

ACADÉMIE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE “SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE”

LE MANS, France

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DU MAINE

Spécialité : ACOUSTIQUE

Présentée par

ABDENNOUR BOUFERMEL

Pour obtenir le titre de Docteur d'Université

---

**Modélisation numérique des phénomènes non linéaires  
acoustiques en fluide thermovisqueux : application à  
l'étude des écoulements redressés et des transferts  
thermiques en résonateurs**

---

Soutenue le 20 Juillet 2010 devant le jury composé de :

|                |   |              |
|----------------|---|--------------|
| P. BLANC-BENON | Directeur de Recherche CNRS - LMFA, Lyon  | Rapporteur   |
| B. DUBUS       | Directeur de Recherche CNRS - IEMN, Lille | Rapporteur   |
| C. WEISMAN     | Maître de Conférences – UPMC, Paris 6     | Examineur    |
| V. GUSEV       | Professeur, LPEC, Le Mans                 | Examineur    |
| G. PENELET     | Maître de Conférences – LAUM, Le Mans     | Invité       |
| N. JOLY        | Maître de Conférences – LAUM, Le Mans     | Co-Directeur |
| P. LOTTON      | Chargé de Recherche CNRS – LAUM, Le Mans  | Co-Directeur |



**Thèse de Doctorat de l'Université du Maine 2010**

**Abdenour Boufermel**

**Modélisation numérique des phénomènes non  
linéaires acoustiques en fluide thermovisqueux :**

**Application à l'étude des écoulements redressés et des  
transferts thermiques en résonateurs**



**Université du Maine**



**Laboratoire d'Acoustique  
de l'Université du Maine  
(UMR CNRS 6613)**

**Avenue Olivier Messiaen  
72085 LE MANS Cedex9**



## Remerciements

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe "*Transducteurs*", dans l'opération de recherche "*Thermoacoustique*", du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM, UMR-CNRS 6613), dans le cadre d'un contrat d'Allocataire de Recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à mes directeurs de thèse N. Joly (Maître de Conférences – LAUM) et P. Lotton (Chargé de Recherche CNRS – LAUM) pour avoir accepté de diriger cette thèse et dont l'aide précieuse m'a été indispensable sur le plan scientifique. Sans leur soutien, cette thèse ne serait pas ce qu'elle est actuellement. Tout au long de mes années de thèse, ils ont su orienter mes travaux et ils ont toujours été disponibles pour des réunions d'intenses et rationnelles discussions. Tous les conseils qu'ils ont pu me fournir m'ont à chaque fois permis de rebondir dans les moments difficiles. Je tiens également à leur exprimer mon grand respect et à les remercier pour la confiance et la sympathie qu'ils m'ont témoignées au cours de mes années de thèse.

Je tiens à exprimer mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse. Merci à V. Gusev (Professeur des universités de l'Université du Maine – LPEC, Le Mans) d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Merci à P. Blanc-Benon (Directeur de Recherche CNRS – LMFA, Lyon) et B. Dubus (Directeur de Recherche CNRS - IEMN, Lille) d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit. Merci également à C. Weisman (Maître de Conférences – UPMC, Paris 6) pour avoir accepté d'examiner mon mémoire, et à G. Penelet pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon rapport m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier.

Je tiens également à remercier l'ensemble des personnes du LAUM, enseignants, doctorants, ingénieurs et techniciens, pour leur accueil sympathique, leur soutien scientifique, leur amitié, mais aussi et surtout pour avoir réussi à créer une superbe ambiance au sein et en dehors du laboratoire.

J'exprime ma plus profonde reconnaissance à toute ma famille pour son encouragement et son soutien constant tout au long de mes études.

Enfin, merci à toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont suivi pendant mon travail, notamment mes ami(e)s.



# TABLE DES MATIÈRES

|   |    |
|---|----|
| <b>Introduction générale</b> .....  | 1  |
| <b>Chapitre 1 : État de l'art</b> .....   | 5  |
| 1 Écoulements redressés .....   | 6  |
| 1.1 Bref historique .....   | 6  |
| 1.2 Modèles analytiques .....   | 8  |
| 1.3 Etudes expérimentales .....   | 10 |
| 1.4 Modèles numériques .....  | 12 |
| 2 Effet thermoacoustique .....  | 13 |
| 2.1 Principe du processus thermoacoustique .....                                | 14 |
| 2.2 Applications .....  | 16 |
| 2.2.1 Moteur thermoacoustique .....   | 19 |
| 2.2.2 Réfrigérateur thermoacoustique .....                                      | 20 |
| 2.2.3 Couplage Moteur/Réfrigérateur thermoacoustiques .....                     | 20 |
| <b>Chapitre 2 : Mise en équations</b> .....                                     | 23 |
| 1 Introduction .....  | 24 |
| 2 Description d'un mouvement de fluide .....                                    | 24 |
| 3 Équations fondamentales de la dynamique des fluides .....                     | 26 |
| 3.1 Conservation de la masse .....  | 27 |
| 3.2 Conservation de la quantité de mouvement .....                              | 28 |
| 3.3 Conservation de l'énergie .....   | 29 |
| 4 Séparation des échelles de temps .....  | 30 |
| 5 Équations de l'acoustique en fluide thermovisqueux .....                      | 31 |
| 5.1 Formulation de l'acoustique linéaire .....                                  | 32 |
| 5.2 Approches pour le régime harmonique .....                                   | 33 |
| 6 Formulation des phénomènes lents de l'acoustique .....                        | 34 |
| 6.1 Vitesse de transport de masse .....   | 35 |
| 6.2 Équations de conservation portée sur la vitesse de transport de masse ..... | 36 |
| 6.3 Limitation à l'ordre 2 pour les termes sources .....                        | 38 |
| 7 Traitement numérique .....  | 40 |
| 7.1 Schéma numérique .....  | 41 |
| 7.2 Condition de stabilité numérique .....                                      | 43 |

|   |           |
|---|-----------|
| 7.3 Présentation de COMSOL Multiphysics .....   | 43        |
| 7.3.1 Description du simulateur COMSOL Multiphysics .....   | 44        |
| 7.3.2 Étapes principales de construction d'un modèle .....  | 44        |
| 7.3.3 Convergence de la solution .....  | 45        |
| <b>Chapitre 3 : modélisation de l'écoulement redressé .....</b>   | <b>47</b> |
| 1 Introduction .....  | 48        |
| 2 Validation des formulations numériques .....  | 50        |
| 2.1 Descriptions analytiques du champ harmonique et de l'écoulement .....   | 50        |
| 2.1.1 Champ acoustique harmonique dans un guide droit .....   | 50        |
| 2.1.2 Force excitatrice pour l'écoulement redressé dans un guide droit .....  | 53        |
| 2.2 Validation de la modélisation de l'écoulement redressé en guide annulaire<br>développé .....                                      | 55        |
| 2.2.1 Profils de force .....  | 56        |
| 2.2.2 Profils de vitesses.....  | 57        |
| 2.2.3 Temps de stabilisation de l'écoulement redressé .....   | 59        |
| 2.3 Validation de la modélisation de l'écoulement redressé en résonateur fermé ..   | 60        |
| 2.3.1 Onde stationnaire - Solution numérique de l'écoulement redressé à<br>partir d'une solution analytique du champ harmonique ..... | 61        |
| 2.3.2 Onde stationnaire - Solutions numériques (i) du champ acoustique<br>harmonique puis (ii) de l'écoulement redressé .....         | 62        |
| 3 Application à l'étude de résonateurs .....  | 65        |
| 3.1 Effet de la courbure des résonateurs annulaires .....   | 65        |
| 3.1.1 Solution de référence en guide développé droit.....   | 66        |
| 3.1.2 Solution en guide annulaire 2D courbe .....   | 69        |
| 3.1.3 Effet de la courbure sur l'écoulement redressé .....  | 72        |
| 3.1.4 Confrontation de ces résultats de modélisation numérique à une mesure<br>expérimentale .....                                    | 76        |
| 3.2 Effet de l'insertion d'un stack en résonateur .....   | 81        |
| 3.2.1 Insertion d'un stack en résonateur droit à onde stationnaire .....  | 81        |
| 3.2.2 Insertion d'un stack en résonateur droit à onde progressive .....   | 83        |
| 4 Sensibilité des solutions au maillage utilisé .....   | 83        |
| 5. Conclusion et perspectives pour la modélisation des écoulements redressés .....  | 86        |
| <b>Chapitre 4 : Vers la modélisation en thermoacoustique .....</b>  | <b>89</b> |
| 1 Introduction .....  | 90        |
| 2 Modélisation d'un réfrigérateur thermoacoustique .....  | 91        |
| 2.1 Modèle théorique .....  | 92        |
| 2.2 Réfrigérateur sans échangeurs de chaleurs .....   | 94        |
| 2.2.1 Analyse des termes sources .....  | 96        |
| 2.2.2 Effet du positionnement du stack en régime stationnaire .....   | 98        |
| 2.2.3 Evolution transitoire vers le régime stationnaire .....   | 99        |
| 2.3 Réfrigérateur avec échangeurs de chaleurs .....   | 100       |

---

|  |     |
|--|-----|
| 2.3.1 Conduction de la chaleur sans propagation acoustique .....                   | 101 |
| 2.3.2 Conduction de la chaleur avec propagation acoustique .....                   | 102 |
| 2.3.3 Distribution de la chaleur dans le stack.....                                | 102 |
| 3 Conclusion et perspectives pour la thermoacoustique .....                        | 103 |
| <b>Conclusion générale</b> .....   | 105 |
| <b>Annexes A : Mise en équation de l'acoustique en fluide thermovisqueux</b> ..... | 109 |
| <b>Annexes B : Mise en équation de l'écoulement redressé</b> .....                 | 113 |
| <b>Annexes C : Formulation de l'acoustique linéaire en régime harmonique</b> ..... | 115 |
| <b>Annexes D : Forces d'excitation de l'écoulement redressé</b> .....              | 123 |
| <b>Bibliographie</b> .....   | 127 |



## Table des figures

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Structure des écoulements redressés dans un résonateur demi-onde bidirectionnel .....   | 7  |
| 1.2 | Mécanisme de création d'un écoulement redressé sur une plaque vibrante .....  | 7  |
| 1.3 | Écoulement redressé à flux massique non nul dans un résonateur annulaire à onde progressive .....   | 9  |
| 1.4 | Écoulement secondaire induit dans un tube occupé par une onde acoustique stationnaire .....   | 11 |
| 1.5 | Oscillation d'un volume de fluide soumis à une onde acoustique .....  | 15 |
| 1.6 | Représentation schématique des machines thermoacoustique à géométrie droite et annulaire pour des applications à onde stationnaires ou progressives ..... | 18 |
| 1.7 | Prototype Stirling utilisé par l'organisme de la NASA pour un système thermoacoustique associé à un mini générateur électrique .....                      | 20 |
| 1.8 | Couplage d'un moteur et d'un réfrigérateur thermoacoustique à onde stationnaire .....   | 21 |
| 2.1 | Illustration schématique présentant la méthode numérique de résolution des formulations de l'acoustique linéaire et des phénomènes lents .....            | 42 |
| 2.2 | Diagramme de résolution numérique des problèmes physiques par la méthode des éléments finis .....   | 42 |
| 3.1 | Représentation schématique des résonateurs étudiés numériquement dans le chapitre 3 .....   | 49 |
| 3.2 | Maillage utilisé pour l'étude d'une fraction d'un acoustitron développé droit ....  | 56 |
| 3.3 | Profils de force adimensionnelle en acoustitron développé droit .....   | 57 |
| 3.4 | Profils de la vitesse de transport de masse adimensionnelle en acoustitron développé droit .....  | 58 |
| 3.5 | Profils de la vitesse axiale moyenne adimensionnelle de l'écoulement redressé en acoustitron développé droit .....  | 59 |
| 3.6 | Évolution temporelle vers le régime permanent de la vitesse axiale adimensionnelle de l'écoulement redressé .....   | 60 |
| 3.7 | Cavité à section rectangulaire à onde stationnaire et profil de vitesse moyenne de l'écoulement redressé .....  | 61 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.8  | Lignes de courant de l'écoulement redressé dans un résonateur à onde stationnaire .....   | 63 |
| 3.9  | Évolution temporelle de l'écoulement redressé dans la moitié d'un résonateur à onde stationnaire avec une excitation en demi-longueur d'onde .....  | 64 |
| 3.10 | Profils de forces adimensionnelles obtenus numériquement en guide développé droit .....   | 67 |
| 3.11 | Évolution du profil de vitesse axiale adimensionnelle en régime transitoire obtenus numériquement en guide développé droit .....  | 68 |
| 3.12 | Évolution temporelle de la vitesse de transport de masse adimensionnelle sur l'axe de l'acoustitron développé .....   | 69 |
| 3.13 | Schéma d'un acoustitron en 2D illustrant les rayon de courbure $R_0$ et la coordonnée spatiale adimensionnelle .....  | 70 |
| 3.14 | Profils de forces adimensionnelles obtenus numériquement en acoustitron courbe .....  | 71 |
| 3.15 | Évolution du profil de vitesse adimensionnelle à différents instants en acoustitron courbe .....  | 72 |
| 3.16 | Effet de la courbure sur l'écoulement redressé .....  | 74 |
| 3.17 | Profils de vitesse adimensionnelle de l'écoulement redressé, en régime QA, pour différents rayons du guide d'onde .....   | 75 |
| 3.18 | Évolution du profil de vitesse obtenue numériquement à partir d'une solution analytique du champ acoustique en guide développé droit .....  | 76 |
| 3.19 | Distribution spatiale transverse de l'amplitude de la composante axiale de la vitesse particulaire acoustique pour différentes valeurs de la pression acoustique ..   | 78 |
| 3.20 | Distribution transversale de la composante axiale adimensionnelle de la vitesse particulaire acoustique adimensionnelle pour différentes pressions .....  | 79 |
| 3.21 | Distribution spatiale de la valeur absolue de l'amplitude de la composante axiale de la vitesse de l'écoulement redressé mesurée par VLD pour différentes valeurs de l'amplitude de la vitesse acoustique ..... | 80 |
| 3.22 | Lignes de courant dans un résonateur droit à onde stationnaire équipé d'un stack  | 81 |
| 3.23 | Profils de vitesse adimensionnelle au régime transitoire dans un résonateur droit à onde stationnaire équipé d'un stack .....   | 82 |
| 3.24 | Représentation des lignes du courants de l'écoulement redressé dans un résonateur à onde stationnaire sans stack pour deux types de mailles .....   | 85 |
| 3.25 | Lignes du courant dans un résonateur à onde stationnaire avec un stack pour un maillage triangulaire .....  | 86 |
| 4.1  | Schéma du réfrigérateur thermoacoustique étudié dans le chapitre 4 .....  | 92 |
| 4.2  | Géométrie du réfrigérateur sans échangeurs, montrant les conditions aux limites appliquées et le maillage utilisé pour la résolution numérique .....  | 94 |
| 4.3  | Solution Stationnaire du champ de température dans le réfrigérateur et du terme $q$ dans le stack .....   | 95 |
| 4.4  | Écart de température le long de l'axe du réfrigérateur .....  | 96 |
| 4.5  | La distribution des trois composantes $q_a$ , $q_b$ et $E_4$ dans le stack .....  | 97 |

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.6  | Champs de température selon la position du stack dans le résonateur .....   | 98  |
| 4.7  | Évolution temporelle de la température en deux points situés à 1mm aux extrémités du stack .....  | 100 |
| 4.8  | Géométrie et conditions aux limites d'un réfrigérateur équipé de deux échangeurs de chaleur .....   | 101 |
| 4.9  | Profil de température au centre du résonateur pour une charge thermique de $1W/m^2$ sur l'échangeur chaud et sans la présence d'onde acoustique ..... | 101 |
| 4.10 | Profil de température au centre du résonateur pour une charge thermique de $1W/m^2$ sur l'échangeur chaud et en présence d'une onde acoustique .....  | 102 |
| 4.11 | Profil de température dans la plaque médiane du stack pour différents cas .....   | 104 |



## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Une onde acoustique de fort niveau, générée dans un résonateur acoustique par exemple, peut être à l'origine de phénomènes non linéaires tels que la génération d'un écoulement secondaire continu dit “*redressé*”, de moyenne temporelle non nulle (contrairement aux mouvements acoustiques), ou encore la génération d'un flux de chaleur le long d'une paroi solide.

Dans certains cas, ces phénomènes non linéaires peuvent être mis à profit. Par exemple, les écoulements redressés peuvent être utilisés pour améliorer un transfert de chaleur (Davidson [1]), générer des mouvements de fluide dans des dispositifs microfluidiques (Lotton et al. [2], Rudenko et al. [3]), mettre au point des moteurs à ultrasons (Hu et al. [4]) ou encore refroidir des objets dans les environnements à faible gravité (Aktas et al. [5]). À contrario, ces mêmes phénomènes peuvent avoir un effet perturbateur indésirable. Un écoulement redressé peut perturber le fonctionnement d'une machine thermoacoustique, parce que cet écoulement est responsable d'un transfert de chaleur par convection qui modifie le champ de température le long du noyau thermoacoustique (Gusev et al. [6]). En effet, il a été montré que la suppression du “*streaming*” conduit à une augmentation significative des performances de ces machines (Swift et al. [7]). Dans tous les cas, il est primordial d'étudier précisément ces phénomènes non linéaires pour mieux comprendre les processus physiques mis en jeu afin d'optimiser les systèmes.

De nombreuses études expérimentales et théoriques ont été menées par le passé afin de caractériser les phénomènes lents induits par la propagation d'une onde acoustique dans un résonateur. Ainsi, des modèles analytiques ont été proposés permettant la description des phénomènes non linéaires qui se développent dans des systèmes de géométries simples, en admettant plusieurs hypothèses simplificatrices. Cependant, les dispositifs acoustiques réels,

comme les machines thermoacoustiques par exemple, présentent des géométries généralement complexes pour lesquelles les modèles analytiques ne sont pas adaptés et qui requièrent alors des approches numériques. Aujourd'hui, grâce aux performances atteintes par les ordinateurs et les machines de calculs, les méthodes numériques s'imposent comme des compléments aux méthodes expérimentales traditionnelles dans de nombreux cas d'études. Ces méthodes sont devenues des outils précieux, voire indispensables, parce qu'elles autorisent une approche globale des mécanismes physiques mis en jeu.

Plusieurs méthodes numériques ont été développées au cours des dernières années, conduisant à la mise en œuvre de différents codes de calculs qui permettent de traiter une large palette de problèmes, parmi lesquels, la propagation d'une onde acoustique dans un fluide. Les différences entre les codes de calculs résident principalement dans le choix du modèle physique utilisé, dans la conception de la méthode numérique de résolution et dans la façon de l'implémenter.

L'étude présentée dans ce mémoire est essentiellement numérique. Elle a pour objectif la mise en place et la validation d'une nouvelle formulation générale permettant de caractériser simplement les phénomènes acoustiques non linéaires et plus particulièrement la génération d'écoulements redressés. Plus précisément, cette étude concerne le développement et la validation d'un modèle numérique en fluide thermovisqueux qui décrit, d'une part, le champ acoustique dans un résonateur et, d'autre part, l'écoulement redressé et le flux de chaleur qui lui sont associés. La formulation utilisée présente un minimum d'hypothèses simplificatrices et peut être adaptée à une géométrie d'étude quelconque (simple ou complexe) et à tout type de fluide (gaz ou liquide). Dans un souci de facilité d'utilisation (et d'efficacité dans l'éventualité d'un futur transfert technologique), le choix a été fait d'implémenter la méthode numérique développée dans un code de calcul déjà disponible.

Le modèle utilisé pour décrire les phénomènes acoustiques ainsi que les phénomènes non linéaires induits est basé sur les équations couplées de conservation de la masse, de conservation de quantité de mouvement et de conservation de l'énergie. Une séparation des échelles du temps entre les phénomènes "*rapides*" (oscillations acoustiques) et les phénomènes dits "*lents*" (écoulement redressé et transfert de chaleur) est considérée.

La description des phénomènes acoustiques rapides est basée sur l'utilisation de deux équations différentielles couplées, l'une vectorielle portant sur la vitesse acoustique

particulaire et l'autre scalaire portant sur l'écart de température. L'utilisation de ces deux variables peut paraître inhabituelle pour un problème d'acoustique, généralement représenté par une formulation faisant apparaître la pression acoustique, mais elle représente mieux les phénomènes de dissipation dans les couches limites thermovisqueuses. La description des phénomènes lents fait usage de la vitesse de transport de masse comme variable au lieu de la vitesse particulaire. En utilisant cette variable, les nouvelles équations qui décrivent les phénomènes lents gardent la forme standard des équations de base, et tous les effets non linéaires peuvent être considérés dans les termes sources qui jouent, alors, le rôle de forces d'excitation de l'écoulement redressé ou source volumique de chaleur pour le transfert thermique. Cette formulation peut être utilisée dans des modèles analytiques simplifiés, mais peut facilement être mise en œuvre pour la simulation numérique car elle ne nécessite pas le développement de méthodes numériques spécifiques. Le choix de ces variables autorise en effet l'utilisation de méthodes numériques conventionnelles (éléments finis, volumes finis) avec des codes usuels. Dans le cadre de notre étude, le logiciel commercial "*COMSOL Multiphysics*" (méthode de résolution des équations par éléments finis) est utilisé.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres, dont le premier présente un état de l'art sur les différentes études menées sur les phénomènes acoustiques lents se développant en guide d'onde. Ce premier chapitre se concentre plus particulièrement sur les écoulements redressés qui constituent la majeure partie des études numériques présentées dans la suite du document.

Dans le deuxième chapitre, les équations qui décrivent le champ acoustique linéaire en régime harmonique dans un fluide thermovisqueux et les phénomènes non linéaires induits lors de la propagation acoustique sont présentées.

Le troisième chapitre est une application des formulations, présentées dans le chapitre précédent, à la description de la génération de l'écoulement redressé dans divers résonateurs, sous différentes conditions d'utilisation (différents fluides, différentes pressions statiques, résonateur droit ou annulaire, présence ou non d'un empilement de plaques solides (stack)).

Dans le quatrième chapitre, l'équation de l'énergie est appliquée pour résoudre le problème de transfert thermique dans un résonateur à onde stationnaire en présence d'un stack. Il faut noter que la formulation présentée est bien adaptée à l'étude des machines qui fonctionnent comme une pompe à chaleur ou comme un réfrigérateur, car elle décrit le champ

de température comme le résultat lent de la propagation acoustique, contrairement au moteur thermoacoustique pour lequel c'est l'onde acoustique qui est le résultat d'un gradient imposé de température (effet négligé dans les équations de l'acoustique linéaire présentées dans le deuxième chapitre).

Enfin, le mémoire se conclut par des considérations relatives aux travaux futurs qu'il reste à mener.

# Chapitre 1

## ÉTAT DE L'ART

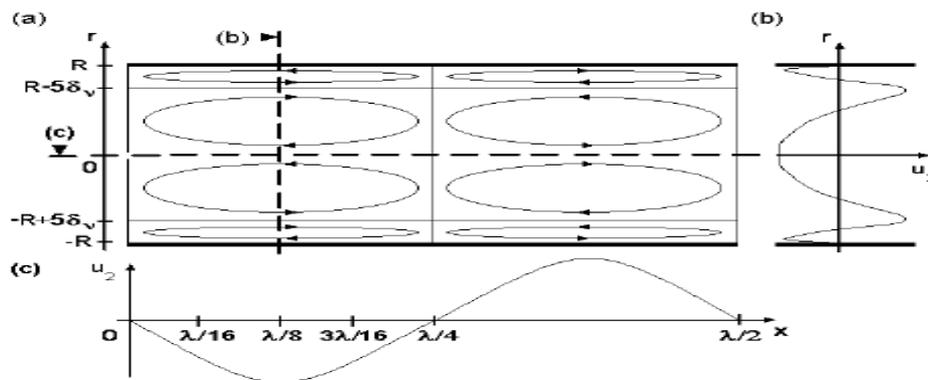
*Ce chapitre présente une étude bibliographique des travaux menés sur les écoulements redressés, d'une part, et sur l'effet thermoacoustique, d'autre part. L'étude se concentre plus particulièrement sur les écoulements redressés qui constituent la majeure partie des études numériques présentées dans la suite du document.*

## 1 Écoulements redressés

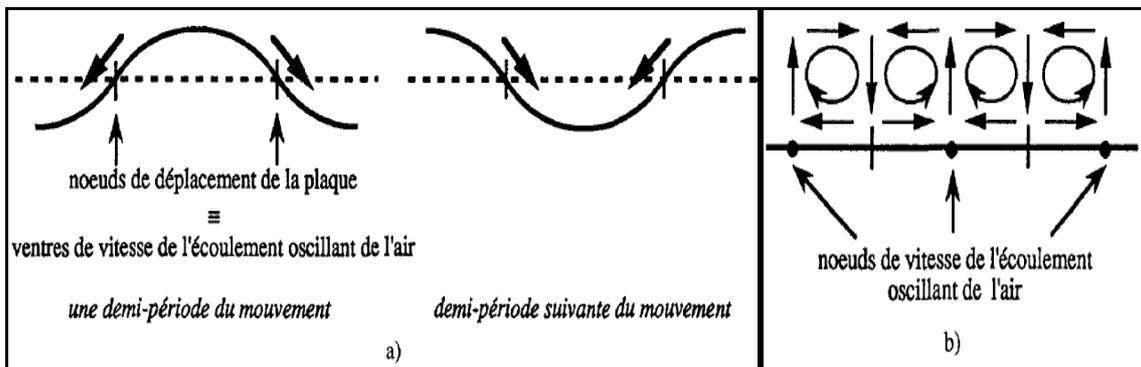
### 1.1 Bref historique

La génération de ‘*vent acoustique*’, également appelé ‘*écoulement redressé*’, ou ‘*acoustic streaming*’ en anglais, est un phénomène non linéaire associé à une onde acoustique de fort niveau. Cet écoulement redressé se traduit par un écoulement moyen qui se superpose au mouvement acoustique qui en est la cause. Une distribution classique d’écoulement redressé est schématisée à la figure 1.1, pour le cas d’un résonateur bidimensionnel dans lequel une onde acoustique stationnaire demi-onde est établie (la longueur du guide  $L$  est égale à une demi longueur d’onde  $\lambda/2$ ). Des tourbillons apparaissent symétriquement de part et d’autre de l’axe du guide ( $r = 0$ ). La structure des tourbillons est également symétrique par rapport à la moitié de la longueur du guide repérée par l’abscisse ( $x = \lambda/4$ ). Les tourbillons situés près de l’axe central sont dénommés ‘*tourbillons externes*’. Pour ces tourbillons, l’écoulement se fait vers les nœuds de vitesse de l’onde stationnaires près des parois du guide et revient le long de l’axe central pour former une boucle fermée. Les tourbillons situés en proche paroi (dans une zone dont l’épaisseur correspond à quelques épaisseurs de couche limite visqueuse  $\delta_v$ ) sont dénommés ‘*tourbillons internes*’. Ils ont des directions opposées à celles des tourbillons externes. La première observation d’un écoulement redressé remonte au 19<sup>ème</sup> siècle. Elle est le résultat d’une expérience menée par Faraday [8] sur les surfaces élastiques en vibration. Faraday observe des tourbillons stationnaires de grande taille par rapport au mouvement acoustique (un quart de longueur d’onde). Ces tourbillons sont matérialisés par une poudre de fines particules placée sur la surface vibrante. Cette expérience permet à Faraday de proposer les premières explications qualitatives de ce phénomène, pour lequel la vibration de la surface excite l’air à proximité dans la couche limite visqueuse  $\delta_v$  de telle sorte qu’un écoulement oscillant de l’air est créé à la même fréquence que le mouvement de la plaque. Ce mouvement d’air présente un maximum d’amplitude au niveau des nœuds de déplacement de la surface, et un minimum au niveau des ventres (Fig. 1.2.(a)). Ainsi, le mouvement oscillant de la plaque engendre un écoulement redressé dirigé le long de la plaque, depuis les maximums de vitesse d’oscillation (ventres) vers les minimums (nœuds) (Fig. 1.2.(b)). Au final, les tourbillons se dirigent des nœuds de déplacement de la plaque vers les ventres. Notons que la vibration des plaques minces a été étudiée bien avant cela par Chladni. Ce dernier observe des figures

géométriques, qui portent aujourd'hui son nom, formées par des grains de sable déposés sur des plaques de cuivre dont le bord est frotté avec un archet. Lors de cette expérience, le sable se rassemble au niveau des nœuds de déplacement de la plaque, qui apparaissent lorsque la fréquence de la vibration excite juste un mode propre de résonance de celle-ci. Ce rassemblement des grains de sable est dû aux rebonds de ceux-ci sur la plaque lors de sa vibration : au cours de la vibration, les grains se déplacent à la surface de la plaque, jusqu'à ce qu'ils atteignent un nœud de vibration de la plaque où ils restent figés dans cet endroit. Vu la taille et la densité du sable, l'air au voisinage de la plaque en vibration ne peut pas les transporter, et ce mécanisme ne fait pas intervenir les formes tourbillonnaires observées par Faraday au voisinage de la plaque. Ce dernier a utilisé une poudre beaucoup plus légère.



**Figure 1.1** - Structure des écoulements redressés dans un résonateur demi-onde bidirectionnel, (a) structure des tourbillons internes et externes, (b) profil de la vitesse des écoulements redressés suivant l'axe  $r$  pour la position  $x = \lambda/8$ , (c) profil de la vitesse des écoulements redressés suivant l'axe  $x$  pour la position  $r = 0$ . (Figure issue de [9])



**Figure 1.2** - Mécanisme de création d'un écoulement redressé sur une plaque vibrante, (a) les flèches représentent le sens de l'écoulement de l'air au cours d'une demi-période de mouvement de la plaque, (b) allure générale de l'écoulement redressé de l'air généré au voisinage de la plaque vibrante. (Figure issue de [10])

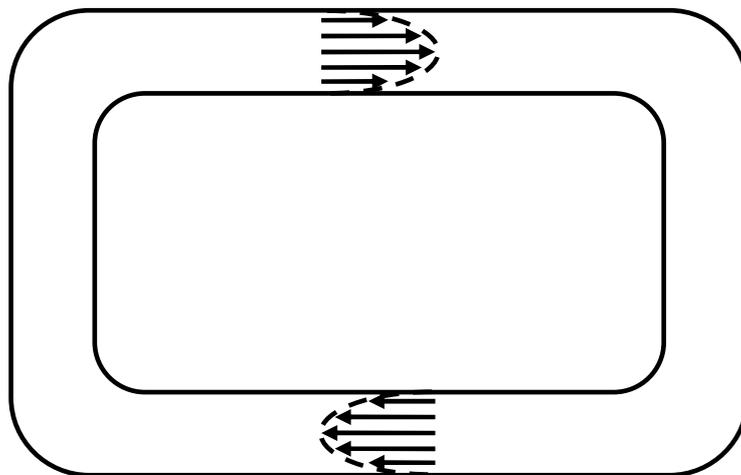
## 1.2 Modèles analytiques

Suite aux observations faites par Faraday, Lord Rayleigh propose une première description théorique des écoulements redressés dans le cas d'une onde stationnaire dans un tube de Kundt large (pour lequel l'épaisseur de couche limite visqueuse  $\delta_v$  est très petite devant le diamètre du tube) [11], puis entre deux plaques infinies espacées d'une distance plus petite que la longueur d'onde acoustique et beaucoup plus grande que l'épaisseur de couche limite visqueuse [12]. En particulier, Rayleigh montre que les écoulements redressés sont dus à l'existence de forces de Reynolds provenant de l'interaction visqueuse entre le fluide soumis à une onde acoustique et une paroi. Ces forces de Reynolds se traduisent par des termes quadratiques acoustiques de valeur moyenne non nulle dans l'équation de continuité de la quantité de mouvement. La solution proposée par Rayleigh permet de décrire les tourbillons externes uniquement.

Depuis cette première description, de nombreux auteurs ont contribué à l'amélioration des bases théoriques proposées par Rayleigh. Par exemple, Westervelt [13] décrit l'effet des frontières en reformulant la vitesse de l'écoulement redressé donnée par Rayleigh, conduisant à la description des cellules de circulation internes confinées à l'intérieur des couches limites acoustiques (Fig. 1.1). Une analyse théorique des tourbillons internes générés par une onde stationnaire en contact avec une surface plane dans un milieu semi-infini a été menée par Zarembo [14]. Cette configuration est discutée par Rudenko et Soluyan [15] qui montrent que la solution de Zarembo est différente du résultat correct trouvée par Westervelt. Nyborg [16] étudie le streaming près d'une interface fluide-solide dans le cas d'une paroi à géométrie arbitraire. Ses résultats sont validés par comparaison avec des modèles théoriques disponibles pour les surfaces planes et cylindriques. Plus récemment, Rott [17] prend en compte les effets thermiques (conduction de la chaleur, effet d'un gradient de température) sur les tourbillons externes des écoulements redressés. En particulier, Rott met en évidence l'influence de la dépendance de la viscosité dynamique avec la température du fluide sur l'écoulement redressé. Parallèlement et indépendamment, Qi [18] obtient des résultats comparables à ceux de Rott et décrit à la fois les tourbillons externes et internes.

L'étude des écoulements redressés connaît un regain d'intérêt ces dernières années, notamment depuis l'avènement des machines thermoacoustiques. En effet, l'apparition d'un écoulement redressé (responsable d'un transfert de chaleur par convection) perturbe la distribution de température dans une machine thermoacoustique et par conséquent, le

fonctionnement de celle-ci. La caractérisation fine des écoulements redressés s'avère donc nécessaire afin d'optimiser le fonctionnement de ces systèmes. Dans ce contexte, Waxler [19] puis Bailliet et al. [20] étendent les travaux de Rott aux canaux et guides, larges ou étroits, sièges d'un gradient de température moyen. Hamilton et al. [21] étudient analytiquement les écoulements redressés générés par une onde acoustique stationnaire dans un guide de géométrie variable. Parallèlement à l'étude des machines thermoacoustiques à ondes stationnaires, des machines à ondes quasi-progressives ont été également étudiées. Contrairement aux machines à ondes stationnaires qui mettent en jeu un résonateur droit quart d'onde ou demi-onde, ces machines font usage d'un résonateur annulaire qui favorise le développement d'une onde acoustique à caractère progressif. L'existence d'une boucle fermée rend alors possible la génération d'un écoulement moyen à flux massique non nul sur une section du résonateur. La forme de l'écoulement diffère alors de la structure classique de Rayleigh (Fig. 1.3). Ce type d'écoulement a été étudié pour la première fois par Gedeon [22] et mis en évidence expérimentalement par Swift [7]. Actuellement, il est parfois appelé "écoulement de Gedeon". Une théorie analytique pour ce type d'écoulement redressé dans une machine annulaire est proposée par Gusev et al. [23] dans le cas d'un moteur thermoacoustique. Plus récemment, le comportement transitoire de l'écoulement de Gedeon a été étudié par Amari et al., pour des régimes d'interaction onde/parois quasi-adiabatique et quasi-isotherme dans un résonateur annulaire excité par un grand nombre de sources acoustique placées en paroi le long du résonateur (cas d'un "Acoustitron") [24] ainsi que dans un résonateur annulaire excité par deux sources acoustiques judicieusement disposées en paroi et contrôlées en amplitude et en phase (cas d'un résonateur dit "de Ceperley") [25].



**Figure 1.3** - Écoulement redressé à flux massique non nul (en moyenne sur une section) dans un résonateur annulaire à onde progressive.

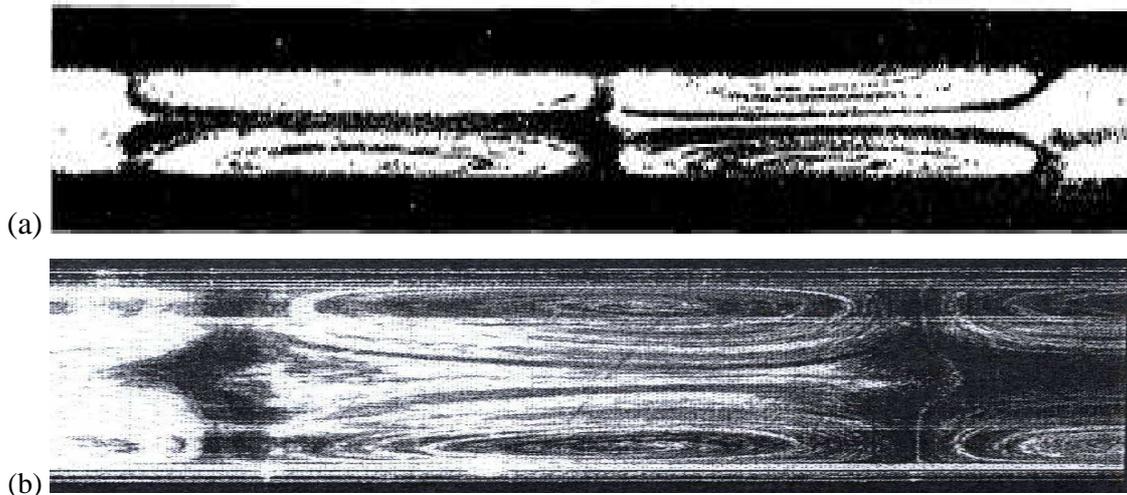
Toutes les études théoriques précédentes admettent l'hypothèse selon laquelle la vitesse des écoulements redressés est suffisamment petite pour que les variables du premier ordre ne soient pas perturbées par les écoulements redressés. Des études théoriques récentes menées par Menguy et Gilbert [26] montrent que lorsque la vitesse des écoulements redressés augmente, des effets non linéaires d'inertie du fluide tendent à distordre les écoulements redressés. Pour évaluer l'influence de l'inertie du fluide, Menguy et Gilbert introduisent le nombre de Reynolds acoustique  $Re_{NL}$ , défini par

$$Re_{NL} = \left(\frac{U}{c}\right)^2 \left(\frac{R}{\delta_v}\right)^2, \quad (1.1)$$

avec  $U$  l'amplitude de la vitesse acoustique,  $c$  la vitesse de propagation du son,  $R$  le rayon du guide d'onde considéré et  $\delta_v$  l'épaisseur de couche limite visqueuse qui se développe sur la paroi du guide. Ce nombre adimensionnel permet de définir une limite entre les écoulements redressés lents ("slow streaming") et rapides ("fast streaming"). Lorsque ce nombre est très petit devant l'unité,  $Re_{NL} \ll 1$ , l'écoulement correspondant est dit "écoulement lent". Le profil de la vitesse de l'écoulement redressé est alors symétrique par rapport à l'axe du résonateur (cas d'un résonateur droit). Dans le cas contraire, lorsque ce nombre de Reynolds est supérieur ou égal à l'unité,  $Re_{NL} \geq 1$ , l'écoulement est dit "écoulement rapide" (ou écoulement non linéaire) et des effets non linéaires de l'inertie du fluide apparaissent et se manifestent par la déformation des profils de vitesses de l'écoulement redressé. Hormis les calculs numériques de Menguy et Gilbert valides pour  $Re_{NL} \approx 1$ , toutes les études théoriques citées précédemment ne sont valables que pour  $Re_{NL} \ll 1$ .

### 1.3 Études expérimentales

Le phénomène de redressement a été observé par plusieurs auteurs, en particulier par Kundt [27], lors d'expériences portant sur la mesure de la vitesse de son dans l'air à l'intérieur des tubes. En présence d'une onde stationnaire, une fine poudre déposée à l'intérieur du tube se regroupe préférentiellement aux nœuds formant ainsi des amas de poudre. En mesurant l'amplitude de la vibration sonore dans un tube fermé, Carrière [28] a observé au microscope le mouvement des particules de poussière très fines au voisinage d'un cylindre placé au niveau d'un ventre de vitesse, dans un tube à onde stationnaire. La même expérience a été menée par Andrade [29], qui a mis en évidence un écoulement de particules sous forme de tourbillons comme le montre la figure 1.4.(a). Ces tourbillons ont été observés récemment par Rockliff et al. [30] (Fig. 1.4.(b)).



**Figure 1.4** - Écoulement secondaire induit dans un tube occupé par une onde acoustique stationnaire, (a) la visualisation est faite par la fumée de cigarette dans l'étude d'Andrade [29], (b) mesure PIV dans l'étude de Rockliff et al. [30].

