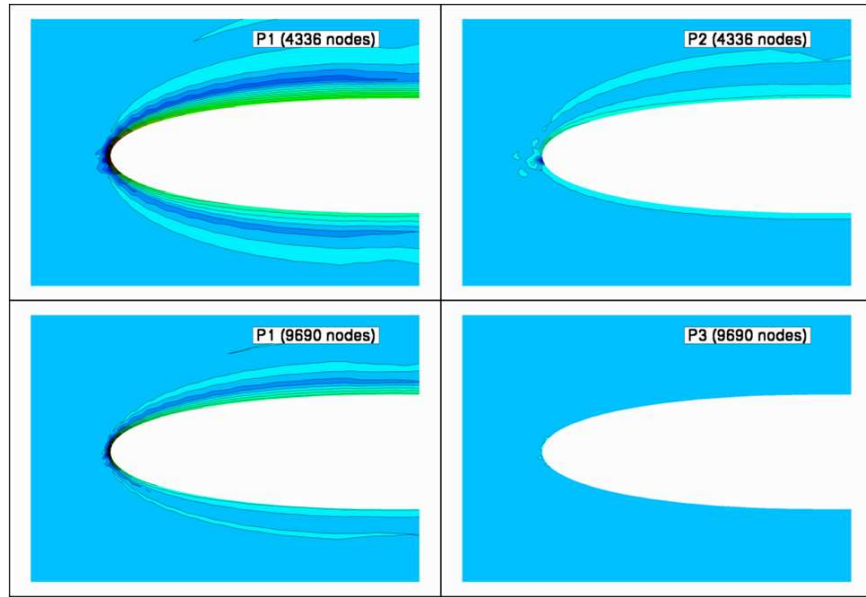


FIGURE 4.14 – NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2° , *Euler*. Iso-valeurs de l'entropie.

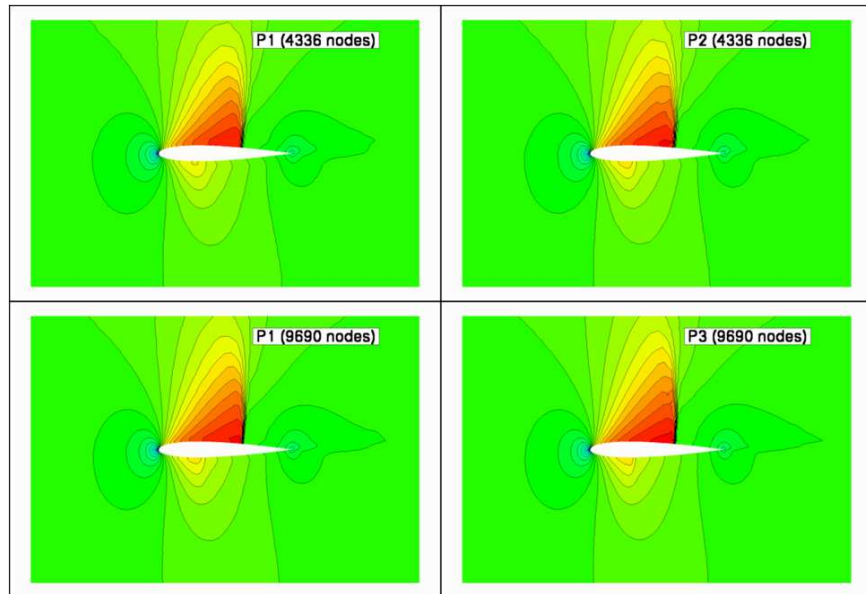


FIGURE 4.15 – NACA0012, Mach=0.8, angle d'attaque 2° , *Euler*. Iso-valeurs du nombre de Mach.

d'arrêt et autour du profil dans des proportions similaires. En revanche on note une production d'entropie en amont du choc dans le cas des éléments de degré élevé.

La qualité de la solution obtenue est donc meilleure en amont du choc et se trouve légèrement détériorés proche du choc, néanmoins on ne note pas d'autres effets négatifs et on retrouve les bénéfices notés dans le cas test précédent.

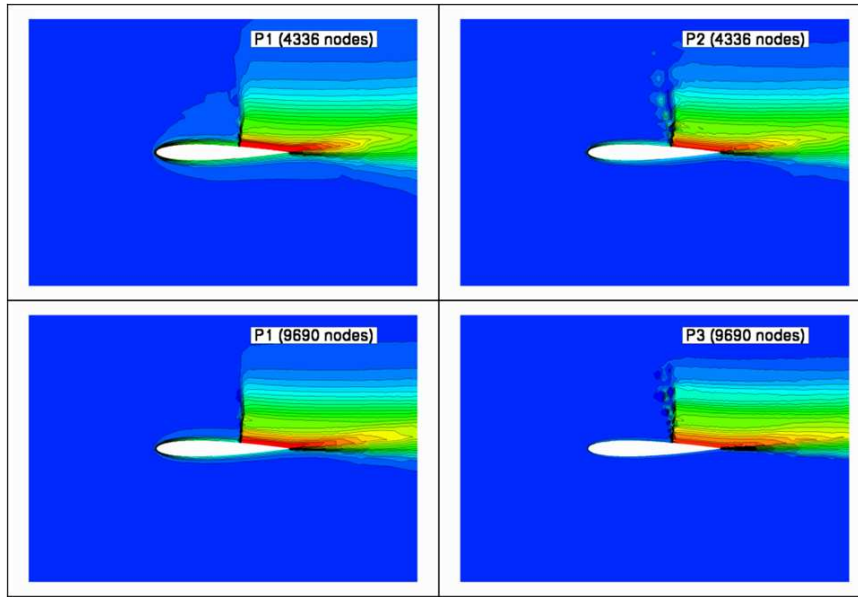


FIGURE 4.16 – NACA0012, Mach=0.8, angle d'attaque 2° , *Euler*. Iso-valeurs de l'entropie.

4.4.3 Effet du facteur τ de la méthode SUPG

Reprenons le premier cas test (NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2°). Suite à l'étude faite dans le premier chapitre on a déduit des valeurs de τ adaptées aux méthodes d'ordre élevé. On montre ici l'effet sur la solution dans le cas d'une sur-évaluation de ce paramètre τ .

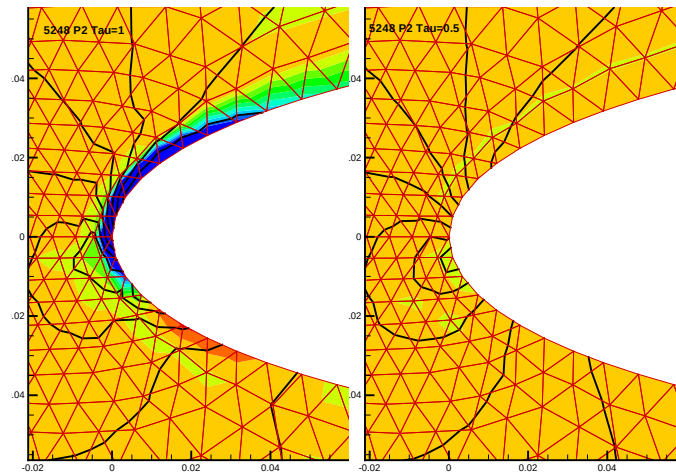


FIGURE 4.17 – Effet d'une surestimation du paramètre τ dans le cas des éléments P2. Les contours représentent l'entropie et les iso-lignes le Mach.

L'adaptation du paramètre τ a un effet notable sur la production d'entropie au point d'arrêt. On constate toujours cette corrélation entre la production d'entropie et la détérioration des isovaleurs de Mach.

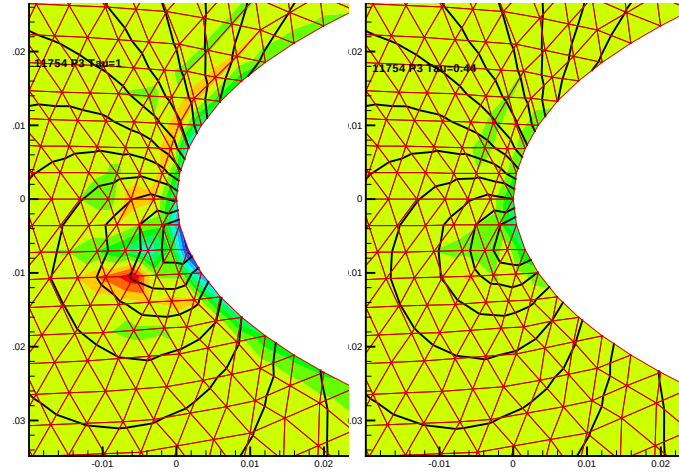


FIGURE 4.18 – Effet d’une surestimation du paramètre τ dans le cas des éléments P3. Les contours représentent l’entropie et les iso-lignes le Mach.

L’étude du paramètre τ nous a permis d’éviter l’obtention de solutions sur-diffusées et conséquemment d’améliorer les solutions obtenues.

4.5 Cas *Euler* 3D

4.5.1 Sphère Mach 0.35, angle d’attaque 0°

Le premier cas test 3D a été effectué sur une sphère. Le maillage est déformé de sorte que l’ensemble des noeuds de frontières soient bien sur la géométrie. (Fig. 4.19) fait apparaître en plus des contours d’entropie et les iso-lignes de Mach, le temps de calcul pour chaque simulation. EG3-Iter représente le temps passé par itérations pour la construction de la matrice implicite et Gmres le temps passé par itérations non linéaires dans le solveur itératif.

Le maillage contient un nombre de degré de liberté identique pour les trois maillages, à savoir 554242 noeuds. Le calcul a été mené en parallèle sur 16 processeurs pour les trois calculs. Les constatations sont similaires au cas 2D. En terme de temps de calcul on a un facteur 1.5 entre le P1 et le P2 alors que l’on a un facteur 8 pour le P3 ! Les raisons pour ces facteurs tiennent à l’utilisation d’une règle d’intégration comportant un très grand nombre de points pour le calcul P3 et semble aussi être dû à une convergence plus lente de la résolution du système matriciel, problème qui ne semble pas apparaître dans le cas P2.

Les remarques sur la création d’entropie et l’impact sur la qualité de la solution restent les mêmes que pour les cas précédents.

Face à l’augmentation dramatique du cout de calcul due à l’utilisation d’un grand nombre de points d’intégration on montre ((Fig. 4.20), (Fig. 4.21), (Fig. 4.22)) les conséquences d’une mauvaise utilisation des règles d’intégration dans le calcul de la sphère. On se cantonne au cas P2 et on compare les résultats obtenus entre le P1 (règle d’intégration à 1 point) et les résultats P2 pour trois règles d’intégration différentes. La première règle a 4 points et permet d’intégrer des polynômes de degré 2, celle à 8 points permet d’intégrer des polynômes de degré 3 et enfin celle à 14 points permet d’intégrer des polynômes de degré 4. D’après l’étude du premier chapitre sur le degré de chacun des termes du schéma, il faudrait recourir à une règle permettant d’intégrer des polynômes de degré 6 !

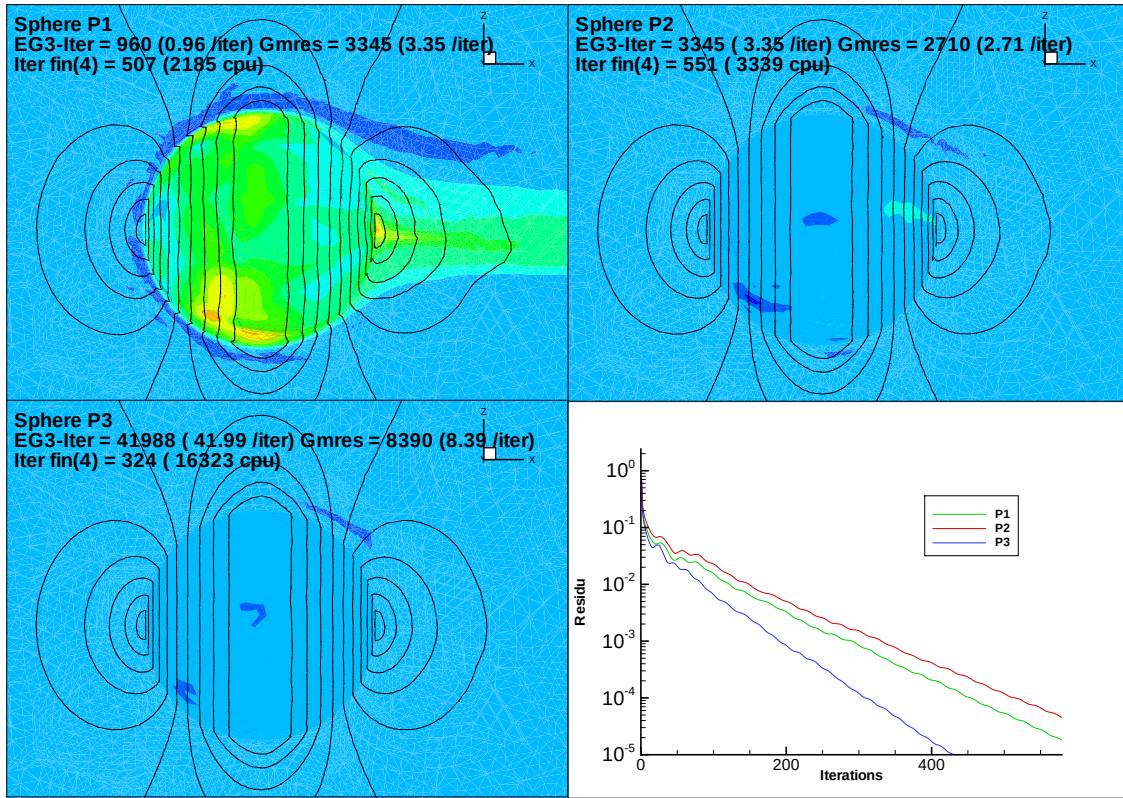


FIGURE 4.19 – Sphère Mach 0.35, angle d’attaque 0° . Coupe $Y=0$. Les contours représentent l’entropie et les iso-lignes le Mach.

Le calcul est fait ici sur un maillage beaucoup plus modeste d’environ 64000 noeuds, afin de mieux percevoir l’effet de la sous-intégration.

En terme de temps de calcul, les proportions sont relativement cohérentes en ce qui concerne la routine de formation de la matrice implicite (EG3_iter). Rappelons-nous que l’on peut estimer le coût de cette routine pour chaque itération par (nombre d’éléments $\times$ nombre de points d’intégration $\times$ nombre de noeuds par élément). Les temps donnés ici sont pour la simulation complète. Pour les calculs P2 on a un facteur d’environ $0.45 \times$ nombre de points d’intégration, information qui est la seule variable dans ce cas.

On comprend d’ailleurs l’avarice dont on peut faire preuve en ce qui concerne le nombre de points d’intégration. En effet les routines qui y font appel dépendent linéairement de ce paramètre et prennent la majorité du temps de calcul. Augmenter le nombre de points d’intégration a donc un impact direct sur le temps de calcul.

Malheureusement la cupidité n’est jamais recompensée et l’on constate que sous-estimer le nombre de points d’intégration détruit complètement la qualité de la solution. On le constate surtout sur (Fig. 4.20) où de l’entropie parasite est générée jusqu’à la frontière du domaine.

On peut aussi comparer les résultats entre la règle à 8 points et celle à 14 points. Le gain se situe uniquement sur le point d’arrêt en aval et on peut le considérer comme négligeable.

L’étude théorique nous montre qu’il serait nécessaire d’intégrer des polynômes de degré 6, or une règle intégrant des polynômes de degré 3 semble suffisante. La raison sous-jacente tient au fait que les éléments n’étant pas “très déformés”, la règle intégrant du degré 3 semble suffisante (voir (Tab. 1.3) de la section 1.3).

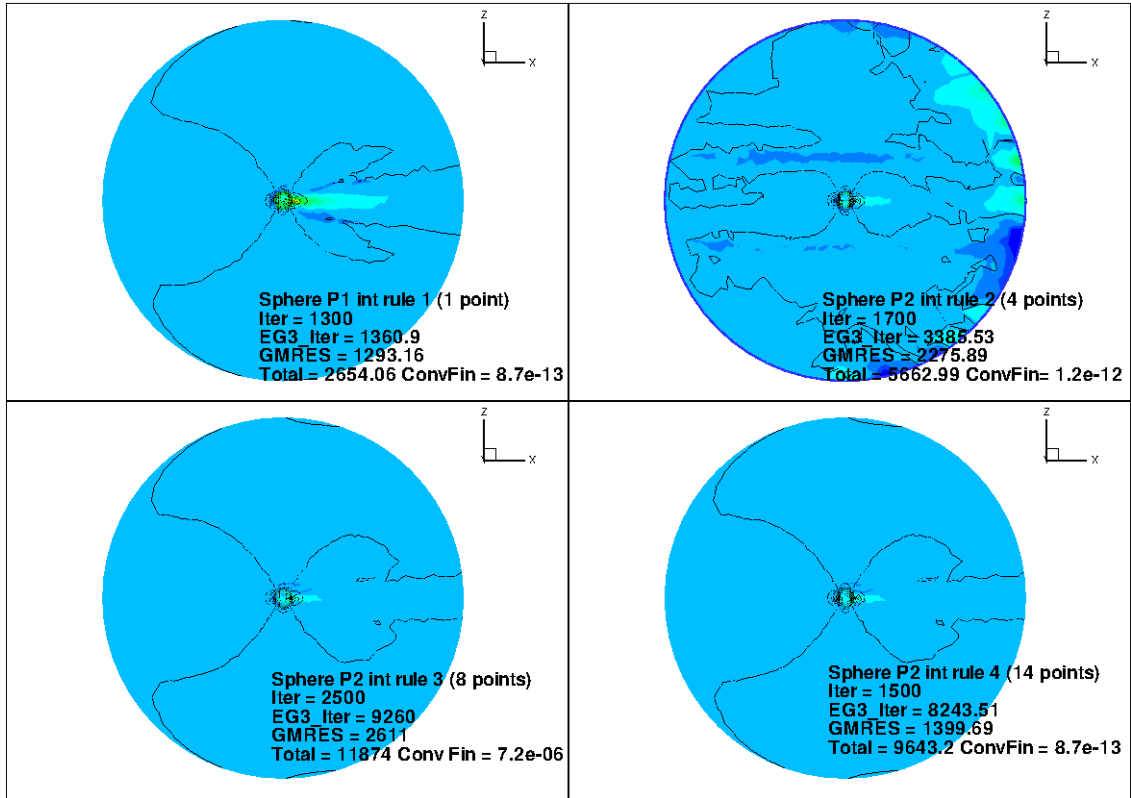


FIGURE 4.20 – Sphère Mach 0.35, angle d'attaque 0° . Coupe $Y=0$. Vue du domaine complet. Comparaison pour différentes règle d'intégration.

