



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

## Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

**Katarzyna SZULC**

---

### **Quelques méthodes numériques en optimisation de formes**

---

Thèse soutenue publiquement le 8 juin 2010

#### **Composition du jury**

|                       |                                                    |                                                                                                                       |
|-----------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Président du jury :   | Michel PIERRE                                      | Professeur, l'ENS Cachan Bretagne                                                                                     |
| Directeurs de Thèse : | Andrzej NOWAKOWSKI<br>Jan SOKOLOWSKI               | Professeur, Université de Łódź, Pologne<br>Professeur, U.H.P., Nancy I                                                |
| Rapporteurs :         | Alain BRILLARD<br>Michael HINTERMÜLLER             | Professeur, Université de Haute-Alsace<br>Professeur, Humboldt Universität zu Berlin, Allemagne                       |
| Examineurs :          | Zakaria BELHACHMI<br>Dorin BUCUR<br>Antoine HENROT | Maître de Conférences, Université de Metz<br>Professeur, Université de Savoie<br>Professeur, Ecole des Mines de Nancy |



## Remerciements

J'exprime toute ma gratitude au Professeur Andrzej Nowakowski et au Professeur Jan Sokołowski pour avoir accepté de diriger mes premiers pas vers le monde de la recherche avec une compétence, une disponibilité et une pédagogie jamais démenties. Ils n'ont pas cessé de m'impressionner par leur élégance à faire les mathématiques et par leur rigueur. La collaboration avec eux était, est et sera un immense plaisir pour moi.

Je désire exprimer ma profonde gratitude au Professeur Serguei A. Nazarov pour son cours sur l'analyse asymptotique des EDP précieux pour ma formation et pour ses conseils importants et judicieux. Grâce à lui j'ai pu me familiariser avec la théorie moderne des problèmes elliptiques et c'est à lui que je dois l'article sur la dérivée topologique dans le cas non-linéaire.

Je tiens à remercier vivement le Professeur Allain Brillard et le Professeur Michael Hintermüller d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je remercie également le Professeur Michel Pierre qui m'a honorée en acceptant d'être Président de jury. Zakaria Belhachmi, le Professeur Dorin Bucur et le Professeur Antoine Henrot m'ont beaucoup honorée d'avoir accepté avec gentillesse de faire partie du jury.

Je tiens à remercier également tous les mathématiciens auxquels j'ai posé des questions. Un remerciement particulier s'adresse à Jean-François Scheid pour les riches discussions que nous avons eues sur l'analyse numérique de problèmes d'optimisation de formes. Je remercie aussi vivement Antoine Laurain qui m'a amicalement assisté surtout au début quand je faisais mes premiers pas à l'Université Henri Poincaré de Nancy.

Je souhaite remercier le Professeur Alexandre Khludnev pour la collaboration scientifique pendant son séjour à Nancy. Remerciements, également avec grand plaisir, à Mohamed Iguernane et Jean Rodolphe Roche pour le travail en commune sur les méthodes numériques de résolution des problèmes non-linéaires.

Je tiens également à remercier l'Ambassade de France en Pologne dont la bourse de recherche m'a fourni les financements nécessaires pour effectuer ma recherche à Nancy pendant les années académiques 2005 - 2008.

Merci à mes amis et camarades du Doctorat, Anna, Marta, Nicolae, Piotr et surtout Sandrine pour toutes ses remarques et corrections pour la rédaction de cette thèse.

Enfin, j'exprime tout ma gratitude à ma famille, surtout à ma mère, et à ceux qui me sont très chers.



# Table des matières

|                                                                                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                                                                         | <b>7</b>  |
| <b>Notations</b>                                                                                                                            | <b>8</b>  |
| <b>1 Analyse asymptotique dans des domaines singulièrement perturbés</b>                                                                    | <b>9</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                                                                                  | 9         |
| 1.2 Equation elliptique non-linéaire . . . . .                                                                                              | 14        |
| 1.3 Dérivée topologique dans l'espace de $\mathbb{R}^3$ . . . . .                                                                           | 18        |
| 1.3.1 Analyse asymptotique formelle . . . . .                                                                                               | 18        |
| 1.3.2 Approximation asymptotique de la solution $u^\varepsilon$ . . . . .                                                                   | 21        |
| 1.3.3 Analyse asymptotique formelle des fonctionnelles de formes . . . . .                                                                  | 29        |
| 1.4 La dérivée topologique pour le problème elliptique en dimension deux avec la condition de Neumann sur le bord de trou . . . . .         | 31        |
| 1.4.1 Analyse asymptotique . . . . .                                                                                                        | 31        |
| 1.4.2 Analyse asymptotique d'une fonctionnelle de forme en dimension deux . . . . .                                                         | 34        |
| 1.5 Approximation de la dérivée topologique en utilisant la méthode des éléments finis . . . . .                                            | 38        |
| 1.5.1 La famille d'éléments finis . . . . .                                                                                                 | 38        |
| 1.5.2 La solution numérique du problème non-linéaire . . . . .                                                                              | 38        |
| 1.5.3 La convergence de l'approximation par une méthode d'éléments finis des solutions du problème elliptique et de l'état adjoint. . . . . | 39        |
| 1.5.4 Estimation dans $L^\infty(\Omega_h)$ de l'erreur d'approximation de la dérivée topologique. . . . .                                   | 40        |
| 1.5.5 Exemples . . . . .                                                                                                                    | 41        |
| 1.5.6 Conclusion . . . . .                                                                                                                  | 42        |
| <b>2 Optimisation de forme et de topologie d'un problème elliptique semi-linéaire.</b>                                                      | <b>45</b> |
| 2.1 Le problème semi-linéaire . . . . .                                                                                                     | 46        |
| 2.1.1 Existence d'un domaine optimal . . . . .                                                                                              | 46        |
| 2.1.2 La dérivée par rapport au domaine. . . . .                                                                                            | 50        |
| 2.2 Résultats numériques d'optimisation de forme et de topologie . . . . .                                                                  | 53        |
| 2.2.1 La formulation "Level Set" . . . . .                                                                                                  | 53        |
| 2.2.2 Méthode numérique pour l'équation "Level Set" . . . . .                                                                               | 54        |

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.2.3    | L'algorithme d'optimisation de forme . . . . .                     | 56        |
| <b>3</b> | <b>Le système de l'élasticité défini sur un domaine fissuré.</b>   | <b>63</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                             | 63        |
| 3.2      | Modèle avec une fissure $\Gamma_c$ . . . . .                       | 65        |
| 3.3      | Existence d'une solution . . . . .                                 | 67        |
| 3.3.1    | La formulation mixte . . . . .                                     | 68        |
| 3.3.2    | La formulation lisse dans $\Omega$ . . . . .                       | 69        |
| 3.4      | La méthode du domaine fictif . . . . .                             | 71        |
| 3.5      | La fissure sur le bord d'une inclusion rigide . . . . .            | 73        |
| 3.6      | Les dérivées de forme d'une fonctionnelle d'énergie . . . . .      | 76        |
| 3.7      | La dérivée topologique pour un problème d'élasticité . . . . .     | 84        |
| 3.7.1    | La dérivée topologique pour un problème avec une fissure . . . . . | 87        |
| 3.8      | Evolution d'une fissure avec branchement . . . . .                 | 89        |
| 3.9      | Les problème en 3D et des questions ouvertes . . . . .             | 91        |
|          | <b>Bibliography</b>                                                | <b>92</b> |

# Introduction

La dérivée topologique évaluée pour une fonctionnelle d'énergie définie dans un domaine et dépendante d'une solution d'un problème aux limites, est l'outil principal de l'optimisation de formes. Elle représente le taux de variation de la fonctionnelle d'énergie quand le domaine est modifié par un trou. La forme de la dérivée topologique est fournie par une analyse asymptotique d'un problème aux dérivées partielles et d'une fonctionnelle d'énergie. La définition de la dérivée topologique a été introduite dans [96] et [97]. Quelques notions d'analyse asymptotique qui permettent d'évaluer la forme de la dérivée topologique, ont été évoquées dans [78], [79]. Une méthode numérique pour calculer la solution du problème d'optimisation de forme, utilisant la dérivée topologique et la méthode des courbes de niveaux (levelset) a été présentée dans [21]. L'objet de ce travail de thèse est de développer des méthodes pour déterminer la dérivée topologique.

Dans la **première partie** on fait l'analyse d'un problème elliptique d'équation aux dérivées partielles non-linéaire. On commence par l'approximation de la solution du problème aux limites et ensuite on obtient le développement asymptotique d'une fonctionnelle de forme, dont le terme de premier ordre est la dérivée topologique. Par la suite, on considère une approximation numérique de la dérivée topologique en utilisant une méthode d'éléments finis et on démontre sa convergence. Les résultats théoriques sont illustrés par les calculs numériques.

Dans la **deuxième partie** on adapte la méthode de courbes de niveau à un problème d'optimisation de formes et de topologie. On applique la dérivée topologique trouvée dans la première partie pour trouver l'endroit de modification du domaine afin de minimiser une fonctionnelle de coût.

Dans la **troisième partie** on considère le système de l'élasticité défini dans un domaine avec une fissure. Dans ce cas, on regarde le comportement asymptotique de la solution et de la fonctionnelle d'énergie par rapport aux perturbations singulières du domaine géométrique. Dans ce chapitre la dérivée topologique de l'énergie est donnée pour des domaines fissurés en dimension deux et trois.

# Notations

La notation utilisée dans ce travail est celle de la littérature, les grands classiques dans la bibliographie sont [1], [5] et [16]. Dans le cas de l'analyse asymptotique, la notation est la même que dans [39], mais aussi [64]. Enfin, on présente ici les notations pour des fonctions et leurs dérivées. On travaille dans des espaces de Sobolev  $H^1(\Omega)$ ,  $L^p(\Omega)$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $W^{2,p}(\Omega)$  dont les définitions sont standards et qui peuvent être trouvées par exemple dans [1]. Comme les solutions des équations aux dérivées partielles dépendent du domaine d'intégration  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , on note par  $u(\Omega) = u(\Omega; \cdot)$  une fonction de variable  $x \in \mathbb{R}^N$  définie dans le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . On note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  les dérivées partielles de premier ordre de la fonction  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ . Le gradient de  $f$  est noté  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^\top$ . C'est un vecteur qui a pour coordonnées les dérivées partielles de  $f$ . Les symboles  $\nabla^k$  pour  $k = 2, \dots$ , décrivent l'ensemble des dérivées partielles d'ordre  $k$  d'une fonction scalaire. Par exemple, pour  $k = 2$ ,  $N = 2$  et  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\nabla^k f = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^\top$  est un vecteur qui a pour coefficients les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction de deux variables  $f(x) = f(x_1, x_2)$ . La matrice jacobienne d'une application  $\Psi : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ , c'est-à-dire la matrice des dérivées premières d'une fonction vectorielle  $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_N)^\top$ , est notée  $D\Psi : (D\Psi)_{i,j} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . Pour simplifier l'écriture dans ce travail, les constantes apparaissant dans les formules seront toutes notées  $c$ .

# Chapitre 1

## Analyse asymptotique dans des domaines singulièrement perturbés

### 1.1 Introduction

Les problèmes d'optimisation de formes ont de nombreuses applications et interviennent dans beaucoup de domaines de recherche tels que la mécanique des milieux continus, la mécanique des fluides et la théorie du contrôle optimal. Dans le cas le plus simple, un problème d'optimisation de formes peut être considéré comme la minimisation d'une fonctionnelle (appelée souvent fonctionnelle de forme) définie sur une classe de domaines admissibles. Par exemple, on peut voir plus loin l'équation (1.1) et la fonctionnelle de formes (1.3). L'optimisation de formes, dans le cas des applications en mécanique, est un élément de base au cours de la modélisation et de l'optimisation d'une structure élastique (par exemple du disque, de la plaque).

Le problème d'optimisation consiste à trouver une frontière  $\Gamma$  d'un domaine géométrique  $\Omega$ , laquelle minimise une fonctionnelle  $\mathcal{J}(\Omega)$  (ceci peut être par exemple le poids de la structure), et aussi qui vérifie des conditions supplémentaires sur la connectivité (topologie). Les autres conditions d'admissibilité du domaine  $\Omega$  peuvent être (dans le cas d'une construction mécanique) des conditions sur le volume, l'énergie, les contraintes maximales et sur les déplacements sur la frontière. Alors, il faut résoudre des équations aux dérivées partielles dans le domaine  $\Omega$ , calculer  $J(\Omega)$  et par la suite, améliorer la valeur de  $J(\Omega)$  et en plus chercher à vérifier les conditions imposées sur la classe des domaines admissibles.

Introduisons les mots-clefs utilisés dans la suite de cette thèse. La classe des domaines admissibles  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$  est notée  $\mathcal{U}_{ad}$ . En pratique  $\Omega \subset D$  pour un ouvert fixé et  $D \subset \mathbb{R}^N$ . Un domaine est un ouvert convexe  $\Omega$  à la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ . Ceci peut-être représenté par des sous-ensembles  $\Omega$  de  $D$  dans  $\mathbb{R}^2$  (Fig. 1.1)

Des conditions imposées à  $\Omega$  peuvent varier parmi plusieurs des propriétés suivantes :

- conditions sur le volume :  $\int_{\Omega} dx \leq M, x \in \Omega, M \in \mathbb{R}_+$  ;
- conditions sur le périmètre :  $\int_{\partial\Omega} d\Gamma(x) \leq L, x \in \Omega, L \in \mathbb{R}_+$  ;

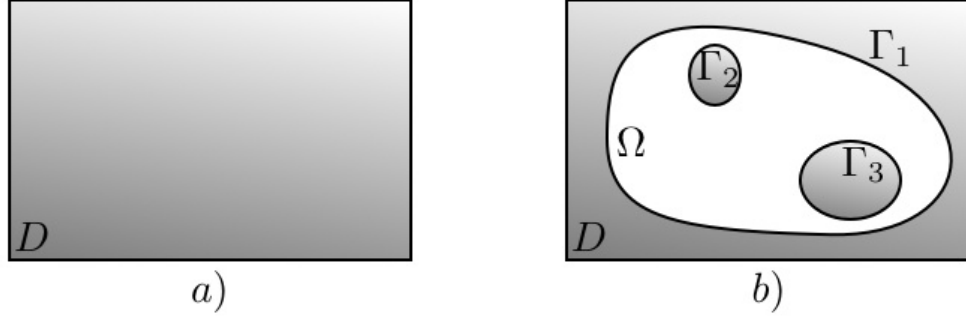


FIG. 1.1 – a) Ensemble  $D \subset \mathbb{R}^2$ , b) Sous-ensemble  $\Omega$  de  $D$  avec  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , la partie grise représente le complémentaire  $\Omega^c$  de  $\Omega$  dans  $D$ .

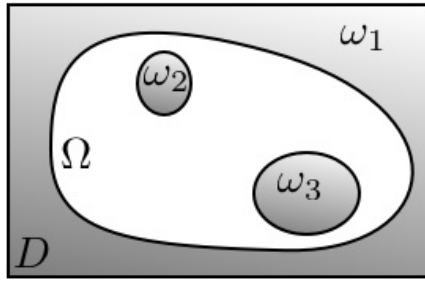


FIG. 1.2 – Composantes connexes de  $\Omega$ , la partie grise représente le complémentaire  $\Omega^c = D \setminus \overline{\Omega} = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3$ .

- conditions sur la régularité de la frontière  $\partial\Omega$ , qui est souvent localement lipschitzienne ;
- conditions sur le nombre de composantes connexes de  $\Omega$  (Fig. 1.2 le nombre de composantes connexes :  $\#\Omega^c = 3$ ).

Alors, on suppose que  $\Omega$  est un ouvert de frontière  $\partial\Omega$ . On suppose également, que  $\partial\Omega$  est de classe  $C^{0,1}$ , c'est-à-dire localement lipschitzienne.

**Exemple.** Soit  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction de  $C^{0,1}$ , pour laquelle il existe une constante  $c$ , telle que  $|\psi'(t)| \leq c$ . On définit la courbe  $L = \{\psi(x_1) : x_1 \in [0, 1]\}$  et l'ensemble  $\Omega_\psi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0, 1), 0 < x_2 < \psi(x_1)\}$  (Fig. 1.3). Dans ce cas là, les ensembles  $\Omega_\psi$  peuvent être paramétrés dans un espace fonctionnel  $\psi \in C^{0,1}([0, 1])$ .  $\square$

Supposons maintenant que la fonction  $u(x) \in H^1(\Omega)$ ,  $x \in \Omega$  est une solution faible [16] d'un problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & x \in \Gamma_D \subset \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = h(x) & x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ ,  $h \in L^2(\Gamma_N)$  et  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$  la frontière de domaine

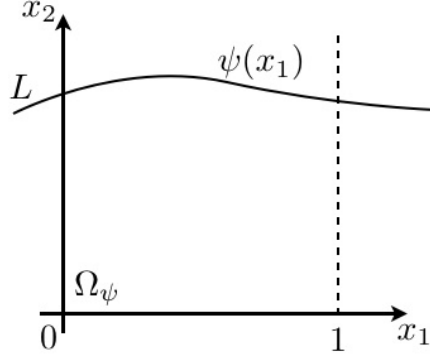


FIG. 1.3 – La courbe  $L$  et le domaine  $\Omega_\psi$ .

$\Omega$ . On dit que le problème (1.1) est bien posé dans  $H^1(\Omega)$  si la solution vérifie l'inégalité suivante

$$\|u; H^1(\Omega)\| \leq C(\Omega)(\|f; L^2(\Omega)\| + \|g; H^{1/2}(\Gamma_D)\| + \|h; L^2(\Gamma_N)\|), \quad (1.2)$$

où la constante  $C(\Omega)$  ne dépend pas des données  $f, g, h$ , mais dépend du domaine  $\Omega$  à frontière lipschitzienne [5], [16]. Les normes dans les espaces de Sobolev sont définies de manière classique [1], en utilisant la théorie des distributions et de l'interpolation en cas de nécessité. La norme dans l'espace  $H^{1/2}$  est définie par (3.14). Dans la suite, on utilise la norme de Hölder introduite par les définitions 1 et 2 dans la partie 1.2.

Dans le travail on considère des problèmes d'optimisation de formes, qui peuvent être formulés comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle de forme. En général, la fonctionnelle de forme s'écrit comme une intégrale sur  $\Omega$  ou sur  $\partial\Omega$  d'une fonction dépendante de solution  $u(\Omega; x)$  d'un problème aux limites défini par exemple comme dans (1.1). Notons la fonctionnelle de forme comme suit :

$$\mathcal{J}(\Omega) = \int_{\Omega} J(x, u(\Omega; x)) dx, \quad (1.3)$$

où  $J : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  définie dans  $\Omega \times \mathbb{R}$  et dépend de la solution  $u(\Omega; x)$  du problème aux limites en considération. Le problème d'optimisation de forme peut s'écrire comme le problème de minimisation suivant :

$$\text{Trouver } \Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}, \quad \text{tel, que } \mathcal{J}(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{J}(\Omega). \quad (1.4)$$

Si les domaines admissibles sont lipschitziens, alors on peut démontrer l'existence de la solution  $\Omega^*$  de (1.4) (cf. [7],[30]). L'objectif de ce travail est de montrer comment on peut diminuer la valeur de la fonctionnelle  $\mathcal{J}(\Omega)$  par déformation de la frontière de  $\Omega$  ou bien en ajoutant des trous  $\omega_\varepsilon$  à  $\Omega$ .

Dans notre travail le changement de topologie de  $\Omega$  consiste à introduire de nouveaux ensembles  $\Omega(\varepsilon) = \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , où  $\omega_\varepsilon$  est un sous-ensemble de  $\Omega$  appelé trou de centre

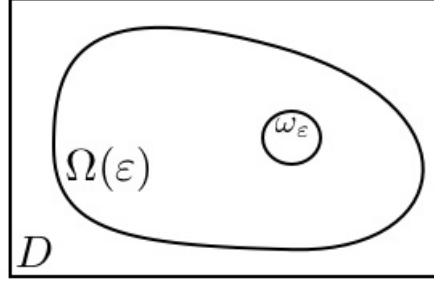


FIG. 1.4 – Le domaine  $\Omega(\varepsilon) = \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$

$\mathcal{O} \in \Omega$ , de taille  $\varepsilon$  et tel que  $\overline{\omega_\varepsilon} \subset \Omega$  (Fig. 1.4). Dans ce cas (1.1) est remplacé par le problème suivant défini dans  $\Omega(\varepsilon)$  :

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon(x) = f(x), & x \in \Omega(\varepsilon), \\ u_\varepsilon(x) = g(x), & x \in \Gamma_D \subset \partial\Omega(\varepsilon), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(x) = h(x), & x \in \Gamma_N \subset \partial\Omega(\varepsilon), \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(x) = 0, & x \in \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (1.5)$$

Remarquons que sur  $\Gamma_D$  on donne la condition de Dirichlet et sur  $\Gamma_N$  on donne la condition de Neumann. Ici, pour  $\varepsilon = 0$  on a  $\Omega(\varepsilon) = \Omega$  et on définit une fonction du paramètre  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,

$$j(\varepsilon) = \mathcal{J}(\Omega(\varepsilon)) = \int_{\Omega(\varepsilon)} F(x, u_\varepsilon(\Omega(\varepsilon); x)) dx. \quad (1.6)$$

L'analyse du comportement de la fonction  $j(\varepsilon)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  permet d'établir la dérivée topologique  $\mathcal{T}(\mathcal{O})$  de la fonctionnelle  $\mathcal{J}(\Omega)$ . En utilisant l'analyse asymptotique on peut calculer la dérivée topologique  $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ ,  $\mathcal{O} \in \Omega$  ( $\mathcal{O}$  étant le centre du trou  $\omega_\varepsilon$ ) pour une solution  $u_\varepsilon(\Omega; x)$  du problème aux limites (1.5). Si la valeur de la fonction  $\mathcal{T}(\cdot)$  est connue en  $\mathcal{O} \in \Omega$ , on a l'égalité suivante :

$$j(\varepsilon) = j(0) + \varepsilon^2 j''(0^+) + o(\varepsilon^2), \quad (1.7)$$

ceci implique que (1.7) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\mathcal{J}(\Omega(\varepsilon)) = \mathcal{J}(\Omega) + |\omega_\varepsilon| \mathcal{T}(\mathcal{O}) + o(|\omega_\varepsilon|), \quad (1.8)$$

avec  $|\omega_\varepsilon| = \int_{\omega_\varepsilon} dx$  le volume du trou  $\omega_\varepsilon$ . Ajoutons que l'égalité  $\varepsilon^2 j''(0^+) = |\omega_\varepsilon| \mathcal{T}(\mathcal{O})$  a lieu

pour la condition de Neumann sur  $\partial\omega_\varepsilon$ .

Parmi les objets de l'optimisation de formes, il y a la variation de la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  et le gradient de forme. La méthode pour déterminer le gradient de forme est présentée dans [94] et en bref, on peut dire que le gradient de forme  $g_\Gamma$  s'obtient grâce à la dérivée par rapport à la forme  $d\mathcal{J}(\Omega; V) = \langle g_\Gamma, V \cdot n \rangle$ , définie par

$$d\mathcal{J}(\Omega; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathcal{J}(\Omega_t) - \mathcal{J}(\Omega)). \quad (1.9)$$

La limite (1.9) est appelée la dérivée de la fonctionnelle  $\mathcal{J}(\Omega)$  dans la direction du champ de vecteurs  $V$ . L'ensemble  $\Omega_t$  est une déformation de  $\Omega$  [94]. C'est l'image de  $\Omega$  obtenue par l'application  $T_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par le flux du champ de vecteurs  $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , qui, à son tour, est défini par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = V(t, x(t)), \\ x(0) = X. \end{cases} \quad (1.10)$$

D'après (1.10) on a donc la donnée initiale  $X \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  et la position d'une particule  $x(t) = T_t(X) \in \Omega_t$  telle qu'on puisse écrire

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists X \in \Omega \text{ tel que } x = x(t, X)\}. \quad (1.11)$$

Dans l'expression  $\langle g_\Gamma, V \cdot n \rangle$ , l'élément  $g_\Gamma$  est une distribution de support inclus dans  $\Gamma = \partial\Omega$  et  $V \cdot n$  est la composante normale du champ  $V(0, \cdot)$  sur la frontière de  $\Gamma$ . L'existence du gradient de forme est montré dans [94] pour les équations aux dérivées partielles. La méthode classique utilisant le champ  $V$  ne permet pas de chercher la dépendance entre les valeurs de la fonctionnelle  $\mathcal{J}(\Omega)$  et la perturbation du domaine  $\Omega$  par la création d'un petit trou  $\omega_\varepsilon$ . Les perturbations singulières du domaine  $\Omega$  peuvent être considérées dans le cadre de l'analyse asymptotique des équations aux dérivées partielles et la dérivée topologique est un résultat de cette analyse.

Dans le chapitre 1.2 on présentera des résultats pour un problème non-linéaire, on introduira des espaces fonctionnels utilisés dans l'analyse asymptotique de la solution du problème et on définira la dérivée topologique d'une fonctionnelle de forme.

On va travailler en dimension deux dans la partie 1.3 et en dimension trois dans la partie 1.4. Dans le cas de la dimension trois, la forme de la dérivée topologique est développée pour une solution d'un problème aux limites avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière du domaine  $\Omega$  et au bord du trou  $\partial\omega_\varepsilon$ .

La dérivée topologique calculée en dimension deux dépend de la solution du problème aux limites avec des conditions de Neumann sur le bord du trou et avec des conditions de Dirichlet sur le bord de  $\Omega$ . La dérivée topologique évaluée dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  dépend de la solution du problème aux limites avec des conditions de Neumann sur la frontière du trou et avec des conditions de Dirichlet sur la frontière extérieure de  $\Omega$ .

Dans la partie 1.5 on décrit l'approximation numérique de la dérivée topologique par une méthode d'éléments finis. Pour cela on introduit une famille de maillages du domaine  $\Omega$  et on en tire une solution numérique pour ce problème non-linéaire. On a une estimation de l'erreur d'approximation pour la solution numérique et pour la dérivée topologique, et ensuite on présente des exemples de calculs numériques.

## 1.2 Equation elliptique non-linéaire

Soient  $\Omega$  et  $\omega$  deux ouverts bornés dans  $\mathbb{R}^3$ , de frontières  $\partial\Omega$  et  $\partial\omega$  respectivement et avec  $\overline{\Omega}$  et  $\overline{\omega}$  connexes. On suppose que le centre  $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$  appartient à la fois à  $\Omega$  et à  $\omega$ . On définit les ensembles suivants :

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : \xi := \varepsilon^{-1}x \in \omega\}, \quad (1.12)$$

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon, \quad (1.13)$$

avec  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $\varepsilon > 0$  un petit paramètre tel que  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ . La valeur  $\varepsilon_0$  est choisie de façon à ce que l'ensemble  $\overline{\omega}_\varepsilon$  appartienne à  $\Omega$ . Dans la suite cette valeur peut être modifiée pendant l'analyse, néanmoins la notation pour  $\varepsilon_0$  reste inchangée. Le problème aux limites défini dans le domaine  $\Omega(\varepsilon)$  contenant un trou  $\omega_\varepsilon$  est appelé singulièrement perturbé par rapport au problème de départ défini dans  $\Omega$ . L'ensemble  $\omega_\varepsilon$  est appelé trou dans  $\Omega(\varepsilon)$ . On a besoin pour l'analyse du problème aux limites des espaces fonctionnels : les espaces de Hölder et les espace de Hölder à poids.

**Définition 1.** Soit  $\Omega$  un ouvert dans  $\mathbb{R}^3$  et  $l \in \{0, 1, \dots\}$  un indice donné. Pour  $0 < \alpha < 1$  on définit l'espace  $C^{l,\alpha}(\Omega)$  comme le sous-espace de  $C^l(\Omega)$  contenant les fonctions  $Z$  pour lesquelles  $\nabla^k Z$ ,  $0 \leq k \leq l$ , vérifient dans  $\Omega$  les conditions de Hölder d'ordre  $\alpha$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $K$  telle que

$$|\nabla^k Z(x) - \nabla^k Z(y)| \leq K|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega. \quad (1.14)$$

$C^{l,\alpha}(\Omega)$  est un espace de Banach dont la norme est définie par :

$$\|Z; C^{l,\alpha}(\Omega)\| = \sum_{k=0}^l \sup_{x \in \Omega} |\nabla^k Z(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x - y|^{-\alpha} |\nabla^l Z(x) - \nabla^l Z(y)|. \quad (1.15)$$

**Définition 2.** Soit  $\Omega$  un ouvert dans  $\mathbb{R}^3$ . La fermeture dans la norme (1.16) de l'ensemble  $C^{l,\alpha}(\Omega)$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $l \in \{0, 1, \dots\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ , est appelée espace de Hölder à poids et notée  $\Lambda_\beta^{l,\alpha}(\Omega)$ . La norme dans cet espace  $\Lambda_\beta^{l,\alpha}(\Omega)$  pour toute fonction  $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est définie comme :

$$\|Z; \Lambda_\beta^{l,\alpha}(\Omega)\| = \sum_{k=0}^l \sup_{x \in \Omega} |x|^{\beta-l-\alpha+k} |\nabla^k Z(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x - y|^{-\alpha} |\nabla^l Z(x) - \nabla^l Z(y)|. \quad (1.16)$$

Soit  $F$  une fonction donnée dans l'espace de Hölder  $C^{0,\alpha}(\Omega \times \mathbb{R})$ . On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta_x u^\varepsilon(x) &= F(x, u^\varepsilon(x)), & x \in \Omega(\varepsilon) := \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \partial\Omega(\varepsilon) := \partial\Omega \cup \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (1.17)$$

Soit  $J : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et soit  $\mathcal{A}(\Omega)$  une famille des sous-ensembles de  $\Omega$  dont les frontières sont lipschitziennes (cette condition peut être plus faible dans le cas par exemple d'ensembles fissurés). Pour toute fonction  $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  (étant une solution d'un problème aux limites) et pour toute fonction  $u^\varepsilon(x)$ ,  $x \in \Omega(\varepsilon)$  étant une solution du problème aux limites (1.17), on définit deux fonctionnelles

$$\mathcal{J} : L^\infty(\Omega) \times \mathcal{A}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$$

suivantes :

$$\mathcal{J}(v; \Omega) = \int_{\Omega} J(x, v(x)) dx \quad (1.18)$$

et

$$\mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon)) = \int_{\Omega(\varepsilon)} J(x, u^\varepsilon(x)) dx. \quad (1.19)$$

Dans ce travail on construit, en utilisant une analyse asymptotique, une approximation de la solution de l'équation (1.17). La construction est faite de telle manière que pour la fonctionnelle de forme  $\mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon))$  on trouve son développement de premier ordre par rapport au petit paramètre  $\varepsilon \rightarrow 0$  sous la forme suivante :

$$\mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon)) = \mathcal{J}(v; \Omega) + \varepsilon \mathcal{T}_\Omega(\mathcal{O}) + o(\varepsilon), \quad (1.20)$$

où  $\mathcal{T}_\Omega : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \mapsto \mathbb{R}$  est la dérivée topologique de la fonctionnelle  $\mathcal{J}$ , et le reste  $o(\varepsilon)$  tend vers zéro :  $o(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow 0$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Dans le cas linéaire, l'analyse asymptotique a été déjà faite dans la littérature (voir les livres [39], [66]) par exemple pour l'équation de Poisson avec les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta_x u^\varepsilon(x) &= f(x), & x \in \Omega(\varepsilon), \\ u^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \partial\Omega(\varepsilon), \end{cases} \quad (1.21)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ . On rappelle les étapes principales de cette analyse sans démonstration. Afin de construire une approximation  $u_\varepsilon$  de la solution  $u^\varepsilon$  on considère les solutions de deux problèmes aux limites. L'un d'eux est obtenu à partir de (1.21) en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ce qui veut dire que l'on enlève ou bien remplit le trou  $\bar{\omega}_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} -\Delta_x u(x) &= f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.22)$$

L'autre problème est un problème aux limites dans un domaine non-borné et sa solution contient l'information sur la valeur de la fonction sur le bord de trou  $\partial\omega_\varepsilon$  :

$$\begin{cases} -\Delta_\xi w(\xi) &= 0, & \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}, \\ w(\xi) &= -u(\mathcal{O}), & \xi \in \partial\omega, \end{cases} \quad (1.23)$$

avec  $\xi := \varepsilon^{-1}x$  et  $u(\mathcal{O})$  la solution du problème défini dans le domaine sans trou (1.22) au point  $\mathcal{O}$ . La connaissance des solutions de (1.22) et de (1.23) permet de construire une approximation  $u_\varepsilon$ . Notre objectif est de construire cette approximation dans le cas de problème non-linéaire.

Revenons alors au problème non-linéaire. Suivant [57] (voir aussi [64], §5.7) on utilise la même idée que précédemment : le problème aux limites (1.22) est remplacé par le problème non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_x v(x) &= F(x, v(x)), & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.24)$$

et l'autre, qui remplace (1.23), est linéaire dans le domaine non-borné et il a la forme suivante :

$$\begin{cases} -\Delta_\xi w(\xi) &= 0, & \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}, \\ w(\xi) &= -v(\mathcal{O}), & \xi \in \partial\omega. \end{cases} \quad (1.25)$$

La solution de (1.25) est unique si l'on suppose qu'elle s'annule à l'infini, c'est-à-dire  $w(\xi) \rightarrow 0$  pour  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Dans la suite on introduit une linéarisation de (1.24), qui sert à obtenir les termes réguliers du développement asymptotique (voir ansatz (1.34) lié à (1.24) qui représente la forme approximative de la solution). Le problème linéaire, dont la solution est la fonction  $V$ , est le suivant (après avoir dérivé la fonction  $F$  par rapport à deuxième variable) :

$$\begin{cases} -\Delta_x V(x) - F'_v(x, v(x))V(x) &= \mathcal{F}(x), & x \in \Omega, \\ V(x) &= g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.26)$$

Les éléments  $\mathcal{F}(x)$  et  $g(x)$  sont tels que la solution  $V$  soit un état adjoint qui dépend de la solution de (1.24) et du gradient de la fonctionnelle de forme. On introduit l'état adjoint pour simplifier l'expression de la dérivée topologique.

On introduit maintenant des hypothèses qui seront nécessaires pour trouver la dérivée topologique.

**Hypothèse 1.** *Le problème aux limites (1.24) admet une unique solution  $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  pour certain  $\alpha \in (0, 1)$ , et certain  $F \in C^{0,1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ .*

**Hypothèse 2.**  *$F'_v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ .*

**Hypothèse 3.** *Le problème aux limites (1.26) avec  $\mathcal{F} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$  et  $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$  admet une unique solution  $V \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  qui vérifie l'inégalité suivante :*

$$\|V; C^{2,\alpha}(\Omega)\| \leq c(\|\mathcal{F}; C^{0,\alpha}(\Omega)\| + \|g; C^{2,\alpha}(\partial\Omega)\|), \quad (1.27)$$

avec une constante  $c$ .

Des conditions nécessaires pour que les hypothèses 1 et 3 soient vérifiées, peuvent être trouvées dans [56]. En particulier, l'exemple numérique considère un problème où les deux hypothèses sont remplies. Ici, et dans la suite,  $c$  est un nombre positif dont la valeur peut changer dans des endroits différents du texte, mais il ne dépend jamais du paramètre  $\varepsilon$ .

Remarquons que si l'hypothèse 2 a lieu et  $F'_v(x, v(x)) \leq 0$  pour  $x \in \Omega$ , alors l'hypothèse 3 est vérifiée. D'après l'hypothèse 3 on espère qu'il existe une unique solution du problème linéaire (1.26) définie dans l'espace de Hölder  $C^{2,\alpha}(\Omega)$  pour laquelle l'estimation (1.27) a lieu. Alors, l'application linéaire suivante représentant la solution (1.26),

$$S : \{\mathcal{F}, g\} \longmapsto V \quad (1.28)$$

est un isomorphisme de  $C^{0,\alpha}(\Omega) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega) \mapsto C^{2,\alpha}(\Omega)$ . De plus, l'opérateur  $S$  est aussi un isomorphisme comme application dans des espaces de Hölder à poids avec des indices bien choisis - d'après [65] (voir aussi [76], Ch. 3 et 4). Dans la suite on présente des résultats connus sans démonstration sur les propriétés des solutions des problèmes elliptiques dans les domaines  $\Omega$  et  $\Omega(\varepsilon)$ .