Grâce aux progrès qu'ont connus ces dernières années les techniques de mesures optiques, notamment la Vélocimétrie Laser-Doppler (VLD) ou la Vélocimétrie par Image de Particules (PIV), la caractérisation expérimentale des écoulements redressés a récemment connu des avancées significatives.

Les premières visualisations d'écoulements redressés par PIV sont réalisées par l'équipe "Fluids and Acoustics" du département de Physique et d'Astronomie de l'Université d'Edimbourg à la fin des années 80 (Rockliff et al. [30], Sharpe et al. [31], Arroyo et al. [32], Hann et al. [33]). Ces études expérimentales permettent d'extraire la composante axiale de la vitesse des tourbillons externes des écoulements redressés associés à une onde stationnaire monochromatique dans des guides droits de différentes géométries (sections rectangulaire, carré, circulaire). Les résultats obtenus sont en accord avec les prédictions de Rott (Fig. 1.4.(b), par exemple). Plus récemment, Nabavi et al. [34,35] ont repris cette technique de mesure et ils ont montré que les structures de recirculation se déforment pour des écoulements rapides. Parallèlement, Debesse et al. [36] ont mesuré le champ de vitesse par vélocimétrie par images de particules (PIV) dans un résonateur contenant un générateur d'onde thermoacoustique. En réordonnant les vitesses suivant leur phase avec une technique de projection par décomposition aux valeurs singulières (SVD), ils obtiennent des résultats

concordant avec l'acoustique linéaire. Le calcul du champ de vitesse moyenné en temps montre l'existence d'un écoulement continu différent de celui de Rayleigh [12] - Schlichting [37].

La première visualisation d'écoulements redressés par VLD est réalisée par Thomson et al. [38]. Dans le cadre de cette étude, les auteurs mesurent la vitesse des tourbillons externes des écoulements redressés dans un résonateur cylindrique à ondes stationnaires. En particulier, ils montrent que la présence d'un gradient de température influence considérablement la distribution des écoulements redressés.

Plus récemment, Moreau et al. [9,39] obtiennent la première confirmation expérimentale de l'existence d'écoulements redressés internes en effectuant des mesures par LDV à proximité des parois du guide. Parallèlement, les mêmes auteurs étudient l'influence de la présence d'un stack sur la distribution des écoulements redressés. Enfin, Desjoux et al. [40] étudient par LDV l'écoulement généré dans un résonateur annulaire. En particulier, ces auteurs montrent que la courbure du guide, d'une part, et les effets d'inertie du fluide, d'autre part (pour des cas où  $Re_{NL} > 1$ ), sont responsables d'une dissymétrie dans la distribution de l'écoulement sur la section du guide.

## 1.4 Modèles numériques

Du fait de la complexité des systèmes acoustiques, les modèles analytiques permettant la description de phénomène du streaming sont généralement limités à des géométries simples et les solutions sont limitées à des conditions idéalisées. Les dispositifs acoustiques réels, par exemple les cavités résonantes utilisées dans des moteurs thermoacoustiques ont des géométries plus complexes et requièrent des approches numériques.

La plus complète des méthodes de résolution numérique est la simulation numérique directe (DNS) des équations décrivant ce mouvement dans le domaine temporel (Aktas et al. [5], Loh et al. [41]), et envisageant toutes les échelles de temps et d'espace. Toutefois, cette méthode n'est souvent pas adaptée aux systèmes réels en raison du coût de calcul élevé requis. Des méthodes moins coûteuses sont disponibles pour la modélisation de l'écoulement des fluides (Large Eddy Simulation (LED) (Chen et al. [42]), ou Reynolds averaged Navier-Stokes (RANS) (Matesanz et al. [43])), qui sont fondées sur des hypothèses simplificatrices et des approximations, négligeant par exemple la dépendance à la température de paramètres physiques du fluide, ou le temps et/ou la variation spatiale de la densité du fluide moyenne

(Rudenko et al. [15]). Toutefois, parce qu'elles considèrent des variables moyennes de l'espace ou du temps, ces méthodes simplifiées ne peuvent pas décrire précisément les effets non linéaires et les forces localisées à l'intérieur des couches limites qui excitent l'écoulement redressé moyen.

Parmi les études numériques effectuées, on peut citer celle de Kawahashi et Arakawa [44] sur l'écoulement redressé induit dans un résonateur fermé, une oscillation d'amplitude finie étant excitée par un piston, basée sur une méthode de différence spatiale de quatrième ordre. Par ailleurs, Gopinath et Mills [45] examinent numériquement le transfert thermique par convection du à l'écoulement redressé entre les extrémités d'un tube à onde stationnaire. Yano [46] étudie l'allure de l'écoulement redressé excité par des oscillations de résonances avec des ondes de chocs périodiques dans un tube fermé rempli de gaz. Il montre en particulier la présence de forts tourbillons localisés près des parois du tube présentant une structure très différente de celle du "*Rayleigh streaming*". Plus récemment, Marx et Blanc-Benon [47] étudient numériquement par une simulation directe des équations de Navier-Stokes, l'évolution des tourbillons internes et externe entre deux plaques parallèles lorsque la distance inter-plaque varie.

## 2 Effet thermoacoustique

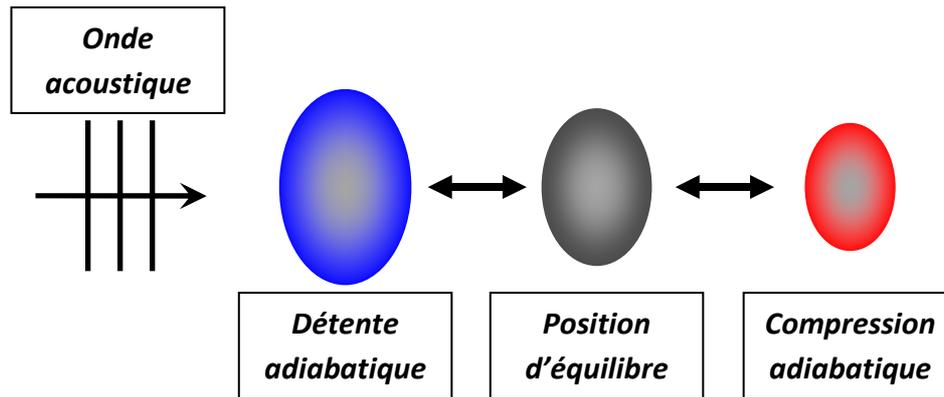
Le mot "*thermoacoustique*" qualifie l'interaction entre la propagation d'une onde acoustique et le développement d'échanges thermiques sur le volume du fluide ou en parois. Il s'agit d'un effet réversible, c'est-à-dire qu'un gradient de température peut produire un son et que la propagation d'une onde acoustique génère un gradient de température et participe au transport de chaleur dans le fluide. Compte tenu des faibles intensités rencontrées en acoustique, l'effet thermoacoustique est généralement faible. Comme phénomène non linéaire, il se développe principalement à l'intérieur de couches limites : pour le rendre plus important, un élément supplémentaire sous la forme d'une structure poreuse appelée "*stack*" est introduite à l'intérieur du résonateur. Le stack est généralement constitué d'un ensemble de plaques fines et parallèles espacées d'une petite distance (pas très grande devant l'épaisseur de couche limite). La réversibilité de cet effet, associée à deux comportements thermoacoustiques distincts, conduit à deux types de machines thermoacoustiques : d'une part, "les moteurs" qui produisent de l'énergie mécanique à partir de d'énergie thermique, et

d'autre part, "les réfrigérateurs" qui pompent de la chaleur (thermique) par conversion d'énergie mécanique.

L'effet thermoacoustique est connu depuis de nombreux siècles, par exemple depuis que les souffleurs de verre perçoivent le son généré par des tubes de verre, après leur chauffage par une extrémité ou en cours de leur refroidissement. L'explication physique de ce phénomène par Rayleigh [12], puis son étude approfondie par Rott [48] sont beaucoup plus récentes et conduisent à des modèles analytiques de l'interaction entre les oscillations acoustiques et thermiques dans les couches limites, au voisinage des parois solides. Par la suite, plusieurs auteurs se sont intéressés à ce phénomène. Merkli et Thomann [49] ont utilisé la théorie de base de Rott pour modéliser le flux de chaleur moyen entre les parois du résonateur et le fluide. Les mesures effectuées ont montré que les parois proches des ventres de vitesse se refroidissent, tandis qu'elles s'échauffent aux niveaux des nœuds. Plus tard, l'équipe de Weathley au Los Alamos National Laboratory examine l'effet thermoacoustique sous son aspect pratique, afin de concevoir des machines thermoacoustiques et les rendre efficaces. Issu de cette même équipe, Swift [50] propose une théorie linéaire de la thermoacoustique en 1998 qui fait encore référence aujourd'hui. Cette théorie inclut en particulier tous les phénomènes thermovisqueux dans les couches limites acoustiques, ainsi que les effets de l'inhomogénéité introduite par le gradient de température le long du stack. Depuis lors, un très grand nombre de travaux expérimentaux, analytiques et numériques a été mené par différentes équipes de recherche sur ce thème, couvrant un large éventail allant des problèmes les plus fondamentaux à l'étude de machines réelles (réfrigérateurs et moteurs). Une bibliographie exhaustive sortirait du cadre de ce chapitre introductif.

## 2.1 Principe du processus thermoacoustique

De façon générale, l'onde acoustique est une perturbation mécanique qui se propage dans un milieu fluide ou solide. Lors de la propagation dans un fluide et loin de toute paroi, un volume élémentaire de fluide, constitué d'un ensemble de molécules, se comprime puis se détend, dans des conditions quasi-adiabatiques. Dans ces conditions, le fluide s'échauffe lors d'une compression puis se refroidit lors d'une détente, de sorte que ces fluctuations de pressions s'accompagnent d'une fluctuation de la température du volume fluide (oscillation thermique) (Fig. 1.5).



**Figure 1.5** - Oscillation d'un volume de fluide soumis à une onde acoustique. Le fluide s'échauffe lors des phases de compression et se refroidit lors des phases de détente en effectuant de petits allers et retours autour d'une position moyenne dite d'équilibre.

En raison de la conduction thermique, ces variations de température associées à la propagation acoustique s'accompagnent de transferts de chaleur avec les volumes voisins (fluides) s'ils présentent des conditions de température légèrement différentes, ou avec les parois solides à proximité. Ces phénomènes de diffusion thermique contribuent à une forme d'irréversibilité qui conduit à une atténuation de l'onde. Si une telle conduction thermique est exclue ou négligée, l'écart de température du volume fluide élémentaire présente, en moyenne temporelle sur une période, une valeur nulle, et la température moyenne reste inchangée (en temps) et homogène (en espace). Si la conduction thermique est prise en compte, le fluide peut échanger (par accumulation ou restitution) une quantité de chaleur avec un milieu solide (plaque du stack, par exemple). Schématiquement, le cycle suivi au cours d'une période acoustique par un volume élémentaire de fluide, initialement à l'équilibre thermodynamique et proche d'une plaque peut être décomposé en quatre phases (mouvement particulaire oscillant et échanges thermiques associés) :

- soumise à une augmentation de pression d'origine acoustique, la particule subit une compression quasi-adiabatique, au cours de laquelle sa température augmente ; par effet de conduction thermique, la particule cède une quantité de chaleur à la plaque,
- dans son mouvement particulaire, ce volume fluide est déplacé,

- à cette nouvelle position, le volume fluide est détendu, sa température devient alors inférieure à celle de la paroi, dont elle reçoit par conduction une quantité de chaleur,
- le mouvement particulaire déplace alors le volume fluide en sens opposé, pour le reconduire à sa position initiale.

Ainsi, à chaque phase de compression, la particule de fluide échauffée cède une certaine quantité de chaleur à la plaque à une position donnée, alors qu'à chaque phase de détente, elle absorbe une certaine quantité de chaleur depuis la plaque à une position voisine. Ce transfert élémentaire de chaleur génère un gradient de température qui, intégré sur toute la longueur de la plaque, conduit à une différence de température entre les deux extrémités de la plaque. En pratique, pour un champ acoustique en régime harmonique, ces différentes phases ne se succèdent pas séquentiellement, mais s'enchaînent continument avec une superposition partielle, les phases de "compression/détente + échange de chaleur" et de "déplacement particulaire" étant en quadrature.

Les phénomènes acoustiques courants correspondent généralement à des fluctuations de pression modestes (quelque dizaines de Pascal), qui engendrent des variations de température très faibles et difficiles à mesurer. Autant dire que pour accroître l'interaction onde/parois et les transferts thermoacoustiques, il faut augmenter autant que possible l'amplitude des fluctuations de pression et de température (caractérisé par le "drive ratio", rapport du module de la fluctuation de pression acoustique et de la pression statique), mais également la surface d'interaction entre le fluide et le solide (en pratique, cela revient à multiplier le nombre de plaques constitutives du stack).

## 2.2 Applications

L'effet thermoacoustique permet de développer des machines thermoacoustiques de deux types, en raison de la réversibilité de l'effet thermoacoustique : d'une part les réfrigérateurs (ou pompes à chaleur), et d'autre part les moteurs. En comparaison des machines thermiques classiques, les machines thermoacoustiques présentent des avantages, comme le fait de fonctionner avec de nombreux gaz et fluides non toxiques et qui ne dégradent pas l'environnement, ou la possibilité de les miniaturiser. Mais l'élément le plus intéressant est sans doute que ces machines ne comportent pas de pièces mobiles, qui sont la source d'usure et nécessitent régulièrement des opérations de maintenance sur les machines frigorifiques à compresseur. Par ailleurs, la fabrication de résonateurs thermoacoustiques est

relativement simple et ne devrait pas présenter un coût de fabrication très élevé. En revanche, même si les phénomènes physiques de base sont bien connus, le dimensionnement et l'optimisation de telles machines nécessitent encore un travail important. À cette fin, la modélisation numérique peut être un outil appréciable, mais il reste ici encore un important travail à réaliser pour rendre compte, avec la précision souhaitée, des multiples couplages (propagation acoustique, phénomènes de diffusion au voisinage des parois, transferts thermiques, écoulements de streaming, convection naturelle...) aux différentes échelles spatiales (couches limites acoustiques, couches limites pour les écoulements, longueur d'onde acoustique, espace entre plaques à l'intérieur du stack, dimensions du résonateur) et temporelles (période acoustique, transitoires lents pour les phénomènes thermiques et d'écoulements).

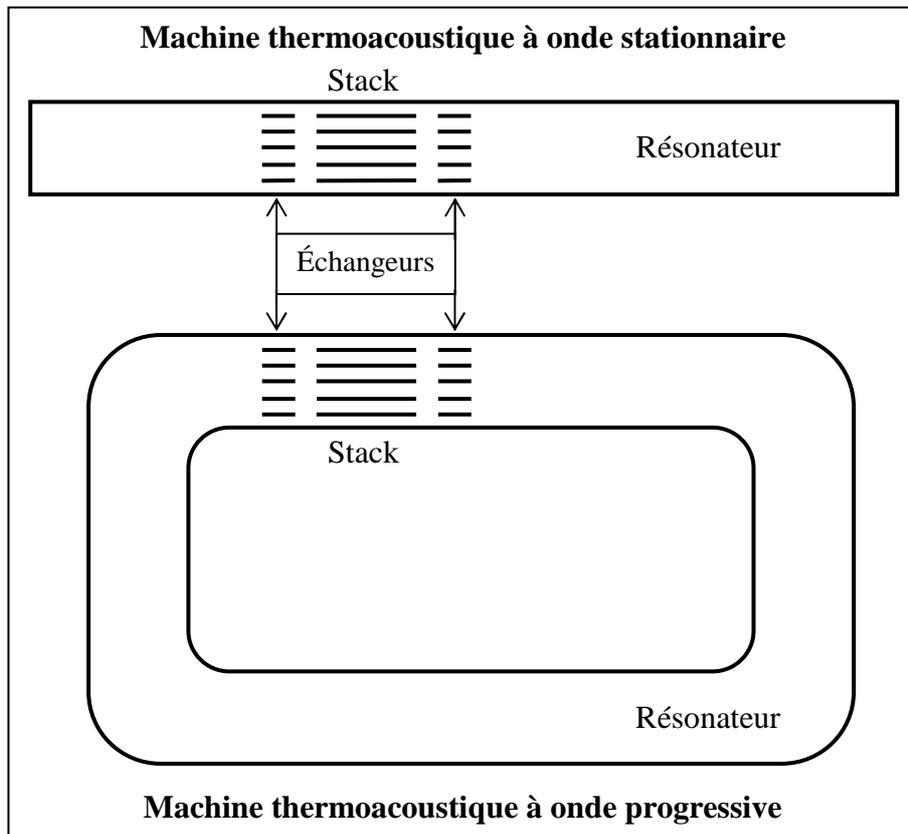
Les machines thermoacoustiques construites actuellement sont généralement constituées d'éléments simples, comme illustré en figure 1.6 :

- **la source** : cet élément dépend de l'application souhaitée ; c'est une source acoustique (mécanique) pour une machine frigorifique ou une source de chaleur (thermique) pour un moteur thermoacoustique,

- **le résonateur** : c'est un guide d'onde, généralement tubulaire, occupé par le fluide et qui constitue le milieu de propagation ; la fréquence d'excitation est ajustée à ses dimensions pour obtenir une amplitude de pression élevée et améliorer le rendement de la machine. Il existe deux catégories de résonateurs, classifiés selon le type de l'onde acoustique : (i) les résonateurs de géométrie droite et fermée pour des applications à onde stationnaires, (ii) les résonateurs de géométrie annulaire pour obtenir une onde progressive (Fig. 1.6).

- **le stack thermoacoustique** : est réalisé d'un matériau à forte porosité, de manière à ce que le rayon hydraulique des pores soit de l'ordre de quelques épaisseurs de la couche limite thermique. Il est généralement constitué d'un empilement de plaques très fines et de longueur très petite devant celle du résonateur. Cet élément constitue le cœur de la machine thermoacoustique, car il est le siège du flux de chaleur généré par l'onde acoustique dans le cas du réfrigérateur, et il se comporte comme une source acoustique dans le cas d'un moteur thermoacoustique, une différence de température étant imposée par des échangeurs de chaleur à ses deux extrémités.

- *les échangeurs* : placés aux deux extrémités du stack, ils constituent l'interface thermique de la machine, l'un pour la source froide et l'autre pour la source chaude, en extrayant ou en fournissant de la chaleur selon qu'il s'agit d'une machine frigorifique ou d'un moteur.



**Figure 1.6** - Représentation schématique des machines thermoacoustique à géométrie droite et annulaire pour des applications à onde stationnaires ou progressives.

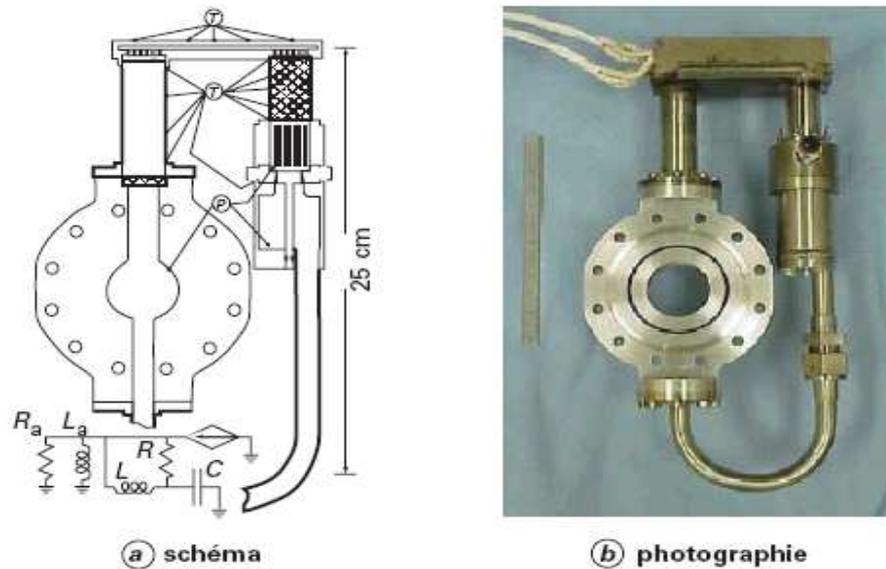
À l'issue de la découverte de l'effet thermoacoustique et de ses bases théoriques, de la reconnaissance des enjeux économiques, écologiques de ce principe, ainsi que des moyens d'analyse apportés par l'informatique, de nombreuses investigations sont menées dans ce domaine. Cependant, les applications sont nombreuses et répondent au besoin des marchés de l'industrie. Certains s'intéressent au refroidissement acoustique alors que d'autres cherchent à récupérer de la chaleur de bas niveau pour la transformer en énergie mécanique utilisable. Le grand défi est actuellement d'améliorer le rendement de ces machines, ainsi que de les miniaturiser, par exemple pour en multiplier les applications en micro-technologie. Les

écoulements redressés, étudiés dans la première partie de ce chapitre, participent à une diminution de ce rendement.

### 2.2.1 Moteur thermoacoustique

Ce type de machine génère et amplifie une onde acoustique au moyen de l'effet thermoacoustique, par transformation en énergie mécanique d'une partie de la chaleur fournie par la source chaude (échangeur chaud). Des moteurs thermoacoustiques à onde stationnaire sont présentés dans les références (Swift [50], Olson et al. [51]). De nombreux moteurs de ce type ont été construits, mais en raison des irréversibilités rencontrées au cours du cycle thermodynamique, leur efficacité thermique (rapport entre la puissance acoustique produite et la puissance apportée à la source chaude sous forme de chaleur) est limitée à 0,20 (Marx [52]). La liquéfaction de gaz naturel a été obtenue par procédé thermoacoustique (Wollan et al. [53,54], Backhaus et al. [55]) au moyen d'un moteur qui produit une puissance acoustique supérieure à 17kW et avec un rendement atteignant 18% (ici, le rendement est considéré comme le rapport du débit de puissance acoustique à la droite de l'échangeur froid et de la puissance de chauffage fournie à l'échangeur de chaleur chaud, par la combustion de gaz naturel).

Les travaux menés par Ceperley [56,57] sur les machines à ondes progressives ont ouvert la voie à la réalisation de moteurs de plus haute performance. Selon son analyse qualitative, ce genre de machine peut avoir de bonnes performances avec des rendements meilleurs que ceux des machines à ondes stationnaires. Ceperley n'a pas pu faire fonctionner sa machine annulaire ; les premiers résultats expérimentaux d'un prototype de ce type de machine ont été publiés plusieurs années après par Yazaki et al. [58]. Ces résultats ont montré que le gradient de température nécessaire pour le déclenchement du moteur est plus faible que celui d'un système équivalent à onde stationnaire, mais que le rendement de cette machine reste faible. Ceperley et Yazaki se sont rendu compte que ce faible rendement provenait de pertes visqueuses importantes résultant des vitesses acoustiques élevées. Récemment, Backhaus et al. [59] ont utilisé ces résultats afin de fabriquer pour la NASA, un mini générateur électrique thermoacoustique (Fig. 1.7) capable d'offrir une puissance électrique de 39W pour un rendement global de 18%. Le fluide utilisé est de l'hélium à 55bar, pour un drive ratio de  $|\tilde{p}|/p_m = 0.065$ , en maintenant la température de l'échangeur de chaleur chaud à 650°C et celle de l'échangeur froid proche de 30°C.



**Figure 1.7** - Prototype Stirling utilisé par l'organisme de la NASA pour un système thermoacoustique associé à un mini générateur électrique, (a) représentation schématique, (b) photographie du mini générateur thermoacoustique.

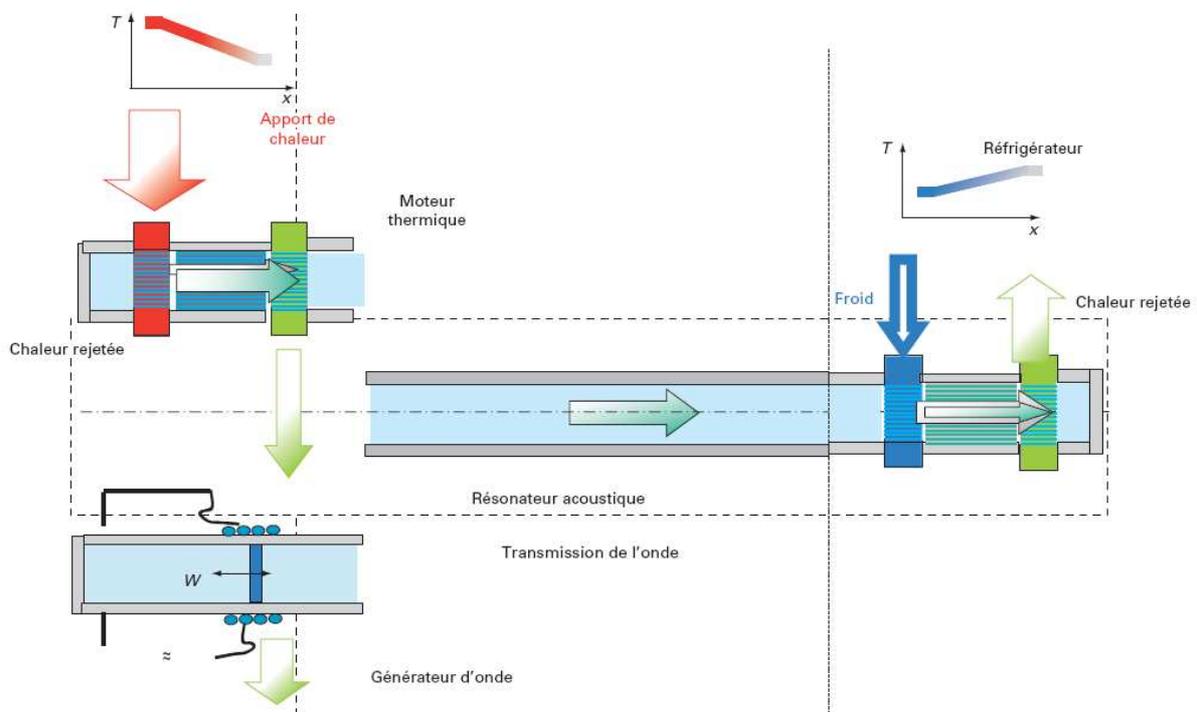
### 2.2.2 Réfrigérateur thermoacoustique

Contrairement aux moteurs, les réfrigérateurs extraient une quantité de chaleur d'un milieu froid vers un milieu chaud, à partir de la fourniture d'une puissance mécanique. Un point commun avec les moteurs est qu'il existe des machines qui fonctionnent avec des ondes stationnaires (Swift [50]) et d'autres avec des ondes progressives (tube à gaz pulsé) (Longworth [60], Radebaugh [61]). La différence principale entre les deux types de réfrigérateurs vient de la source utilisée : il s'agit dans le premier cas d'un haut parleur de haute impédance, piézo-électrique, etc. qui excite une résonance propre au système, alors que dans le deuxième cas l'onde de pression d'amplitude importante est obtenue par des pistons développant une course importante. Dans ces machines, le rendement est limité par les pertes par conduction thermique dans la direction axiale, par frottement visqueux, ou encore par relaxation thermique.

### 2.2.3 Couplage Moteur/Réfrigérateur thermoacoustiques

Une condition majeure, pour le fonctionnement avec un bon rendement d'un réfrigérateur thermoacoustique, est de disposer d'une source acoustique assez puissante, que la technologie actuelle des haut-parleurs ou des sources piézo-électriques atteignent

difficilement. Étant donnée la relative simplicité de mise en œuvre du procédé thermoacoustique, il est envisageable de générer l'onde acoustique par un moteur thermoacoustique, en couplant un système de génération d'onde thermoacoustique et un système de pompage de la chaleur thermoacoustique, où une source de chaleur chaude produit une onde acoustique qui est utilisée à son tour pour produire du froid. Le système le plus utilisé est celui schématisé en figure 1.8 : il offre de bonnes performances et permet d'atteindre des températures très basses (Nika [62]) ; le système utilisant un tel couplage le plus célèbre est peut être le réfrigérateur Beer Cooler (Swift [50]).



**Figure 1.8** - Couplage d'un moteur et d'un réfrigérateur thermoacoustique à onde stationnaire : l'un des stack est placé entre deux sources de chaleur et est utilisé comme moteur pour générer une onde stationnaire, le second est excité par cette onde et utilisé comme réfrigérateur. (Figure issue de [62])



## Chapitre 2

### MISE EN ÉQUATIONS

*Ce Chapitre présente la séparation des échelles de temps puis les formulations qui permettent de décrire les phénomènes lents induits d'écoulement redressé et de transferts thermiques. Le choix des variables est orienté pour présenter les équations sous une forme ordinaire pour un problème de mécanique des fluides et résoudre les problèmes en utilisant les méthodes numériques conventionnelles (éléments finis, volumes finis) : la formulation est basée sur la vitesse de transport de masse qui combine la vitesse de l'écoulement redressé et la contribution moyen du champs acoustique ; pour obtenir le champ acoustique excitateur des phénomènes non-linéaires à l'échelle lente, un calcul préalable est réalisé à partir des variables d'écart de température et de vitesse particulière, qui permettent de représenter les effets thermiques et visqueux dans les couches limites.*

## 1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en équation générale de l'acoustique en fluide thermovisqueux et de ces deux phénomènes non linéaires cités dans le chapitre précédent (le développement de l'écoulement redressé et du transfert thermique moyens). La formulation de l'acoustique est une formulation linéaire composée de deux équations couplées, une équation vectorielle portant sur la vitesse particulaire acoustique et une équation scalaire portant sur l'écart de température comme variables. Pour les phénomènes lents les variables sont la vitesse de transport de masse et la pression statique pour l'écoulement redressé, et la température moyenne pour le transfert thermique. Le choix des formulations est orienté pour pouvoir utiliser des méthodes numériques ordinaires pour la résolution (éléments finis, par exemple). Les deux formulations sont obtenues à partir des équations de conservation de base pour un problème de dynamique des fluides, en se basant sur l'hypothèse de séparation des échelles de temps entre les vibrations acoustiques rapides et les phénomènes lents induits.

## 2 Description d'un mouvement de fluide

En mécanique des fluides, le milieu fluide est représenté par un milieu continu, c'est-à-dire que le comportement microscopique à l'échelle de la particule est ignoré de sorte que les liquides et les gaz se comportent de la même façon (Bois [63]), parce que le comportement microscopique rend compte de la structure moléculaire du fluide. Ainsi, si on considère des grandeurs physiques telles que la masse volumique et la pression, on doit pouvoir les représenter par des fonctions continues, ce qui n'est pas évident pour étudier des milieux diphasiques par exemple. Dans le cas de l'étude des écoulements redressés, on suppose que le fluide est toujours monophasique, parce que le comportement d'un écoulement en présence de deux fluides (de même phase ou en deux phases différentes) se trouve fortement modifié et nécessite un traitement particulier. Il est à noter que la continuité parfaite d'un domaine matériel, solide ou fluide, n'existe pas réellement mais elle est une très bonne approximation à une échelle spatiale supérieure au libre parcours moyen des particules, selon la théorie cinétique des gaz (Boltzmann [64]). En dynamique des fluides, on étudie le mouvement d'une particule qui ne désigne pas une molécule du fluide mais une partie restreinte du fluide de très petite taille devant les échelles de longueur caractéristique de l'écoulement mais de très

grande taille devant le libre parcours moyen des molécules. Pour décrire le mouvement fluide, deux formalismes distincts peuvent être utilisés (cette distinction est basée sur les deux méthodes classiques ‘‘Lagrange’’ et ‘‘Euler’’), pour préciser les évolutions au cours du temps d’une particule macroscopique par rapport à un référentiel :

- **Description de Lagrange** : la particule fluide est identifiée et suivie au cours du temps, ce qui implique de connaître sa position à chaque instant. L’idée sous tendue par cette description consiste à comparer les éléments macroscopiques à un instant donné par rapport à leur configuration à l’instant initial. Connaissant la position de la particule à chaque instant, il est possible de définir sa vitesse. Cette méthode est la mieux adaptée dans le cas des solides élastiques, mais elle est utilisée moins fréquemment dans le cas d’un fluide, puisque le référentiel se déplace avec le fluide et la position initiale ici n’a pas de signification physique.

- **Description d'Euler** : cette modélisation de mouvement est utile pour exprimer la relation entre les mouvements et les efforts internes dans le fluide, qui n’apparaît pas dans la description Lagrangienne. Cette description consiste à décrire en un endroit donné les particules qui défilent au cours du temps, en relevant leur vitesse. C’est la méthode la plus couramment utilisée en dynamique des fluides, parce que la position initiale des particules n’a que peu d’intérêt en comparaison de la connaissance du champ des vitesses, suffisante pour la description du mouvement du fluide.

Il existe également des modèles mixtes associant les descriptions Eulérienne et Lagrangienne (Riemslogh et al. [65]). Bien entendu, ces deux descriptions sont équivalentes et un simple changement de variable permet de passer de l’une à l’autre. Dans la description eulérienne de l’écoulement, la dérivée partielle d’une grandeur quelconque  $\varphi$  de l’écoulement correspond au taux de variation local de la grandeur, alors que le taux de variation total est nécessaire pour une description Lagrangienne. La relation entre les deux descriptions fait apparaître alors un terme convectif ou advectif, qui est un produit scalaire entre le vecteur de vitesse  $\mathbf{v}$  et l’opérateur gradient  $\nabla$ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi. \quad (2. 1)$$

Ce type de dérivée s’appelle la dérivée particulière et c’est un opérateur différentiel applicable sur une fonction scalaire ou vectorielle. Les deux descriptions présentent chacune

leur utilité suivant le type de problème à étudier. Dans le cadre du travail présenté dans ce mémoire, la description retenue est celle d'Euler.

### 3 Équations fondamentales de la dynamique des fluides

Dans les diverses disciplines de la physique, lorsque le transfert d'une quantité se fait en vérifiant sa conservation, on peut établir une équation reliant l'évolution de cette quantité dans le temps à sa variation dans l'espace. Cette équation est appelée loi de bilan, ou encore équation de conservation de la grandeur si celle-ci est conservative. Cette loi est établie sous deux formes, intégrale ou locale. Pour tout ce qui suit, les équations sont écrites sous leur forme locale, en utilisant une description Eulérienne. L'intégration spatiale est assurée dans un second temps par la méthode des éléments finis. Il existe parfois, des sources locales qui font varier la grandeur étudiée ; dans ce cas l'équation de conservation portant sur cette grandeur n'est pas homogène, mais dépend de la production de sources, par l'introduction d'un terme supplémentaire, appelé "terme source" au second membre.

L'écoulement d'un fluide peut être uniforme ou non uniforme, à une, deux, ou trois dimensions, stationnaire ou instationnaire, rotationnel ou non, laminaire ou turbulent. L'écoulement des fluides peut donc être un phénomène complexe et difficile à analyser mathématiquement, car les particules de fluide en mouvement peuvent se déplacer avec des vitesses et des accélérations différentes. Pour un écoulement rotationnel d'un fluide newtonien, des forces de cisaillement, dues à la viscosité du fluide, s'exercent entre les particules du fluide avec une intensité plus forte au voisinage des limites solides de l'enceinte en raison de la condition d'adhérence. En dynamique des fluides, certains paramètres physiques jouent un rôle plus important que d'autres : généralement, la masse volumique et la viscosité sont des paramètres dominants, contrairement au cas de l'hydrostatique pour lequel le poids du fluide est l'effet dominant. L'analyse de l'écoulement est complexe car les propriétés du fluide varient simultanément avec la pression et la température ; il faut donc tenir compte d'une loi d'état et des principes de la thermodynamique. En dynamique, les trois notions importantes qui régissent le mouvement d'un fluide se résument dans le principe de la conservation de la masse, le principe de conservation de la quantité de mouvement et le principe de la conservation de l'énergie. La résolution de ces équations aux dérivées partielles se fait souvent en admettant des hypothèses simplificatrices. Ainsi, pour les problèmes

d'écoulement, il peut être fait appel à des méthodes semi-empiriques ou des résultats expérimentaux. De nos jours, grâce aux gains de vitesse de calcul et de capacité mémoire des ordinateurs, la simulation numérique des écoulements de fluides est devenue accessible pour une large gamme d'applications, et constitue une discipline scientifique à part entière. Elle est devenue un outil très précieux, voire indispensable, dans de nombreux domaines (en astrophysique et en météorologie par exemple), car elle remplace souvent l'expérience en laboratoire, en particulier quand la réalisation de celle-ci est coûteuse ou impossible.

De nombreux fluides usuels comme l'eau et l'air se comportent, avec une excellente approximation, comme des fluides Newtoniens, c'est-à-dire que le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire de la partie symétrique du tenseur des déformations (hypothèse de Newton) et le flux de chaleur est proportionnel au gradient de la température (loi de Fourier). En l'absence de termes sources, les équations de conservation (Landau et al. [66]) pour ce type de fluide sont celles présentées ci-dessous.

### 3.1 Conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse traduit le fait que la masse totale contenue dans un système physique isolé reste constante au cours de l'évolution de ce système ; autrement dit, il n'y a ni apparition ni disparition de matière dans ce volume. Elle s'écrit sous sa forme locale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $t$  est le temps et  $\mathbf{v}$  désigne le vecteur de la vitesse particulaire.

L'équation (2.2) est applicable en tout point d'un fluide en mécanique des milieux continus. Elle est souvent désignée sous le nom d'équation de continuité. Deux cas particuliers sont à considérer :

(i) Le cas d'un fluide incompressible, qui signifie que la masse volumique d'un tel fluide est supposée constante par rapport au temps au cours du mouvement (elle n'est pas forcément homogène en espace) dans une description "Lagrangienne"  $d\rho/dt = 0$ ; l'équation de conservation de la masse prend alors une forme particulièrement simple ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Plus concrètement, l'incompressibilité d'un fluide implique que le débit volumique est conservé. Les conditions dans lesquelles un

fluide peut être considéré comme incompressible peuvent se réduire dans la plupart des cas à un nombre de Mach d'écoulement très petit devant l'unité  $M_a \ll 1$ . Cette condition est remplacée par  $M_a \ll \sqrt{Re}$ , où  $Re$  désigne le nombre de Reynolds de l'écoulement, dans le cas où l'écoulement est dominé par les effets de la viscosité. Elle n'est pas vérifiée pour plusieurs applications (aéronautique, ondes de chocs, etc.).

(ii) Le cas d'un écoulement stationnaire où la masse volumique du fluide en un point du fluide est indépendante du temps dans une description "Eulérienne"  $\partial\rho/\partial t = 0$  (cette condition est non valide pour un fluide diphasique), mais peut varier d'un point en un autre (par exemple : l'eau salée des océans, stratifiée du fait de la concentration variable de sel). Les particules fluides peuvent alors être soumises à une accélération. Dans ce cas, l'équation (2.2) devient  $\rho\nabla\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla\rho = 0$ .

### 3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Par définition, la quantité de mouvement est la grandeur physique résultant du produit de la vitesse et de la masse d'un objet, elle fait partie des valeurs qui se conservent lors des interactions entre les éléments d'un système. Il en résulte le principe fondamental de la dynamique, qui indique que la variation de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme de toutes forces extérieures appliquées sur ce système,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}, \quad (2.3)$$

où  $p$  est la pression et  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$  est le tenseur de contraintes visqueuses qui, pour un fluide newtonien, prend la forme  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \mu(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta\nabla\cdot\mathbf{v}$ . Dans cette expression,  $\mu$  est la viscosité dynamique de cisaillement et  $\eta = \xi - 2\mu/3$ , où  $\xi$  est la viscosité dynamique de volume du fluide. Cette quantité  $\xi$  est généralement négligée selon l'hypothèse de Stokes  $3\eta + 2\mu = 0$ , (cette hypothèse se révèle inexacte pour des gaz polyatomiques mais elle est pourtant souvent utilisée pour l'air). L'équation (2.3) peut encore s'écrire, d'après la relation (2.1),

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (2.4)$$

où le terme convectif  $(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$  est un tenseur du second ordre qui représente le flux de quantité de mouvement. Le symbole  $\otimes$  désigne le produit tensoriel.