Le choix de la bonne règle d'intégration est donc délicat car une sous-estimation annihile les efforts consentis pour obtenir une meilleure solution et une sur-estimation engendre un surcout de calcul non négligeable.

4.5.2 Aile M6 Mach 0.6, angle d'attaque 2°

On propose ici un dernier cas pour les tests concernant les équations d'*Euler*. Il s'agit d'une Aile ONERA M6.

On compare d'une part les solutions obtenues sur un maillage P2 et son équivalent P1 contenant tous deux 212756 noeuds et d'autre part les solutions obtenues sur un maillage P3 et son équivalent P1 contenant tous deux 707858 noeuds.

Les analyses restent du même ordre et on observe des résultats similaires au cas 2D du profil NACA. On retrouve les repliements des isolignes de Mach. Seule différence, ce phénomène n'a pas complètement disparu dans le cas P2, il faut se résoudre à l'utilisation d'un maillage plus conséquent (environ 3.5 fois plus de noeuds) avec une interpolation de degré 3 pour obtenir une solution ne faisant pas apparaître ces repliements.

On aperçoit toujours cette relation entre production d'entropie et détérioration de la solution. Ce profil ne faisant pas apparaître un seul point d'arrêt mais tout une ligne, on retrouve bien la production d'entropie au bord d'attaque, entropie qui est ensuite convectée le long de l'aile.

On remarquera une forte production d'entropie à l'extrémité de la voilure. La raison de cette anomalie est liée à la géométrie du problème. La géométrie étant abrupte à cet endroit,

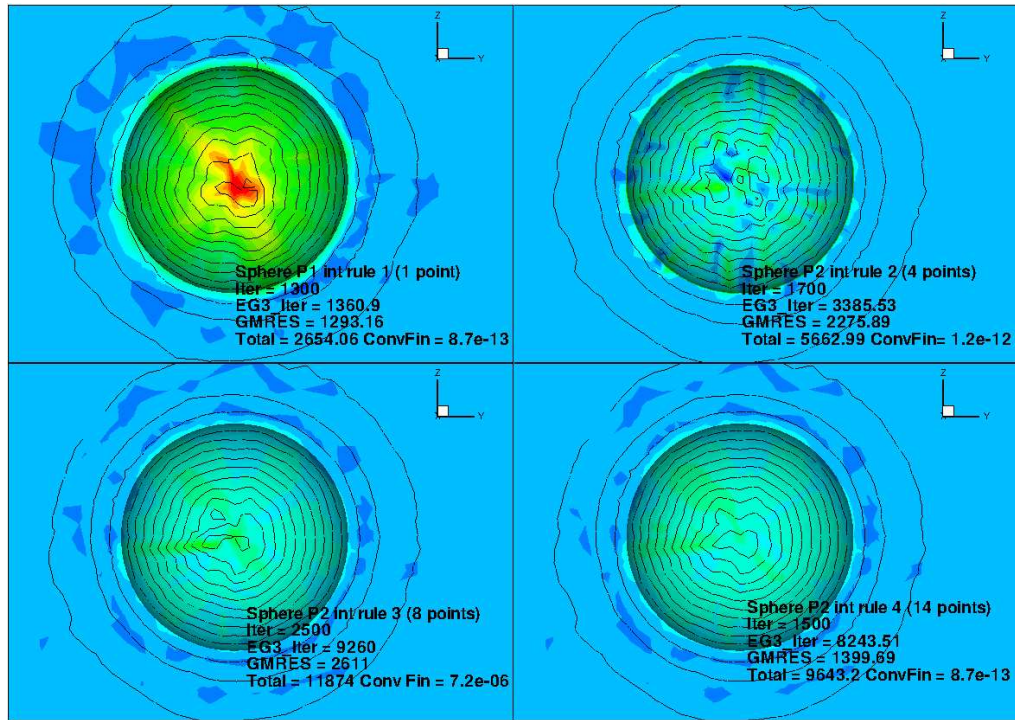


FIGURE 4.21 – Sphère Mach 0.35, angle d'attaque 0° . Coupe $X=0$. Vue du point d'arrêt aval. Comparaison pour différentes règle d'intégration.

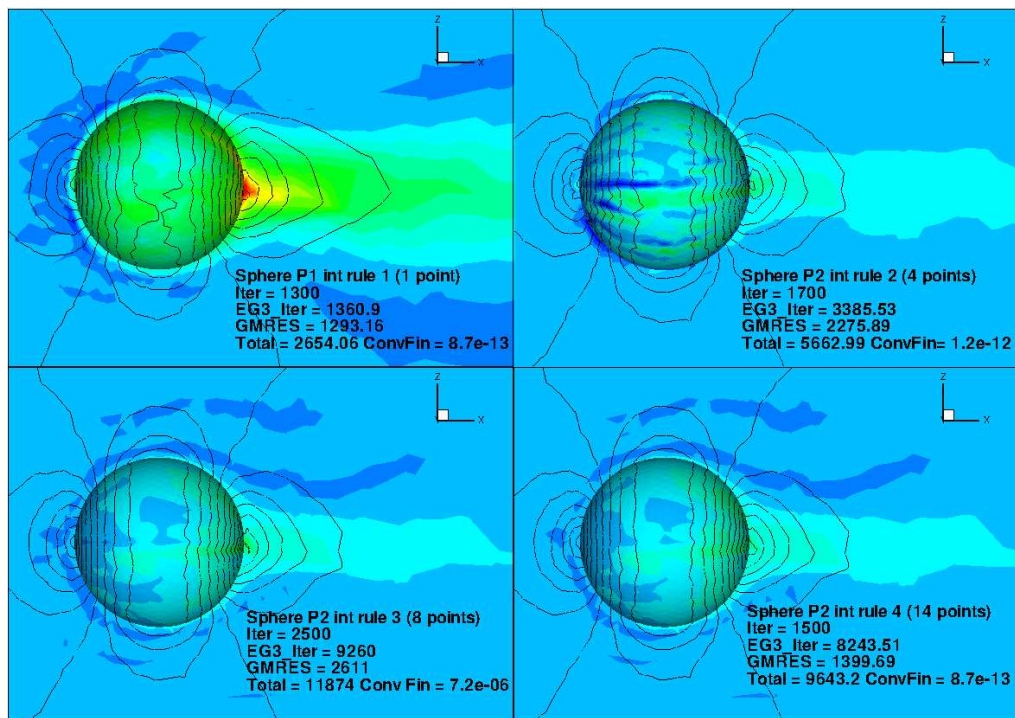


FIGURE 4.22 – Sphère Mach 0.35, angle d'attaque 0° . Coupe $Y=0$. Vue du point d'arrêt aval. Comparaison pour différentes règle d'intégration.

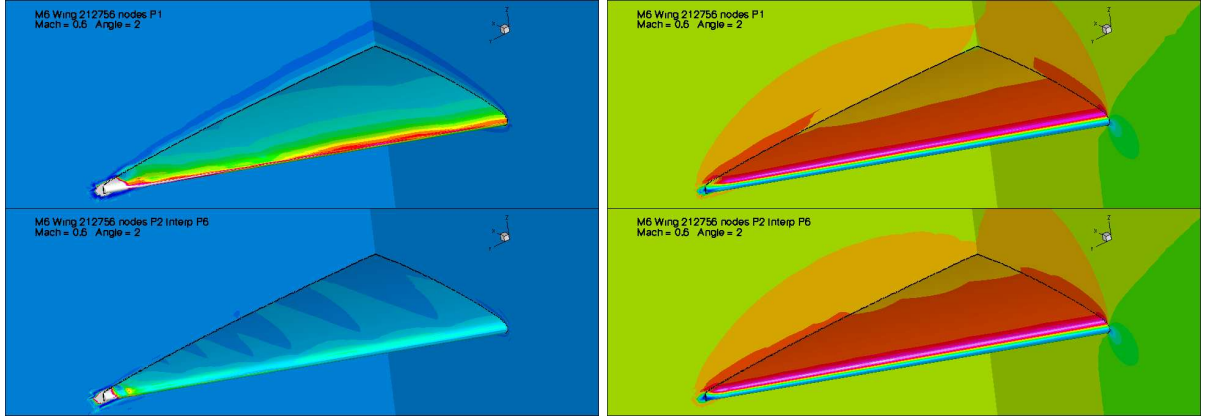


FIGURE 4.23 – Aile M6 Mach 0.6, angle d'attaque 2° . Comparaison maillages équivalent P1 et P2 de 212756 noeuds. Contours entropie et contours Mach. Profil + deux coupes selon les plans YZ et XZ

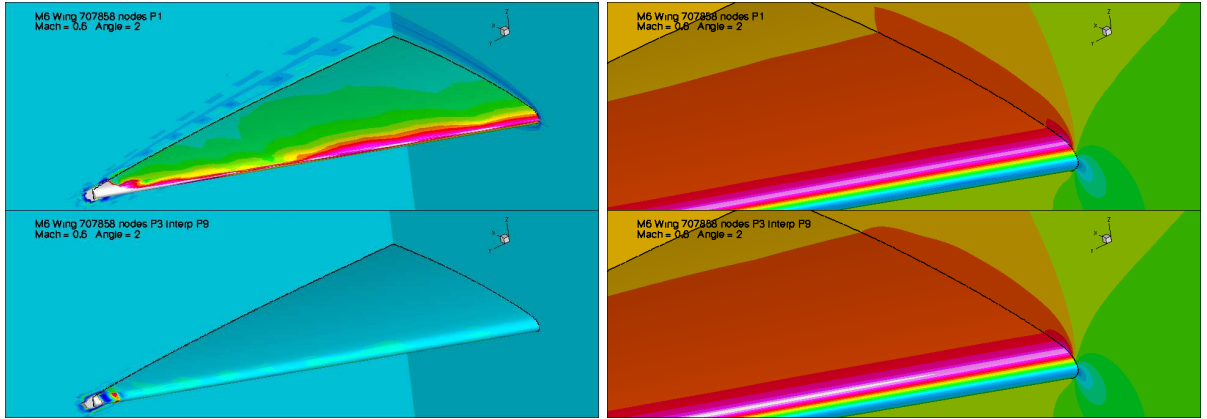


FIGURE 4.24 – Aile M6 Mach 0.6, angle d'attaque 2° . Comparaison maillages équivalent P1 et P3 de 707858 noeuds. Contours entropie et contours Mach. Profil + deux coupes selon les plans YZ et XZ

on peut définir deux normales à l'interface entre la voilure et le bouchon de l'extrémité. L'existence de cette discontinuité C^1 oblige à définir la condition de glissement de manière faible, il en résulte cette production d'entropie.

Les points de la frontières ont été reprojétés sur la géométrie. Il est néanmoins naturel de s'interroger sur l'impact de la reprojektion. La figure suivante montre les résultats obtenus dans le cas où les points n'ont pas été reprojétés sur la géométrie (Fig. 4.25) et (Fig. 4.26).

Le cas P2 présente une légère création d'entropie supplémentaire dans le cas où la géométrie est facetée (les noeuds ajoutés n'ont pas été reprojétés). Dans le cas P3 la différence est sans appel, la création d'entropie est telle que le résultat s'en trouve moins bon que dans le cas P1 équivalent. On peut noter qu'il semble que la non reprojektion de la géométrie ne semble pas tant affecter le résultat P1.

De manière synthétique, la reprojektion est essentielle pour deux raisons :

- La détérioration de la solution en proche paroi dans le cas de maillages de paroi facetées

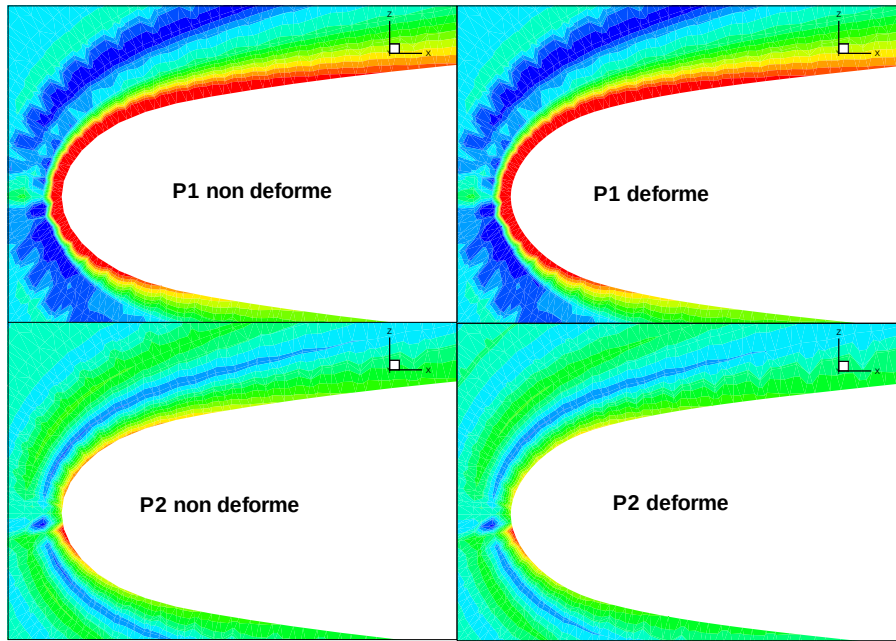


FIGURE 4.25 – Aile M6 Mach 0.6, angle d'attaque 2° . Comparaison maillages équivalent P1 et P2 déformés et non déformés. Contours entropie. Coupe selon le plan XZ

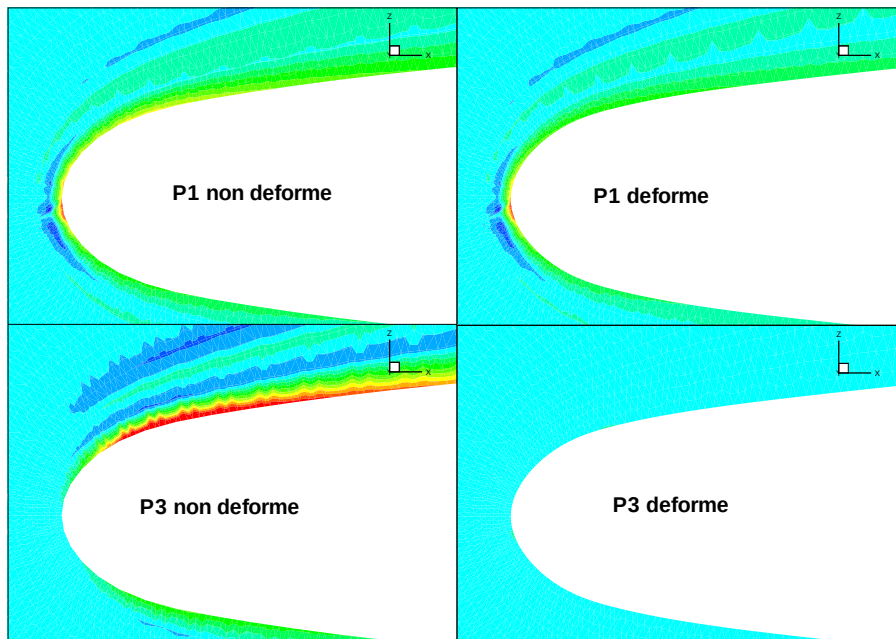


FIGURE 4.26 – Aile M6 Mach 0.6, angle d'attaque 2° . Comparaison maillages équivalent P1 et P3 déformés et non déformés. Contours entropie. Coupe selon le plan XZ

– Le calcul erroné de l'intégral de contour de la géométrie

On peut revoir, pour se convaincre de la deuxième remarque, (Fig. 3.19), qui présente la géométrie non déformée et un élément déformée en surface.

4.6 Bilan cas *Euler*

En terme de conclusion, on montre la convergence des paramètres de trainée et de portance sur le cas NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2° , (Fig. 4.27).

Les barres d'erreur représentent la définition d'un calcul convergé : quand le coefficient atteint la valeur cible dans cet écart d'erreur, on considère que le calcul est convergé.

Les valeurs de trainée et de portance convergées sont atteintes pour des maillages contenant un nombre de degré de liberté bien inférieur dans le cas de l'utilisation des méthodes d'ordre élevé. D'un point de vue économie de temps de calcul, on considère le temps CPU sur un maillage linéaire permettant d'obtenir des résultats de trainée et de portance convergés et l'on compare au temps de calcul pour le maillage d'ordre élevé. On estime un gain de 50% pour le cas P2 et un gain de 75% pour le cas P3. Bien évidemment cette approche reste purement pragmatique et elle n'a pu être menée qu'en faisant un effet de convergence et des calculs très coûteux sur des maillages surdimensionnés. Néanmoins elle conforte le comportement escompté des méthodes d'ordre élevé, cette capacité à fournir des résultats plus probants avec un nombre de degré de liberté moindre. On retrouve en ce sens la discussion menée en début de ce chapitre (voir 4.2).