**Théorème 1.** *On suppose satisfaites les hypothèses 3 et 2. Alors l'application (1.28) définie par :*

$$S : \Lambda_\beta^{0,\alpha}(\Omega) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega) \mapsto \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega) \quad (1.29)$$

*est un isomorphisme si et seulement si  $\beta - \alpha \in (2, 3)$ .*

D'après [52], [65], (voir aussi [67] et [76], Ch. 3, 4)) on obtient le théorème suivant :

**Théorème 2.** *Si dans (1.26),  $\mathcal{F} \in \Lambda_\gamma^{0,\alpha}(\Omega)$  et  $\gamma - \alpha \in (1, 2)$ , alors la solution  $V$  peut s'écrire comme  $V(x) = \tilde{V}(x) + V(\mathcal{O})$  et l'inégalité suivante a lieu :*

$$|V(\mathcal{O})| + \|\tilde{V}; \Lambda_\gamma^{2,\alpha}(\Omega)\| \leq c(\|\mathcal{F}; \Lambda_\gamma^{0,\alpha}(\Omega)\| + \|g; C^{2,\alpha}(\partial\Omega)\|). \quad (1.30)$$

Comme dans le Théorème 1 la propriété d'isomorphisme a lieu dans le cas de l'ensemble  $\Omega(\varepsilon)$ . Alors, d'après [63] (voir aussi [64], Ch. 2.4, [76], Ch. 6) on peut en déduire le théorème suivant :

**Théorème 3.** *Etant données les hypothèses 3 et 2, le problème linéaire*

$$\begin{cases} -\Delta_x v^\varepsilon(x) - F'_v(x, v(x))v^\varepsilon(x) = \mathcal{F}^\varepsilon(x), & x \in \Omega(\varepsilon), \\ v^\varepsilon(x) = g^\varepsilon(x), & x \in \partial\Omega(\varepsilon), \end{cases} \quad (1.31)$$

*avec  $v$  vérifiant (1.24), admet une solution et l'opérateur  $S_\varepsilon : \{\mathcal{F}^\varepsilon, g^\varepsilon\} \mapsto v^\varepsilon$  est borné dans des espaces de Hölder à poids*

$$S_\varepsilon : \Lambda_\beta^{0,\alpha}(\Omega(\varepsilon)) \times \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\partial\Omega(\varepsilon)) \mapsto \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon)). \quad (1.32)$$

*De plus, pour  $\beta - \alpha \in (2, 3)$  on a*

$$\|v^\varepsilon; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\| \leq c_\beta(\|\mathcal{F}^\varepsilon; \Lambda_\beta^{0,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\| + \|g^\varepsilon; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\partial\Omega(\varepsilon))\|) \quad (1.33)$$

*avec  $c_\beta$  une constante qui ne dépend pas de  $\varepsilon$ .*

Dans le cas du problème non-linéaire (1.17), on applique une procédure de recherche de la solution classique d'un problème aux limites, c'est-à-dire dans l'espace des fonctions à dérivées d'ordre deux continues, i.e. pour tout  $F \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , on cherche la solution dans l'espace  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . L'existence et l'unité de la solution d'une telle équation elliptique sont montrés dans [56] et [24]. En particulier, cela signifie que (1.17) admet une unique solution  $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))$  pour un certain  $0 < \alpha < 1$  et quel que soit  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ .

### 1.3 Dérivée topologique dans l'espace de $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie on présente une approximation par rapport à un petit paramètre  $\varepsilon > 0$ , d'une solution d'un problème elliptique non-linéaire. On procède ainsi pour un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Cette analyse est originale [38], puisque le développement de la dérivée topologique n'est pas encore décrit dans la littérature dans la forme que l'on présente ici, sauf [63] (voir aussi [64], Ch. 5.7), où l'on fait une approximation asymptotique d'une solution d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire de type elliptique mais sans calculer la dérivée topologique. Certains résultats sont obtenus dans [2] mais seulement dans le cas particulier d'une approximation extérieure de la solution contenant un seul terme. Dans [2] il manque aussi des estimations dans la norme d'espace fonctionnel pour la différence entre la solution exacte et la solution approchée.

#### 1.3.1 Analyse asymptotique formelle

Tout d'abord on présente une méthode d'approximation de la solution. D'après [64] on suppose que la solution du problème (1.17) peut être présentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \mathcal{R}_\varepsilon(x) \\ &= v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \dots, \end{aligned} \quad (1.34)$$

où les fonctions  $v$  et  $v'$  dépendant de  $x$  sont des termes réguliers d'approximation, c'est-à-dire des fonctions définies dans  $\Omega$ ,  $w$  dépend de  $\xi = \varepsilon^{-1}x$  est une solution d'un problème aux limites extérieur. Afin de simplifier la notation dans la suite, le reste  $\mathcal{R}_\varepsilon(x)$  sera noté par trois points ("..."). On reviendra à l'analyse de ce terme plus tard où on le notera  $\hat{u}^\varepsilon(x) := \mathcal{R}_\varepsilon(x)$  et on montrera qu'il est un élément de l'espace  $\Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))$ .

On considère maintenant les termes  $v$ ,  $w$  et  $v'$  dans (1.34) et on en déduit des problèmes aux limites dont les trois termes sont des solutions.

On suppose que le premier terme  $v$  est une solution du premier problème aux limites qui a la forme (1.24). En effet, rappelons d'abord que pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\xi := \varepsilon^{-1}x$ , alors on sait que  $\Delta_x w(\varepsilon^{-1}x) = \varepsilon^{-2} \Delta_\xi w(\xi)$ , et d'après (1.34) on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_x u^\varepsilon(x) &= \Delta_x v(x) + \Delta_x w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon \Delta_x v'(x) + \Delta \mathcal{R}_\varepsilon(x) \\ &= \Delta_x v(x) + \varepsilon^{-2} \Delta_\xi w(\xi) + \varepsilon \Delta_x v'(x) + \Delta \mathcal{R}_\varepsilon(x) \\ &= \Delta_x v(x) + \varepsilon^{-2} \Delta_\xi w(\xi) + \varepsilon \Delta_x v'(x) + \dots, \end{aligned} \quad (1.35)$$

où "... (trois points)" représente les termes d'ordre supérieur à un en  $\varepsilon$ , qui sont des éléments du reste  $\Delta \mathcal{R}_\varepsilon(x)$  (voir (1.97)). Injectant (1.34), (1.35) à (1.17) on a :

$$-\Delta_x v(x) - \varepsilon^{-2} \Delta_\xi w(\xi) - \varepsilon \Delta_x v'(x) + \dots = F(x, v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \dots). \quad (1.36)$$

D'après la formule de Taylor pour  $F$  par rapport au deuxième terme au voisinage de  $v(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}^3$  fixé on obtient (prenant en considération la condition  $w(\varepsilon^{-1}x) = w(\xi) \rightarrow 0$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $|\xi| \rightarrow \infty$ ) :

$$F(x, v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \dots) = F(x, v(x)) + (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x)) F'_v(x, v(x)) + \dots \quad (1.37)$$

Alors, à partir de (1.36) et (1.37) on obtient :

$$-\Delta_x v(x) - \varepsilon^{-2} \Delta_\xi w(\xi) - \varepsilon \Delta_x v'(x) + \dots = F(x, v(x)) + (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x)) F'_v(x, v(x)) + \dots \quad (1.38)$$

Or  $-\Delta_x v(x) = F(x, v(x))$ , les premiers termes dans (1.38) s'annulent et on a

$$-\varepsilon^{-2} \Delta_\xi w(\xi) - \varepsilon \Delta_x v'(x) + \dots = (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x)) F'_v(x, v(x)) + \dots, \quad (1.39)$$

ensuite, multipliant par  $\varepsilon^2$  :

$$-\Delta_\xi w(\xi) = \varepsilon^3 \Delta_x v'(x) + \varepsilon^2 (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x)) F'_v(x, v(x)) + \dots \quad (1.40)$$

Comme on l'a déjà dit,  $w$  est une solution du problème extérieur, c'est-à-dire du problème défini pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}$ , donc en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  et en prenant en considération la condition  $w(\varepsilon^{-1}x) = w(\xi) \rightarrow 0$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ , c-à-d.  $|\xi| \rightarrow \infty$  (voir (1.51)), on obtient d'après (1.40) l'équation suivante :

$$-\Delta_\xi w(\xi) = 0, \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \quad (1.41)$$

donc  $w(\xi)$  est une fonction harmonique dans le domaine non-borné. Les conditions au bord pour  $w(\xi)$  viennent du fait que la solution  $u^\varepsilon(x)$  s'annule sur  $\partial\omega_\varepsilon$ . Alors pour tout  $x \in \partial\omega_\varepsilon$  si  $\varepsilon \rightarrow 0$  on a d'une part :

$$v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) \rightarrow 0, \quad (1.42)$$

et d'autre part :

$$v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) = v(\mathcal{O}) + w(\varepsilon^{-1}x) + O(\varepsilon). \quad (1.43)$$

Finalement on obtient

$$w(\xi) = -v(\mathcal{O}), \xi \in \partial\omega. \quad (1.44)$$

Et on obtient le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta_\xi w(\xi) = 0, & \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ w(\xi) = -v(\mathcal{O}), & \xi \in \partial\omega. \end{cases} \quad (1.45)$$

La solution fondamentale du problème (1.45) de forme  $-\Delta\phi(\xi) = \delta(0)$  dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  est la fonction

$$\phi(\xi) = \frac{1}{4\pi|\xi|} \quad (1.46)$$

vérifiant l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi \cdot \nabla v \, d\xi = v(0) \quad (1.47)$$

pour toute fonction  $v$  de l'espace  $C_0^1(\mathbb{R}^3)$ , c'est-à-dire pour les fonctions de classe  $C^1$  et de support  $\text{supp } v := K = \{x : v(x) \neq 0\} \Subset \mathbb{R}^3$ . Dans la notation  $\delta(0)$  est une distribution d'ordre zéro [1], i.e. une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace de fonctions  $C^0(\mathbb{R}^3)$

telle que sa valeur pour la fonction  $v \in C^0(\mathbb{R}^3)$  est notée  $\langle v, \delta(0) \rangle = v(0)$ . Une solution quelconque de (1.45) a la forme

$$w(\xi) = a\phi(\xi) + b(\xi). \quad (1.48)$$

On déduit le coefficient  $a$  et la fonction  $b(\xi)$  à partir de la condition (1.44) sur la frontière  $\partial\omega$  et en utilisant le fait que la solution (1.48) s'annule à l'infini. Pour cela, on introduit le potentiel<sup>1</sup> [57], [87]  $P$ , qui est une fonction harmonique dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}$  telle que  $P(\xi) = 1$  sur  $\partial\omega$  et dont la représentation asymptotique pour  $|\xi| \rightarrow \infty$  est :

$$P(\xi) = |\xi|^{-1} \text{cap}(\omega) + O(|\xi|^{-2}), \quad (1.49)$$

où  $\text{cap}(\omega)$  est la capacité<sup>2</sup> de  $\bar{\omega}$  et  $O(|\xi|^{-2})$  signifie

$$|O(|\xi|^{-2})| \leq \frac{c}{|\xi|^2} \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad (1.50)$$

avec certaine constante  $c > 0$ . On peut écrire alors l'égalité suivante pour  $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} w(\xi) &= -v(\mathcal{O})P(\xi) \\ &= -v(\mathcal{O})|\xi|^{-1} \text{cap}(\omega) - v(\mathcal{O})O(|\xi|^{-2}) \\ &= -\frac{4\pi v(\mathcal{O}) \text{cap}(\omega)}{4\pi|\xi|} - v(\mathcal{O})O(|\xi|^{-2}). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Si l'on pose alors

$$a = 4\pi v(\mathcal{O}) \text{cap}(\omega), \quad b(\xi) = -v(\mathcal{O})O(|\xi|^{-2}), \quad (1.52)$$

on obtient la forme suivante pour la fonction  $w$  :

$$w(\varepsilon^{-1}x) = -|x|^{-1} \varepsilon v(\mathcal{O}) \text{cap}(\omega) + O(\varepsilon^2 |x|^{-2}), \quad (1.53)$$

donc pour  $\xi = \varepsilon^{-1}x$ , tel que  $|\xi| \rightarrow \infty$  on a

$$w(\xi) = -|\xi|^{-1} v(\mathcal{O}) \text{cap}(\omega) + O(|\xi|^{-2}). \quad (1.54)$$

Introduisons maintenant le problème aux limites pour la fonction  $v'(x)$ . Tout d'abord on déduit la valeur de la fonction  $v'(x)$  sur la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . D'après (1.17) et (1.34), on a pour tout  $x \in \partial\Omega$

$$0 = u^\varepsilon(x) = v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \dots \quad (1.55)$$

D'après (1.24), la fonction  $v(x) = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et puis d'après (1.53) on en déduit, que  $w(\varepsilon^{-1}x) = -\varepsilon a\phi(x) + \dots$  quel que soit  $x \in \Omega \setminus \omega_\varepsilon$ , d'où :

$$0 = -\varepsilon a\phi(x) + \varepsilon v'(x) + \dots, \quad (1.56)$$

---

<sup>1</sup>La fonction  $P$  définit le potentiel, elle est connue dans la littérature ainsi que ses valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ . On introduit cette fonction car la fonction  $w$  a des propriétés qui ressemblent à un potentiel et on espère que  $w$  peut être déterminée à l'aide de ce potentiel.

<sup>2</sup>la capacité de  $\omega$  avec  $\bar{\omega} \subset \mathbb{R}^3$  compact, est défini par  $\text{cap}(\omega) = \inf_{\omega} \left\{ \int |\nabla \varphi|^2 : \varphi|_{\omega} \geq 1, \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^3) \right\}$  où  $C_0^1(\mathbb{R}^3)$  est un espace de fonctions  $C^1$  à support compact.

donc la condition au bord est de forme

$$v'(x) = a\phi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.57)$$

Afin de déduire la forme de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $v'(x)$ , on utilise (1.35). On a

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta_x u^\varepsilon(x) - F(x, u^\varepsilon(x)) \\ &= -\Delta_x v(x) - \Delta_x w(\varepsilon^{-1}x) - \varepsilon \Delta_x v'(x) - F(x, u^\varepsilon(x)) + \dots \end{aligned} \quad (1.58)$$

D'après (1.24)  $-\Delta_x v(x) = -F(x, v(x))$  pour  $x \in \Omega$ , de plus, d'après (1.45) on déduit que  $\Delta_x w(\varepsilon^{-1}x) = 0$  quel que soit  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}$ , alors

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta_x v'(x) &= F(x, u^\varepsilon(x)) - F(x, v(x)) + \dots \\ &= F(x, v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \dots) - F(x, v(x)) + \dots \\ &= (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \dots) F'_v(x, v(x)) + \dots \\ &= \varepsilon(-a\phi(x) + v'(x)) F'_v(x, v(x)) + \dots \end{aligned} \quad (1.59)$$

ce qui implique (en passant à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$$-\Delta_x v'(x) - v'(x) F'_v(x, v(x)) = -a\phi F'_v(x, v(x)). \quad (1.60)$$

En ajoutant la condition aux limites, on obtient le problème aux limites pour la fonction  $v'(x)$  suivant

$$\begin{cases} -\Delta_x v'(x) - v'(x) F'_v(x, v(x)) = -a\phi(x) F'_v(x, v(x)), & x \in \Omega, \\ v'(x) = a\phi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.61)$$

où  $a = 4\pi v(\mathcal{O}) \text{cap}(\omega)$ .

On peut montrer que  $F'(\cdot, v)\phi \in \Lambda_\gamma^{0,\alpha}(\Omega)$  pour tout  $\gamma > 1 + \alpha$  et la solution  $v' \in \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega)$  du problème (1.61) est telle que  $v' - v'(\mathcal{O}) \in \Lambda_\gamma^{2,\alpha}(\Omega)$ , où  $\beta - \alpha \in (2, 3)$  et  $\gamma - \alpha \in (1, 2)$  quelconques.

### 1.3.2 Approximation asymptotique de la solution $u^\varepsilon$

On cherche la solution du problème (1.17) parmi des fonctions suivantes :

$$u^\varepsilon(x) = v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x), \quad (1.62)$$

avec  $v(x)$  solution du problème aux limites (1.24),  $w(\varepsilon^{-1}x)$  solution du problème aux limites (1.25) et  $v'(x)$  solution de problème linéarisé (1.26). Le reste dans (1.62) noté  $\hat{u}^\varepsilon(x)$  peut être écrit alors comme suit :

$$\hat{u}^\varepsilon(x) = u^\varepsilon(x) - v(x) - w(\varepsilon^{-1}x) - \varepsilon v'(x). \quad (1.63)$$

L'objectif est de montrer que le reste est "petit", c'est-à-dire que l'expression de la solution approchée

$$u_\varepsilon = v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) \quad (1.64)$$

est une approximation de la solution  $u^\varepsilon(x)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La démonstration de ce fait est une application du théorème du point fixe de Banach.

On a alors pour  $x \in \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$

$$-\Delta_x \hat{u}^\varepsilon(x) = -\Delta_x u^\varepsilon(x) + \Delta_x v(x) + \Delta_x w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon \Delta_x v'(x), \quad (1.65)$$

car  $\Delta_x w(\varepsilon^{-1}x) = \varepsilon^{-2} \Delta_\xi w(\varepsilon^{-1}x) = 0$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}$  et d'après (1.61) pour  $x \in \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon$ ,

$$\varepsilon \Delta_x v'(x) = -\varepsilon v'(x) F'_v(x, v(x)) + \varepsilon a \phi(x) F'_v(x, v(x)), \quad (1.66)$$

alors

$$\begin{aligned} -\Delta_x \hat{u}^\varepsilon(x) &= F(x, u^\varepsilon(x)) - F(x, v(x)) - \varepsilon F'_v(x, v(x)) v' + \varepsilon a \phi(x) F'_v(x, v(x)) \\ &= F(x, v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)) - F(x, v(x)) \\ &\quad - \varepsilon (v'(x) - a \phi(x)) F'_v(x, v(x)). \end{aligned} \quad (1.67)$$

En remarquant de plus que sur la frontière extérieure de  $\Omega$  on a  $u^\varepsilon(x) = 0$  et  $v(x) = 0$ , alors

$$\hat{u}^\varepsilon(x) = -w(\varepsilon^{-1}x) - \varepsilon a \phi(x) := \hat{g}_\Omega^\varepsilon(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.68)$$

De plus sur la frontière de  $\omega_\varepsilon$  on a  $u^\varepsilon(x) = 0$ ,  $w(\varepsilon^{-1}x) = -v(\mathcal{O})$ , alors

$$\hat{u}^\varepsilon(x) = -v(x) + v(\mathcal{O}) - \varepsilon v'(x) := \hat{g}_\omega^\varepsilon(x), \quad x \in \partial\omega_\varepsilon. \quad (1.69)$$

Avec les notations précédentes, on peut formuler le problème non-linéaire sous la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_x \hat{u}^\varepsilon(x) &= \hat{\mathcal{F}}^\varepsilon(x, \hat{u}^\varepsilon), & x \in \Omega(\varepsilon), \\ \hat{u}^\varepsilon(x) &= \hat{g}_\Omega^\varepsilon(x), & x \in \partial\Omega, \\ \hat{u}^\varepsilon(x) &= \hat{g}_\omega^\varepsilon(x), & x \in \partial\omega(\varepsilon), \end{cases} \quad (1.70)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}^\varepsilon(x, \hat{u}^\varepsilon) &= F(x, v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)) - F(x, v(x)) \\ &\quad - \varepsilon (v'(x) - a \phi(x)) F'_v(x, v(x)), \\ \hat{g}_\Omega^\varepsilon(x) &= -w(\varepsilon^{-1}x) - \varepsilon a \phi(x), \\ \hat{g}_\omega^\varepsilon(x) &= -v(x) + v(\mathcal{O}) - \varepsilon v'(x), \end{aligned} \quad (1.71)$$

dont la solution est la fonction définie par (1.63).

Afin de démontrer l'existence d'une solution s'écrivant sous la forme (1.62) du problème (1.70) on applique le théorème du point fixe. On va formuler le théorème suivant :

**Théorème 4.** Soient les indices  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\kappa$  tels que

$$\begin{aligned} \alpha &\in (0, 1), \\ \beta - \alpha &\in (2, 3), \\ \kappa &\in (0, 1), \\ \beta - \alpha - 1 &\geq 1 + \kappa. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Supposons que l'hypothèse 3 a lieu. Soient  $|V(x)| \leq C$ ,  $|V_1(x)| \leq C_1$ ,  $|V_2(x)| \leq C_2$  des fonctions données, avec  $C, C_1, C_2$  constantes et  $x \in \Omega$ . Supposons aussi que pour  $F$  définie par

$$\mathbf{F}(x, V(x)) = F(x, v(x) + V(x)) - F(x, v(x)) - V(x)F'_v(x, v(x)). \quad (1.73)$$

on a les inégalités suivantes :

$$|\mathbf{F}(x, V(x))| \leq c |V(x)|^{1+\kappa}, \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{F}(x, V_1(x)) - \mathbf{F}(y, V_2(y))| \\ & \leq c(|x - y|^\alpha (|V_1(x)| + |V_2(y)|) \\ & + |V_1(x) - V_2(y)| (|V_1(x)|^\kappa + |V_2(y)|^\kappa)), \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{F}(x, V_1(x)) - \mathbf{F}(x, V_2(x)) - (\mathbf{F}(y, V_1(y)) - \mathbf{F}(y, V_2(y)))| \\ & \leq c(|V_1(x) - V_2(x) - (V_1(y) - V_2(y))| \mathbf{V}(x, y)^\kappa \\ & + |x - y|^\alpha (|V_1(x) - V_2(x)| + |V_1(y) - V_2(y)|) \mathbf{V}(x, y)^\kappa \\ & + (|V_1(x) - V_2(x)| + |V_1(y) - V_2(y)|) \times \\ & \times (|V_1(x) - V_2(y)| + |V_1(y) - V_2(y)|)(1 + \mathbf{V}(x, y))^{\kappa-1}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

où

$$\mathbf{V}(x, y) = |V_1(x)| + |V_2(x)| + |V_1(y)| + |V_2(y)|. \quad (1.77)$$

Alors il existe des constantes  $\mathfrak{C}$  et  $\varepsilon_0$  telles que pour  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ , le problème non-linéaire (1.70) admet une unique solution  $\hat{u}^\varepsilon$ , petite au sens de la norme  $\|\cdot; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|$

$$\|\hat{u}^\varepsilon; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\| \leq \mathfrak{C}\varepsilon^{1+\kappa}, \quad (1.78)$$

et par conséquent le problème (1.17) admet au moins une solution s'écrivant sous la forme (1.62).

**Preuve.** Tout d'abord, on va estimer les termes  $\hat{g}_\Omega^\varepsilon$  et  $\hat{g}_\omega^\varepsilon$  dans (1.70). Remarquons d'abord que d'après (1.51) et (1.49),  $x \mapsto w(\varepsilon^{-1}x) + a\varepsilon\phi(x)$  est la fonction lisse sur  $\partial\Omega$ . Alors pour tout  $x \in \Omega$ , il existe une constante  $c$  telle que  $|x| \geq c > 0$  et on a les inégalité suivantes

$$\begin{aligned} |w(\varepsilon^{-1}x) + a\varepsilon\phi(x)| & \leq |-v(\mathcal{O})P(\xi) - v(\mathcal{O})cap(\omega)|\xi|^{-1}| \\ & \leq |v(\mathcal{O})| |P(\xi) - cap(\omega)|\xi|^{-1}| \\ & \leq |v(\mathcal{O})| |\xi|^{-1}cap(\omega) + O(\varepsilon^2|x|^{-2}) - cap(\omega)|\xi|^{-1}| \\ & \leq |v(\mathcal{O})| |O(\varepsilon^2|x|^{-2})| \\ & \leq c\varepsilon^2|x|^{-2} \\ & \leq c\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} |\nabla_x^k w(\varepsilon^{-1}x) + a\varepsilon\nabla_x^k \phi(x)| & \leq |-v(\mathcal{O})\nabla_x^k P(\xi) - v(\mathcal{O})cap(\omega)\nabla_x^k \xi|^{-1}| \\ & \leq |v(\mathcal{O})| |\nabla_x^k P(\xi) - cap(\omega)\nabla_x^k \xi|^{-1}| \\ & \leq \varepsilon^{-k}|v(\mathcal{O})| |\nabla_\xi^k P(\xi) - cap(\omega)\nabla_\xi^k \xi|^{-1}| \\ & \leq \varepsilon^{-k}|v(\mathcal{O})| |\xi|^{-2-k} \\ & \leq c\varepsilon^{-k}|\xi|^{-2-k} \\ & \leq c\varepsilon^2|x|^{-2-k} \\ & \leq c\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Remarquant par la suite que si  $C^{2,\alpha} \hookrightarrow \Lambda_\beta^{2,\alpha}$ , alors  $\|\cdot; \Lambda_\beta^{2,\alpha}\| \leq \|\cdot; C^{2,\alpha}\|$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} \|\hat{g}_\Omega^\varepsilon; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\partial\Omega)\| &\leq c \|\hat{g}_\Omega^\varepsilon; C^{2,\alpha}(\partial\Omega)\| \leq c \|\hat{g}_\Omega^\varepsilon; C^3(\partial\Omega)\| \\ &\leq c[\|\hat{g}_\Omega^\varepsilon\| + |\nabla_x \hat{g}_\Omega^\varepsilon| + |\nabla_x^2 \hat{g}_\Omega^\varepsilon| + |\nabla_x^3 \hat{g}_\Omega^\varepsilon|] \\ &\leq c\varepsilon^2. \end{aligned} \quad (1.81)$$

De plus

$$\begin{aligned} &\|\hat{g}_\omega^\varepsilon; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\partial\omega)\| \\ &= \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\omega} |x|^{\beta-2-\alpha+k} |\nabla_x^k \hat{g}_\omega^\varepsilon(x)| + \sup_{\substack{x,y \in \partial\omega \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} |\nabla_x^2 \hat{g}_\omega^\varepsilon(x) - \nabla_y^2 \hat{g}_\omega^\varepsilon(y)| \\ &\leq \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\omega} |x|^{\beta-2-\alpha+k} |\nabla_x^k(-v(x) + v(\mathcal{O}) - \varepsilon v'(x))| \\ &\quad + \sup_{\substack{x,y \in \partial\omega \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} |\nabla_x^2(-v(x) + v(\mathcal{O}) - \varepsilon v'(x)) - \nabla_y^2(-v(y) + v(\mathcal{O}) - \varepsilon v'(y))| \\ &\leq \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\omega} |x|^{\beta-2-\alpha+k} (|\nabla_x^k(v(x) - v(\mathcal{O}))| + \varepsilon |\nabla_x^k v'(x)|) \\ &\quad + \sup_{\substack{x,y \in \partial\omega \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} (|\nabla_x^2 v(x) - \nabla_y^2 v(y)| + \varepsilon |\nabla_x^2 v'(x) - \nabla_y^2 v'(y)|) \\ &= \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\omega} |x|^{\beta-2-\alpha+k} |\nabla_x^k(v(x) - v(\mathcal{O}))| + \sup_{\substack{x,y \in \partial\omega \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} |\nabla_x^2 v(x) - \nabla_y^2 v(y)| \\ &\quad + \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\omega} |x|^{\beta-2-\alpha+k} \varepsilon |\nabla_x^k v'(x)| + \sup_{\substack{x,y \in \partial\omega \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} \varepsilon |\nabla_x^2 v'(x) - \nabla_y^2 v'(y)|. \end{aligned} \quad (1.82)$$

On sait que  $x \in \partial\omega_\varepsilon$ ,  $|x| \leq \varepsilon$ , alors d'après l'estimation

$$|x|^\beta \leq \sum_{k=0}^2 |x|^{\beta-2-\alpha+k} \leq \varepsilon^{\beta-2-\alpha} (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \leq 2\varepsilon^{\beta-2-\alpha}, \quad (1.83)$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\omega} |x|^{\beta-2-\alpha+k} |\nabla_x^k(v(x) - v(\mathcal{O}))| + \sup_{\substack{x,y \in \partial\omega, \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} |\nabla_x^2 v(x) - \nabla_y^2 v(y)| \\ &\leq c\varepsilon^{\beta-2-\alpha} \left( \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\Omega} |\nabla_x^k(v(x) - v(\mathcal{O}))| + \sup_{\substack{x,y \in \partial\omega, \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x-y|^{-\alpha} |\nabla_x^2 v(x) - \nabla_y^2 v(y)| \right) \\ &\leq c\varepsilon^{\beta-2-\alpha} \|v; C^{2,\alpha}(\Omega)\|, \end{aligned} \quad (1.84)$$

où on a pris  $\beta'$  tel que  $\beta' - \alpha \in (2, 3)$ ,  $\beta - \beta' > 0$ . On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\omega} |x|^{\beta-2-\alpha+k} \varepsilon \left| \nabla_x^k v'(x) \right| + \sup_{\substack{x, y \in \partial\omega, \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} \varepsilon \left| \nabla_x^2 v'(x) - \nabla_y^2 v'(y) \right| \\
& \leq c \varepsilon^{\beta-2-\alpha} \varepsilon \left( \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \partial\omega} |x|^{\beta'-2-\alpha+k} \left| \nabla_x^k v'(x) \right| \right. \\
& \quad \left. + \sup_{\substack{x, y \in \partial\omega, \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^{\beta'} |x-y|^{-\alpha} \varepsilon \left| \nabla_x^2 v'(x) - \nabla_y^2 v'(y) \right| \right) \varepsilon^{-\beta'+2+\alpha} \\
& \leq c \varepsilon^{\beta-\beta'+1} \|v'; \Lambda_{\beta'}^{2,\alpha}(\Omega)\|.
\end{aligned} \tag{1.85}$$

Finalement

$$\| \hat{g}_\omega^\varepsilon; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\partial\omega) \| \leq c \left( \varepsilon^{\beta-2-\alpha} \|v; C^{2,\alpha}(\Omega)\| + \varepsilon^{1+\beta-\beta'} \|v'; \Lambda_{\beta'}^{2,\alpha}(\Omega)\| \right). \tag{1.86}$$

On poursuit maintenant l'analyse pour le terme  $\hat{\mathcal{F}}^\varepsilon(x; \hat{u}^\varepsilon)$ . Remplaçant dans (1.73) la fonction  $V(x)$  par  $w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)$ , on a

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}(x, w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)) \\
& = F(x, v(x) + w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)) - F(x, v(x)) \\
& \quad - (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)) F'_v(x, v(x)).
\end{aligned} \tag{1.87}$$

On soustrait (1.87) et la première équation de (1.71) on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{F}}^\varepsilon(x; \hat{u}^\varepsilon) & = \mathbf{F}(x, w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)) \\
& \quad + (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon a\phi(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)) F'_v(x, v(x)).
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Alors pour estimer la fonction  $\hat{\mathcal{F}}^\varepsilon(x; \hat{u}^\varepsilon)$ , on doit trouver des estimations pour les membres de droite dans (1.88). On commence par trouver l'estimation pour l'expression  $(w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon a\phi(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)) F'_v(x, v(x))$ . D'après l'hypothèse 2 on sait que  $(x \mapsto F'_v(x, v(x))) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ , alors en se référant à (1.49) on a

$$\begin{aligned}
& \| (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon a\phi(x)) F'_v(x, v(x)); \Lambda_\beta^{0,\alpha}(\Omega(\varepsilon)) \| \\
& = \sup_{x \in \Omega(\varepsilon)} |x|^{\beta-\alpha} \left| (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon a\phi(x)) F'_v(x, v(x)) \right| \\
& \quad + \sup_{\substack{x, y \in \partial\omega_\varepsilon, \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} \left| (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon a\phi(x)) F'_v(x, v(x)) \right. \\
& \quad \left. - (w(\varepsilon^{-1}y) + \varepsilon a\phi(y)) F'_v(y, v(y)) \right| \\
& \leq c \left( \sup_{x \in \Omega(\varepsilon)} |x|^{\beta-\alpha} \left( \frac{|x|}{\varepsilon} \right)^{-2} + \sup_{\substack{x, y \in \partial\omega_\varepsilon, \\ |x-y| < \frac{|x|}{2}}} |x|^\beta |x-y|^{-\alpha} \left| \frac{x}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon} \right| \left( \frac{|x|}{\varepsilon} \right)^{-3} \right) \\
& \leq c \varepsilon^2 \sup_{x \in \Omega(\varepsilon)} (|x|^{\beta-\alpha} |x|^{-2} + |x|^{\beta+1-\alpha} |x|^{-3}) \leq c \varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{1.89}$$

On a aussi utilisé les inégalités suivantes

$$|(w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon a\phi(x))F'_v(x, v(x))| \leq c |o(\varepsilon^2|x|^{-2})| \leq \left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^2 \quad (1.90)$$

et

$$\begin{aligned} & |(w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon a\phi(x))F'_v(x, v(x)) + (w(\varepsilon^{-1}y) + \varepsilon a\phi(y))F'_v(y, v(y))| \\ & \leq c |o(\varepsilon^2|x|^{-2}) - o(\varepsilon^2|y|^{-2})| \leq c \left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^{-3} \left| \frac{|x|}{\varepsilon} - \frac{|y|}{\varepsilon} \right| \\ & \leq c \left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)^{-3} \left| \frac{x}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon} \right|. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Pour estimer le premier terme dans (1.88) on va formuler et démontrer les lemmes suivants :

**Lemma 1.** Soit  $V \in \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))$  et  $\beta - \alpha \in (2, 3)$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\kappa \in (0, 1)$ . Alors pour  $x \in \Omega(\varepsilon)$  et  $|x - y| < \frac{|x|}{2}$  les inegalités suivantes ont lieu :

$$|x|^{\beta-\alpha} |V(x)|^{1+\kappa} \leq c \|V; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{1+\kappa}, \quad (1.92)$$

$$|x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x - y|^{-\alpha} |V(x) - V(y)| \leq c \|V; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|. \quad (1.93)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} |x|^{\beta-\alpha} |V(x)|^{1+\kappa} & \leq |x|^{\beta-\alpha} |x|^{-(1+\kappa)(\beta-2-\alpha)} (|x|^{\beta-2-\alpha} |V(x)|)^{1+\kappa} \\ & \leq |x|^{2-\kappa(\beta-2-\alpha)} \|V; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{1+\kappa}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Car  $2 - \kappa(\beta - 2 - \alpha) \geq 2 - 1(3 - 2 - \alpha) > 1 > 0$ . Or  $\frac{1}{2}|x| < |y| < \frac{3}{2}|x|$  et d'après le fait que  $|x - y| < \frac{|x|}{2}$ , on obtient en se basant sur la formule de Leibniz-Newton :

$$\begin{aligned} & |x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x - y|^{-\alpha} |V(x) - V(y)|^{1+\kappa} \\ & \leq c |x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x - y|^{-\alpha} |x|^{-\beta+1+\alpha} |x - y| \sup_{x \in \Omega(\varepsilon)} (|x|^{\beta-1-\alpha} |\nabla_x V(x)|) \\ & \leq c |x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x|^{1-\alpha} |x|^{-\beta+1+\alpha} \|V; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\| \end{aligned} \quad (1.95)$$

puisque

$$\beta - (\beta - \alpha)\frac{\kappa}{1 + \kappa} + 1 - \alpha - \beta + 1 + \alpha = 2 - (\beta - \alpha)\frac{\kappa}{1 + \kappa} \geq \frac{2 - (\beta - \alpha - 2)\kappa}{1 + \kappa} > 0.$$

□

**Lemma 2.** Sous les conditions (1.72) sur  $\alpha, \beta, \kappa$  et pour  $x \in \Omega(\varepsilon)$ ,  $|x - y| < \frac{|x|}{2}$ , on a

$$|x|^{\beta-\alpha} |w(\varepsilon^{-1}x)|^{1+\kappa} \leq c\varepsilon^{1+\kappa}, \quad (1.96)$$

$$|x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x - y|^{-\alpha} |w(\varepsilon^{-1}x) - w(\varepsilon^{-1}y)|^{1+\kappa} \leq c\varepsilon. \quad (1.97)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} |x|^{\beta-\alpha} |w(\varepsilon^{-1}x)|^{1+\kappa} &\leq c |x|^{\beta-\alpha} \left(1 + \frac{|x|}{\varepsilon}\right)^{-1-\kappa} = c\varepsilon^{1+\kappa} \frac{|x|^{\beta-\alpha}}{(\varepsilon + |x|)^{1+\kappa}} \\ &\leq c\varepsilon^{1+\kappa}, \end{aligned} \quad (1.98)$$

car  $\beta - \alpha > 2$  et  $1 + \kappa < 2$ . Ensuite on utilise l'estimation  $|P(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{-1}$  pour le potentiel et la forme (1.51),

$$\begin{aligned} &|x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x-y|^{-\alpha} |w(\varepsilon^{-1}x) - w(\varepsilon^{-1}y)| \\ &\leq c |x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x-y|^{-\alpha} \left|\frac{x}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon}\right| \left(1 + \frac{|x|}{\varepsilon}\right)^{-2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega} (1 + |\xi|)^2 |\nabla_{\xi} w(\xi)| \\ &\leq c\varepsilon |x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x|^{1-\alpha} (\varepsilon + |x|)^{-2} \\ &\leq c\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.99)$$

où encore on a appliqué la formule de Leibnitz-Newton, l'inégalité  $|\nabla_{\xi} P(\xi)| \leq c(1 + |\xi|)^{-2}$  et la formule  $\beta - \alpha - (\beta - \alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa} = \frac{\beta - \kappa}{1+\kappa} \geq 1$ .  $\square$