En dehors des couches limites visqueuse et thermiques à proximité des parois, les effets de viscosité et de conduction de la chaleur peuvent être négligés. En particulier, les contraintes visqueuses étant négligés, les particules de fluide ne peuvent pas avoir de mouvement rotationnel autour de leur centre de masse. Pour un tel fluide dit "idéal", l'équation (2.4) est alors désignée sous le nom de l'équation d'Euler.

### 3.3 Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie est un principe physique selon lequel l'énergie totale d'un système isolé est invariante au cours du temps, même si elle change de forme. Elle mentionne qu'à chaque instant la dérivée particulière de l'énergie d'un système est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système et du taux de chaleur reçue par ce système. Il est commode d'utiliser l'équation de bilan d'entropie,

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + E_{dis}, \quad (2.5)$$

où  $T$ ,  $S$  et  $\lambda$  sont respectivement, la température, l'entropie massique et la conductivité thermique du fluide. Le terme  $E_{dis} = \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \nabla \mathbf{v}$  traduit la dissipation de l'énergie cinétique par effet de viscosité.

Par définition, l'entropie est une fonction d'état qui sert à mesurer le degré de désordre d'un système. Les gaz, contrairement aux solides et aux liquides qui sont des phases condensées, sont fortement compressibles et donc sensibles à la pression. Il est alors possible d'établir une relation qui exprime la variation d'entropie en fonction de la température et de la pression,

$$T ds = C_p dT + h dp. \quad (2.6)$$

En reportant cette relation dans l'équation (2.5), l'équation de l'énergie prend la forme suivante,

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} + \rho h \frac{dp}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + E_{dis}, \quad (2.7)$$

où  $C_p$  est la capacité thermique massique à pression constante et où  $h$  est un coefficient calorimétrique,  $h = -(C_p - C_v)/\hat{\beta}$ , avec  $C_v$  la capacité thermique massique à volume constant et  $\hat{\beta} = (\partial p/\partial T)_\rho$  l'augmentation de la pression par unité d'augmentation de la température à masse volumique constante.

#### 4 Séparation des échelles de temps

L'écoulement redressé et le transfert thermique développés par un champ acoustique sont des phénomènes lents (à l'échelle de plusieurs périodes acoustiques) résultant des phénomènes non linéaires d'un mouvement oscillant rapide (à l'échelle d'une période acoustique), liés à la propagation acoustique dans le fluide. Le mot "lent" se réfère à un temps long et non à une vitesse faible, même si les vitesses particulières d'acoustique et de mouvement secondaire restent, en pratique, assez modérées. La propriété de compressibilité du fluide et le mouvement acoustique associé constituent un effet moteur pour l'écoulement lent.

Les phénomènes rapides (acoustiques) font apparaître de forts gradients de vitesse, de masse volumique et de température, en particulier dans les couches limites acoustiques, qui sont à l'origine des sources excitatrices pour l'écoulement redressé (transfert de quantité de mouvement) et pour le transfert de chaleur (transfert d'énergie). C'est ainsi que, pour étudier les phénomènes lents, il convient tout d'abord de décrire le champ acoustique. L'étude des oscillations acoustiques rapides et des phénomènes lents d'écoulement redressé et de transfert de chaleur peut se faire à deux échelles de temps suffisamment différentes pour être étudiées séparément : un temps court  $t_a$  est utilisé pour décrire les phénomènes rapides à l'échelle de la période acoustique  $\tau = 2\pi/\omega$  (régime harmonique pour la composante de l'acoustique linéaire), tandis qu'un temps long  $t_s$  est pertinent pour décrire le streaming et les phénomènes de transfert de chaleur à l'échelle de plusieurs périodes acoustiques. Chaque propriété du fluide  $\varphi$ , cinématique ou thermodynamique, est alors représentée par la superposition de deux contributions,

$$\varphi = \tilde{\varphi}(t_a) + \varphi_m(t_s), \quad (2.8)$$

où la partie quasi-statique  $\varphi_m$  représente la valeur moyenne temporelle par rapport à l'échelle rapide  $t_a$ ,  $\langle \varphi \rangle = \int_{t_s}^{t_s+\tau} \varphi dt_a / \tau = \varphi_m$  et où  $\tilde{\varphi}$  désigne une perturbation qui représente les petites oscillations rapides autour de la moyenne, telle que

$$\langle \tilde{\varphi} \rangle = \int_{t_s}^{t_s+\tau} \tilde{\varphi} dt_a / \tau = 0. \quad (2.9)$$

La méthode des approximations successives est utilisée pour résoudre le système d'équations [(2.2),(2.4),(2.7)]. Toute variable ou tout paramètre physique  $\varphi$  est alors écrit sous la forme

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2. \quad (2.10)$$

Dans cette série tronquée,  $\varphi_0$  désigne la valeur moyenne de  $\varphi$  à l'état d'équilibre du fluide au repos, sans mouvement ni aucune perturbation acoustique. Les autres termes successifs sont liés à la fois au champ acoustique et aux phénomènes induits : le premier terme  $\varphi_1$  correspond à une petite perturbation acoustique constituée d'oscillations temporelles à la pulsation fondamentale  $\omega$  avec  $\langle \varphi_1 \rangle = 0$ , et le second terme  $\varphi_2$  est utilisé pour décrire les effets non linéaires induits par le champ acoustique fondamental, comportant des quantités indépendantes du temps (continues) ainsi que des termes associés aux harmoniques supérieures ( de pulsation  $2\omega$ ,  $3\omega \dots$ ). Dans l'hypothèse d'une petite perturbation acoustique développant des effets faiblement non linéaires, il vient

$$\varphi_0 \gg \varphi_1 \gg \varphi_2 \quad (2.11)$$

La quantité moyenne totale  $\varphi_m$  est donc composée de la somme de la composante moyenne au repos  $\varphi_0$  et d'une correction  $\langle \varphi_2 \rangle$  représentant la contribution "lente" du champ acoustique. Cette contribution moyenne  $\langle \varphi_2 \rangle$  peut être négligée dans le cadre de l'acoustique linéaire selon l'équation (2.11).

## 5 Équations de l'acoustique en fluide thermovisqueux

Le modèle sur lequel repose la description numérique du champ acoustique doit prendre en compte les effets visco-thermiques qui se développent dans les couches limites

visqueuses et thermiques au voisinage d'une paroi, puisque ces effets sont à l'origine des phénomènes non linéaires lents que nous cherchons à étudier. Les équations du modèle acoustique sont obtenues à partir des équations de base [(2.2),(2.4),(2.7)], en admettant les hypothèses simplificatrices suivantes (Joly et al. [67]):

- le fluide thermovisqueux est homogène, initialement au repos et sans gradient de température moyen,
- seules les quantités à l'échelle de temps rapide  $\tilde{\varphi}(t_a)$  sont prises en compte,
- seules les petites perturbations acoustiques du premier ordre sont considérées (modèle linéaire).
- les effets convectifs (de second ordre) sont négligés.

Compte tenu de ces approximations, les équations de base sont ré-écrites sous la forme de deux équations différentielles couplées, l'une vectorielle portée sur la vitesse acoustique particulaire, et l'autre scalaire portée sur l'écart de température. L'utilisation de ces deux variables peut paraître inhabituelle pour un problème d'acoustique généralement représenté par une formulation faisant apparaître la pression acoustique, mais elle représente mieux les phénomènes de dissipation dans les couches limites thermovisqueuses, puisque ces deux variables sont sensibles aux effets de couche limite, contrairement à la pression. Par ailleurs, le choix de ces deux variables est également d'utiliser les méthodes numériques classiques pour la résolution. Cependant, la pression et les autres paramètres, comme la masse volumique par exemple, restent bien évidemment accessibles à partir de ces deux variables.

## 5.1 Formulation de l'acoustique linéaire

La présence d'une onde acoustique dans un milieu élastique est à l'origine des déformations locales qui se déplacent avec une vitesse qui ne dépend que des propriétés physiques du milieu considéré. Les relations qui décrivent l'évolution de cette perturbation sont les équations de base [(2.2),(2.4),(2.7)] écrites pour la petite perturbation acoustique  $\tilde{\varphi}$ , en tenant compte des hypothèses citées ci-dessus, ces équations prennent la forme suivante

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (2.12)$$

$$\rho_m \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} + (\eta_m + 2\mu_m) \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \mu_m (\nabla \otimes (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}})), \quad (2.13)$$

$$\rho_m T_m \left( \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla \tilde{T}). \quad (2.14)$$

avec  $t = t_a$ . Pour fermer le système d'équations, l'équation d'état de l'air et l'équation d'entropie massique (2.6) sont écrites pour la perturbation

$$\tilde{\rho} = \frac{\gamma_m}{c_0^2} (\tilde{p} - \hat{\beta}_m \tilde{T}), \quad (2.15)$$

$$\tilde{s} = \frac{C_{pm}}{T_m} \left( \tilde{T} - \frac{(\gamma_m - 1)}{\gamma_m \hat{\beta}_m} \tilde{p} \right). \quad (2.16)$$

Les variations d'autres propriétés du fluide, comme la viscosité  $\tilde{\mu}$  ou la conductivité thermique  $\tilde{\lambda}$ , sont négligées ici. Prenant en compte toutes ces hypothèses, l'ensemble des équations de conservations donnent les équations linéaires homogènes qui décrivent les petites oscillations du fluide :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t_a} = \hat{\beta}_m \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t_a} - \frac{\rho_m c_0^2}{\gamma_m} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t_a^2} - \left( \frac{c_0^2}{\gamma_m} + c_0 l_{vm} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + c_0 l'_{vm} \frac{\partial}{\partial t_a} \nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{\hat{\beta}_m}{\rho_m} \frac{\partial}{\partial t_a} \nabla \tilde{T} = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t_a} - \gamma_m l_{hm} c_0 \nabla \cdot (\nabla \tilde{T}) + \frac{\gamma_m - 1}{\gamma_m \hat{\beta}_m} \rho_m c_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.19)$$

où  $l_{vm} = \left( \frac{\eta_m + 2\mu_m}{\rho_m c_0} \right)$  et  $l'_{vm} = \frac{\mu_m}{\rho_m c_0}$  sont des longueurs caractéristiques visqueuses,

$l_{hm} = \frac{\lambda_m}{\rho_m c_0 C_{pm}}$  est la longueur caractéristique thermique.  $\gamma_m$  est le rapport des capacités

thermiques massique à pression constante  $C_{pm}$  et à volume constant  $C_{vm}$ . L'équation (2.17) exprime bien la pression acoustique en fonction des deux autres variables que sont la vitesse particulaire et la variation de température acoustique. Les détails du calcul pour obtenir cette formulation sont bien présentés en annexe A.

## 5.2 Approches pour le régime harmonique

Les équations aux dérivées partielles de la formulation de l'acoustique linéaire [(2.17)-(2.19)] décrivent le comportement dynamique du fluide pour une petite perturbation. La

méthode des éléments finis est utilisée pour leur résolution. Cette méthode fait partie des outils de mathématique appliquée. Elle permet de transformer un système d'équations en un système matriciel de même forme, en utilisant une discrétisation permettant de chercher une solution approchée. Classiquement, pour les problèmes de propagation d'ondes linéaires, on distingue l'approche fréquentielle de l'approche temporelle. La première est utilisée ici. Elle consiste à calculer la solution du régime harmonique établi. L'un des intérêts de cette approche est que la solution complexe recherchée ne dépend que des variables d'espace, car la dépendance en temps peut être factorisée. En choisissant une dépendance temporelle de la forme  $e^{-i\omega t}$ , la dérivée temporelle en notation complexe est  $\partial/\partial t = -i\omega$ , et les équations (2.18) et (2.19) prennent la forme suivante:

$$\nabla \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}} \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) + \omega^2 \tilde{\mathbf{v}} = D \nabla \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.20)$$

$$Q \nabla \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{I}}} \nabla \tilde{\mathbf{T}} \right) + i \omega \tilde{\mathbf{T}} = R \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.21)$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  est le tenseur similaire à celui rencontré en élasticité (il est défini en annexe B),

$D = -i\omega \frac{\hat{\beta}_m}{\rho_m}$ ,  $Q = \gamma_m l_{hm} c_0$  et  $R = \frac{(\gamma_m - 1)}{\gamma_m \hat{\beta}_m} \rho_m c_0^2$ . Ces deux équations forment le système

nécessaire et suffisant pour décrire toutes les quantités acoustiques au sein du fluide, y compris à l'intérieur des couches limites. Il est facile de les implémenter dans les codes de calculs en utilisant la forme coefficient des équations aux dérivées partielles. À partir de la solution de couple d'équations (2.20) et (2.21), il est possible d'exprimer la pression acoustique grâce à l'équation (2.17),

$$\tilde{p} = \hat{\beta}_m \tilde{\mathbf{T}} - i \frac{\rho_m c_0^2}{\gamma_m \omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.22)$$

## 6 Formulation des phénomènes lents de l'acoustique

Les équations qui régissent le comportement des phénomènes lents associés à la propagation d'une onde acoustique sont obtenues en conservant dans les équations de base, les deux composantes ("lente" et "rapide") de chaque paramètre (Eq. (2.8)). Par la suite, une prise de moyenne sur une période acoustique est effectuée afin d'éliminer les phénomènes

rapides et de ne garder que leurs contributions moyennes. L'utilisation de la vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$  comme variable permet aux équations décrivant les phénomènes lents de garder leur forme standard, où tous les termes de deuxième ordre en perturbations sont considérés comme des termes sources.

### 6.1 Vitesse de transport de masse

Compte tenu de la valeur moyenne  $\rho_m$  et de la perturbation rapide  $\tilde{\rho}$  de la décomposition (2.8), pour les variables de masse volumique  $\rho = \rho_m + \tilde{\rho}$  et de vitesse particulière  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m + \tilde{\mathbf{v}}$ , l'équation de continuité (2.2) prend la forme :

$$\frac{\partial(\rho_m + \tilde{\rho})}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_m + \tilde{\rho})(\mathbf{v}_m + \tilde{\mathbf{v}})) = 0 \quad (2.23)$$

Pour décrire les phénomènes acoustiques lents à grande échelle spatiale et temporelle, une moyenne temporelle est appliquée à l'équation (2.23) sur la période acoustique d'une oscillation harmonique. Cette étape a pour effet d'éliminer tous les termes de perturbation  $n\omega$  d'ordre impair (pour  $n = 1, 3, \dots$ ), ce qui donne :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t_s} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle) = 0. \quad (2.24)$$

Dans cette équation, la somme  $\rho_m \mathbf{v}_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle$  représente une densité totale du flux massique  $\mathbf{M}$  (flux de masse par unité de temps à travers une section normale), soit  $\rho_m \mathbf{v}_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle = \mathbf{M}$ . La quantité  $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{M}}{\rho_m} = \mathbf{v}_m + \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m}$  est donc homogène à une vitesse. Elle est appelée "vitesse de transport de masse". Elle est composée de la vitesse moyenne de l'écoulement redressé  $\mathbf{v}_m$

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{U} - \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle / \rho_m \quad (2.25)$$

et d'une quantité acoustique qui se présente comme le rapport entre la densité du flux massique acoustique  $\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle$  et la masse volumique moyenne  $\rho_m$ . En première approximation, le terme  $\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle$  peut être supposé égal à  $\langle \rho_1 \mathbf{v}_1 \rangle$ , en raison de l'approximation (2.11).

L'introduction de la vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$  dans l'équation de continuité (2.24) fournit la relation :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t_s} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0 \quad (2.26)$$

Cette nouvelle équation de conservation qui porte sur la vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$ , conserve une forme identique à celle de l'équation de base (2.2).

On peut noter que dans la définition de la vitesse moyenne de l'écoulement redressé (Eq. (2.25)), les variations spatiales et temporelles de la masse volumique moyenne  $\rho_m$  sont prises en compte, contrairement à la définition  $\mathbf{v}_m = \mathbf{U} - \langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle / \rho_0$  retenue dans la référence (Rudenko et al. [15]) où la masse volumique considérée est celle de l'état de base  $\rho_0$ . Cette vitesse est une variable fondamentale, bien adaptée à la modélisation des écoulements dans des dispositifs acoustiques, car elle prend en compte les variations de la masse volumique liées aux gradients de température et de pression des phénomènes de propagation acoustique.

## 6.2 Équations de conservation portée sur la vitesse de transport de masse

Le même développement est effectué à partir de la décomposition (2.8) sur les deux autres équations de conservation (2.4) et (2.7), afin d'obtenir les équations qui décrivent l'écoulement redressé en utilisant la vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$  comme variable. Après des calculs dont le détail est présenté en annexe C, le système d'équations qui régit le comportement des phénomènes lents prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t_s} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0 \quad (2.27)$$

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t_s} + \rho_m \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \nabla \cdot [p_m \underline{\mathbf{I}} + \mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) + \eta_m (\nabla \cdot \mathbf{U}) \underline{\mathbf{I}}] + \mathbf{F} \quad (2.28)$$

$$(\rho C_p) \left( \frac{\partial T_m}{\partial t_s} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_m \right) + (\rho h) \left( \frac{\partial p_m}{\partial t_s} + \mathbf{U} \cdot \nabla p_m \right) = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m) + q + \langle \mathbf{E}_{dis} \rangle \quad (2.29)$$

Ces équations de conservation gardent une forme habituelle des équations de base pour un problème de mécanique des fluides.

Écrites sous cette forme, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (2.28) fait apparaître une force excitatrice  $\mathbf{F}$  purement acoustique, composée de quatre termes  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$ , avec :

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla \cdot \langle \rho_m \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{F}_2 = \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle \otimes \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right), \quad (2.31)$$

$$\mathbf{F}_3 = \nabla \cdot \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \mathbf{I} \tilde{\eta} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \rangle, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{F}_4 = -\nabla \cdot \left( \mu_m \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) + \mathbf{I} \eta_m \left( \nabla \cdot \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \right). \quad (2.33)$$

Par ailleurs, écrit sous cette forme, l'équation de conservation de l'énergie (2.29) fait intervenir des capacités calorifiques totales  $(\rho C_p)'$  et  $(\rho h)'$ , qui sont la somme des contributions moyennes et fluctuantes,  $(\rho C_p)' = \rho_m C_{pm} + \langle \tilde{\rho} \tilde{C}_p \rangle$  et  $(\rho h)' = \rho_m h_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{h} \rangle$ . Le terme de source de chaleur  $q$  apparaissant dans l'équation de conservation de l'énergie (2.29) est la somme de cinq éléments,  $q = q_a + q_b + q_c + q_d + q_e$ . Ces sources s'expriment de la façon suivante :

$$q_a = \left\langle \left( \rho_m \tilde{C}_p + C_{pm} \tilde{\rho} \right) \left( \frac{d\tilde{T}}{dt_a} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla T_m \right) \right\rangle + (\rho C_p)' \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle, \quad (2.34)$$

$$q_b = \left\langle \left( \rho_m \tilde{h} + h_m \tilde{\rho} \right) \left( \frac{d\tilde{p}}{dt_a} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_m \right) \right\rangle + (\rho h)' \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle, \quad (2.35)$$

$$q_c = \nabla \cdot \langle \tilde{\lambda} \nabla \tilde{T} \rangle, \quad (2.36)$$

$$q_d = \left\langle \left( \rho_m \tilde{C}_p + C_{pm} \tilde{\rho} \right) \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \cdot \nabla \tilde{T} \right) \right\rangle + (\rho C_p)' \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \cdot \nabla T_m, \quad (2.37)$$

$$q_e = \left\langle \left( \rho_m \tilde{h} + h_m \tilde{\rho} \right) \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \cdot \nabla \tilde{p} \right) \right\rangle + (\rho h)' \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \cdot \nabla p_m, \quad (2.38)$$

où  $\frac{d\varphi}{dt_a}$  représente la dérivée particulière par rapport au temps rapide  $\frac{d\varphi}{dt_a} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_a} + \mathbf{U} \cdot \nabla \varphi$ . Le

terme moyen  $\langle E_{dis} \rangle$  apparaissant dans cette même équation représente la dissipation de

l'énergie cinétique par effet de viscosité. Il est composé de neuf contributions,  $\langle E_{dis} \rangle = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 + E_8 + E_9$ , où

$$E_1 = \mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) (\nabla \mathbf{U}) + \mathbf{I} \eta_m (\nabla \cdot \mathbf{U}) (\nabla \mathbf{U}), \quad (2.39)$$

$$E_2 = (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle + \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{U}) \langle \tilde{\eta} (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle, \quad (2.40)$$

$$E_3 = \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) \rangle (\nabla \mathbf{U}) + \mathbf{I} \langle \tilde{\eta} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \rangle (\nabla \mathbf{U}), \quad (2.41)$$

$$E_4 = \mu_m \langle (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle + \mathbf{I} \eta_m \langle (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle, \quad (2.42)$$

$$E_5 = -\mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right) - \mathbf{I} \eta_m (\nabla \cdot \mathbf{U}) \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right), \quad (2.43)$$

$$E_6 = -\langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) \rangle \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right) - \mathbf{I} \langle \tilde{\eta} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \rangle \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right), \quad (2.44)$$

$$E_7 = -\mu_m \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle + \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right)^T \right) (\nabla \mathbf{U}) - \mathbf{I} \eta_m \left( \nabla \cdot \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right) (\nabla \mathbf{U}), \quad (2.45)$$

$$E_8 = -\left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle + \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right)^T \right) \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle - \mathbf{I} \left( \nabla \cdot \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right) \langle \tilde{\eta} (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle, \quad (2.46)$$

$$E_9 = \mu_m \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle + \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right)^T \right) \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right) + \mathbf{I} \eta_m \left( \nabla \cdot \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right) \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right). \quad (2.47)$$

### 6.3 Limitation à l'ordre 2 pour les termes sources

L'analyse de l'ordre de grandeur des termes sources  $\mathbf{F}$  et  $q$  peut conduire à négliger quelques composantes et à simplifier les équations de conservations (2.28) et (2.29) du modèle. Dans le développement en perturbation, certains termes sont d'ordre supérieur aux autres et peuvent par conséquent être négligés, car ils sont alors, compte tenu de l'hypothèse d'une petite perturbation acoustique (Eq. (2.11)), bien plus petits. Comme la vitesse de l'écoulement redressé (Eq. (2.25)) est une vitesse de second ordre en perturbation, tous les termes sources seront limités au deuxième ordre, en négligeant les termes d'ordre supérieur.

La formulation utilisée pour ce travail est basée sur un développement au deuxième ordre des effets non linéaires de l'acoustique.

Ainsi, pour commencer par la force  $\mathbf{F}$  du système d'équations [(2.30)-(2.33)], tous les termes sont d'ordre deux en perturbation, sauf la composante  $\mathbf{F}_2$  qui est d'ordre quatre. Cette composante est négligeable devant toutes les autres composantes, et elle ne sera pas prise en compte dans notre modélisation. La composante  $\mathbf{F}_1$  dérive d'un flux de quantité de mouvement d'origine acoustique ; ce terme est la divergence du "tenseur de Reynolds" qui caractérise la corrélation entre des composantes instantanées de la vitesse fluctuante  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Les deux autres composantes de force,  $\mathbf{F}_3$  et  $\mathbf{F}_4$ , dérivent de deux tenseurs de contraintes visqueuses. Le terme  $\mathbf{F}_3$  est la divergence de la contribution moyenne d'un tenseur de contraintes visqueuses relative à la perturbation acoustique (combinant la vitesse particulière acoustique et la fluctuation de viscosité). La quantité  $\mathbf{F}_4$  est la divergence d'un tenseur de contraintes visqueuses relatif à une vitesse spécifique, combinant la vitesse particulière acoustique et la variation relative de masse volumique, définie par  $\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle / \rho_m$ .

Concernant maintenant les termes source de l'équation d'énergie (2.29) : en négligeant les composantes de quatrième ordre du terme source  $q$  au second membre, le système d'équations [(2.34-2.38)] est remplacé par :

$$q_a = \left\langle \left( \rho_m \tilde{C}_p + C_{pm} \tilde{\rho} \right) \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t_a} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla T_m \right) \right\rangle + \left( \rho_m C_{pm} \right) \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle, \quad (2.48)$$

$$q_b = \left\langle \left( \rho_m \tilde{h} + h_m \tilde{\rho} \right) \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t_a} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_m \right) \right\rangle + \left( \rho_m h_m \right) \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle, \quad (2.49)$$

$$q_c = \nabla \cdot \langle \tilde{\lambda} \nabla \tilde{T} \rangle, \quad (2.50)$$

$$q_d = C_{pm} \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle \cdot \nabla T_m, \quad (2.51)$$

$$q_e = h_m \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle \cdot \nabla p_m, \quad (2.52)$$

où l'équation (2.50) est une loi de Fourier relative à la perturbation acoustique.

Les composantes  $q_a$  (Eq. (2.48)) et  $q_b$  (Eq. (2.49)) rendent compte de la chaleur sensible, du stockage / déstockage d'énergie mécanique et des effets convectifs développés par la perturbation acoustique, combinant la vitesse particulaire acoustique, les fluctuations associées de masse volumique et de propriétés thermodynamiques du fluide, respectivement pour les fluctuations de température et de pression. Les derniers termes de ces expressions,  $\langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle$  et  $\langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle$  expriment une partie de l'effet thermoacoustique. Dans le système d'équations [(2.39)-(2.47)], tous les termes sont négligeables car ils sont du quatrième ordre (la vitesse de transport de masse est de deuxième ordre), sauf la composante  $E_4$  d'ordre deux. La quantité  $E_4$  est équivalente au terme de dissipation de l'énergie cinétique par effet de viscosité associée à la vitesse particulaire acoustique.

Il faut noter qu'un développement similaire des équations de base a déjà été présenté par Amari dans son document de thèse [68], dans lequel, toutefois,  $q_d$  et  $q_e$  n'étaient pas mentionnés dans l'équation d'énergie ainsi que six autres contributions dans le terme de la dissipation d'énergie  $\langle E_{dis} \rangle$ .

## 7 Traitement numérique

La première partie du chapitre contient les fondamentales mathématiques d'un problème général de propagation acoustique en milieu fluide dissipatif. Le problème est décrit à l'aide des équations aux dérivées partielles. Généralement, il existe deux voies pour résoudre ce genre d'équation : les méthodes analytiques et les méthodes numériques. La voie analytique a l'avantage de la concision et de la précision, d'ailleurs c'est pour cette raison que la solution obtenue est appelée "solution exacte". Bien qu'elle joue un rôle important dans la recherche fondamentale, la méthode analytique est applicable seulement à des cas relativement simples. Par conséquent, la solution analytique ne peut pas faire face à des problèmes pratiques, qui sont associés à des conditions aux limites complexes et à un degré élevé de non linéarité (comme en thermoacoustique). Tandis que la voie numérique est applicable à différents types de conditions aux limites et la solution obtenue, appelée "solution approximative", peut faire face à des problèmes non linéaires. Jusqu'à présent, les méthodes les plus largement utilisées dans la simulation numérique sont la méthode des

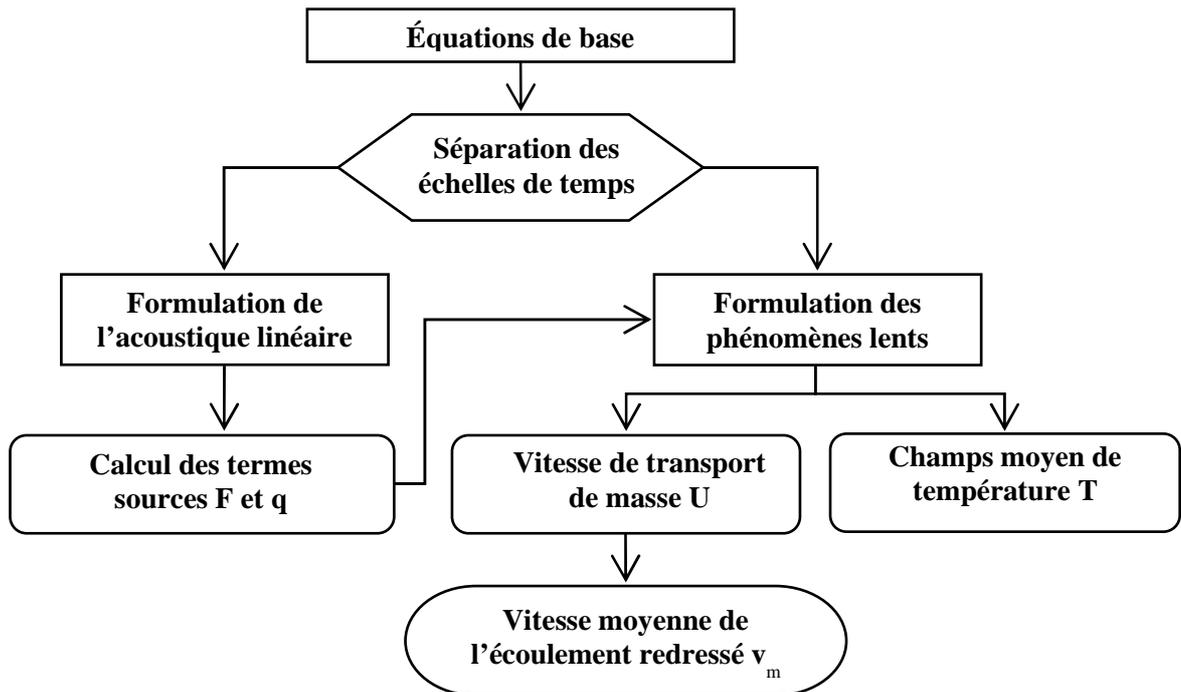
éléments finis (FEM) (Wait et al. [69], Fang et al. [70]) et celle des différences finies (FDM) (Fang et al. [70]), leur caractéristique commune étant la discrétisation des fonctions continues.

Dans ce travail, la méthode numérique utilisée est celle des éléments finis, d'où le choix du code commercial "*COMSOL Multiphysics*" qui permet une analyse de différentes applications. Les simulations numériques faites ici sont des simulations directes qui s'avèrent coûteuses en terme du temps de calcul et de mémoire vive de la machine utilisée dans certaines configuration, comme le calcul de l'écoulement redressé dans un résonateur annulaire.

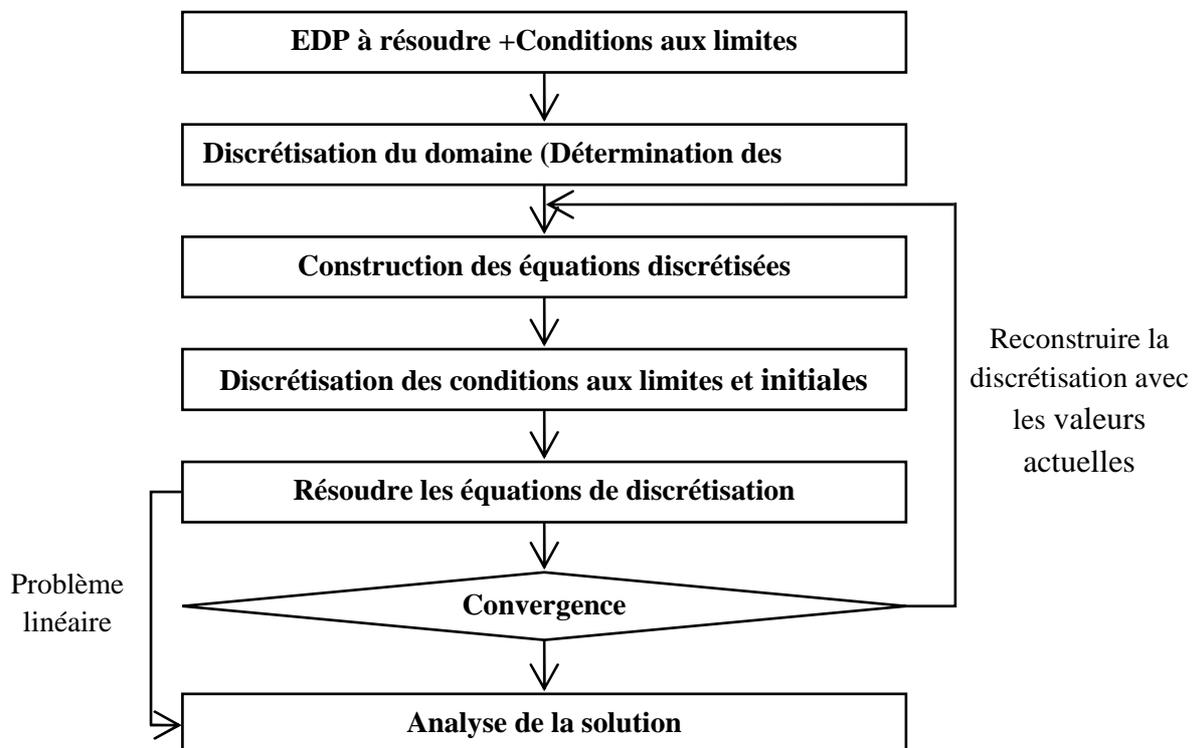
## 7.1 Schéma numérique

L'outil numérique doit pouvoir permettre d'inclure facilement l'ensemble des formulations qui prennent en compte tous les phénomènes mis en jeu dans un système acoustique. La procédure utilisée pour obtenir la solution transitoire pour les phénomènes lents d'acoustique et stationnaire pour l'acoustique est résumée dans la figure 2.1 : premièrement, le champ acoustique est résolu numériquement en régime harmonique établi en utilisant la formulation [(2.20)-(2.21)], afin de pouvoir calculer les forces d'excitation  $\mathbf{F}$  (Eq. (2.30),(2.32),(2.33)) et les termes sources  $q$  (Eq. (2.8)-(2.52)) et  $E_4$  (Eq. (2.42)) pour le transfert de la chaleur. Ensuite, les secondes membres des équations de la dynamique pour le streaming (transfert de quantité de mouvement et transport de masse) et de transfert d'énergie pour le champ thermique, qui traduisent l'excitation des phénomènes acoustique lents sont calculés à partir de la solution obtenue. Enfin, compte tenu seulement des grandes échelles de temps, la vitesse de transport de masse est calculée numériquement en régime transitoire afin de déterminer la vitesse moyenne de l'écoulement redressé et la distribution de la température.

Le diagramme de la figure 2.2 présente le principe de la résolution par la méthode des éléments finis : l'idée fondamentale est de remplacer le champ de variables physiques (champs de vitesse, champ de température, etc.) qui sont continues dans les coordonnées spatiales et temporelles par une série de points de discrétisation finie (appelés "nœuds"), puis d'établir l'équation algébrique (équation de discrétisation), et enfin, résoudre l'équation algébrique établie pour obtenir la valeur approchée de la variable à résoudre.



*Figure 2.1 - Illustration schématique présentant la méthode numérique de résolution des formulations de l'acoustique linéaire et des phénomènes lents.*



*Figure 2.2 - Diagramme de résolution numérique des problèmes physiques par la méthode des éléments finis.*

## 7.2 Condition de stabilité numérique

La condition de stabilité numérique dépend fortement de l'échelle utilisée pour discrétiser le domaine. Dans le modèle, la plus grande échelle spatiale est la longueur caractéristique du milieu  $L$  et la plus petite échelle est la couche limite visqueuse  $\delta_v$ . Pour une bonne résolution numérique de la couche limite, on doit utiliser un nombre suffisant de points de discrétisation sur l'épaisseur, car les couches limites acoustiques sont le lieu de très forts gradients de vitesse et de température. Ce problème ne se poserait pas pour une formulation en pression, qui ne nécessite pas un tel nombre de points, car la pression est uniforme et n'est pas sensible aux effets de couches limites thermovisqueuses. Le calcul numérique doit s'adapter aux plus petites échelles de temps et d'espace. Ce calcul peut être rendu peu efficace en raison de la limitation de petit pas de temps imposée par la condition de stabilité numérique :

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta L} \max(c_0 + |v_m|) \leq 1 \quad (2.53)$$

où  $\Delta t$  est l'intervalle temporel,  $\Delta L$  est l'intervalle dimensionnel, et  $v_m$  est la composante lente de la vitesse. Ce nombre sans dimension  $C$  est appelé "nombre de courant". La condition (2.53), également connue sous le nom de condition "CFL" (Courant - Friedrichs - Lewy), est utilisée en mathématique et plus particulièrement pour le calcul par éléments finis, comme condition de convergence pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles. Ce nombre peut être simplifié dans le cas d'un régime acoustique harmonique établi, dont les termes liés au mouvement lent de fluide (écoulement redressé) peuvent toujours être traités explicitement avec une condition CFL liée seulement à la vitesse de l'écoulement redressé :

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta L} \max(v_m) \leq 1 \quad (2.54)$$

Cette condition s'applique seulement à l'échelle du temps long où  $\Delta t = \Delta t_s$ .

## 7.3 Présentation de COMSOL Multiphysics

Le logiciel commercial COMSOL Multiphysics a été créé il y a plus de deux décennies à Stockholm sous le nom de "Femlab". Il a depuis bénéficié de plusieurs améliorations et il est utilisé par de nombreux laboratoires de recherches en Europe et aux

États-Unis. Il offre des possibilités d'étudier de nombreux phénomènes physiques et leurs couplages [71].

### 7.3.1 Description du simulateur COMSOL Multiphysics

Ce code constitue un ensemble complet de simulation de l'interface graphique pour la construction de la géométrie et du maillage, jusqu'au post-traitement ou l'interprétation des résultats. Il propose plusieurs types de solveurs directs et itératifs pour l'analyse temporelle ou stationnaire, et un post-traitement complet et facile à manier. COMSOL Multiphysics utilise la méthode des éléments finis qui consiste à rechercher une solution approchée sur une discrétisation de la géométrie en éléments reliés par des nœuds. La méthode des éléments finis consiste à chercher la solution d'un système matriciel de type  $\mathbf{KV} = \mathbf{Q}$ , où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur,  $\mathbf{V}$  est le vecteur inconnu, et  $\mathbf{Q}$  le vecteur des conditions initiales et limites. La solution est interpolée sur une base de fonctions (polynômes de Lagrange, par exemple).

### 7.3.2 Étapes principales de construction d'un modèle

Un modèle est constitué d'un ensemble d'équations, de conditions aux limites et de conditions initiales. L'ensemble est défini sur une géométrie décomposée en sous domaines et limitée par des frontières. La mise au point d'une simulation avec COMSOL Multiphysics comprend d'abord la description physique du problème (variables, équations, conditions aux limites et conditions initiales), ensuite l'implémentation de ce modèle, enfin la vérification des résultats obtenus par comparaison avec les solutions analytiques (si elles existaient) ou avec des données expérimentales. La phase de l'implémentation se décompose en cinq étapes :

- **Géométrie (domaine d'étude)** : COMSOL Multiphysics propose un outil de conception de géométries 1D, 2D et 3D. L'import des géométries est effectivement permis, si nous disposons du module d'import CAO (Conception Assistés par Ordinateur). La géométrie est décrite par un ensemble de points, courbes et surfaces. Elle est le support de génération du maillage.
- **Physique** : Dans cette étape, les propriétés physiques des équations ainsi que les conditions initiales sont définies sur la géométrie, tandis que les conditions aux limites sont définies sur les frontières externes par rapport au domaine d'étude.
- **Maillage** : Il correspond à la discrétisation spatiale de la géométrie. Les mailles sont de formes polygonales en 2D (triangle ou quadrangle) et polyédriques en 3D (tétraèdre, prisme, brique, ou cube). Dans certains cas 3D, le domaine est discrétisé

difficilement de façon exacte. Le maillage est généré automatiquement ou importé, ou encore paramétré par l'utilisateur qui peut choisir le type de mailles. Le nombre de nœuds, le nombre de variables inconnues et l'ordre des fonctions d'interpolation déterminent le nombre de degrés de liberté (DDL) du problème à résoudre. Plus le nombre de mailles est important, plus le problème a besoin de mémoire vive de la machine. Le point faible de COMSOL Multiphysics serait peut être dans cette étape, car ce code n'offre pas un maillage adaptatif pour les calculs temporels, et les mailles sont isotropes alors que pour un problème tel que le nôtre, un maillage anisotrope serait préféré. L'utilisation d'un maillage adaptatif pour un problème de propagation acoustique en fluide thermovisqueux est discutée par (Joly [72]).