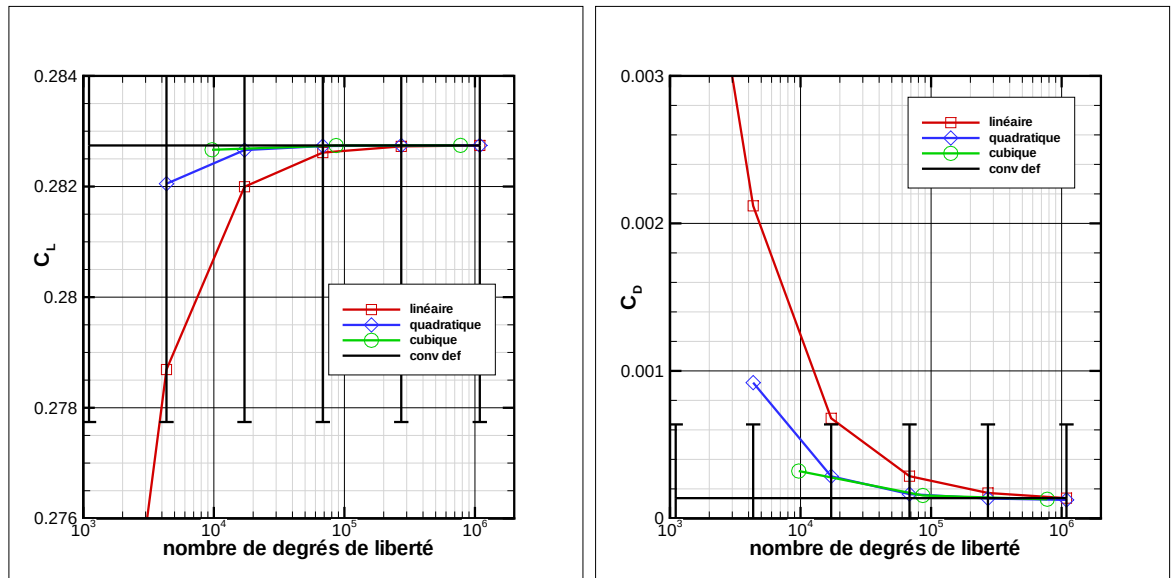


FIGURE 4.27 – NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2° . Convergence de la trainée C_D et de la portance C_L .

L'étude sur des cas *Euler* nous a permis aussi de mettre l'accent sur trois points importants. Deux concernent le schéma numérique et un le maillage.

Nous avons montré qu'une surestimation du paramètre τ peut mener à une détérioration de la qualité de la solution obtenue. On note qu'une réflexion est nécessaire sur la règle d'intégration à employer afin de mener à bien le calcul numérique et que une sous-estimation de cette règle mène à des résultats farfelus.

Enfin on montre que la reprojection des points sur la géométrie réelle est une nécessité. L'utilisation, uniquement d'éléments de degré supérieur à 1 dont la transformée géométrique est affine, peut mener à une production d'erreur (entropie dans ce cas) en proche paroi. On a pu noter ce phénomène plus particulièrement dans le cas P3.

4.7 Cas Navier-Stokes 2D

Le cas *Navier-Stokes* 2D pose un problème d'appréciation de la solution, car contrairement au cas *Euler* il n'existe pas de variable caractéristique de la qualité de la solution. L'étude qui va suivre sera donc amplement qualitative. Ce cas provient aussi d'un des cas tests du projet ADIGMA.

4.7.1 NACA0012, Mach=0.50, angle d'incidence=2°, Reynolds=5000

La valeur du nombre de Reynolds nous assure un comportement laminaire de l'écoulement. Pour la simulation Navier-Stokes on cherche des critères nous permettant d'analyser de manière qualitative l'écoulement.

Sachant que la pression doit rester constante en travers la couche limite dans la direction normale à la paroi, on regarde le champ de pression pour vérifier cette propriété. (Fig. 4.28) et (Fig. 4.29) présentent les calculs effectués sur le profil NACA0012 à un nombre de Reynolds élevé les comparaisons $Pk/P1$ sont effectuées à iso nombre de degrés de liberté.

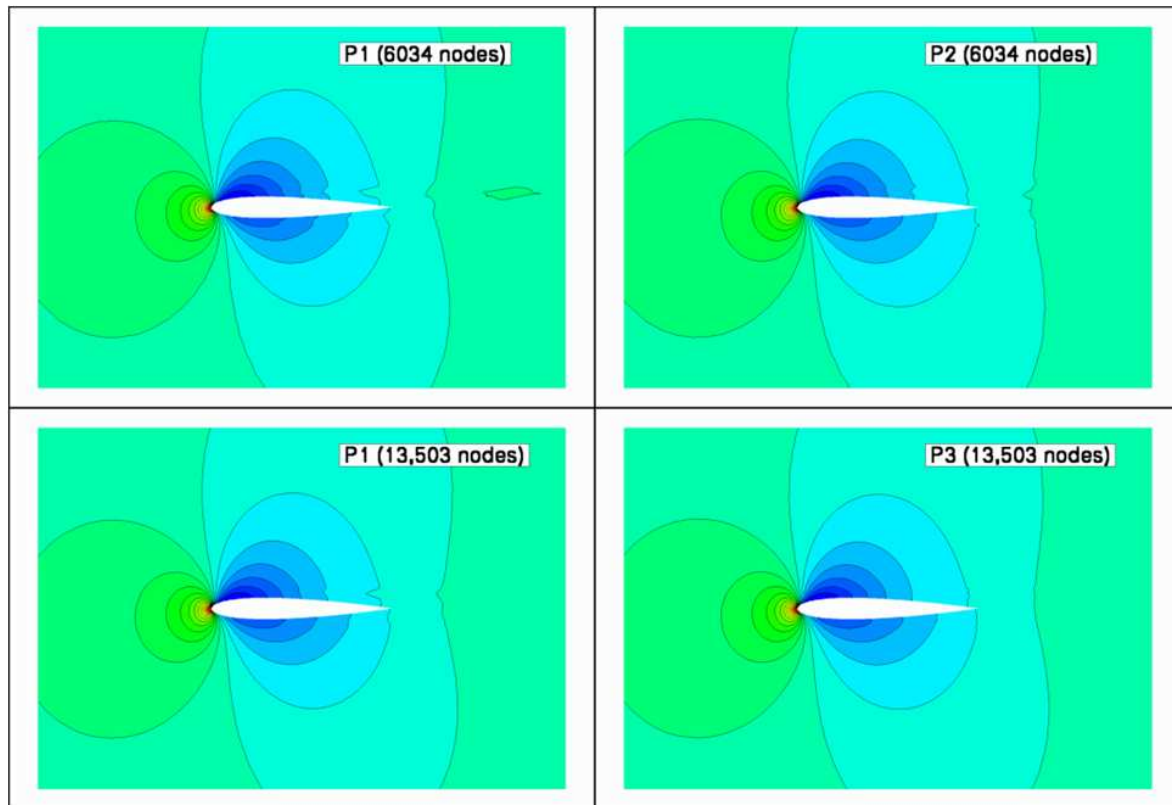


FIGURE 4.28 – NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2°, Re=5000. Contours de pression.

Les résultats *P1* montrent la difficulté d'obtenir un résultat respectant la condition de pression à travers la couche limite. On remarque une oscillation des isolignes de pression à l'abord de la couche limite (Fig. 4.29). L'utilisation des méthodes d'ordre élevé permet d'effacer ces oscillations. Tout comme leur utilisation permet de ne plus avoir de repliements des isolignes de Mach dans le cas *Euler*, elles permettent de mieux satisfaire cette condition.

(Fig. 4.30) est un agrandissement de la zone où cette oscillation est la plus visible. On

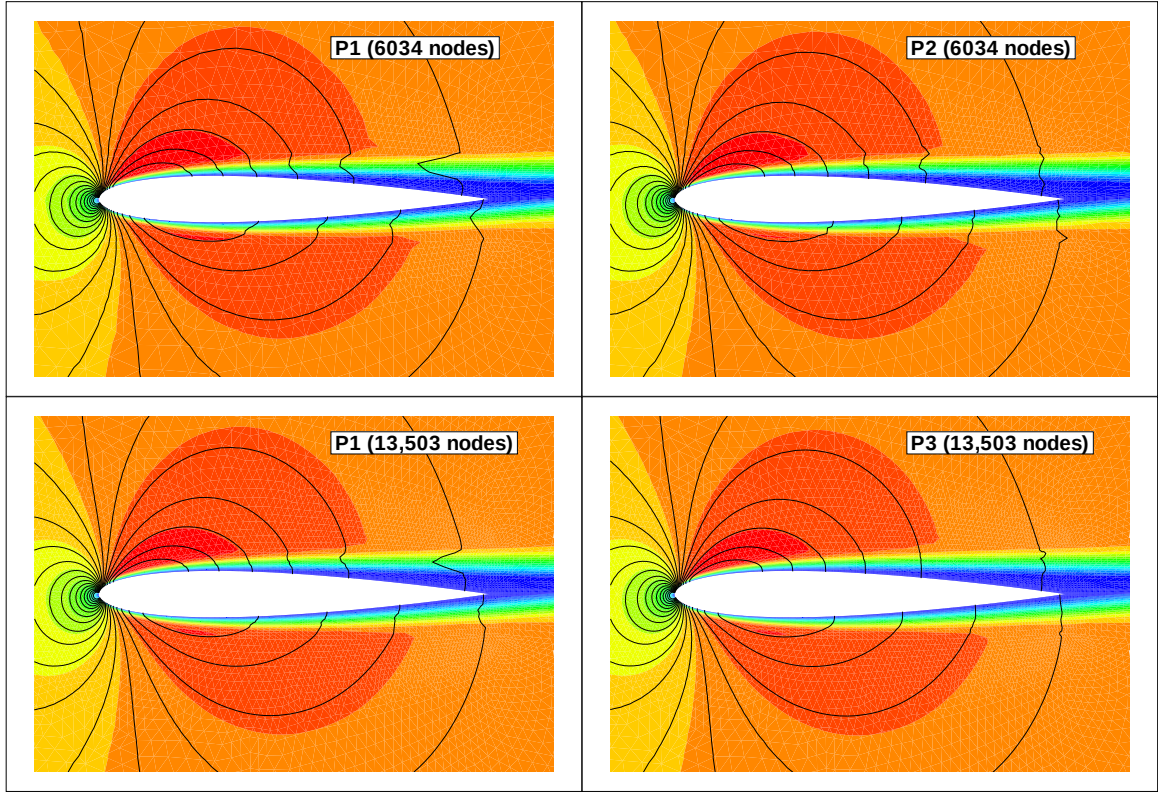


FIGURE 4.29 – NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2° , $Re=5000$. Contours de mach et isolignes de pression.

effectue un effet de raffinement du maillage pour discuter de l'évolution en rajoutant des degrés de liberté. On représente les contours du Mach et on trace les isolignes de pression pour les différents maillages. Les isolignes rouges représentent les maillages les plus grossiers dont les calculs sont montrés ci-avant (Fig. 4.29) et (Fig. 4.28). Les isolignes vertes correspondent à un premier maillage raffiné iso- Pk , les isolignes jaunes correspondent à un deuxième maillage raffiné deux fois iso- Pk et l'isoligne bleue claire correspond à un maillage trois fois iso- $P2$ du maillage grossier.

Dans un premier temps on remarque que, dans le cas des maillages P1 créés par raffinement iso- $P2$, trois étapes de raffinement ne suffisent pas à lisser l'isoligne de pression, aussi bien pour l'intrados que pour l'extrados. En revanche pour les calculs P2, l'isoligne est quasiment lisse dès le deuxième raffinement sur l'intrados et l'extrados. L'analyse est exactement similaire pour les maillages P3 et leurs équivalents P1. Il suffit d'un raffinement iso- $P3$ dans le cas du calcul P3, pour que l'isoligne de pression soit lisse.

Une analyse qualitative des résultats permet d'intuiter l'effet d'ordre. Le rajout de degrés de liberté à un effet beaucoup plus conséquent sur la physique de l'écoulement en utilisant des maillages d'éléments de degré plus élevé. Ce qui rejoint, une fois de plus, l'analyse menée en début de chapitre. Ces cas tests et les effets de maillage nous permettent aussi d'apprécier comme pour le cas *Euler* la convergence des paramètres aérodynamiques du profil NACA0012.

On tente de confirmer cette tendance en analysant la convergence des valeurs intégrales de paroi (on note la paroi Σ). On note a_x, a_y et a_z les axes avions et S_{ref} une surface de référence. Dans le cas Navier-Stokes on distingue les paramètres suivants :

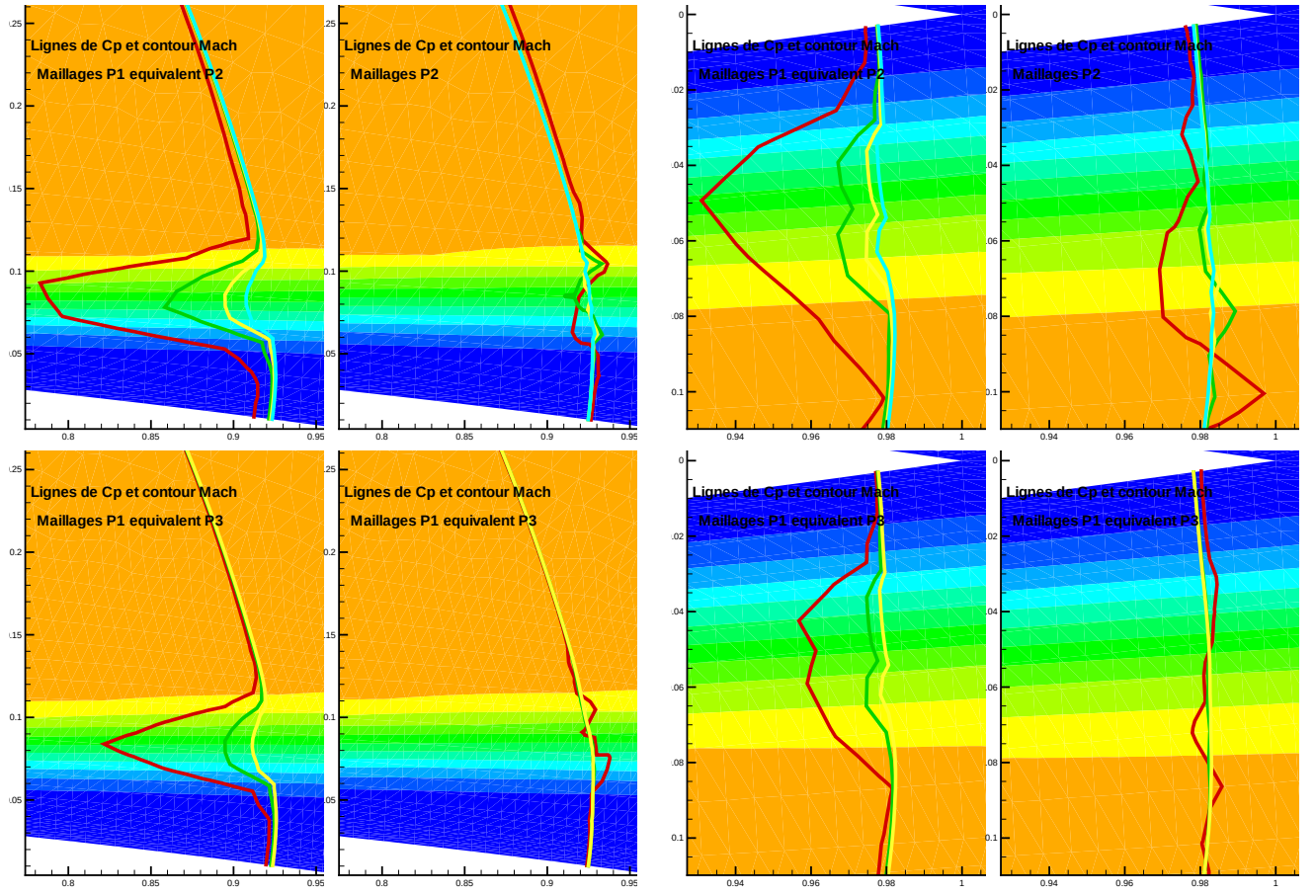


FIGURE 4.30 – NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2° , $Re=5000$. Contours de Mach et isoligne de pression sur l'extrados (gauche) et l'intrados (droite).

– Portance

$$C_L = \frac{\left[\int_{\Sigma} p n dS + \int_{\Sigma} 2\mu \tilde{e}_{ij} n dS \right] \cdot a_z}{\frac{1}{2} S_{ref} \rho_{\infty} U_{\infty}^2}$$

– Trainée de pression selon a_i ($i = x, y$).

$$C_{a_i} = \frac{\left[\int_{\Sigma} p n dS \right] \cdot a_i}{\frac{1}{2} S_{ref} \rho_{\infty} U_{\infty}^2}$$

– Trainée de frottement visqueux selon a_i ($i = x, y$).

$$C_{a_i}^{visc} = \frac{\left[\int_{\Sigma} 2\mu \tilde{e}_{ij} n dS \right] \cdot a_i}{\frac{1}{2} S_{ref} \rho_{\infty} U_{\infty}^2}$$

– Flux de chaleur pariétal.

$$C_H = \frac{\int_{\Sigma} q \cdot n dS}{\frac{1}{2} S_{ref} \rho_{\infty} U_{\infty}^3}$$

(Fig. 4.31) et (Fig. 4.32) rapportent les termes ci-dessus pour une étude de convergence similaire à celle menée pour le cas *Euler*.