D'après les lemmes 1 et 2 et avec les hypothèses (1.73)-(1.77) on peut introduire les estimations suivantes : d'une part - on estime le premier terme dans (1.88) multiplié par le poids noté  $|x|^{\beta-\alpha}$ ,

$$\begin{aligned} &|x|^{\beta-\alpha} |\mathbf{F}(x, w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^{\varepsilon}(x))| \\ &\leq c |x|^{\beta-\alpha} (|w(\varepsilon^{-1}x)|^{1+\kappa} + \varepsilon^{1+\kappa} |v'(x)|^{1+\kappa} + |\hat{u}^{\varepsilon}(x)|^{1+\kappa}) \\ &\leq c(\varepsilon^{1+\kappa} + \|\hat{u}^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{1+\kappa}), \end{aligned} \quad (1.100)$$

d'autre part - on montre que les différences à poids sont bornées

$$\begin{aligned} &|x|^{\beta} |x-y|^{-\alpha} |\overbrace{\mathbf{F}(x, w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^{\varepsilon}(x))}^{=V(x)} - \mathbf{F}(y, V(y))| \\ &\leq c |x|^{\beta} (|V(x)|^{1+\kappa} + |x-y|^{-\alpha} |V(x) - V(y)| (|V(x)|^{\kappa} + |V(y)|^{\kappa})) \\ &\leq c(\varepsilon^{1+\kappa} + \|\hat{u}^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{1+\kappa} + (\varepsilon^{\kappa} + \|\hat{u}^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{\kappa})) \\ &\quad |x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x-y|^{-\alpha} \left\{ \left|w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - w\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right| + \varepsilon |v'(x) - v'(y)| + |\hat{u}^{\varepsilon}(x) - \hat{u}^{\varepsilon}(y)| \right\} \\ &\leq c(\varepsilon^{1+\kappa} + \|\hat{u}^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{1+\kappa}), \end{aligned} \quad (1.101)$$

ensuite on montre la continuité locale de la première partie dans (1.88),

$$\begin{aligned} &|x|^{\beta-\alpha} |\overbrace{\mathbf{F}(x, w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}_1^{\varepsilon}(x))}^{=V_1(x)} - \overbrace{\mathbf{F}(x, w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}_2^{\varepsilon}(x))}^{=V_2(x)}| \\ &\leq c |x|^{\beta-\alpha} |\hat{u}_1^{\varepsilon}(x) - \hat{u}_2^{\varepsilon}(x)| (|V_1(x)|^{\kappa} + |V_2(x)|^{\kappa}) \\ &\leq c \|\hat{u}_1^{\varepsilon} - \hat{u}_2^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\| (\varepsilon^{\kappa} + \|\hat{u}_1^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{\kappa} + \|\hat{u}_2^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{\kappa}), \end{aligned} \quad (1.102)$$

Enfin on montre la continuité locale de l'application  $\mathbf{F}(\cdot, V_i(\cdot))$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} &|x|^{\beta} |x-y|^{-\alpha} |\mathbf{F}(x, V_1(x)) - \mathbf{F}(x, V_2(x)) - (\mathbf{F}(y, V_1(y)) - \mathbf{F}(y, V_2(y)))| \\ &\leq c |x|^{\beta-(\beta-\alpha)\frac{\kappa}{1+\kappa}} |x-y|^{-\alpha} (|V_1(x) - V_2(x)| + |V_1(y) - V_2(y)|) \times \\ &\quad \times (\varepsilon^{\kappa} + \|\hat{u}_1^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\| + \|\hat{u}_2^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|) \\ &\leq c \|\hat{u}_1^{\varepsilon} - \hat{u}_2^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\| (\varepsilon^{\kappa} + \|\hat{u}_1^{\varepsilon}; \Lambda_{\beta}^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))\|^{\kappa}). \end{aligned} \quad (1.103)$$

Etant données les estimations précédentes, on peut appliquer le théorème du point fixe afin de montrer l'existence d'un reste  $\hat{u}^\varepsilon$  (d'ordre supérieur à un par rapport à  $\varepsilon$ ). Pour cela, on écrit le problème (1.70) sous la forme d'une équation abstraite dans l'espace de Banach  $\mathfrak{R} = \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon))$ ,

$$\hat{u}^\varepsilon = \mathfrak{G}\hat{u}^\varepsilon, \quad (1.104)$$

où

$$\mathfrak{G}\hat{u}^\varepsilon = \mathfrak{L}^{-1}(\hat{\mathcal{F}}^\varepsilon(\cdot; \hat{u}^\varepsilon), \hat{g}_\Omega^\varepsilon, \hat{g}_\omega^\varepsilon), \quad (1.105)$$

et  $\mathfrak{L}$  est un isomorphisme (1.28) pour le problème aux limites dans le domaine avec un petit trou. Soit  $\hat{u}^\varepsilon$  appartenant à une boule  $\mathcal{B} \subset \mathfrak{R}$  de taille  $\mathfrak{C}\varepsilon^{1+\kappa}$ . Il reste à démontrer les propriétés suivantes : l'application  $\mathfrak{G}$  envoie  $\mathcal{B}$  dans elle-même

$$\mathcal{B} \ni \hat{u}^\varepsilon \Rightarrow \mathfrak{G}\hat{u}^\varepsilon \in \mathcal{B}, \quad (1.106)$$

et cette application est une contraction dans cette boule, c'est-à-dire

$$\| \mathfrak{G}\mathfrak{v} - \mathfrak{G}\mathfrak{w}; \mathfrak{R} \| \leq k \| \mathfrak{v} - \mathfrak{w}; \mathfrak{R} \| \quad \forall \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathfrak{R} \quad \text{pour } k < 1. \quad (1.107)$$

D'après (1.81), (1.86), (1.91), (1.100), (1.101) on obtient

$$\begin{aligned} \| \mathfrak{G}\hat{u}^\varepsilon; \mathfrak{R} \| &\leq c(\| \hat{\mathcal{F}}^\varepsilon; \Lambda_\beta^{0,\alpha}(\Omega(\varepsilon)) \| + \| \hat{g}_\Omega^\varepsilon; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon)) \| + \| \hat{g}_\omega^\varepsilon; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega(\varepsilon)) \|) \\ &\leq c(\varepsilon^{1+\kappa} + \| \hat{u}^\varepsilon; \mathfrak{R} \|^{1+\kappa} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{\beta-1-\alpha} + \varepsilon^{1+\beta-\beta'}). \end{aligned} \quad (1.108)$$

On fixe  $\beta, \beta', \alpha$  et  $\kappa$  tels que

$$(1, 2) \ni \beta - \alpha - 1 \geq 1 + \kappa, \quad (1.109)$$

$$\beta - \beta' \geq \kappa. \quad (1.110)$$

Rappelons que  $\beta - \alpha$  et  $\beta' - \alpha$  appartiennent à l'intervalle  $(2, 3)$ . Alors, pour que l'inégalité (1.110) soit vérifiée on prend  $\beta - \alpha$  proche de 3 (dans ce cas la formule (1.109) est vérifiée aussi) et  $\beta' - \alpha$  proche de 2. Grâce à ceci, on garde la distance entre  $\beta$  et  $\beta'$  et cette distance vaut  $\kappa \in (0, 1)$ . Avec les inégalités (1.109) et (1.110) on obtient

$$\begin{aligned} \| \mathfrak{G}\hat{u}^\varepsilon; \mathfrak{R} \| &\leq c(4\varepsilon^{1+\kappa} + \| \hat{u}^\varepsilon; \mathfrak{R} \|^{1+\kappa}) \\ &\leq \mathfrak{C}\varepsilon^{1+\kappa}, \end{aligned} \quad (1.111)$$

et l'inégalité  $\mathfrak{C} \geq c(4 + \mathfrak{C}^{1+\kappa}\varepsilon^{(1+\kappa)\kappa})$  a lieu avec le choix approprié de la constante  $\mathfrak{C}$  (e.g.  $\mathfrak{C} = 5c$ , où  $c$  est la constante de la formule précédente et de (1.111)) et de paramètre  $\varepsilon_0$  dans la condition  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ . Alors d'après (1.100) et (1.101) on a

$$\| \mathfrak{G}v - \mathfrak{G}w; \mathfrak{R} \| \leq \underbrace{c(\varepsilon^\kappa + 2\mathfrak{C}^\kappa\varepsilon^{(1+\kappa)\kappa})}_k \| v - w; \mathfrak{R} \|. \quad (1.112)$$

La valeur  $k < 1$  peut être choisie en diminuant la valeur de  $\varepsilon_0$ . Dans le Théorème 4 on a démontré l'existence d'un reste  $\hat{u}^\varepsilon$  dans (1.62) et en même temps on a montré que le problème aux limites (1.17) admet une unique solution qui appartient à la boule.

### 1.3.3 Analyse asymptotique formelle des fonctionnelles de formes

D'après le développement de Taylor de la fonction  $J(x, \cdot)$  on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon)) &= \int_{\Omega(\varepsilon)} J(x, v(x)) dx + \int_{\Omega(\varepsilon)} (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x)) J'_v(x, v(x)) dx + \dots \\ &= \int_{\Omega} J(x, v(x)) dx + \varepsilon \int_{\Omega} (v'(x) - a\phi(x)) J'_v(x, v(x)) dx + \dots,\end{aligned}\tag{1.113}$$

où on note "... " les termes d'ordre supérieur à un en  $\varepsilon$ . Supposons le fait suivant, concernant la fonction  $J$  :

**Hypothèse 4.** La fonction  $J \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ , et  $J'_v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ .

Soit  $p \in C^{2,\alpha}(\Omega)$  une solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta_x p(x) - F'_v(x, v(x))p(x) = J'_v(x, v(x)), & x \in \Omega, \\ p(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}\tag{1.114}$$

Par intégration par parties dans  $\Omega \setminus B_\delta = \{x \in \Omega : |x| > \delta\}$  on a

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} (v'(x) - a\phi(x)) J'_v(x, v(x)) dx \\ &= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\delta} (\Delta_x p(x) + F'_v(x, v(x))p(x)) (v'(x) - a\phi(x)) dx \\ &= -\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\delta} p(x) (\Delta_x + F'_v(x, v(x))) (v'(x) - a\phi(x)) dx \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \partial_n p(x) (v'(x) - a\phi(x)) dx \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_\delta} (\partial_{|x|} p(x) (v'(x) - a\phi(x)) - p(x) \partial_{|x|} (v'(x) - a\phi(x))) dx\end{aligned}\tag{1.115}$$

où  $\partial_{|x|} p = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial p}{\partial x_i}$  est la dérivée normale sur  $\partial B_\delta$ . D'après (1.61) on a  $v'(x) - a\phi(x) = 0$  et

$$\begin{aligned}& (\Delta_x + F'_v(x, v(x))) (v'(x) - a\phi(x)) \\ &= \Delta_x v'(x) + v'(x) F'_v(x, v(x)) - a\phi(x) F'_v(x, v(x)) = 0.\end{aligned}\tag{1.116}$$

D'autre part  $\partial_{|x|}p(x)(v'(x) - a\phi(x)) = O(\delta^{-1})$ . Alors

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (v'(x) - a\phi(x))J'_v(x, v(x))dx \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_\delta} (\partial_{|x|}p(x)(v'(x) - a\phi(x)) - p(x)\partial_{|x|}(v'(x) - a\phi(x)))dx \\
&= -a \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_\delta} p(\mathcal{O})(4\pi |x|^2)^{-1} ds_x \\
&= -ap(\mathcal{O}) = -4\pi v(\mathcal{O})p(\mathcal{O})cap(\omega).
\end{aligned} \tag{1.117}$$

et ensuite

$$\mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon)) = \mathcal{J}(v; \Omega) - \varepsilon 4\pi v(\mathcal{O})p(\mathcal{O})cap(\omega) + \dots \tag{1.118}$$

Comme c'était dans (1.74) on suppose que :

**Hypothèse 5.** Pour tout  $\sigma \in (0, 1)$

$$|J(x, v(x) + V(x)) - J(x, v(x)) - V(x)J'_v(x, v(x))| \leq c |V(x)|^{1+\sigma}. \tag{1.119}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon)) - \mathcal{J}(v; \Omega(\varepsilon)) - \int_{\Omega(\varepsilon)} (w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x))J'_v(x, v(x))dx| \\
&\leq c \int_{\Omega(\varepsilon)} |w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon v'(x) + \hat{u}^\varepsilon(x)|^{1+\sigma} dx \\
&\leq c \int_{\Omega(\varepsilon)} (|\frac{x}{\varepsilon}|^{-1-\sigma} + |x|^{-(1+\sigma)(\beta-2-\alpha)} \times \\
&\quad \times (\varepsilon^{1+\sigma} \|v'; \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega)\|^{1+\sigma} + \|\hat{u}^\varepsilon(x); \Lambda_\beta^{2,\alpha}(\Omega)\|^{1+\sigma})) dx \\
&\leq c\varepsilon^{1+\sigma} (\int_{\varepsilon}^1 \tau^{-1-\sigma} \tau^2 d\tau + \int_{\varepsilon}^1 \tau^{-(1+\sigma)(\beta-2-\alpha)} \tau^2 d\tau (\varepsilon^{1+\sigma} + \varepsilon^{(1+\kappa)(1+\sigma)})) \\
&\leq c\varepsilon^{1+\sigma}
\end{aligned} \tag{1.120}$$

car  $1 + \sigma \leq 2$  et  $(1 + \sigma)(\beta - 2 - \alpha) \leq 2$ , il suffit de rappeler les inégalités suivantes

$$|\mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon)) - \mathcal{J}(v; \Omega)| \leq cmes_2(\omega_\varepsilon) \leq c\varepsilon, \tag{1.121}$$

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} |w(\varepsilon^{-1}x) + a\varepsilon\phi(x)| \cdot |J'_v(x, v(x))| dx \leq c \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{-2} \tau d\tau \leq c\varepsilon^2, \tag{1.122}$$

$$\int_{\Omega(\varepsilon)} |u^\varepsilon| \cdot |J'_v(x, v(x))| dx \leq c\varepsilon^{1+\kappa} \int_{\Omega(\varepsilon)} |x|^{-(\beta-2-\alpha)} \tau dx \leq c\varepsilon^{1+\kappa}, \tag{1.123}$$

qui confirment les calculs faits dans la partie précédente.

**Théorème 5.** *Sous les hypothèses 4 et 5 on a*

$$|\mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon)) - \mathcal{J}(v; \Omega) + \varepsilon 4\pi v(\mathcal{O})p(\mathcal{O})\text{cap}(\omega)| \leq c\varepsilon^{1+\min(\sigma, \kappa)}. \quad (1.124)$$

Ainsi, on déduit la forme de la dérivée topologique dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  pour le problème (1.17) avec la condition de Dirichlet sur le bord de trou.

$$\mathcal{T}(\mathcal{O}) = -4\pi v(\mathcal{O})p(\mathcal{O})\text{cap}(\omega). \quad (1.125)$$

## 1.4 La dérivée topologique pour le problème elliptique en dimension deux avec la condition de Neumann sur le bord de trou

### 1.4.1 Analyse asymptotique

Comme on l'a supposé précédemment, on considère toujours deux domaines  $\Omega$  et  $\omega$  bornés dans l'espace  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que leurs fermetures  $\overline{\Omega}, \overline{\omega}$  sont connexes et ont les bords  $\partial\Omega$  et  $\partial\omega$  réguliers. Rappelons aussi que le centre  $\mathcal{O}$  appartient à la fois à  $\Omega$  et à  $\omega$ . On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon &= \{x \in \mathbb{R}^2 : \xi := \varepsilon^{-1}x \in \omega\}, \\ \Omega(\varepsilon) &:= \Omega \setminus \overline{\omega}_\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.126)$$

où  $x = (x_1, x_2)$  sont les coordonnées dans  $\Omega$  et  $\varepsilon$  est un petit paramètre appartenant à l'intervalle  $(0, \varepsilon_0]$ .  $\varepsilon_0$  est choisi de telle manière que l'ensemble  $\overline{\omega}_\varepsilon$  soit inclus dans  $\Omega$ . Dans ce cas on appelle  $\omega_\varepsilon$  un trou dans le domaine  $\Omega(\varepsilon)$ . On considère le problème elliptique aux limites avec des conditions mixtes au bord :

$$\begin{cases} -\Delta_x u^\varepsilon(x) &= F(x, u^\varepsilon(x)), & x \in \Omega(\varepsilon), \\ u^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \\ \partial_n u^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \partial\omega_\varepsilon. \end{cases} \quad (1.127)$$

Comme dans le cas de dimension trois, on suppose que le problème (1.127) admet une solution qui s'écrit sous la forme suivante :

$$u^\varepsilon(x) = v(x) + \varepsilon w_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 w_2(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 v'(x) + \dots, \quad (1.128)$$

où  $v$  et  $v'$  sont régulières et  $w_1$  et  $w_2$  sont des solutions des deux problèmes extérieurs. Dans la suite, on introduit des problèmes aux limites pour les fonctions qui apparaissent dans (1.128).

Dans l'analyse asymptotique de l'équation (1.127) pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  on utilise deux problèmes aux limites, dont le premier est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_x v(x) &= F(x, v(x)), & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.129)$$

On suppose que cette équation admet une solution  $v$  dans  $\Omega$ , qui peut s'écrire comme

$$v(x) = v(\mathcal{O}) + x^T \nabla_x v(\mathcal{O}) + \frac{1}{2} x^T \nabla_x^2 v(\mathcal{O}) x + O(|x|^3). \quad (1.130)$$

Soit  $\xi := \varepsilon^{-1}x$ . Le deuxième problème aux limites, appelé dans la littérature, problème extérieur, sera évoqué en introduisant (1.128) à l'équation (1.127) sachant que  $\Delta_x = \varepsilon^{-2} \Delta_\xi$ . Alors

$$\begin{aligned} & -\Delta_x v(x) - \varepsilon^{-1} \Delta_\xi w_1(\xi) - \Delta_\xi w_2(\xi) - \varepsilon^2 \Delta_x v'(x) + \dots \\ & = F(x, v(x) + \varepsilon w_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 w_2(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 v'(x) + \dots) \\ & = F(x, v(x)) + [\varepsilon w_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 w_2(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 v'(x)] F'_v(x, v(x)). \end{aligned} \quad (1.131)$$

D'après (1.129) les termes principaux s'annulent et on obtient

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^{-1} \Delta_\xi w_1(\xi) - \Delta_\xi w_2(\xi) - \varepsilon^2 \Delta_x v'(x) + \dots \\ & = [\varepsilon w_1(\varepsilon^{-1}x) + w_2(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 v'(x)] F'_v(x, v(x)). \end{aligned} \quad (1.132)$$

Mettant en facteur  $\varepsilon$  et passant à la limite avec  $\varepsilon \rightarrow 0$  on obtient le premier problème extérieur

$$\begin{cases} -\Delta_\xi w_1(\xi) = 0, & \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \\ \partial_{n(\xi)} w_1(\xi) = -\partial_{n(\xi)} \xi^T \nabla_x v(\mathcal{O}), & \xi \in \partial\omega, \end{cases} \quad (1.133)$$

où la condition pour la dérivée normale  $w_1$  sur la frontière de  $\omega$  vient du fait que

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{n(x)} u^\varepsilon(x) \\ &= \partial_{n(x)} v(x) + \varepsilon \partial_{n(x)} w_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} w_2(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} v'(x) + \dots \\ &= \partial_{n(x)} (\nabla_x v(\mathcal{O})x) + \varepsilon \partial_{n(x)} w_1(\xi) + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} w_2(\xi) + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} v'(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.134)$$

Sachant que  $\partial_{n(\xi)} = n(\xi) \nabla_\xi = \varepsilon^{-1} n(\xi) \nabla_x$ , on a

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{n(\xi)} \xi^T \nabla_x v(\mathcal{O}) + \partial_{n(\xi)} w_1(\xi) + \varepsilon^2 (\partial_{n(x)} w_2(\xi) + \varepsilon^2 \partial_{n(\xi)} w_1(\xi)) + \dots \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_{n(\xi)} \xi^T \nabla_x v(\mathcal{O}) + \partial_{n(\xi)} w_1(\xi). \end{aligned} \quad (1.135)$$

Comme dans (1.131) et (1.132) on obtient le deuxième problème extérieur :

$$\begin{cases} -\Delta_\xi w_2(\xi) = 0, & \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \\ \partial_{n(\xi)} w_2(\xi) = -\partial_{n(\xi)} \frac{1}{2} \xi^T \nabla_x^2 v(\mathcal{O}) \xi, & \xi \in \partial\overline{\omega}, \end{cases} \quad (1.136)$$

pour lequel la condition au bord est évaluée comme suit :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{n(x)} u^\varepsilon(x) \\ &= \partial_{n(x)} v(x) + \varepsilon \partial_{n(x)} w_1(\xi) + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} w_2(\xi) + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} v'(x) + \dots \\ &= \partial_{n(x)} \nabla_x v(\mathcal{O})x + \partial_{n(x)} \frac{1}{2} x^T \nabla_x^2 v(\mathcal{O})x + \varepsilon \partial_{n(x)} w_1(\xi) \\ &\quad + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} w_2(\xi) + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} v'(x) + \dots \\ &= \partial_{n(\xi)} \xi^T \nabla_x v(\mathcal{O}) + \partial_{n(\xi)} \frac{1}{2} \xi^T \nabla_x^2 v(\mathcal{O}) \xi + \partial_{n(\xi)} w_1(\xi) + \varepsilon \partial_{n(\xi)} w_2(\xi) \\ &\quad + \varepsilon^2 \partial_{n(x)} v' + \dots \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \partial_{n(\xi)} \xi^T \nabla_x^2 v(\mathcal{O}) \xi + \partial_{n(\xi)} w_2(\xi). \end{aligned} \quad (1.137)$$

prenant (1.133) et divisant par  $\varepsilon > 0$ .

D'après [87], appendice 6, on effectue une décomposition dans l'espace  $\mathbb{R}^2$

$$-\partial_{n(\xi)} \xi^T \nabla_x v(\mathcal{O}) = -(\partial_{n(\xi)} \xi_1, \partial_{n(\xi)} \xi_2) \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v(\mathcal{O}) \\ \partial_{x_1} v(\mathcal{O}) \end{pmatrix} \quad (1.138)$$

et on introduit la fonction  $W = (W_1, W_2)$ , solution des équations suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta_\xi W_i(\xi) &= 0, & \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \\ \partial_{n(\xi)} W_i(\xi) &= -\partial_{n(\xi)} \xi_i, & \xi \in \partial\omega, \end{cases} \quad (1.139)$$

pour  $i = 1, 2$ . La solution de ce problème extérieur est un vecteur  $(W_1, W_2)$  de la forme :

$$(W_1, W_2) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\xi^T}{|\xi|^2} m(\omega) + O(|\xi|^{-2}), \quad (1.140)$$

avec  $m(\omega) = (m_{ik})_{i,k=1}^2$  la matrice symétrique de masse virtuelle, [87]. D'après [87] on conclut que la fonction harmonique  $w_1$  solution de l'équation (1.133) est la suivante :

$$w_1 = \nabla_x v(\mathcal{O})^T \cdot \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\xi^T}{|\xi|^2} m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) + O(|\xi|^{-2}). \quad (1.141)$$

La solution fondamentale du laplacien en dimension 2 (c'est-à-dire  $-\Delta\phi(x) = \delta(x - 0)$ ) dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $\delta(x - 0)$  la distribution de Dirac est la fonction  $\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}$ . Alors la solution de (1.136) est la suivante :

$$w_2(\xi) = \frac{c}{2\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} + c_0 + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right) \quad (1.142)$$

et pour trouver la constante  $c$  on utilise la condition au bord

$$\int_{\partial\omega} \partial_{n(\xi)} w_2(\xi) ds_\xi = - \int_{\partial B_R} \frac{\partial}{\partial |\xi|} \frac{c}{2\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} d\xi = c. \quad (1.143)$$

D'autre part, d'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\omega} \partial_{n(\xi)} \frac{1}{2} \xi^T \nabla_x^2 v(\mathcal{O}) \xi ds_\xi &= \int_{\omega} \Delta_\xi \frac{1}{2} \xi^T \nabla_x^2 v(\mathcal{O}) \xi d\xi \\ &= mes_2 \omega \Delta_x v(\mathcal{O}) \\ &= -mes_2 \omega F(\mathcal{O}; v(\mathcal{O})). \end{aligned} \quad (1.144)$$

La solution s'écrit sous la forme :

$$w_2(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) + c_0 + O(|\xi|^{-1}), \quad (1.145)$$

en choisissant  $c_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O}))$  on obtient

$$w_2(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) + O(|\xi|^{-1}). \quad (1.146)$$

Considérons finalement la dernière fonction qui apparaît dans (1.128) et remarquons que d'après (1.127) on a :

$$\begin{aligned} -\Delta_x v(x) - \varepsilon \Delta_x w_1(\xi) - \varepsilon^2 \Delta_x w_2(\xi) - \varepsilon^2 \Delta_x v'(x) \\ = F(x, v(x) + \varepsilon w_1(\xi) + \varepsilon^2 w_2(\xi) + \varepsilon^2 v'(x)) \end{aligned} \quad (1.147)$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} -\Delta_x v(x) - \varepsilon^{-1} \Delta_\xi w_1(\xi) - \Delta_\xi w_2(\xi) - \varepsilon^2 \Delta_x v'(x) \\ = F(x, v(x)) + (\varepsilon w_1(\xi) + \varepsilon^2 w_2(\xi) + \varepsilon^2 v'(x)) F'_v(x, v(x)) + \dots \end{aligned} \quad (1.148)$$

Alors le problème aux limites pour la fonction  $v'$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_x v'(x) = \left[ -\frac{1}{2\pi} \frac{x^T}{|x|^2} m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) \right. \\ \quad \left. -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\varepsilon}{|x|} mes_2 \omega F(\mathcal{O}; v(\mathcal{O})) \right. \\ \quad \left. + v'(x) \right] F'_v(x, v(x)), & x \in \Omega, \\ v'(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi^T}{|\xi|^2} m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) \\ \quad -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\xi|} mes_2 \omega F(\mathcal{O}; v(\mathcal{O})), & x \in \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.149)$$

## 1.4.2 Analyse asymptotique d'une fonctionnelle de forme en dimension deux

Dans cette partie on décrit l'analyse asymptotique formelle de la fonctionnelle de forme en dimension deux. Notre objectif est de développer une dérivée topologique pour une fonctionnelle de forme en utilisant un développement asymptotique de la fonctionnelle. Ainsi, on introduit les hypothèses suivantes

**Hypothèse 6.** La fonction  $F \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ , la dérivée  $F'_v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  pour certain  $\alpha \in (0, 1)$  et  $F'_v \leq 0$ .

**Hypothèse 7.** La fonction  $J \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ , la dérivée  $J'_v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ .

D'après la monotonie de la fonction  $F$ , le théorème de Lax-Milgram et la régularité de la fonction  $J$  on en déduit que le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta_x p(x) - F'_v(x, v(x)) p(x) = J'_v(x, v(x)), & x \in \Omega, \\ p(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (1.150)$$

admet une unique solution  $p \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ . La solution  $u^\varepsilon$  est remplacée dans la suite par son approximation asymptotique. Ainsi on obtient le premier terme du développement asymptotique d'ordre  $\varepsilon^2$  pour la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(u^\varepsilon, \Omega(\varepsilon)) = \int_{\Omega(\varepsilon)} J(x, u^\varepsilon(x)) dx \quad (1.151)$$

par rapport au paramètre  $\varepsilon$ . La fonctionnelle  $\mathcal{J}$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u^\varepsilon; \Omega(\varepsilon)) &= \int_{\Omega(\varepsilon)} J(x, u^\varepsilon(x)) dx \\ &= \int_{\Omega(\varepsilon)} J(x, v(x)) dx + \int_{\Omega(\varepsilon)} [J(x, u^\varepsilon(x)) - J(x, v(x))] dx \\ &= \mathcal{J}(v, \Omega) - \varepsilon^2 m e s_2 \omega J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) + \int_{\Omega(\varepsilon)} (u^\varepsilon(x) - v(x)) J'_v(x, v(x)) \\ &= \mathcal{J}(v, \Omega) - \varepsilon^2 m e s_2 \omega J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) \\ &\quad + \int_{\Omega} J'_v(x, v(x)) (\varepsilon w_1(\xi) + \varepsilon^2 w_2(\xi) + \varepsilon^2 v'(x)) dx \\ &= \mathcal{J}(v, \Omega) - \varepsilon^2 m e s_2 \omega J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) + \varepsilon^2 \int_{\Omega} J'_v(x, v(x)) \times \\ &\quad \times \left[ -\frac{1}{2\pi} \frac{x^T}{|x|^2} m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} m e s_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) + v'(x) \right] dx. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Notons

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x^T}{|x|^2} m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} m e s_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) + v'(x) \quad (1.153)$$

et

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} (-\Delta_x p(x) + p(x) F'_v(x, v(x))) G(x) dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\delta} (-\Delta_x p(x) + p(x) F'_v(x, v(x))) G(x) dx. \end{aligned} \quad (1.154)$$

En utilisant l'égalité

$$\int_{\Omega} \Delta f \cdot g = \int_{\Omega} f \cdot \Delta g + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial n} \cdot g - \frac{\partial g}{\partial n} \cdot f \right), \quad (1.155)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega \setminus B_\delta} (p(x) \Delta_x G(x) + p(x) F'_v(x, v(x)) G(x)) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\partial \Omega} \left( \frac{\partial}{\partial n} p(x) G(x) - p(x) \frac{\partial}{\partial n} G(x) \right) - \int_{\partial B_\delta} \left( \frac{\partial}{\partial n} p(x) G(x) - p(x) \frac{\partial}{\partial n} G(x) \right) \right].
\end{aligned} \tag{1.156}$$

D'après (1.133), (1.136), (1.149), le premier terme s'annule et d'après (1.127), (1.129) et (1.150) le deuxième terme est égal à zéro sur la frontière extérieure de  $\Omega$ . Finalement on a :

$$\begin{aligned}
I &= - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_\delta} \left( \frac{\partial}{\partial n} p(x) G(x) - p(x) \frac{\partial}{\partial n} G(x) \right) dS_\delta \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B_\delta} \left( \frac{\partial}{\partial r} p(x) G(x) - p(x) \frac{\partial}{\partial r} G(x) \right) dS_\delta.
\end{aligned} \tag{1.157}$$

Notons que

$$p(x) = p(\mathcal{O}) + \sum_{i=1}^2 x_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) + \dots \tag{1.158}$$

et

$$\partial_{|x|} p(x) = \frac{\partial}{\partial r} p(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial |x|} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) = \sum_{i=1}^2 \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \tag{1.159}$$

car en passant aux coordonnées polaires  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  on a  $|x| = r$  et  $\frac{\partial x_1}{\partial r} = \cos \theta = \frac{x_1}{|x|}$ ,  $\frac{\partial x_2}{\partial r} = \sin \theta = \frac{x_2}{|x|}$ .

Alors, en retournant à (1.153) :

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i,j,k=1}^2 \int_{S_\delta} \left[ \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{x_k}{|x|^2} m_{kj} \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathcal{O}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} m e s_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) + v'(x) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( p(\mathcal{O}) + x_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \right) \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{x_k}{|x|^2} m_{kj} \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} m e s_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) + v'(x) \right) \right] dS_\delta.
\end{aligned} \tag{1.160}$$

En passant à la limite et après différentiation du deuxième terme, on a :

$$\begin{aligned}
I = & \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i,j,k=1}^2 \int_{S_\delta} \left[ \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{x_k}{|x|^2} m_{kj} \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathcal{O}) \right) \right. \\
& + p(\mathcal{O}) \left( \frac{1}{2\pi} \frac{x_j}{|x|^3} m_{kj} \frac{\partial v}{\partial x_k}(\mathcal{O}) - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) \right) \\
& - x_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \left( \frac{1}{2\pi} \frac{x_j}{|x|^3} m_{kj} \frac{\partial v}{\partial x_k}(\mathcal{O}) \right) \\
& + x_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \left( \frac{1}{2\pi} \frac{x_j}{|x|^3} m_{kj} \frac{\partial v}{\partial x_k}(\mathcal{O}) \right) \\
& \left. + x_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \left( \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) \right) \right], \tag{1.161}
\end{aligned}$$

remarquant ensuite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{S_\delta} \left( p(\mathcal{O}) \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) \right) \right) = -mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) p(\mathcal{O}) \tag{1.162}$$

et aussi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j,k=1}^2 \int_{S_\delta} \left( -p(\mathcal{O}) \left( \frac{1}{2\pi} \frac{x_j}{|x|^3} m_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k}(\mathcal{O}) \right) \right) = 0, \tag{1.163}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^2 \int_{S_\delta} \left( -p(\mathcal{O}) \left( x_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|x|} mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) \right) \right) = 0. \tag{1.164}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
I = & \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i,j,k=1}^2 \int_{S_\delta} \left[ -\frac{1}{\pi} \frac{x_i x_k}{|x|^3} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) m_{kj} \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathcal{O}) \right] - mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) p(\mathcal{O}) \\
= & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( - \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{1}{\pi} \frac{\delta^3 \pi \delta_{kj}}{\delta^3} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathcal{O}) m_{kj} \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathcal{O}) \right) - mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) p(\mathcal{O}) \\
= & -\nabla_x p(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) - mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) p(\mathcal{O}). \tag{1.165}
\end{aligned}$$

**Théorème 6.** *Sous les hypothèses 1, 6 et 7 on obtient*

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u^\varepsilon, \Omega(\varepsilon)) = & \mathcal{J}(v, \Omega) + \varepsilon^2 (-mes_2 \omega J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) \\
& - \nabla_x p(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) - mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) p(\mathcal{O})) + \dots \tag{1.166}
\end{aligned}$$

Finalement la fonctionnelle (1.152) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u^\varepsilon, \Omega(\varepsilon)) = & \mathcal{J}(v, \Omega) + \varepsilon^2 (-mes_2 \omega J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) \\
& - \nabla_x p(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) - mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) p(\mathcal{O})) + \dots \tag{1.167}
\end{aligned}$$

où le facteur de  $\varepsilon^2$  est la dérivée topologique  $\mathcal{T}_\Omega(\mathcal{O})$ . Ainsi on a obtenu la forme de la dérivée topologique dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{T}(\mathcal{O}) = -mes_2 \omega J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) - \nabla_x p(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) - mes_2 \omega F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) p(\mathcal{O}). \tag{1.168}$$

## 1.5 Approximation de la dérivée topologique en utilisant la méthode des éléments finis

Dans cette partie nous allons établir une approximation numérique de la dérivée topologique de la fonctionnelle de forme (1.19) avec  $u^\varepsilon$  la solution du problème (1.127). Par la suite, nous formulerons les estimations dans  $L^\infty$  de l'erreur d'approximation.

### 1.5.1 La famille d'éléments finis

Dans le domaine  $\bar{\Omega}$  on considère une famille de triangulation  $\{\mathbb{T}_h\}$ ,  $h > 0$ . A chaque triangle  $T \in \mathbb{T}_h$  on associe deux valeurs  $\rho(T)$  et  $\sigma(T)$  qui sont le diamètre de  $T$  et le diamètre de la plus grande boule inscrite dans  $T$ . On pose  $h = \max_{T \in \mathbb{T}_h} \rho(T)$  et on introduit les hypothèses suivantes concernant la triangulation :

1. **Régularité.** Il existe  $\sigma > 0$  tel que  $\frac{\rho(T)}{\sigma(T)} \leq \sigma$  pour tout  $T \in \mathbb{T}_h$ ,  $h > 0$ .
2. Il existe  $\rho > 0$  tel que  $\frac{h}{\rho(T)} \leq \rho$  pour tout  $T \in \mathbb{T}_h$ ,  $h > 0$ .
3. Soit  $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{T \in \mathbb{T}_h} T$ ,  $\Omega_h$  son intérieur et  $\Gamma_h$  sa frontière,  $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ . On suppose que les sommets de  $\mathbb{T}_h$  appartenant à la frontière  $\Gamma_h$  sont également des points de  $\Gamma$ .