- **Choix de Solveur** : L'utilisateur peut choisir un type d'analyse (stationnaire, temporelle, modale ou paramétrée) et l'algorithme de résolution. COMSOL Multiphysics offre des solveurs basés sur deux types de méthodes de résolution : (i) les solveurs directs qui sont précis et rapides mais demande beaucoup de mémoire vive, (ii) les solveurs itératifs, dont la convergence est soumise à certaines conditions, moins précis mais plus économiques en mémoire. Il n'y a pas de solveur plus précis qu'un autre, puisque tous les solveurs devraient répondre aux mêmes critères de convergence abordés au paragraphe (§7.3.3).

- **Post-traitement** : Cette étape est réservée à l'analyse des résultats. L'interface graphique de COMSOL Multiphysics offre la possibilité de voir les résultats sur la géométrie entière, sur des coupes ou sur seulement des éléments. L'intégration spatiale de n'importe quelle variable est également disponible, sans oublier la possibilité de pouvoir les exporter sous différents formats.

### 7.3.3 Convergence de la solution

La méthode numérique consiste à interpoler la solution sur une discrétisation de la géométrie (maillage). Une solution numérique est acceptable quand le critère de convergence est établi, c'est-à-dire lorsque le résultat numérique est très proche de la solution exacte. Cette dernière est justement inconnue, elle n'est accessible que dans certains cas pour des géométries simples. Donc une estimation d'erreur est construite à partir d'un développement de Taylor au second ordre de l'opérateur différentiel du système d'équations. La convergence est atteinte quand la valeur de l'erreur estimée est inférieure à une valeur seuil. L'estimation d'erreur n'a de sens que dans le cas d'un système d'équation non linéaire et/ou temporel, car

pour un cas linéaire la solution correspond à l'inversion de la matrice du système sans vérification :

- L'erreur pour le cas non linéaire est  $err = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_i \left(\frac{|E_i|}{W_i}\right)^2\right)}$ , où  $N$  est le nombre de

nœuds,  $E$  est l'estimation d'erreur, et  $W$  est le poids de chaque nœud (égale à 1 par défaut). Cette valeur doit être inférieure à un facteur défini par l'utilisateur (sa valeur par défaut est de  $10^{-6}$ ).

- Pour un calcul temporel, il faut que la solution vérifie le critère

$\sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_i \left(\frac{|E_i|}{A_i + R|U_i|}\right)^2\right)} < 1$ , à chaque pas de temps, où  $A_i$  est la tolérance absolue

(valeur par défaut  $10^{-3}$ ), et  $U_i$  est la tolérance relative (valeur par défaut  $10^{-2}$ ).

La convergence traduit l'adéquation de la solution numérique avec la solution approchée du modèle. La qualité (numérique) de la solution obtenue et sa stabilité dépendent du raffinement du maillage et du pas de temps choisi afin de satisfaire la condition CFL présentée dans l'équation (2.54).

## Chapitre 3

### MODÉLISATION DE L'ÉCOULEMENT REDRESSÉ

*La formulation présentée dans le chapitre précédent est utilisée pour décrire la génération de l'écoulement redressé dans deux types de résonateurs : le premier est de géométrie droite qui est le siège d'une onde stationnaire et le second est un résonateur annulaire à onde progressive. La validation de la méthode numérique pour l'écoulement redressé est obtenue en comparant les résultats de calcul à ceux obtenus auparavant de façon analytique sur les mêmes géométries (pour cette première partie, le champ harmonique est issu d'une solution analytique). Ensuite, des modèles entièrement numériques (pour le champ harmonique puis celui de l'écoulement) permettent d'apprécier l'effet de courbure d'un résonateur annulaire et la présence d'un stack sur l'écoulement redressé.*

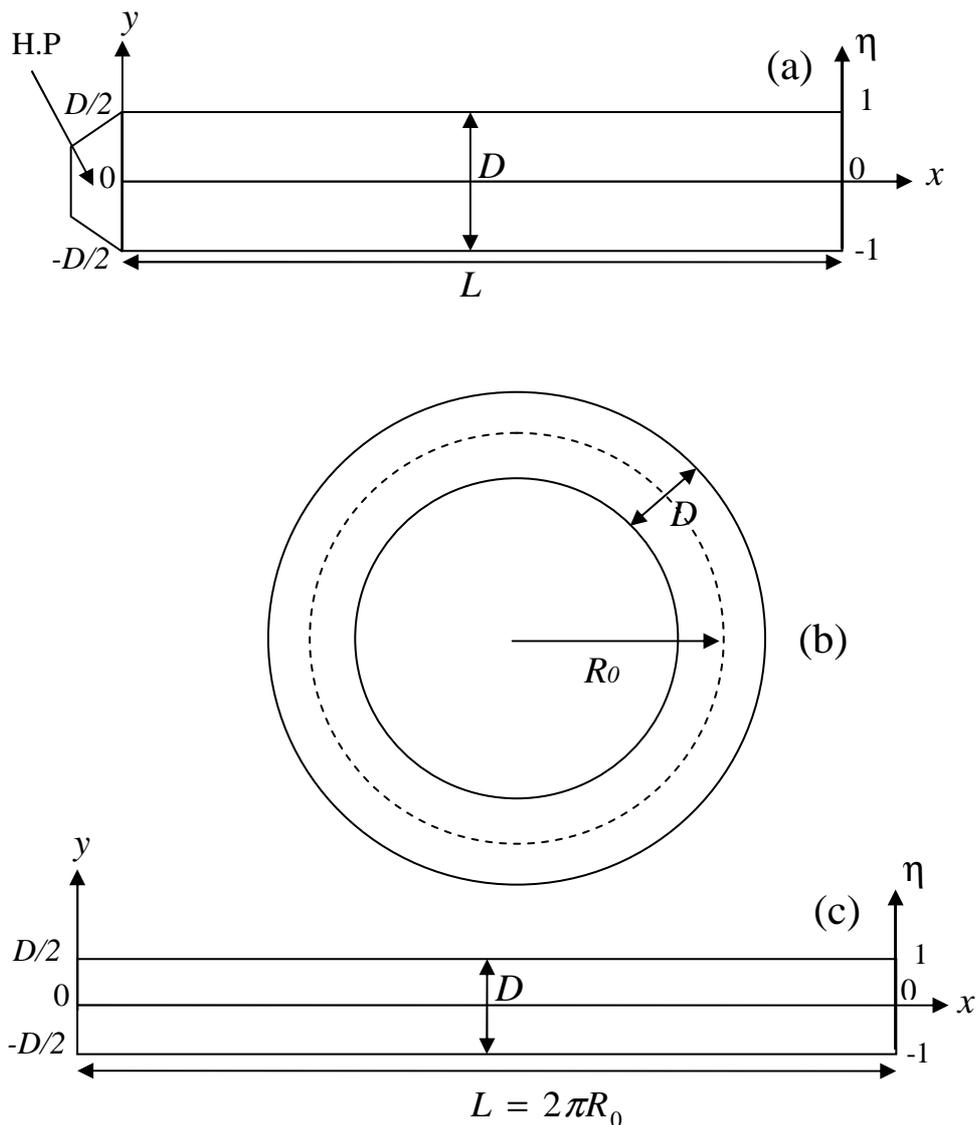
## 1 Introduction

La formulation analytique présentée dans le deuxième chapitre est utilisée ici pour décrire numériquement les écoulements redressés qui prennent place dans différents résonateurs acoustiques. Deux types de résonateurs sont considérés : les résonateurs droits à ondes stationnaires d'une part et les résonateurs annulaires à ondes progressives d'autre part. Dans le cadre de ce travail, seuls des résonateurs constitués de deux plaques parallèles de longueur finie dans la direction de l'axe principal du résonateur et de dimension infinie dans la direction perpendiculaire à cet axe principal sont modélisés. Cette hypothèse autorise l'utilisation d'un modèle à deux dimensions pour décrire le comportement du résonateur.

Les résonateurs à onde stationnaires considérés dans ce chapitre sont constitués d'un guide de longueur  $L$ , dont la distance entre deux parois en regard l'une de l'autre est notée  $D$ . Une onde acoustique est générée à l'intérieur du résonateur par un haut-parleur situé à une des extrémités du guide (Fig. 3.1.(a)). Les résonateurs à ondes progressives considérés dans ce chapitre sont représentés schématiquement dans la figure 3.1.(b). Ils sont constitués de deux parois annulaires espacées d'une distance  $D$ . La ligne médiane repérée en pointillés sur la figure 3.1.(b) forme un cercle de rayon  $R_0$  dont le périmètre  $L = 2\pi R_0$  constitue la longueur déroulée du guide. Suivant l'application considérée, une onde acoustique peut être générée dans le résonateur soit par le biais de deux haut-parleurs judicieusement placés le long du résonateur (dans ce cas le résonateur est appelé "résonateur de Ceperley"), soit par un grand nombre de sources sonores réparties le long des parois du résonateur. Dans ce dernier cas, le système est appelé "Acoustitron". Pour chaque type de résonateur (droit ou annulaire), différents régimes d'interaction onde/parois sont étudiés, correspondant à différents rapports entre l'épaisseur  $\delta_v$  de couche limite visqueuse (se développant sur les parois du guide) et la distance  $D$ . Un régime dit "quasi-adiabatique" (noté QA) est obtenu pour  $\delta_v/D \ll 1$  ; Un régime dit "quasi-isotherme" (noté QI) est obtenu pour  $(\delta_v/D)^2 \gg 1$  (Gusev et al. [6]). L'épaisseur de couche limite étant inversement proportionnelle à la racine carrée de la fréquence fixée par la longueur  $L$  du résonateur, les différents régimes d'interaction étudiés sont obtenus (en pratique) en considérant différent couples  $(L, D)$ .

Afin de valider la formulation du problème et la procédure du calcul numérique des écoulements redressés présentées au deuxième chapitre, l'étude porte dans un premier temps sur des configurations correspondant à des cas étudiés analytiquement dans la littérature, et

considérés ici comme des cas de références. Il s'agit, d'une part, des écoulements redressés décrits par Lawrenson et al. [73] dans un acoustitron (§ 2.3) et, d'autre part, des écoulements redressés décrits par Bailliet et al. [20] dans un guide droit (§ 2.4.1). Pour ces deux cas, seuls les écoulements redressés sont calculés de manière numérique et comparés aux résultats analytiques correspondants, les champs acoustiques nécessaires au calcul des écoulements redressés étant pour leur part obtenus de manière analytique à partir des formulations proposées dans les travaux cités ci-dessus.



**Figure 3.1** - Représentation schématique des résonateurs étudiés numériquement dans ce chapitre, (a) résonateur à onde stationnaire, (b) résonateur à onde propagative, (c) résonateur développé en géométrie droite équivalente. Pour les modélisations 2D, la direction  $z$  du système de coordonnées  $(x,y,z)$  est infinie.

Dans un deuxième temps, une validation de la méthode numérique proposée est également réalisée pour une configuration plus académique, dans le cas où le champ acoustique et l'écoulement redressé sont tous les deux décrits de manière numérique (§ 2.4.2).

Une fois la méthode validée sur ces exemples de référence, elle est ensuite utilisée pour étudier l'influence de différents facteurs sur l'écoulement redressé dans un résonateur. Tout d'abord, l'influence de la courbure d'un guide d'onde annulaire est étudiée (§ 3.1), puis l'influence de la présence d'un empilement de plaques (le "stack" d'un système thermoacoustique) dans le résonateur est considérée (§ 3.2). Le chapitre se conclut sur des considérations pratiques quant aux problèmes spécifiques liés à la résolution numérique (sensibilité au maillage en particulier).

## 2 Validation des formulations numériques

### 2.1 Descriptions analytiques du champ harmonique et de l'écoulement

Les solutions analytiques de référence, sur lesquelles est basée la validation de la formulation et de la démarche retenue pour modéliser les écoulements redressés, font appel à certaines approximations pour l'écoulement redressé ou pour le champ acoustique responsable de cet écoulement. Ces approximations et les formes de solutions correspondantes sont brièvement rappelées dans ce qui suit.

#### 2.1.1 Champ acoustique harmonique dans un guide droit

Le modèle analytique utilisé pour décrire le champ acoustique dans un guide droit 2D constitué de deux plaques parallèles est celui présenté par Bailliet et al. [20]. Le modèle proposé par Amari et al. [24,68], pour un acoustitron développé en une géométrie droite et pour lequel l'effet de courbure est négligeable est similaire à celui développé par Bailliet. C'est un modèle linéaire classique où les composantes du champ acoustique, de la vitesse particulaire et de l'écart de température sont exprimées en fonction de la pression acoustique. La linéarisation est faite sur les équations de la mécanique des fluides, simplifiées au premier ordre pour la perturbation acoustique, en se basant sur l'approximation de couche limite (épaisseurs des couches limites visqueuse  $\delta_v$  et thermique  $\delta_h$  petites devant la distance  $D$  entre deux parois). Les hypothèses simplificatrices sont :

- Le domaine d'étude ne contient pas de sources de débit ni de force ni de chaleur,
- les parois du guide sont parfaitement rigides,
- le régime de mouvement particulière est laminaire,
- il n'y a pas de gradient de température dans le domaine,
- les propriétés thermo-physiques du fluide et du solide sont indépendantes de la température,
- l'onde acoustique est à caractère plan.

Compte tenu de ces approximations, les équations fondamentales [(2.12), (2.13),(2.14)] conduisent aux expressions suivantes des composantes axiale  $\tilde{v}_x$  et radiale  $\tilde{v}_\eta$  de la vitesse particulière (la variable transversale adimensionnelle  $\eta$  étant définie par  $\eta = \left(\frac{2y}{D}\right)$ ) et de la variation acoustique de température  $\tilde{T}$  en fonction de la pression acoustique  $\tilde{p}$  (la dépendance temporelle  $e^{-i\omega t_a}$  étant omise) :

$$\tilde{v}_x = \frac{1}{i\omega\rho_0} (1 - F_v) \frac{d\tilde{p}}{dx}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{v}_\eta = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \left(\frac{D}{2}\right) \left\{ (\eta - \Phi_v) \frac{d^2\tilde{p}}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 (\eta + (\gamma - 1)\Phi_k) \tilde{p} \right\}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{\rho_0 C_p} (1 - F_k) \tilde{p}, \quad (3.3)$$

où les fonctions  $F_v$  et  $F_k$  décrivent les distributions transversales des champs de vitesse et de l'écart de température dans le résonateur,

$$F_{v,k} = \frac{\cosh\left(\frac{D}{(1+i)\delta_{v,k}} \eta\right)}{\cosh\left(\frac{D}{(1+i)\delta_{v,k}}\right)}, \quad (3.4)$$

et où les fonctions  $\Phi_{v,k}$  représentent respectivement les intégrales de  $F_{v,k}$  entre 0 et  $\eta$ ,

$$\Phi_{v,k} = \frac{(1+i)\delta_{v,k}}{D} \frac{\sinh\left(\frac{D}{(1+i)\delta_{v,k}}\eta\right)}{\cosh\left(\frac{D}{(1+i)\delta_{v,k}}\right)}. \quad (3.5)$$

La pression acoustique est solution de l'équation de propagation obtenue en substituant la condition d'adhérence  $\tilde{v}_\eta(\eta = \pm 1) = 0$  à la paroi dans l'expression de la vitesse transversale (Eq. (3.2)),

$$\frac{d^2 \tilde{p}}{dx^2} + k_0^2 \left( 1 + \frac{1}{1-f_v} (f_v + (\gamma-1)f_h) \right) \tilde{p} = 0, \quad (3.6)$$

où  $k_0 = \omega/c_0$  est le nombre d'onde acoustique adiabatique et où les fonctions  $f_{v,h}$  sont les valeurs des fonctions  $\Phi_{v,h}$  pour  $\eta = 1$ ,

$$f_{v,k} = \frac{(1+i)\delta_{v,k}}{D} \operatorname{th}\left(\frac{D}{(1+i)\delta_{v,k}}\right). \quad (3.7)$$

La solution de l'équation (3.6) dépend du type de résonateur étudié.

Dans un résonateur fermé droit, une onde stationnaire est générée par un haut-parleur placé à l'extrémité  $x=0$  du guide (Fig. 3.1). La pression acoustique varie le long de la coordonnée  $x$  selon l'expression  $\tilde{p} = p_a (e^{-ikx} + R_r e^{ikx})$ , où  $R_r$  est le coefficient de réflexion obtenu à partir des conditions aux limites aux extrémités du guide, et l'amplitude  $p_a$  peut s'exprimer en fonction du débit de la source (Bailliet et al. [74]). Dans un acoustitron, une onde progressive est générée par un grand nombre de sources équidistantes le long des parois, donnant lieu à un champ de vitesse fluctuante normal aux parois et continu  $v_r(x,t)$ ,

$$v_r(x,t) = v_0 \operatorname{Re}(e^{i(k_a x - \omega t)}), \quad (3.8)$$

où  $v_0$  est l'amplitude de la vitesse de vibration des parois,  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation associée à la fréquence  $f$  et  $\operatorname{Re}(\cdot)$  désigne la partie réelle. La propagation de l'excitation se fait le long des parois suivant le sens positif des  $x$  à la vitesse  $c_a$  telle que  $k_a = \omega/c_a$ . Cette excitation

génère un champ harmonique d'amplitude constante, et de phase progressive le long du guide. La fréquence est choisie de telle sorte que la longueur d'un résonateur déroulé équivalent soit égale à un nombre entier  $n$ , de longueur d'onde  $\lambda_w$ , de la perturbation acoustique générée par le mouvement des parois de l'acoustitron ( $L = 2\pi R_0 = n\lambda_w$  avec  $\lambda_w = 2\pi/k_w$  où  $k_w$  est le nombre d'onde acoustique). Lorsque la longueur d'onde acoustique générée est très grande devant le diamètre du guide, l'effet de la courbure sur la propagation du son est généralement supposé négligeable. La géométrie annulaire peut alors être remplacée par un guide droit périodique dont la période est égale à la longueur du périmètre déroulé  $L = 2\pi R_0$  (Fig. 3.1.(c)). Par conséquent, toutes les fonctions  $\phi$  décrivant le champ acoustique et l'écoulement du fluide, ou de leurs dérivés, satisfont la condition de périodicité. En particulier, chaque quantité  $\phi$  à l'entrée  $x = 0$  du résonateur est égale à celle de la sortie en  $x = L$ ,  $\phi(x=0) = \phi(x=L)$ . La pression acoustique  $\tilde{p}$  le long du résonateur, solution de l'équation de propagation (3.6) s'écrit alors sous la forme  $\tilde{p} = p_a e^{ik_a x}$ , où l'amplitude de pression  $p_a$  s'écrit (Amari et al. [24], Amari [68]) :

$$p_a = \frac{-\omega \rho_m v_0}{D(1-f_v)k_r k_i}, \quad (3.9)$$

avec  $k_r$  et  $k_i$  les parties réelle et imaginaire de nombre d'onde  $k_a$ .

### 2.1.2 Force excitatrice pour l'écoulement redressé dans un guide droit

Lorsque le nombre de Mach de l'écoulement  $M_a = v/c_0$ , où  $v$  est la vitesse locale du fluide et  $c_0$  la vitesse du son dans ce même fluide, est faible, le fluide en écoulement peut être considéré comme quasi-incompressible, car la variation de la densité associée au champ de vitesse d'écoulement est négligeable. En supposant qu'il n'y a, à l'échelle des temps longs  $t_s$ , aucun transfert de chaleur (champ de température homogène en l'absence de stack ou d'échangeur de chaleur), la masse volumique moyenne  $\rho_m$  et la viscosité dynamique de cisaillement moyenne  $\mu_m$  restent constantes. Dans un tel cas de streaming avec un champ de température homogène et incompressible, l'équation de conservation de l'énergie (2.29) est découplée des équations de conservation de la masse (2.27) et de conservation de la quantité de mouvement (2.28). Dans ce chapitre, consacré au seul écoulement redressé, l'équation de l'énergie n'est donc pas considérée pour l'écoulement. La viscosité dynamique de volume  $\xi$

est négligée (Hypothèse de Stokes). Dans ces conditions, l'écoulement redressé, qui résulte d'un transfert de quantité de mouvement par les phénomènes non linéaires de l'acoustique, dans le fluide et plus particulièrement à l'intérieur des couches limites, est alors décrit par la formulation simplifiée suivante, composée de deux équations (l'équation de l'énergie étant omise) portant sur la variable de vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (3.10)$$

$$\rho_m \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) = \nabla \cdot \left[ -p_m \mathbf{I} + \mu_m \left( \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T \right) \right] + \mathbf{F}. \quad (3.11)$$

La vitesse moyenne de l'écoulement redressé  $\mathbf{v}_m$  peut facilement être obtenue à partir de la solution de ces équations pour la vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$ , selon l'équation (2.25).

La force  $\mathbf{F}$  au second membre de l'équation (3.11) est le terme d'excitation responsable de la génération d'un écoulement redressé. L'expression analytique de cette force est donnée aux équations [(2.30)-(2.33)]. Elle résulte de phénomènes non linéaires du second ordre de l'acoustique. Dans un guide droit, la composante transversale  $F_\eta$  de la force d'excitation  $\mathbf{F}$  peut être considérée comme négligeable par rapport à la composante axiale  $F_x$  ( $F_x \gg F_\eta$ ). La composante axiale  $F_x$  peut s'écrire comme la somme de trois forces (cf. annexe D).

Dans les modélisations analytiques de référence (Bailliet et al. [20], Amari et al. [24]), l'approximation dite "de couche limites" retenue pour les équations du champ acoustique est également retenue pour la formulation de l'écoulement redressé, et plus précisément pour l'expression de la force d'excitation. Compte tenu de cette approximation, les trois forces  $F_{x1}$ ,  $F_{x3}$  et  $F_{x4}$  qui constituent la composante axiale de la force  $F_x$  s'écrivent,

$$F_x = F_{x1} + F_{x3} + F_{x4} = -\rho_m \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{v}_x \tilde{v}_y \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial y} \right\rangle - \frac{\mu_m}{\rho_m} \frac{\partial^2 \langle \tilde{\rho} \tilde{v}_x \rangle}{\partial y^2}. \quad (3.12)$$

Notons que cette expression simplifiée de la force excitatrice  $F_x$  diffère de celle proposée par Amari et al. [24,25,68] et Rott [17] par la présence du terme supplémentaire  $F_{x4}$  faisant intervenir la variation de masse volumique. Ce terme supplémentaire provient du choix

de l'utilisation de la vitesse de transport de masse  $U$  en lieu et place de la vitesse moyenne de l'écoulement  $v_m$  dans les équations de base.

Cette expression simplifiée de la force excitatrice  $F_x$  de l'équation (3.12) est utilisée pour la comparaison avec le calcul analytique de référence. Mais il faut noter que la méthode numérique proposée permet de prendre en compte la forme générale, incluant toutes ses composantes (Eq. (2.30)-(2.33)) de cette force excitatrice, comme présenté en annexe D.

Dans ce mémoire, et afin de bien illustrer les très petites variations, les résultats seront présentés sous forme adimensionnelle : la force d'excitation est représentée par la quantité adimensionnelle  $F_x^a = F_x/F_c$ , le temps par  $t^a = t/\tau_c$ , la vitesse axiale de transport de masse  $U_x^a = U_x/U_{x\max}$  et la vitesse axiale moyenne de l'écoulement redressé par  $v_x^a = v_x/v_{x\max}$ , où  $F_c = \rho_m v_0^2/D$  est une grandeur caractéristique de force et  $\tau_c = \rho_m D^2/\mu_m \pi^2$  une référence de temps pour le développement de l'écoulement redressé.

## ***2.2 Validation de la modélisation de l'écoulement redressé en guide annulaire développé***

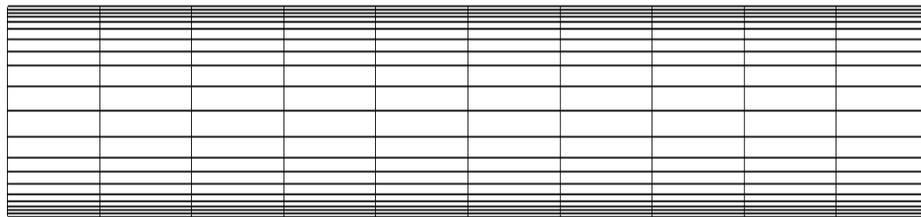
### ***Onde progressive en guide annulaire développé - Solution numérique de l'écoulement redressé à partir d'une solution analytique du champ harmonique***

Une première validation de la modélisation numérique des écoulements redressés est réalisée en comparant le vent acoustique obtenu par cette méthode dans un acoustitron développé avec les résultats analytiques issus de l'étude menée par Amari et al. [24,25,68] sur un guide développé droit. La fréquence d'excitation est fixée à  $f = 100$  Hz, le fluide est de l'air à température ambiante ( $293.15$  K) et à la pression atmosphérique ( $p_0 = 101325$  Pa). La longueur de périmètre du guide correspondant à la première fréquence de résonance est fixée à  $L = c/f = 3.4$  m. La fréquence  $f$  étant fixée, le régime d'interaction fluide-parois est exploré en faisant varier la distance  $D$  entre les deux parois du résonateur  $2D$  considéré. Un régime quasi-adiabatique (QA) est obtenu pour une distance  $D = 2.2$  mm ( $\delta_v/D = 0.1$ ). Un régime quasi-isotherme (QI) est obtenu pour une distance  $D = 73$   $\mu$ m ( $\delta_v/D = 3$ ). Le choix de ces valeurs permet une comparaison directe avec les résultats obtenus par Amari et al. [24,68]. L'amplitude de pression est proportionnelle à la vitesse de vibration des parois du résonateur (Eq. (3.9)), ce qui constitue la source d'excitation du système. Une vitesse  $v_0 = 2$  mm/s est

imposée aux parois, générant une pression acoustique de  $2500 Pa$  efficace pour le régime QI considéré et de  $8800 Pa$  efficace pour le régime QA.

### 2.2.1 Profils de force

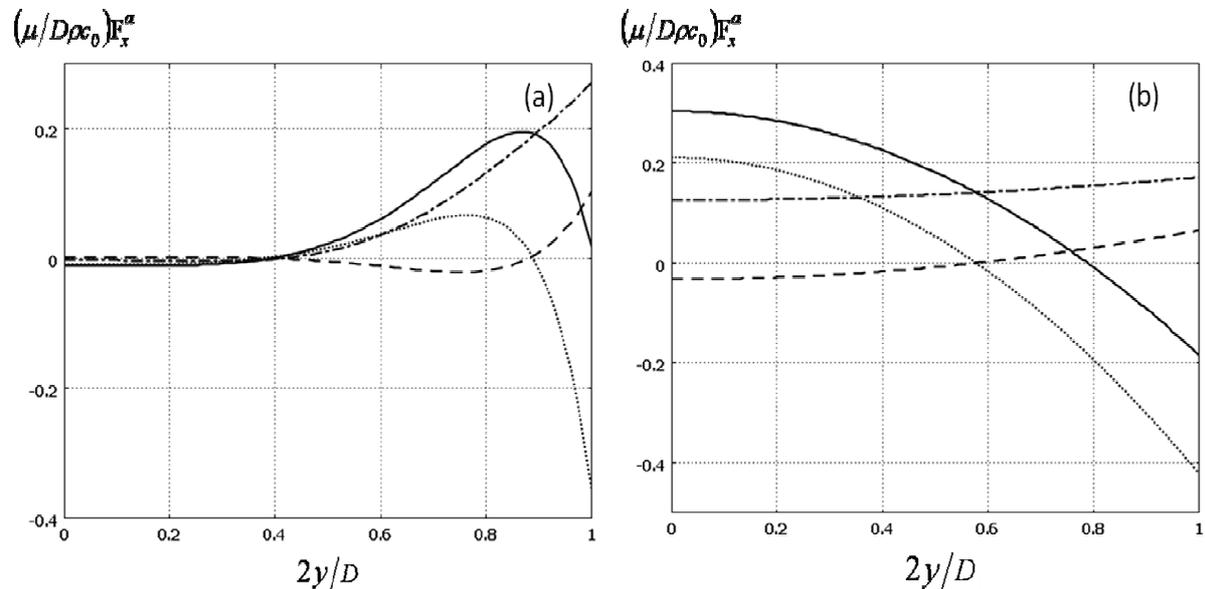
Pour le régime linéaire considéré, le module du champ harmonique étant constant le long du guide d'onde (seule la phase évolue dans la direction axiale), les forces d'excitation de l'écoulement redressé, ainsi que le profil de cet écoulement sont considérés constants le long du guide. En raison de cette invariance, et afin de réduire le coût de calcul, la longueur du guide modélisé peut être réduite à une fraction du périmètre total du guide. Nous considérons ici  $L = 0.02m$ , alors que le périmètre total est  $L = c/f = 3.4m$ . Le maillage utilisé comporte 200 éléments quadrangles avec une distribution homogène en  $x$  (10 éléments) et exponentielle en  $y$  (20 éléments), comme l'illustre la figure 3.2.



**Figure 3.2** - Maillage utilisé pour l'étude d'une fraction de l'acoustitron développé en géométrie droite.

Les profils de force sur une section de l'acoustitron calculés numériquement en s'appuyant sur la description analytique du champ acoustique qui en est la cause, sont présentés sous forme adimensionnelle en figure 3.3, pour les deux régimes d'interaction onde/paroi considérés. Les courbes représentent la force axiale adimensionnelle par unité de volume et ses trois composantes (Eq. (3.12)). Cette force est symétrique par rapport à l'axe du résonateur. En régime QA, elle est plus intense à l'intérieur de la couche limite et présente un maximum au voisinage des parois et un minimum faiblement négatif loin des parois, vers le centre du résonateur. Pour le régime QI, la valeur maximale de la force se situe sur l'axe du résonateur. La composante  $F_{x4}$  liée à l'utilisation de la variable de transport de masse pour décrire l'écoulement présente une contribution non négligeable sur la force résultante totale ;

étant toujours positive, contrairement à la composante  $F_{x3}$ , elle conduit à une augmentation de l'amplitude de la force totale.

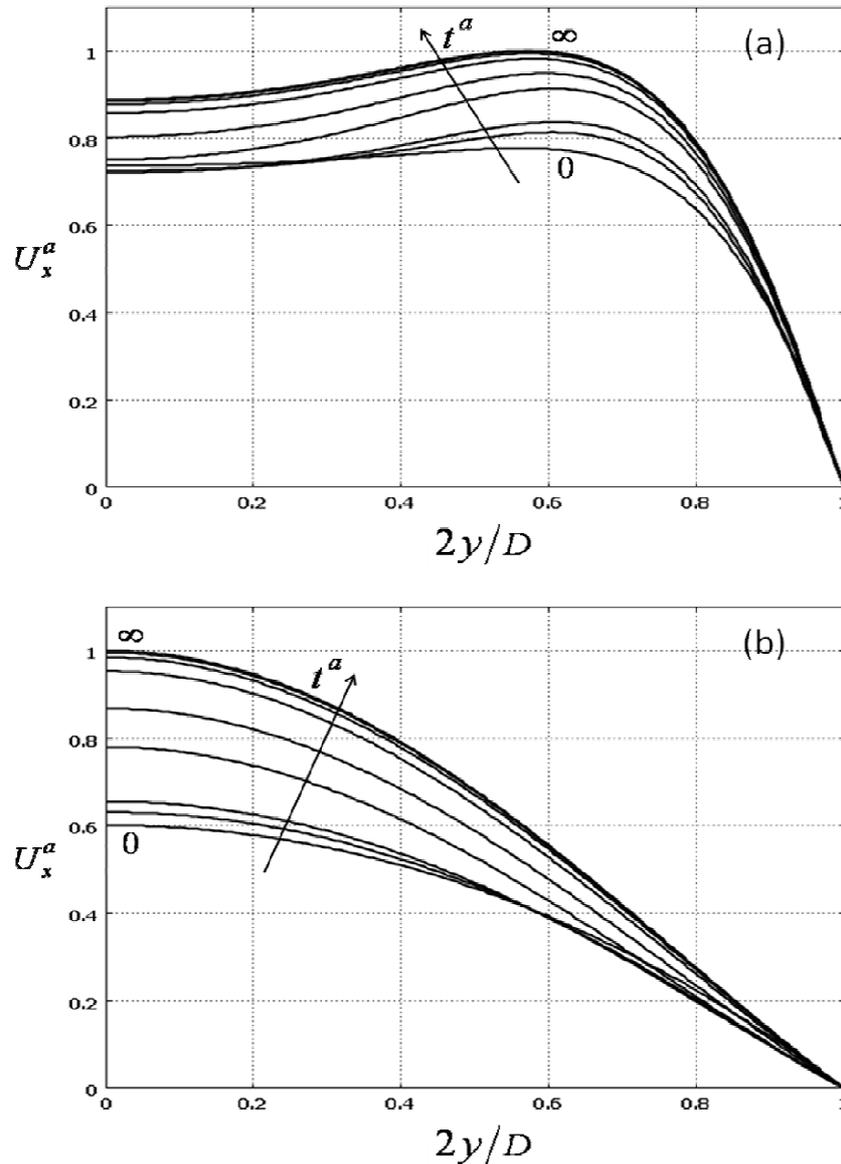


**Figure 3.3** - Profils de forces adimensionnelles  $F_{x1}$  (.....),  $F_{x3}$  ( - - ),  $F_{x4}$  ( - · - ) et  $F_x$  ( — ) en acoustique développée droite pour deux valeurs différentes du rapport d'interaction onde/parois, (a) régime quasi-adiabatique ( $\delta_v/D$ ) = 0.1, (b) régime quasi-isotherme ( $\delta_v/D$ ) = 3.

### 2.2.2 Profils de vitesses

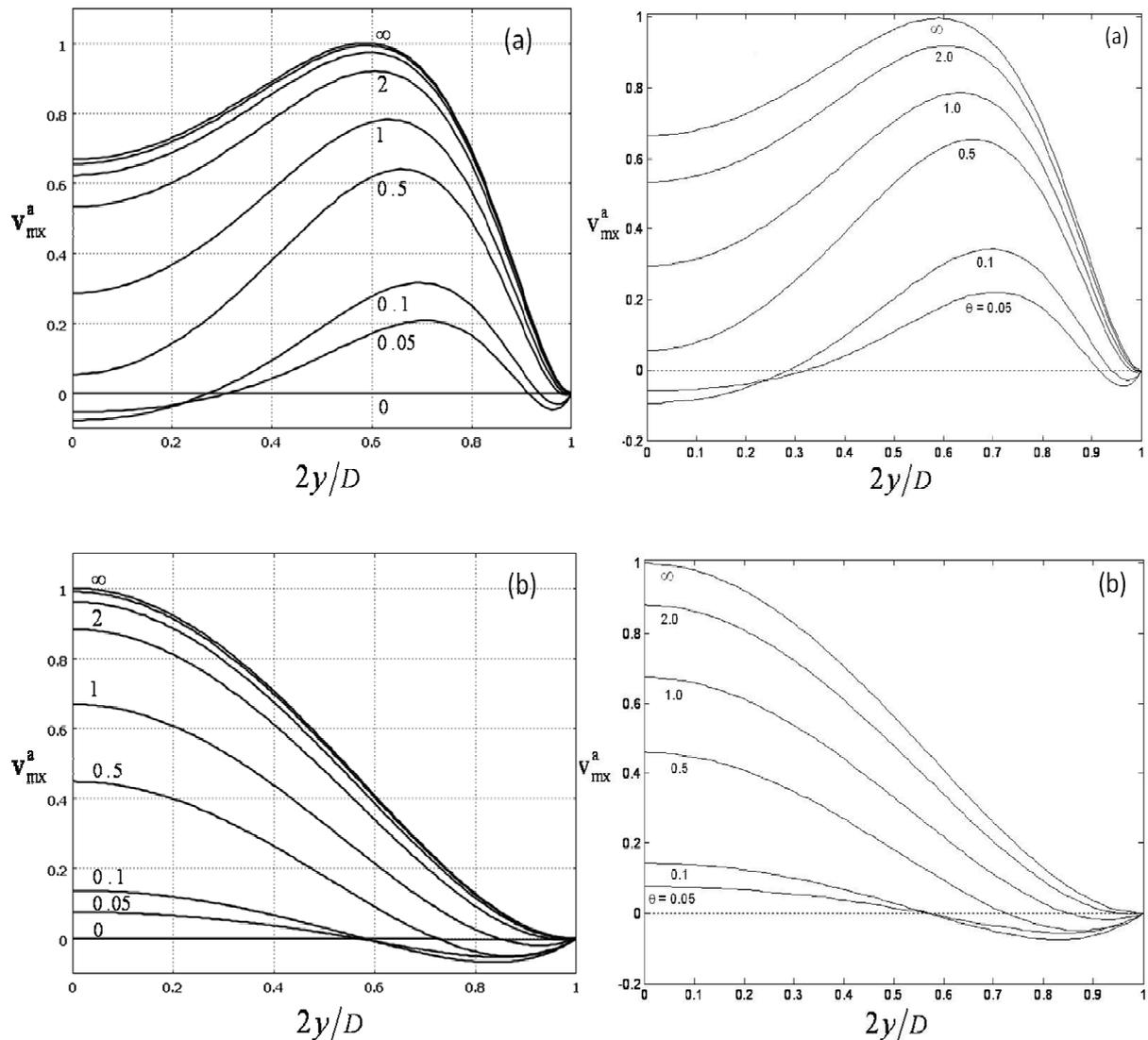
L'estimation numérique de l'évolution temporelle de la vitesse de transport de masse adimensionnelle en régime transitoire est représentée sur la figure 3.4, pour les mêmes régimes d'interaction onde/parois, QA ( $\delta_v/D$ ) = 0.1 et QI ( $\delta_v/D$ ) = 3. Les graphiques représentent l'évolution de la composante axiale en fonction du temps adimensionnel, sur une demi section, compte tenu de la symétrie par rapport à l'axe du guide. Au début du régime transitoire, les profils de la vitesse de transport de masse sont similaires à ceux de la force d'excitation, sauf sur les parois où la vitesse est nulle en raison de la condition d'adhérence ( $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ ). La vitesse maximale est localisée au centre du résonateur en régime QI, et à environ 60% du centre de la section en régime QA. La vitesse de transport de masse  $U_x^a$ , qui représente la densité de flux massique, est toujours positive. On constate que la valeur de la vitesse de transport de masse à

l'instant initial  $\theta = 0$  n'est pas nulle, ce qui est dû au débit massique provoqué par la composante harmonique du champ acoustique (d'expression analytique  $U_x(t=0) = \langle \tilde{\rho} \tilde{v}_x \rangle / \rho_0$ ) qui est supposé être établi instantanément dans notre modèle basé sur la séparation des deux échelles du temps (rapide et long).



**Figure 3.4** - Profils de la vitesse de transport de masse adimensionnelle en acoustitron développé droit en fonction du temps adimensionnel ( $0 \leq t^a \leq 5 \equiv \infty$ ) pour deux valeurs différentes du rapport d'interaction onde/paroi, (a) régime quasi-adiabatique ( $\delta_v/D = 0.1$ ), (b) régime quasi-isotherme ( $\delta_v/D = 3$ ). Les valeurs de  $t^a$  pour chacune des courbes sont les mêmes qu'en figure 3.5.

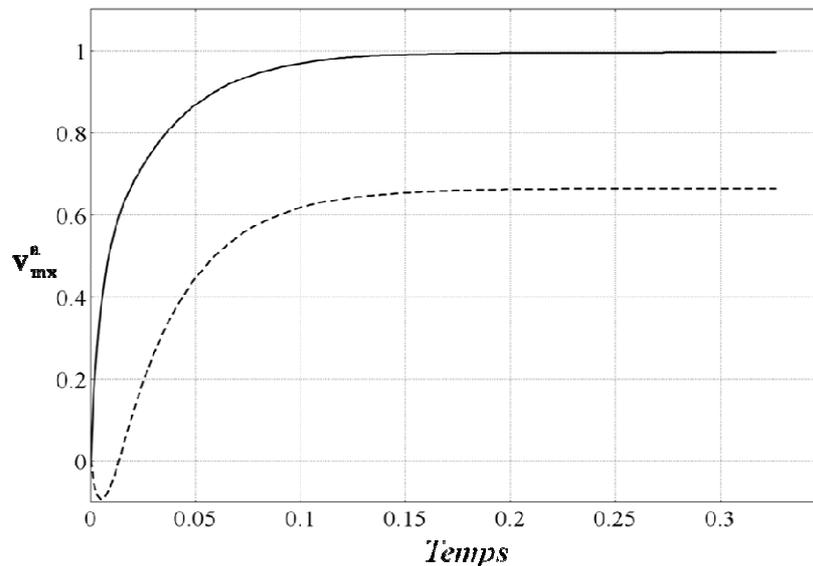
L'évolution temporelle des profils de la vitesse moyenne  $v_m$  de l'écoulement redressé (Fig. 3.5) sont obtenus par la relation (2.25), à partir de la solution pour la vitesse de transport de masse  $U$ . Ces profils sont reportés aux figures 3.5.(a) et 3.5.(b). Contrairement à la vitesse de transport de masse, la vitesse moyenne de l'écoulement redressé  $v_{mx}^a$  peut être négative, pour des temps  $t^a$  très courts. Un très bon accord est constaté avec les résultats analytiques issus des travaux de Amari et al. [24].