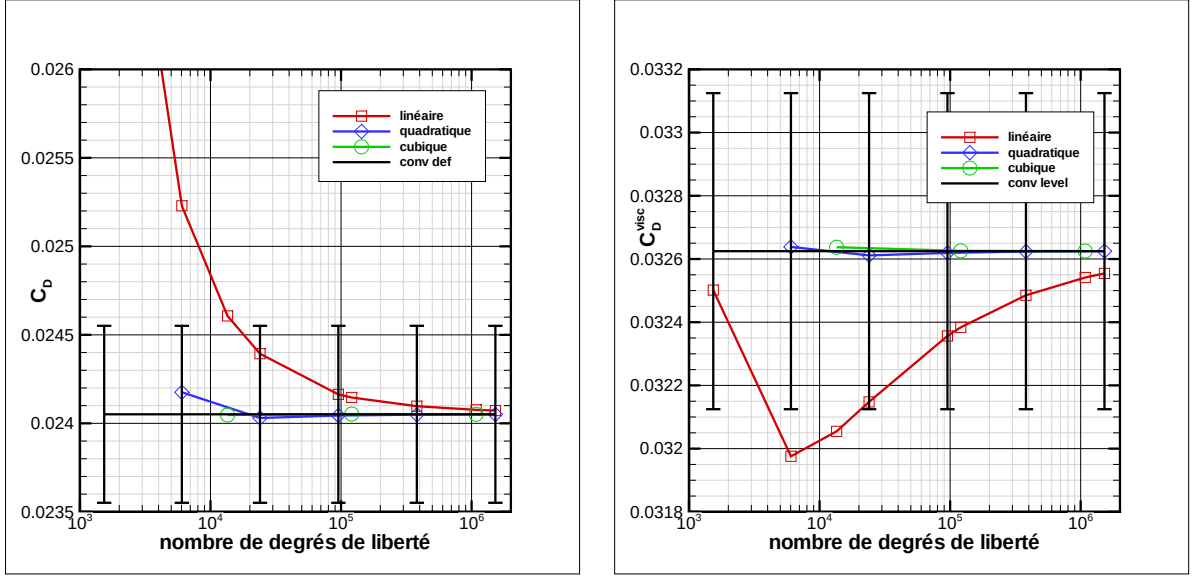


FIGURE 4.31 – NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2° , Re=5000. Convergence de la trainée C_D et de la trainée visqueuse C_D^{visc} .

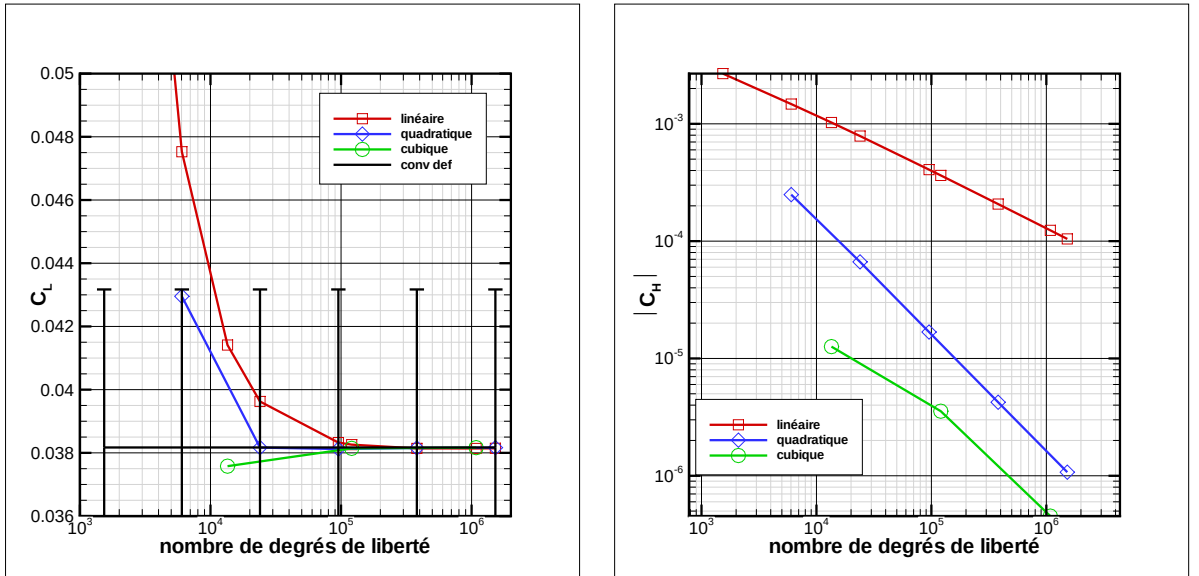


FIGURE 4.32 – NACA0012, Mach=0.5, angle d'attaque 2° , Re=5000. Convergence de la portance C_L et du flux de chaleur pariétal C_H en échelle logarithmique.

Les barres d'erreur représentent la définition d'un calcul convergé : quand le coefficient atteint la valeur cible dans cet écart d'erreur, on considère que le calcul est convergé.

La trainée de pression ainsi que la portance converge rapidement avec les éléments quadratiques et cubiques.

La valeur asymptotique des efforts visqueux semble être un problème pour le maillage P1, qui avec plus de 1,5 millions de noeuds l'atteint péniblement à plus d'un point de trainée (10^{-4}). En revanche les maillages P2 et P3 sont toujours très proches de la valeur asymptotique, même pour des maillages relativement grossiers. Enfin ce calcul étant fait en supposant la paroi adiabatique, le flux de chaleur pariétal devrait être négligeable. C_H est tracé en échelle logarithmique, pour apprécier les facteurs de précision qui sont gagnés. L'erreur sur ce flux de chaleur est donc améliorée d'un facteur supérieur à 10 pour les maillages grossiers et 100 pour les maillages les plus raffinés.

En terme de temps CPU, le cout du P2 est d'environ un facteur 1.4 et entre 2 et 2.5 pour les maillages P3. Ce surcoût est grandement rattrapé par le gain en précision sur les calculs.

4.8 Cas *Navier-Stokes* 2D instationnaire

On étudie le cas d'une impulsion de pression acoustique.

On introduit un pulse gaussien de pression au centre du domaine, avec b la demi largeur du pulse :

$$p(x, y, t = 0) = p_0 + 10^3 e^{\frac{\ln(2)(x^2 + y^2)}{b^2}}$$

Le domaine est d'une taille $3400mm$ par $3400mm$. On maille le domaine selon une grille cartésienne avec un espace de $25mm$ entre les points. On extrait la solution toutes les $0,001$ secondes. Le pulse devrait donc atteindre le bord du domaine à $t = 0,01$, la vitesse du son étant environ $c_0 = 340mm.s^{-1}$.

Dans les figures suivantes on représente le produit ρT , qui, dans le cadre de l'hypothèse des gaz parfaits, est une approximation au facteur près de p .

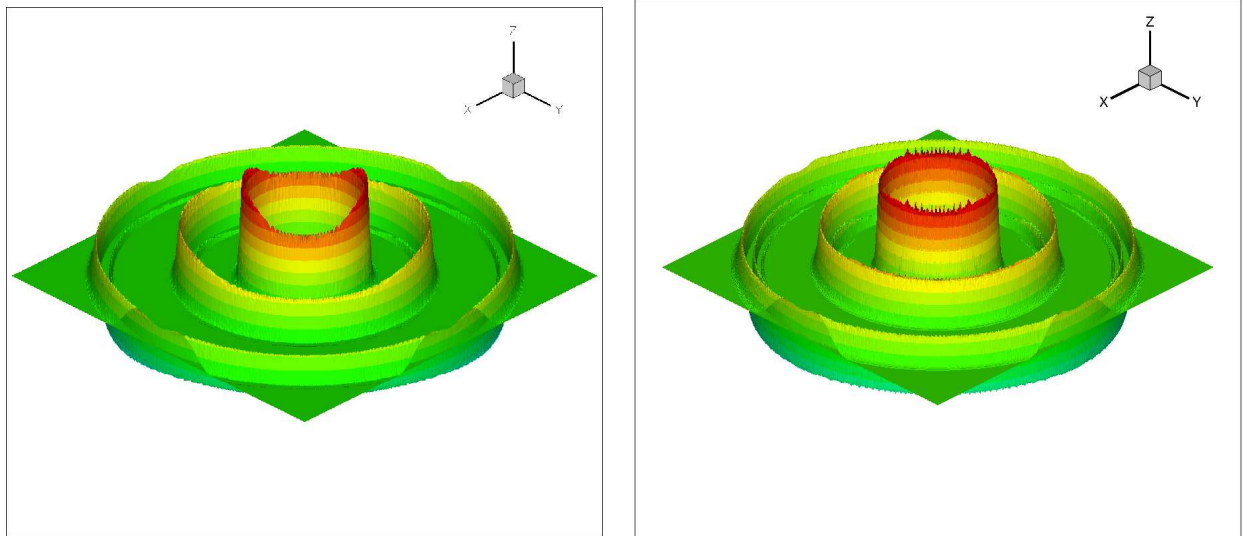


FIGURE 4.33 – Pulse gaussien ρT à $t = 0,003$, $t = 0,006$ et $t = 0,01$. Maillage P2 à droite, P1 à gauche

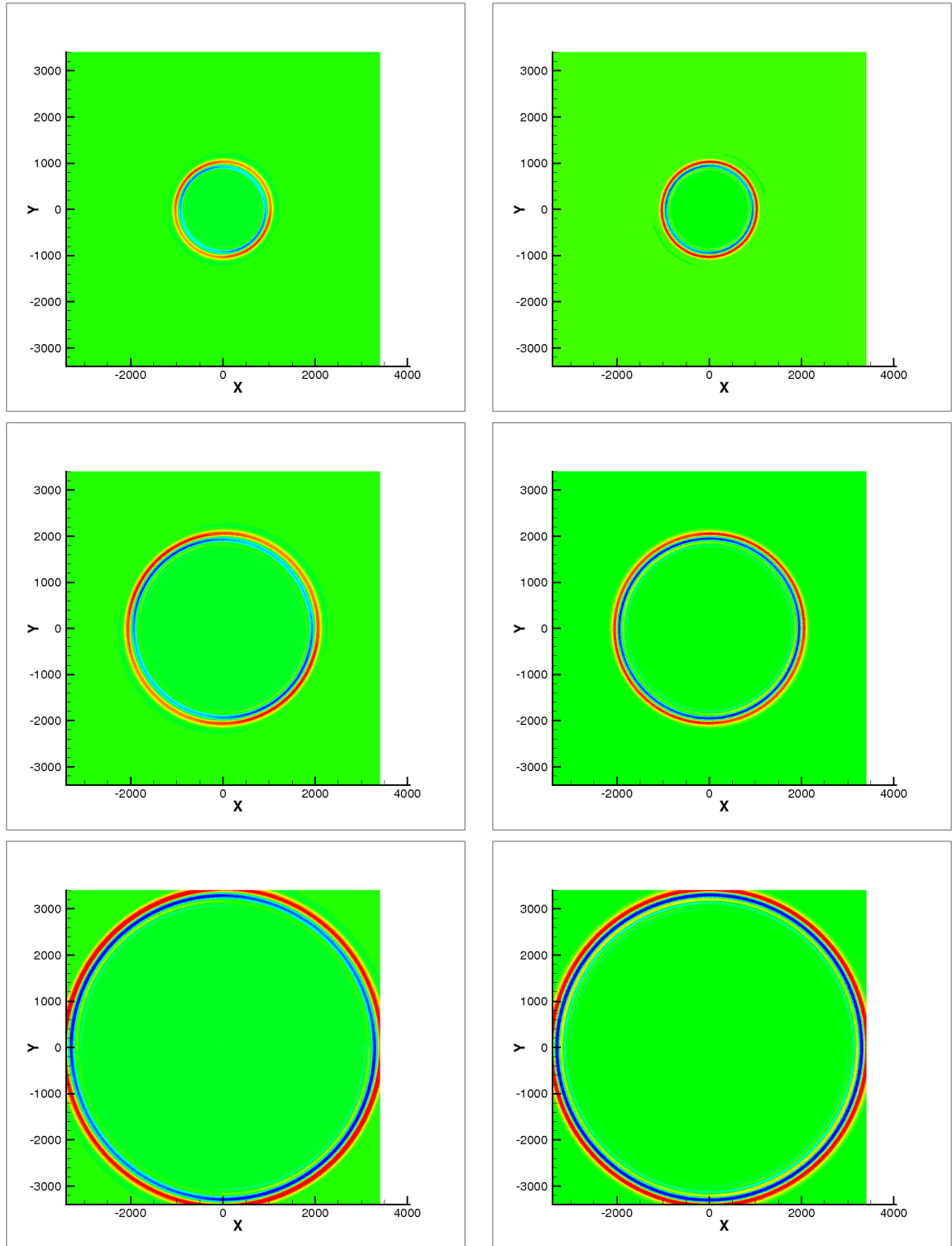


FIGURE 4.34 – Pulse gaussien ρT à $t = 0,003$, $t = 0,006$ et $t = 0,01$. Maillage P2 à droite, P1 à gauche

(Fig. 4.33) montre l'évolution du pulse à $t = 0,003$, $t = 0,006$ et $t = 0,01$. On représente la pression. On peut noter aussi avec (Fig. 4.34) que le pulse atteint bien le bord du domaine à $t = 0,01$.

On peut noter une représentation plus uniforme du pulse en utilisant les éléments de degré plus élevé. Ceci est plus particulièrement dû à une meilleure représentation du pulse initial avec les éléments P2.

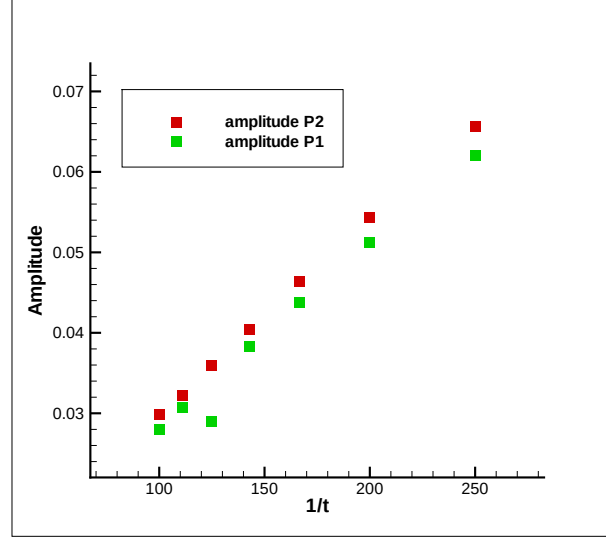


FIGURE 4.35 – Pulse gaussien décroissance de l’amplitude $\Delta(\rho T)$ au cours du temps.

L’amplitude du pulse doit décroître en $\frac{1}{d}$ avec $d = c_0 t$, t le temps de la simulation. On trace l’évolution de $\Delta(\rho T)$ en fonction de $\frac{1}{t}$.

La décroissance est bien respectée. Il semble que l’amplitude soit un peu plus grande pour les éléments P2, ce qui est un résultat attendu. En revanche on peut remarquer une création d’oscillation en amont de l’onde plus prononcée dans le cas P2 que dans le cas P1. Ces oscillations sont, probablement, des résurgences du phénomène de *Gibbs* lié à l’interpolation.

4.9 Cas *Navier-Stokes* avec modèle de turbulence

On propose ici des cas tests 2D et 3D de calculs *Navier-Stokes* dans des conditions à haut nombre de *Reynolds* avec un modèle de turbulence.

Les cas tests à haut nombre de *Reynolds* pose un problème de taille, à savoir la nécessité de recourir à des modèles de turbulence afin de modéliser correctement le comportement de la couche limite. Sans cet ajout, les résultats obtenus en terme de frottements sont souvent sous-évalués (voir [Les97]).

On s’intéresse, dans notre cas, à deux modèles de turbulence décrits dans la section 2.2, à savoir le modèle $k - \epsilon$ (Bicouche) et le modèle *Spalart-Allmaras*. Ces modèles ont pour fonction de donner une estimation de la viscosité turbulente μ_t .

Le système que l’on résout est alors :

$$\begin{cases} L(\mathbf{u}, \mu_t) = 0 \\ T(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = 0 \\ \mu_t = f(\boldsymbol{\sigma}) \end{cases} \quad (4.1)$$

$\mathbf{u}$ sont les variables des équations de *Navier-Stokes* et $\boldsymbol{\sigma}$ les variables du modèle de turbulence. On résout ces deux problèmes de façon découlée. Dans le cas *Navier-Stokes* on considère le

champ μ_t comme fixe et dans le cas des équations de la turbulence on considère le champ des variables de *Navier-Stokes* comme fixe.

La raison qui motive le traitement des équations de façon découplée est double.

En traitant ces équations ainsi on peut utiliser des schémas différents. De plus l'implicitation du problème couplé nécessiterait la dérivée de la fonction $\mu_t = f(\sigma)$, or f est fortement non-linéaire, de même que $T(\mathbf{u}, \sigma)$.

Cette simplification nous permet une plus grande liberté sur le traitement de la turbulence. En revanche on peut se poser la question de la stabilité et de la robustesse du problème obtenu.

Nous commenterons les ajustements nécessaires et la difficulté pour obtenir des résultats dans le cas général.

4.9.1 RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79°, Reynolds=6.5 10⁶

Pour ce cas test on distingue deux approches.

- Approche 1 : Turbulence avec le maillage équivalent $P1$

Les premiers résultats obtenus pour ce cas test ont été faits en calculant le champ de turbulence μ_t sur le maillage équivalent $P1$ du maillage d'ordre élevé.

Cette méthode a permis, dns un premier temps d'évaluer l'effet de la résolution des équations de *Navier-Stokes* avec une méthode d'ordre élevé tout en gardant le schéma classique pour la turbulence.

On peut noter que le maillage utilisé (Fig. 4.36) pour ce cas test comporte des éléments extrêmement étirés en proche paroi et dans le sillage avec un ratio pouvant aller jusqu'à 2 10⁶.