On considère l'espace d'éléments finis  $P_1$

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \mathbb{T}_h \text{ et } v_h = 0 \text{ sur } \Omega \setminus \Omega_h\} \quad (1.169)$$

et

$$W_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}_h) : v_h|_T \in P_1(T), \forall T \in \mathbb{T}_h\}, \quad (1.170)$$

où  $P_1(T)$  est l'espace des polynômes de premier degré définis sur  $T$ .  $V_h$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $H_0^1(\Omega)$  et  $W_h$  est un sous-espace de  $H^1(\Omega)$ . Définissons l'opérateur d'interpolation de Lagrange :

$$\Pi_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow W_h. \quad (1.171)$$

$\Pi_h z$  est un élément de  $W_h$  tel que  $\Pi_h z(x_i) = z(x_i)$  pour tout noeud  $x_i$  qui est un sommet de la triangulation  $T \in \mathbb{T}_h$ . Dans le cas où la fonction  $z$  s'annule sur le bord  $\Gamma$ , on prolonge la fonction  $\Pi_h z$  par zéro sur tout  $\bar{\Omega}$  et on la note aussi par  $\Pi_h z$ . Ainsi on obtient  $\Pi_h z \in V_h$ .

### 1.5.2 La solution numérique du problème non-linéaire

Comme on l'a remarqué auparavant, compte-tenu de nos hypothèses, l'équation (1.127) admet une unique solution dans  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  et ceci peut être formulé sous la forme variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(v, z) = (F(\cdot, v), z)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (1.172)$$

où

$$a(v, z) = \int_{\Omega} \nabla v(x) \nabla z(x) dx, \quad (1.173)$$

et

$$(F(\cdot, v), z)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} F(x, v(x)) z(x) dx. \quad (1.174)$$

On suppose ici, que la fonction  $F(x, \cdot)$  est monotone. Du point de vue de l'approximation numérique le problème discret s'écrit comme l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(v_h, z_h) = (F(\cdot, v_h), z_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.175)$$

L'existence d'une solution au problème (1.175) est connue, voir par exemple [100]. Il suffit d'appliquer le théorème du point fixe de Brouwer et utiliser le fait que la fonction  $F(x, \cdot)$  est monotone. Notre but est de prouver la convergence  $v_h \rightarrow v$  dans  $W^{1,\infty}(\Omega_h)$  pour  $h \rightarrow 0$ . On établira une estimation d'erreur comme dans le cas linéaire. Le problème (1.175) peut être formulé sous la forme variationnelle suivante :

$$a(p, z) = (F_0(\cdot, p), z)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (1.176)$$

L'approximation numérique pour  $p \in H_0^1(\Omega)$  est donnée ici par l'équation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } p_h \in V_h \text{ tel que} \\ a(p_h, z_h) = (F_0(\cdot, v_h), z_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall z_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.177)$$

Dans la suite on suppose que la fonction  $F_0$  vérifie l'hypothèse (1.13).

Nous allons prouver l'estimation dans  $L^\infty(\Omega_h)$  pour l'approximation de la dérivée topologique par éléments finis dans le cas du problème elliptique non-linéaire.

### 1.5.3 La convergence de l'approximation par une méthode d'éléments finis des solutions du problème elliptique et de l'état adjoint.

L'estimation présentée ici, dans  $L^\infty(\Omega_h)$  de l'erreur d'approximation par éléments finis du problème (1.127) a été établie dans [11] par E. Casas et M. Mateos pour une solution  $v$  de (1.172) dans l'espace de Sobolev  $W^{2,\infty}(\Omega)$  défini par :

$$W^{2,\infty}(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega) : \nabla v \in L^\infty(\Omega), \nabla^2 v \in L^\infty(\Omega)\}. \quad (1.178)$$

**Théorème 7.** Soient  $v$  et  $v_h$  des solutions des problèmes variationnels (1.172) et (1.175). Il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\|v - v_h; L^\infty(\Omega_h)\| \leq Ch \|v; W^{2,\infty}(\Omega)\|. \quad (1.179)$$

En plus, on obtient l'estimation suivante (voir [14], [19]) :

**Théorème 8.** Soient  $v$  et  $v_h$  des solutions des problèmes variationnels (1.172) et (1.175). Il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\|\nabla v - \nabla v_h; L^\infty(\Omega_h)\| \leq Ch \|v; W^{2,\infty}(\Omega)\|. \quad (1.180)$$

D'autre part nous avons les estimations dans  $L^\infty(\Omega_h)$  pour l'approximation du problème linéaire (1.150).

**Théorème 9.** Soit  $x_0 \in \Omega$  et soient  $p$  et  $p_h$  des solutions des problèmes variationnels (1.176) et (1.177). Il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $h$ , telle que

$$\| p - p_h; L^\infty(\Omega_h) \| + \| \nabla p - \nabla p_h; L^\infty(\Omega_h) \| \leq Ch \| p; W^{2,\infty}(\Omega) \| . \quad (1.181)$$

### 1.5.4 Estimation dans $L^\infty(\Omega_h)$ de l'erreur d'approximation de la dérivée topologique.

Notons  $\mathcal{T}_{\Omega,h}$  une approximation numérique par éléments finis de la dérivée topologique  $\mathcal{T}_\Omega$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\Omega,h}(\mathcal{O}) &= -mes_2(\omega)J(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O})) - \nabla_x p_h(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v_h(\mathcal{O}) \\ &\quad - F(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O}))mes_2(\omega)p_h(\mathcal{O}). \end{aligned} \quad (1.182)$$

On a

$$\begin{aligned} | \mathcal{T}_\Omega(\mathcal{O}) - \mathcal{T}_{\Omega,h}(\mathcal{O}) | &= | -mes_2(\omega)[J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) - J(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O}))] \\ &\quad - [\nabla_x p(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) - \nabla_x p_h(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v_h(\mathcal{O})] \\ &\quad - [F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O}))mes_2(\omega)p(\mathcal{O}) - F(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O}))mes_2(\omega)p_h(\mathcal{O})] | \\ &\leq mes_2(\omega) | J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) - J(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O})) | \\ &\quad + | \nabla_x p(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v(\mathcal{O}) - \nabla_x p_h(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x v_h(\mathcal{O}) | \\ &\quad + mes_2(\omega) | F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O}))p(\mathcal{O}) - F(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O}))p_h(\mathcal{O}) | . \end{aligned} \quad (1.183)$$

Or  $v$  est borné,  $J$  est régulière et d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a

$$| J(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) - J(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O})) | \leq c \| v - v_h; L^\infty(\Omega_h) \| \quad (1.184)$$

alors

$$\begin{aligned} | \mathcal{T}_\Omega(\mathcal{O}) - \mathcal{T}_{\Omega,h}(\mathcal{O}) | &\leq c \| v - v_h; L^\infty(\Omega_h) \| \\ &\quad + | \nabla_x p(\mathcal{O})^T m(\omega) \nabla_x (v(\mathcal{O}) - v_h(\mathcal{O})) | \\ &\quad + | \nabla_x (p(\mathcal{O}) - p_h(\mathcal{O}))^T m(\omega) \nabla_x v_h(\mathcal{O}) | \\ &\quad + mes_2(\omega) | F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O}))(p(\mathcal{O}) - p_h(\mathcal{O})) | \\ &\quad + mes_2(\omega) | (F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) - F(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O})))p_h(\mathcal{O}) | . \end{aligned} \quad (1.185)$$

D'après la régularité de  $F$  et le théorème des valeurs intermédiaires, compte-tenu du fait que  $v$  est borné, on a

$$| F(\mathcal{O}, v(\mathcal{O})) - F(\mathcal{O}, v_h(\mathcal{O})) | \leq c \| v - v_h; L^\infty(\Omega_h) \| . \quad (1.186)$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} | \mathcal{T}_\Omega(\mathcal{O}) - \mathcal{T}_{\Omega,h}(\mathcal{O}) | &\leq c \| v - v_h; L^\infty(\Omega_h) \| \\ &\quad + c | \nabla_x (v(\mathcal{O}) - v_h(\mathcal{O})) | \\ &\quad + c | \nabla_x (p(\mathcal{O}) - p_h(\mathcal{O})) | \\ &\quad + c | p(\mathcal{O}) - p_h(\mathcal{O}) | . \end{aligned} \quad (1.187)$$

Finalement, d'après les théorèmes 8 et 9 on conclut que

**Théorème 10.** Soit  $\mathcal{O} \in \Omega_h$  pour un certain  $h > 0$ . L'estimation suivante a lieu :

$$| \mathcal{T}_\Omega(\mathcal{O}) - \mathcal{T}_{\Omega,h}(\mathcal{O}) | \leq Ch(\| v; W^{2,\infty}(\Omega) \| + \| p; W^{2,\infty}(\Omega) \|). \quad (1.188)$$

### 1.5.5 Exemples

Dans cette partie, nous allons étudier des exemples de comportement de la dérivée topologique par rapport aux changements de la taille de discrétisation. Nous allons calculer l'erreur d'approximation qui sera du même ordre que la taille de discrétisation dans chaque itération. Supposons  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . On définit sur  $\Omega$  le problème non-linéaire

$$\begin{cases} -\Delta_x v(x) &= -v^3(x) + f(x), & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.189)$$

qui minimise la fonctionnelle d'énergie

$$\mathcal{J}(v; \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} v^4(x) dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, \quad (1.190)$$

**Exemple 1.** Soit  $f$  la fonction suivante

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_1, x_2) &= ((x_1^2 + x_2^2) \sin \pi x_1 \sin \pi x_2)^3 \\ &\quad + 2(\pi^2(x_1^2 + x_2^2) - 2) \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \\ &\quad - 4\pi(x_1 \cos \pi x_1 \sin \pi x_2 + \sin \pi x_1 \cos \pi x_2). \end{aligned} \quad (1.191)$$

La solution exacte du problème (1.189) est de la forme

$$u(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \quad (1.192)$$

et l'état adjoint s'écrit :

$$p(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \sin \pi x_1 \sin \pi x_2. \quad (1.193)$$

La dérivée topologique est présentée sur la Fig. 1.5, l'erreur d'estimation est présentée sur la Fig. 1.6.

**Exemple 2.** Supposons maintenant que  $f$  s'écrive sous la forme :

$$f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1(x_1 - 1)x_2(x_2 - 1))^3 - 2(x_2(x_2 - 1) + x_1(x_1 - 1)). \quad (1.194)$$

Dans ce cas la solution exacte est la suivante :

$$u(x_1, x_2) = x_1(x_1 - 1)x_2(x_2 - 1) \quad (1.195)$$

L'état adjoint s'écrit :

$$p(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} x_1(x_1 - 1)x_2(x_2 - 1). \quad (1.196)$$

La Fig. 1.7 présente les valeurs de la dérivée topologique, la Fig. 1.8 montre l'erreur de l'approximation.

**Exemple 3.** Dans ce dernière exemple  $f$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} f &= (100x_1^2x_2^2(x_1 - 1)^2(x_2 - 1)^2)^3 \\ &- 200 [x_1^2(x_1 - 1)^2(6x_2^2 - 6x_2 + 1) + x_2^2(x_2 - 1)^2(6x_1^2 - 6x_1 + 1)]. \end{aligned} \quad (1.197)$$

La forme de la solution exacte du problème (1.189) est la suivante :

$$u(x_1, x_2) = 100x_1^2x_2^2(x_1 - 1)^2(x_2 - 1)^2 \quad (1.198)$$

La forme de l'état adjoint peut s'écrire comme :

$$p(x_1, x_2) = -50x_1^2x_2^2(x_1 - 1)^2(x_2 - 1)^2. \quad (1.199)$$

La dérivée topologique et l'erreur de son approximation sont présentées sur les Fig. 1.9 et 1.10.

## 1.5.6 Conclusion

Dans ce chapitre la forme de la dérivée topologique a été établie pour un problème elliptique semi-linéaire défini sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ . Afin d'effectuer des calculs numériques pour trouver son approximation numérique on a appliqué la méthode d'élément finis. La convergence de l'approximation numérique a été établie dans  $\mathbb{R}^2$ . Or l'application de la dérivée topologique en optimisation de forme exigeant une grande précision, on a établi une estimation dans  $L^\infty$  de l'erreur d'approximation. Le résultat numérique confirme la justesse de la méthode. Dans la suite les résultats seront utilisés en optimisation de forme pour le problème semi-linéaire.

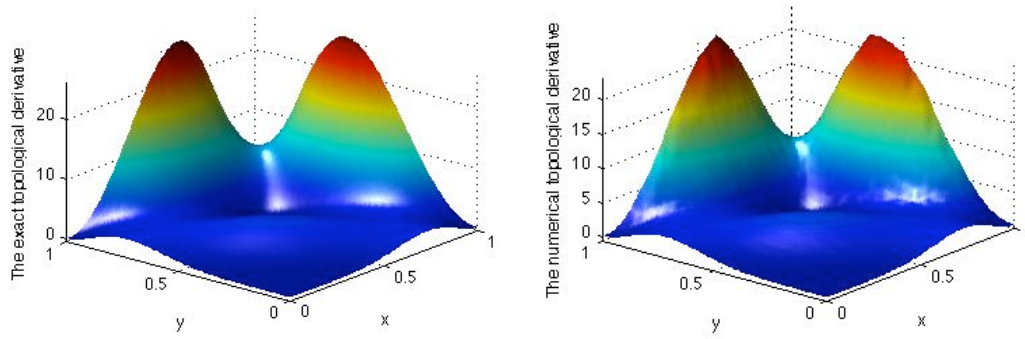


FIG. 1.5 – La dérivée topologique : exacte  $\mathcal{T}_\Omega$  (à gauche) et approchée  $\mathcal{T}_{\Omega,h}$  (à droite).

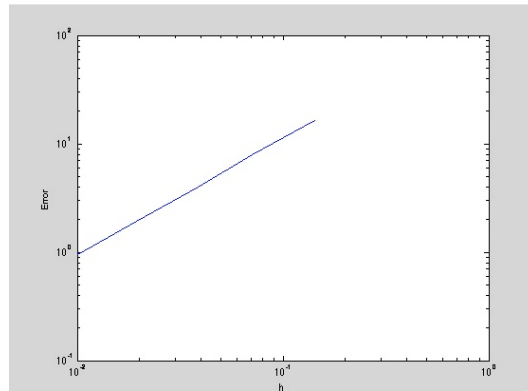


FIG. 1.6 – L'erreur  $|\mathcal{T}_\Omega - \mathcal{T}_{\Omega,h}|_\infty$ .

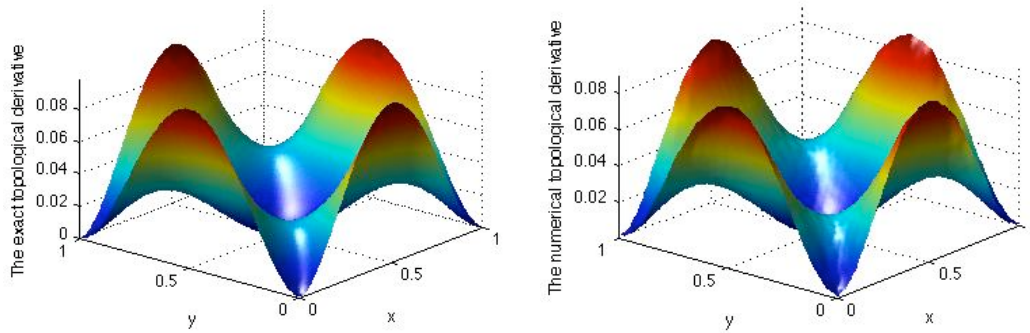


FIG. 1.7 – La dérivée topologique : exacte  $\mathcal{T}_\Omega$  (à gauche) et approchée  $\mathcal{T}_{\Omega,h}$  (à droite).

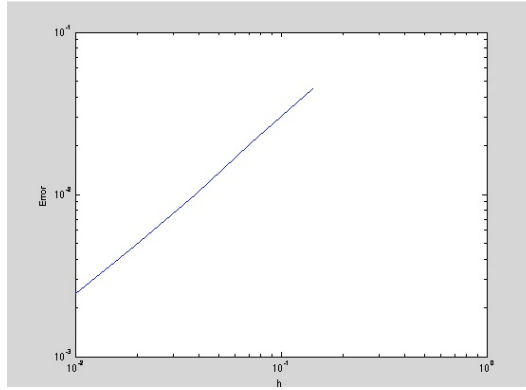


FIG. 1.8 – L'erreur  $|\mathcal{T}_\Omega - \mathcal{T}_{\Omega,h}|_\infty$ .

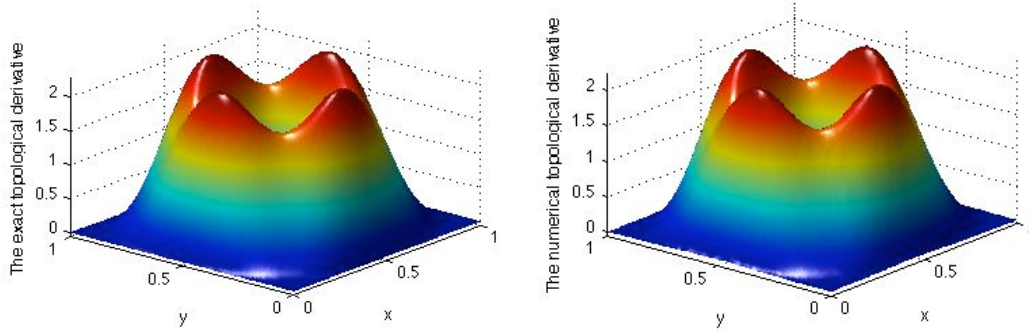


FIG. 1.9 – La dérivée topologique : exacte  $\mathcal{T}_\Omega$  (à gauche) et approchée  $\mathcal{T}_{\Omega,h}$  (à droite).

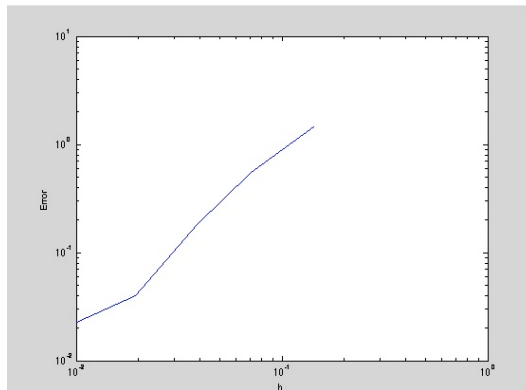


FIG. 1.10 – L'erreur  $|\mathcal{T}_\Omega - \mathcal{T}_{\Omega,h}|_\infty$ .

## Chapitre 2

# Optimisation de forme et de topologie d'un problème elliptique semi-linéaire.

Dans ce chapitre nous allons présenter une méthode numérique pour l'optimisation de forme d'une fonctionnelle de type intégrale associée à un problème semi-linéaire. Cette méthode utilise la dérivée de forme et la dérivée topologique de la fonctionnelle. L'évolution géométrique des domaines est réalisée par une méthode de courbes des niveaux. Les changements topologiques sont rendus possibles par l'utilisation de la dérivée topologique. La forme de la dérivée topologique a été établie dans le chapitre précédent.

Commençons par décrire le problème modèle étudié. Soit  $B$  et  $D$  deux ouverts bornés de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $B \Subset D$ . Pour un ouvert  $\omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , on note  $\#\omega$  le nombre de composantes connexes de  $\bar{\omega}$  et on considère l'ensemble des domaines admissibles

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\Omega = D \setminus \bar{\omega} : \omega \text{ ouvert, } \omega \subset B, \#\omega \leq k, \mathcal{H}^1(\partial\omega) \leq C\} \quad (2.1)$$

avec  $\mathcal{H}^1(\partial\omega)$  longueur des frontières et  $C$  une constante donnée.

On note  $\partial D = \Gamma$  la frontière de  $D$  et  $\partial\Omega = \Gamma \cup \partial\omega$ . On va considérer un problème d'optimisation de forme correspondant au problème elliptique semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $f \in C^\infty(D)$  et  $n$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\partial\Omega$  et dirigé vers l'extérieur de  $\Omega$ . Supposons maintenant que  $z_d$  est une fonction donnée sur  $D$ . On considère la fonctionnelle suivante :

$$J(\Omega) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - z_d)^2 dx. \quad (2.3)$$

Pour  $k \geq 1$  on s'intéresse alors au problème d'optimisation de forme suivant

$$\min\{J(\Omega) : \Omega \in \mathcal{U}_{ad}\} \quad (2.4)$$

associé au problème (2.2).

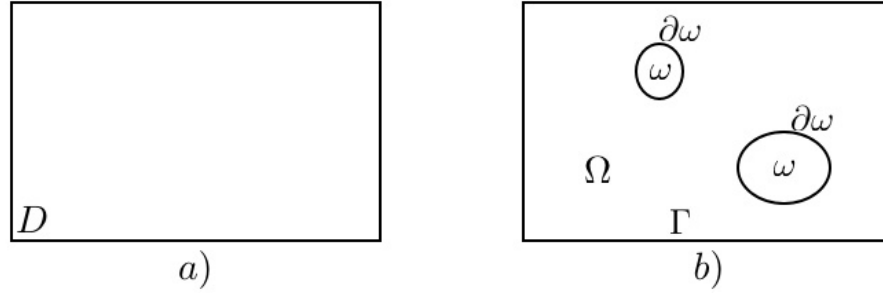


FIG. 2.1 – Le domaine  $D$  (à gauche) et le domaine  $\Omega$  (à droite).

## 2.1 Le problème semi-linéaire

On cherche à minimiser la fonction (2.3) par rapport au domaine  $\Omega$ . La première question qui apparaît est l'existence d'un domaine optimal, ce problème est considéré dans la sous-section suivant.

### 2.1.1 Existence d'un domaine optimal

L'existence d'un domaine  $\Omega$  solution du problème (2.4) pour un problème linéaire a été montrée dans [8], [9] pour des conditions de Neumann sur la frontière des trous. En apportant quelques modifications à la preuve de ce résultat, on peut l'adapter à notre problème. Ceci est possible sans difficulté car la frontière  $\Gamma$  dans (2.2) est fixe.

Etant donné l'ensemble  $D \subset \mathbb{R}^2$  et  $f \in L^2(D)$  pour tout ouvert  $\Omega \subset D$  on note  $u_\Omega$  une solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega + u_\Omega^3 = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial u_\Omega}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ensuite on note  $\tilde{u}_\Omega$  une extension par zéro de  $u_\Omega$  à un élément de  $L^4(D)$ . On étudie la continuité de l'application  $\Omega \rightarrow \tilde{u}_\Omega \in L^2(D)$ , dans le cas où la famille des domaines est équipé de la topologie complémentaire de Hausdorff. Tout d'abord on introduit le résultat en dimension deux suivant : si  $\Omega_n$  converge au sens de la topologie complémentaire de Hausdorff (notée par  $H^c$ ) à un domaine  $\Omega$  tel que le nombre de composantes connexes de  $D \setminus \Omega_n$  et la longueur des frontières  $\mathcal{H}^1(\omega_n)$  soient bornés uniformément, alors  $\tilde{u}_{\Omega_n}$  converge vers  $\tilde{u}_\Omega$ . Plus précisément, on démontre que si  $\Omega_n$  converge au sens de la topologie complémentaire de Hausdorff à  $\Omega$  tel que le nombre de composantes connexes de  $D \setminus \Omega_n$  soit borné uniformément, alors pour tout  $f \in L^2(D)$  on a la convergence des solutions  $\tilde{u}_{\Omega_n} \rightarrow \tilde{u}_\Omega$  si et seulement si on a la convergence des mesures de Lebesgue  $|\Omega_n| \rightarrow |\Omega|$ . On utilise ce résultat pour démontrer l'existence d'un domaine optimal qui minimise la fonctionnelle de forme

$$J(\Omega) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_\Omega - z_d)^2 dx \quad (2.6)$$

dépendant de  $u_\Omega$ .

Une solution faible du problème (2.5) est une fonction  $u_\Omega \in H^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$  unique, telle que  $u = 0$  sur  $\Gamma$  et vérifiant :

$$\int_{\Omega} (\nabla u_\Omega \nabla v + u_\Omega^3 v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (2.7)$$

Afin de comparer les solutions du problème (2.5) définies dans deux domaines différents toutes les fonctions de  $H^1(\Omega)$  sont étendues par zéro à un élément de  $L^2(D)$  ainsi que leurs gradients. Alors pour tout  $u \in H^1(\Omega)$  on note  $\tilde{u}$  un élément de  $L^2(D)$ , défini par  $\tilde{u}(x) = u(x)$  pour  $x \in \Omega$  et  $\tilde{u}(x) = 0$  pour  $x \in D \setminus \Omega$ . Le gradient de  $u$  est étendu par zéro de la même façon en un élément de  $L^2(D, \mathbb{R}^2)$ . On écrit  $\tilde{\nabla} u(x) = \nabla u(x)$  pour  $x \in \Omega$  et  $\tilde{\nabla} u(x) = 0$  pour  $x \in D \setminus \Omega$ . Ainsi  $H^1(\Omega)$  est un sous-espace fermé de  $L^2(D) \times L^2(D, \mathbb{R}^2)$ .

On introduit maintenant la convergence au sens de Mosco. Etant donnée une suite d'éléments  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathcal{U}_{ad}$ , on dit que  $H^1(\Omega_n)$  converge au sens de Mosco vers  $H^1(\Omega)$  si :

- M1) Pour tout  $\phi \in H^1(\Omega)$  il existe une suite  $\phi_n \in H^1(\Omega_n)$  telle que  $\tilde{\phi}_n$  converge fortement dans  $L^2(D)$  vers  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\nabla} \phi_n$  converge fortement dans  $L^2(D, \mathbb{R}^2)$  vers  $\tilde{\nabla} \phi$ ;
- M2) Pour toute suite  $\phi_k \in H^1(\Omega_{n_k})$  telle que  $(\tilde{\phi}_k, \tilde{\nabla} \phi_k)$  converge faiblement dans  $L^2(D) \times L^2(D, \mathbb{R}^2)$  vers  $(u, v_1, v_2)$ , on a  $(u, v_1, v_2) = 0$  p.p. dans  $D \setminus \Omega$  et  $\nabla u = (v_1, v_2)$  au sens de distributions dans  $\Omega$ .

Afin de simplifier la notation, pour  $u_n \in H^1(\Omega_n)$  et pour  $u \in H^1(\Omega)$ , on écrit  $u_n \rightsquigarrow u$  à la place de  $(\tilde{u}_n, \tilde{\nabla} u_n) \xrightarrow{L^2(D) \times L^2(D, \mathbb{R}^2)} (\tilde{u}, \tilde{\nabla} u)$ .

On considère dans la suite une famille de domaines compacts par rapport à la convergence de Mosco. La fonctionnelle de forme  $J(\Omega)$  est minimisée par rapport au domaine  $\Omega$  avec la fonction  $u_\Omega$  donnée par (2.5). Pour démontrer l'existence d'un domaine optimal  $\Omega^* \in \mathcal{U}_{ad}$  (cf. (2.1)) du problème

$$J(\Omega^*) = \inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega), \quad (2.8)$$

on va appliquer une approche standard. Supposons que  $\{\Omega_n\}$  est une suite minimisante pour le problème d'optimisation de forme. L'existence d'un domaine optimal pour le problème d'optimisation est établie sous les hypothèses suivantes sur la suite  $\{\Omega_n\}$ .

$$H1. \quad \Omega_n = D \setminus \bigcup_{i=1}^N \omega_n^i \text{ et } \mathcal{H}_c(\Omega_n) := \mathcal{H}(\bigcup_{i=1}^N \omega_n^i) \rightarrow \mathcal{H}_c(\Omega_\infty) := \mathcal{H}(\bigcup_{i=1}^N \omega_\infty^i).$$

$$H2. \quad \text{La convergence au sens de Mosco des espaces } H^1(\Omega_n) \text{ vers } H^1(\Omega) \text{ a lieu et on note } H^1(\Omega_n) \xrightarrow{M} H^1(\Omega) \text{ (cf. [9]).}$$

**Remarque 1.** L'hypothèse H2 implique la convergence au sens de Mosco de  $H^1(\Omega_n) \cap L^p(\Omega_n)$  vers  $H^1(\Omega_\infty) \cap L^p(\Omega_\infty)$  pour tout  $p < \infty$ . Cette propriété peut être établie en prenant un sous-ensemble dense dans (M1) de fonctions sous la forme  $u_M(x) = \inf(u_+(x), M) - \inf(u_-(x), M)$  dans  $H^1(\Omega_\infty)$ ,  $M < \infty$ , où  $u_+(x) = \sup\{u(x), 0\}$ ;  $u_-(x) = \sup\{-u(x), 0\}$ .

**Théorème 11.** Dans la classe de domaines admissibles (2.1) le problème d'optimisation de forme (2.8) admet une solution.

Afin de démontrer le Théorème 11 il suffit de montrer le théorème suivant :

**Théorème 12.** *Soit  $l \in \mathbb{N}$  fixe et  $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{U}_{ad}$  tels que  $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ . Alors pour tout  $f \in L^2(D)$  on a  $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega$  si et seulement si  $|\Omega_n| \rightarrow |\Omega|$ .*

La démonstration de ce théorème dans le cas d'un problème aux limites linéaire peut être trouvée dans [9]. Afin d'adapter le résultat à un problème non-linéaire (2.5) on peut établir la convergence au sens de Mosco des espaces de Sobolev  $H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$  associés, pour tout  $p < \infty$ . La relation entre la continuité par rapport à la variation du domaine géométrique pour le problème (2.5) et la convergence au sens de Mosco des espaces de Sobolev est donnée par la proposition suivante (cf. Proposition 3.2 dans le cas linéaire [9]) :

**Proposition 1.** *Soit  $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{U}_{ad}$  tels que  $H^1(\Omega_n)$  converge au sens de Mosco vers  $H^1(\Omega)$ . Alors pour tout  $f \in L^2(D)$  on a  $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega$ .*

**Preuve.** On pose  $u_n = u_{\Omega_n}$  et  $u = u_\Omega$ . La solution faible du problème (2.5) dans  $\Omega_n$  est une fonction unique  $u_n \in H^1(\Omega_n)$ ,  $u_n = 0$  sur  $\Gamma$ , satisfaisant

$$\int_{\Omega_n} (\nabla u_n \nabla v + u_n^3 v) dx = \int_{\Omega_n} f v, \quad \forall v \in H^1(\Omega_n), \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (2.9)$$

En prenant  $v = u_n$  la fonction test dans (2.9) on obtient

$$\int_{\Omega_n} (|\nabla u_n|^2 + u_n^4) dx = \int_{\Omega_n} f u_n, \quad (2.10)$$

ce qui est équivalent à

$$\int_D (|\tilde{\nabla} u_n|^2 + \tilde{u}_n^4) dx = \int_D f \tilde{u}_n. \quad (2.11)$$

Notons

$$\begin{aligned} I_n(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega_n} |\varphi|^4 - \int_{\Omega_n} f \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_D |\tilde{\nabla} \varphi|^2 + \frac{1}{4} \int_D |\tilde{\varphi}|^4 - \int_D f \tilde{\varphi}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

alors

$$I_n(u_n) = \inf \{ I_n(\varphi) : \varphi \in H^1(\Omega_n), \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \}. \quad (2.13)$$

Or  $\{u_n\}$  est borné donc on obtient

$$I_n(u_n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + \frac{1}{4} \int_{\Omega_n} |u_n|^4 - \int_{\Omega_n} f u_n = -\frac{1}{4} \int_{\Omega_n} |u_n|^4 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} f u_n. \quad (2.14)$$

D'après (2.5) on a

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + |u_n|^4 = \int_{\Omega_n} f u_n \leq \|f\|_{L^2} \|u_n\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}^2}{4\varepsilon} + \varepsilon \|u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2, \quad (2.15)$$

et nous avons les estimations suivantes :

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 + \|u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^4 - \varepsilon \|u_n\|_{L^2(\Omega_n)} \leq \frac{\|f\|_{L^2}^2}{4\varepsilon}. \quad (2.16)$$

Vu que

$$\|v\|_{L^2(\Omega_n)} = \int_{\Omega_n} 1|v|^2 dx \leq \left( \int_{\Omega_n} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega_n} |v|^4 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.17)$$

et aussi

$$-\varepsilon \|u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \geq -\varepsilon \sqrt{|\Omega_n|} \|u_n\|_{L^4(\Omega_n)}^2 \quad (2.18)$$

alors, d'après (2.16) on a

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 + \|u_n\|_{L^4(\Omega_n)}^4 - \varepsilon \sqrt{|\Omega_n|} \|u_n\|_{L^4(\Omega_n)}^2 \leq \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 + \|u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^4 - \varepsilon \|u_n\|_{L^2(\Omega_n)} \quad (2.19)$$

Si l'on suppose que

$$\|u_n\|_{L^4(\Omega_n)}^2 > \varepsilon \sqrt{|\Omega_n|}, \quad (2.20)$$

on obtient

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 + \frac{1}{2} \|u_n\|_{L^4(\Omega_n)}^4 \leq \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 + \|u_n\|_{L^4(\Omega_n)}^4 - \varepsilon \sqrt{|\Omega_n|} \|u_n\|_{L^4(\Omega_n)}^2 \quad (2.21)$$

Donc la suite  $\{u_n\}$  converge faiblement dans  $L^4$ , c'est-à-dire  $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$  dans  $L^4$  et  $\tilde{\nabla} u_n \rightharpoonup \tilde{\nabla} u$  dans  $L^2$ . D'après le Remarque 1 et (M1) il existe  $\{\phi_n\} \subset H^1(\Omega_n) \cap L^4(\Omega_n)$ , telle que  $\tilde{\phi}_n \rightarrow \tilde{u}_\Omega$  dans  $L^4(D)$  et  $\tilde{\nabla} \phi_n \rightarrow \tilde{\nabla} u_\Omega$  dans  $L^2(D; \mathbb{R}^2)$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\phi_n) = I_\Omega(u) \quad (2.22)$$

donc  $I_n(\phi_n) \geq I_n(u_n)$  ce qui donne :

$$I_\Omega(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\phi_n) \geq \limsup I_n(u_n) \geq \liminf I_n(u_n) \geq I_\Omega(u) \quad (2.23)$$

Alors  $I_n(u_n) \rightarrow I_\Omega(u)$ . Or

$$\int_{\Omega_n} f u_n \rightarrow \int_{\Omega} f u, \quad (2.24)$$

alors

$$\int_{\Omega_n} |\nabla u_n|^2 + u_n^4 = I_n(u_n) - \int_{\Omega_n} f u_n \rightarrow I_\Omega(u) - \int_{\Omega} f u = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^4. \quad (2.25)$$

Finalement  $\tilde{\nabla} u_n \rightarrow \tilde{\nabla} u$  fortement dans la norme  $L^2$  et  $\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}$  fortement dans  $L^4$ , donc aussi dans  $L^3$ , ainsi on obtient le passage à la limite dans (2.9) et l'égalité  $\tilde{u} = u_\Omega$  dans  $\Omega$ .