**Figure 3.5** - Profils de la vitesse axiale moyenne adimensionnelle de l'écoulement redressé en acoustitron développé droit en fonction du temps adimensionnel  $t^a$ , (a) régime quasi-adiabatique  $(\delta_v/D)=0.1$ , (b) régime quasi-isotherme  $(\delta_v/D)=3$ . À gauche : solutions de cette étude, à droite : référence d'Amari et al. [24] avec  $\theta \equiv t^a$ .

### 2.2.3 Temps de stabilisation de l'écoulement redressé

Pour un fluide initialement au repos, le régime transitoire de l'écoulement redressé conduit à un écoulement en régime permanent après un temps de stabilisation. Dans le cas du régime QA considéré ( $\delta_v/D$ )=0.1, pour lequel le temps caractéristique  $\tau_c$  est de 30 ms, la vitesse de l'écoulement n'évolue pratiquement plus après 0,2s (Fig. 3.6). Ce temps, très court en comparaison de celui observé lors d'études expérimentales (Moreau et al. [9], Thompson et al. [75]), résulte du très petit diamètre du résonateur : le vent acoustique est excité à l'intérieur des couches limites et diffuse ensuite très rapidement sur l'ensemble de la (petite) section du résonateur.



**Figure 3.6** - Évolution temporelle vers le régime permanent de la vitesse axiale moyenne adimensionnelle de l'écoulement redressé sur l'axe du résonateur  $\eta = 0$  (---) et sur le rayon où la vitesse est maximale en régime permanent  $\eta \approx 0.6$  (—), pour le rapport  $(\delta_v/D) = 0.1$ .

### 2.3 Validation de la modélisation de l'écoulement redressé en résonateur fermé

Le paragraphe précédent avait pour objectif la validation de l'emploi dans un calcul numérique de la formulation des phénomènes lents présentée au deuxième chapitre et appliquée à l'étude des écoulements redressés, en se basant sur une description analytique du

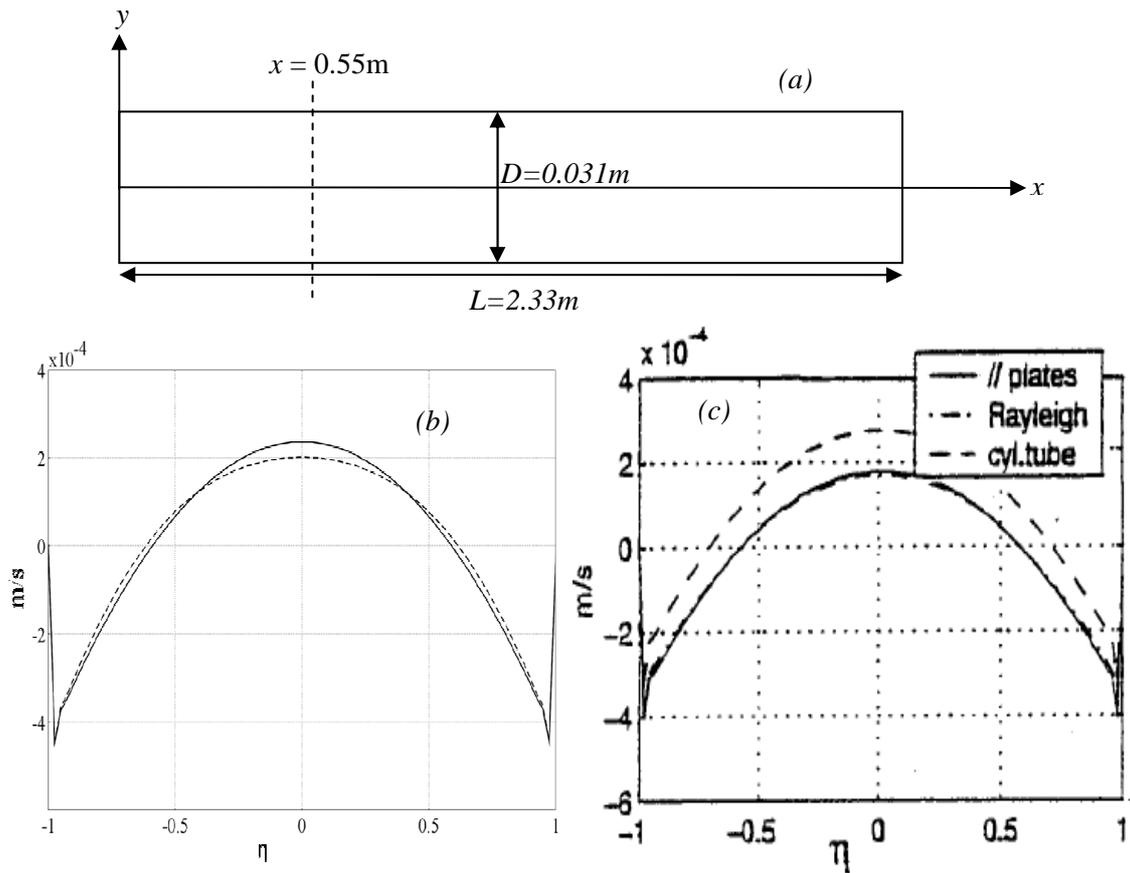
champ acoustique correspondant à la propagation d'une onde plane purement propagative dans un résonateur annulaire. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons plus particulièrement au cas d'un résonateur "droit" à ondes stationnaires. Dans la première partie de ce paragraphe, l'étude menée au (§ 2.2) est adaptée au cas d'une onde acoustique stationnaire générée par un haut-parleur dans un résonateur demi-onde correspondant à la configuration étudiée par Bailliet et al. [20]. Dans la deuxième partie, nous résolvons numériquement l'ensemble des formulations du champ acoustique et de l'écoulement redressé, dans une configuration plus académique permettant une validation qualitative de la méthode "tout numérique".

### 2.3.1 Onde stationnaire - Solution numérique de l'écoulement redressé à partir d'une solution analytique du champ harmonique

Le système étudié dans ce paragraphe correspond à celui de l'étude menée par Bailliet et al. [20]. Il s'agit d'un guide à onde stationnaire composé de deux parois parallèles et excité à une extrémité par un haut-parleur. Le fluide utilisé est un mélange à 60% d'hélium et à 40% d'Argon à température ambiante ( $T_0 = 291 K$ ) et sous forte pression statique ( $P_0 = 7.24 bars$ ). La fréquence d'excitation est fixée à  $f=100 Hz$ . Pour cette fréquence, la longueur  $L$  du résonateur est  $L = \pi/\Re(k) \approx 2.33 m$ , avec  $k = k_0 \sqrt{1 + (f_v + (\gamma - 1)f_h / 1 - f_v)}$  (Eq. (3.6)). Le haut-parleur génère à l'extrémité fermée du résonateur une pression acoustique efficace  $\tilde{p}(0) = 2.3kPa$ . Seul un régime d'interaction onde/parois QA est considéré ici, correspondant à un rapport  $R / \delta_h = 100$ , soit  $\delta_v / D = 0.006$  pour la fréquence choisie, correspondant à une distance  $D$  de  $0.031m$  (Fig. 3.7.(a)).

De la même manière que dans le paragraphe précédent, la vitesse de l'écoulement redressé obtenu dans ce résonateur est calculée numériquement à partir de la solution analytique du champ acoustique, puis confrontée aux résultats issus de l'étude analytique menée par Bailliet et al. [20] dans un tel système.

Le profil transverse, en régime permanent, de la composante axiale de la vitesse de l'écoulement redressé, calculé numériquement pour la position  $x = 0.55m$  dans le résonateur, est représenté en figure 3.7.(b). A titre de comparaison, le profil obtenu analytiquement dans les mêmes conditions par Bailliet et al. est reporté à la figure 3.7.(c) (ligne continue). Là encore, un relatif bon accord entre résultats numérique et analytique est constaté, permettant de valider la technique de modélisation numérique proposée.



**Figure 3.7** - (a) cavité à section rectangulaire à onde stationnaire, (b) profil de vitesse moyenne de l'écoulement redressé  $v_{xm}$  sur une section, à  $x=0.55\text{m}$ , pour  $t_s=10\text{s}$  (ligne discontinue) et  $t_s=\infty$  (ligne continue), (c) vitesse moyenne de l'écoulement redressé d'après les travaux de Bailliet et al. [20].

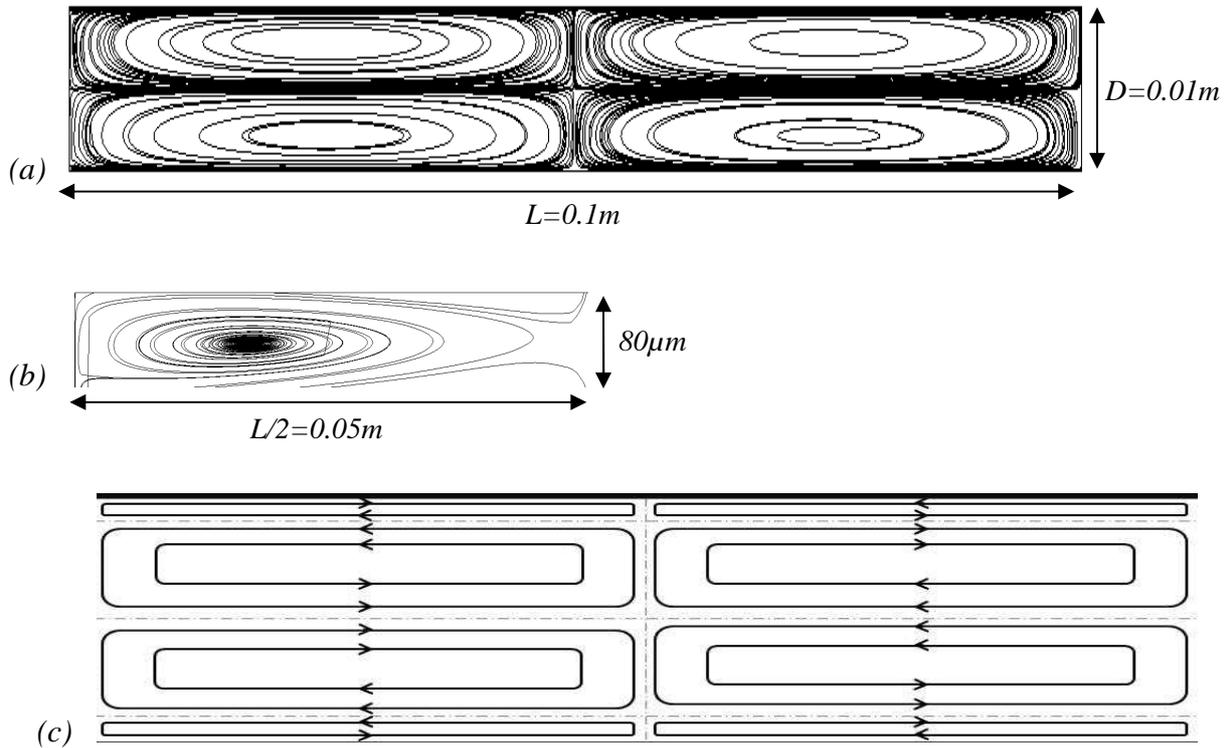
### 2.3.2 Onde stationnaire - Solutions numériques (i) du champ acoustique harmonique puis (ii) de l'écoulement redressé

Le but de ce paragraphe est de tester la capacité de la méthode numérique proposée à décrire l'ensemble du problème, à savoir décrire l'écoulement redressé sur la base d'une description numérique du champ acoustique. Pour effectuer ce test, un simple résonateur  $2D$  rempli d'air à la pression atmosphérique est considéré. L'onde acoustique est excitée par un piston, placé à l'extrémité gauche du résonateur. Le déplacement harmonique du piston présente une amplitude crête de  $1\mu\text{m}$ . L'extrémité droite du résonateur est fermée et rigide. La longueur  $L$  du résonateur est fixée à  $10\text{cm}$ , soit une demi longueur d'onde acoustique ( $L = \lambda_a/2$ ) à la fréquence d'excitation ( $1700\text{ Hz}$ ). La distance  $D$  entre les parois du guide est fixée à  $1\text{ cm}$ .

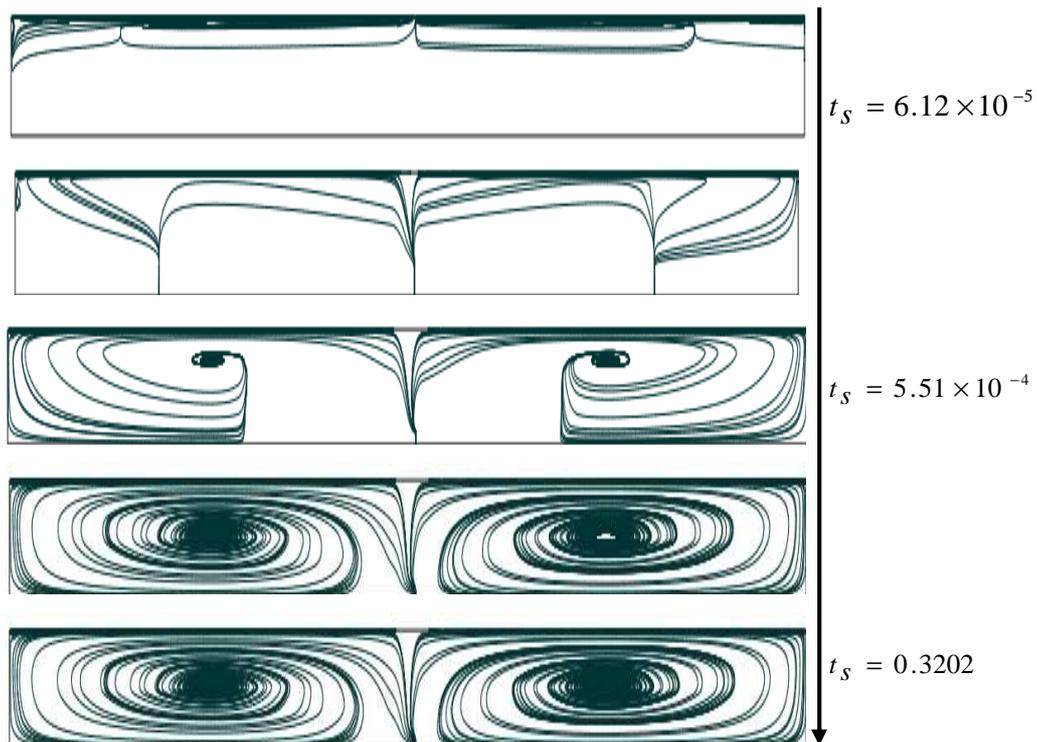
Une condition d'adhérence pour la vitesse et une condition isotherme pour la température acoustique (écart de température nul) sont imposées comme conditions aux limites sur les parois. Pour la fréquence de fonctionnement choisie, l'épaisseur de la couche limite visqueuse est de  $53 \mu\text{m}$ . Le système étudié correspond donc au cas d'un "tube large". Dans un tel résonateur à onde stationnaire, l'écoulement redressé est composé de quatre cellules de recirculation principales (dites "externes") dont la taille correspond à un quart de longueur d'onde (Fig. 3.8.(a)), et de quatre autres cellules contra-rotatives (dites "internes") localisées à l'intérieur des couches limites (Fig. 3.8.(b)). La largeur de ces cellules est de l'ordre de 1.5 fois l'épaisseur de la couche limite visqueuse  $\delta_v$ . Cette structure, décrite de manière théorique dans la littérature pour ce type de résonateur Rayleigh [12], est schématisée sur la figure 3.8.(c). La figure 3.8.(a) représente les cellules de recirculation obtenues à partir d'une approche "tout numérique" dans le résonateur test. Conformément à la théorie, quatre zones de recirculations externes apparaissent clairement. La figure 3.8.(b) représente un zoom effectué en proche paroi (supérieure) dans la moitié droite du résonateur. Une cellule de recirculation interne apparaît clairement là aussi. L'épaisseur de cette cellule correspond environ à 1.5 fois l'épaisseur de la couche limite visqueuse.

La figure 3.9 illustre l'évolution temporelle en régime transitoire de l'écoulement redressé. Compte tenu de la symétrie du dispositif à modéliser, et pour diminuer la taille du modèle numérique, nous considérons ici juste un quart du domaine d'étude (quart correspondant à la partie supérieure droite du résonateur). L'écoulement prend naissance à l'intérieur des couches limites, puis se diffuse sur l'ensemble du volume fluide par effet de viscosité. On constate que l'évolution de l'écoulement vers la solution stationnaire est très rapide (le temps en secondes est présenté en figure 3.9, et la structure des cellules est établie en quelques centaines de périodes acoustiques  $\tau, f=1700 \text{ Hz}$ ).

Cependant, il faut noter que cette modélisation ne rend pas compte fidèlement des tout-premiers instants de la mise en mouvement redressé, car (i) l'établissement du régime harmonique n'est pas instantané, et son transitoire n'est pas pris en compte dans cette approche, (ii) la formulation utilisée pour étudier l'écoulement redressé repose sur l'hypothèse de séparation des échelles de temps. Ce modèle pour les écoulements redressés n'est valable que pour les temps longs  $t_s \gg \tau$ , cette condition n'est pas vérifiée pour les trois premières images de la figure 3.9.



**Figure 3.8** - Lignes de courant de l'écoulement redressé dans un résonateur à onde stationnaire, (a) cellules externes, (b) détail d'une cellule interne, (c) schéma indiquant le sens de rotation des tourbillons dans le résonateur.



**Figure 3.9** - Évolution temporelle de l'écoulement redressé dans la moitié ( $0 \leq y \leq D/2$ ) d'un résonateur à onde stationnaire (Fig. 3.8.(a)) avec une excitation en demi-longueur d'onde.

### 3 Application à l'étude de résonateurs

#### *Solutions numériques (i) du champ acoustique harmonique puis (ii) de l'écoulement redressé*

La technique de modélisation numérique proposée ayant été validée par comparaison avec des résultats issus de cas de référence, elle est à présent utilisée pour étudier l'influence de certains phénomènes sur le comportement de l'écoulement redressé.

#### **3.1 Effet de la courbure des résonateurs annulaires**

La grande majorité des études numériques sur la propagation acoustique dans les guides d'ondes a porté sur des géométries droites. La configuration annulaire a été comparativement peu étudiée. Elle présente l'avantage d'éviter d'avoir à simuler un guide de longueur infinie ou de très grande longueur, mais elle rend le calcul numérique plus coûteux, du fait que la géométrie refermée sur elle-même a pour effet d'augmenter considérablement la largeur de bande des matrices pour un calcul en éléments finis.

Dans ce paragraphe, l'écoulement redressé est étudié dans un acoustitron non développé de géométrie 2D, où la section transversale du conduit est supposée être de forme rectangulaire avec une dimension infinie sur l'axe  $z$ .

Afin d'étudier l'effet de la courbure du guide d'onde sur le profil de l'écoulement redressé, deux modèles numériques sont réalisés, l'un pour un guide annulaire développé droit (§ 3.1.1), l'autre pour le même guide annulaire courbe (§3.1.2), pour des conditions de calcul (numérique, pour le champ harmonique comme pour l'écoulement redressé) aussi similaires que possible. Une dissymétrie apparaît sur le profil de l'écoulement redressé dans le guide courbe. Afin de préciser si l'effet de dissymétrie observé provient majoritairement ou non de l'effet de la courbure sur le champ harmonique, un troisième modèle (§ 3.1.3) considère la projection de la solution analytique du champ harmonique en guide développé droit (Eq. (3.1)-(3.3)) sur le maillage courbe utilisé pour résoudre l'écoulement. Enfin, ces résultats de modélisation numérique pour les écoulements redressés en guide annulaire courbe sont confrontés à des résultats expérimentaux récemment obtenus par Vélocimétrie Laser Doppler Desjouy et al. [40,76] (§ 3.1.4).

### 3.1.1 Solution de référence en guide développé droit

#### *Solutions numériques (i) du champ acoustique harmonique, puis (ii) de l'écoulement redressé en guide développé droit à onde progressive*

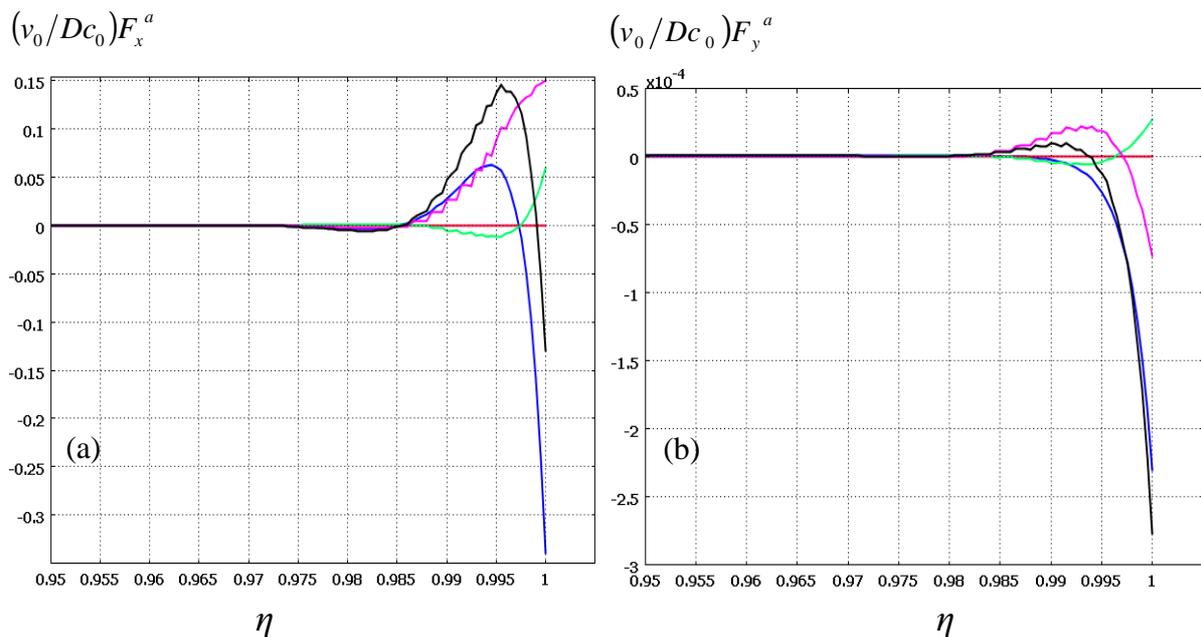
Les formulations de l'acoustique linéaire en fluide thermovisqueux, puis celle pour les écoulements redressés sont utilisées pour obtenir numériquement le profil de l'écoulement redressé et son évolution temporelle dans un guide d'onde de type acoustitron, développé droit et siège d'une onde progressive. La méthode des éléments finis est utilisée pour l'intégration spatiale des formulations de base, en utilisant un maillage très raffiné près des parois pour représenter avec précision, à l'intérieur des couches limites thermoacoustiques, les fortes variations du champ acoustique et des forces induites qui excitent le streaming. La formulation utilisée est celle présentée en annexe D, qui n'utilise pas d'approximation de couches limites. Le régime d'interaction onde/paroi est un régime QA, en raison de la faible valeur du rapport  $\delta_v / D = 0.0022$ .

Les profils, obtenus de manière numérique, des composantes axiale et radiale de la force  $\mathbf{F}$  responsable de l'écoulement redressé sont reportés en figure 3.10. La composante axiale de la force est beaucoup plus importante que la composante radiale. Conformément aux attentes théoriques dans le cas d'un guide droit, le profil de la force  $\mathbf{F}$  est symétrique par rapport à l'axe du résonateur, et la force est plus intense à l'intérieur des couches limites, au voisinage des parois. Le profil de la force axiale est semblable à celui obtenu précédemment pour une configuration similaire à partir d'une solution analytique pour le champ acoustique (Fig. 3.3.(a)), même si l'influence de la discrétisation au voisinage de la couche limite est clairement perceptible (Fig. 3.10, avec le même adimensionnement que la Fig. 3.3.(a)).

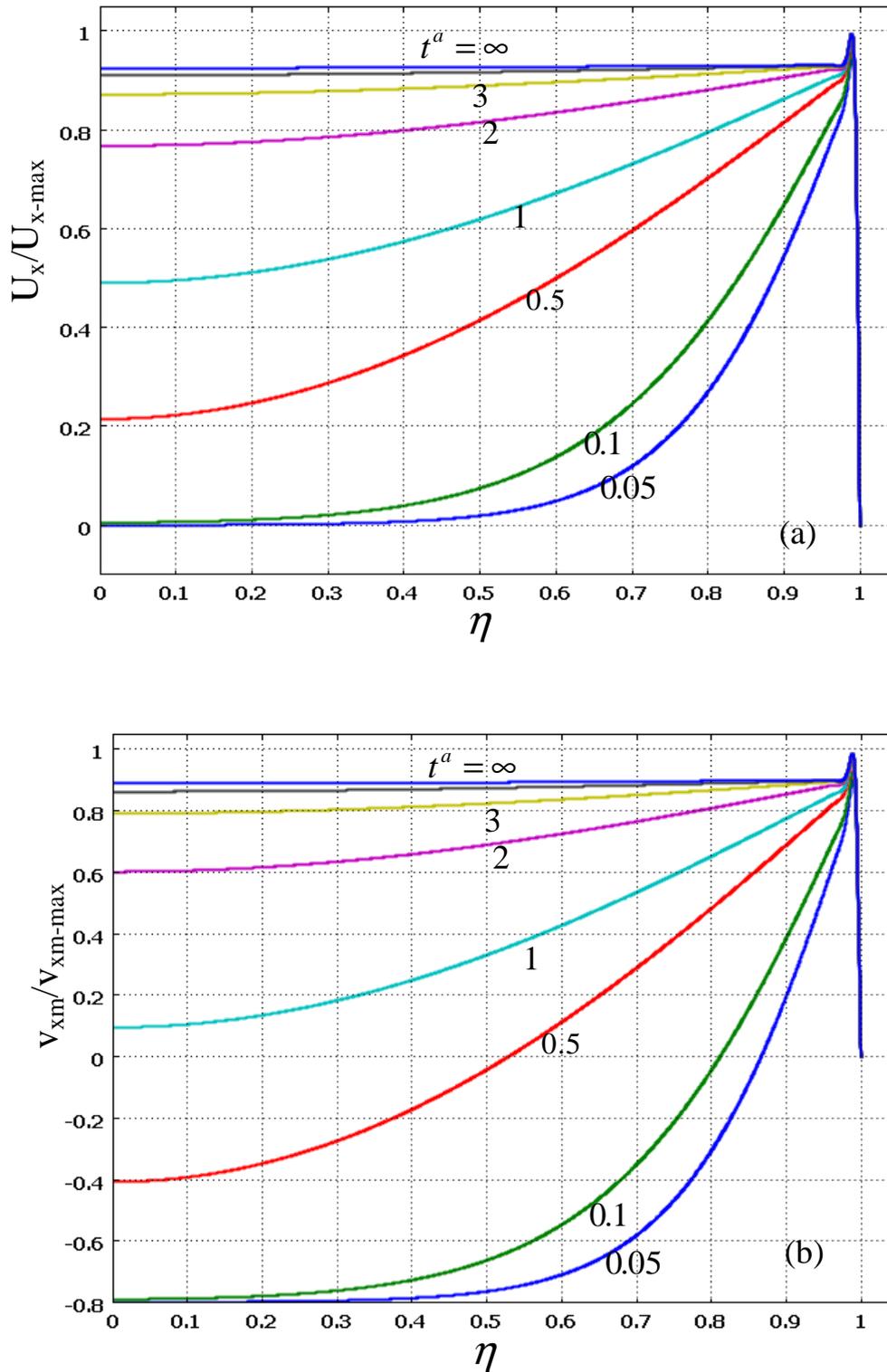
Les évolutions temporelles des profils de vitesse de transport de masse et de vitesse de l'écoulement redressé sont reportées en figure 3.11. Conformément à son caractère diffusif, l'écoulement redressé est d'abord excité à l'intérieur des couches limites, puis met en mouvement le fluide sur l'ensemble de la section par le transfert de quantité de mouvement (Fig. 3.11). La vitesse de transport de masse est toujours positive ; ce n'est pas le cas de la vitesse moyenne  $\mathbf{v}_m$  de l'écoulement redressé, qui prend des valeurs négatives, en particulier dans les premiers instants du transitoire. La vitesse de transport de masse initiale  $\mathbf{U}(t=0)$  est nulle, conformément aux conditions initiales du champ de vitesse : à l'instant  $t=0$  la vitesse acoustique est nulle, ainsi que la vitesse de l'écoulement redressé. La vitesse initiale de

l'écoulement redressé  $\mathbf{v}_m(t=0)$  n'est, quant à elle, pas nulle sur la figure 3.11.(b), pour les premiers instants du transitoire. Ceci montre la limite de notre approche pour les temps très courts, car la séparation des échelles de temps n'a plus de sens à ces temps précoces. On constate encore une fois que les vitesses de l'écoulement redressé et de transport de masse ont la même allure générale et la même évolution temporelle, mais, bien entendu, pas la même amplitude. En régime établi, la vitesse  $\mathbf{v}_m$  est deux fois supérieure à la quantité  $(\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle / \rho_m)$ .

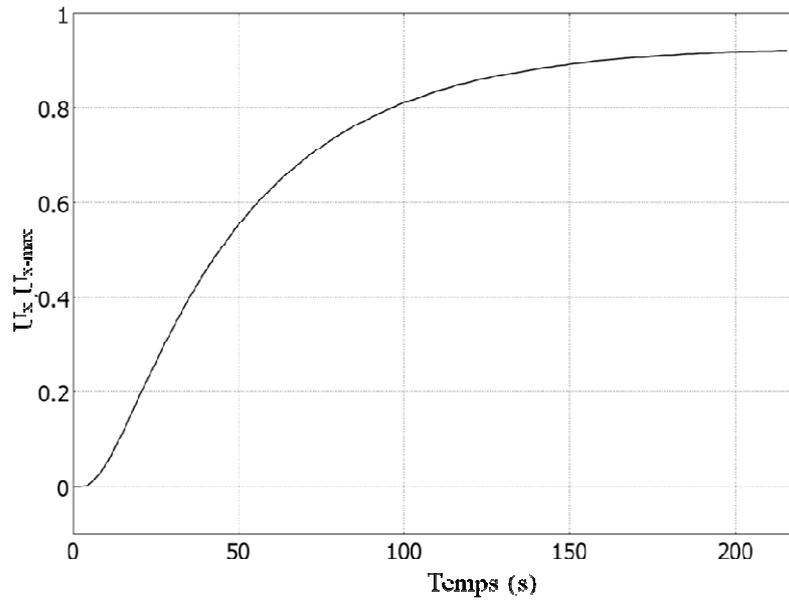
Afin d'estimer le temps nécessaire à la vitesse de l'écoulement pour atteindre une valeur stable, l'évolution temporelle de la vitesse adimensionnelle de transport de masse est estimée à une position quelconque le long du résonateur (puisque le champ de vitesse est uniforme selon la direction axiale) sur l'axe médian du résonateur. Le temps de stabilisation est ici de l'ordre de  $200s$  comme le montre la figure 3.12, bien supérieur au temps de stabilisation mentionné au paragraphe (§2.2.3) en raison d'une valeur nettement plus faible du rapport  $\delta_v / D$ .



**Figure 3.10** - Profils de forces adimensionnelles obtenus numériquement en guide développé droit pour un rapport  $\delta_v / D = 0.0022$ , (a) composante axiale, (b) composante radiale. Les trois quantités de chaque force sont en couleur,  $F_{1x}$  en bleu,  $F_{3x}$  en vert,  $F_{4x}$  en magenta et leur somme  $F_x$  est en noir. Pour mieux voir la distribution des forces, les courbes sont tracées près de la paroi  $0.95 \leq \eta \leq 1$ . Toutes les composantes de forces sont nuls en se dirigeant vers le centre du résonateur  $\eta=0$ .



**Figure 3.11** - Évolution du profil de vitesse axiale adimensionnelle à différents instants  $t^a$  du régime transitoire, (a) vitesse de transport de masse, (b) vitesse de l'écoulement redressé. Solution obtenue numériquement en guide développé droit pour le rapport  $\delta_v / D = 0.0022$ .

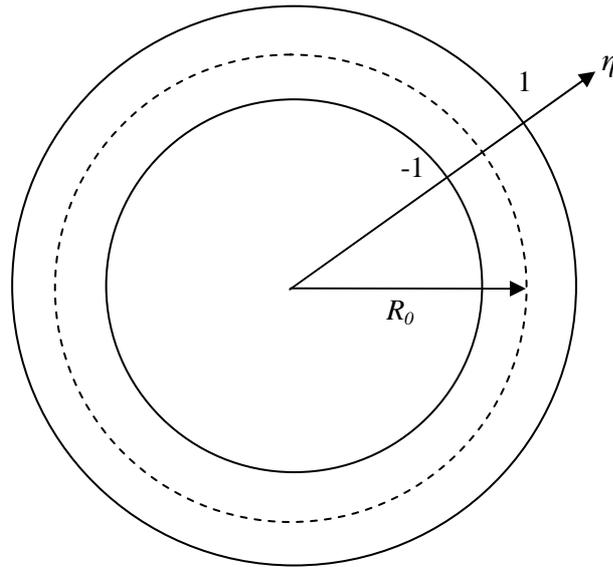


**Figure 3.12** - Évolution temporelle de la vitesse de transport de masse adimensionnelle sur l'axe de l'acoustitron développé pour le rapport  $\delta_v / D = 0.0022$ .

### 3.1.2 Solution en guide annulaire 2D courbe

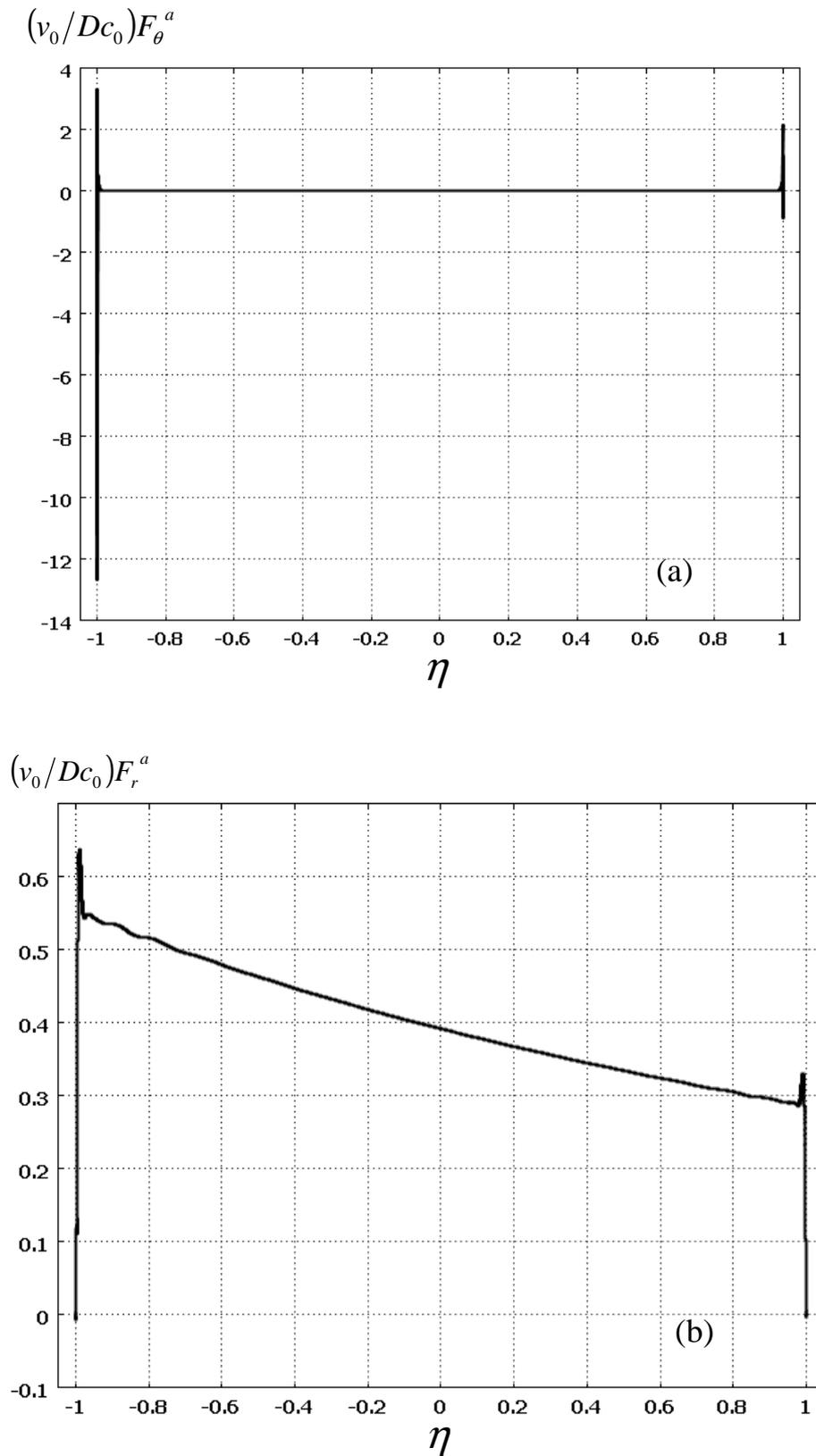
#### *Écoulement redressé en guide courbe à partir de la solution acoustique harmonique en guide droit développé à onde progressive*

Pour apprécier l'effet de la courbure, nous considérons maintenant un guide courbe (Fig. 3.13) (acoustitron en géométrie annulaire 2D). Les résultats obtenus pour l'écoulement redressé sont comparés à ceux obtenus ci-dessus pour le même guide développé droit. Les profils de forces obtenus pour cette géométrie courbe sont présentés à la figure 3.14. Ces profils perdent le caractère symétrique observé dans le cas du guide développé droit (Fig. 3.10), mais restent plus importants à l'intérieur des couches limites que dans la partie centrale de la section fluide. Il faut remarquer ici que l'amplitude de la composante radiale de la force (Fig. 3.14.(b)) est beaucoup plus importante que celle obtenue dans le cas du résonateur développé (Fig. 3.10.(b)), et que, dans un acoustitron "courbe", la composante radiale de la force présente une valeur non nulle dans le volume de fluide (hors couches limites), contrairement à la composante axiale. Ainsi, la combinaison de ces composantes de force, associées à des inhomogénéités du champ acoustique et/ou des phénomènes d'instabilités (qui dépassent le cadre de cette étude !...), peut a priori conduire à la formation de cellules de recirculation à l'intérieur du résonateur.