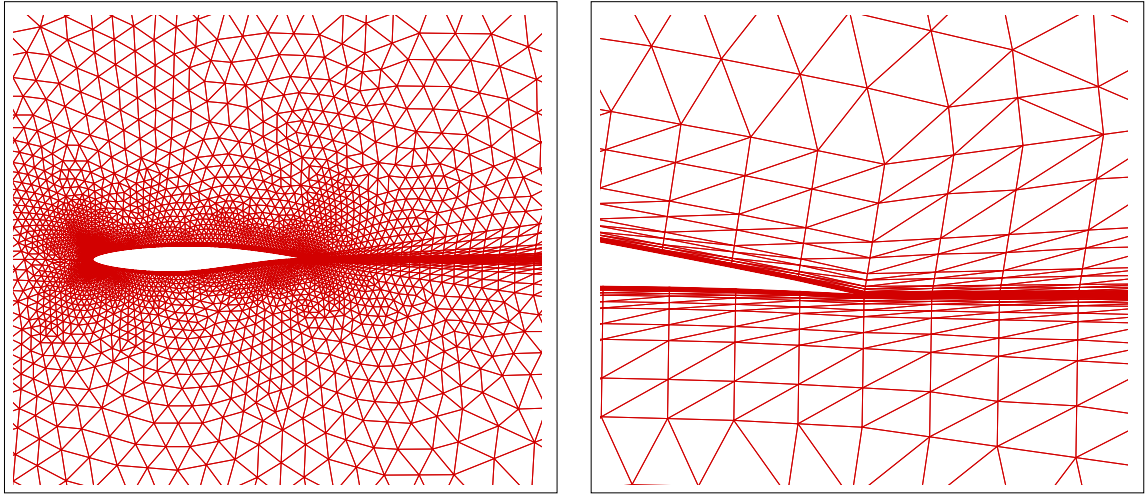


FIGURE 4.36 – Maillage du profil RAE2822

Cette approche réussit à produire des résultats sans précautions particulières à prendre sur le CFL choisit. Le calcul est considéré convergé lorsqu'il n'y a plus d'oscillations des efforts calculés au cours du calcul.

L'aspect très allongé des éléments ne semble pas être un problème pour le schéma SUPG en ordre élevé ni pour le schéma RDS utilisé pour résoudre la turbulence.

On présente ici les résultats obtenus ((Fig. 4.37), (Fig. 4.38)) pour des maillages $P1$, $P2$ et $P3$ et leurs équivalents $P1$. Le modèle de turbulence est le $k - \epsilon$ (Bicouche).

Les maillages utilisés peuvent être considérés comme particulièrement grossier pour ce type de cas test. De plus aucun effort n'a été fait pour capturer au mieux le choc de l'extrados.

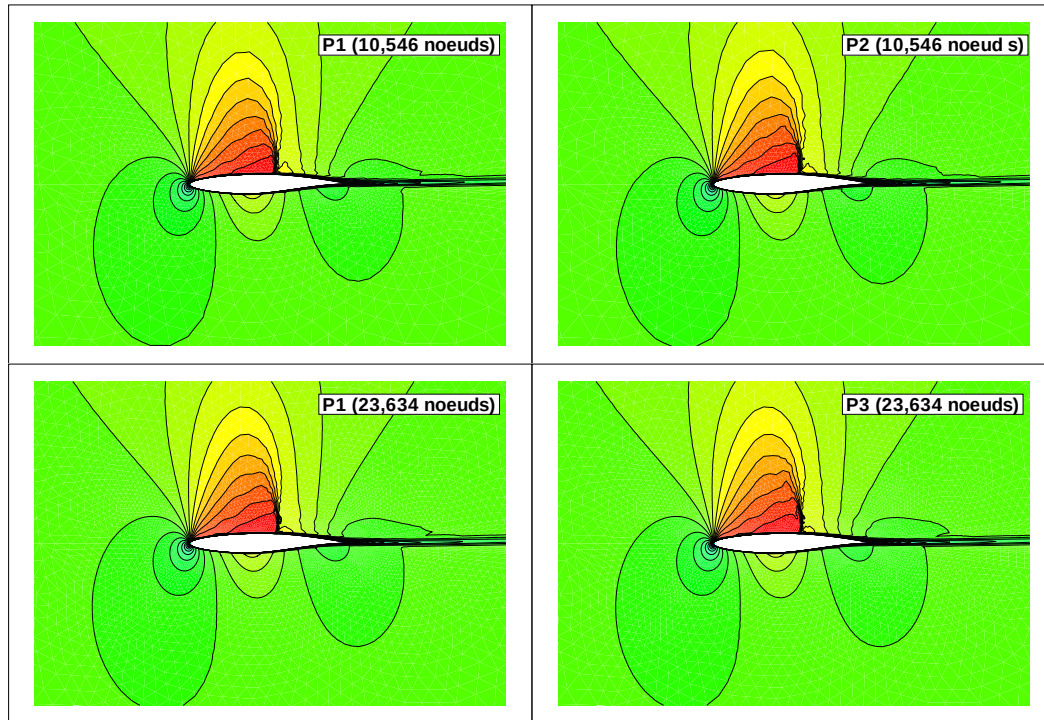


FIGURE 4.37 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$. Contours de Mach sur les maillages $P1$ iso- $P2$ et $P2$ et les maillages $P1$ iso- $P3$ et $P3$

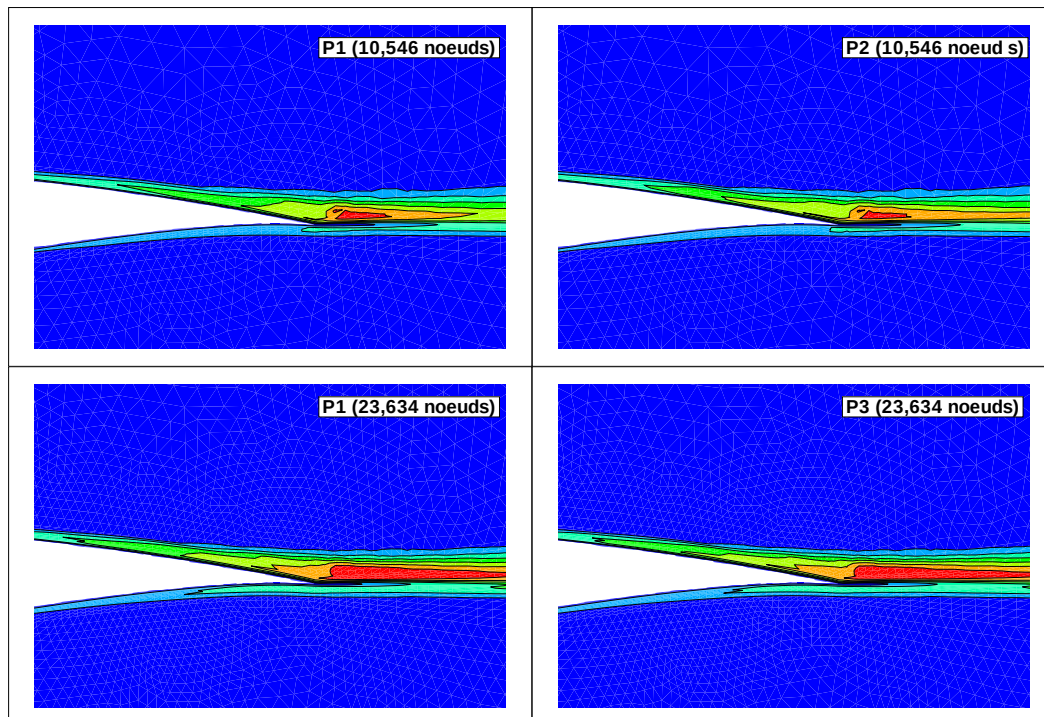


FIGURE 4.38 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$. Contours de μ_t sur les maillages $P1$ iso- $P2$ et $P2$ et les maillages $P1$ iso- $P3$ et $P3$

On peut remarquer qu'il n'y a quasiment aucune différence entre les calculs d'ordre élevé et leur équivalent $P1$.

Pour confirmer cette tendance on refait une étude de convergence en maillage. L'étude de convergence ((Fig. 4.39) et (Fig. 4.40)) est faite sur le même principe que dans le cas *Navier-Stokes* précédent.

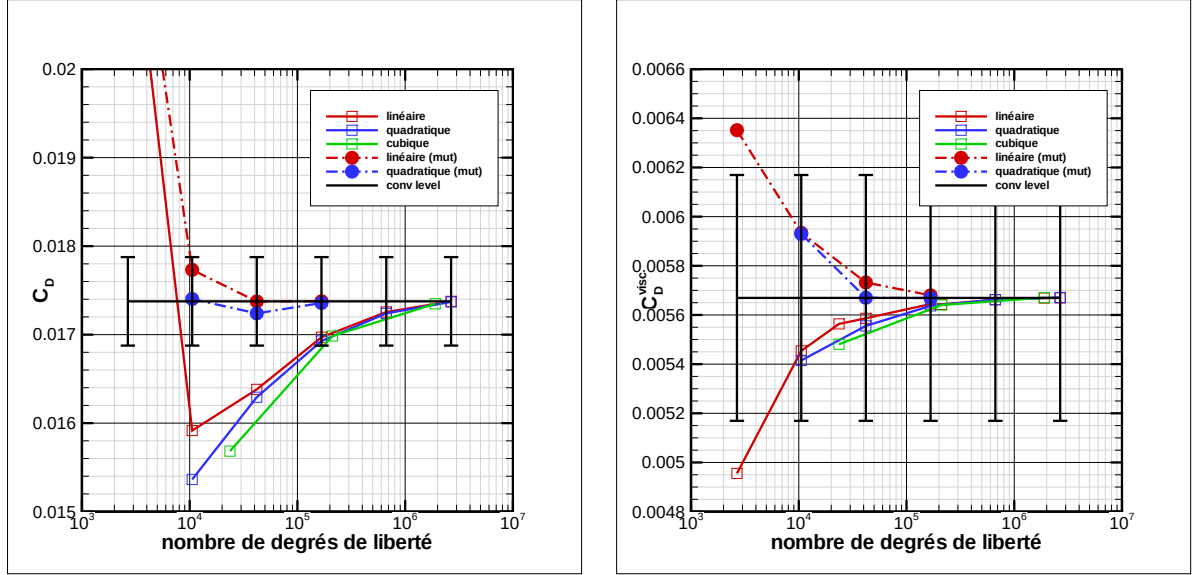


FIGURE 4.39 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$. Convergence de la traînée C_D et de la traînée visqueuse C_D^{visc} .

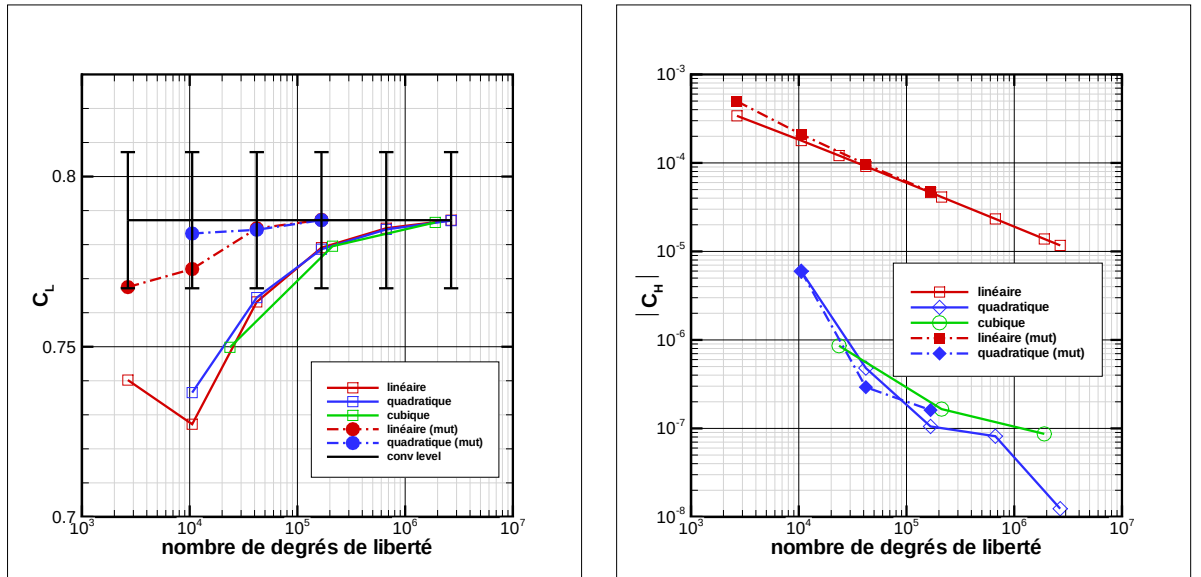


FIGURE 4.40 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$. Convergence de la portance C_L et du flux de chaleur pariétal C_H en échelle logarithmique.

On peut noter que les trois schémas convergent similairement vers les valeurs asymptotiques. La seule donnée qui échappent à ce comportement est le flux de chaleur qui converge bien plus rapidement en utilisant les méthodes d'ordre élevé. Néanmoins contrairement au cas uniquement *Navier-Stokes* précédent, il n'y a pas de différence entre le *P2* et le *P3*, ce qui dénote tout de même de l'influence de la façon dont on calcule la variable de turbulence μ_t .

Afin de simuler un modèle de turbulence d'ordre élevé, on utilise un champ de μ_t obtenu grâce au calcul sur le maillage le plus fin (2669536 noeuds). On indique l'étude de convergence en ligne pointillée sur (Fig. 4.39) et (Fig. 4.40).

L'effet est notable et la convergence des efforts s'en trouve fortement modifiée.

Ces résultats tendent à montrer qu'il est nécessaire d'avoir recours à un schéma d'ordre élevé pour la turbulence afin d'observer une amélioration notable comme dans le cas *Euler* ou laminaire.

- Approche 2 : Turbulence avec un schéma d'ordre élevé

On peut citer les travaux sur des méthodes *Discontinuous Galerkin* qui ont été faites dans ce sens [BCM05] et [OD09].

Les résultats de la première approche tendant à montrer que l'implémentation de schémas d'ordre élevé pour la turbulence semble indispensable, une première tentative d'implémentation de schémas de type RDS, décrit dans la section 1.2.4, pour résoudre la turbulence a été tentée. Dans notre cas des problèmes de stabilité sur le cas RAE ont été à déplorer et les résultats n'étaient pas à la hauteur des attentes. Les raisons sont en partie les suivantes :

- Les schémas RDS d'ordre élevé telles qu'ils ont été proposés précédemment ne sont pas monotones, d'où la nécessité de remettre les valeurs négatives de turbulence à des valeurs seuils.
- La reconstruction des gradients telle qu'on la propose dans la première partie de la section 3.3.4.1 ne permet pas d'écrire correctement une matrice implicite aux éléments.

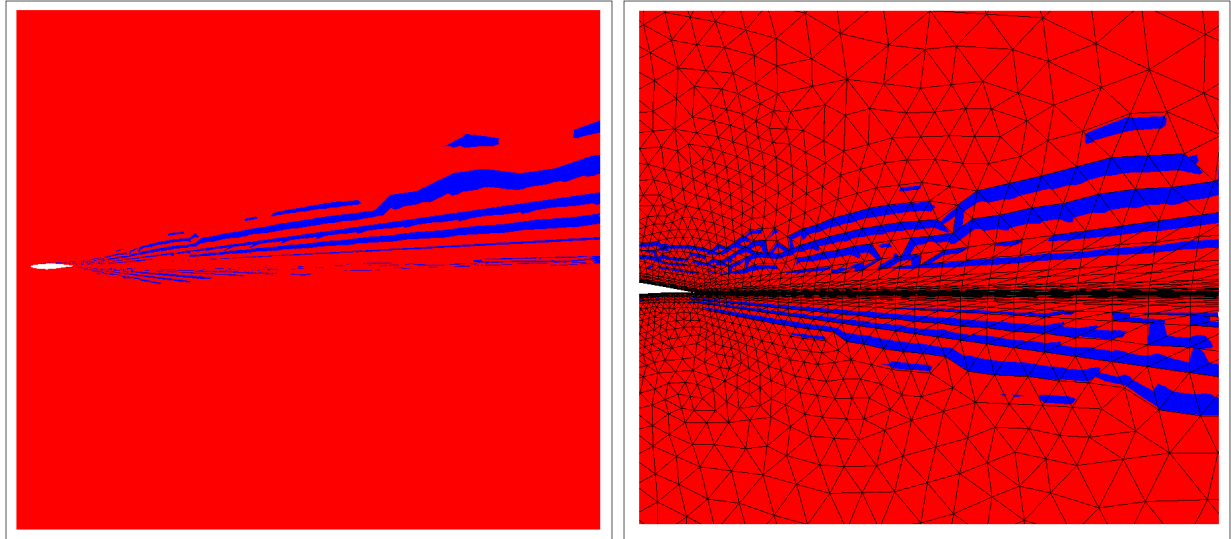


FIGURE 4.41 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$. Calcul sur un maillage composé d'éléments *P2* avec un modèle de turbulence *Spalart-Allmaras*. Contours de μ_t la zone rouge représente les valeurs positives et la zone bleue les valeurs négatives. La solution est interpolée sur un maillage *P6*, le maillage représenté est le maillage équivalent *P1*. Si la solution n'était pas interpolée elle apparaîtrait positive partout puisque sur chaque degré de liberté $\mu_t > 0$

- Les valeurs des variables turbulentes ayant des variations fortes il n'est pas rare d'être dans des situations où le champ μ_t est strictement positif sur l'ensemble des degrés de liberté mais il devient négatif aux points d'intégration (voir (Fig. 4.41)).

Il est donc aussi nécessaire d'ajuster les valeurs aux points d'intégration, en les remettant à une valeur seuil, afin de ne pas être, par exemple, dans une situation où la diffusion est négative.

Pour ces raisons et par simplicité, la turbulence a été réimplémentée avec un schéma SUPG + un terme de capture de chocs. Les dérivées sont recalculées aux éléments avec une projection-L2 (voir 3.3.4.2). En ce qui concerne le terme de capture de chocs l'approche suivie est celle de [LR06], [BEVG07].

Cette approche SUPG + capture de chocs + projection L2 permet d'avoir des données propres aux éléments et de définir une matrice implicite locale aux éléments.

Ce travail a été réalisé uniquement sur le modèle de turbulence *Spalart-Allmaras*.

On peut anticiper un certain nombre de problèmes liés à ces modifications du champ μ_t et de ses valeurs aux points d'intégration. On peut prédire une destruction des propriétés d'ordre, des comportements de couplage entre la résolution des équations de *Navier-Stokes* et de celles de la turbulence menant à des instabilités.