### 2.1.2 La dérivée par rapport au domaine.

On rappelle la façon formelle de dériver une équation et les conditions aux limites pour la dérivée de forme  $u'$  [94]. La dérivée par rapport au domaine est déterminée par la formule standard

$$dJ(\Omega; V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (J(\Omega_t) - J(\Omega)), \quad (2.26)$$

où le domaine  $\Omega_t$ , est défini comme dans (1.11). La limite (2.26) définit la dérivée de la fonctionnelle  $J(\Omega)$  dans la direction de champ de vecteurs  $V$ . D'après (2.6) (en remplaçant  $u_\Omega$  par  $u$ , cf. la démonstration de la proposition 1) on obtient

$$dJ(\Omega; V) = \int_{\Omega} (u - z_d) u' dx + \int_{\partial\omega} (u - z_d)^2 \langle V, n \rangle ds, \quad (2.27)$$

où la dérivée de forme  $u'$  de la solution du problème (2.2) est déterminée dans la suite et  $V = 0$  sur  $\Gamma$ . Ainsi on obtient les conditions aux bords sur  $\Gamma$  et l'équation dans  $\Omega$

$$\begin{aligned} u' &= 0 & \text{sur } \Gamma, \\ -\Delta u' + 3u^2 u' &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{aligned} \quad (2.28)$$

La condition au bord sur  $\partial\omega$  est établie dans (2.2) pour compléter le système (2.28). Pour cela on rappelle que  $u = 0$  sur  $\Gamma$ , donc la dérivée matérielle s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{u} = u' + \nabla u \cdot V = 0. \quad (2.29)$$

Ainsi la dérivée par rapport au domaine est la suivante :

$$u' = -\nabla u \cdot V = -\frac{\partial u}{\partial n} \langle V, n \rangle. \quad (2.30)$$

Par construction, le champ de vecteurs  $V$  s'annule sur  $\Gamma$ . On décompose maintenant le gradient sur la frontière en composantes tangentielle et normale :

$$\nabla u = \nabla_{\Gamma} u + \frac{\partial u}{\partial n} n. \quad (2.31)$$

La dérivée matérielle s'écrit :

$$\frac{d}{dt} u_t(x(t)) = \dot{u} = u' + \nabla u \cdot V. \quad (2.32)$$

### La formulation variationnelle du problème semi-linéaire.

Le problème (2.2) peut s'écrire sous la forme variationnelle de la manière suivante :  
On cherche  $u \in H_{\Gamma}^1(\Omega_t) \cap L^4(\Omega_t)$  tel que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u^3 \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in H_{\Gamma}^1(\Omega_t) \cap L^4(\Omega_t), \quad (2.33)$$

dans le domaine  $\Omega_t = T_t(\Omega)$ , où  $\Omega_t = D \setminus \bar{\omega}_t$  et  $\omega_t = T_t(\omega)$ . L'intégration par parties par rapport à  $t$ , en  $t = 0$  sous la condition que la dérivée de forme de la fonction test soit nulle, donne

$$\int_{\partial\omega} \nabla u \nabla \varphi \langle V, n \rangle + \int_{\Omega} \nabla u' \nabla \varphi + \int_{\partial\omega} u^3 \varphi \langle V, n \rangle + \int_{\Omega} 3u^2 u' \varphi = \int_{\partial\omega} f \varphi \langle V, n \rangle. \quad (2.34)$$

Ceci s'écrit ainsi :

$$\int_{\Omega} \nabla u' \nabla \varphi + \int_{\Omega} 3u^2 u' \varphi = - \int_{\partial\omega} [\nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi + u^3 \varphi - f \varphi] \langle V, n \rangle d\Gamma(x). \quad (2.35)$$

Par intégration par parties du côté gauche on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla u' \nabla \varphi + \int_{\Omega} 3u^2 u' \varphi = \int_{\Omega} (-\Delta u' + 3u^2 u') \varphi + \int_{\partial\omega} \frac{\partial u'}{\partial n} \varphi. \quad (2.36)$$

Ce qui conduit à l'équation pour  $u'$  dans  $\Omega$  sous la condition que la fonction test  $\phi$  ait son support compact. Afin de trouver la condition de Neumann pour  $u'$  sur  $\partial\omega$ , on réécrit les intégrales au bord :

$$- \int_{\partial\omega} [\nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi + u^3 \varphi - f \varphi] \langle V, n \rangle = \int_{\partial\omega} \{ \text{div}_{\Gamma}(\langle V, n \rangle \nabla_{\Gamma} u) + [f - u^3] \langle V, n \rangle \} \varphi. \quad (2.37)$$

Or la formule de Green sur la frontière du trou est de la forme

$$\int_{\partial\omega} a \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} \varphi d\Gamma = - \int_{\partial\omega} \varphi \text{div}_{\Gamma}(a \nabla_{\Gamma} u) \quad (2.38)$$

avec  $a = -\langle V, n \rangle$  (cf. [94]). Alors on obtient

$$\frac{\partial u'}{\partial n} = \text{div}_{\Gamma}(\langle V, n \rangle \nabla_{\Gamma} u) + [f - u^3] \langle V, n \rangle \quad \text{sur} \quad \partial\omega. \quad (2.39)$$

### L'état adjoint.

L'intérêt de l'état adjoint est de simplifier la forme du gradient de forme. L'équation pour l'état adjoint s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\Delta p + 3u^2 p = u - z_d & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega, \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.40)$$

La formulation variationnelle de l'équation précédente, compte tenu la formule de Green

$$- \int_{\Omega} \Delta p u' = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla u' - \int_{\partial\omega} \frac{\partial p}{\partial n} u' \quad (2.41)$$

est la suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla u' + 3u^2 p u' = \int_{\Omega} (u - z_d) u'. \quad (2.42)$$

On va simplifier maintenant l'expression du gradient de forme en remplaçant la dérivée de forme par l'état adjoint :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - z_d) u' &= \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla u' + 3u^2 p u' = \int_{\Omega} [-\Delta u' + 3u^2 u'] p + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u'}{\partial n} p \\ &= \int_{\partial\omega} \{ \text{div}_{\Gamma}(\langle V, n \rangle \nabla_{\Gamma} u) + [f - u^3] \langle V, n \rangle \} p. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Par conséquent la semi-dérivée de forme d'une fonctionnelle de forme peut s'écrire :

$$\begin{aligned} dJ(\Omega; V) &= \int_{\partial\omega} (u - z_d)^2 \langle V, n \rangle + \int_{\partial\omega} \text{div}_{\Gamma}(\langle V, n \rangle \nabla_{\Gamma} u) p + \int_{\partial\omega} (f - u^3) p \langle V, n \rangle \\ &= \int_{\partial\omega} [(u - z_d)^2 + (f - u^3) p] \langle V, n \rangle - \int_{\partial\omega} \langle V, n \rangle \nabla_{\Gamma} u \nabla_{\Gamma} p. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ce qui conduit à l'expression suivante du gradient de forme

$$g_{\Gamma} = -\nabla_{\Gamma} u \cdot \nabla_{\Gamma} p + (u - z_d)^2 + (f - u^3) p. \quad (2.45)$$

Afin d'effectuer des calculs numériques nous avons besoin d'une fonctionnelle de forme avec une donnée  $z_d$ . Dans ce cas, la position du trou  $\omega^*$  est fixe et le problème modèle de référence est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta z + z^3 = f & \text{dans } \Omega^*, \\ z = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega^*. \end{cases} \quad (2.46)$$

Pour l'élément :

$$z_d = \begin{cases} z & \text{dans } \Omega^*, \\ 0 & \text{dans } D \setminus \Omega^*, \end{cases} \quad (2.47)$$

et le domaine optimal  $\Omega^*$ , la valeur optimale de la fonctionnelle de forme est donnée par

$$J(\Omega^*) = 0. \quad (2.48)$$

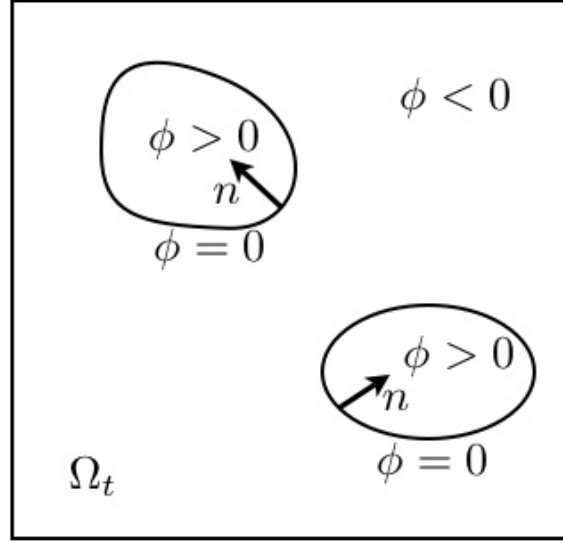


FIG. 2.2 – Domaine et fonction levelset

## 2.2 Résultats numériques d'optimisation de forme et de topologie

### 2.2.1 La formulation "Level Set"

La méthode numérique utilisée pour trouver le domaine optimal est celle de Level Set décrit dans [21]. On rappelle qu'il s'agit de représenter un domaine et sa frontière comme des lignes de niveau d'une fonction continue  $\phi$  définie sur tout le domaine  $D$ .

Considérons la transformation du domaine  $\Omega_t$  par un champ de vitesse  $\xi$ . Le domaine et la frontière sont définies par une fonction  $\phi = \phi(x, t)$  telle que

$$\Omega_t = \{x \in D : \phi(x, t) < 0\} \quad \text{et} \quad \partial\Omega_t = \{x \in D : \phi(x, t) = 0\}, \quad (2.49)$$

c'est-à-dire que la frontière  $\partial\Omega_t$  est la courbe de niveau zéro de la fonction  $\phi$  (Fig. 2.2).

#### L'équation de Hamilton-Jacobi

Supposons que  $x(t)$  est la position d'une particule sur la frontière  $\partial\Omega_t$  se déplaçant avec la vitesse  $\xi = \dot{x}(t)$ . En dérivant la relation  $\phi(x(t), t) = 0$  par rapport à  $t$  dans les directions normales de courbes de niveau  $\phi$  données par  $n = \nabla\phi/|\nabla\phi|$  on obtient l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\phi_t + \xi_n |\nabla\phi| = 0 \quad \text{dans} \quad D \times \mathbb{R}^+, \quad (2.50)$$

où  $\xi_n$  est la vitesse normale (la composante normale de  $\xi$ ,  $\xi_n = \xi \cdot n$ ). La donnée initiale  $\phi(0, x) = \phi_0(x)$  pour l'équation (2.50) est choisie comme la fonction distance signée à la frontière initiale  $\partial\Omega_0$  i.e.

$$\phi_0(x) = \pm \text{dist}(x, \partial\Omega_0), \quad (2.51)$$

avec le signe moins (resp. plus) si le point  $x$  est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du domaine initial  $\Omega_0$ . Comme une condition aux limites on impose des conditions de Neumann homogène sur la partie de la frontière du domaine  $D$  où la vitesse normale  $\xi_n$  est négative, c'est-à-dire là où la vitesse est dirigée vers l'intérieur du domaine  $D$ .

### Vitesse normale pour l'équation de la fonction "Level Set"

Quand un trou est créé à l'intérieur du domaine, la condition limite pour l'équation d'état sur la frontière du trou est de type Neumann. La dérivée par rapport au domaine est donnée par (2.44). On fait donc le choix suivant pour la composante normale  $\xi_n = \xi \cdot n$  du champ de vitesse

$$\xi_n = -\nabla_{\Gamma_N} u \cdot \nabla_{\Gamma_N} p + (u - z_d)^2 + (f - u^3)p. \quad (2.52)$$

### 2.2.2 Méthode numérique pour l'équation "Level Set"

Afin de résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi dans  $D$  on doit connaître la vitesse normale  $\xi_n$  dans tout le domaine  $D$ . Comme la vitesse normale est connue seulement sur la frontière interne de  $\Omega$ , on doit l'étendre à tout le domaine  $D$ . Dans cette partie on décrit comment construire l'extension de la vitesse normale à tout le domaine  $D$  et comment résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi associée (2.50). La méthode a été décrite en détails dans [58]. Ici on rappelle quelques notations et idées principales de cette méthode.

On commence par une remarque générale sur la résolution numérique de (2.50). Pour un calcul numérique précis, la solution de l'équation (2.50) ne doit être ni trop plate ni trop pentue. C'est le cas si  $\phi$  est une fonction distance i.e.  $|\nabla \phi| = 1$ . Malheureusement, même si on initialise avec une fonction distance (signée) pour la donnée initiale  $\phi_0$ , la solution  $\phi$  de l'équation (2.50) ne reste pas en général proche de la fonction distance. On peut réaliser une réinitialisation de  $\phi$  au temps  $t$  en cherchant la solution  $\varphi = \varphi(\tau, x)$  de l'équation suivante, jusqu'à l'état stationnaire (voir [86])

$$\varphi_\tau + S(\phi)(|\nabla \varphi| - 1) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times D, \quad (2.53)$$

$$\varphi(0, x) = \phi(t, x), \quad x \in D, \quad (2.54)$$

Ici,  $S$  est une approximation de la fonction signe i.e.

$$S(d) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + |\nabla d|^2 \varepsilon^2}}, \quad (2.55)$$

avec  $\varepsilon = \min(\Delta x, \Delta y)$  où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les pas de discrétisation en espace dans les directions  $x$  et  $y$  (voir ci-dessous). D'autres choix sont possibles pour l'approximation de la fonction signe. On se réfère à [86] pour plus de détails.

### Extension de la vitesse normale

La vitesse normale  $\xi_n$  doit être définie sur tout le domaine  $D$  si l'on veut résoudre l'équation (2.50). Comme la vitesse normale  $\xi_n$  est donnée seulement sur la frontière  $\Gamma_N$  (voir

(2.52)), on doit l'étendre au domaine  $D$ . On peut également étendre la vitesse normale de manière à forcer la solution  $\phi$  de l'équation de Hamilton-Jacobi à rester proche de la fonction distance. En effet, si on est capable de calculer une extension de la vitesse normale  $\xi_{\text{ext}}$  telle que

$$\nabla \xi_{\text{ext}} \cdot \nabla \phi = 0 \text{ in } D \times \mathbb{R}^+, \quad (2.56)$$

alors on peut montrer que (voir [103]) la solution  $\phi$  de l'équation (2.50) satisfait à  $|\nabla \phi| = 1$ . Pour construire une extension  $\xi_{\text{ext}}$  satisfaisant (2.56) au temps  $t$  il faut résoudre l'équation suivante, jusqu'à l'état stationnaire (voir [84], [86])

$$q_\tau + S(\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \cdot \nabla q = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times D \quad (2.57)$$

$$q(0, x) = p(t, x), \quad x \in D \quad (2.58)$$

où  $p$  est égal à  $\xi_n$  sur la frontière  $\Gamma_N$  et 0 partout ailleurs. La fonction  $S$  est l'approximation de la fonction signe définie par (2.55).

### Discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi

On choisit le carré unité  $D = (0, 1) \times (0, 1)$ . Pour la discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi (2.50), on définit d'abord la grille de  $D$ . On introduit les noeuds  $P_{ij}$  dont les coordonnées sont données par  $(i\Delta x, j\Delta y)$  où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les pas de discrétisation en espace dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement. On note également que  $t^k = k\Delta t$  le temps discret pour  $k \in \mathbb{N}$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps. On cherche une approximation  $\phi_{ij}^k \simeq \phi(P_{ij}, t^k)$ . Le schéma numérique qu'on utilise ici est proposé par Osher et Sethian [85], [92], [84]. Ce schéma "upwind" explicite s'écrit

$$\phi_{ij}^{k+1} = \phi_{ij}^k - \Delta t g(U_-^x \phi_{ij}^k, U_+^x \phi_{ij}^k, U_-^y \phi_{ij}^k, U_+^y \phi_{ij}^k) \quad (2.59)$$

où

$$U_-^x \phi_{ij} = \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad U_+^x \phi_{ij} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}}{\Delta x}, \quad (2.60)$$

sont les approximations à gauche et à droite de la dérivée en  $x$  de  $\phi$  en  $P_{ij}$ . On a des expressions similaires pour les approximations  $U_-^y$  et  $U_+^y$  de la dérivée en  $y$ . Le flux numérique est donné par

$$g_{ij} = g(U_-^x \phi_{ij}, U_+^x \phi_{ij}, U_-^y \phi_{ij}, U_+^y \phi_{ij}) = \max(v_{ij}, 0) G^+ + \min(v_{ij}, 0) G^-$$

avec

$$G^+ = \left[ \max(U_-^x v_{ij}, 0)^2 + \min(U_+^x v_{ij}, 0)^2 + \max(U_-^y v_{ij}, 0)^2 + \min(U_+^y v_{ij}, 0)^2 \right]^{1/2}$$

$$G^- = \left[ \min(U_-^x v_{ij}, 0)^2 + \max(U_+^x v_{ij}, 0)^2 + \min(U_-^y v_{ij}, 0)^2 + \max(U_+^y v_{ij}, 0)^2 \right]^{1/2}$$

et  $v_{ij} = \xi_n(P_{ij})$  est l'extension de la vitesse normale au point  $P_{ij}$ . Ce schéma "upwind" est stable sous la condition CFL

$$(\max_D |\xi_n|) \Delta t \left( \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \right) \leq \frac{1}{2}. \quad (2.61)$$

## Calcul de l'extension de la vitesse

A chaque itération  $k$  du schéma précédent, on calcule l'extension de la vitesse normale comme la solution stationnaire de (2.57),(2.58). On calcule  $q_{ij}^n \simeq q(P_{ij}, t^n)$  à partir de l'approximation suivante de (2.57) :

$$q_{ij}^{n+1} = q_{ij}^n - \Delta\tau \left[ \max(s_{ij}n_{ij}^x, 0) U_-^x q_{ij} + \min(s_{ij}n_{ij}^x, 0) U_+^x q_{ij} + \max(s_{ij}n_{ij}^y, 0) U_-^y q_{ij} + \min(s_{ij}n_{ij}^y, 0) U_+^y q_{ij} \right], \quad (2.62)$$

où  $s_{ij} = S(\phi_{ij}^n)$ . On utilise des différences centrées pour calculer l'approximation  $n_{ij}$  du vecteur normal unitaire  $n = (n^x, n^y) = (\phi_x / \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}, \phi_y / \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2})$  au noeud  $P_{ij}$ . La valeur initiale  $q_0$  est égale à  $\xi_n$  sur les points de la grille dont la distance à l'interface est inférieure à  $\min(\Delta x, \Delta y)$  et égale à zéro partout ailleurs.

### 2.2.3 L'algorithme d'optimisation de forme

On va maintenant décrire les étapes du calcul numérique.

1. **Définition de la fonction de référence.** Tout d'abord on choisit la fonction de référence qui est définie sur un domaine.
2. **Le domaine initial.** On choisit un domaine initial  $\Omega^0$  et on calcule la solution du problème non-linéaire à l'aide d'une méthode éléments finis affine par morceaux sur un maillage de  $\Omega^0$ . On peut alors calculer la dérivée topologique qui nous montre où créer un trou dans le domaine.
3. **Créer un trou.** On peut alors calculer la dérivée topologique qui nous indique où créer un trou dans le domaine. On crée un trou circulaire  $\omega_\varepsilon$  et on pose une condition de Neumann sur sa frontière.
4. **Evolution.** On procède maintenant à l'évolution du domaine. Une fois calculée la fonction de courbes de niveaux  $\phi$ , on peut déterminer le nouveau domaine  $\Omega^1$ . On revient ensuite à la première étape avec  $\Omega^1$  au lieu de  $\Omega^0$ . Le trou n'est pas créé à chaque étape mais seulement quand il est intéressant de le faire.

## Résultats numériques

Des calculs numériques ont été réalisés sur les exemples décrits dans le chapitre précédent. Le problème est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_x v(x) &= F(x, v(x)) & x \in \Omega, \\ v(x) &= 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.63)$$

Dans un premier exemple (Fig. 2.3) on considère une fonction  $z_d$  définie dans un domaine dont les valeurs sont égales à zéro dans un disque de centre  $(0.7, 0.7)$  et de rayon 0.5. La fonction  $F$  du problème non-linéaire (2.63) est la suivante :

$$\begin{aligned} F((x_1, x_2), v(x_1, x_2)) &= -v^3(x_1, x_2) + ((x_1^2 + x_2^2) \sin \pi x_1 \sin \pi x_2)^3 \\ &\quad + 2(\pi^2(x_1^2 + x_2^2) - 2) \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \\ &\quad - 4\pi(x_1 \cos \pi x_1 \sin \pi x_2 + \sin \pi x_1 \cos \pi x_2). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Le domaine initial est choisi sans trou. Le calcul de la dérivée topologique permet de trouver l'endroit où il faut faire un trou. Le domaine est ensuite modifié grâce au gradient de forme. On obtient le minimum de la fonctionnelle d'énergie pour ce premier exemple :

$$J(\Omega^*) \cong 0,000146. \quad (2.65)$$

Dans l'exemple suivant (Fig. 2.4) on garde la même fonction  $z_d$  et la même fonction  $F(x, v(x))$  mais on remplace le domaine initial par un carré avec un trou non-circulaire. Dans ce cas on obtient la valeur minimale de la fonctionnelle de forme

$$J(\Omega^*) \cong 0,000194. \quad (2.66)$$

Sur la Fig. 2.5 on a présenté l'évolution du domaine dans le cas où la fonction  $z_d$  est définie dans un domaine carré et ses valeurs sont égales à zéro dans un voisinage du point  $(0.5, 0.5)$ . La fonction  $F$  est (cf. exemple 2, chapitre 1) :

$$\begin{aligned} F((x_1, x_2), v(x_1, x_2)) = & -v^3(x_1, x_2) + (x_1(x_1 - 1)x_2(x_2 - 1))^3 \\ & - 2(x_2(x_2 - 1) + x_1(x_1 - 1)). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Le domaine initial est choisi avec un trou circulaire. Après évolution du domaine, on obtient le minimum de la fonctionnelle d'énergie :

$$J(\Omega^*) \cong 0.000001. \quad (2.68)$$

Le dernier exemple (Fig. 2.6) correspond à l'exemple 3 dans le chapitre précédent. On considère la fonction  $z_d$  dont les valeurs nulles sont concentrées dans un petit voisinage du point  $(0.5, 0.5)$ , et la fonction  $F$  est la suivante :

$$\begin{aligned} F((x_1, x_2), v(x_1, x_2)) = & -v^3(x_1, x_2) + (100x_1^2x_2^2(x_1 - 1)^2(x_2 - 1)^2)^3 \\ & - 200[x_1^2(x_1 - 1)^2(6x_2^2 - 6x_2 + 1) \\ & + x_2^2(x_2 - 1)^2(6x_1^2 - 6x_1 + 1)]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Le domaine initial est sans trou. La valeur minimale de la fonctionnelle de forme vaut :

$$J(\Omega^*) \cong 0.000219. \quad (2.70)$$

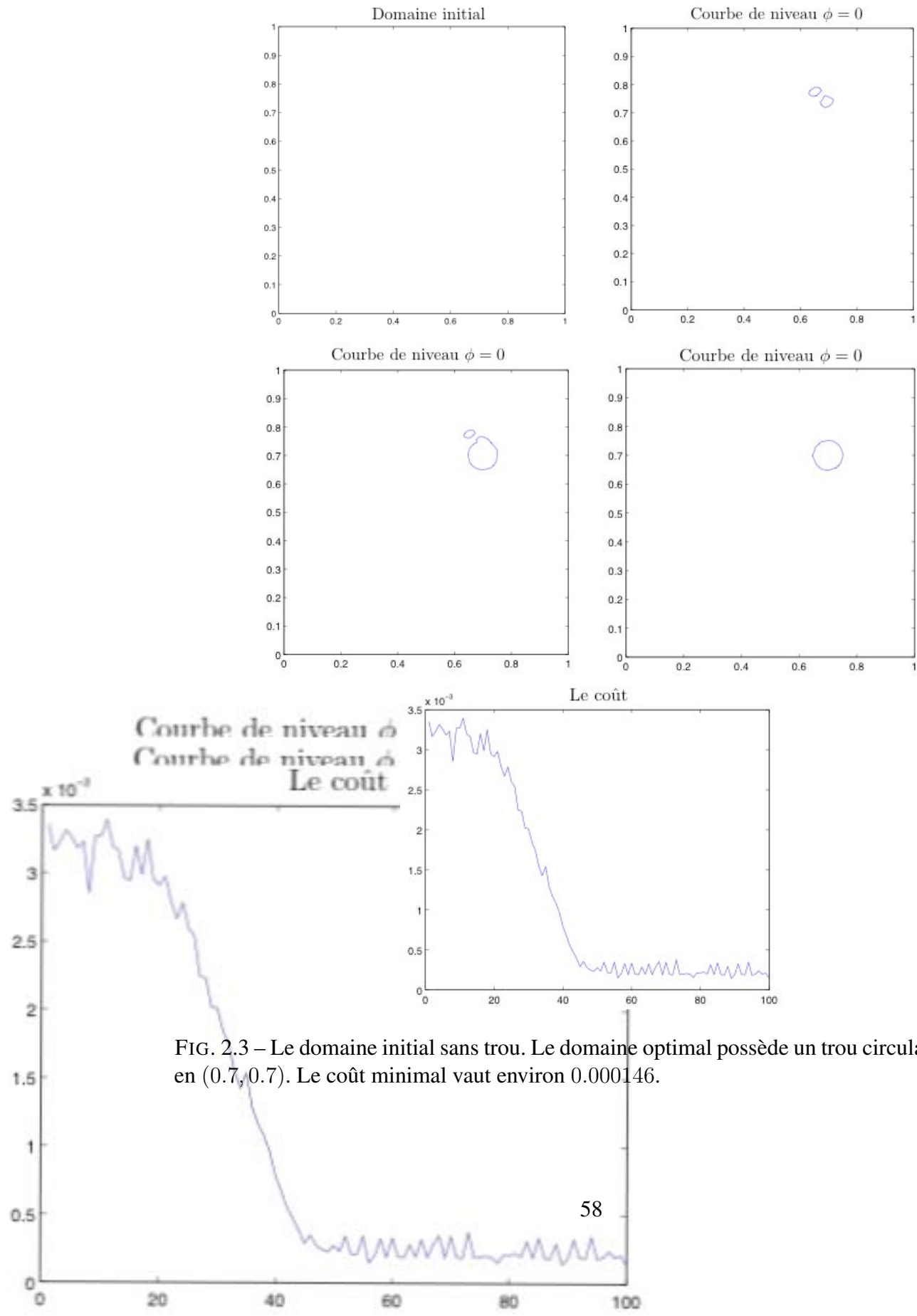


FIG. 2.3 – Le domaine initial sans trou. Le domaine optimal possède un trou circulaire centré en (0.7, 0.7). Le coût minimal vaut environ 0.000146.

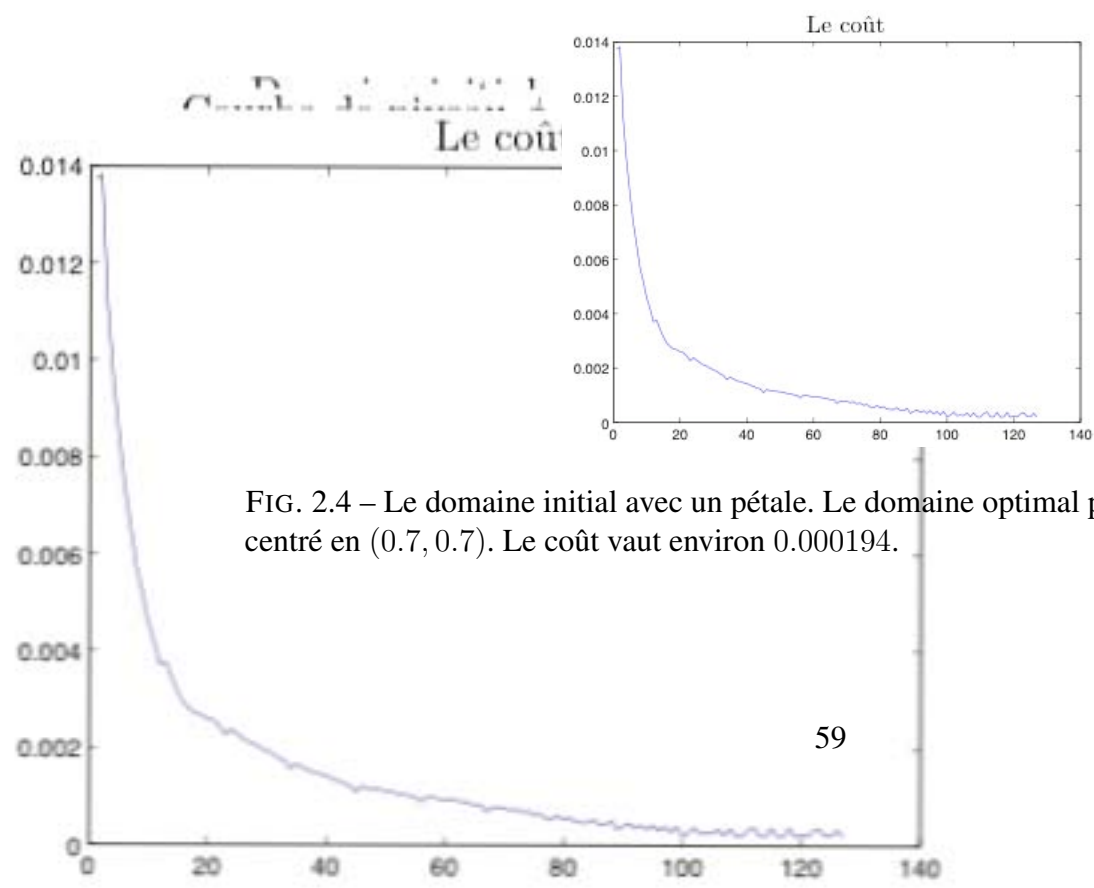
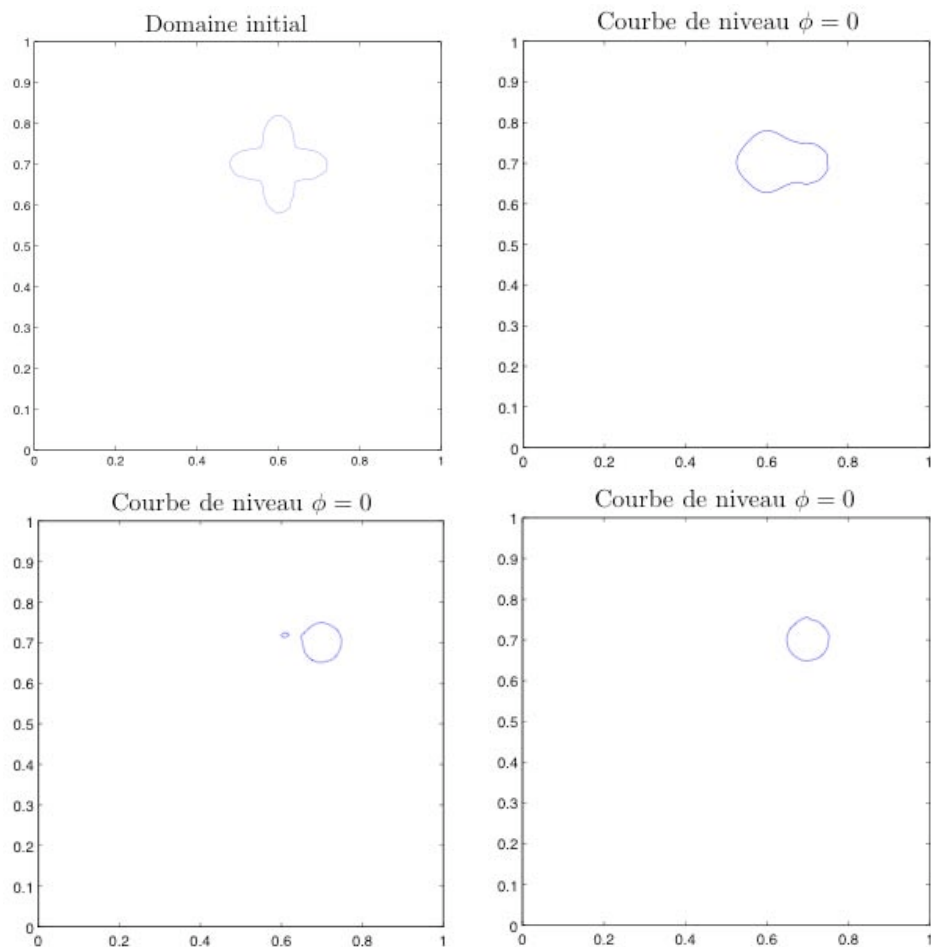
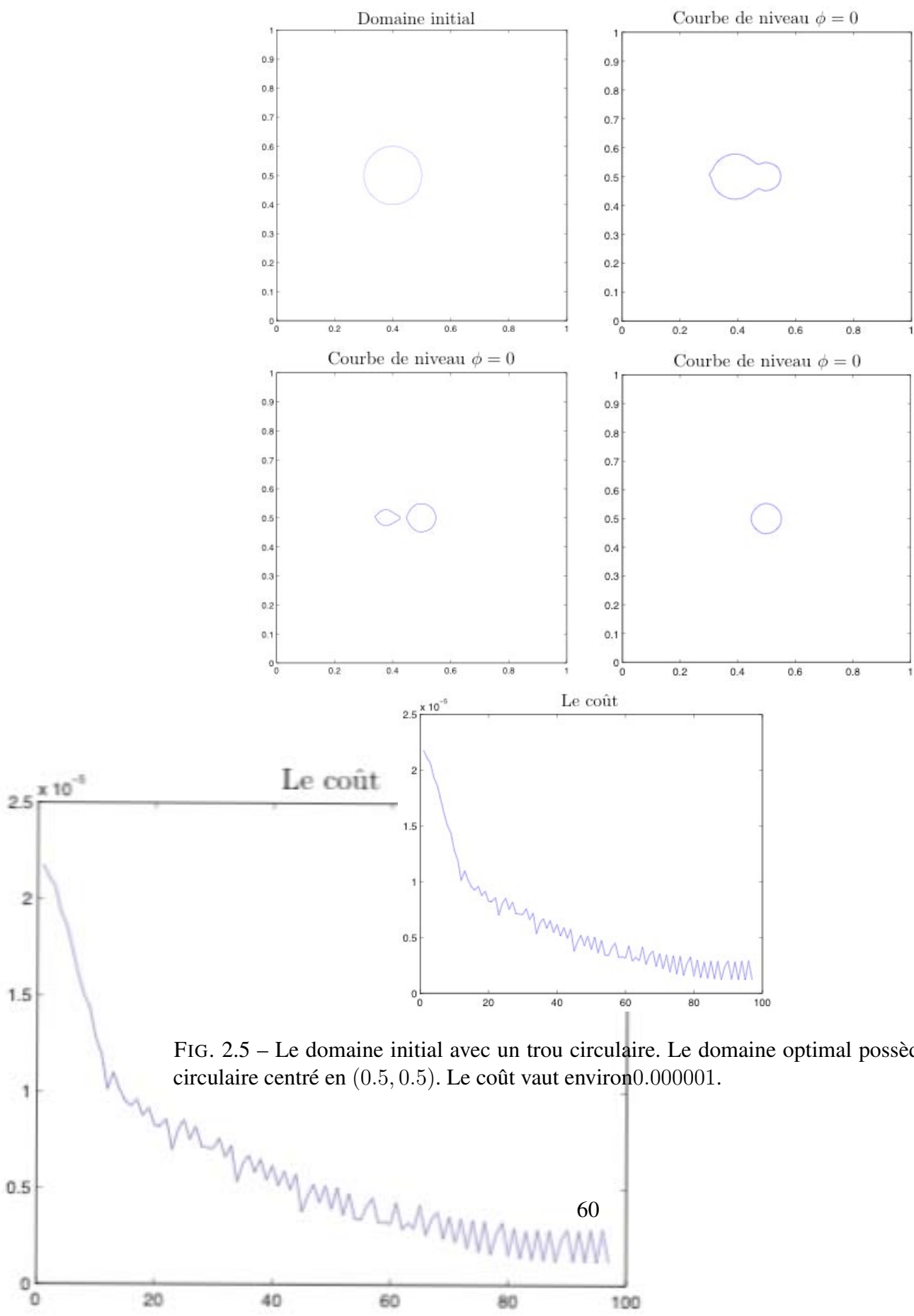


FIG. 2.4 – Le domaine initial avec un pétale. Le domaine optimal possède un trou circulaire centré en  $(0.7, 0.7)$ . Le coût vaut environ 0.000194.



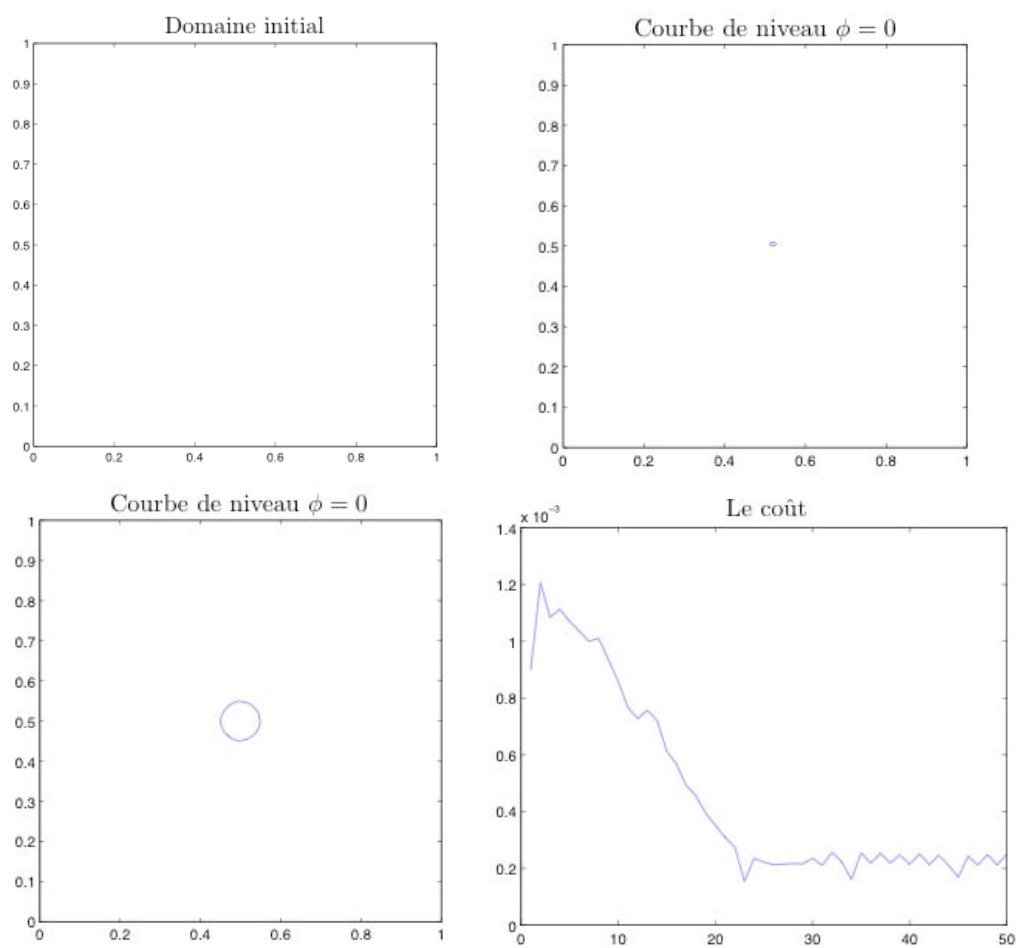


FIG. 2.6 – Le domaine initial sans trou. Le domaine optimal possède un trou circulaire centré en  $(0.5, 0.5)$ . Le coût vaut environ 0.000219.