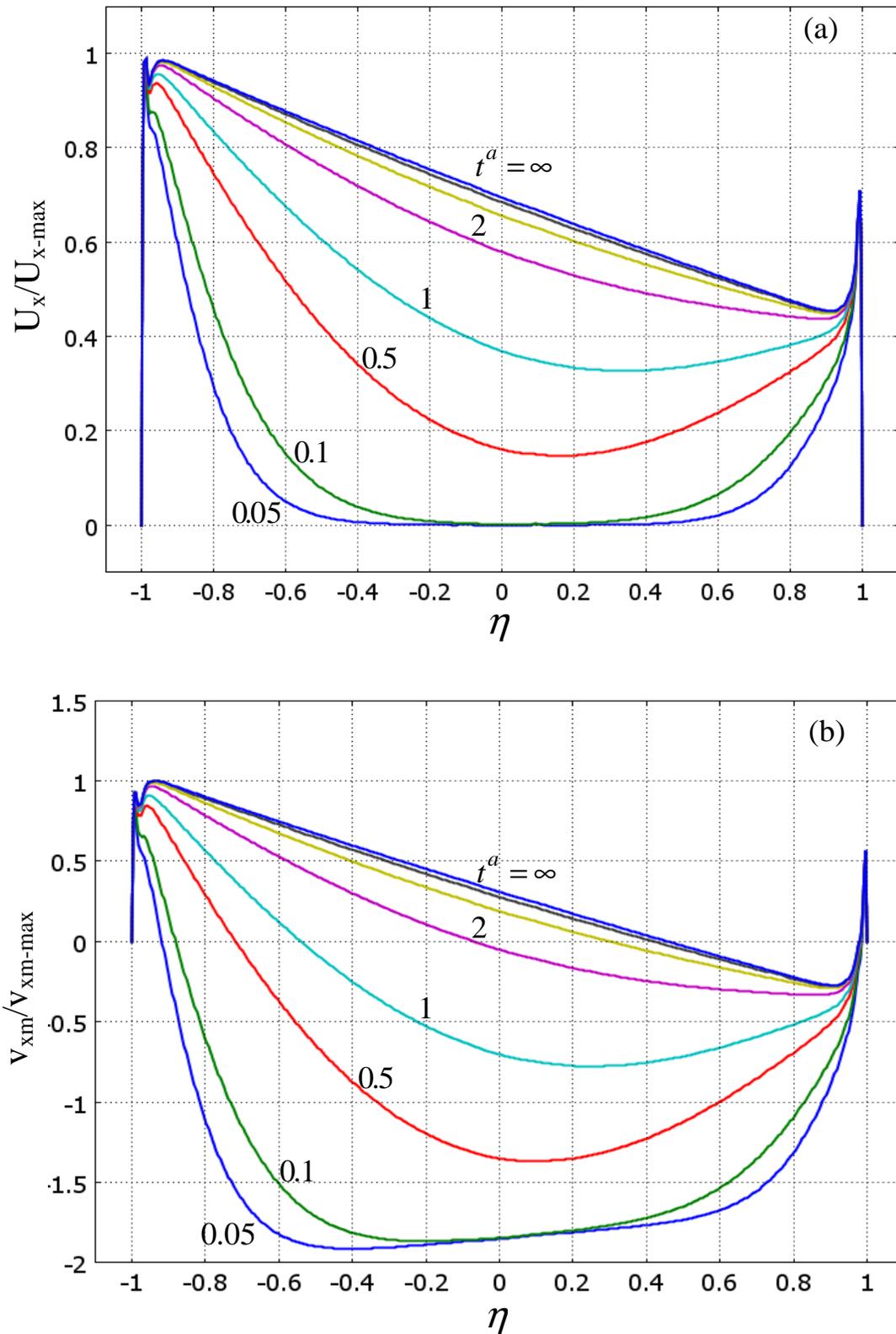


**Figure 3.13** - Schéma d'un acoustitron en 2D illustrant les rayon de courbure  $R_0$  et la coordonnée spatiale adimensionnelle.

Les évolutions temporelles des profils des composantes axiales de vitesse de transport de masse et de vitesse de l'écoulement redressé sont reportées sur la figure 3.15. En raison de la dissymétrie des forces d'excitation, les profils de vitesse en acoustitron "courbe" ne sont pas symétriques et prennent naturellement des profils similaires à ceux de la force d'excitation au tout début de la mise en mouvement (à la condition d'adhérence en paroi près). Nous constatons que l'écoulement redressé est plus rapide au voisinage du rayon intérieur du guide courbe ( $\eta = -1$  de la figure 3.13). La vitesse axiale de transport de masse  $U_x$  (qui représente le flux massique dans le résonateur) est toujours positive (Fig. 3.15.(a)), alors que la vitesse axiale moyenne de l'écoulement redressé  $v_{xm}$  prend des valeurs négatives (Fig. 3.15.(b)), en particulier dans la zone proche du rayon extérieur, mais pas à l'intérieur des couches limites. La vitesse d'écoulement redressé  $\mathbf{v}_m$  prend alors la forme d'un écoulement cisailé, positif au voisinage des parois, sur une épaisseur assez large du côté du rayon intérieur, nettement plus fine à l'échelle de la couche limite visqueuse du côté du rayon extérieur, et à contre courant (négatif) sur une partie de la section légèrement excentrée vers le rayon externe de l'acoustitron (La convention de signe positif est basée sur le régime permanent, pour lequel le fluide circule dans le sens opposé à la progression de l'onde acoustique ; un écoulement dans le sens négatif signifie donc que le fluide circule dans le même sens que l'onde acoustique).



**Figure 3.14** - Profils de forces adimensionnelles obtenus numériquement en acoustitron courbe pour le régime  $\delta_v/D = 0.0022$ , (a) composante axiale, (b) composante radiale.



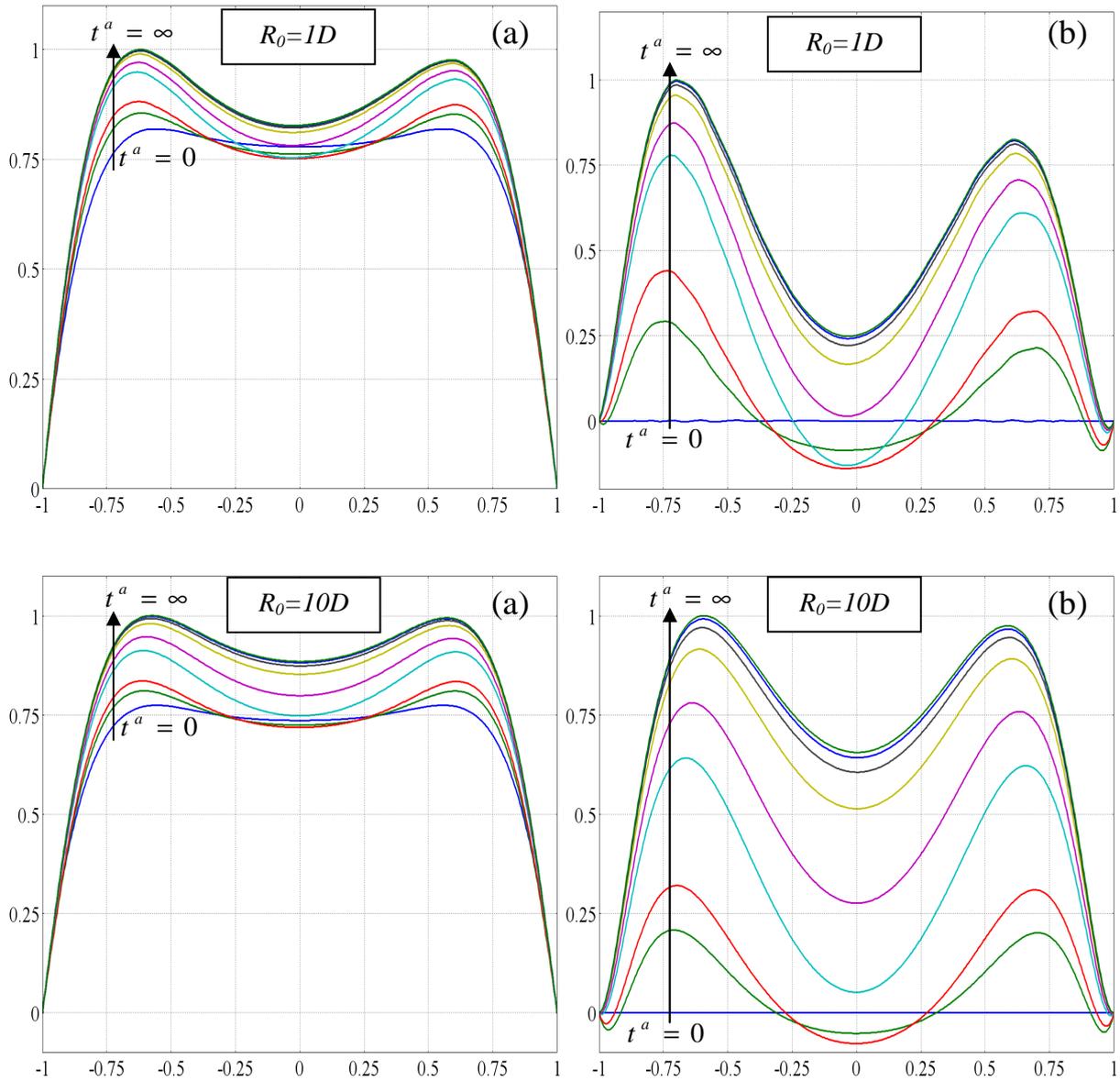
**Figure 3.15** - Évolution du profil de vitesse adimensionnelle à différents instants  $t^a$  du régime transitoire, (a) vitesse de transport de masse, (b) vitesse de l'écoulement redressé. Solution obtenue numériquement en guide annulaire pour le rapport  $\delta_v / D = 0.0022$ .

### 3.1.3 Effet de la courbure sur l'écoulement redressé

#### *Calcul numérique de l'écoulement redressé en guide 2D courbe à partir de la solution analytique acoustique d'une onde progressive harmonique en guide développé droit*

L'effet de la courbure du résonateur sur l'écoulement redressé est à présent étudié en modélisant plusieurs résonateurs de rayons de courbure différents (de  $R_0 = 1D$  à  $R_0 = 10D$ ), tout en restant en régime quasi-adiabatique  $(\delta_v/D) = 0.1$ . Afin d'estimer l'effet de la courbure sur la structure de l'écoulement redressé uniquement, le champ acoustique considéré est celui correspondant à un guide développé droit et calculé de manière analytique. Par conséquent, la force d'excitation de l'écoulement est la même que celle représentée en figure 3.3.(a). Ainsi, le champ acoustique et la force excitatrice qui en résulte restent symétriques ; ils ne sont pas affectés par la courbure du guide. Toute dissymétrie apparaissant dans l'écoulement redressé est alors due à un impact direct de la courbure du guide sur cet écoulement. L'évolution temporelle des profils de vitesse de transport de masse et de vitesse de l'écoulement redressé sont reportés en figure 3.16 pour deux valeurs de rayon de courbure ( $R_0 = 1D$  et  $R_0 = 10D$ ). Les résultats montrent une dissymétrie des profils de vitesse, bien que la force d'excitation soit toujours symétrique. En raison de la courbure du guide, le fluide circule moins vite au voisinage du rayon extérieur du résonateur. Cette dissymétrie est beaucoup plus visible pour la vitesse moyenne de l'écoulement, car elle est peu observable pour la vitesse de transport de la masse. La dissymétrie des profils est plus importante dans le cas d'un résonateur de forte courbure avec un diamètre  $D$  de la même taille que le rayon de courbure  $R_0$ . Cet effet sur l'écoulement redressé devient négligeable pour des rayons de courbure très grands devant  $D$ .

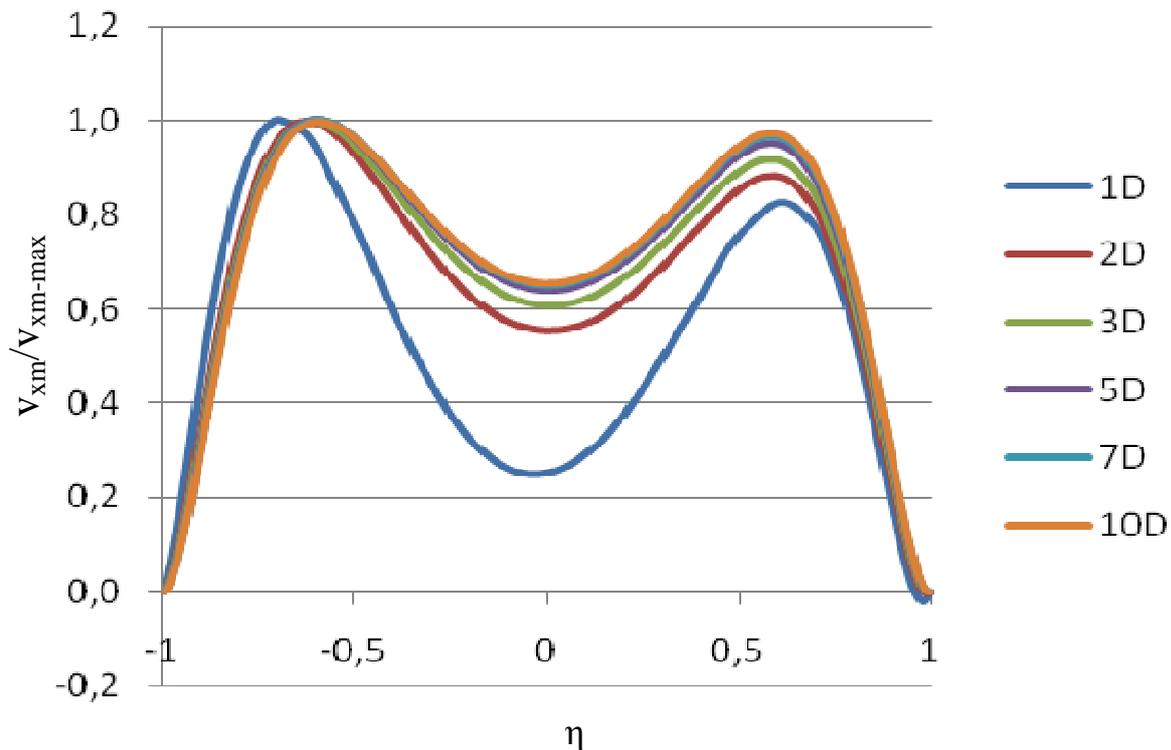
La comparaison des profils de vitesse de l'écoulement redressé en régime permanent ( $t_s \rightarrow \infty$ ) pour différents rayons de courbure (de  $R_0 = 1D$  à  $R_0 = 10D$ ) est présentée en figure 3.17. Une diminution de la courbure (soit une augmentation de  $R_0$ ) modifie le profil : (i) En déplaçant légèrement les maxima de vitesse vers le centre de résonateur. (ii) En augmentant la vitesse au centre de résonateur. La valeur de la vitesse moyenne pour un résonateur de courbure  $R_0 = 1D$  est de 20% inférieure à la valeur obtenue dans le résonateur développé (droit) correspondant (il en est donc de même pour le débit total), c'est-à-dire que la quantité  $\frac{((v_x^a)_{dev} - (v_x^a)_{am})}{v_x^a} \approx 0.2$ . La vitesse est toujours négative à l'intérieur de la couche limite du côté du rayon extérieur.



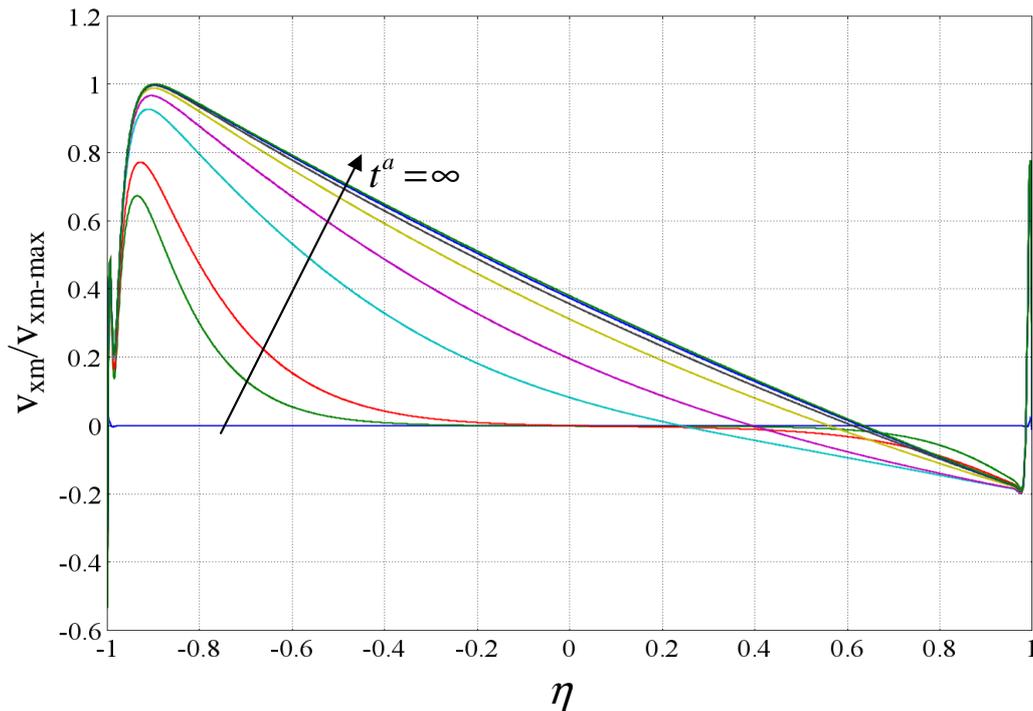
**Figure 3.16** - Profils de vitesses adimensionnelles en fonction du temps adimensionnel pour deux rayons de courbure du résonateur  $R_0=1D$  et  $R_0=10D$ , (a) vitesse de transport de masse, (b) vitesse moyenne de l'écoulement redressé. Le régime est quasi-adiabatique  $(\delta_v/D)=0.1$  et les valeurs de  $t^a$  pour chacune des courbes sont les mêmes qu'en figure 3.15.  $\delta_v/D=0.1$ . Solution analytique pour le champ harmonique en guide développé droit, calcul numérique de l'écoulement redressé en guide courbe.

Ce qu'il faut retenir de cette partie, c'est que la courbure détruit la symétrie de l'écoulement redressé, même si le champ acoustique est parfaitement symétrique. La courbure ralentit le fluide qui circule près du rayon externe du guide, ceci pouvant être dû au fait que le

rayon extérieur est plus long que le rayon intérieur, donc le fluide subit plus de force de viscosité (proportionnelle à la surface de contact fluide/parois) qui s'oppose à son mouvement et le ralentit. La figure 3.17 ne fait pas apparaître un comportement similaire à celui de la figure 3.15.(b) : il n'apparaît pas de circulation en contre-courant sur une partie de la section transversale du guide. Cette différence de comportement provient de la différence du rapport d'interaction onde/parois qui existe entre les deux cas. Pour vérifier cette affirmation, le calcul est réitéré pour un acoustitron présentant un rayon de courbure  $R_0 = 5D$  proche de celui du cas correspondant à la figure 3.15 ( $R_0 = 4.53D$ ) et présentant le même rapport  $\delta_v / D = 0.0022$ . Pour cette configuration, nous retrouvons le comportement de la modélisation entièrement numérique de la figure 3.15.(b), comme le montre la figure 3.18, sauf qu'ici, la zone où le fluide circule dans le même sens de l'onde acoustique est deux fois plus petite que celle observée dans la figure 3.15.(b). La cause de cette différence est le diamètre du guide qui est plus petit que le diamètre du guide du paragraphe (§3.2.1).



**Figure 3.17** - Profils de vitesse adimensionnelle de l'écoulement redressé en régime permanent pour différents rayons  $R_0$  du guide d'onde avec un rapport  $\delta_v / D = 0.1$ . Solution analytique pour le champ harmonique en guide développé droit, calcul numérique de l'écoulement redressé en guide courbe.



**Figure 3.18** - Évolution du profil de vitesse adimensionnelle de l'écoulement redressé en fonction de  $t^a$  du régime transitoire obtenue numériquement à partir d'une solution analytique du champ acoustique en guide développé droit pour un rapport  $\delta_v/D = 0.0022$ , correspondant au cas de l'acoustitron étudié numériquement.

### 3.1.4 Confrontation de ces résultats de modélisation numérique à une mesure expérimentale

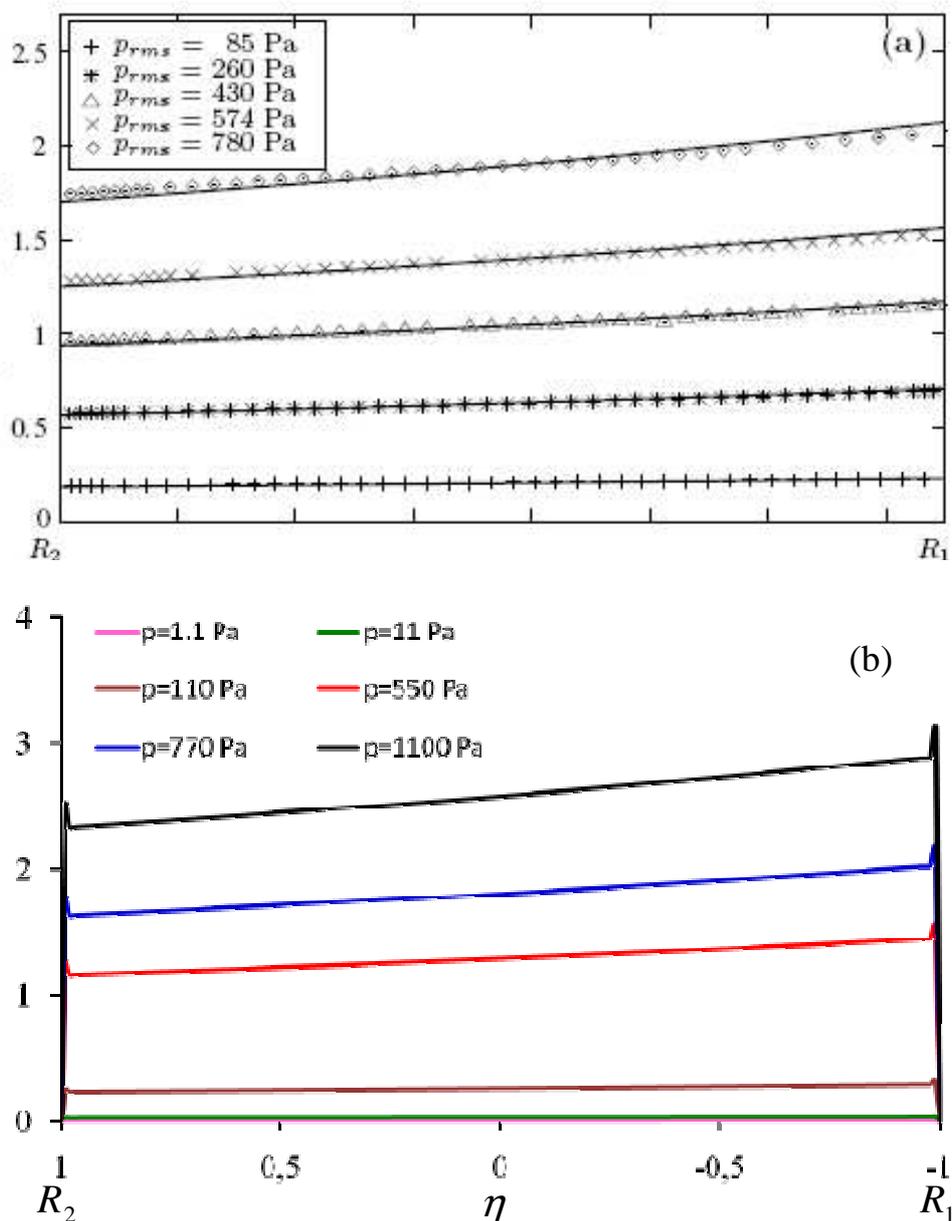
Une étude expérimentale par Vélocimétrie Laser Doppler (VLD) de la vitesse particulière acoustique et de la vitesse des écoulements redressés dans un guide annulaire à onde progressive a récemment été menée au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine par Desjoux et al. [40,76]. Le dispositif expérimental étudié est un résonateur dit "de Ceperley" constitué d'un guide annulaire de section carré. Une onde acoustique propagative est générée par deux haut-parleurs judicieusement placés le long du résonateur et contrôlés en amplitude et en phase. Les mesures montrent que la vitesse particulière acoustique n'est pas uniforme suivant la coordonnée transversale  $\eta$ , l'amplitude de la vitesse particulière étant plus importante en  $\eta = -1$ . Cette non-uniformité est uniquement due à la courbure du résonateur. Les mesures des vitesses de l'écoulement redressé montrent que pour des amplitudes de vitesse particulière acoustique faible, la distribution de la vitesse de l'écoulement redressé

semble rester symétrique par rapport à l'axe du résonateur (où l'amplitude de vitesse est maximale) malgré la dissymétrie présentée par la vitesse acoustique. Par contre, le maximum d'amplitude de la vitesse d'écoulement se déplace vers le rayon extérieur du résonateur ( $\eta=1$ ) quand la vitesse acoustique augmente, le profil de la vitesse d'écoulement devenant alors dissymétrique. Les auteurs avancent deux causes pour expliquer l'origine de ce phénomène. D'une part, ce comportement peut être attribué en partie aux effets d'inertie du fluide qui conduisent à une distorsion des profils de la vitesse des écoulements redressés. Ces effets d'inertie ne sont pas négligeables pour des écoulements dits rapides correspondant à des valeurs du nombre de Reynolds non linéaire  $Re_{NL}$  défini par Menguy et Gilbert [26] supérieur ou égal à 1. Dans les expériences menées par Desjoux et al. [40,76], le nombre de Reynolds non linéaire varie de  $1.6 \cdot 10^{-2}$  à 1.4, ce qui implique que les effets d'inertie du fluide peuvent être en partie responsables du profil asymétrique de la vitesse de l'écoulement redressé sur une section du résonateur. Cependant, la distribution transverse de l'écoulement redressé devient asymétrique dès que l'amplitude moyenne de la vitesse acoustique excède 1 m/s, ce qui correspond à une valeur de  $Re_{NL} = 0.4$ , en deçà de la limite définie par Menguy et Gilbert [26]. D'autre part, la courbure du résonateur, qui influence la distribution spatiale de la vitesse particulière acoustique suivant  $r$ , peut avoir également une influence sur la distribution spatiale transverse de la vitesse de l'écoulement redressé. Ainsi, les effets combinés de ces deux phénomènes participeraient à l'établissement des profils de vitesses d'écoulements redressés observés par Desjoux et al. [40,76]. Ces hypothèses restent néanmoins à vérifier.

Une tentative de comparaison entre les résultats issus de l'étude expérimentale de Desjoux et al. [40,76] et ceux issus de notre modélisation numérique est réalisée. Cette comparaison connaît des limites intrinsèques. D'une part, le modèle numérique décrit le comportement d'un acoustitron (utilisant plusieurs sources en paroi), plus facilement modélisable que le résonateur de Ceperley (utilisant deux sources en paroi) réalisé pour l'expérience. Par ailleurs, le résonateur expérimental est un système 3D de dimensions finies, alors que l'approche numérique proposée ne permet, pour l'heure, que la modélisation d'un résonateur 2D (comportant une dimension transverse infinie). Enfin, les éventuels effets d'inertie du fluide ne sont pas pris en compte dans l'approche numérique proposée. Les dimensions que nous avons choisies pour l'acoustitron sont aussi proches que possible de celles du résonateur de Ceperley expérimental. Ces dimensions sont reportées au tableau 3.1.

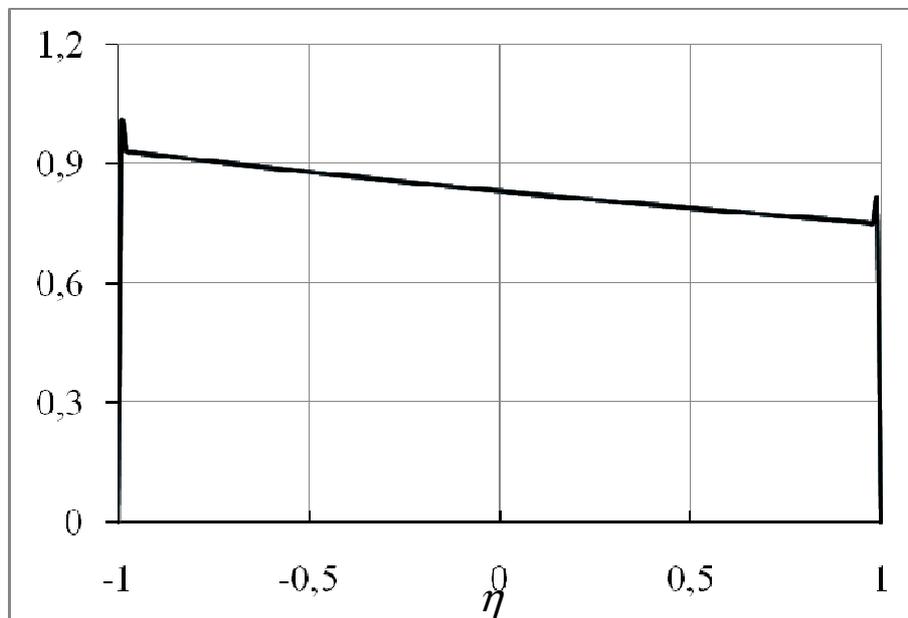
|                     | Longueur         | Diamètre          | Rayon interne           | Rayon externe           | Fréquence        |
|---------------------|------------------|-------------------|-------------------------|-------------------------|------------------|
| <b>Modélisation</b> | $L=2.14\text{m}$ | $D=0.075\text{m}$ | $R_{in}=0.3025\text{m}$ | $R_{ex}=0.3775\text{m}$ | $f=155\text{Hz}$ |
| <b>Expérience</b>   | $L=2.12\text{m}$ | $D=0.076\text{m}$ | $R_{in}=0.299\text{m}$  | $R_{ex}=0.375\text{m}$  | $f=161\text{Hz}$ |

**Tableau 3.1** - Comparaison des dimensions des résonateurs étudiés numériquement et expérimentalement.



**Figure 3.19** - Distribution spatiale transverse de l'amplitude de la composante axiale de la vitesse partulaire acoustique pour différentes valeurs de la pression acoustique dans le guide, (a) dans un résonateur à deux sources (résultats expérimentaux issus de Desjoux et al.[40,76]), (b) dans un acoustitron (résultats numériques).

Une comparaison entre les distributions spatiales transverses expérimentale et numérique de la vitesse particulière est tout d'abord effectuée pour différentes valeurs de la pression acoustique dans le guide. Les résultats sont reportés à la figure 3.19. Un très bon accord est constaté entre les deux résultats. Il faut juste signaler que la pente des courbes est toujours la même, c'est-à-dire que même pour des valeurs très petites de la pression acoustique, il existe une dissymétrie de la composante radiale de la vitesse particulière acoustique, comme le montre la figure 3.20, qui représente la composante axiale adimensionnelle de la vitesse particulière pour différentes valeurs de pression (les courbes sont superposées avec une pente de l'ordre de - 0.1).



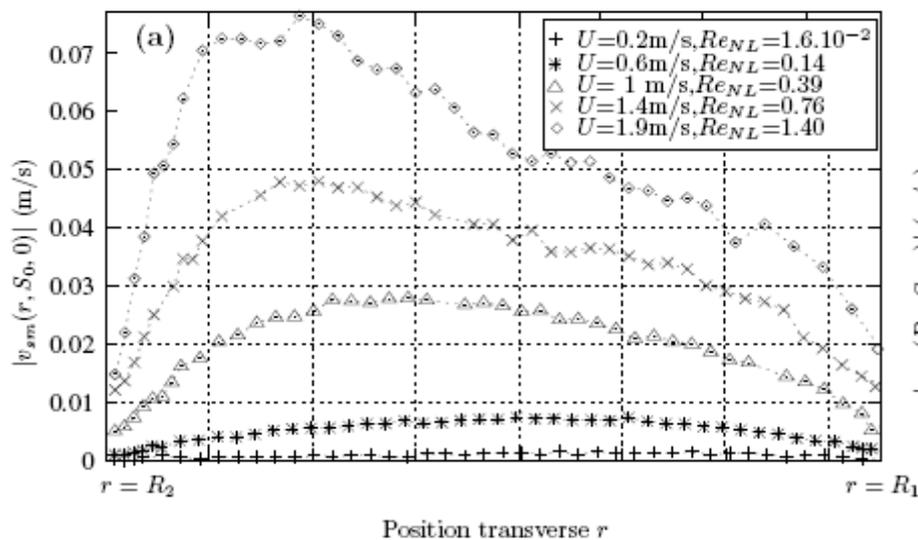
**Figure 3.20** - Distribution transversale de la composante axiale adimensionnelle de la vitesse particulière acoustique adimensionnelle pour différentes pressions acoustiques dans le résonateur courbe (acoustitron).

En ce qui concerne la vitesse de l'écoulement redressé, nous ne disposons pas d'assez d'éléments pour pouvoir comparer les résultats, car le calcul numérique ne converge que pour des faibles valeurs de la vitesse particulière acoustique. L'excitation acoustique se fait par l'introduction d'une vitesse de vibration des parois dans les conditions aux limites. Lorsque cette vitesse d'excitation dépasse une certaine valeur, le calcul numérique n'aboutit plus : soit la solution ne converge pas, soit la capacité mémoire de la machine est dépassée. Nous

ignorons encore la raison de ce comportement, sachant que ce genre de problème ne se rencontre pas pour le calcul du champ acoustique (chaque valeur de pression correspondant à une vitesse de vibration,  $\tilde{p} = 1100 \text{ Pa}$  pour une vitesse de  $v_0 = 1 \text{ mm/s}$ ).

Néanmoins, les profils de la vitesse adimensionnelle de l'écoulement redressé obtenus pour l'acoustitron du paragraphe (§3.1.2) (Fig. 3.15.(b)) montrent un comportement complètement différent de celui observé expérimentalement et reporté en figure 3.21, le résultat numérique faisant apparaître un changement de signe de rotation du fluide sur une même section transversale. Cette différence pourrait peut-être s'expliquer par le fait que les systèmes étudiés sont différents, et que le modèle numérique d'un résonateur 2D ne prend pas en compte avec précision les effets de couches limites et l'impact de la courbure.

Notre tentative de modéliser un résonateurs 2D avec deux sources d'excitations a mis en évidence des comportements identiques, expérimentaux et numériques pour le champ acoustique. Pour la vitesse d'écoulement, nous n'avons pas pu faire aboutir le calcul numérique, car il faut imposer des vitesses importantes de vibration de sources, et nous dépassons rapidement la capacité de la machine. Pour conclure, cet aspect mérite d'être étudié plus en détail, et des vérifications doivent être faites aussi bien numériquement qu'expérimentalement.



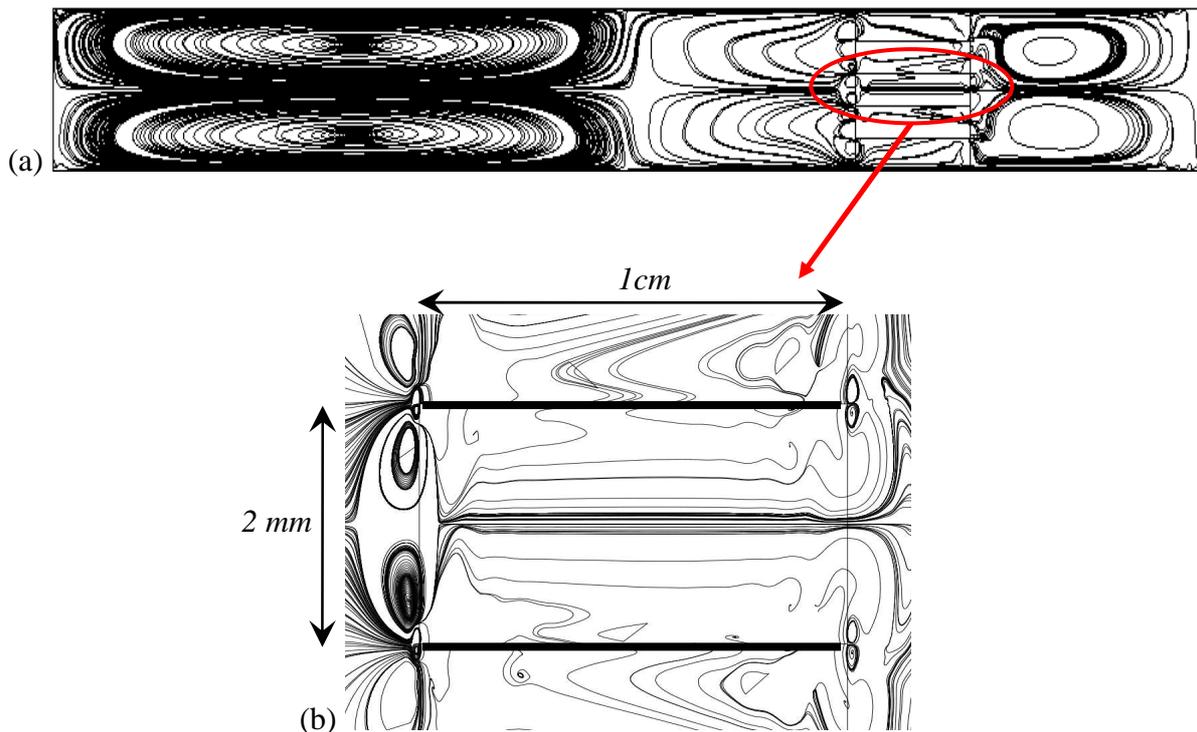
**Figure 3.21** - Distribution spatiale de la valeur absolue de l'amplitude de la composante axiale de la vitesse de l'écoulement redressé  $v_{xm}$  mesurée par VLD pour différentes valeurs de l'amplitude de la vitesse acoustique. Figure issue de [76].

### 3.2 Effet de l'insertion d'un stack en résonateur

#### 3.2.1 Insertion d'un stack en résonateur droit à onde stationnaire

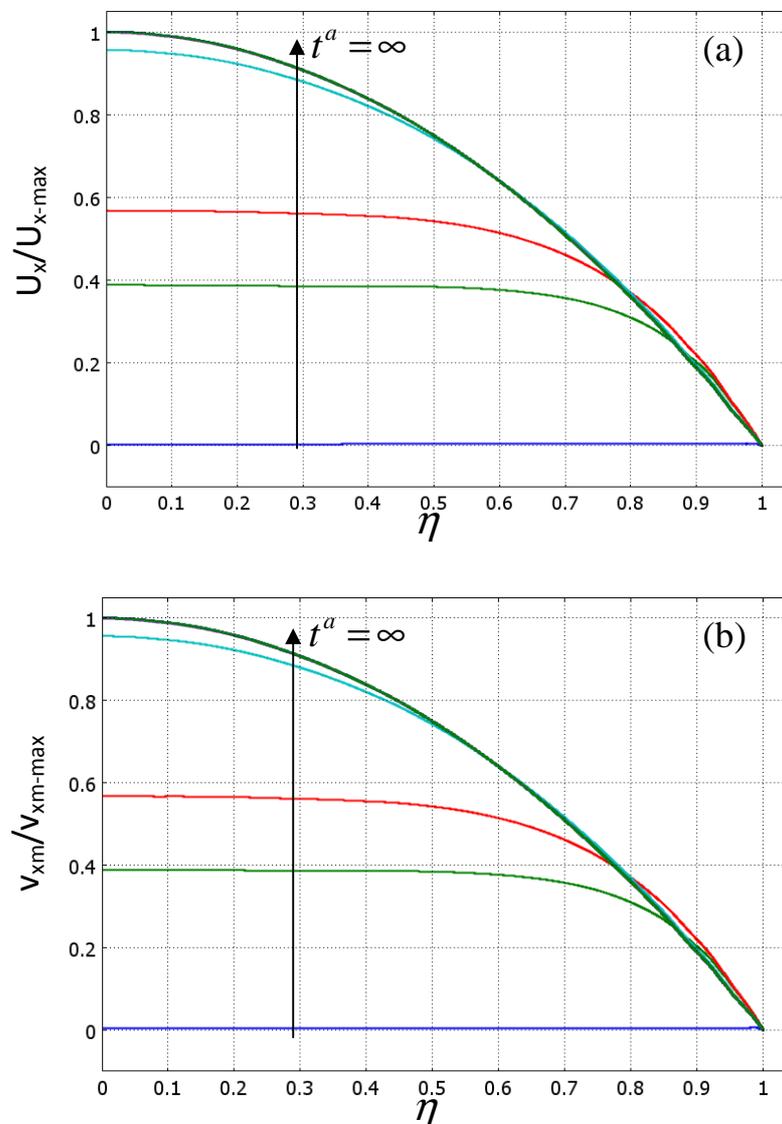
*Solutions numériques (i) du champ acoustique harmonique, puis (ii) de l'écoulement redressé en guide droit à onde stationnaire*

L'effet de l'insertion d'un stack sur l'écoulement redressé est étudié en disposant un stack au 3/4 de la longueur du résonateur droit à onde stationnaire. Pour éviter tout effet de variation de section du guide d'onde sur l'acoustique et sur l'écoulement, l'épaisseur des plaques du stack est supposée négligeable (stack "fin", sans épaisseur). Par ailleurs, pour une comparaison avec le guide sans stack du paragraphe précédent, la longueur des plaques reste petite devant la longueur du résonateur : quatre plaques de longueur de 10 mm sont insérées, la distance entre deux plaques est fixée à 2mm. La structure de l'écoulement obtenu en présence du stack est représentée sous la forme de lignes de flux en figure 3.22.