Les tentatives réalisés sur les maillages grossiers du profil RAE2822 ont permis d'obtenir des résultats propres à l'analyse. On présente ici les résultats comparés des calculs effectués sur le maillage P1 et sur le maillage P2 (La solution est interpolée sur un maillage P6, le maillage représenté est le maillage équivalent P1).

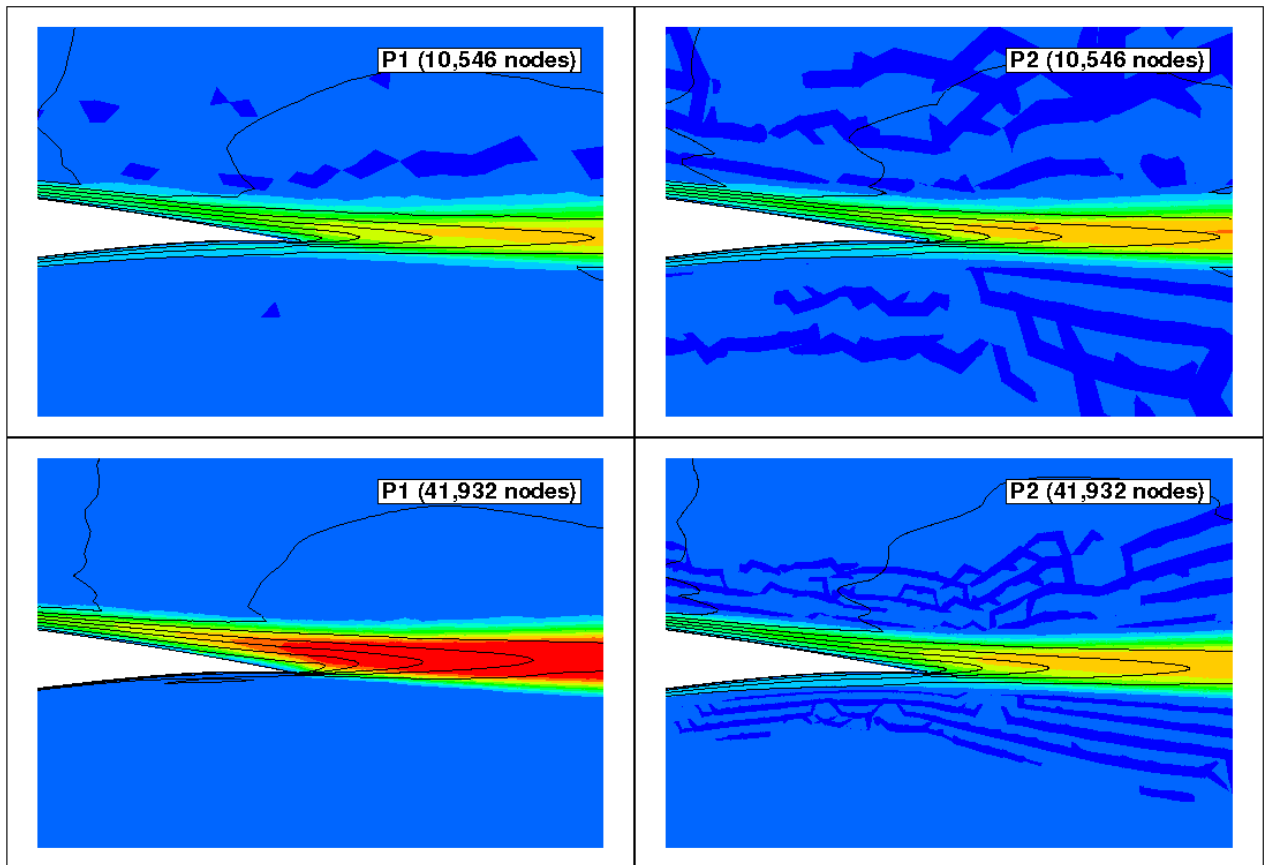


FIGURE 4.42 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79°, Reynolds=6.5 10⁶. Modèle de turbulence *Spalart-Allmaras*. Contours de μ_t et isoligne de Mach.

L'allure globale de la solution est relativement la même. Dans le cas du maillage le plus grossier, on remarque un niveau de μ_t maximum, dans le cas P1, moins élevé que pour le maillage P2. Tendance qui s'inverse pour le maillage raffiné, mais qui semble être lié au fait que la turbulence ne se développe pas sur l'intrados du profil contrairement aux autres simulations. Ceci est probablement lié à une mauvaise stabilisation (terme de capture de chocs) du schéma dans cette zone.

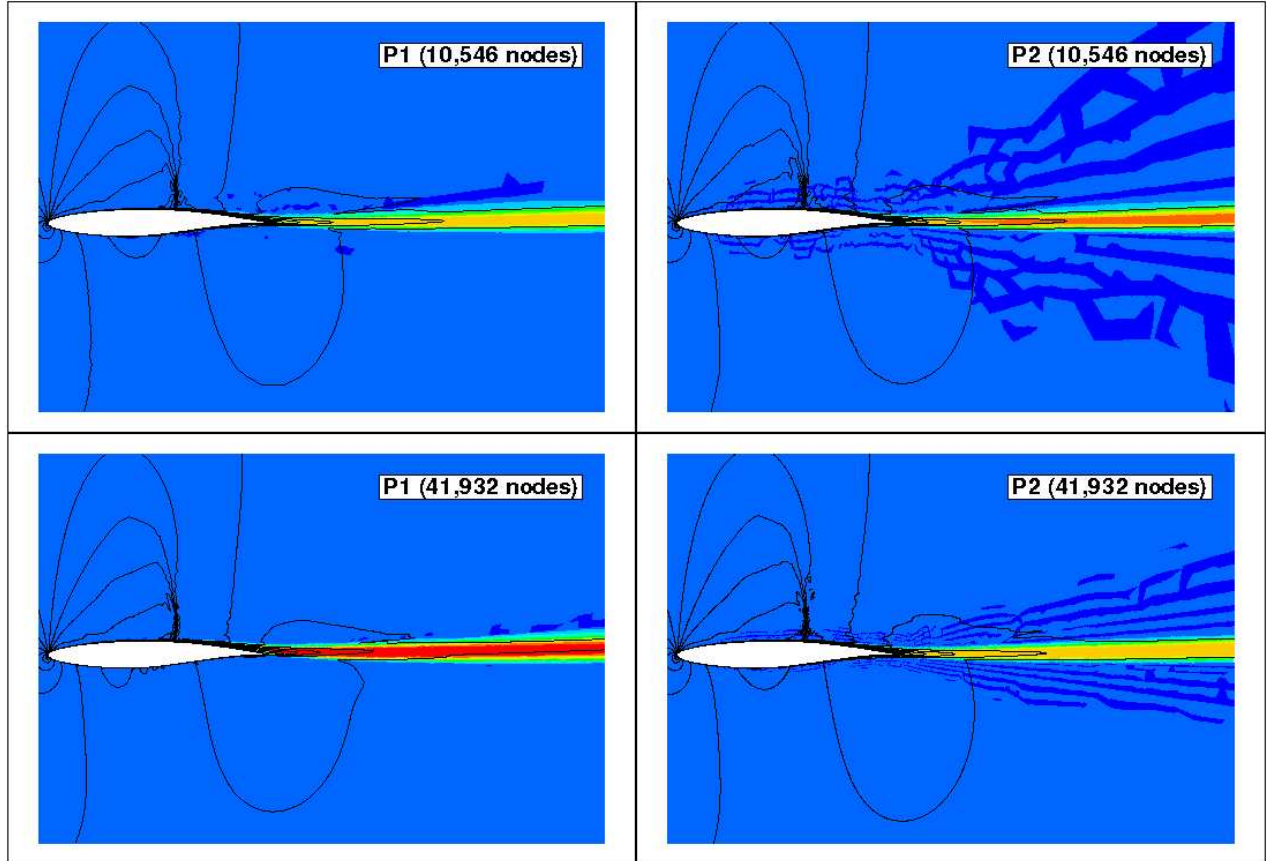


FIGURE 4.43 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$. Modèle de turbulence *Spalart-Allmaras*. Contours de μ_t et isoligne de Mach.

La vue d'ensemble (Fig. 4.44) permet d'apprécier la convection du champ de μ_t . L'utilisation du schéma d'ordre élevé permet d'être moins diffusif et conserve mieux le champ, remarque qui se vérifie sur cette figure.

En ce qui concerne les valeurs de C_D et de C_L on obtient les valeurs suivantes :

- $C_D^{P1} = 0.01875$, $C_L^{P1} = 0.81923$
- $C_D^{P2} = 0.01870$, $C_L^{P2} = 0.81754$

Les valeurs obtenus sont quasiment identiques en terme de C_D et de C_L pour les maillages P1 et P2 grossiers. Par rapport à la première approche, les niveaux de C_D et de C_L sont supérieurs, mais ne sont pas plus "proches" de la valeur asymptotique.

Pour tenter un effet de maillage on a fait le calcul sur un maillage iso-P2 P2 et P1. Les C_D et C_L obtenus sont :

- $C_D^{P1} = 0.01855$, $C_L^{P1} = 0.81010$
- $C_D^{P2} = 0.01900$, $C_L^{P2} = 0.82615$

Ses valeurs tendent à diverger de la valeur asymptotique obtenue grâce à l'approche 1 pour le P2 et à converger pour le P1.

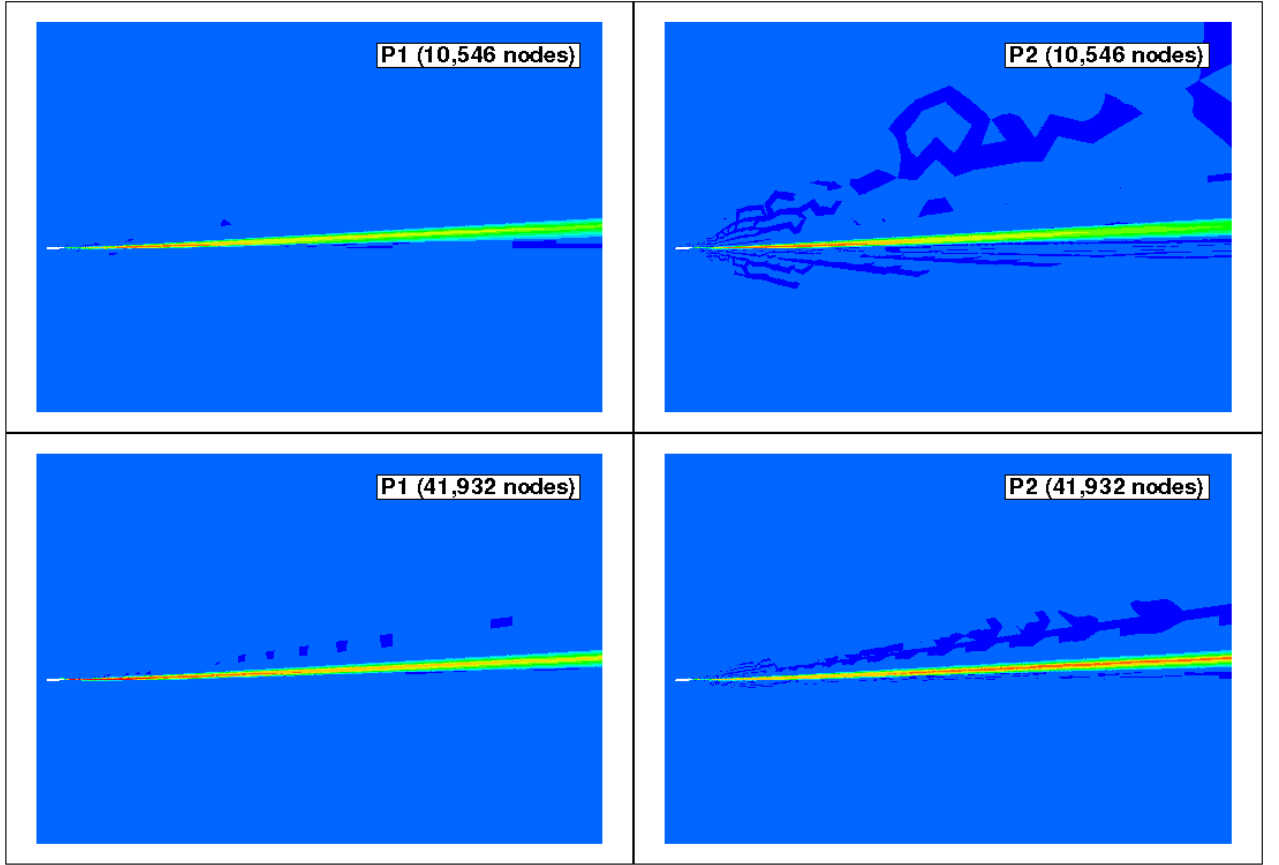


FIGURE 4.44 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$. Modèle de turbulence *Spalart-Allmaras*. Contours de μ_t .

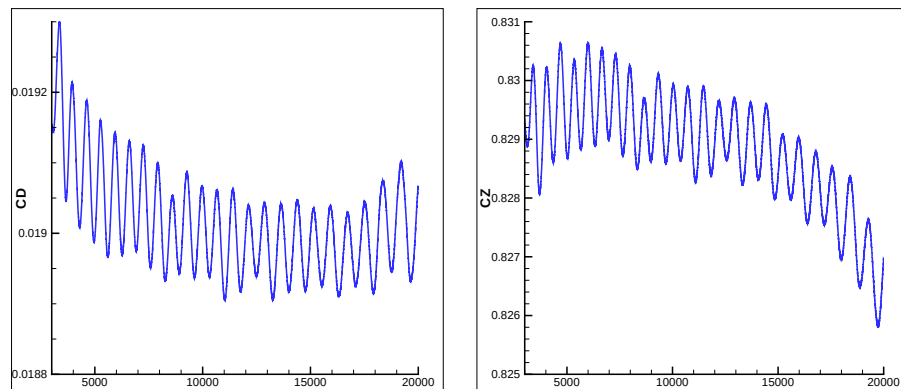


FIGURE 4.45 – RAE2822, Mach=0.734, angle incidence = 2.79° , Reynolds= $6.5 \cdot 10^6$. Evolution de C_D et de C_z au cours du calcul sur le maillage comprenant 41932 composés d'éléments *P2*.

Ses informations sont à prendre avec beaucoup de précautions. En effet le calcul ne se stabilise pas et on observe des oscillations sur la valeur du C_D et du C_L , voir (Fig. 4.45) l'évo-

lution du C_D et du C_L dans le cas du calcul P2 sur le maillage comprenant 41932 noeuds. Les résidus n'évoluent plus tellement au bout de 2500 iters mais on poursuit le calcul pour observer cette instabilité dans les valeurs de C_D et de C_L .

L'utilisation d'un schéma d'ordre élevé n'apporte pas la solution escomptée au problème de la convergence vers une valeur asymptotique de C_D et de C_L .

Le schéma SUPG et/ou l'utilisation des fonctions d'interpolation de degré plus élevé n'améliorent pas les résultats et obligent à recourir à un certain nombre d'artifices numériques (limitation de valeurs, vérification de la positivité aux points d'intégration,...) qui ne favorisent pas la convergence du problème et qui empêche l'obtention d'un schéma robuste.

De plus cette analyse rejoint les conclusions de [OD09], dans le sens où les schémas d'ordre élevé ne sont pas appropriés pour résoudre des problèmes dont les solutions ne sont pas régulières, ce qui est le cas dans certaines zones pour le modèle *Spalart-Allmaras*.

4.9.2 Géométries complexes. Navier-Stokes 3D avec modèle de turbulence

Ces derniers cas tests sont une tentative d'application des méthodes décrites ci-avant à un cas industriel 3D sur une géométrie complexe. Ces cas tests sont une synthèse des problèmes que l'on peut rencontrer en utilisant ces méthodes.

Dans un premier temps et à cause de la méthodologie de création de maillage, il est nécessaire d'avoir un maillage suffisamment grossier pour ne pas créer un maillage, composé d'éléments de degré plus élevé, ayant un trop grand nombre de degré de liberté.

Pour ce faire, un maillage de *Falcon 900EX* de 2 512 073 noeuds et un maillage de *Falcon 7X* de 3 023 831 noeuds ont été utilisés. Les deux maillages de degré élevé P2 créés à partir de ces maillages comportent respectivement 19 905 887 noeuds et 23 999 404 noeuds.

Dans un premier temps les calculs ont été effectués sur le maillage non déformé (voir méthodologie section 3.5).

Les calculs sur le *Falcon 900EX* ont été faits avec les conditions suivantes Mach= 0.8, angle d'incidence = 2° , Reynolds=14.5 10^6 .

En ce qui concerne le maillage *P1* on utilise un seul point d'intégration et pour le maillage *P2* on utilise 8 points d'intégration. Etant donné que le ratio entre le nombre d'éléments des deux maillages est de 8 le coût devrait être sensiblement le même. Or la résolution du système linéaire a aussi un coût non négligeable et la matrice implicite étant de diagonal non nulle plus grande, le système est plus long à résoudre (voir discussion 4.2). Il en résulte un surcoût d'environ 70% pour le calcul sur le maillage *P2* en utilisant les mêmes CFL pour les deux calculs. La place mémoire requise augmente elle aussi d'environ 60%, notamment à cause du stockage de la matrice implicite.

(Fig. 4.46) représente les contours d'entropie en aval de l'avion dans la région du moteur. On remarque une meilleure définition de la structure du sillage en utilisant des éléments de degré plus élevé. On montre aussi sur (Fig. 4.47) l'évolution du sillage en aval de l'avion et la meilleure définition du tourbillon de pointe.

Pour une discussion plus qualitative, il est d'usage d'analyser les calculs en comparant les calculs d'efforts par une approche intégration peau avec une approche champ lointain [VdVD04]. La différence entre les deux approches est appelée la "trainée parasite" ou "spurious drag".