# Chapitre 3

## Le système de l'élasticité défini sur un domaine fissuré.

### La dérivée de forme et la dérivée topologique

Dans ce chapitre, nous allons établir la dérivée de forme et la dérivée topologique dans le cas d'une inégalité variationnelle du système de l'élasticité décrit pour un milieu élastique avec une fissure. La méthode est générale et elle peut être appliquée pour des problèmes variés. Dans cette partie on considère un modèle mathématique du problème statique de l'élasticité avec une fissure sur laquelle on suppose des contraintes de non-pénétration notées sous la forme d'une inégalité. On présente le modèle mathématique de ce problème dans le cas de  $\mathbb{R}^2$  afin d'appliquer les résultats obtenus ci-dessous à l'optimisation de forme en mécanique des milieux continus. On examine la sensibilité du problème aux limites aux changements de la forme et de la topologie. En particulier on établit l'existence de la dérivée de forme et de la dérivée topologique d'une fonctionnelle d'énergie. Ainsi, il sera possible d'utiliser la méthode des courbes de niveaux [21], [22] pour l'optimisation d'une fonctionnelle de formes pour l'inégalité variationnelle déterminée pour le problème de l'élasticité défini dans le domaine fissuré avec des contraintes de non-pénétration.

### 3.1 Introduction

On va considérer un modèle mathématique d'un objet physique de la mécanique des milieux continus. L'optimisation de forme d'une classe de problèmes physiques décrits par des équations aux dérivées partielles nécessite l'obtention de quelques résultats dans le cadre de la modélisation et de la résolution numérique. Il faut étudier :

- l'existence d'une solution et aussi la dépendance continue de la solution du modèle par rapport à la forme. Cela peut avoir une influence sur l'existence d'une forme optimale.
- la différentiabilité de la solution par rapport aux changements du bord permettant de définir le gradient de forme. Cette différentiabilité conduit aussi à certaines conditions nécessaires d'optimalité de premier et deuxième ordre.
- l'analyse asymptotique de la solution d'un problème aux limites et la détermination de

la dérivée topologique d'une fonctionnelle de forme qui indique les changements de la topologie à effectuer pendant l'optimisation numérique.

- la construction d'une méthode numérique et la démonstration de sa convergence dans le cas d'exemples numériques.

Un exemple d'application technique de l'optimisation de forme est la mécanique des milieux continus. On va procéder à l'analyse du problème d'optimisation de forme en supposant l'existence de fissures, ce qui est très utile du point de vue des applications pratiques car on peut en particulier prendre en compte la possibilité d'endommagements de la structure. L'analyse des structures élastiques avec une fissure est compliquée et la modélisation mathématique d'une fissure réelle n'est pas bien connue. Néanmoins la fissure peut être présente dans la structure. Dans cette partie on considère une fissure dans  $\mathbb{R}^2$  et on suppose des contraintes de non-pénétration sur les bords de la fissure. Pour les modèles de ce type les résultats concernant l'existence d'une solution, la formulation variationnelle, l'analyse de la sensibilité à la forme et l'analyse asymptotique par rapport à une perturbation singulière du domaine  $\Omega$  ont été déjà présentés dans la littérature en mécanique.

Les résultats obtenus permettent d'appliquer la méthode de courbes de niveaux en optimisation de formes pour des problèmes de ce type.

L'objectif de ce travail est la modélisation d'une structure fissurée et l'analyse de sensibilité d'une fonctionnelle d'énergie aux changements de la frontière et aux perturbations de la frontière et aussi aux perturbations singulières du domaine. Les résultats présentés ici constituent la base pour la méthode des courbes de niveau en optimisation de forme (cf. [21] pour le problème de Signorini).

Tout d'abord on décrit certains éléments de la théorie des milieux élastiques fissurés avec un contact entre les faces de la fissure. La fonctionnelle d'énergie d'un milieu élastique dans  $\mathbb{R}^2$  est un exemple d'une fonctionnelle de forme qui peut être minimisée ou maximisée dans la famille des domaines admissibles.

On commence par discuter la formulation du problème mathématique, des propriétés de la solution et des ensembles de coïncidence parmi les problèmes considérés. Il est connu que la fissure peut être caractérisée par des conditions aux limites linéaires ce qui donne un problème aux limites linéaire. Notre modélisation vient du fait que les faces d'une fissure peuvent être en contact. Nous allons considérer une condition non-linéaire appelée contrainte de non-pénétration décrite sous la forme d'une inégalité. Ceci nous permet d'obtenir un problème à frontière libre, la condition aux limites vérifiée par la solution peut être déterminée à l'aide de la solution du problème.

En particulier nous regardons les relations entre la solution du problème et les perturbations du domaine comme la forme de la fissure. La manière dont on perturbe le domaine [94], afin de calculer le gradient de forme de la fonctionnelle d'énergie, est décrit dans la section 3.6. L'analyse asymptotique dans le domaine singulièrement perturbé [78], accomplie afin de trouver la dérivée topologique [95] de la même fonctionnelle d'énergie, est présentée dans la section 3.7. Ainsi on obtient tous les résultats nécessaires pour effectuer l'optimisation de forme en utilisant la méthode des courbes des niveaux.

Le contenu de ce chapitre est le suivant. On commence par la formulation (3.1)-(3.5) d'un problème elliptique dans un domaine fissuré. Dans la section 3.3 on démontre l'existence d'une solution faible et on établit une inégalité variationnelle pour le problème (3.1)-(3.5).

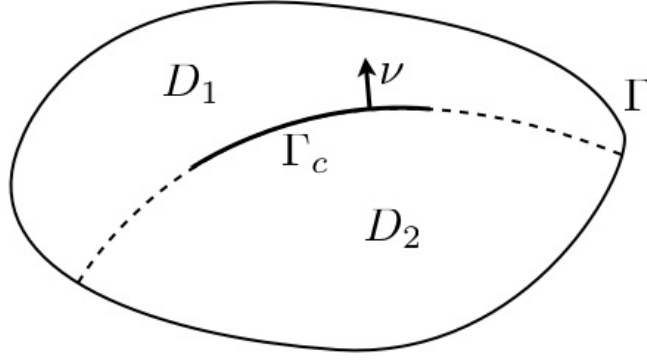


FIG. 3.1 – Domaine  $\Omega_c$  avec une fissure  $\Gamma_c$ .

En particulier, on donne la formulation lisse du problème. Dans la section 3.4 on présente la méthode du domaine artificiel pour le problème avec une fissure. Dans la section 3.5 le cas d'une fissure sur la frontière de la partie rigide d'une structure élastique est présenté. Ce thème est assez nouveau du point de vue de la modélisation mathématique des fissures. Dans la section 3.6 on poursuit l'analyse de sensibilité à la forme d'une partie de la frontière considérée, c'est-à-dire pour une perturbation d'un sommet de la fissure. Nous allons présenter en détails une construction de la perturbations du domaine, qui nous permet de déduire la dérivée de forme d'une fonctionnelle d'énergie dans le cas de perturbations d'une extrémité de la fissure. En particulier nos résultats peuvent être utilisés par le critère de Griffith pour examiner les développement de la fissure. Les résultats compris dans la partie 3.7 sont nouveaux dans le cadre de l'analyse de sensibilité. La forme de la dérivée topologique d'une fonctionnelle d'énergie est la même que dans le cas linéaire. Dans la partie 3.8 on applique l'analyse de sensibilité par rapport à la forme à la modélisation de fissure avec un changement de direction de propagation (*ang.* : *kinking*).

## 3.2 Modèle avec une fissure $\Gamma_c$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert de frontière  $\Gamma$  régulière,  $\Gamma_c \subset \Omega$  une courbe régulière et  $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_c$  (voir Fig. 3.1).

On suppose également que  $\Gamma_c$  peut être prolongée de manière à ce qu'elle croise la frontière extérieure  $\Gamma$  en deux points et qu'elle divise  $\Omega_c$  en deux sous-ensembles  $D_1$  et  $D_2$  dont les frontières  $\partial D_1$  et  $\partial D_2$  sont Lipschitzienne et de mesure  $mes(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Notons  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  un vecteur normale à  $\Gamma_c$ . Supposons que  $\Gamma_c$  ne contient pas ses sommets, c'est-à-dire  $\Gamma_c = \overline{\Gamma}_c \setminus \partial\Gamma_c$ .

L'équation d'état d'équilibre pour une structure élastique  $\Omega_c$  avec une fissure  $\Gamma_c$  est la suivante :

Trouver dans  $\Omega_c$  le champ de déplacements  $u = (u_1, u_2)$  et les composantes du tenseur

des contraintes  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i = 1, 2$ , tels que :

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans} \quad \Omega_c, \quad (3.1)$$

$$\sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{dans} \quad \Omega_c, \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad (3.3)$$

$$[u]\nu \geq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u]\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c, \quad (3.4)$$

$$\sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c^\pm, \quad (3.5)$$

avec  $[v] = v^+ - v^-$  le saut des valeurs de  $v$  sur  $\Gamma_c$ , et  $\pm$  représente la partie positive et négative par rapport à  $\nu$  des faces de la fissure,  $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega_c)$  est donnée,

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2), \quad \sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j). \quad (3.6)$$

Le tenseur des déplacements est noté  $\varepsilon_{ij}(u)$

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.7)$$

Le tenseur de Hooke  $A = \{a_{ijkl}\}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$  est symétrique et positif

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const}, \quad (3.8)$$

$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}$ ,  $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ . L'équation (3.1) est dite l'équation d'équilibre et (3.2) est la loi de Hooke. On note

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_c \quad (3.9)$$

et on applique aussi la convention de sommation d'Einstein :  $\sigma_{ij}n_j = \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}n_j$  Tous les tenseurs d'indice double sont symétriques, c'est-à-dire  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , etc.

La première condition dans (3.4) est appelée contrainte de non-pénétration des faces de la fissure  $\Gamma_c^\pm$ . La deuxième inégalité dans (3.5) signifie l'absence de frottement sur  $\Gamma_c$ . Pour simplifier on suppose la condition (3.3) de Dirichlet sur le bord extérieur  $\Gamma$ . Remarquons qu'on ne connaît pas de points de  $\Gamma_c$ , pour lesquels les égalités ou inégalités (3.4), (3.5) sont vérifiées. Un tel problème est appelé problème à frontière libre. Si l'on suppose  $\sigma_\nu = 0$  alors pour  $\sigma_\tau = 0$ , on obtient la condition aux limites classique  $\sigma\nu = 0$ . D'autre part, d'après (3.4), la condition  $\sigma_\nu < 0$  implique que  $[u]\nu = 0$ , ce qui signifie qu'il existe un contact entre les faces de la fissure en ce point. L'inégalité stricte  $[u]\nu > 0$  en ce point signifie l'absence d'un tel contact. La première difficulté dans l'analyse du problème (3.1)-(3.5) concerne les conditions au bord (3.4)-(3.5). L'autre difficulté est liée à l'existence de la frontière non-régulière  $\Gamma_c$ . On se réfère aux articles [17] et [45] où des problèmes aux limites définis dans des domaines non-réguliers ont été discutés.

### 3.3 Existence d'une solution

Tout d'abord on signale que le problème (3.1)-(3.5) peut s'écrire sous plusieurs formes équivalentes. En particulier une de ces formes est donnée par la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. On présente un certain nombre de ces formulations. Pour cela on introduit l'espace de Sobolev

$$H_\Gamma^1(\Omega_c) = \{v = (v_1, v_2) : v_i \in H^1(\Omega_c), v_i = 0 \text{ sur } \Gamma, i = 1, 2\}, \quad (3.10)$$

et un ouvert connexe des déplacements admissibles

$$K = \{v \in H_\Gamma^1(\Omega_c) : [v]\nu \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}, \quad (3.11)$$

Dans ce cas, d'après le théorème de Fichera-Stampacchia (cf.[49]), le problème

$$\min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) - \int_{\Omega_c} f_i v_i \right\} \quad (3.12)$$

admet une unique solution  $u$  qui vérifie l'inégalité variationnelle suivante :

$$u \in K : \int_{\Omega_c} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v - u) \geq \int_{\Omega_c} f_i (v_i - u_i), \quad \forall v \in K, \quad (3.13)$$

où  $\sigma_{ij}(u) = \sigma_{ij}$  est donnée par (3.2).

**Théorème 13.** *Les formulations (3.1)-(3.5) et (3.13) sont équivalentes [49]. Une solution régulière du problème (3.1)-(3.5) vérifie (3.13) et réciproquement, (3.13) implique (3.1)-(3.5), sous des conditions de régularité de la solution.*

Dans la suite on présentera deux autres représentations du problème (3.1)-(3.5) dites formulation mixte et formulation lisse. Pour cela, on regarde les conditions aux limites (3.4)-(3.5). Soit  $\Sigma$  une courbe  $C^{1,1}$  fermée, donnée par un prolongement de  $\Gamma_c$  tel que  $\Sigma \subset \Omega$  et divisant  $\Omega$  en deux sous-ensembles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (cf. Fig. 3.2).

Dans ce cas  $\Sigma$  constitue la frontière de  $\Omega_1$  et une partie de la frontière de  $\Omega_2$ , c'est-à-dire  $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma$ . On introduit maintenant l'espace  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  avec la norme :

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 = \|v\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy \quad (3.14)$$

et on note  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$  l'espace dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ . On considère aussi l'espace

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma_c) = \left\{ v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) : \frac{v}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Gamma_c) \right\} \quad (3.15)$$

avec la norme :

$$\|v\|_{1/2,00}^2 = \|v\|_{1/2}^2 + \int_{\Gamma_c} \rho^{-1} v^2, \quad (3.16)$$

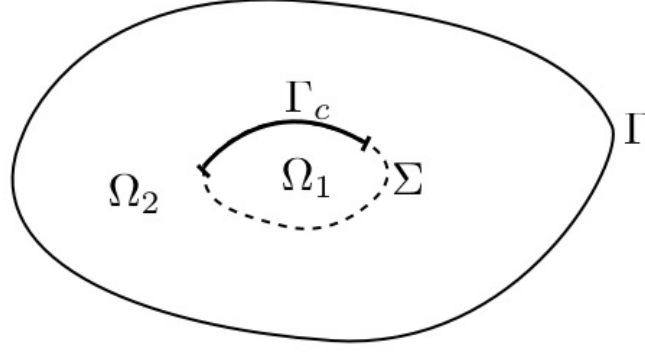


FIG. 3.2 – Le prolongement de la fissure  $\Gamma_c$  à une courbe fermée  $\Sigma$ .

où  $\rho(x) = \text{dist}(x; \partial\Gamma_c)$  et  $\|v\|_{1/2}$  est la norme dans l'espace  $H^{1/2}(\Gamma_c)$ . On peut bien sûr prolonger les fonctions de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)$  sur  $\Sigma$  par 0 et le prolongement appartient à l'espace  $H^{1/2}(\Sigma)$ . Plus précisément, soit  $v$  définie sur  $\Gamma_c$ , et  $\bar{v}$  le prolongement de  $v$  par zéro, c'est-à-dire :

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \Gamma_c, \\ 0, & x \in \Sigma \setminus \Gamma_c. \end{cases} \quad (3.17)$$

Alors (voir [44])

$$v \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c) \quad \text{si et seulement si} \quad \bar{v} \in H^{1/2}(\Sigma). \quad (3.18)$$

Après avoir introduit l'espace fonctionnel, nous expliquerons la façon dont les conditions aux limites (3.4)-(3.5) sont remplies. Autrement dit, la condition  $\sigma_\nu \leq 0$  dans (3.5) signifie que

$$\langle \sigma_\nu, \phi \rangle_{1/2,00} \leq 0, \quad \forall \phi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c), \quad \phi \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c, \quad (3.19)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2,00}$  est le *produit scalaire* ou la dualité entre  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c)$  et  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)$ . La condition  $\sigma_\tau = 0$  dans (3.5) signifie que :

$$\langle \sigma_\nu, \phi \rangle_{1/2,00} = 0, \quad \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c). \quad (3.20)$$

On rappelle que dans notre notation  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)$  est un espace de fonctions scalaires et de fonctions vectorielles. La dernière condition dans (3.4) est vérifiée au sens du produit scalaire :

$$\langle \sigma_\nu, [u]\nu \rangle_{1/2,00} = 0. \quad (3.21)$$

### 3.3.1 La formulation mixte

Dans cette partie on présente la formulation mixte du problème (3.1)-(3.5). Tout d'abord on introduit l'espace des contraintes :

$$H(\text{div}) = \{ \sigma = \{\sigma_{ij}\} : \sigma \in L^2(\Omega_c), \text{div} \sigma \in L^2(\Omega_c) \} \quad (3.22)$$

avec la norme

$$\|\sigma\|_{H(\text{div})}^2 = \|\sigma\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \|\text{div}\sigma\|_{L^2(\Omega_c)}^2. \quad (3.23)$$

Soit  $H(\text{div}; \Gamma_c)$  l'ensemble de contraintes admissibles défini par

$$H(\text{div}; \Gamma_c) = \{\sigma \in H(\text{div}) : [\sigma\nu] = 0 \text{ sur } \Gamma_c; \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_c^\pm\}. \quad (3.24)$$

On remarque ici que pour  $\sigma \in H(\text{div})$ , les traces  $(\sigma_\nu)^\pm$  sont bien définies sur  $\Sigma^\pm$  comme des éléments de l'espace  $H^{-1/2}(\Sigma)$ . Le première contrainte dans la définition de  $H(\text{div}; \Gamma_c)$  est donc vérifié au sens de traces

$$(\sigma\nu)^+ = (\sigma\nu)^- \text{ sur } \Sigma, \quad (3.25)$$

quelle que soit la courbe  $\Sigma$  (cf. [44]). Les contraintes  $\sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0$  sur  $\Gamma_c$  ont aussi une interprétation dans l'espace dual. Les valeurs  $\sigma_\nu, \sigma_\tau$  sont des éléments de l'espace  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c)$ .

La formulation mixte du problème (3.1)-(3.5) est la suivante :

Trouver le champ des déplacements  $u = (u_1, u_2)$  et le tenseur des contraintes  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que :

$$u \in L^2(\Omega_c), \quad \sigma \in H(\text{div}; \Gamma_c), \quad (3.26)$$

$$-\text{div}\sigma = f \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (3.27)$$

$$\int_{\Omega_c} C\sigma(\bar{\sigma} - \sigma) + \int_{\Omega_c} u(\text{div}\bar{\sigma} - \text{div}\sigma) \geq 0 \quad \forall \bar{\sigma} \in H(\text{div}; \Gamma_c). \quad (3.28)$$

Le tenseur  $C = A^{-1}$  est obtenu d'après la formulation équivalente de la loi de Hooke

$$C\sigma = \varepsilon(u). \quad (3.29)$$

**Théorème 14.** *Il existe une solution du problème (3.26)-(3.28) qui vérifie (3.29). Le problème (3.26)-(3.28) est équivalent à (3.13)*

L'existence d'une solution au problème (3.26)-(3.28) peut être démontrée indépendamment du problème (3.1)-(3.5). D'autre part, une solution du problème (3.26)-(3.28) existe d'après le Théorème 14, ce qui a été démontré précédemment dans le cas de problème (3.1)-(3.5).

### 3.3.2 La formulation lisse dans $\Omega$

Etant donné la formulation mixte (3.26)-(3.28) on peut en déduire facilement la formulation lisse du problème aux limites considéré. Dans ce cas la solution du problème est définie dans le domaine lisse  $\Omega$ , c'est-à-dire dans le domaine sans fissure. Il suffit de remarquer que la solution du problème (3.1)-(3.5) vérifie la condition

$$[\sigma\nu] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.30)$$

qui permet de déduire

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.31)$$

au sens des distributions, c'est-à-dire dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Alors l'équation d'équilibre (3.1) est vérifiée dans le domaine lisse  $\Omega$ .

Introduisons maintenant l'espace des contraintes dans  $\Omega$  :

$$\mathcal{H}(\operatorname{div}) = \{\sigma = \{\sigma_{ij}\} : \sigma, \operatorname{div} \sigma \in L^2(\Omega)\} \quad (3.32)$$

et l'ensemble des contraintes admissibles

$$\mathcal{H}(\operatorname{div}; \Gamma_c) = \{\sigma \in \mathcal{H}(\operatorname{div}) : \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}. \quad (3.33)$$

La norme dans l'espace  $\mathcal{H}(\operatorname{div})$  est définie par

$$\|\sigma\|_{\mathcal{H}(\operatorname{div})}^2 = \|\sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} \sigma\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.34)$$

Remarquons que pour  $\sigma \in \mathcal{H}(\operatorname{div})$ , les conditions  $\sigma_\tau = 0$ ,  $\sigma_\nu \leq 0$  sur  $\Gamma_c$  sont bien définies au sens de l'espace  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c)$ . On peut en déduire la formulation lisse du problème (3.1)-(3.5).

On cherche à trouver le champ des déplacements  $u = (u_1, u_2)$  et les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que

$$u \in L^2(\Omega), \quad \sigma \in \mathcal{H}(\operatorname{div}; \Gamma_c), \quad (3.35)$$

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.36)$$

$$\int_{\Omega} C\sigma(\bar{\sigma} - \sigma) + \int_{\Omega} u(\operatorname{div} \bar{\sigma} - \operatorname{div} \sigma) \geq 0, \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathcal{H}(\operatorname{div}; \Gamma_c). \quad (3.37)$$

**Théorème 15.** *Le problème (3.35)-(3.37) admet une solution qui vérifie (3.29). En plus, une solution du problème (3.1)-(3.5) vérifie les problèmes (3.35)-(3.37) et (3.29) et réciproquement, les problèmes (3.35)-(3.37) et (3.29) impliquent (3.1)-(3.5).*

L'avantage du problème (3.35)-(3.37) est qu'il est défini dans le domaine  $\Omega$  sans fissure. Une telle formulation est proche du problème de contact avec un obstacle fin où les contraintes sont imposées sur un ensemble de petite taille (cf. [48]).

Certains résultats numériques pour le problème (3.1)-(3.5) peuvent être trouvés par exemple dans [3], [54].

### 3.4 La méthode du domaine fictif

Dans cette partie on montre une relation entre le problème (3.1)-(3.5) et le problème de contact de type Signorini. Il est connu que le problème de Signorini est le problème limite pour la famille des problèmes de type (3.1)-(3.5), c'est-à-dire qu'il peut être obtenu en passant à la limite  $\lambda \rightarrow 0$  dans le système (3.47)-(3.51) considéré dans la suite,  $\lambda$  étant un paramètre réel.

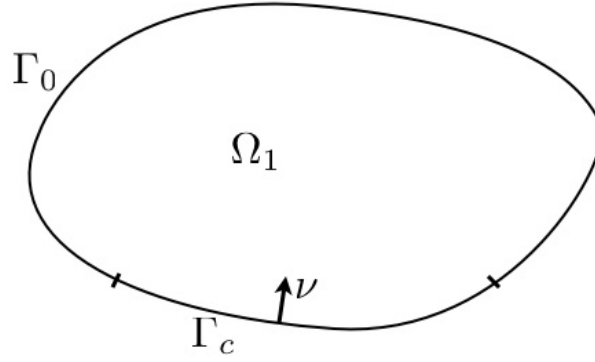


FIG. 3.3 – Problème de Signorini sur  $\Gamma_c$ .

Tout d'abord on donne une formulation du problème de Signorini. Soit  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert de frontière  $\Gamma_1$  lisse et telle que  $\Gamma_1 = \Gamma_c \cup \Gamma_0$  avec  $\Gamma_c \cap \Gamma_0 = \emptyset$  et  $mes \Gamma_0 > 0$  (voir Fig. 3.3).

Pour simplifier on suppose que  $\Gamma_c$  est lisse (et en particulier sans points multiples). Notons  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  un vecteur intérieur normal à  $\Gamma_c$ . On cherche à trouver le champ de déplacements  $u = (u_1, u_2)$  et les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans } \Omega_1, \quad (3.38)$$

$$\sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega_1, \quad (3.39)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad (3.40)$$

$$u\nu \geq 0, \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0, u\nu \cdot \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (3.41)$$

Dans (3.38),  $f = (f_1, f_2) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$  est donnée,  $A = \{a_{ijkl}\}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$  est un tenseur d'élasticité connu,  $a_{ijkl} \in L^\infty_{loc}$  est symétrique et positif.

Il est connu que le problème (3.38)-(3.41) admet une formulation variationnelle (voir aussi [17]) pour laquelle on obtient l'existence d'une solution. Notons :

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1) = \{v = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega_1) : v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad i = 1, 2\} \quad (3.42)$$

et introduisons l'ensemble des déplacements admissibles

$$K_c = \{v = (v_1, v_2) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1) : v\nu \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c\}. \quad (3.43)$$

Alors le problème (3.38)-(3.41) est équivalent à la minimisation d'une fonctionnelle quadratique

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) - \int_{\Omega_1} f_i v_i \quad (3.44)$$

sur un cône connexe  $K_c$ . On peut donc écrire une inégalité variationnelle

$$u \in K_c : \int_{\Omega_1} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v - u) \geq \int_{\Omega_1} f_i (v_i - u_i) \quad \forall v \in K_c. \quad (3.45)$$

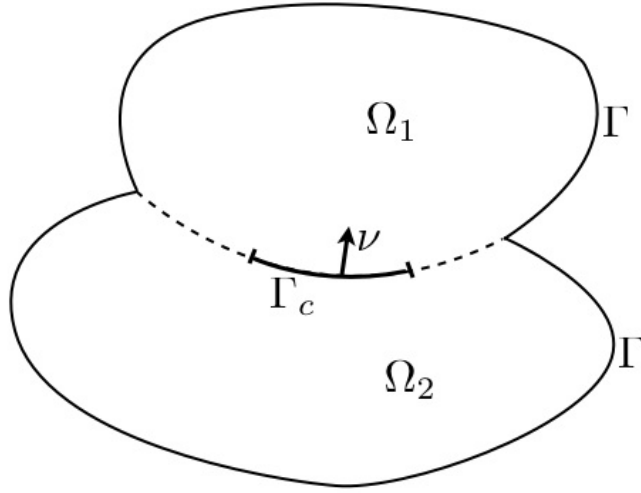


FIG. 3.4 – Domaine  $\Omega_c$ .

Le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}(u) = \sigma_{ij}$  est défini par la loi de Hooke (3.39).

**Théorème 16.** *L'inégalité variationnelle (3.45) est équivalente au problème (3.38)-(3.41), ceci signifie qu'une solution régulière du problème (3.38)-(3.41) vérifie (3.45) et que (3.45) implique (3.38)-(3.41).*

Compte tenu de la formulation variationnelle (3.45), le problème (3.38)-(3.41) admet aussi une formulation variationnelle.

L'objectif de cette partie est de montrer que le problème (3.38)-(3.41) est le problème limite pour une famille de problèmes de type (3.1)-(3.5) en passant à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Dans la suite on va expliquer ce passage à la limite.

Tout d'abord on étend le domaine  $\Omega_1$  à l'aide d'un domaine  $\Omega_2$  de frontière lisse  $\Gamma_2$ . Cette extension se note  $\Omega_c$  et elle contient la fissure  $\Gamma_c$ . La frontière de  $\Omega_c$  est notée  $\Gamma \cup \Gamma_c^\pm$  (voir Fig. 3.4). Soit  $\Sigma_0 = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ ,  $\Sigma = \Sigma_0 \setminus \Gamma$ , de sorte que  $\Sigma$  ne contient pas ses extrémités.

Introduisons la famille de tenseurs d'élasticité dépendant d'un paramètre  $\lambda$  positif :

$$a_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{dans } \Omega_1 \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} & \text{dans } \Omega_2. \end{cases} \quad (3.46)$$

Notons  $A^\lambda = \{a_{ijkl}^\lambda\}$ . Dans le domaine étendu  $\Omega_c$ , on considère une famille de problèmes avec une fissure :

Trouver le champ de déplacements  $u^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$  et les composantes du tenseur des

contraintes  $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que

$$-\operatorname{div} \sigma^\lambda = f \quad \text{dans} \quad \Omega_c, \quad (3.47)$$

$$\sigma^\lambda = A^\lambda \varepsilon(u^\lambda) \quad \text{dans} \quad \Omega_c, \quad (3.48)$$

$$u^\lambda = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad (3.49)$$

$$[u^\lambda]_\nu \geq 0, [\sigma^\lambda] = 0, \sigma_\nu^\lambda \cdot [u]_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c, \quad (3.50)$$

$$\sigma_\nu^\lambda \leq 0, \sigma_\tau^\lambda = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c^\pm. \quad (3.51)$$

Comme précédemment,  $[v] = v^+ - v^-$  est le saut de  $v$  à travers les faces de la fissure  $\Gamma_c$ , où  $\pm$  représentent les deux côtés de la fissure. Les autres notations correspondent à celles de la section 3.1. On voit que pour un réel fixé  $\lambda > 0$  le problème (3.47)-(3.51) décrit l'état d'équilibre d'un milieu élastique avec une fissure  $\Gamma_c$  dont les contraintes de non-pénétration sont prescrites. Ainsi le problème (3.47)-(3.51) est le même que le problème (3.1)-(3.5) et on s'intéresse au passage à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . En particulier, le problème (3.47)-(3.51) admet une formulation variationnelle. Les conditions au bord (3.50)-(3.51) sont remplies au sens de la section 3.1. On peut démontrer (voir [37]) que la convergence suivante a lieu :

$$u^\lambda \rightarrow u^0 \quad \text{dans} \quad H_\Gamma^1(\Omega_c), \quad (3.52)$$

$$\frac{u^\lambda}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega_2), \quad (3.53)$$

où  $u^0 = u$  dans  $\Omega_1$ , i.e. la restriction de la fonction limite de (3.52) coïncide avec l'unique solution du problème de Signorini (3.38)-(3.41). D'après (3.52)-(3.53) on voit bien que la fonction limite  $u^0$  est nulle dans  $\Omega_2$ . D'autre part, il n'existe aucune limite  $\sigma^\lambda$  dans  $\Omega$  lorsque  $\lambda$  tend vers zéro. Ainsi, le domaine  $\Omega_2$  peut être considéré comme une partie rigide. Cela signifie que le problème de Signorini est, en effet, le problème avec une fissure et avec des contraintes de non-pénétration entre les faces de la fissure, où la fissure  $\Gamma_c$  est localisée entre la partie élastique  $\Omega_1$  et la partie rigide  $\Omega_2$ .

On peut remarquer que le problème (3.47)-(3.51) peut être réécrit sous forme équivalente dans le domaine  $\Omega_c \cup \overline{\Gamma}_c$  en utilisant la formulation lisse (section 3.3.2). Quelques détails supplémentaires sur la méthode du domaine fictif dans la théorie du problème avec une fissure peuvent être trouvés dans [37], [101].

### 3.5 La fissure sur le bord d'une inclusion rigide

On peut considérer le cas où la fissure se trouve sur le bord d'une inclusion rigide à l'intérieur d'une structure élastique. Cette section est consacrée à la discussion de ce type de problèmes.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine borné dont la frontière  $\Gamma$  est lisse et soit  $\omega$  un sous-ensemble de  $\Omega$ , dont la frontière est notée par  $\Sigma$ . On suppose que  $\overline{\omega} \subset \Omega$ . Ensuite on suppose que  $\Sigma$  contient deux parties :  $\Sigma = \Gamma_c \cup (\Sigma \setminus \Gamma_c)$ ,  $\operatorname{mes}(\Sigma \setminus \Gamma_c) > 0$ , voir Fig. 3.5. Notons  $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_c$ . Comme précédemment  $A = \{a_{ijkl}\}$  est un tenseur d'élasticité symétrique et

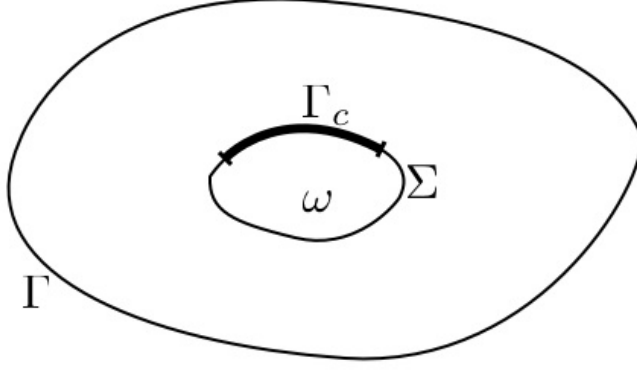


FIG. 3.5 – Inclusion rigide  $\omega$  dans un milieu élastique.

positif,  $a_{ijkl} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Pour  $\lambda$  positif, on introduit le tenseur d'élasticité

$$a_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{dans } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} & \text{dans } \omega, \end{cases} \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (3.54)$$

et on considère le problème suivant :

Trouver un champ de déplacements  $u^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$  et les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que :

$$-\operatorname{div} \sigma^\lambda = f \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (3.55)$$

$$\sigma^\lambda - A^\lambda \varepsilon(u^\lambda) = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad (3.56)$$

$$u^\lambda = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.57)$$

$$[u^\lambda]_\nu \geq 0, [\sigma_\nu^\lambda] = 0, \sigma_\nu^\lambda \cdot [u^\lambda]_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c, \quad (3.58)$$

$$\sigma_\tau^\lambda = 0, \sigma_\nu^\lambda \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^\pm, \quad (3.59)$$

la fonction  $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)$  étant donnée. Remarquons, que pour tout  $\lambda > 0$  le problème (3.55)-(3.59) est le même que (3.1)-(3.5) qui décrit l'état d'équilibre d'un élastique avec une fissure  $\Gamma_c$ . Le problème (3.1)-(3.5) admet une formulation variationnelle, une formulation mixte et une formulation lisse. Nous nous sommes intéressés au cas du passage à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Pour cela on considère l'inégalité variationnelle

$$u^\lambda \in K : \int_{\Omega_c} \sigma_{ij}^\lambda(u^\lambda) \varepsilon_{ij}(v - u^\lambda) \geq \int_{\Omega_c} f_i(v_i - u_i^\lambda) \quad \forall v \in K, \quad (3.60)$$

où  $\sigma_{ij}^\lambda(u^\lambda) = \sigma_{ij}^\lambda$  a été défini dans (3.56) et l'ensemble  $K$  a été introduit dans (3.11).