**Figure 3.22** - Lignes de courant dans un résonateur droit à onde stationnaire équipé d'un stack, (a) structure de l'écoulement sur l'ensemble du résonateur, (b) détail au voisinage de deux plaques du stack.

La première observation est que les cellules de recirculation du côté gauche du résonateur ne sont pas modifiées par rapport au cas sans stack, mais que la structure de l'écoulement dans la deuxième moitié du résonateur est totalement différente. Le placement du stack dans cette zone empêche la formation de grandes cellules de recirculation sur la moitié du guide. Par contre, deux cellules se forment entre le stack et l'extrémité fermée du résonateur. On remarque également des tourbillons de très petite taille qui se forment aux deux extrémités du stack. Ils sont le résultat de forces d'excitation très localisées dans cette petite zone. En comparant la taille de ces tourbillons avec les dimensions du système, il est possible de se rendre compte de l'effet très important du maillage, un maillage très fin étant indispensable pour bien modéliser les phénomènes présents dans cette partie.



**Figure 3.23** - Évolution de profil de vitesse adimensionnelle en fonction de  $t^a$  du régime transitoire, (a) vitesse de transport de masse, (b) vitesse de l'écoulement redressé.

### 3.2.2 Insertion d'un stack en résonateur droit à onde progressive

Le calcul ici est réalisé numériquement dans un acoustitron développé (même résonateur que celui étudié au paragraphe (§3.1.1)) équipé d'un stack et siège d'une onde progressive (le stack est composé de 15 plaques d'une épaisseur très fine et une longueur de 0.01m). Le modèle est réalisé sur un maillage développé droit. La vitesse de transport de masse  $U_x$  et la vitesse moyenne  $v_{xm}$  de l'écoulement redressé sont représentées en figure 3.23. En dehors du voisinage du stack, le profil de vitesse est sensiblement constant quelle que soit la position axiale de la section. Par comparaison avec un tel guide sans empilement de plaques, l'insertion du stack a pour effet d'augmenter considérablement l'amplitude de la vitesse de l'écoulement redressé ( $v_{ms}/v_m=25$ ) : le stack se comporte comme un moteur pour l'écoulement redressé, et le débit observé est nettement supérieur à celui développé par les seules couches limites sur les rayons interne et externe du guide. En raison de ce "fort" débit, les profils de vitesse prennent en dehors du stack la forme d'un écoulement de Poiseuille, comme le fait tout écoulement en conduite à bas Reynolds.

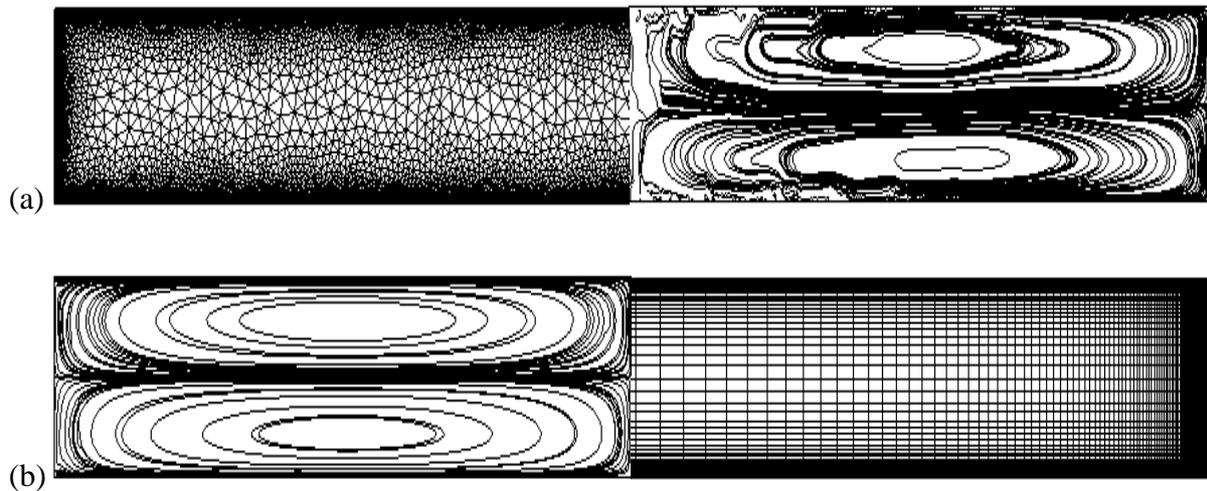
## 4 Sensibilité des solutions au maillage utilisé

Tous les résultats présentés dans ce document ont été obtenus par des modélisations avec le code d'éléments finis "COMSOL Multiphysics". Le point de départ pour la méthode des éléments finis est la partition de la géométrie en petites unités proportionnées finies, d'une forme simple appelés "éléments". La discrétisation spatiale d'un milieu continu par un ensemble d'éléments constitue le maillage. Pour la résolution de problème par la simulation numérique, le maillage de domaine est généré par un "Mailleur", qui est un logiciel permettant de discrétiser le domaine d'étude en éléments (triangles, quadrilatères, etc.). Cette discrétisation est réalisée automatiquement (avec les paramètres par défaut) ou manuellement (en ajustant ces paramètres). Le mailleur est intégré à l'interface graphique de "COMSOL Multiphysics".

Le calcul est ensuite réalisé sur la base de ce maillage, en discrétisant une forme variationnelle des équations locales à résoudre sur le domaine d'étude et des conditions aux limites posées sur les frontières du domaine maillé. En raison des approximations de la discrétisation puis du traitement numérique des matrices, la solution numérique obtenue n'est

pas une solution exacte, mais satisfait les équations de base en moyenne, à une échelle spatiale proche de la taille des éléments du maillage. La solution numérique dépend donc de la discrétisation choisie, ce qui est particulièrement sensible pour les problèmes d'acoustique en fluide thermovisqueux, qui mettent en jeu des échelles spatiales très différentes (de plusieurs ordres de grandeurs, quelle que soit la fréquence) entre la longueur d'onde acoustique  $\lambda$  et les épaisseurs de couches limites ( $\delta_h$  et  $\delta_v$ ). Pour les modèles développés dans ce travail, il faut prendre grand soin des conditions et de la qualité des maillages pour obtenir une solution acceptable, et ce pour les différentes étapes du calcul. En effet, les champs discrétisés au cours de nos calculs concernent successivement (i) le champ harmonique, puis (ii) les forces et termes sources résultant d'effets non-linéaires, et enfin (iii) la solution pour les phénomènes lents (écoulement redressé et transferts thermiques) recherchés. Pour éviter toute approximation liée à la projection du champ d'un maillage sur un autre, le même maillage est utilisé tout au long de la procédure ; or l'expérience nous a montré qu'un maillage bien adapté pour le calcul numérique du champ acoustique ne constitue pas toujours une bonne discrétisation pour représenter l'écoulement redressé.

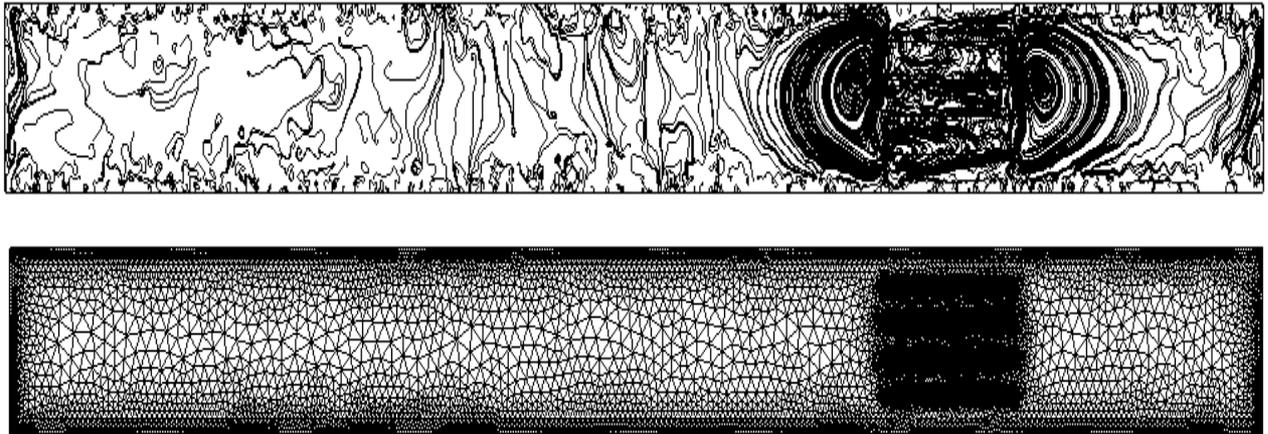
Dans notre étude, nous n'avons modélisé que des résonateurs 2D avec seulement deux types d'éléments : (i) des triangles quadratiques, ou (ii) des quadrangles quadratiques. Pour modéliser l'écoulement redressé avec l'outil disponible sous "COMSOL Multiphysics", le maillage par des éléments quadrangles s'avère mieux adapté que celui par des triangles. La figure 3.24 illustre avec des lignes de courant, la structure de l'écoulement redressé dans un résonateur à onde stationnaire dans le cas de ces deux types d'éléments : nous constatons que le maillage à base de quadrangles donne une allure plus régulière qu'un maillage similaire à base de triangles, même si pour ce dernier le maillage est très raffiné près des parois, et il possède un nombre supérieur de degrés de liberté "ddl" (85672 éléments triangles et 931165 ddl, contre 36000 éléments quadrangles et 760626 ddl). Les deux types d'éléments permettent de bien décrire l'allure générale de l'écoulement secondaire, mais la figure 3.24.(a), pour un maillage à base de triangles ne respecte pas la symétrie sur une section transversale du résonateur, alors qu'elle est bien respectée pour un maillage à base de quadrangles (Fig. 3.24.(b)). Un réglage de paramètres permet d'équilibrer en post-traitement le nombre de lignes de courant pour obtenir une parfaite symétrie sur le maillage à base de quadrangles. En revanche, une telle différence entre le maillage à base de triangles et de quadrangles n'est pas décelable pour le calcul du champ acoustique ; à coût de calcul similaire, les deux types de maillage sont capables de décrire ce champ avec une précision comparable.



**Figure 3.24** - *Représentation des lignes du courants de l'écoulement redressé pour deux types de mailles, (a) éléments quadratiques triangulaires, (b) éléments quadratiques quadrangles.*

L'utilisation d'un très grand nombre d'éléments et de degrés de liberté est rendue nécessaire par le besoin de modéliser avec précision le champ à l'intérieur des couches limites, puisque c'est précisément à cet endroit que se développent les effets non-linéaires qui excitent les phénomènes recherchés. L'utilisation de maillage *adaptatif* et *anisotrope* est fortement conseillé pour modéliser dans de bonnes conditions les effets de couche limite dans le fluide thermovisqueux selon Joly [72], alors que le code "COMSOL Multiphysics" utilisé pour cette étude n'offre pas la possibilité de ce type de maillage. Le maillage adaptatif et anisotrope à partir de triangles fournit de très bons résultats pour calculer le champ acoustique en fluide thermovisqueux (Joly [72]), mais il n'a jamais été utilisé pour calculer l'écoulement redressé associé. Au vu de la figure 3.25 (maillage et calcul réalisés sous "COMSOL Multiphysics" pour un maillage à base de triangles isotropes (Fig. 3.25.(b)), raffinés près des parois et à l'intérieur du stack), nous ne sommes pas certains que ce soit la bonne solution pour diminuer le nombre d'éléments, c'est-à-dire diminuer le nombre de "ddl" et par conséquent gagner en mémoire et en coût de calcul tout en conservant une bonne précision : nous constatons clairement en figure 3.25.(a) que le maillage grossier ne représente pas correctement l'écoulement redressé ; les lignes de courant semblent distribuées de manière complètement aléatoire dans la partie gauche du résonateur, au voisinage du stack où le maillage est bien fin, les lignes de courant présente quand même une structure régulière

pouvant ébaucher une solution numérique pour l'écoulement redressé ; elle n'est cependant pas vraiment correcte puisque les effets de couches limites le long des parois du guide, loin du stack, ont été totalement ignorés par le calcul sur ce maillage. Comme pour l'exemple ci-dessus, pour l'écoulement redressé et à des conditions de calcul comparables (temps et nombre de ddl), un maillage soigné à base de quadrangles fournit un résultat (Fig. 3.22) de bien meilleure précision que celui à base de triangles (Fig. 3.25).



*Figure 3.25 - Lignes du courant dans un résonateur à onde stationnaire équipé d'un stack pour un maillage triangulaire fin dans le stack et grossier dans le reste du résonateur.*

## **5. Conclusion et perspectives pour la modélisation des écoulements redressés**

La formulation générale portée sur la variable de la vitesse de transport de masse est utilisée pour calculer numériquement l'écoulement redressé. Cette vitesse représentant le débit massique moyen permet la résolution des équations par le code de calcul "COMSOL Multiphysics". La résolution numérique de la formulation sur des résonateurs à ondes stationnaires ou progressives concorde bien avec la théorie de ces types de guides. Elle montre l'effet non négligeable de la courbure du guide sur l'écoulement redressé ainsi que sur le champ acoustique. Nous avons montré que la présence d'un stack dans le guide change la structure de l'écoulement redressé en comparaison avec celui présent dans un résonateur sans stack. Nous avons également montré que le choix du maillage est très important.

À moyen terme, cette formulation sera appliquée à l'étude des phénomènes acoustiques dans différents dispositifs de géométries plus complexes (en micro-fluidique, par exemple). Il sera intéressant par la suite de coupler les phénomènes d'écoulement redressé et de transfert thermique en résolvant la formulation entière qui prend en compte l'équation de conservation de l'énergie (2.29).



## Chapitre 4

### VERS LA MODÉLISATION EN THERMOACOUSTIQUE

*La formulation analytique présentée dans le deuxième chapitre est utilisée pour décrire les transferts thermiques associés à une onde acoustique. Les écoulements redressés étant ici exclus, l'équation de l'énergie se réduit aux seuls effets de diffusion thermique, en rendant compte, à l'échelle de temps "long", de l'effet thermoacoustique développé à l'échelle de la période acoustique. Un résonateur à onde stationnaire est modélisé dans son fonctionnement en réfrigérateur, afin d'illustrer l'aptitude de la formulation à rendre compte du comportement d'une telle machine thermoacoustique. Outre des difficultés numériques liées au maillage et au coût de calcul, cette étude permet d'identifier les limitations intrinsèques à la formulation utilisée et aux hypothèses sur lesquelles elle repose.*

## 1 introduction

Après avoir étudié le phénomène lent d'écoulement redressé dans le chapitre précédent, nous étudions ici d'autres phénomènes lents qui sont les transferts thermiques, parmi lesquels figure l'*effet thermoacoustique*, associant un transfert thermique à la présence d'une perturbation acoustique. Ce chapitre ne tente pas la modélisation complète de cet effet, car l'hypothèse d'un fluide quasi-homogène et au repos retenue au début de ce travail, ne permet pas de rendre compte des forts gradients de température présents dans les machines thermoacoustiques. Cette ouverture sur les transferts thermiques a plutôt pour objet de tester la faisabilité de nos modèles et d'illustrer l'influence, bien connue des thermoacousticiens, de quelques paramètres comme la position du stack dans le résonateur ou encore la présence des échangeurs de chaleurs. Cette étude permet surtout de cerner les limites de notre approche, et d'identifier quels couplages supplémentaires doivent être considérés.

Dans notre approche, la composante harmonique du champ acoustique présente un effet sur les transferts thermiques à l'échelle lente du temps, mais tout effet réciproque est négligé (ce qui exclut la modélisation de systèmes de type moteur thermoacoustique). Aussi nos modèles présentés ci-dessous considèrent

- un fluide homogène et au repos, auquel est appliquée une petite perturbation acoustique en régime harmonique (les écoulements redressés ne sont donc pas pris en compte bien que les effets de streaming et de transfert thermique sont inséparables dans les machines thermoacoustiques, tout effet d'inhomogénéité du fluide est négligé, en particulier toute variation spatiale de la température  $T_m$ ),
- puis les seuls effets non-linéaires thermiques de cette solution harmonique, en association avec les transferts thermiques à l'échelle de temps long. Il s'agit en particulier de l'effet thermoacoustique développé par le champ harmonique ; les transferts convectifs à l'échelle de temps long sont négligés, en raison de l'hypothèse d'un fluide au repos et sans streaming, de sorte que seuls les transferts par conduction sont pris en compte à cette échelle de temps.

La description théorique des transferts thermiques associés à une onde acoustique, déjà présentée au deuxième chapitre, est rappelée au paragraphe (§2.1) et simplifiée, compte tenu des hypothèses retenues (absence d'écoulement redressé, champ uniforme de pression statique). L'absence d'écoulement redressé élimine le transfert thermique par convection

forcée, donc ce que nous étudions est la conduction pure dans le fluide, en prenant compte les effets acoustiques rapides dans les couches limites thermovisqueuses. L'étude proposée permet de quantifier et de localiser les effets des termes sources responsables des transferts de chaleur dus à l'effet thermoacoustique en machines réfrigérantes, et de prévoir l'évolution de la machine tant que le gradient de température reste modeste (pour ne pas trop s'éloigner de l'hypothèse d'un fluide homogène).

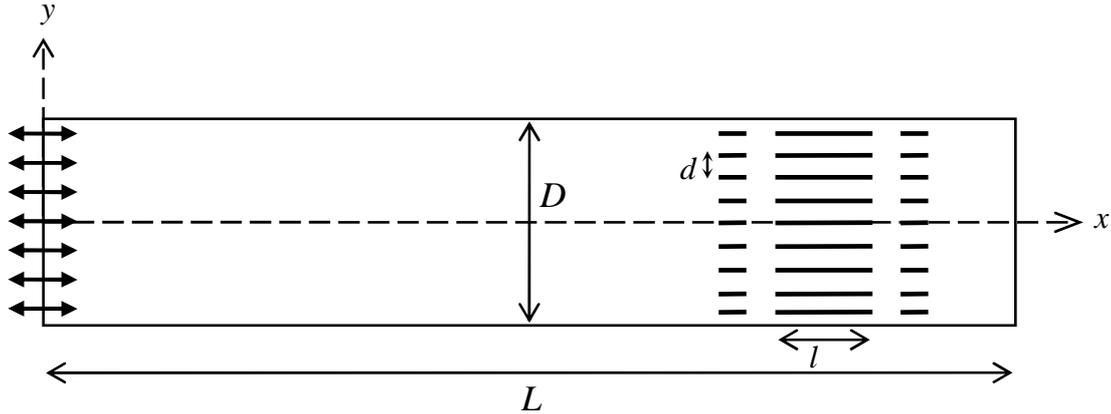
## 2 Modélisation d'un réfrigérateur thermoacoustique

Le système thermoacoustique étudié dans ce chapitre est un réfrigérateur (Fig. 4.1). Il se compose d'un résonateur fermé à une de ses extrémités, à l'intérieur duquel une onde acoustique stationnaire est générée, au niveau de l'extrémité opposée, par un mouvement de piston (ou le mouvement de vibration d'une membrane de haut-parleur). Pour des raisons de simplicité et de coût de calcul, le résonateur est considéré rempli d'air dans les conditions ambiantes de pression et de température, et il est équipé d'un empilement de plaques (stack) avec deux échangeurs de chaleur à ses extrémités. Sous l'effet de l'onde acoustique, un flux de chaleur apparaît, associé à un gradient de température le long des plaques. Pour les présents modèles 2D, le stack et les échangeurs considérés sont constitués de plaques minces, c'est-à-dire sans épaisseur. Ces plaques sont donc monodimensionnelles, caractérisées par leur seule longueur. Cette hypothèse présente deux avantages :

1. Tout transfert thermique par conduction à l'intérieur des plaques est éliminé (en pratique, cette conduction modifie la distribution de la température par un flux de chaleur opposé au transfert thermoacoustique).
2. La section du guide d'onde n'est pas diminuée par l'encombrement du stack et des échangeurs de sorte que les conditions de propagation de l'onde ne sont pas trop modifiées.

La présence de ces plaques 1D se traduit alors par la condition isotherme et d'adhérence respectivement, pour les composantes harmoniques  $\tilde{T}$  et  $\tilde{v}$ . Ces plaques ne participent donc pas au flux thermique par conduction à l'échelle du temps long. La fréquence d'excitation est accordée de manière à ce que la longueur du résonateur corresponde à une demi-longueur d'onde en l'absence du stack. Le réfrigérateur thermoacoustique est simulé numériquement en 2D en calculant (*i*) le champ acoustique généré par la source sonore située à l'extrémité  $x = 0$

du résonateur, puis (ii) l'équation de conduction thermique, pour laquelle les phénomènes non-linéaires lents se traduisent par des termes sources au second membre qui représentent la quantité de chaleur développée par effet thermoacoustique ou dissipée par des phénomènes irréversibles. Le domaine de calcul est l'ensemble du volume fluide du résonateur où deux cas sont étudiés, d'abord le cas d'un stack sans échangeurs de chaleurs (§2.2), puis dans un second temps celui d'un stack muni de deux échangeurs de chaleur (§2.3).



**Figure 4.1 :** Schéma du réfrigérateur thermoacoustique étudié.

## 2.1 Modèle théorique

L'équation qui régit les transferts de chaleur associés à l'onde acoustique dans le résonateur est l'équation de la chaleur (2.29) à l'échelle lente ( $t_s = t$ ), rappelée ici,

$$(\rho C_p)' \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_m \right) + (\rho h)' \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p_m \right) = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m) + q + \langle \mathbf{E}_{dis} \rangle. \quad (4.1)$$

À cette échelle du temps, le fluide est supposé respecter une condition isobare, donc le terme  $\frac{\partial p_m}{\partial t}$  est négligé. Puisque les écoulements secondaires sont ignorés  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$  (hypothèse d'un fluide au repos), les effets convectifs sont donc également négligés ( $\mathbf{U} \cdot \nabla T_m = 0$  et  $\mathbf{U} \cdot \nabla p_m = 0$ ). Dans ces conditions, l'équation de l'énergie se réduit à une équation de diffusion thermique,

$$(\rho C_p) \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m) + q + \langle \mathbf{E}_{dis} \rangle. \quad (4.2)$$

où  $q$  exprime un terme source qui prend en compte tous les effets non-linéaires acoustiques, dont l'effet thermoacoustique. Pour cette étude, nous considérons pour  $q$  les seuls termes  $q_a$  (Eq. (2.34)) et  $q_b$  (Eq. (2.35)), rappelées ici :

$$q_a = - \left\langle \left( \rho_m \tilde{C}_p + C_{pm} \tilde{\rho} \right) \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t_a} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla T_m \right) \right\rangle - \left( \rho_m C_{pm} \right) \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle, \quad (4.3)$$

$$q_b = \left\langle \left( \rho_m \tilde{h} + h_m \tilde{\rho} \right) \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t_a} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_m \right) \right\rangle + \left( \rho_m h_m \right) \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle. \quad (4.4)$$

En négligeant les perturbations de la capacité calorifique  $\tilde{C}_p$ , de coefficient  $\tilde{h}$ , et les termes convectifs associant la vitesse particulière acoustique  $\tilde{\mathbf{v}}$  et les gradients  $\nabla T_m$  et  $\nabla p_m$ , ces termes se réduisent à,

$$q_a = - \left\langle C_{pm} \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t_a} \right) \right\rangle - \left( \rho_m C_{pm} \right) \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle, \quad (4.5)$$

$$q_b = \left\langle h_m \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t_a} \right) \right\rangle + \left( \rho_m h_m \right) \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle. \quad (4.6)$$

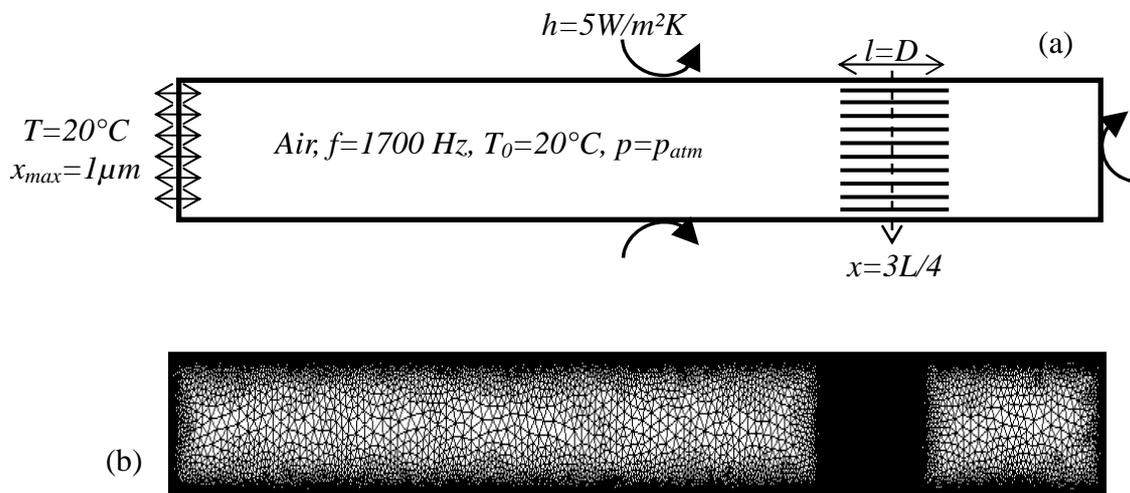
où  $\frac{\partial}{\partial t_a} = -i\omega$  (hypothèse du régime harmonique en acoustique).

Dans l'équation de diffusion thermique (4.2), le terme  $\nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m)$  décrit le transfert thermique par conduction dans le fluide en négligeant tout flux retour par conduction dans les plaques du stack ou des échangeurs (ce qui élimine des phénomènes qui participeraient à la diminution du rendement du système). Enfin, le terme  $\langle \mathbf{E}_{dis} \rangle$  représente la dissipation par viscosité. En négligeant les termes du quatrième ordre en perturbation acoustique dans l'expression de  $\langle \mathbf{E}_{dis} \rangle$ , seul le terme  $E_4$  (Eq. (2.42)) apparaît au second membre pour les effets irréversibles  $\langle \mathbf{E}_{dis} \rangle = E_4$ , avec

$$E_4 = \mu_m \left\langle \left( \nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T \right) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \right\rangle + \mathbf{I} \eta_m \langle (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle. \quad (4.7)$$

## 2.2 Réfrigérateur sans échangeurs de chaleur

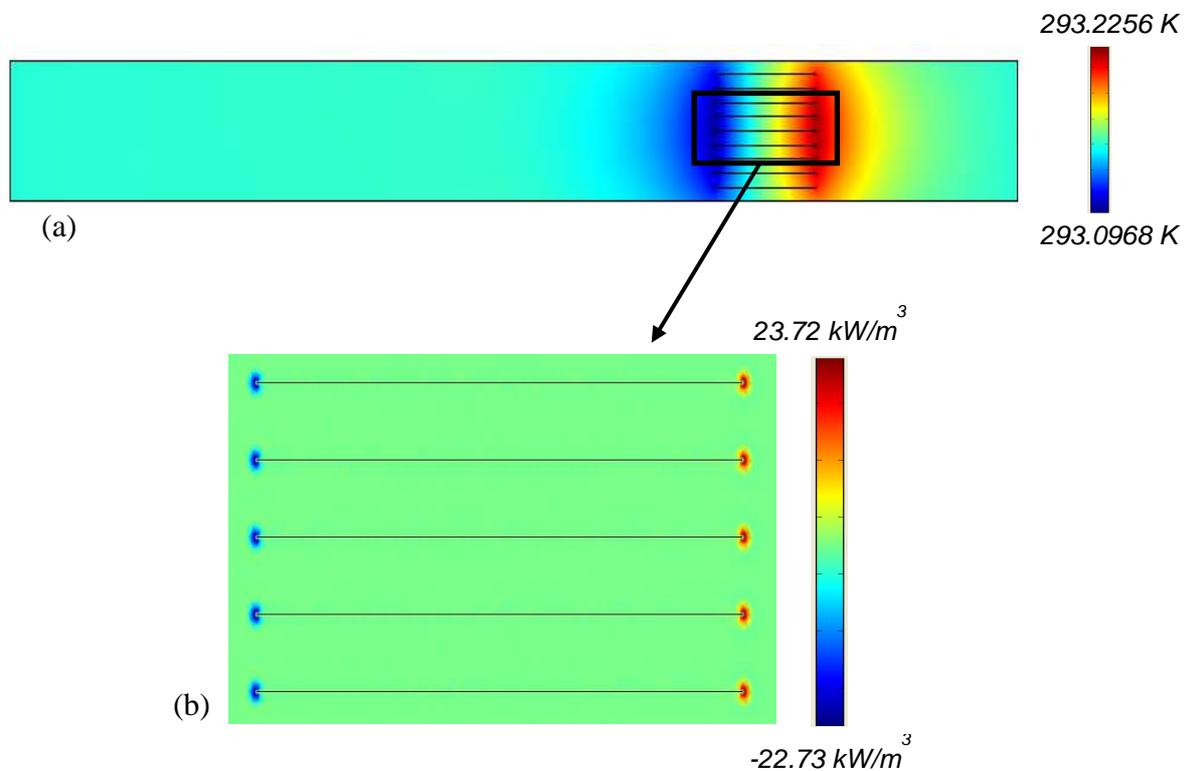
Nous étudions dans un premier temps un réfrigérateur à onde stationnaire équipé d'un stack (Fig. 4.2(a)), afin de valider qualitativement la formulation et vérifier que le comportement thermique du système correspond bien à celui d'un réfrigérateur. Le centre du stack est positionné à une distance  $x = 3L/4$ , avec  $L$  la longueur du réfrigérateur ( $L = 0.1m \Rightarrow f = 1700Hz$  où  $f$  la fréquence d'excitation). La longueur du stack  $l$  est égale à la largeur du résonateur  $D$  ( $l = D = 0.01m$ ), et la distance entre deux plaques du stack est d'un millimètre ( $d = 0.001m$ ). Le fluide utilisé est de l'air à la pression atmosphérique et à la température ambiante. Les conditions aux limites imposées pour le calcul numérique sont les suivantes : (i) le piston placé à l'extrémité gauche est isotherme, c'est-à-dire à une température constante, avec un déplacement maximal  $x_{max} = 1\mu m$ , (ii) sur les trois autres faces nous avons imposé une condition de flux convectif avec le milieu ambiant, caractérisé par un coefficient d'échange  $h$  faible ( $h = 5W / m^2 K$ ) et une température fluide de  $20^\circ C$ . Le maillage utilisé est composé de 106544 éléments triangulaires quadratiques, très fins au voisinage des parois (Fig. 4.2(b)).



**Figure 4.2 :** Géométrie du réfrigérateur sans échangeurs - (a) : les conditions aux limites- (b) : le maillage utilisé pour la résolution numérique.

La solution stationnaire du champ de température dans le réfrigérateur, en conduction pure dans le fluide, est illustrée dans la figure 4.3.(a). Cette solution met en évidence un gradient de température entre les deux extrémités du stack. Ce gradient est le résultat de la

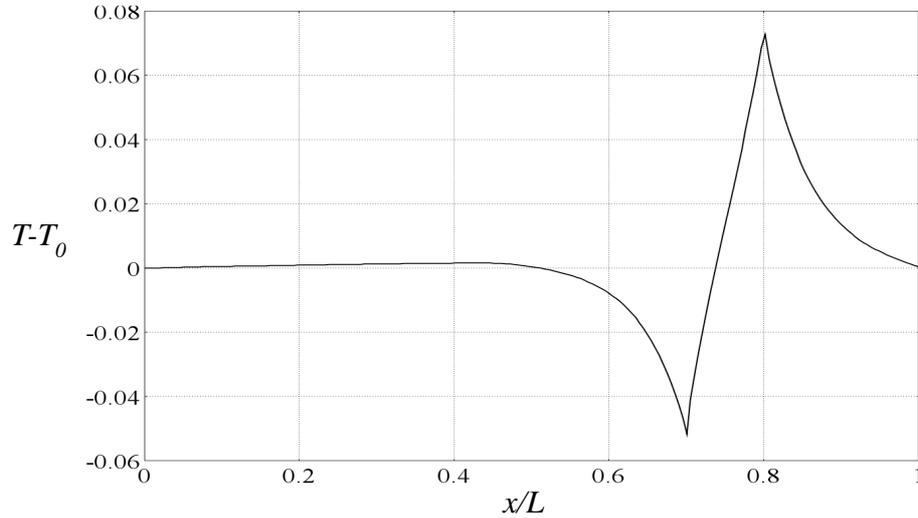
distribution des termes sources thermiques ( $q=q_a+q_b$ ) développé par la composante harmonique du champ acoustique. La distribution de  $q$  est illustrée en figure 4.3(b). Ce terme  $q$  est particulièrement important aux extrémités du stack (il est faible partout ailleurs). Il est négatif (extraction de chaleur) à l'extrémité du stack située du côté de la paroi vibrante et positif (apport d'énergie thermique) de l'autre côté du stack. Pour cette position du stack dans le résonateur (centre du stack positionné à  $x=3L/4$ ), on remarque que la distribution de  $q$  n'est pas symétrique par rapport au centre du stack, ce qui donne un gradient de température asymétrique aussi. Cette dissymétrie est principalement due à la contribution des phénomènes dissipatifs. Le côté chaud correspond aux valeurs positives et le côté froid aux valeurs négatives du terme  $q$ .



**Figure 4.3 :** - (a) : solution Stationnaire du champ de température, - (b) : le terme  $q$  dans le stack.

Le gradient le long du stack génère un flux thermique par conduction (sensiblement uniforme) qui vient compenser le transfert de chaleur assuré par l'effet thermoacoustique (Fig. 4.4). L'écart de température est très faible en raison de la petite perturbation acoustique,

induite par le piston, qui donne un drive ratio très petit (dans notre cas d'étude, le drive ratio est de l'ordre de  $10^{-3}$ ).

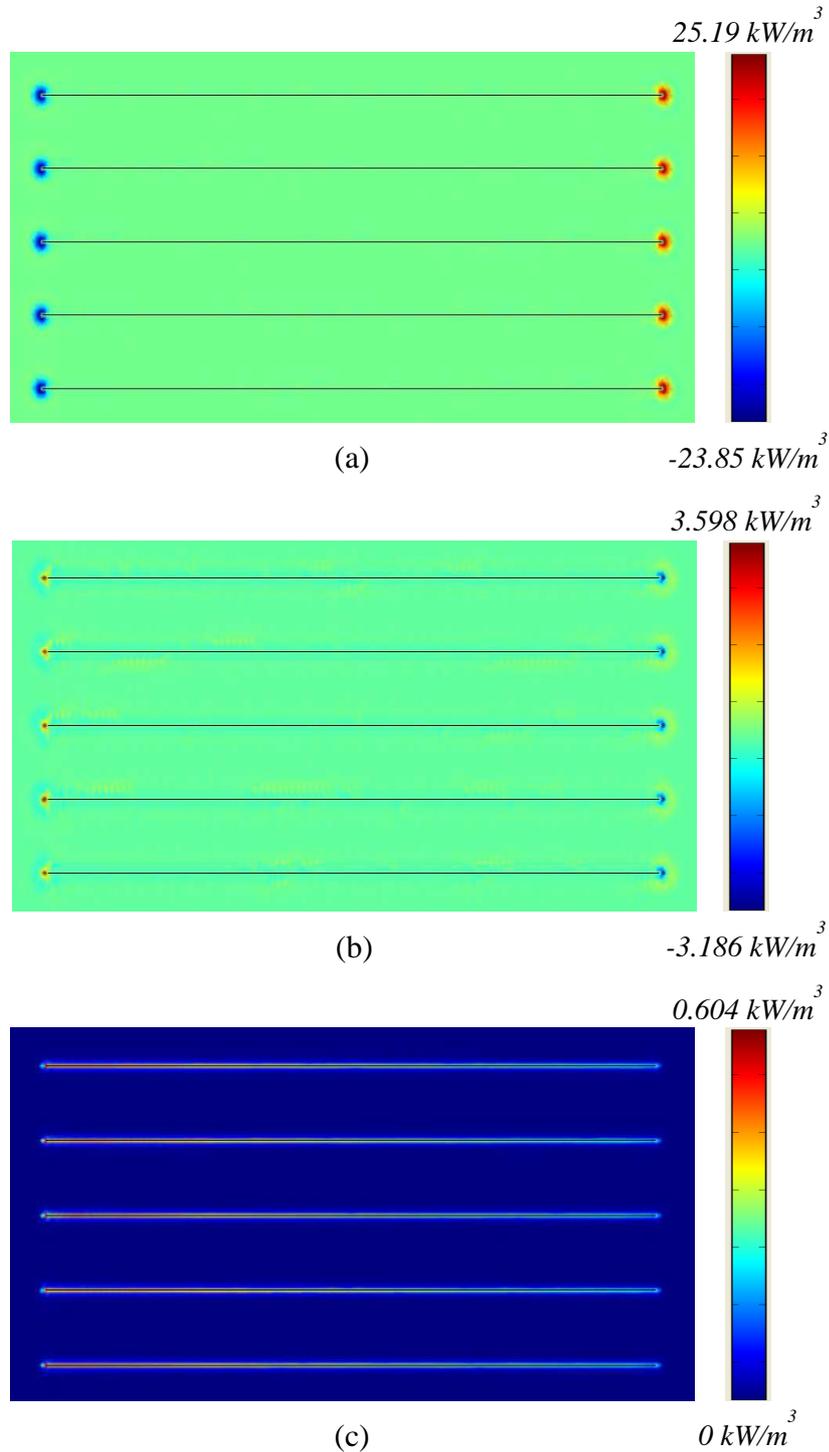


**Figure 4.4 :** Écart de température le long de l'axe du résonateur ( $y=0$ ).

### 2.2.1 Analyse des termes sources

En représentant graphiquement les deux composantes du terme  $q$  (Fig. 4.5), nous retrouvons le fait que les composantes  $q_a$  et  $q_b$  sont localisées très près des extrémités du stack. Le terme prépondérant est  $q_a$  (Fig. 4.5.(a)), il est environ 7 fois plus important que la composante  $q_b$  (c'est-à-dire que la contribution des variations harmoniques de température est beaucoup plus importante que celle de la pression acoustique). Ces deux termes, confinés aux extrémités des plaques, sont de signe opposés. Pour le terme  $q_b$ , nous constatons que la valeur positive est entourée par une petite zone où la valeur est négative, et inversement à l'autre extrémité de la plaque (Fig. 4.5.(b)). Ce comportement peut être le résultat d'un maillage un peu trop grossier par rapport à la taille de la couche limite thermique  $\delta_h$ . Le terme  $E_4$  représenté graphiquement en figure 4.5.(c), est un terme de dissipation par effet de viscosité, il est donc important dans les couches limites autour des parois et faible dans le volume fluide. Sa valeur maximale sur les parois du guide se trouve au centre du guide à  $x=L/2$  (ventre de vitesse particulière acoustique).  $E_4$  est très faible aux extrémités du guide (correspondant quasiment à des nœuds de vitesse) il est important dans les couches limites

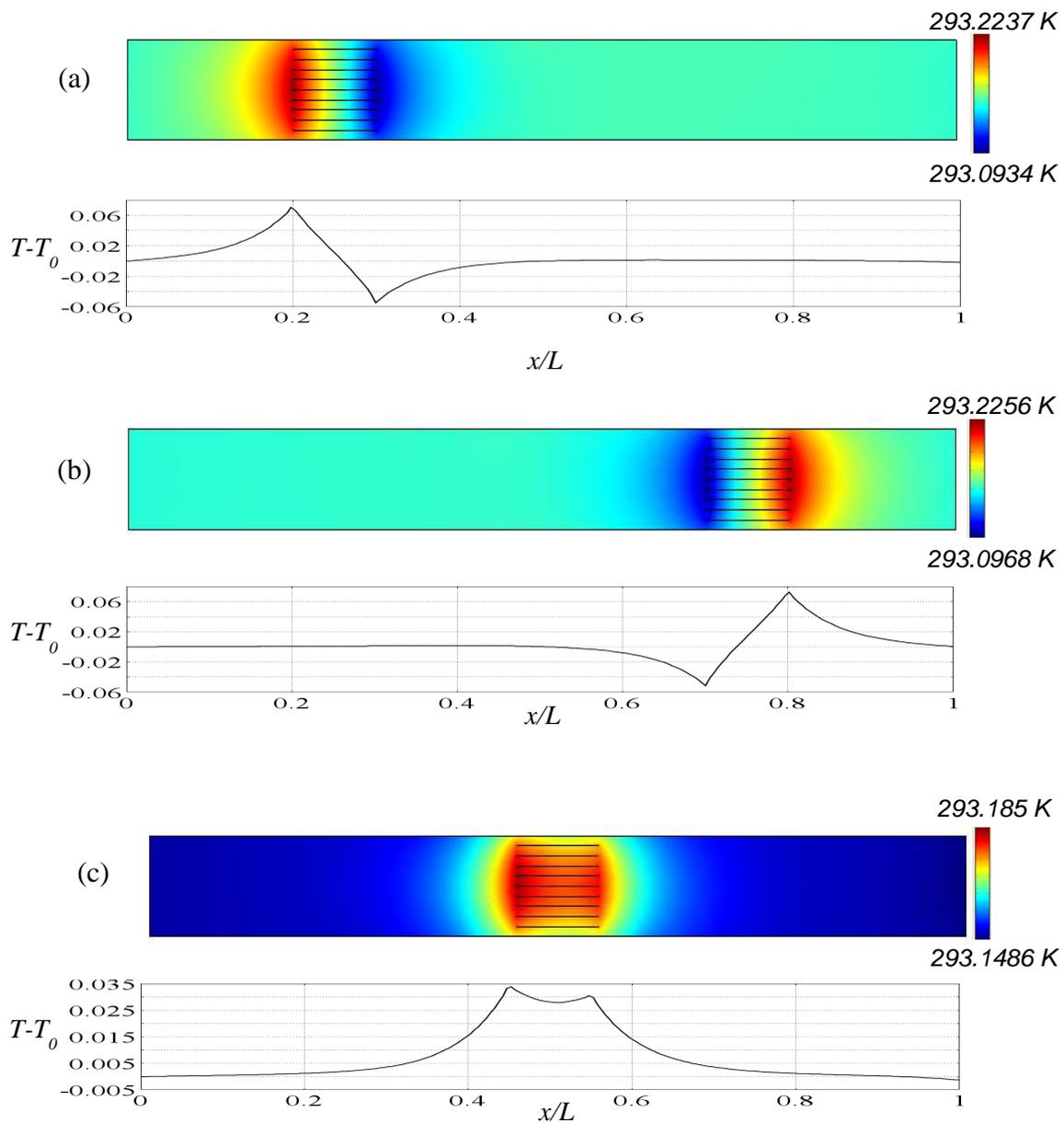
autour des plaques du stack (Fig. 4.5(c)), mais présente une contribution modeste en comparaison de  $q_a$  (le rapport  $q_{a-max}/E_{4-max}$  est de l'ordre de 40). Le maillage utilisé (Fig. 4.2(b)) est cependant trop grossier pour obtenir ces termes avec précision.