Sur le maillage de référence la trainée parasite est de l'ordre de 33 points de trainée (10^{-4}). Avec le maillage *P1* iso-*P2* cette trainée parasite tombe à 8 points de trainée. Enfin pour le calcul sur le maillage *P2* elle atteint 1 point de trainée.

Ce résultat, bien qu'encourageant est à nuancer par le fait que les maillages n'ayant pas été reprojetés, les résultats de calcul de trainée surestiment grandement la trainée, au point que le calcul n'est pas exploitable.

La deuxième étape a donc consisté en l'étude d'une méthode pour obtenir les maillages courbes. Cette démarche a été abordée en détail dans la section 3.5.2. A l'issu de cette étape, le maillage du *Falcon 7X* a été correctement reprojeté.

Une série de calcul a donc été effectuée sur ce maillage déformé avec le modèle de turbulence résolu sur le maillage *P1* équivalent (voir Approche 1 de 4.9.1).

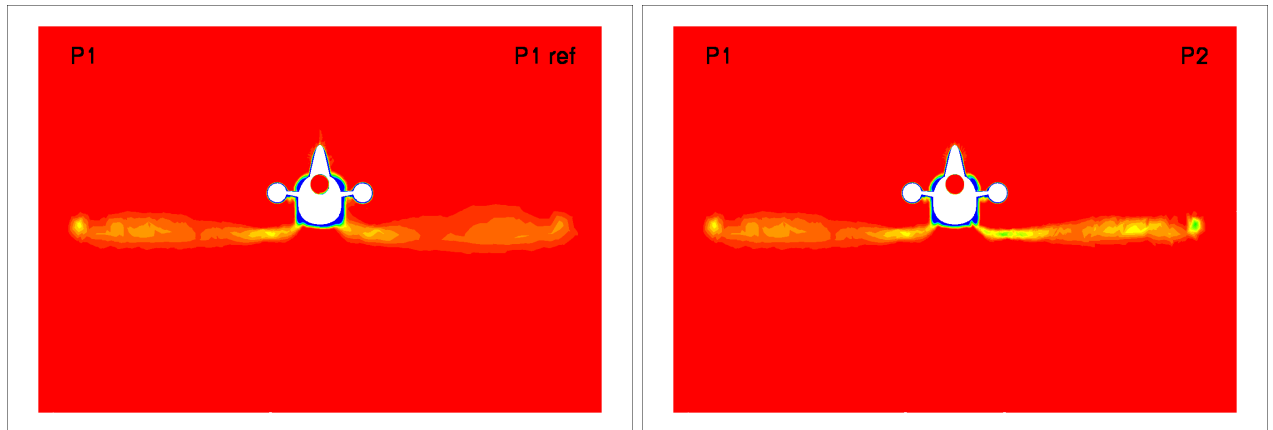


FIGURE 4.46 – *Falcon 900EX* Mach= 0.8, angle d'incidence = 2° , Reynolds= $14.5 \cdot 10^6$. Contours d'entropie dans une coupe en aval de l'avion. A gauche comparaison des calculs entre le maillage de référence 2 512 073 noeuds et le maillage iso-*P2* 19 905 887 noeuds. A droite comparaison entre le maillage iso-*P2* et le maillage *P2*.

Dans le cas résolution de *Navier-Stokes* et de la turbulence sur le maillage *P1*, le calcul se déroule correctement, en revanche dans le cas *Navier-Stokes* en ordre élevé et la turbulence sur le maillage *P1* équivalent, le résidu du schéma associé aux équations de *Navier-Stokes* explose brusquement.

Suite à cet échec, des tests ont été menés sur un maillage d'Aile M6 et d'un profil RAE2822 balbutié afin d'obtenir un maillage 3D de profil sans flèche. Dans tous les cas le calcul ordre élevé explose brusquement.

Il semble, après l'étude sur l'implémentation du schéma numérique SUPG pour la turbulence dans le cas 2D, que ce phénomène se produise dans les cas où la viscosité turbulente μ_t aux points d'intégration devient fortement négatif (à cause de l'interpolation quadratique) au point d'avoir une viscosité négative dans les équations de *Navier-Stokes*, bien que le champ μ_t discret soit positif.

4.10 Bilan cas *Navier-Stokes* avec modèle de turbulence

Nous avons mené des tests sur des cas 2D et 3D *Navier-Stokes* à haut Reynolds avec modèle de turbulence $k - \epsilon$ et *Spalart-Allmaras*.

Dans un premier temps les calculs du modèle de turbulence ont été faits sur le maillage *P1* équivalent au maillage *P2*. On montre que l'apport de l'ordre élevé est négligeable en ce qui concerne l'évaluation de la trainée de frottement et la trainée visqueuse, ainsi que la portance. La cause semble donc être l'utilisation du schéma d'ordre insuffisant pour le modèle de turbulence.

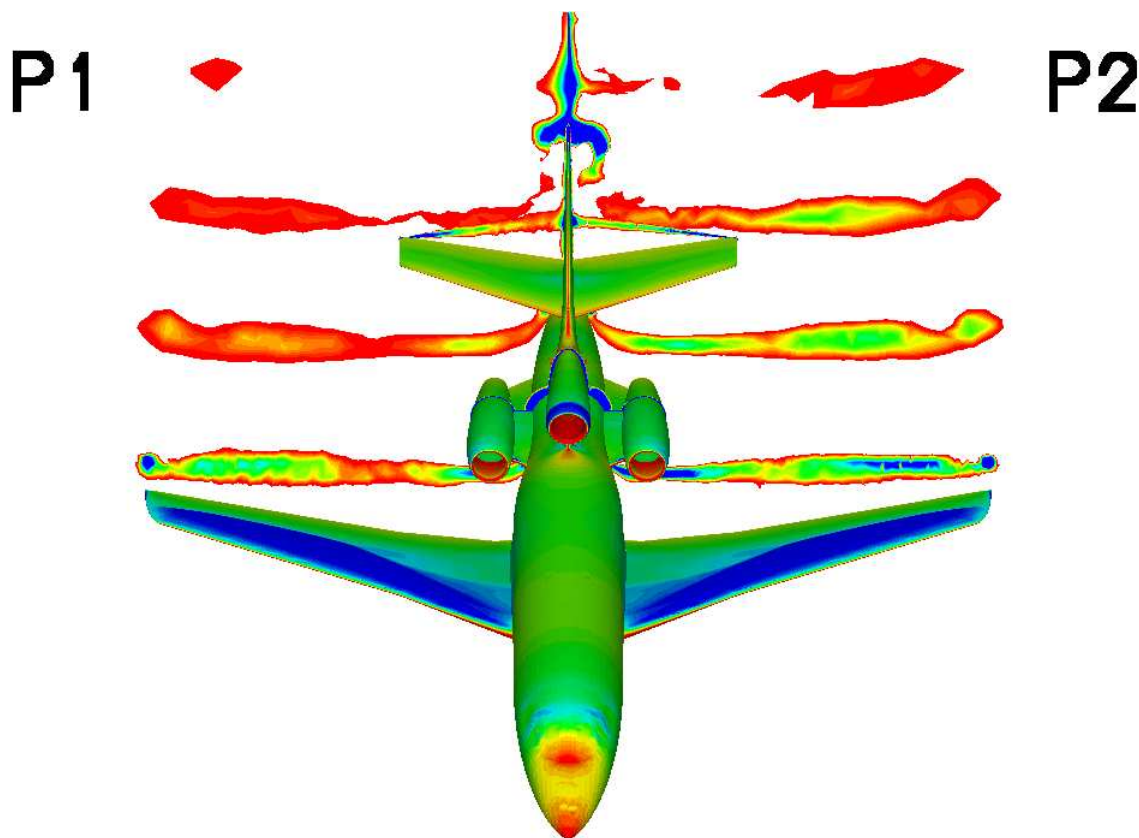


FIGURE 4.47 – *Falcon 900EX* Mach= 0.8, angle d'incidence = 2° , Reynolds= $14.5 \cdot 10^6$. Contours d'entropie. Coupes successives en aval de l'avion. Comparaison entre les résultats sur le maillage *P2* et le maillage *P1*.

Néanmoins dans le cas 3D, un calcul a été mené bien, sur une géométrie d'avion complet avec un maillage non déformé, et on montre par une étude comparant la traînée calculée en paroi et celle évaluée en champ lointain une meilleure qualité des calculs d'ordre élevé dans des proportions suggérant un effet de l'ordre du schéma.

Nous rencontrons des difficultés quant à l'obtention de résultats sur les maillages déformés. Il semble que l'explication soit due à des valeurs négatives de la viscosité aux points d'intégration malgré un champ μ_t discret strictement positif, ceci à cause de l'interpolation.

Enfin des implémentations de schémas numériques de type SUPG avec capture de chocs et limiteur ont été réalisés pour le modèle de turbulence *Spalart-Allmaras*.

On observe des problèmes de stabilité et une mauvaise convergence des résidus des équations *Navier-Stokes* et des résidus des équations de la turbulence. Ce comportement est valable pour tout ordre. Une adaptation des paramètres du schéma est à envisager pour différents cas tests.

En somme, il apparaît que l'interpolation de degré plus élevé ne convient pas aux propriétés de non-régularité des solutions du champ turbulent et des variables des modèles de turbulences. En rajoutant à cela que le caractère non-linéaire et le couplage faible entre les équations de *Navier-Stokes* et celle de la turbulence rendent les problèmes difficiles à identifier.

4.11 Conclusion

Ce chapitre nous a permis, dans un premier temps, de formaliser le besoin et la motivation inhérents à l'utilisation des schémas d'ordre élevé.

Nous avons établi une estimation du coût de calcul en fonction d'une taille de barre moyenne du maillage utilisé.

$$C_{out} \simeq \tilde{C} h^{-d} f(h^{-d}) \simeq \tilde{C} h^{-1.8d}$$

L'erreur théorique lié à un maillage ayant cette taille de barre étant de $E = \tilde{e} h^{k+1}$, avec k le degré du polynôme d'interpolation, nous en déduisons une efficacité numérique :

$$Eff \simeq \frac{1}{C_{out} E} \simeq A h^{1.8d - (k+1)}$$

Ainsi quand k augmente l'efficacité numérique du code augmente.

Nous avons pu vérifier ces estimations de coût de calcul et d'erreur théorique sur un certain nombre de cas pratiques. Nous avons mis en évidence la perte de l'ordre dans le cas d'éléments "trop déformés" et aussi, à travers le cas d'advection de chocs, que les schémas d'ordre élevé semblent ne pas trop détériorer les solutions avec singularités.

Ces premières vérifications faites, des premiers cas tests *Euler* nous ont permis de valider un certain nombre de propriétés vues précédemment sur des cas de systèmes.

Nous avons pu constater la sensibilité du calcul aux paramètres suivants :

- Mauvaise estimation du paramètre τ de stabilisation du schéma SUPG.
- Le choix de la règle d'intégration est primordial afin de ne pas annihiler les propriétés et aussi afin d'éviter un surcoût de calcul.
- La reprojection des points rajoutés, pour obtenir le maillage de degré élevé, sur la géométrie réelle est très importante pour éviter de générer de l'erreur en proche paroi.

L'effet du schéma d'ordre élevé se fait sentir quand on regarde l'évolution des valeurs de trainée et de portance en raffinant le maillage. On constate une convergence accrue vers la valeur asymptotique en utilisant les schémas d'ordre élevé.

Dans un deuxième temps, la démarche a été validée sur un cas test à bas nombre de *Reynolds*. L'amélioration a pu être constatée sur les lignes d'iso-pression qui présentent une forte oscillation aux abords de la couche limite. Ce défaut tend à être supprimé grâce à l'utilisation des schémas d'ordre élevé, de la même manière que les repliements des iso-lignes de *Mach* dans le cas *Euler*.

Un test de propagation d'un pulse gaussien de pression a été fait afin de montrer la possibilité d'effectuer des calculs instationnaires. On a pu noter une meilleure évaluation du niveau du pulse en ordre élevé, mais il semble que le schéma en temps ne soit pas adapté.

Il a ensuite été fait un test *Large Eddy Simulation* qui n'a pas été mené à son terme pour des raisons de temps de calcul. Nous soulignons simplement que cette technologie est disponible en ordre élevé.

Enfin une tentative, sur des cas *Navier-Stokes* à haut *Reynolds* avec un modèle de turbulence a été menée.

Deux approches ont été suivies afin de résoudre les équations de *Navier-Stokes* et celles du modèle de turbulence. La première approche consistait à résoudre les équations de *Navier-Stokes* avec un schéma ordre élevé et de résoudre la turbulence sur un maillage équivalent linéaire avec un schéma RDS d'ordre 2.

Il en ressort que cette approche n'aboutit pas à une amélioration en terme de calcul de trainée et de portance d'un profil. En revanche sur un cas test d'avion complet, il a été noté une diminution de la trainée dite "spurious", qui résulte de la comparaison du calcul de trainée par

intégration peau et du calcul en champ lointain.

La deuxième approche a consisté en l'implémentation d'un schéma SUPG pour le modèle *Spalart-Allmaras*. De la même façon que pour la première approche, il n'y a pas eu d'amélioration à souligner, ceci pour un certain nombre de raisons qu'il restera à discuter :

- Caractère non-régulier des solutions des modèles de turbulences
- L'interpolation par des fonctions de degré plus élevé ne convient pas au champ turbulent car on crée des valeurs négatives indésirables aux points d'intégration.
- Les schémas d'ordre élevé ne sont pas monotones.
- Faible robustesse du couplage
- Fort caractère instationnaire des cas tests.

Un travail reste donc à faire sur la recherche de fonctions d'interpolation plus appropriées (Bézier, NURBS, ...), et sur les schémas numériques. Tout en gardant aussi à l'esprit que le caractère fortement non-linéaire des équations résolues pour les problèmes à haut *Reynolds* rendent l'attente d'une cohérence avec les estimations théoriques plutôt utopique.

Conclusion

Une étude de l'utilisation des méthodes d'ordre élevé en éléments finis continus pour des applications aérodynamiques a été présentée.

Elle s'est articulée autour d'une présentation de ces méthodes, puis d'une discussion autour de l'obtention des maillages nécessaires à leur utilisation, suivi d'une présentation des équations impliquées dans la résolution des problèmes liés à l'aérodynamique et enfin d'une discussion sur une succession de problèmes de complexité grandissante.

Les méthodes de résolution des équations différentielles partielles étudiées sont la méthode dite "streamline *Petrov-Galerkin* " (SUPG) et la méthode "Residual Distribution Scheme" (RDS). Ces deux méthodes reposent sur des fondements théoriques similaires dont le théorème central est celui de l'estimation de l'erreur. On a rappelé ce résultat qui lie l'erreur à la taille caractéristique d'un élément et au degré de la base d'interpolation de la solution. Ce résultat a été nuancé dans le cas des éléments isoparamétriques de degré supérieur ou égal à 2 fortement "déformés". En ce sens, on a pu noter une baisse de l'ordre de l'estimation d'erreur pour des éléments déformés, jusqu'à rejoindre l'estimation d'erreur obtenue pour des éléments linéaires.

L'étude du schéma SUPG nous a obligé à revoir le dimensionnement du paramètre de stabilisation τ . Le τ obtenu peut être caractérisé de "non-optimal" pour la solution exacte au problème 1D pour des éléments de degré supérieur ou égal à 2 et nous avons donné une estimation des valeurs de τ dans le cas des éléments de degré élevé.

Dans un deuxième temps, une analyse des termes principaux rencontrés dans les schémas SUPG et RDS a été faite afin d'estimer les règles d'intégration nécessaires à une bonne résolution du schéma numérique. On a calculé, dans ce cadre, le degré polynômial de chacun des termes du schéma et nous avons pointé l'apparition de termes non polynômaux dans le cas d'éléments isoparamétriques de degré supérieur ou égal à 2 pour une transformation géométrique non-linéaire.

Une description des propriétés des éléments finis de référence, des bases d'interpolation de *Lagrange* et de *Bernstein* a permis d'introduire la partie traitant la création de maillage. La notion de positivité des éléments a été abordée et une piste de vérification simple en 1D en passant par la base de *Bernstein* a été donnée, mais ce résultat est difficile à généraliser aux dimensions supérieures.

Une discussion liée à la reconstruction de gradients a permis de noter que les propriétés d'erreur étaient conservées. Cette reconstruction étant nécessaire à l'implémentation des schémas numériques, ce résultat permet d'assurer que l'ordre du schéma doit être conservé.

Les éléments de référence introduits, ils restaient à discuter de la création de maillages.

Le choix a été fait de garder l'avantage de bénéficier d'une suite de programme capable de créer des maillages linéaires. Ces maillages linéaires sont ensuite utilisés pour créer un maillage composé d'éléments de degré quelconque en ajoutant des degrés de liberté. Les degrés de liberté se trouvant sur une frontière sont reprojétés sur la géométrie réelle et on obtient un champ de déplacement que l'on utilise pour déformer le maillage complet afin d'obtenir le maillage final désiré. Cette déformation est faite en résolvant un problème d'élasticité linéaire.

Dans le cas de maillages 3D de type *Navier-Stokes*, il est nécessaire d'effectuer cette déformation sur le maillage de degré élevé et non pas sur le maillage équivalent linéaire, afin de ne pas obtenir une solution comportant des éléments négatifs. La raison semble tenir au sous-découpage des éléments courbes en éléments linéaires. Cette méthodologie permet, pour une frontière bien discrétisée, d'obtenir des maillages courbes sur des géométries relativement complexes (avion complet).

Les équations classiques de la mécanique des fluides rappelées, nous avons décrit la formulation utilisée dans le code numérique, à savoir une méthode SUPG appliquée aux équations sous leur forme entropique. On a souligné l'utilisation du solveur itératif GMRES (Generalized Minimal Residual) pour la résolution des systèmes linéaires. De plus, des modèles de turbulence ont été énoncés, $k - \epsilon$ et *Spalart-Allmaras*, et on a explicité la manière "couplé faiblement" qui est employée pour résoudre le couple d'équations *Navier-Stokes* + modèle de turbulence.

Dans un dernier temps, une variété de cas tests a été présentée. La validation des propriétés d'"erreur *a priori*" a été faite sur des cas tests académiques.