On peut passer à la limite dans (3.60) lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ . Pour cela, introduisons un espace des déplacements rigides :

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2) : \rho(x) = Bx + D, x \in \omega\}, \quad (3.61)$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad D = (d^1, d^2); \quad b, d^1, d^2 = \text{const.} \quad (3.62)$$

Considérons ensuite l'espace :

$$H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega_c) = \{v \in H_{\Gamma}^1(\Omega_c) : v = \rho \text{ sur } \omega, \quad \rho \in R(\omega)\}$$

et l'ensemble des déplacements admissibles :

$$K_{\omega} = \{v \in H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega_c) : (v^+ - \rho)\nu \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}. \quad (3.63)$$

Ici, par définition  $v^+$  correspond à la face  $\Gamma_0^+$  de la fissure. Soient  $v = 0$ ,  $v = 2u^{\lambda}$  des fonctions test dans (3.60). On obtient alors l'égalité :

$$\int_{\Omega_c} \sigma_{ij}^{\lambda}(u^{\lambda}) \varepsilon_{ij}(u^{\lambda}) = \int_{\Omega_c} f_i u_i^{\lambda} \quad (3.64)$$

alors on a l'estimation :

$$\|u^{\lambda}\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_c)} \leq c_1, \quad (3.65)$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\omega} a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u^{\lambda}) \varepsilon_{ij}(u^{\lambda}) \leq c_2, \quad (3.66)$$

avec des constantes  $c_1, c_2$  indépendantes de  $0 < \lambda < \lambda_0$ . On peut en déduire que pour  $\lambda \rightarrow 0$  la convergence faible

$$u^{\lambda} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad H_{\Gamma}^1(\Omega_c). \quad (3.67)$$

En plus, d'après (3.66) :

$$\varepsilon_{ij}(u) = 0 \text{ dans } \omega, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.68)$$

Et ceci signifie qu'il existe une fonction  $\rho_0$ , telle que

$$u = \rho_0 \text{ dans } \omega, \quad \rho_0 \in R(\omega). \quad (3.69)$$

Or  $u^{\lambda}$  tend vers  $u$  faiblement dans  $H_{\Gamma}^1(\Omega_c)$  et  $u^{\lambda} \in K$ , alors

$$(u^+ - \rho_0)\nu \geq 0 \text{ na } \Gamma_c. \quad (3.70)$$

En particulier  $u \in K_{\omega}$ . On choisit, ensuite, une fonction  $v \in H_{\Gamma}^{1,\omega}(\Omega_c)$ . Il existe alors  $\rho \in R(\omega)$  tel que  $v = \rho$  sur  $\omega$ . Bien entendu,  $v$  peut être une fonction test dans (3.60). Car  $A^{\lambda} = A$  dans  $\Omega \setminus \overline{\omega}$ , alors on peut passer à la limite  $\lambda \rightarrow 0$  dans (3.60) et on obtient ainsi l'inégalité variationnelle suivante :

$$u \in K_{\omega} : \int_{\Omega \setminus \overline{\omega}} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v - u) \geq \int_{\Omega_c} f_i (v_i - u_i) \quad \forall v \in K_{\omega}. \quad (3.71)$$

Le problème ci-dessus décrit l'état d'équilibre d'un milieu élastique  $\Omega_c$  avec une fissure  $\Gamma_c$  et une inclusion rigide  $\omega$ . Ceci signifie qu'un déplacement admissible dans  $\omega$  est de la forme  $\rho(x)$ ,  $x \in \omega$ , où  $\rho \in R(\omega)$ . Le problème (3.71) peut aussi s'écrire de la manière suivante.

Dans  $\Omega_c$  on cherche à trouver un champ de déplacements  $u = (u_1, u_2)$  avec  $u = \rho_0$  dans  $\omega$ ,  $\rho_0 \in R(\omega)$ , et dans  $\Omega \setminus \bar{\omega}$  on veut déterminer les composantes du tenseur de contraintes  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (3.72)$$

$$\sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (3.73)$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad (3.74)$$

$$(u - \rho_0)\nu \geq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c^+, \quad (3.75)$$

$$\sigma_\nu \cdot (u - \rho_0)\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c^+, \quad (3.76)$$

$$-\int_{\Sigma} \sigma_\nu \cdot \rho = \int_{\omega} f_i \rho_i \quad \forall \rho \in R(\omega). \quad (3.77)$$

**Théorème 17.** *Les formulations (3.71) et (3.72)-(3.77) sont équivalentes. Ceci signifie qu'une solution lisse quelconque du problème (3.72)-(3.77) vérifie (3.71) et réciproquement, (3.71) implique (3.72)-(3.77).*

Comme on l'a dit auparavant, il est possible de déterminer en quel sens les conditions (3.75)-(3.77) sont vérifiées. En particulier les deux dernières conditions dans (3.75) sont remplies au sens de l'espace  $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c)$ . Ainsi, la condition (3.76) est vérifiée ainsi que l'égalité

$$\langle \sigma_\nu^+, (u - \rho_0)\nu \rangle_{1/2,00,\Gamma_c} = 0, \quad (3.78)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2,00,\Gamma_c}$  désigne le produit de dualité entre  $H^{-1/2}(\Sigma)$  et  $H^{1/2}(\Sigma)$ . La condition (3.77) signifie que

$$-\langle \sigma_\nu, \rho \rangle_{1/2,\Sigma} = \int_{\omega} f_i \rho_i, \quad \forall \rho \in R(\omega). \quad (3.79)$$

Afin de conclure cette partie, remarquons que l'inégalité variationnelle (3.71) est équivalente à la minimisation de la fonctionnelle

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) - \int_{\Omega_c} f_i v_i \quad \text{dans} \quad K_\omega. \quad (3.80)$$

### 3.6 Les dérivées de forme d'une fonctionnelle d'énergie

Afin de déterminer la direction de développement d'une fissure, on utilise le critère de Griffith. Le critère dit que le développement de la fissure a lieu dans la direction pour laquelle la dérivée de la fonctionnelle d'énergie par rapport à la taille de la fissure admet une valeur au moins critique. Dans cette partie on va aborder ce sujet pour le problème modèle (3.1)-(3.5).

En général on doit considérer un problème perturbé par rapport au problème (3.1)-(3.5). En particulier la longueur de la fissure peut être perturbée. Une perturbation sera caractérisée par un petit paramètre  $t$ , et  $t = 0$  correspond au problème sans aucune perturbation,

c'est-à-dire (3.1)-(3.5). Pour bien décrire la perturbation du problème, on doit connaître une perturbation de  $\Omega_c$ . On l'obtient en utilisant la méthode de vitesse de variation de la frontière du domaine géométrique (cf. [94]). En effet on considère un champ de vitesse  $V$  défini sur  $\mathbb{R}^2$  et on définit une perturbation de  $\Omega_c$  comme solution du problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles ordinaires. Ainsi, soit  $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)^2$  un champ de vitesse  $V = (V_1, V_2)$ . On considère le problème de Cauchy pour trouver la fonction  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$

$$\frac{d\Phi}{dt}(t, \cdot) = V(\Phi(t, \cdot)) \quad \text{pour } t \neq 0, \quad \Phi(0, x) = x. \quad (3.81)$$

Il existe une unique solution  $\Phi$  au problème (3.81) telle que

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)(t, x) \in C^1([0, t_0]; W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)^2), \quad |t_0| > 0. \quad (3.82)$$

En même temps on peut trouver une solution  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$  du problème de Cauchy :

$$\frac{d\Psi}{dt}(t, \cdot) = -V(\Psi(t, \cdot)) \quad \text{pour } t \neq 0, \quad \Psi(0, y) = y \quad (3.83)$$

telle que

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)(t, y) \in C^1([0, t_0]; W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)^2), \quad |t_0| > 0. \quad (3.84)$$

On peut démontrer aussi que pour  $t$  fixé, la fonction  $\Psi(t, \cdot)$  est la réciproque de  $\Phi(t, \cdot)$ , ce qui veut dire que (voir démonstration dans [45])

$$y = \Phi(t, \Psi(t, y)), \quad x \in \Psi(t, \Phi(t, x)), \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (3.85)$$

Alors on a une bijection de  $\Omega_c$  dans  $\Omega_c^t$  :

$$y = \Phi(t, x) : \Omega_c \rightarrow \Omega_c^t, \quad (3.86)$$

$$x = \Psi(t, y) : \Omega_c^t \rightarrow \Omega_c. \quad (3.87)$$

De plus, d'après (3.82) et (3.84) on a le développement asymptotique suivant : ( $I$  est l'opérateur d'identité)

$$\Phi(t, x) = x + tV(x) + r_1(t), \quad (3.88)$$

$$\Psi(t, y) = y - tV(y) + r_2(t), \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial x} = I + t \frac{\partial V}{\partial x} + r_3(t), \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial \Psi(t)}{\partial y} = I - t \frac{\partial V}{\partial y} + r_4(t), \quad (3.91)$$

$$\|r_i(t)\|_{W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)^2} = o(t), \quad i = 1, 2,$$

$$\|r_i(t)\|_{L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)^{2 \times 2}} = o(t), \quad i = 3, 4.$$

Considérons le problème aux limites suivant (perturbé par rapport au problème (3.1)-(3.5)) dans le domaine  $\Omega_c^t$ .

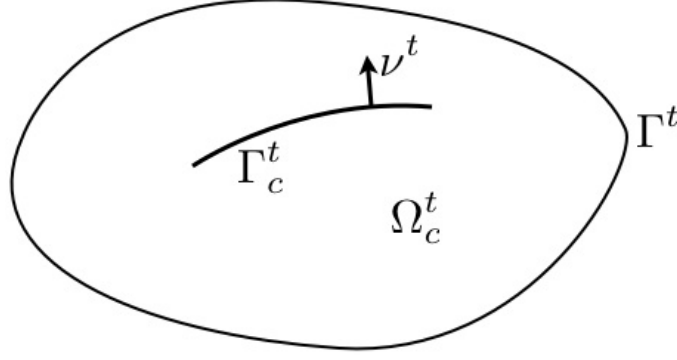


FIG. 3.6 – Domaine perturbé  $\Omega_c^t$  par la méthode de vitesse.

Trouver le champ de déplacements  $u^t = (u_1^t, u_2^t)$  et les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma^t = \{\sigma_{ij}^t\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que :

$$-\operatorname{div} \sigma^t = f \quad \text{dans} \quad \Omega_c^t, \quad (3.92)$$

$$\sigma^t = A\varepsilon(u^t) \quad \text{dans} \quad \Omega_c^t, \quad (3.93)$$

$$u^t = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^t, \quad (3.94)$$

$$[u^t]\nu^t \geq 0, [\sigma_{\nu^t}^t] = 0, \sigma_{\nu^t}^t \cdot [u^t]\nu^t = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c^t, \quad (3.95)$$

$$\sigma_{\nu^t}^t \leq 0, \sigma_{\tau^t}^t = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c^{t\pm}. \quad (3.96)$$

Nous avons ici

$$y = \Phi(t, x) : \Gamma \rightarrow \Gamma^t, \quad \Gamma_c \rightarrow \Gamma_c^t, \quad (3.97)$$

et on suppose dans la suite, que  $f = (f_1, f_2) \in C^1(\mathbb{R})$  et  $a_{ijkl} = \text{const}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ . Les autres relations dans (3.92)-(3.96) sont les mêmes que dans (3.1)-(3.5), en particulier  $\nu^t = (\nu_1^t, \nu_2^t)$  est un vecteur unitaire normal à  $\Gamma_c^t$ .

On peut introduire une inégalité variationnelle pour le problème (3.92)-(3.96). Considérons l'espace de Sobolev

$$H_{\Gamma^t}^1(\Omega_c^t) = \{v = (v_1, v_2) : v_i \in H^1(\Omega_c^t), v_i = 0 \text{ sur } \Gamma^t, \quad i = 1, 2\} \quad (3.98)$$

et l'ensemble des déplacements admissibles

$$K^t = \{v \in H_{\Gamma^t}^1(\Omega_c^t) \mid [v]\nu^t \geq 0 \quad \text{p.p. sur} \quad \Gamma_c^t\}. \quad (3.99)$$

Considérons les fonctionnelles :

$$\Pi(\Omega_c^t; v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^t} \sigma_{ij}^t(v) \varepsilon_{ij}(v) - \int_{\Omega_c^t} f_i v_i \quad (3.100)$$

et le problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique d'énergie défini dans un domaine perturbé :

$$\min_{v \in K^t} \Pi(\Omega_c^t; v). \quad (3.101)$$

Les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}^t(v)$  sont définies par la loi de Hooke comme dans (3.93). Il existe une solution du problème (3.101) et elle vérifie l'inégalité variationnelle :

$$u^t \in K^t : \int_{\Omega_c^t} \sigma_{ij}^t(u^t) \varepsilon_{ij}(v - u^t) \geq \int_{\Omega_c^t} f_i(v_i - u_i^t) \quad \forall v \in K^t. \quad (3.102)$$

Connaissant la solution du problème (3.102) on peut définir la fonctionnelle d'énergie

$$\Pi(\Omega_c^t; u^t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^t} \sigma_{ij}^t(u^t) \varepsilon_{ij}(u^t) - \int_{\Omega_c^t} f_i u_i^t. \quad (3.103)$$

Notons que pour  $t = 0$  on a  $\Omega_c^0 = \Omega_c$  et  $u^0 = u$  où  $u$  est la solution du problème non-perturbé (3.13). La question qu'on se pose concerne la différentiabilité de la fonctionnelle  $\Pi(\Omega_c^t; u^t)$  par rapport à  $t$ . On veut alors déterminer la limite suivante :

$$\frac{d}{dt} \Pi(\Omega_c^t; u^t)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Pi(\Omega_c^t; u^t) - \Pi(\Omega_c; u)}{t}. \quad (3.104)$$

C'est possible dans plusieurs cas pratiques. Considérons deux situations où la dérivée

$$I = \frac{d}{dt} \Pi(\Omega_c^t; u^t)|_{t=0} \quad (3.105)$$

existe.

- a) Remarquons que le vecteur  $\nu$  normal à  $\Gamma_c$  ne change pas de valeur par l'application  $x \rightarrow \Phi(t, x)$ , c'est-à-dire  $\nu^t = \nu$ . Dans ce cas on peut démontrer que  $I$  admet la forme suivante (voir [46], [53], [60])

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \{ \operatorname{div} V \cdot \varepsilon_{ij}(u) - 2E_{ij}(V; u) \} \sigma_{ij}(u) - \int_{\Omega_c} \operatorname{div}(V f_i) u_i, \quad (3.106)$$

avec

$$E_{ij}(U; v) = \frac{1}{2} (v_{i,k} U_{k,j} + v_{j,k} U_{k,i}), \quad U = \{U_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2; \quad (3.107)$$

Remarquons que les contraintes sur le vecteur normal sont vérifiées pour une fissure droite  $\Gamma_c$  et pour le champ des vecteurs  $V$  tangent à  $\Gamma_c$  (voir Fig. 3.7). Dans ce cas (3.106) constitue la dérivée de la fonctionnelle d'énergie par rapport à la taille de la fissure, ce qui est utile dans la suite pour le critère de Griffith. Ceci est le cas où  $v = 1$  dans un voisinage d'un sommet de la fissure et où le support  $\operatorname{supp} V$  appartient à un petit voisinage du sommet.

- b) La forme de la dérivée (3.105) peut être obtenue dans le cas du domaine avec une fissure curviligne, si la condition (a) sur le vecteur normal est remplie. Introduisons ici la formule (3.105) quand la fissure  $\Gamma_c$  est décrite par une fonction lisse.
- c) Le cas général peut être considéré en accord avec la méthode présentée dans [96] pour le problème de Signorini.

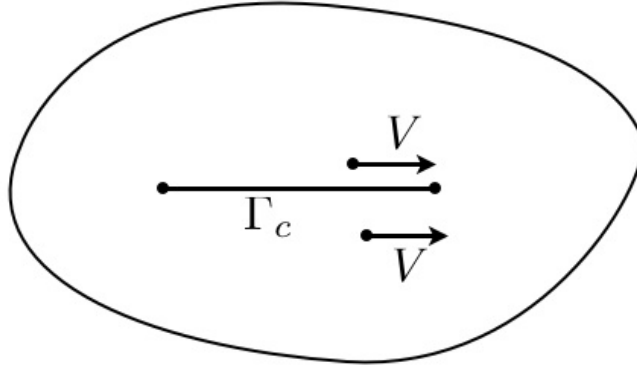


FIG. 3.7 – Fissure rectiligne  $\Gamma_c$  et le champ de vitesse  $V$ .

Soit  $\psi \in H^3(0, l_1)$  une fonction fixe,  $l_1 > 0$  et

$$\Sigma = \{(x_1, x_2) : x_2 = \psi(x_1), \quad 0 < x_1 < l_1\}. \quad (3.108)$$

Considérons la fissure  $\Gamma_l$ ,  $\Gamma_l \subset \Sigma$  étant donnée par le graphe de la fonction  $\psi$ , voir Fig. 3.8

$$\Gamma_l = \{(x_1, x_2) : x_2 = \psi(x_1), \quad 0 < x_1 < l\}, \quad 0 < l < l_1. \quad (3.109)$$

Alors  $l$  est un paramètre décrivant le longueur de la projection de la fissure  $\Gamma_l$  sur l'axe  $x_1$ . Considérons une fonction lisse, coupant  $\theta$ , de support appartenant à un voisinage d'un des sommets de la fissure  $(l, \psi(l))$ . En plus on suppose que  $\theta = 1$  dans un petit voisinage du point  $(l, \psi(l))$ . Considérons ensuite une perturbation de la fissure  $\Gamma_l$  sur  $\Sigma$  défini par un petit paramètre  $t$ . Notons  $\Omega_l = \Omega \setminus \overline{\Gamma_l}$ . La fissure perturbée  $\Gamma_l^t$  a son sommet droit au point  $(l+t, \psi(l+t))$ , et considérons un domaine perturbé  $\Omega_l^t = \Omega \setminus \overline{\Gamma_l^t}$ . On peut définir une bijection entre  $\Omega_c$  et  $\Omega_l^t$  par la formule suivante

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + t\theta(x), \\ y_2 &= x_2 + \psi(x_1 + t\theta(x)) - \psi(x_1), \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in \Omega_l, \quad (y_1, y_2) \in \Omega_l^t. \quad (3.110)$$

La bijection est considérée pour le changement de variable suivant

$$y = x + tV(x) + r(t, x) \quad (3.111)$$

avec un champ de vitesse défini par

$$V(x) = (\theta(x), \psi'(x_1)\theta(x)). \quad (3.112)$$

Dans  $\Omega_l^t$  on peut considérer un problème aux limites perturbé. Autrement dit, on cherche à trouver un champ de déplacements  $u^t = (u_1^t, u_2^t)$  et des composantes du tenseur des

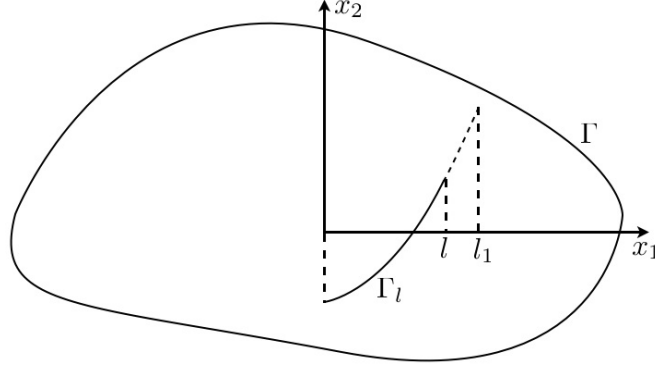


FIG. 3.8 – Domaine  $\Omega_l$  avec la fissure  $\Gamma_l$ .

contraintes  $\sigma^t = \{\sigma_{ij}^t\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que

$$-\operatorname{div} \sigma^t = f \quad \text{dans} \quad \Omega_l^t, \quad (3.113)$$

$$\sigma^t = A \varepsilon(u^t) \quad \text{dans} \quad \Omega_l^t, \quad (3.114)$$

$$u^t = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad (3.115)$$

$$[u^t] \nu^t \geq 0, \quad [\sigma_{\nu^t}^t] = 0, \quad \sigma_{\nu^t}^t \cdot [u^t] \nu^t = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_l^t, \quad (3.116)$$

$$\sigma_{\nu^t}^t \leq 0, \quad \sigma_{\tau^t}^t = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_l^{t\pm}. \quad (3.117)$$

Ci-dessus on a noté  $\nu^t = (\nu_1^t, \nu_2^t)$  le vecteur normal à  $\Gamma_l^t$ . Pour une solution  $u^t$  du problème (3.113)-(3.117) on peut définir une fonctionnelle d'énergie

$$\Pi(\Omega_l^t; u^t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_l^t} \sigma_{ij}^t(u^t) \varepsilon_{ij}(u^t) - \int_{\Omega_l^t} f_i u_i^t \quad (3.118)$$

et on peut en déduire sa dérivée par rapport à la longueur de la fissure (3.121), qui dépend de la dérivée d'énergie par rapport au temps

$$\Pi'(l) = \frac{d\Pi(\Omega_l^t; u^t)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (3.119)$$

sous la forme suivante (cf. [63])

$$\begin{aligned} \Pi'(l) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_l} \{ \operatorname{div} V \cdot \varepsilon_{ij}(u) - 2E_{ij}(V; u) \} \sigma_{ij}(u) \\ &\quad - \int_{\Omega_l} \operatorname{div}(V f_i) u_i + \int_{\Omega_l} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(w) - \int_{\Omega_l} f_i w_i, \end{aligned} \quad (3.120)$$

où le champ de vecteur  $V$  est défini par (3.112) et  $w = (0, \theta \psi'' u_1)$  est la fonction donnée. Remarquons que, même si (3.120) contient la fonction  $\theta$ , en réalité il n'y a aucune dépendance du membre droit de (3.120) par rapport à  $\theta$ . En particulier, si  $\psi'' = 0$ , alors (3.120) se

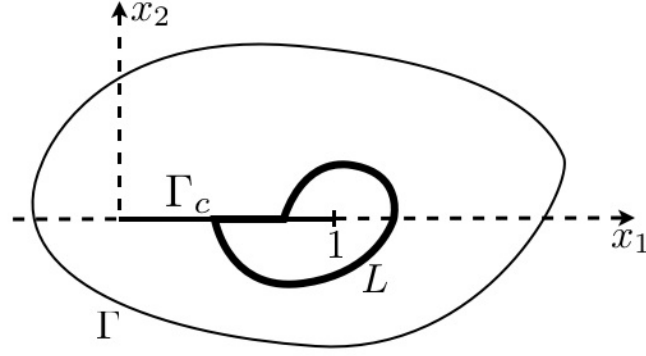


FIG. 3.9 – Courbe  $L$  entourant le sommet  $(l, 0)$  de la fissure.

réduit à (3.106) où  $\Omega_c = \Omega_l$ . Dans ce cas, nous avons une fissure droite et le vecteur normal ne change pas lorsqu'on applique le changement de variable  $\nu^t = \nu$ . La formule (3.120) définit la dérivée de la fonctionnelle d'énergie par rapport à la longueur de projection de  $\Gamma_l$  sur l'axe  $x_1$ . Ainsi, la dérivée de la fonctionnelle d'énergie par rapport à la longueur de la fissure curviligne est la suivante

$$\Pi'(s) = \Pi'(l)(\psi'(l)^2 + 1)^{-1/2}, \quad (3.121)$$

où

$$s = \int_0^l \sqrt{\psi'(t)^2 + 1} \quad (3.122)$$

est la longueur de la fissure  $\Gamma_l$ .

Afin de conclure cette partie, on va discuter l'existence d'invariants intégraux dans la théorie des domaines fissurés. La formule (3.106) peut s'écrire sous la forme d'une intégrale sur une courbe fermée joignant les sommets de la fissure.

Considérons le cas le plus simple d'une fissure rectiligne  $\Gamma_c = (0, 1) \times \{0\}$  telle que  $\bar{\Gamma}_c \subset \Omega$ , voir Fig. 3.9. Soit  $\theta$  une partie lisse d'une fonction égale à 1 au voisinage de  $(1, 0)$  et de support  $\text{supp}\theta$  convexe dans un petit voisinage du point  $(1, 0)$ . On peut déterminer un champ vectoriel

$$V = (\theta, 0) \quad (3.123)$$

dans (3.81), (3.83) qui en accord avec (3.88), correspond au changement de variables indépendant suivant :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + t\theta(x) + r_{11}(t), \\ y_2 &= x_2. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Dans ce cas, la formule (3.106) (ou bien (3.120) pour  $\psi = 0$ ) est en effet une dérivée de la fonctionnelle d'énergie par rapport à la longueur de la fissure. La formule (3.106) peut s'écrire sous forme d'une intégrale sur la courbe  $L$  entourant le sommet  $(1, 0)$  de la fissure (voir Fig. 3.9 la ligne en gras). Autrement dit, on a la forme suivante de la dérivée d'énergie

(cf. [49], [53])

$$I = \int_L \left\{ \frac{1}{2} \nu_1 \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) - \sigma_{ij}(u) u_{i,1} \nu_j \right\} \quad (3.125)$$

où la fonction  $f$  est égale à zéro au voisinage du point  $(1, 0)$ . Il faut faire attention aux deux fait suivants. Premièrement, la valeur de l'intégrale (3.125) ne dépend pas de la courbe  $L$  et deuxièmement, l'intégrale dans (3.125) est la dérivée de la fonctionnelle d'énergie par rapport à la longueur de la fissure.

En fait, l'intégrale invariante dans (3.125) peut être obtenue dans des situations beaucoup plus compliquées. Par exemple, on peut supposer que  $\Gamma_c$  se trouve sur une surface divisant deux milieux, cela veut dire que le tenseur d'élasticité dans la loi de Hooke  $A = \{a_{ijkl}\}$  a la forme (voir Fig. 3.9) :

$$a_{ijkl} = \begin{cases} a_{ijkl}^1 & \text{pour } x_2 > 0 \\ a_{ijkl}^2 & \text{pour } x_2 < 0. \end{cases} \quad (3.126)$$

Ici les coefficients  $a_{ijkl}^1 = \text{const}$ ,  $a_{ijkl}^2 = \text{const}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ , sont des constantes différentes et les composantes réelles  $\{a_{ijkl}^1\}$ ,  $\{a_{ijkl}^2\}$  du tenseur sont symétriques et positives. Dans ce cas la formule (3.106) de la dérivée de la fonctionnelle d'énergie est correcte à condition que le champ  $V$  soit tangent à  $\Gamma_c$ . La formule implique aussi l'existence de l'intégrale invariante (3.125). Remarquons que si l'intégrale (3.125) est calculée, les valeurs  $\sigma_{ij}(u) u_{i,1} \nu_j$  peuvent être prises sur  $\Gamma_c^+$  ou sur  $\Gamma_c^-$  et cela ne change pas la valeur de l'intégrale (3.125). Cela vient du fait que (cf. [43])

$$[\sigma_{ij}(u) u_{i,1} \nu_j] = 0 \text{ sur } \Gamma_c. \quad (3.127)$$

D'autre part, on peut considérer le cas limite lorsqu'une partie d'un milieu  $\Omega_c \cap \{x_2 < 0\}$  devient rigide à la limite. En effet, considérons le tenseur d'élasticité suivant pour un réel positif  $\lambda > 0$ ,

$$a_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} a_{ijkl}^1 & \text{pour } x_2 > 0 \\ \lambda^{-1} a_{ijkl}^2 & \text{pour } x_2 < 0. \end{cases} \quad (3.128)$$

Alors pour un réel  $\lambda > 0$  fixé, une solution du problème d'équilibre (3.1)-(3.5) existe et le passage à la limite lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  est possible. Comme c'était remarqué dans la section 3.4, en passant à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ , on obtient le problème de contact de Signorini suivant :

Trouver le champ de déplacements  $u = (u_1, u_2)$  et les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$  tels que :

$$-\text{div} \sigma = f \quad \text{dans } \Omega_c \cap \{x_2 > 0\}, \quad (3.129)$$

$$\sigma = A \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega_c \cap \{x_2 > 0\}, \quad (3.130)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial(\Omega_c \cap \{x_2 > 0\}) \setminus \Gamma_c, \quad (3.131)$$

$$u \nu \geq 0, \sigma_\nu \leq 0, \sigma_\tau = 0, \sigma_\nu \cdot u \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c. \quad (3.132)$$

Afin de trouver la solution de ce problème on peut différentier la fonctionnelle d'énergie dans la direction du champ de vitesse  $V = (\theta, 0)$  avec des propriétés pour  $\theta$  comme ci-dessus. La forme de la dérivée est la suivante :

$$I = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \{ \text{div} V \cdot \sigma_{ij}(u) - 2 E_{ij}(V, u) \} \sigma_{ij}(u) - \int_{\Omega_1} \text{div}(V f_i) u_i. \quad (3.133)$$

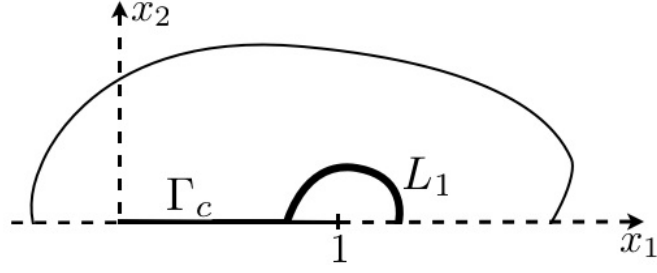


FIG. 3.10 – Courbe  $L_1$  "couvrant" les sommets de la fissure.

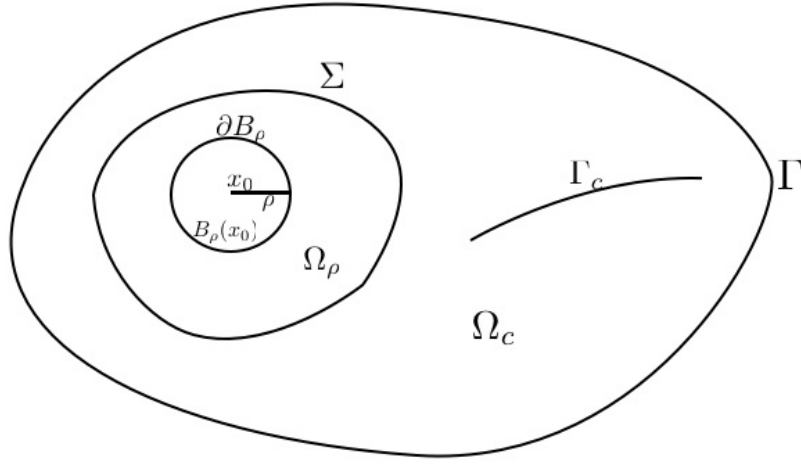


FIG. 3.11 – Le trou dans un domaine fissuré et la méthode de décomposition du domaine.

Remarquons que  $f = 0$  au voisinage du point  $(1, 0)$ . Dans ce cas (3.133) peut s'écrire sous la forme d'une intégrale invariante :

$$I = \int_{L_1} \left\{ \frac{1}{2} \nu_1 \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u) - \sigma_{ij}(u) u_{i,1} \nu_j \right\}, \quad (3.134)$$

où  $L_1$  est une courbe lisse entourant le point  $(1, 0)$  (voir Fig. 3.10 ligne en gras). La valeur de cette intégrale ne dépend pas du choix de  $L_1$ .

### 3.7 La dérivée topologique pour un problème d'élasticité

Dans cette partie nous allons introduire un système d'équations d'élasticité sous une forme telle qu'elle soit utile pour trouver la forme de la dérivée topologique de l'énergie élastique.

Considérons alors le problème aux limites d'élasticité d'un milieu isotrope et homogène

$\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec la frontière  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(u) = 0 & \text{dans } \Omega_0, \\ u = g & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma(u)n = T & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (3.135)$$

et le même problème défini dans un domaine perturbé  $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{B_\rho(x_0)}$  avec un trou  $B_\rho(x_0) \subset \Omega_0$  au centre en  $x_0 \in \Omega_0$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_\rho(u_\rho) = 0 & \text{dans } \Omega_\rho, \\ u_\rho = g & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma_\rho(u_\rho)n = T & \text{sur } \Gamma_N, \\ \sigma_\rho(u_\rho)n = 0 & \text{sur } \partial B_\rho(x_0), \end{cases} \quad (3.136)$$

où  $n$  est le vecteur unitaire extérieur normal au bord  $\partial\Omega_\rho = \partial\Omega \cup \partial B_\rho(x_0)$ . En plus les données  $g$  et  $T$  doivent être compatibles avec  $u \in H^1(\Omega)$ . Supposant que  $0 \in \Omega_0$ , on peut considérer le cas où  $x_0 = 0$ . Ici  $u$  et  $u_\rho$  désignent les champs de vecteurs des déplacements,  $g$  est un déplacement donné sur la partie fixe  $\Gamma_D$  de la frontière,  $T$  est une traction prescrite sur la partie  $\Gamma_N$  de la frontière. En plus,  $\sigma$  est le tenseur de contraintes de Cauchy, et pour  $\xi = u$  dans (3.135) ou bien pour  $\xi = u_\rho$  dans (3.136) le tenseur de Cauchy est défini par l'équation constitutive d'un élastique :

$$\sigma(\xi) = A\varepsilon(\xi), \quad (3.137)$$

où  $\varepsilon(\xi)$  est le tenseur de déformations et le tenseur de l'élasticité est donné par :

$$A = 2\mu\mathbb{I} + \lambda(I \otimes I), \quad (3.138)$$

avec

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad (3.139)$$

où  $E$  désigne le module d'Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson. De plus  $I$  et  $\mathbb{I}$  sont des tenseur d'identité d'ordre 2 et 4 respectivement. Le tenseur inverse de  $A$  s'écrit :

$$A^{-1} = \frac{1}{2\mu} \left[ \mathbb{I} - \frac{\lambda}{2\mu + N\lambda} (I \otimes I) \right]. \quad (3.140)$$

La première fonctionnelle de forme considérée dépendant du champ de déplacements, dans notre cas il suffit de considérer la forme suivante :

$$J_1(\rho) = \int_{\Omega_\rho} F(u_\rho), \quad (3.141)$$

où  $F$  est une fonction donnée de classe  $C^2$ . On peut considérer aussi une fonctionnelle quadratique dépendant des contraintes sous la forme :

$$J_2(\rho) = \int_{\Omega_\rho} S\sigma(u_\rho) \cdot \sigma(u_\rho), \quad (3.142)$$

où  $S$  est un tenseur isotrope de quatrième ordre. L'isotropie signifie que  $S$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$S = 2m\mathbb{I} + l(I \otimes I), \quad (3.143)$$

avec  $l, m$  des nombres réels, dont les valeurs peuvent varier dans des cas différents, en particulier on peut supposer  $S = A^{-1}$ . Sous cette condition les fonctionnelles  $J_1, J_2$  sont bien définies pour le problème d'élasticité dans  $\Omega = \Omega_0$ . Pour simplifier introduisons les espaces fonctionnels suivants :

$$H_g^1(\Omega_\rho) = \{v \in [H^1(\Omega_\rho)]^2 : v = g \text{ sur } \Gamma_D\}, \quad (3.144)$$

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega_\rho) = \{v \in [H^1(\Omega_\rho)]^2 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}, \quad (3.145)$$

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega_0) = \{v \in [H^1(\Omega_0)]^2 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}. \quad (3.146)$$

Une solution faible du système d'équation d'élasticité est définie par la formulation variationnelle suivante.

Trouver  $u_\rho \in H_g^1(\Omega_\rho)$  tel que pour toute fonction  $\phi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_\rho)$ , l'égalité suivante soit remplie :

$$\int_{\Omega_\rho} A\varepsilon(u_\rho) \cdot \varepsilon(\phi) = \int_{\Gamma_N} T \cdot \phi. \quad (3.147)$$

La solution  $u_\rho$  pour  $\rho = 0$  est noté par  $u$ . Introduisons ensuite une équation d'état adjointe afin de simplifier la forme de la dérivée topologique des fonctionnelles  $J_1, J_2$ . Pour la fonctionnelle  $J_1$  l'équation est de la forme :

Trouver  $w_\rho \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_\rho)$  tel que pour tout  $\phi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_\rho)$ ,

$$\int_{\Omega_\rho} A\varepsilon(w_\rho) \cdot \varepsilon(\phi) = - \int_{\Omega_\rho} F'_u(u_\rho) \cdot \phi, \quad (3.148)$$

avec la formule d'Euler-Lagrange sous la forme :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_\rho(w_\rho) = F'_u(u_\rho) & \text{dans } \Omega_\rho, \\ w_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma_\rho(w_\rho)n = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \sigma_\rho(w_\rho)n = 0 & \text{sur } \partial B_\rho(x_0), \end{cases} \quad (3.149)$$

et  $v_\rho \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_\rho)$  est l'état adjoint de la fonctionnelle  $J_2$ . Pour toute les fonctions tests  $\phi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ , la fonction  $v_\rho$  vérifie l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega_\rho} A\varepsilon(v_\rho) \cdot \varepsilon(\phi) = -2 \int_{\Omega_\rho} AS\sigma(u_\rho) \cdot \varepsilon(\phi), \quad (3.150)$$

dont l'équation d'Euler-Lagrange associée devient :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_\rho(v_\rho) = -2\operatorname{div}(AS\sigma_\rho(u_\rho)) & \text{dans } \Omega_\rho, \\ v_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma_\rho(v_\rho)n = -2AS\sigma_\rho(u_\rho)n & \text{sur } \Gamma_N, \\ \sigma_\rho(v_\rho)n = -2AS\sigma_\rho(u_\rho)n & \text{sur } \partial B_\rho(x_0). \end{cases} \quad (3.151)$$

On note les états adjoints pour  $\rho = 0$  par  $w = w_0$  et  $v = v_0$  respectivement.

**Remarque 2.** On observe que  $AS$  peut s'écrire sous la forme :

$$AS = 4\mu m \mathbb{I} + \gamma (I \otimes I), \quad (3.152)$$

avec

$$\gamma = 2\lambda l + 2(\lambda m + \mu l). \quad (3.153)$$

Ainsi pour  $\gamma = 0$ , la condition sur la frontière  $\partial B_\rho(x_0)$  dans (3.151) devient homogène et le tenseur  $S$  vérifie la contrainte

$$\frac{m}{l} = -\left(\frac{\mu}{\lambda} + 1\right), \quad (3.154)$$

qui est vérifiée naturellement pour la fonctionnelle de forme représentant par exemple l'énergie. Dans ce cas particulier le tenseur  $S$  est donné par

$$S = \frac{1}{2}A^{-1} \Rightarrow \gamma = 0 \quad \text{et} \quad 2m + l = \frac{1}{2E}, \quad (3.155)$$

Ceci implique que l'état adjoint associé à  $J_2$  peut être déterminé explicitement.

Ci-dessous on décrit la construction de l'opérateur de Steklov-Poincaré  $A_\rho : H^{1/2}(\Sigma) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma)$  défini dans  $\Omega_\rho$ . Etant donnée la solution  $z_\rho$  du problème :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma_\rho(z_\rho) = 0 & \text{dans } \Omega_\rho, \\ z_\rho = g & \text{sur } \Sigma, \\ \sigma_\rho(z_\rho)n = 0 & \text{sur } \partial B_\rho(x_0), \end{cases} \quad (3.156)$$

on définit la traction sur  $\Sigma$  comme la valeur de l'opérateur :

$$A_\rho(g) = \sigma_\rho(z_\rho)n. \quad (3.157)$$

### 3.7.1 La dérivée topologique pour un problème avec une fissure

Rappelons tout d'abord les résultats obtenus dans [97]. On désigne les contraintes principales associées à un champ de déplacements  $u$  par  $\sigma_I(u)$ ,  $\sigma_{II}(u)$ , et la trace du tenseur des contraintes  $\sigma(u)$  sera notée par  $\operatorname{tr} \sigma(u) = \sigma_I(u) + \sigma_{II}(u)$ .

**Théorème 18.** Les formes de la dérivée topologique des fonctionnelles  $J_1$  et  $J_2$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} J_1(x_0) &= - \left[ F(u) + \frac{1}{E} (a_u a_w + 2b_u b_w \cos 2\delta) \right]_{x=x_0} \\ &= - \left[ F(u) + \frac{1}{E} (4\sigma(u) \cdot \sigma(w) - \operatorname{tr} \sigma(u) \operatorname{tr} \sigma(w)) \right]_{x=x_0} \end{aligned} \quad (3.158)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{T} J_2(x_0) &= - \left[ (\alpha + \beta) a_u^2 + 2(\alpha - \beta) b_u^2 + \frac{1}{E} (a_u a_v + 2b_u b_v \cos 2\delta) \right]_{x=x_0} \\ &= - \left[ 4(\alpha - \beta) \sigma(u) \cdot \sigma(u) - (\alpha - 3\beta) (\operatorname{tr} \sigma(u))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E} (4\sigma(u) \cdot \sigma(v) - \operatorname{tr} \sigma(u) \operatorname{tr} \sigma(v)) \right]_{x=x_0}. \end{aligned} \quad (3.159)$$

La preuve de ce théorème est donnée dans [95], [99].

Dans les formules précédentes on a introduit des termes qui seront expliqués dans la suite. D'après (3.153), les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont données par :

$$\alpha = l + 2 \left( m + \gamma \frac{\nu}{E} \right) \quad \text{et} \quad \beta = 2 \frac{\gamma}{E}. \quad (3.160)$$

Notons aussi :

$$\begin{aligned} a_u &= \sigma_I(u) + \sigma_{II}(u), & b_u &= \sigma_I(u) - \sigma_{II}(u), \\ a_w &= \sigma_I(w) + \sigma_{II}(w), & b_w &= \sigma_I(w) - \sigma_{II}(w), \\ a_v &= \sigma_I(v) + \sigma_{II}(v), & b_v &= \sigma_I(v) - \sigma_{II}(v). \end{aligned} \quad (3.161)$$

La notation  $\delta$  désigne l'angle entre la direction des contraintes principales pour les champs de déplacements  $u$  et  $w$  dans (3.158), et pour les champs de déplacements  $u$  et  $v$  dans (3.159). Le théorème 18 donne la forme de la dérivée topologique de la fonctionnelle d'énergie.

**Lemma 3.** *Pour l'énergie cumulée dans un milieu élastique dans  $\mathbb{R}^2$ , le tenseur  $S$  est donné par (3.155),  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 1/(2E)$  et  $\beta = 0$ . On obtient alors la dérivée topologique d'énergie*

$$\mathcal{T} J_2(x_0) = \frac{1}{2E} [4\sigma(u) \cdot \sigma(u) - (\text{tr}\sigma(u))^2]_{x=x_0}, \quad (3.162)$$

La formule (3.162) est utile pour trouver la dérivée topologique d'énergie pour un domaine fissuré.

Considérons  $\mathcal{D}_\rho = \Omega_\rho \cup \Sigma \cup \Omega_c$  la décomposition du domaine fissuré avec un trou en deux sous-ensembles dont le premier  $\Omega_\rho$  contient le trou et l'autre  $\Omega_c$  contient la fissure, voir Fig. 3.11. L'énergie dans  $\mathcal{D}_\rho$  est donnée par une fonctionnelle dépendant du rayon du trou

$$j(\rho) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}_\rho} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) - \int_{\mathcal{D}_\rho} f_i v_i \right\} \quad (3.163)$$

$$= \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} \sigma_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) - \int_{\Omega_c} f_i v_i + \langle A_\rho(v), v \rangle_{1/2, \Sigma} \right\}, \quad (3.164)$$

où l'expression de l'énergie dans  $\Omega_\rho$  avec le petit trou  $B_\rho(x_0)$  fait intervenir l'opérateur de Steklov-Poincaré pour le domaine  $\Omega_\rho$  étant un disque. Le développement asymptotique d'ordre quelconque de l'opérateur de Steklov-Poincaré peut être trouvé dans [99]. La dérivée topologique de la fonctionnelle d'énergie pour un problème de contact avec une fissure (3.13) a la forme suivante :

$$j'' = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{j'(\rho) - j'(0^+)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{j'(\rho)}{\rho}, \quad (3.165)$$

pour  $j'(0^+) = 0$ . Alors en appliquant la méthode de [50] et d'après (3.162) on a

**Théorème 19.** *La dérivée topologique de la fonctionnelle d'énergie dans un domaine fissuré est la suivante :*

$$j''(0^+) = -\frac{1}{4E} [4\sigma(u) \cdot \sigma(u) - (\text{tr}\sigma(u))^2]_{x=x_0}.$$

La preuve de ce théorème est analogue à celle de [96] pour un problème de contact au bord d'un milieu élastique.

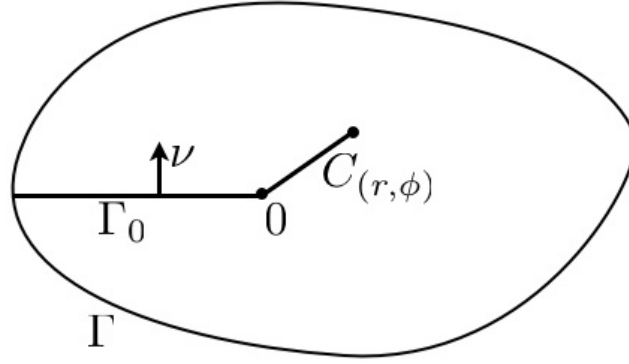


FIG. 3.12 – Fissure avec changement de direction.

### 3.8 Evolution d'une fissure avec branchement

L'intérêt d'analyser le problème d'une fissure avec branchement (avec changement de direction) est qu'il représente le changement de la forme de la fissure lisse à la fissure non-lisse. Le problème du changement de direction constitue la tâche la plus difficile de la modélisation mathématique d'une fissure. Dans cette partie, on va appliquer la méthodologie de l'optimisation de forme pour l'analyse du problème d'une fissure avec branchement dépendant de deux paramètres. On fixe alors le pont de branchement et on cherche à trouver les paramètres inconnus suivants : l'angle de branchement et la longueur de la nouvelle fissure telles qu'elle minimise l'énergie potentielle du point de vue du critère de Griffith. Une telle minimisation nonlinéaire décrit une évolution de la fissure avec branchement par rapport au paramètre de forme.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné dont la frontière  $\Gamma$  est lisse. Supposons que l'origine  $\mathcal{O} = (0, 0)$  appartient à  $\overline{\Omega}$ . Considérons une fissure  $\Gamma_0 \subset \Omega$  dont les sommets se trouvent sur  $\Gamma$  et au point  $\mathcal{O}$ , et une partie  $C_{(r, \phi)}$  inconnue dont le sommet donné en coordonnées polaires

$$(r \cos \phi, r \sin \phi), \quad (r, \phi) \in \overline{\omega}, \quad (3.166)$$

où  $\omega$  est un ensemble de paramètres admissibles

$$\omega = \{(r, \phi) \mid 0 < r < R(\phi) \text{ pour } \phi \in (\phi_0, \phi_1)\}, \quad [\phi_0, \phi_1] \subset (-\pi, \pi), \quad (3.167)$$

avec  $R \in W^{2, \infty}(-\pi, \pi)$  une fonction périodique donnée.

L'ensemble des directions admissibles est défini par la réunion  $\Gamma_{(r, \phi)} = \Gamma_0 \cup C_{(r, \phi)}$ . Notons par  $\Omega_{(r, \phi)}$  le domaine avec la fissure  $\Gamma_{(r, \phi)}$ , c'est-à-dire  $\Omega_{(r, \phi)} = \Omega \setminus \overline{\Gamma_{(r, \phi)}}$ , voir Fig. 3.12. Dans  $\Omega_{(r, \phi)}$  on peut considérer le problème d'équilibre du type (3.1)-(3.5). Soit  $\nu$  la normale à  $\Gamma_{(r, \phi)}$  et soit  $f = (f_1, f_2) \in C^1(\overline{\Omega})$  un champ de forces appliquées donné. La formulation du problème est la suivante :

Dans  $\Omega_{(r, \phi)}$  on cherche à trouver le vecteur des déplacements  $u = (u_1, u_2)$  et des compo-

santes du tenseur de contraintes  $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$  tels que :

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans} \quad \Omega_{(r,\phi)}, \quad (3.168)$$

$$\sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{dans} \quad \Omega_{(r,\phi)}, \quad (3.169)$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad (3.170)$$

$$[u]\nu \geq 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\nu \cdot [u]\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{(r,\phi)}, \quad (3.171)$$

$$\sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{(r,\phi)}^\pm. \quad (3.172)$$

Pour tout couple  $(r, \phi) \in \bar{\omega}$  il existe une solution du problème (3.168)-(3.172) dans l'espace de Sobolev  $H_\Gamma^1(\Omega_{(r,\phi)})$ . Alors pour tout  $(r, \phi) \in \bar{\omega}$  on peut déterminer une solution  $u^{(r,\phi)}$  et une fonctionnelle d'énergie :

$$\Pi(\Omega_{(r,\phi)}; u^{(r,\phi)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{(r,\phi)}} \sigma_{ij}(u^{(r,\phi)}) \varepsilon_{ij}(u^{(r,\phi)}) - \int_{\Omega_{(r,\phi)}} f_i u_i^{(r,\phi)}, \quad (3.173)$$

où  $\sigma_{ij}(u^{(r,\phi)}) = \sigma_{ij}$  sont déterminés d'après (3.169). Regardons maintenant la différentiation de la fonctionnelle d'énergie par rapport à  $(r, \phi)$ . On peut trouver des résultats d'une telle analyse dans [45]. La difficulté est que si l'on considère une perturbation du problème (3.168)-(3.172), on n'a pas de bijection de domaine des déplacements admissibles dans le problème perturbé et non-perturbé. Il faut alors considérer en plus la différentiabilité de la fonctionnelle  $\Pi(\Omega_{(r,\phi)}; u^{(r,\phi)})$  par rapport à  $r$  et  $\phi$ .

Dans la suite on formule le problème d'évolution de la fissure avec branchement. Soit

$$P(r, \phi) = \Pi(\Omega_{(r,\phi)}; u^{(r,\phi)}). \quad (3.174)$$

Pour un certain paramètre de temps  $t \geq 0$ , qui est aussi un paramètre de forme de la fissure, considérons une famille de forces  $tf$  dans (3.168). Soit  $l_0 \geq 0$  la longueur de la fissure  $\Gamma_0$ . Remarquons que si la solution  $u^{(r,\phi)}$  est associée à la force  $f$  dans (3.168), alors on obtient la solution  $tu^{(r,\phi)}$  associée à la force  $tf$ , en accord avec la propriété d'homogénéité du problème (3.168)-(3.172). Soit  $\Gamma_0$  une fissure donnée pour  $t = 0$ . Pour une force  $tf$  on cherche à trouver une fissure propagée  $\Gamma_{(r(t), \phi^*)} \subset \Omega$  avec une direction en  $\mathcal{O}$  et avec des paramètres de forme inconnus : la longueur de la fissure  $l_0 + r(t)$  et l'angle de changement de direction  $\phi^* \in [\phi_0, \phi_1]$ . Pour cela on applique la méthodologie d'optimisation de forme en utilisant le critère de Griffith. En accord avec les contraintes, définissons une fonction de l'énergie potentielle totale :

$$T(r, \phi)(t) = 2\gamma(l_0 + r) + t^2 P(r, \phi), \quad (r, \phi) \in \bar{\omega}. \quad (3.175)$$

Le premier terme dans (3.175) représente la surface d'énergie mise uniformément sur les bords de la fissure avec la densité constante  $\gamma > 0$  (un paramètre matériel donné). L'autre terme dans (3.175) décrit l'énergie potentielle, qui est un polynôme quadratique par rapport à  $t$  :

$$P(r, \phi)(t) = \Pi(\Omega_{(r,\phi)}; tu^{(r,\phi)}) = t^2 P(r, \phi). \quad (3.176)$$

Ainsi, on obtient la formulation du problème décrivant l'évolution d'une fissure

$$r(0) = 0; \quad (3.177)$$

et pour  $t > 0$  on détermine des fonctions  $(r(t), \phi(t)) \in \bar{\omega}$  telles qu'on a la propriété :

$$\min T(r, \phi)(t) \quad \text{sur} \quad (r, \phi) \in \bar{\omega}, \quad (3.178)$$

$$\text{avec} \quad \phi \in \bigcap_{s < t} \{\phi(s)\}. \quad (3.179)$$

La condition (3.179) nous permet de garder la forme de changement de direction de la fissure lorsqu'elle évolue. Cela veut dire que si l'angle de changement de direction  $\phi^*$  était déterminé, sa valeur resterait préservée pendant l'évolution de la fissure. Le problème (3.177)-(3.179) admet une solution (cf. [45]). Il se peut que le rayon  $r(t)$  admette une valeur dans un certain intervalle  $[r^-(t), r^+(t)]$ , ce qui représente une évolution instable. L'analyse des problèmes de modélisation linéaire des fissures en changement de direction est présentée dans [6].

### 3.9 Les problème en 3D et des questions ouvertes

Le plupart des problèmes décrits ci-dessus dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  peuvent être considérés dans le cas 3D en remplaçant une fissure par une surface lisse. Une telle fissure peut s'écrire par exemple comme suit :

$$x_i = x_i(y_1, y_2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.180)$$

où  $(y_1, y_2) \in D$  avec  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine borné à la frontière lisse, et l'application  $y \rightarrow x$  est non singulière. Toutes les formules et les contraintes des parties 3.1-3.5 restent identiques. En particulier, vu que les conditions (3.4)-(3.5) sont remplies, on introduit ensuite l'espace de Hilbert  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$ , où  $\Sigma$  est un prolongement de  $\Gamma_c$  à une surface fermée lisse dans  $\mathbb{R}^2$ . La norme dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$  est définie dans ce cas par :

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}^2 = \|v\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^3} dx dy. \quad (3.181)$$

Les formulations mixtes et lisse dans  $\mathbb{R}^2$  sont vérifiées ainsi la méthode du domaine fictif a une application.

On peut aussi considérer une fissure qui se trouve au bord d'une inclusion rigide dans un milieu élastique en 3D, on peut démontrer tous les résultats de la partie 3.5. Remarquons que dans le cas 3D, l'espace des mouvements rigides infiniment petits dans un milieu élastique peut être défini par :

$$R(\omega) = \{\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) : \rho(x) = Bx + D, \quad x \in \omega\}, \quad (3.182)$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad D = (d^1, d^2, d^3), \quad (3.183)$$

$$b_{ij}, d^i = \text{const}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.184)$$

Comme dans le cas de la différentiation de la fonctionnelle d'énergie par rapport au paramètre perturbant (section 3.6), on obtient une grande variété de perturbations en 3D. Dans le cas le plus simple on obtient la perturbation de la frontière de la fissure. Par exemple, soit

$$\Gamma_c = \{(x_1, x_2, 0) : 0 \leq x_1 \leq \phi(x_2), x_2 \in [-1, 1], \phi(x_2) > 0\}, \quad (3.185)$$

où  $\phi$  est une fonction lisse. Dans ce cas le champ vectoriel sur  $\mathbb{R}^3$  peut être défini comme suit :

$$V(x) = (\theta(x), 0, 0), \quad (3.186)$$

avec  $\theta$  une fonction donnée, lisse et de support contenu dans un voisinage de la frontière de la fissure :

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = \phi(x_2), x_3 = 0, x_2 \in [-1, 1]\}. \quad (3.187)$$

Alors il est possible de dériver la fonctionnelle d'énergie dans la direction de champ  $V$ , ceci étant donné par la formule (3.105) pour  $i, j = 1, 2, 3$  (cf. [46], [53]).

Comme dans la partie 3.6 dans  $\mathbb{R}^3$  on peut aussi considérer une fissure curviligne décrite par la fonction

$$x_3 = \psi(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in D, \quad (3.188)$$

où  $D \subset \mathbb{R}^2$  est un domaine borné de frontière lisse. Des formules nécessaires pour établir la forme des dérivées de la fonctionnelle d'énergie dans ce cas peuvent être trouvées dans [90].

Comme dans le cas d'intégrales invariantes, on intègre en 3D sur une surface fermée entourant un sommet d'une fissure (cf. [43], [49]).

Pour terminer, regardons quelques problèmes ouverts qui apparaissent pendant l'analyse

1. Si la fissure  $\Gamma_c$  croise la frontière extérieure  $\Gamma$ , on n'a aucune solution du problème (3.1)-(3.5) en général (car l'inégalité de Korn n'est pas vérifiée). Est-il possible de remédier à cette difficulté ?
2. Certaines intégrales invariantes dans le cas d'une fissure curviligne ont été présentées dans [101]. Est-il possible de formuler d'autres résultats de ce type pour d'autres critères que le critère de Griffith ?
3. Est-il possible de démontrer l'unicité de la solution du problème (3.177)-(3.179) ?
4. Comment trouver la dérivée de forme de la fonctionnelle d'énergie par rapport aux perturbations des sommets d'une fissure quand elle est placée entre la partie élastique et la partie rigide d'un milieu ?

# Bibliographie

- [1] R.A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, 1975, Vol.140.
- [2] S. AMSTUTZ, *Topological sensitivity analysis for some nonlinear PDE system*, J. Math. Pures Appl., 2006, Vol.85, p.540-557.
- [3] Z. BELHACHMI, J.-M. SAC-EPÉE, J. SOKOŁOWSKI, *Approximation par la méthode des élément finit de la formulation en domaine régulière de problèmes de fissures*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I, 2004, Vol.338, No.6, p.499-504.
- [4] Z. BELHACHMI, J.M. SAC-EPÉE, J. SOKOŁOWSKI, *Mixed Finite Element Methods for Smooth Domain Formulation of Crack Problems*, SIAM, 2005, Vol.43, No.3, p.1295-1320.
- [5] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, Paris Milan Barcelone, 1993.
- [6] M. BROKATE, A.M. KHLUDNEV, *On crack propagation shape in elastic bodies*, Z. Angew. Math. Phys., 2004, Vol.55, No.2, p.318-329.
- [7] D. BUCUR, G. BUTTAZZO, *Variational methods in shape optimization problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 65. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2005.
- [8] D. BUCUR, N. VARCHON *Boundary variation for a Neumann problem*, Ann. Scuola Norm.Sup.Pisa Cl.Sci., 2000, Vol.4, No.29, p.807-821.
- [9] D. BUCUR, N. VARCHON *A duality approach for the boundary variation of Neumann problems*, SIAM J. MATH ANAL., 2002, Vol.34, No.2, p.460-477
- [10] G. CARDONE, S.A. NAZAROV, J. SOKOŁOWSKI, *Asymptotics of solutions of the Neumann problem in a domain with closely posed components of the boundary*. Asymptot. Anal., Vol.62, 2009, No.1-2, p.41-88.
- [11] M. CASAS, M. MATEOS, *Uniform convergence of the FEM. Applications to state constrained control problems*, Comput. Appl. Math., 2002, Vol.21, p.67-100.
- [12] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [13] P.G. CIARLET, P.A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications to finite element methods*, Arch Rational Mech. Ana., 1972, Vol.46, p.177-199.
- [14] A. DEMLOW, *Sharply localized pointwise and  $W_{\infty}^{-1}$  estimates for finite element methods for quasilinear problems*, Math. Comp., 2007, Vol.76, p.1725-1741.

- [15] H.A. ESCHENAUER, V.V. KOBELEV, A. SCHUMACHER, *Bubble method for topology and shape optimization of structures*, Struct. Optimiz., 1994, Vol.8, p.42-51.
- [16] L.C. EVANS *Partial Differential equations*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa, 2002.
- [17] G. FICHERA, *Existence Theorems in the Theory of Elasticity*, Mir, Moscow, 1974.
- [18] G.A. FRANKFORT, J.-J. MARIGO, *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, J. Mech. Phys. Solids, 1998, Vol.46, p.1319-1342.
- [19] J. FREHSE, R. RANNACHER, *Asymptotic  $L^\infty$ -error estimates for linear finite element approximations of quasilinear boundary value problems*, SIAM J. Numer. Anal., 1978, Vol.15, p.418-431.
- [20] G. FRÉMIOT, W. HORN, A. LAURAIN, M. RAO, J. SOKOŁOWSKI, *On the analysis of boundary value problems in nonsmooth domains*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 2009, 462 :149.
- [21] P. FULMANSKI, A. LAURAIN, J.-F. SCHEID, J. SOKOŁOWSKI, *A level set method in shape and topology optimization for variational inequalities*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2007, Vol.17, No 3, p.413-430.
- [22] P. FULMANSKI, A. LAURAIN, J.F. SCHEID, J. SOKOŁOWSKI, *Level set method with topological derivatives in shape optimization*, International Journal of Computer Mathematics, 2008, Vol.85, p.1491-1514.
- [23] S. GARREAU, PH. GUILLAUME, M. MASMOUDI, *The Topological Asymptotic for PDE Systems : The Elasticity Case*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2001, Vol.39, p.1756-1778.
- [24] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [25] P. GRISVARD, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.
- [26] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, Springer-Verlag, Masson, Berlin-Heidelberg, 1992.
- [27] W.A. GROSS, *The second fundamental problem of elasticity applied to a plane circular ring*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 1957, Vol.8, p.71-73.
- [28] M. GRZANEK, A. LAURAIN, K. SZULC, *Numerical algorithms for an inverse problem in shape optimization*, J. Phys. : Conf. Ser., 2008, Vol.135, p.012-047.
- [29] M. GRZANEK, K. SZULC, *Application of topological derivative and neural networks for inverse problem*, System Modeling and Optimization, IFIP Advances in Information and Communication Technology, Springer Boston, 2009, Vol.312, p.268-281.
- [30] A. HENROT, *Continuity with respect to the domain for the laplacian : a survey*, in Control and Cybernetics, 1994, Vol.23, No.3, p.427-443.

- [31] A. HENROT, M. PIERRE, *Variation et optimisation de formes. (French) [Shape variation and optimization] Une analyse géométrique. [A geometric analysis]* Mathématiques & Applications 48, Springer, Berlin, 2005. xii+334 pp.
- [32] E.J. HAUG, J. CÉA, *Optimization of distributed parameter structures*, Vol. I, II. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Optimization of Distributed Parameter Structural Systems held in Iowa City, Iowa, May 20 - June 4, 1980. Edited by Edward J. Haug and Jean Cea. NATO Advanced Study Institute Series E : Applied Sciences, 49. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1981.
- [33] M. HINTERMÜLLER, *Fast level set based algorithms using shape and topological sensitivity*, Control and Cybernetics, 2005, Vol.34, No.1, p.305-324.
- [34] M. HINTERMÜLLER, A. LAURAIN, *Electrical impedance tomography : from topology to shape*, Control and Cybernetics, 2008, Vol.37, No.4, p.913-933.
- [35] M. HINTERMÜLLER, A. LAURAIN, *Multiphase image segmentation and modulation recovery based on shape and topological sensitivity*, Journal on Mathematical Imaging and Vision, 2009, Vol.35, p.1-22.
- [36] I. HLAVÁČEK, A.A. NOVOTNY, J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, *Energy change in elastic solids due to a spherical or circular cavity, considering uncertain input data*, 2009, JOTA, Vol.141, No.3, p.569-595.
- [37] K.-H. HOFFMANN, A.M. KHLUDNEV, *Fictitious domain method for the Signorini problem in linear elasticity*, Adv. Math. Sci. Appl., 2004, Vol.14, No.2, p.465-481.
- [38] M. IGUERNANE, S.A. NAZAROV, J.-R. ROCHE, J. SOKOŁOWSKI, K. SZULC, *Topological derivatives for semilinear elliptic equations*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2009, Vol.19, No.2, p.191-205.
- [39] A.M. IL'IN, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Translations of Mathematical Monographs, 102, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [40] L. JACKOWSKA-STRUMILLO, J. SOKOŁOWSKI, A. ZOCHOWSKI, A. HENROT, *On Numerical Solution of Shape Invers Problems*, Computational Optimisation and Applications, 2002, Vol.23, p.231-255, .
- [41] M. KACHANOV, B. SHAFIRO, I. TSUKROV, *Handbook of Elasticity Solutions*, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [42] A.M. KHLUDNEV, *Smooth domain method in the equilibrium problem for a plate with a crack*, Sib. Math. J., 2002, Vol.43, No.6, p.1388-1400.
- [43] A.M. KHLUDNEV, *Invariant integrals in the problem of a crack on the interface between two media*, J. Appl. Mech and Techn. Phys., 2005, Vol.46, No.5, p.717-729.
- [44] A.M. KHLUDNEV, V.A. KOVTUNENKO, *Analysis of Cracks in Solids*, Southampton-Boston, WIT Press, 2000.
- [45] A.M. KHLUDNEV, V.A. KOVTUNENKO, A. TANI, *Evolution of a crack with kink and non-penetration*, J. Math. Soc. Japan, 2008, Vol.60, No.4, p.1219-1253.

- [46] A.M. KHLUDNEV, K. OHTSUKA, J. SOKOŁOWSKI, *On derivative of energy functional for elastic bodies with a crack and unilateral conditions*, Quarterly Appl. Math., 2002, Vol.60, No.1, p.99-109.
- [47] A.M. KHLUDNEV, J. SOKOŁOWSKI, *Smooth Domain Method for Crack Problems*, Quart. Appl. Math., 2004, Vol.62, No.3, p.401-422.
- [48] A.M. KHLUDNEV, J. SOKOŁOWSKI, *Modelling and Control in Solid Mechanics*, Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser, 1997.
- [49] A.M. KHLUDNEV, J. SOKOŁOWSKI, *On differentiation of energy functionals in the crack theory with possible contact between crack faces*, J. Appl. Math. Mechs., 2000, Vol.64, No.3, p.464-475.
- [50] A.M. KHLUDNEV, J. SOKOŁOWSKI, *Smooth domain method for crack problem.*, Quarterly Appl. Math., 2004, Vol.62, No.3, p.401-422.
- [51] A. KHLUDNEV, J. SOKOŁOWSKI, K. SZULC, *Shape and topological sensitivity analysis in domains with cracks*, Accepted in Applications of Mathematics.
- [52] V.A. KONDRATIEV, *Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Moscow Math. Soc., 1967, Vol.16, p.227-313.
- [53] V.A. KOVTUNENKO, *Invariant integrals in nonlinear problem for a crack with possible contact between crack faces*, J. Appl. Math. Mechs, 2003, Vol.67, No.1, p.109-123.
- [54] V.A. KOVTUNENKO, *Numerical simulation of the non-linear crack problem with non-penetration*, Math. Meth. Appl. Sci., 2004, Vol.27, No.2, p.163-179.
- [55] V.A. KOZLOV, V.G. MAZ'YA, J. ROSSMANN, *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*, AMS, Providence, RI, 1997.
- [56] O.A. LADYZHENSKAYA, N.N. URAL'TSEVA, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York-London, 1968.
- [57] N.S. LANDKOF, *Fundamentals of modern potential theory*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1966.
- [58] A. LAURAIN, *Domaines singulierements perturbés en optimisation de formes*, Thèse de doctorat, <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/13/95/95/PDF/these5.pdf>
- [59] A. LAURAIN, K. SZULC, *Using self-adjoint extensions in shape optimization*, System Modeling and Optimization, IFIP Advances in Information and Communication Technology, Springer Boston, 2009, Vol.312, p.331-349.
- [60] N.P. LAZAREV, *Differentiation of energy functional in the equilibrium problem for a body with a crack and Signorini boundary conditions*, J. Appl. Industrial Math., 2002, Vol.5, No.2(10), p.139-147.
- [61] T. LEWINSKI, J. SOKOŁOWSKI, *Energy change due to the appearance of cavities in elastic solids*, Int. J. Solids Struct., 2003, Vol.40, p.1765-1803.
- [62] T. LEWINSKI, J.J. TELEGA, *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic Analysis and Homogenization*, Series on advances in Mathematics for Applied Sciences, 2000, Vol.52.

- [63] V.G. MAZ'YA, S.A. NAZAROV, B.A. PLAMENEVSKIY, *On the asymptotic behavior of solutions of elliptic boundary value problems with irregular perturbations of the domain*, Probl. Mat. Anal. Leningrad : Leningrad Univ., 1981, Vol.8, p.72-153.
- [64] V.G. MAZ'YA, S.A. NAZAROV, B.A. PLAMENEVSKIY, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, Basel : Birkhäuser Verlag, 2000, Vol.1.
- [65] V.G. MAZ'YA, B.A. PLAMENEVSKIY, *Estimates in  $L_p$  and Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary*, Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2), 1984, Vol.123, p.1-56.
- [66] W.G. MAZ'YA, S.A. NAZAROV, B.A. PLAMENEVSKIY, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, Basel : Birkhäuser Verlag, 2000, Vol.1,2.
- [67] V.G. MAZ'YA, B.A. PLAMENEVSKIY, *On the behavior of solutions to quasilinear elliptic boundary-value problems in a neighborhood of a conical point*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 1973, Vol.38, p.91-97.
- [68] N.I. MUSKHELISHVILI, *Some Basic Problems on the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, 1952.
- [69] S. A. NAZAROV, *Asymptotics of a solution to the quasilinear Neumann problem in a neighborhood of a conical point. Function theory and mathematical analysis*, J. Math. Sci. (New York), 2001, Vol.107, no.3, p.3860-3873.
- [70] S. A. NAZAROV, *Self-adjoint boundary value problems. The polynomial property and formal positive operators*, Probl. Mat. Anal., Vol.16, 1997, p.167–192, in Russian.
- [71] S. A. NAZAROV, *Asymptotic solution to a problem with small obstacles*, Differentsial'nye Uravneniya. 31, Vol.6, 1995, p.1031–1041 ; English transl. : Differential Equations 31 Vol.6, 1995, p.965–974.
- [72] S. A. NAZAROV, *Asymptotic conditions at points, selfadjoint extensions of operators and the method of matched asymptotic expansions*, Trudy St.-Petersburg Mat. Obshch. Vol.5, 1996, p.112–183, in Russian ; English transl. : Trans. Amer. Math. Soc. Ser. 2, Vol.193, 1999, p.77–126.
- [73] S. A. NAZAROV, *The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes*, Uspekhi Mat. Nauk 54, Vol.5, 1999, p.77–142, in Russian ; English transl. : Russian Math. Surveys 54, Vol.5, 1999, p.947–1014.
- [74] S. A. NAZAROV, *Selfadjoint extensions of the Dirichlet problem operator in weighted function spaces*, Mat. Sb. 137, Vol.2, 1988, p.224–241 ; English transl. : Math. USSR-Sb. 65 Vol.1, 1990, p.229–247.
- [75] S. A. NAZAROV, *The damage tensor and measures. I. Asymptotic analysis of anisotropic media with defects*, Mekh. Tverd. Tela, Vol.3, 2000, p.113–124, in Russian ; English transl. : Mech. Solids 35, Vol.3, 2000, p.96–105.

- [76] S.A. NAZAROV, B.A. PLAMENEVSKIJ, *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*, De Gruyter Exposition in Mathematics 13, Walter de Gruyter, 1994.
- [77] S.A. NAZAROV, O.R. POLYAKOVA, *Rupture criteria, asymptotic conditions at crack tips, and selfadjoint extensions of the Lamé operator*, Trudy Moskov. Mat. Obshch., Vol.57, 1996, p.16–75 ; English transl. : Trans. Moscow Math. Soc., Vol.57, 1996, p.13–66.
- [78] S.A. NAZAROV, J. SOKOŁOWSKI, *Asymptotic analysis of shape functionals*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2003, Vol.82, p.125-196.
- [79] S.A. NAZAROV, J. SOKOŁOWSKI, *Self-adjoint Extensions for the Neumann Laplacian and Applications*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 2006, Vol.22, No.3, p.879-906.
- [80] S.A. NAZAROV, A.S. SLUTSKIJ, J. SOKOŁOWSKI, *Topological derivative of the energy functional due to formation of a thin ligament on a spatial body*, Les prépublications de l'Institut Élie Cartan No.14/2004.
- [81] A.A. NOVOTNY, *Análise de sensibilidade topológica*, Phd thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Brazil, 2003.
- [82] A.A. NOVOTNY, R.A. FEIJÓO, C. PADRA, E.A. TAROCO, *Topological Sensitivity Analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, Vol.192, p.803-829.
- [83] A.A. NOVOTNY, R.A. FEIJÓO, C. PADRA, E.A. TAROCO, *Topological Sensitivity Analysis for three-dimensional linear elasticity problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- [84] S. OSHER, R. FEDKIW, *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, Springer, 2004.
- [85] S. OSHER, J. SETHIAN, *Fronts propagating with curvature-dependant speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation*, J. Comp. Phys., 1988, Vol.79, p.12-49.
- [86] D. PENG, B. MERRIMAN, S. OSHER, H. ZHAO, M. KANG *A PDE-based fast local level set method*, J. Comp. Phys., 1999, Vol.155, p.410-438.
- [87] G. PÓLYA, G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton University Press, 1951.
- [88] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [89] E.M. RUDOY, *Differentiation of energy functionals in two-dimensional elasticity theory for solids with curvilinear cracks*, J. Appl. Mech. Techn. Phys, 2004, Vol.45, No.6, p.843-852.
- [90] E.M. RUDOY, *Differentiation of energy functions in the three-dimensional theory of elasticity for bodies with surfaces cracks*, J. Appl. Industrial Math, 2007, Vol.1, No.1, p.95-104.

- [91] E.M. RUDOY, *Differentiation of energy functionals in the problem on a curvilinear crack with possible contact between the shores*, Mechanics of solids, 2007, Vol.42, No.6, p.935-946.
- [92] J. SETHIAN, *Level set methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [93] L. SLIMANE, A. BENDALI, P. LABORDE, *Mixed Formulations for a Class of Variational Inequalities*, M2AN, 2004, Vol.38, No.1, p.177-201.
- [94] J. SOKOŁOWSKI, J.P. ZOLESIO, *Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis*, Springer Verlag, 1992.
- [95] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, *Optimality Conditions for Simultaneous Topology and Shape Optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2001, Vol.42, p.1198-1221.
- [96] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, *Modeling of Topological Derivatives for Contact Problems*, Numerische Mathematik, 2003, Vol.102, No.1, p.145-179.
- [97] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, *On topological derivative in shape optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization, 1999, Vol.37, No.4, p.1251-1272.
- [98] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, *Topological derivatives of shape functionals for elasticity systems*, Mechanics of Structures and Machines, 2001, Vol.29, p.333-351.
- [99] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, *Asymptotic analysis and topological derivatives for shape and topology optimization of elasticity problems in two spatial dimensions*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2008, Vol.32, p.533-544.
- [100] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1965, No.15, p.189-258.
- [101] V.D. STEPANOV, A.M. KHLUDNEV, *Fictitious domain method in the Signorini problem*, Sib. Math. J., 2003, Vol.44, No.6, p.1350-1364.
- [102] V. SVERAK, *On optimal shape design*, J.Math.Pures Appl., 1993, Vol.72, No.6, p.537-551.
- [103] H.K. ZHAO, T. CHAN, B. MERRIMAN, S. OSHER *A variational level set approach to multi-phase motion*. J. Comp. Phys., 1996, Vol.122, p.179-195.