Les calculs *Euler* ont permis de confirmer l'importance des études faites sur les paramètres de stabilisation, de l'évaluation des degrés polynômiaux de chacun des termes du schéma et enfin de la reprojection sur la géométrie réelle des points rajoutés. On a pu constater un effet lié à l'utilisation des schémas d'ordre élevé sur le calcul des coefficients de portance et de trainée, ainsi qu'une amélioration de l'allure des iso-lignes de *Mach* grâce à ces schémas d'ordre élevé. On obtient des conclusions similaires pour les cas *Navier-Stokes* à bas nombre de *Reynolds*.

Il a été évoqué la possibilité de recourir à cette technologie pour les calculs *Large Eddy Simulation* sans qu'il soit montré de résultats dans ce sens pour des raisons de coût de calcul. On souligne néanmoins qu'il est possible, sans d'autres travaux sur les schémas, de faire ce type de calcul.

Pour terminer, des calculs hauts *Reynolds* ont été faits avec deux approches différentes. L'une consiste en la résolution de la turbulence par un schéma d'ordre 2 RDS sur le maillage linéaire équivalent et l'autre grâce à un schéma SUPG avec capture de chocs.

- La première approche n'a pas pu montrer d'amélioration probante sur les résultats de portance et de trainée. Il semble que l'effet d'ordre soit perdu. Néanmoins sur un cas 3D d'avion, une diminution de la trainée dite "spurious" a été constatée, marquant ainsi une amélioration de la qualité de la solution.
- La deuxième approche a échoué dans sa tentative à résoudre les problèmes soulevés par la première approche. De manière synthétique, ceci est dû au caractère peu régulier du champ de la viscosité turbulente et des variables de la turbulence, ce qui s'accorde mal avec l'utilisation de schémas d'ordre élevé.

En substance, l'utilisation des méthodes d'ordre élevé est motivé par la promesse d'une

décroissance accrue de l'erreur en utilisant une base polynômiale de degré (k) plus grande. En effet, pour un coût de calcul variant proportionnellement à $h^{-\alpha d}$, ($\alpha \in [1, 2]$) et une erreur proportionnelle à h^{k+1} on comprend le besoin d'augmenter k afin de bénéficier au mieux d'un raffinement du maillage sans subir de surcoût numérique. Or, ce raisonnement est valable tant que les problèmes que l'on résoud ont des solutions régulières et sont effectués sur un maillage possédant des éléments peu déformés.

Les méthodes d'ordre élevé prouvent ainsi leur intérêt pour des cas *Euler*, sans chocs ou des cas *Navier-Stokes* à bas nombre de *Reynolds*, mais semblent difficilement applicables et compétitives dans des cas à haut nombre de *Reynolds* avec modèle de turbulence.

Bibliographie

- [AAM05] R. ABGRALL, N. ANDRIANOV et M. MEZINE : Towards very high-order accurate schemes for unsteady convection problems on unstructured meshes. *Int. J. Numer. Methods. Fluids.*, 47:679–691, 2005.
- [Abg01] R. ABGRALL : Toward the ultimate conservative scheme : Following the quest. *J. Comput. Phys.*, 167(2):277–315, 2001.
- [Abg06] R. ABGRALL : Essentially non-oscillatory residual distribution schemes for hyperbolic problems. *J. Comput. Phys.*, 214(2):773–808, 2006.
- [ALR09] R. ABGRALL, A. LARAT et M. RICCHIUTO : Construction of very high order residual distribution schemes for steady inviscid flow problems on hybrid unstructured meshes. Rapport technique ISRN INRIA/RR–7236–FR+ENG, Institut national de recherche en informatique et automatique, Avril 2009.
- [ALRT09] R. ABGRALL, A. LARAT, M. RICCHIUTO et C. TAVÉ : A simple construction of very high order non oscillatory compact schemes on unstructured meshes. *Computers & fluids*, 38:1314–1323, 2009.
- [AM03] R. ABGRALL et M. MEZINE : Construction of second order accurate monotone and stable residual distribution schemes for unsteady flow problems. *J. Comput. Phys.*, 188:16–55, 2003.
- [AM07] R. ABGRALL et F. MARPEAU : Residual distribution schemes on quadrilateral meshes. *J. Sci. Comput.*, 30:131–175, 2007.
- [AO05] M. ARROYO et M. ORTIZ : Local maximum-entropy approximation schemes : a seamless bridge between finite elements and meshfree methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 65:2167–2202, 2005.
- [AR03] R. ABGRALL et L. ROE : High-order fluctuation schemes on triangular meshes. *J. Sci. Comput.*, 19(1-3):3–36, 2003.
- [AS64] M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN : *Handbook of mathematical functions*. Cambridge University Press, New York, NY, 1964.
- [Baz09] Y. BAZILEVS : Isogeometric analysis using t-splines. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199:229–263, 2009.
- [BBC⁺09] F. BASSI, L. BOTTI, A. COLOMBO, A. CRIVELLINI, N. FRANCHINA, A. GHIDONI et S. REBAY : Very high-order accurate discontinuous galerkin computation of transonic turbulent flows on aeronautical configurations. *Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design*, 113:25–38, 2009.
- [BCF⁺09] F. BASSI, A. COLOMBO, N. FRANCHINA, A. GHIDONI et S. REBAY : Robust and efficient implementation of very high order discontinuous galerkin methods in cfd. *Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design*, 113:287–300, 2009.

- [BCM05] F. BASSI, S. CRIVELLINI, A. and Rebay et Savini M. : Discontinuous galerkin solution of the reynolds-averaged navier-stokes and k_ω turbulence model equations. *Computers & Fluids*, 34:507–540, 2005.
- [Ber89] C. BERNARDI : Optimal finite-element interpolation on curved domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26:1212–1240, 1989.
- [Ber10] M BERGOT : Eléments finis d’ordre élevé pour maillages hybrides application à la résolution de systèmes hyperboliques linéaires en régimes harmonique et temporel. Mémoire de D.E.A., Université Paris Dauphine, 2010.
- [BEVG07] M. BRAACK, Burman E., John V. et Lube G. : Stabilized finite element methods for the generalized oseen problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 196:853–866, 2007.
- [BG04] S. BENZONI-GAVAGE : *Analyse mathématique et numérique de la dynamique des fluides compressibles*, février 2004.
- [BGR08] J. BREMER, Z. GIMBUTAS et V. ROKHLIN : A nonlinear optimization procedure for generalized gaussian quadratures. Rapport technique, California Univ. Davis Dept. Of Mathematics., 2008.
- [BH82] A.N. BROOKS et T.T.R. HUGHES : Streamline upwind petrov galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- [Boi95] E. BOIX : *Approximation linéaire des surfaces de $\mathbb{R}^3$ et applications*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 1995.
- [Bou77] J. BOUSSINESQ : Théorie de l’écoulement tourbillonnant. Mémoire présenté à la division savante, 1877. Paris.
- [Bou97] J. BOUSSINESQ : Théorie de l’écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans des lits rectilignes à grande section. Gauthier-Villars, 1897.
- [Cat99] S. CATRIS : Etude de contraintes et qualification de modèles à viscosité turbulente. Mémoire de D.E.A., Ecole nationale supérieure de l’aéronautique et de l’espace, 1999.
- [CH91] F. CHALOT et T.J.R. HUGHES : Analysis of hypersonic flows in thermochemical equilibrium by application of the galerkin. *In ICIAM*, 1991.
- [CHS90] F. CHALOT, T.J.R. HUGHES et F. SHAKIB : Symmetrization of conservation laws with entropy for high-temperature hypersonic computations. *Computing systems in engineering*, 1:495–521, 1990.
- [Cia78] P.G. CIARLET : *The finite element method for elliptic problems*, volume 1. North-Holland Publishing Company, 1978.
- [CLM⁺07] F. CHALOT, V. LEVASSEUR, M. MALLET, G. PETIT et N. RAU : Les and des simulations for aircraft design. *In AIAA Paper 2007-0723*, 2007, 2007.
- [CMR⁺98] F. CHALOT, B. MARQUEZ, M. RAVACHOL, F. DUCROS, F. NICOUD et th. POINSOT : A consistenct finite element approach to largeeddy simulation. *In AIAA Paper 98-2652*, 1998.
- [CMR⁺99] F. CHALOT, B. MARQUEZ, M. RAVACHOL, F. DUCROS, F. NICOUD et T. POINSOT : Large eddy simulation of a compressible mixing layer : study of the mixing enhancement. *In AIAA Paper 99-3358*, 1999.
- [CN09] F. CHALOT et P.E. NORMAND : Higher-order stabilized finite elements in an industrial navier-stokes code. *In ADIGMA : A European Initiative on the Development*

- of Adaptative Higher-Order Variational Methods for Aerospace Applications. Results of a collaborative reserach project funded by the European Union, 2006-2009.* Kroll, N. and Bieler, H. and Deconinck, H. and Couaillier, V. and Ven, H. van der and Sorensen, K. (Editors), 2009.
- [CN10] F. CHALOT et P.E. NORMAND : Towards high-fidelity industrial cfd. *In ECCOMAS 2010*, 2010.
- [Coo99] R. COOLS : Monomial cubature since stroud : a compilation – part2. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 112(1-2):21–27, 1999.
- [Coo03] R. COOLS : *An Encyclopedia of Cubature Formulas*, volume 19. J. Complexity, 2003.
- [CR71] P.G. CIARLET et P.A. RAVIART : General lagrange and hermite interpolation with applications to finite element methods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 46:177–199, 1971.
- [CR72] P.G. CIARLET et P.-A. RAVIART : Interpolation theory over curved elements with applications to finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1:217–249, 1972.
- [CR93] R. COOLS et P. RABINOWITZ : Monomial cubature since stroud : a compilation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 48:309–326, 1993.
- [Del34] B. DELAUNAY : Sur la sphère vide. a la mémoire de georges voronoï. *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et naturelles*, 6:793–800, 1934.
- [DL84] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, volume 1. Masson, 1984.
- [DoCSH05] Belgium Department of COMPUTER SCIENCE HEVERLEE : Encyclopaedia of cubature formulas. [http ://www.cs.kuleuven.ac.be/ nines/research/ecf/ecf.html](http://www.cs.kuleuven.ac.be/nines/research/ecf/ecf.html), 08 2005.
- [DRAD10] J. DOBES, M. RICCHIUTO, R. ABGRALL et H. DECONINK : Analysis of hybrid rd-galerkin schemes for navier-stokes simulations. Rapport technique ISRN INRIA/RR-7220-FR+ENG, Institut national de recherche en informatique et automatique, January 2010.
- [DS83] J. DENNIS et R. SCHNABEL : *Numerical methods for Unconstrained optimization and non linear equations*. SIAM, 1983.
- [DSMM⁺07] H. DE STERCK, T.A. MANTEUFFEL, S.F. MCCORMICK, J. NOLTING, J. RUGE et L. TANG : Efficiency-based h- and hp-refinement strategies for finite element methods. *Numerical linear algebra with applications*, 15:89–114, 2007.
- [DSR93] H. DECONINCK, D. STRUIJS et L. ROE : Compact advection schemes on unstructured grids. Rapport technique, VKI, 1993.
- [FG00] P.J. FREY et P.L. GEORGE : *Mesh Generation*. Hermes Science Publishing Ltd, 2000.
- [Fra88] T.J. R. FRANCA, L. and Hughes : Two classes of mixed finite element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 69:89–129, 1988.
- [GCD08] D. GONZALEZ, E. CUETO et M. DOBLARE : Higher order natural element methods : Towards an isogeometric meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74:1928–1954, 2008.
- [God54] S. K. GODUNOV : *Different Methods for Shock Waves*. Thèse de doctorat, Moscow State University, 1954.

- [God59] S. K. GODUNOV : A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. *Math. Sbornik*, 47:271–306, 1959.
- [Hes98] J.S. HESTHAVEN : From electrostatics to almost optimal nodal sets for polynomial interpolation in a simplex. *SIAM J. NUMER. ANAL.*, 35:655–676, 1998.
- [HFM87] T.J.R HUGHES, L.P. FRANCA et M. MALLET : A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Vi convergence analysis of the generalized supg formulation for linear time dependent multidimensional advective diffusive systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63:97–112, 1987.
- [HHLP09] R. HARTMANN, J. HELD, T. LEICHT et F. PRILL : Error estimation and adaptive mesh refinement for aerodynamic flows. *Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design*, 113:339–354, 2009.
- [HR10] M. HUBBARD et M. RICCHIUTO : Discontinuous fluctuation distribution : A route to unconditional positivity and high order accuracy. In *ICFD 2010 International Conference on Fluid Dynamics*, 2010.
- [Hug87] T.T.R. HUGHES : *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1987.
- [Jan99] K.E. JANSEN : A stabilized finite element method for computing turbulence. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 174:299–317, 1999.
- [Joh92] Z. JOHAN : Data parallel finite element techniques for large-scale computational fluid dynamics. Mémoire de D.E.A., Stanford College, 1992.
- [JT94] A. A. JOHNSON et T. E. TEZDUYAR : Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 119:73–94, 1994.
- [JT96] A. A. JOHNSON et T. E. TEZDUYAR : Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134:351–373, 1996.
- [Kas95] C. KASBARIAN : *Etude numérique pour les problèmes d'advection diffusion - Application à la modélisation d'écoulements turbulents compressibles*. Thèse de doctorat, Université de Lyon 1, 1995.
- [KBD⁺09] N. KROLL, H. BIELER, H. DECONINCK, Couaillier V., H. van der VEN et K. SORENSEN, éditeurs. *ADIGMA - A European Initiative on the Development of Adaptive Higher-Order Variational Methods for Aerospace Applications*. Springer, 2009.
- [KK98] G. KARYPIS et V. KUMAR : *A software package for partitioning unstructured graphs, partitioning meshes, and computing fill-reducing orderings of sparse matrices*, september 1998.
- [Kno06] P. KNOBLOCH : Application of the mizukami-hughes method to bilinear finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:579–594, 2006.
- [Lax54] P. D. LAX : Weak solutions of non-linear hyperbolic equations and their numerical computation. *Comm. Pure Appl. Math.*, VII:159–193, 1954.
- [Len86] M. LENOIR : Optimal isoparametric finite elements and error estimates for domains involving curved boundaries. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23:562–580, 1986.
- [Les97] M. LESIEUR : *Turbulence in fluids*. Springer, 1997.
- [Lev02] R. J. LEVEQUE : *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.

- [Lev07] V. LEVASSEUR : Simulation des grandes échelles en éléments finis stabilisés : Une approche variationnelle multi-échelles. Mémoire de D.E.A., Université Paris VI Pierre et Marie Curie., 2007.
- [Lor66] G.G. LORENTZ : *Approximation of functions*, volume 1. Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1966.
- [LR06] G. LUBE et G. RAPIN : Residual-based stabilized higher-order fem for advection-dominated problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 195:4124–4138, 2006.
- [Mez02] M. MEZINE : *Conception de schémas distributifs pour l'aérodynamique stationnaire et instationnaire*. Thèse de doctorat, Ecole doctorale de mathématiques et informatique, Université de Bordeaux I., 2002.
- [OD09] T. OLIVER et D. DARMOFAL : Impact of turbulence model irregularity on high-order discretizations. In *7th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition.*, janvier 2009.
- [Roe87] P.L. ROE : Linear advection schemes on triangular meshes. Rapport technique CoA 8720, Cranfield Institute of Technology, 1987.
- [RS95] P.L. ROE et D. SIDILKOVER : Unification of some advection schemes in two dimensions. Rapport technique 95-10, ICASE, 1995.
- [RVAD08] M. RICCHIUTO, N. VILLEDIEU, R. ABGRALL et H. DECONINCK : On uniformly high-order accurate residual distribution schemes for advection-diffusion. *J. Comput. Appl. Math.*, 215:547–556, 2008.
- [Sco73] R. SCOTT : *Finite element techniques for curved boundaries*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1973.
- [SDF96] M.S. SHEPHARD, S. DEY et J. E. FLAHERTY : A straightforward structure to construct shape functions for variable p-order meshes. *Elsevier science*, 97:209–233, 1996.
- [SDR91] D. STRUIJS, H. DECONINCK et P.L. ROE : Fluctuation splitting schemes for the 2d euler equations. Rapport technique, VKI, 1991.
- [SF73] G. STRANG et G.J. FIX : *An analysis of the finite element method*. Wellesley Cambridge Pr, 1973.
- [Sha88] F. SHAKIB : *Finite Element Analysis of the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations*. Thèse de doctorat, Stanford University, 1988.
- [SHJ89] F. SHAKIB, T.J.R. HUGHES et Z. JOHAN : A multi-element group preconditioned gmres algorithm for nonsymmetric systems arising in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 75:415–456, 1989.
- [SHJ91] F. SHAKIB, T.J.R. HUGHES et Z. JOHAN : A new finite element formulation for computational fluid dynamics : X. the compressible euler and navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89:141–219, 1991.
- [Sma63] J. SMAGORINISKY : General circulation experiments with the primitive equations, the basic experiment. *Mon. Weather rev.*, 91:99–164, 1963.
- [Str71] A.H. STROUD : *Approximate Calculation of Multiple Integrals*. Prentice-Hall, 1971.
- [VdVD04] J. Van der VOOREN et D. DESTARAC : Drag/thrust analysis of jet-propelled transonic transport aircraft ; definition of physical drag components. *Aerospace Science & Technology*, 8:545–556, 2004.

- [vL79] B. van LEER : Towards the ultimate conservative difference scheme, v. a second order sequel to godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 32:101–136, 1979.
- [vM04] R. von MISES : *Mathematical theory of compressible fluid flows*. Dover publications inc, 2004.
- [Vor07] G. VORONOI : Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 133:97–178, 1907.
- [YM07] Z. YANG et D. J. MAVRIPLIS : A mesh deformation strategy optimized by the adjoint method on unstructured meshes. *Aiaa Journal - AIAA J*, 45:2885–2896, 2007.