**Figure 4.5 :** Distribution des trois composantes des termes sources ( $q$  et  $\langle E_{dis} \rangle$ ) dans le stack  
 - (a) : composante  $q_a$  - (b) : composante  $q_b$  - (c) : composante  $E_4$ .

### 2.2.2 Effet du positionnement du stack en régime stationnaire

Nous avons envisagé trois positions différentes pour le centre du stack :  $x_1 = L/4$ ,  $x_2 = L/2$ , et  $x_3 = 3L/4$ . Ces positions ne prétendent pas trouver la position optimale, mais sont définies à titre de vérification : les positions  $x_1$  et  $x_3$  sont définies pour voir si elles conduisent à un champ de température symétrique ; les positions  $x_2$  et  $x_3$  permettent une comparaison de cette modélisation avec les résultats expérimentaux obtenus par Duffourd [77] et les solutions analytiques obtenues par Lotton et al. [78].

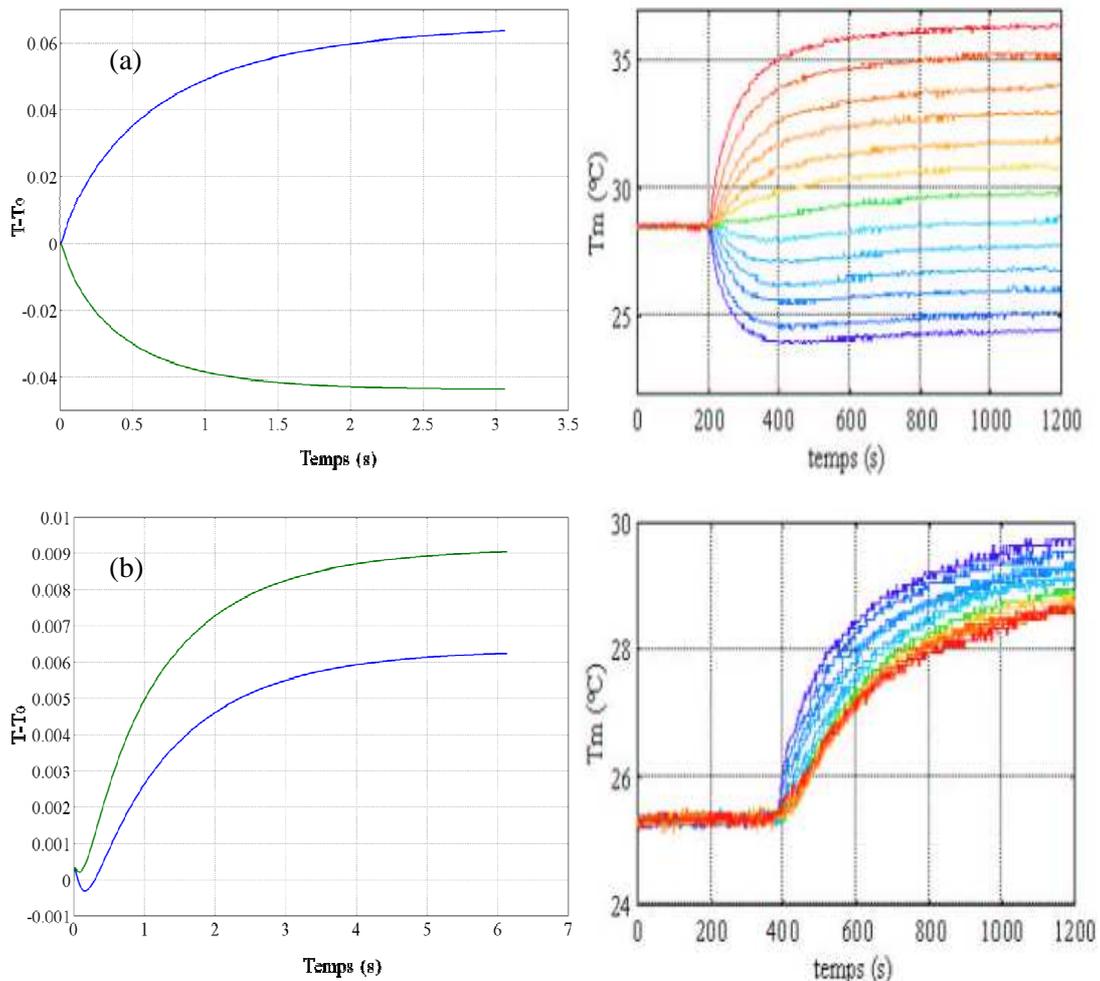


**Figure 4.6 :** Champs de température selon la position du stack (côté chaud en rouge et côté froid en bleu) - (a) : position  $x_1$  - (b) : position  $x_2$  - (c) : position  $x_3$ .

La position du stack (Fig. 4.6) fait évoluer le champ de température, ainsi que la valeur de son gradient. En déplaçant le stack, comme attendu, les côtés chaud et froid s'échangent au passage par le centre du résonateur. La comparaison des positions  $x_1$  et  $x_3$  permet de constater une dissymétrie du champ de température. L'écart de température entre les extrémités du stack est légèrement plus important quand le stack est proche de la source (Fig. 4.6(a)) (cette différence ne se voit pas clairement dans les courbes, il suffit de la calculer en prenant les valeurs maximales des côtés chaud et froid). Ceci peut s'interpréter, d'une part, par le fait qu'en raison des phénomènes dissipatifs dans le guide d'onde, le stack est soumis à une intensité acoustique plus forte à gauche près de la source qu'à droite au fond du résonateur, et d'autre part, par le fait que la présence de la source apporte une correction de longueur où les deux positions  $x_1$  et  $x_3$  n'étant alors pas réellement symétriques. Quand le centre du stack est positionné au centre du guide ( $x=L/2$ ) (Fig. 4.6(c)), l'écart de température entre les deux extrémités du stack est très faible par rapport aux écarts des deux positions  $x_1$  et  $x_3$ , et il n'y a pas de côté froid. Le stack se comporte comme une source de chaleur où la température maximale est observée à l'extrémité gauche du stack sur l'axe du résonateur. Cette position correspond à un ventre de vitesse.

### 2.2.3 Évolution transitoire vers le régime stationnaire

Deux simulations sont réalisées en régime transitoire pour les deux positions  $x_2=L/2$  et  $x_3=3L/4$  du stack. L'évolution temporelle de la température est présentée sur les figures 4.7 pour deux points situés sur la plaque médiane du stack, à  $1\text{mm}$  des extrémités (Les coordonnées des points sont :  $x_i-2l/5$ , et  $x_i+2l/5$ , avec  $i=2$  ou  $3$ ). L'allure générale de l'évolution temporelle de la température est similaire à celle observée dans la littérature (Duffourd [77], Lotton et al. [78]) : la configuration  $x_3$ , relativement proche de la position optimale du stack, illustre le transfert des quantités de chaleur et l'évolution des températures chaude/froide aux bornes du stack puis une lente dérivée liée au chauffage d'ensemble par les effets dissipatifs de viscosité. À l'exception d'une très courte période au début du transitoire, c'est cet effet de chauffage généralisé qui domine pour la position  $x_2$ , même si l'effet thermoacoustique développe un léger différentiel de température aux borne du stack. En raison des différences de caractéristiques (stack sans/avec épaisseur, prise en compte/non prise en compte de l'évolution temporelle du gradient de température statiques dans l'expression de la température acoustique...) et de dimensions des systèmes, les constantes de temps du présent modèle et des mesures (Duffourd [77]) ne peuvent pas être facilement comparées.

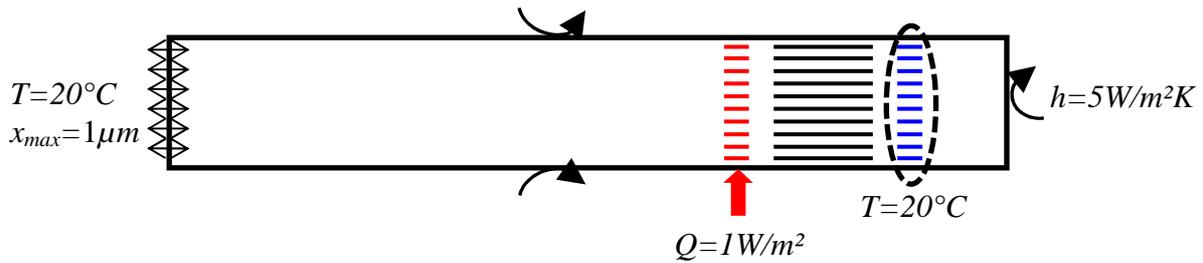


**Figure 4.7 :** Évolution temporelle de la température en deux points situés à 1mm aux extrémités du stack - (a) : Position du stack à  $x=3L/4$  - (b) : Position du stack à  $x=L/2$ . (à gauche : courbes de cette étude, à droite : courbes représentant la température moyenne obtenue avec des thermocouples disposés aux extrémités d'une plaque de l'empilement selon Duffourd [77])

### 2.3 Réfrigérateur avec échangeurs de chaleur

Le stack est maintenant accompagné de deux échangeurs de chaleur, légèrement distants des extrémités du stack, comme le montre la figure 4.8. Ainsi doté, le dispositif peut alors être soumis à une charge thermique. Pour apprécier l'effet thermoacoustique développé dans cette machine, le champ thermique dans ce réfrigérateur est envisagé avec ou sans cet effet thermoacoustique. La solution en conduction pure est donc d'abord recherchée sans la présence d'onde acoustique dans le résonateur, puis en deuxième lieu en présence d'une onde acoustique stationnaire. Les conditions aux limites appliquées sont les mêmes que

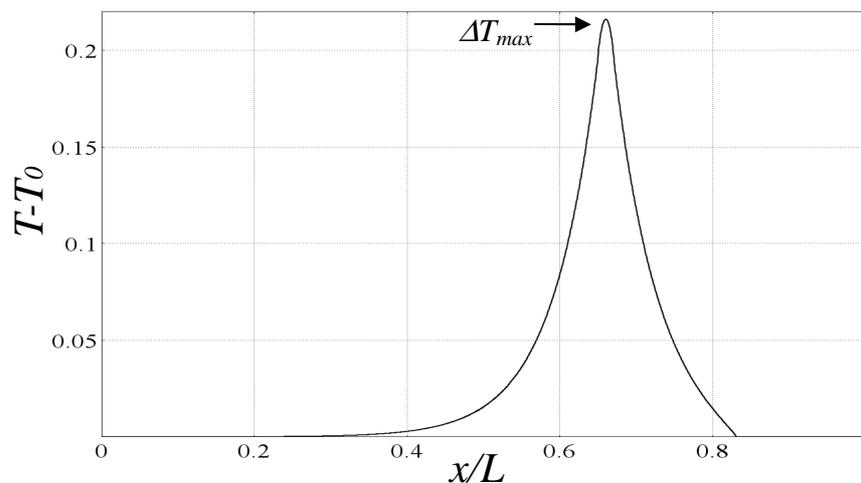
précédemment pour un calcul sans échangeurs, et avec le même type de maillage. Le stack est centré à une distance  $x=3L/4$ , entouré de deux échangeurs ; un flux de chaleur  $Q=1W/m^2$  est imposé à l'échangeur chaud dans le côté gauche du stack, et une condition isotherme (température imposée et constante  $T=20^\circ C$ ) est appliquée à l'échangeur froid du côté droit du stack (Fig. 4.8). Ce modèle en conduction pure est linéaire, la solution est recherchée pour une petite valeur de flux imposée comme source chaude.



**Figure 4.8 :** Réfrigérateur étudié équipé de deux échangeurs de chaleur.

### 2.3.1 Conduction de la chaleur sans propagation acoustique

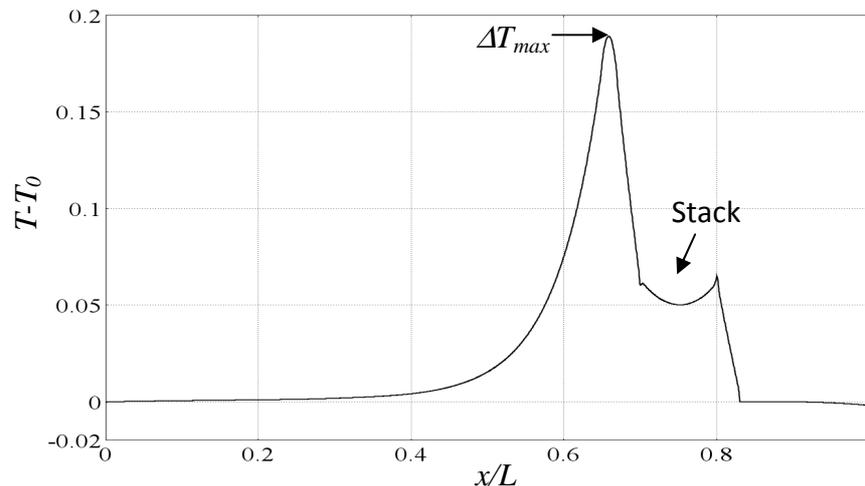
La figure 4.9 illustre le profil de température au centre du guide ( $y=0$ ) obtenu lorsqu'il n'y a pas d'onde acoustique dans le résonateur. Dans ce cas, la présence du stack n'a aucun effet significatif du fait de l'épaisseur nulle des plaques, la distribution de température est identique à celle qui serait obtenue pour un système avec échangeurs, mais sans stack. La valeur maximale de température est obtenue au centre de l'échangeur de chaleur chaud.



**Figure 4.9 :** Profil de température au centre du résonateur en conduction pure, pour une charge thermique de  $1W/m^2$  et sans onde acoustique.

### 2.3.2 Conduction de la chaleur avec propagation acoustique

Le même système est maintenant étudié en présence d'une onde acoustique stationnaire, dans les conditions de champ acoustique similaires à celles utilisées pour construire la figure 4.3. Le but de ce nouveau calcul est d'illustrer l'effet thermoacoustique développé par le stack et d'apprécier sa capacité à contribuer à extraire la quantité de chaleur imposée à l'échangeur de gauche (chaud). Le profil de température le long du guide d'onde est illustré sur la figure 4.10 ; la différence par rapport au profil de la figure 4.9 vient de l'effet thermoacoustique : il a bien pour effet de favoriser l'extraction de la chaleur et fait diminuer la température de l'échangeur auquel le flux est imposé (dans ce cas, la valeur maximale de  $\Delta T$  est inférieure à  $0.2^\circ\text{C}$  alors qu'en absence d'effet de stack  $\Delta T_{max} > 0,2^\circ\text{C}$  (Fig. 4.9)).



**Figure 4.10 :** Profil de température au centre du résonateur en conduction pure, pour une charge thermique de  $1\text{W}/\text{m}^2$  et en présence d'une onde acoustique.

### 2.3.3 Distribution de la chaleur dans le stack

Nous focalisons maintenant notre attention sur la distribution de la température en régime permanent au sein du stack (précisément sur la plaque située au centre du stack) pour analyser le profil de température incurvé relevé dans la figure 4.10. Pour cela, ce profil est tracé pour deux chargements thermiques différents de ce dispositif :

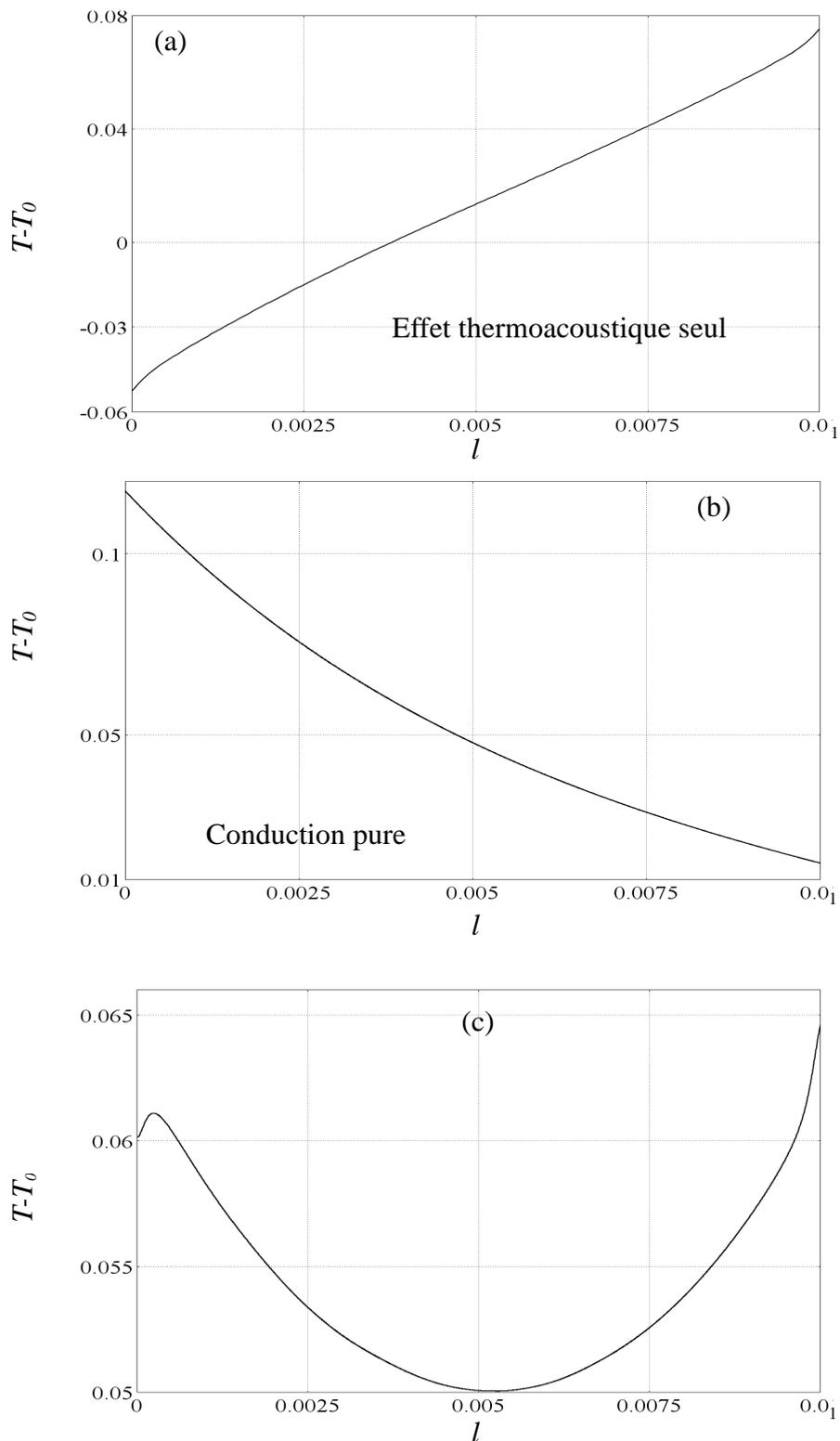
- 1- Le cas d'un résonateur occupé par une onde stationnaire, mais sans charge thermique, l'effet thermoacoustique développe un gradient de température (Fig. 4.11.(a)), sensiblement constant le long de la plaque.
- 2- En l'absence d'onde acoustique mais chargé thermiquement, sur la plaque, le profil de température en conduction pure figure 4.11.(b) est extrait de celui de la figure 4.9.
- 3- La combinaison de deux effets (effet thermoacoustique et charge thermique) conduit au profil de la figure 4.11.(c), qui est un détail de la figure 4.10.

Ainsi, en présence d'une charge thermique, le flux convectif ( $q_a + q_b$ ) développé à l'échelle de temps rapide par l'effet thermoacoustique est utilisé pour extraire et transférer le flux de chaleur imposé à l'échangeur de gauche, ce qui produit un gradient de température modeste le long de la plaque. Sans charge thermique et abstraction faite de la dissipation visqueuse, le flux ( $q_a + q_b$ ) est en régime permanent, intégralement compensé par un contre flux de conduction thermique (ici uniquement au travers du fluide), ce qui provoque le gradient de température de la figure 4.11.(a).

### 3 Conclusion et perspectives pour la thermoacoustique

Les premiers résultats de modélisation de systèmes thermoacoustiques présentés dans ce chapitre constituent un prolongement de ce qui a été fait pour les écoulements redressés. Seules des tendances générales sur le comportement de résonateurs à onde stationnaire ont été envisagées, et uniquement pour un fonctionnement en réfrigérateur. Ces modèles montrent que la technique de séparation des échelles de temps et la formulation développée au deuxième chapitre peuvent être intéressantes pour l'étude de transferts thermiques appliqués à des machines thermoacoustiques, comme il a été montré qu'elle est utile à l'étude des transferts de quantité de mouvement et du streaming pour, par exemple, des applications en microfluidique.

La réalisation de ces modèles conduit, une fois encore, à des difficultés numériques importantes liées aux conditions de maillage à l'intérieur de couches limites pour obtenir avec la précision souhaitée les termes sources des effets non-linéaires recherchés, puis à une convergence correcte des solutions dans des temps de calcul acceptables.



**Figure 4.11 :** Profil de température dans la plaque médiane du stack pour différents cas - (a) : en présence d'une onde acoustique et sans charge thermique - (b) : sans onde acoustique et avec charge thermique - (c) : avec une charge thermique et une onde stationnaire.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

La propagation d'une onde acoustique à fort niveau sonore dans un guide d'onde acoustique peut générer des phénomènes non-linéaires lents par rapport à la période acoustique, tels que les écoulements redressés et l'effet thermoacoustique. Ces deux effets prennent leur origine dans les couches limites visqueuses et thermiques qui se développent le long des parois solides. Afin d'apporter une meilleure compréhension de ces effets non-linéaires, plusieurs études analytiques, expérimentales et numériques sont en cours. Le travail présenté dans ce mémoire est essentiellement numérique. Il porte plus particulièrement sur l'étude des résonateurs acoustiques à ondes stationnaires ou progressive (géométrie annulaire ou droite).

La première partie de ce travail concerne la mise en équation des phénomènes acoustiques rapides et des phénomènes lents induits. Une formulation analytique adaptée à la description numérique des effets non-linéaires associés à la propagation d'une onde acoustique en fluide thermovisqueux a été mise en place. La formulation proposée au deuxième chapitre est basée sur les trois équations de conservation qui régissent la dynamique d'un fluide (conservation de la masse, conservation de quantité de mouvement, et conservation de l'énergie), où une séparation des échelles du temps entre les phénomènes rapides (oscillations acoustiques) et les phénomènes lents (écoulement redressé et transfert de chaleur) est effectuée. Concernant les phénomènes acoustiques, la description est basée sur l'utilisation d'un système de deux équations différentielles couplées, l'une vectorielle portée sur la vitesse acoustique particulière et l'autre scalaire portée sur l'écart de température. La description des phénomènes lents fait usage de la vitesse de transport de masse comme variable. Le choix de variables utilisées est orienté vers une utilisation de méthodes de résolutions numériques conventionnelles, telle que la méthode des éléments finis utilisée dans le cadre de ce travail. L'avantage principal de cette formulation est de pouvoir exploiter les

logiciels commerciaux usuels pour la résolution. Pour nos travaux, le logiciel “COMSOL Multiphysics” est utilisé (résolution des équations par la méthode des éléments finis).

La seconde partie de ce document porte sur l'étude numérique de résonateurs à ondes stationnaires ou progressives. La méthode de résolution numérique de la formulation présentée dans le deuxième chapitre a tout d'abord été validée sur l'étude des écoulements redressés qui prennent place dans différents résonateurs acoustiques en chapitre 3. Deux types de résonateurs sont considérés : les résonateurs droits à ondes stationnaires, d'une part, et les résonateurs annulaires à ondes progressives, d'autre part.

La première étape est la validation sur des cas de références pour chaque type de résonateurs. La formulation est utilisée pour étudier l'effet de courbure, d'abord sur l'écoulement redressé en se basant sur une solution analytique pour le champ acoustique (solution de référence), ensuite sur le champ acoustique et l'écoulement redressé, en résolvant numériquement toute la formulation. L'étude montre l'effet non négligeable de la courbure sur le champ acoustique et sur l'écoulement secondaire. Les résultats du champ acoustique montrent de très bons accords avec les résultats expérimentaux, par contre l'effet de la courbure sur l'écoulement redressé montre un comportement complètement différent de ce qu'on a pu constater par l'expérience. Cette formulation a été testée pour étudier l'influence de la présence d'un stack sur la structure de l'écoulement redressé. L'application de cette formulation est assez complète pour les écoulements redressés ; les résultats sont en bon accord avec ce qui a été publié.

La deuxième moitié de cette partie est portée sur l'étude de l'effet thermoacoustique. Ce n'est pas une étude complète mais une première approche du processus thermoacoustique, puisque elle offre des résultats encourageants. Par exemple, l'estimation numérique des termes sources de chaleur (même si quelques termes sont négligés) a mis en évidence la localisation des sources de chaleur aux extrémités du stack. Cette localisation permet ensuite de créer un gradient de température entre les deux extrémités. Une étude de l'influence de la position du stack dans le résonateur a été menée, et une première étude de l'influence de la présence d'échangeurs de chaleur a été réalisée. Les résultats préliminaires obtenus dans le quatrième chapitre méritent une étude plus approfondie, où tous les termes sources doivent être pris en compte.

Le travail résumé dans ce mémoire a mis en évidence une formulation bien adaptée à l'étude des phénomènes lents dans les machines thermoacoustiques. Néanmoins, des études

complémentaires restent à mener. Tout d'abord, comme perspective immédiate, il conviendrait de prendre en compte l'influence des phénomènes lents sur les phénomènes acoustiques rapides (en particulier, l'apparition d'un gradient de température doit être prise en compte dans l'expression de la variation de température acoustique, afin d'estimer correctement le flux de chaleur thermoacoustique). Par ailleurs, du fait que les deux phénomènes lents (écoulement redressé et transfert thermique) sont couplés, une étude basée sur la résolution simultanée des équations de la formulation doit être menée. Enfin, l'étude des machines thermoacoustiques réelles ne sera possible qu'à la condition de modéliser en 3D ces systèmes. Cette dernière étape nécessitera de reconsidérer entièrement les techniques numériques utilisées jusqu'alors.



## ANNEXE A

### Mise en équation de l'acoustique en fluide thermovisqueux

Pour trouver la formulation qui gouverne les petites perturbations acoustiques, les équations de conservation de base sont réécrites en fonction de la vitesse particulaire et de l'écart de température, afin de mieux représenter les phénomènes de dissipations dans les couches limites thermovisqueuses. L'acoustique est le phénomène rapide étudié. Les équations sont écrites à partir des équations de Navier-Stokes instantanées linéarisées pour décrire les petites oscillations liées à la perturbation acoustique. Dans la formulation détaillée ci-dessous, les équations sont mises sous une forme inhabituelle en acoustique, dans laquelle la variable d'écart de pression acoustique a été éliminée, afin de pouvoir présenter avec précision les phénomènes de couches limites.

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}, \quad (\text{A.2})$$

$$\rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + E_{dis}, \quad (\text{A.3})$$

avec  $\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = (\eta + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mu(\nabla \otimes (\nabla \otimes \mathbf{v}))$  et  $E_{dis} = \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \nabla \mathbf{v}$ . À ces trois équations s'ajoute deux autres, (i) une équation d'état qui exprime la variation de pression en fonction de la compressibilité (masse volumique) et de la température  $p = f(\rho, T)$ , et (ii) la variation d'entropie massique en fonction des variation de pression et de température  $Tds = C_p dT + hdp$ .

Le fluide est supposé au repos, donc d'une vitesse moyenne nulle ; tous les termes convectifs de la forme  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla ( )$  sont négligées, ainsi que les termes de deuxième ordre. Les équations de base simplifiées sont :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \rho_m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\rho_m \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p} + (\eta_m + 2\mu_m)\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \mu_m(\nabla \otimes (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}})), \quad (\text{A.5})$$

$$\rho_m T_m \left( \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla \tilde{T}). \quad (\text{A.6})$$

La dérivée partielle de l'équation d'état (*i*) est :

$$dp = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho dT, \quad (\text{A.7})$$

où  $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho = \hat{\beta}_m$  est l'augmentation de pression par unité d'augmentation de température à

masse volumique constante, et  $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T = \frac{1}{\rho_m \chi_m^T}$  où  $\chi_m^T$  est la compressibilité moyenne

isotherme. Une petite perturbation acoustique  $\tilde{\phi}$  peut être assimilée à une variation infinitésimale  $d\phi$ . L'équation précédente prend donc la forme suivante :

$$\tilde{p} = \frac{1}{\rho_m \chi_m^T} \tilde{\rho} + \hat{\beta}_m \tilde{T}. \quad (\text{A.8})$$

En introduisant la vitesse de son  $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma_m}{\rho_m \chi_m^T}}$ , la variation de la masse volumique est :

$$\tilde{\rho} = \frac{\gamma_m}{c_0^2} (\tilde{p} + \hat{\beta}_m \tilde{T}), \quad (\text{A.9})$$

Cette équation, associée à l'équation de continuité (A.4), s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = \hat{\beta}_m \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\rho_m c_0^2}{\gamma_m} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (\text{A.10})$$

Cette dernière équation, multipliée par l'opérateur  $\nabla$  et injectée dans l'équation de conservation de quantité de mouvement (A.5) après l'avoir dérivée une fois par rapport au

temps  $\frac{\partial}{\partial t}$ , s'écrit :

$$\rho_m \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t^2} = -\hat{\beta}_m \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \tilde{T}) + \left( \frac{\rho_m c_0^2}{\gamma_m} + (\eta_m + 2\mu_m) \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \mu_m \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \otimes (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}})), \quad (\text{A.11})$$

soit encore :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t^2} - \left( \frac{c_0^2}{\gamma_m} + c_0 l_{vm} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + c_0 l'_{vm} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \otimes (\nabla \otimes \tilde{\mathbf{v}})) + \frac{\hat{\beta}_m}{\rho_m} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \tilde{T}) = 0, \quad (\text{A.12})$$

où les longueurs caractéristiques visqueuses  $l_{vm}$  et  $l'_{vm}$  sont celles présentées au (§ 5.1) du deuxième chapitre.

À partir de la variation d'entropie massique (ii), avec  $h = -\frac{C_p - C_v}{\hat{\beta}}$ , l'équation de l'énergie prend la forme suivante :

$$\rho_m C_{pm} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \frac{\gamma_m - 1}{\gamma_m \hat{\beta}_m} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla \tilde{T}). \quad (\text{A.13})$$

Compte tenu de la dérivée de l'écart de pression acoustique (A.4), on trouve :

$$\frac{1}{\gamma_m} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\rho_m c_0^2 (\gamma_m - 1)}{\gamma_m \hat{\beta}_m} \nabla \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\rho_m C_{pm}} \nabla \cdot (\lambda_m \nabla \tilde{T}), \quad (\text{A.14})$$

où :

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \gamma_m l_{hm} c_0 \nabla \cdot (\nabla \tilde{T}) + \frac{(\gamma_m - 1)}{\gamma_m \hat{\beta}_m} \rho_m c_0^2 \nabla \tilde{\mathbf{v}} = 0, \quad (\text{A.15})$$

où la longueur caractéristique thermique  $l_{hm}$ , présentée au (§ 5.1) du chapitre 2.

La formulation composée des deux équations (A.13) et (A.15) est facilement implémentée dans les codes numériques. Généralement en acoustique, on s'intéresse au régime harmonique établi, la formulation prend alors la forme suivante :

$$\nabla \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}} \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) + \omega^2 \tilde{\mathbf{v}} = D \nabla \tilde{T}, \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot (Q \nabla \tilde{T}) + i \omega \tilde{T} = R \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (\text{A.17})$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  est la matrice de diffusion de la vitesse :

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 2A+B \\ 0 & -A & -A & 0 \\ 0 & -A & -A & 0 \\ 2A+B & 0 & 0 & B \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

avec  $A = i \omega c_0 l'_{vm}$  et  $B = \frac{c_0^2}{\gamma} - i \omega c_0 l'_v$ . Le coefficient de diffusion de la température est

$Q = \gamma_h c_0$ .  $D = \frac{-i \omega \hat{\beta}}{\rho_m}$  et  $R = \frac{(\gamma - 1) \rho_m c_0^2}{\gamma \hat{\beta}}$  sont deux constantes des termes sources, qui

représentent le couplage entre l'écart de température et la vitesse particulière. Si nécessaire, le champ de pression acoustique peut être obtenu à partir des variables d'écart de température et de vitesse particulière, suivant la relation (A.10).



## ANNEXE B

### Formulation de l'acoustique linéaire en régime harmonique

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t_a^2} - \left( \frac{c_0^2}{\gamma_m} + c_0 l_{vm} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + c_0 l'_{vm} \frac{\partial}{\partial t_a} \nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{\hat{\beta}_m}{\rho_m} \frac{\partial}{\partial t_a} \nabla \tilde{T} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t_a} - \gamma_m l_{hm} c_0 \nabla \cdot (\nabla \tilde{T}) + \frac{\gamma_m - 1}{\gamma_m \hat{\beta}_m} \rho_m c_0 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0. \quad (\text{B.2})$$

En prenant une dépendance temporelle sous la forme  $e^{-i\omega t}$ , la dérivée temporelle en notation complexe est  $\partial/\partial t = -i\omega$ , et la formulation de l'acoustique prend la forme suivante :

$$A(\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{v}})) + B\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + \omega^2 \tilde{\mathbf{v}} = D\nabla \tilde{T}, \quad (\text{B.3})$$

$$Q\nabla \cdot (\nabla \tilde{T}) + i\omega \tilde{T} = R\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad (\text{B.4})$$

avec  $A = i\omega c_0 l'_{vm}$ ,  $B = \frac{c_0^2}{\gamma_m} - i\omega c_0 l_{vm}$ ,  $D = -i\omega \frac{\hat{\beta}_m}{\rho_m}$ ,  $Q = \gamma_m l_{hm} c_0$  et  $R = \frac{(\gamma_m - 1)}{\gamma_m \hat{\beta}_m} \rho_m c_0^2$ .

Il est intéressant de mettre les deux équations (B.3) et (B.4) sous une forme similaire en faisant l'analogie avec la loi de comportement qui relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes par la loi de Hooke, qui est une loi linéaire des solides soumis à une déformation élastique de faible amplitude,  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ . Pour un milieu élastique et isotrope :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \nabla \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{L}}}\nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) = (l + 2m)\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - m\nabla \times (\nabla \times \tilde{\mathbf{v}}), \quad (\text{B.5})$$

où  $l$  et  $m$  ce sont les constantes de Lamé, qui décrivent complètement le comportement élastique d'un milieu isotrope. L'opérateur  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$  est le tenseur d'élasticité de 4<sup>ème</sup> ordre, il contient toutes les informations qui permettent de décrire quantitativement le comportement du milieu :

$$L_{ijkl} = l\delta_{ij}\delta_{kl} + m(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (\text{B.6})$$

Une analogie entre (B.5) et (B.3) permet de déduire :

$$A = -m, B = l + 2m. \quad (\text{B.7})$$

Compte tenu de (B.5), les équations (B.3) et (B.4) prennent alors la forme :

$$\nabla \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}} \nabla \tilde{\mathbf{v}} \right) + \omega^2 \tilde{\mathbf{v}} = D \nabla \tilde{T}, \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \nabla \tilde{T} \right) + i \omega \tilde{T} = R \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (\text{B.9})$$

Le tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  est équivalent au tenseur  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$ , d'où :

$$C_{ijkl} = (2A + B) \delta_{ij} \delta_{kl} - A (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (\text{B.10})$$

Pour un problème en deux dimensions, ce tenseur prend la forme :

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 2A + B \\ 0 & -A & -A & 0 \\ 0 & -A & -A & 0 \\ 2A + B & 0 & 0 & B \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

## ANNEXE C

### Mise en équation de l'écoulement redressé

Pour trouver la formulation qui gouverne l'écoulement redressé, les équations de Navier-Stokes qui décrivent le mouvement de fluide sont réécrites en fonction de la vitesse de transport de masse. C'est pourquoi, la décomposition (2.8), du chapitre 2, est appliquée dans les équations de conservation, avant de réaliser une moyenne temporelle sur la période acoustique.

#### C.1 Équation de continuité

L'équation de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{C.1})$$

avec la masse volumique  $\rho = \rho_m + \tilde{\rho}$  et la vitesse particulière  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m + \tilde{\mathbf{v}}$ , on obtient :

$$\frac{\partial (\rho_m + \tilde{\rho})}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_m + \tilde{\rho})(\mathbf{v}_m + \tilde{\mathbf{v}})) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Après le développement :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m + \rho_m \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\rho} \mathbf{v}_m + \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0. \quad (\text{C.3})$$

L'application de la moyenne temporelle dans l'équation précédente, pour étudier les phénomènes acoustiques lents, élimine tous les termes ne faisant intervenir qu'une fois les fluctuations, d'où :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle) = 0. \quad (\text{C.4})$$

La quantité  $\mathbf{M} = \rho_m \mathbf{v}_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle$  représente la densité de flux massique total, et son rapport à la masse volumique moyenne  $\rho_m$  donne la vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$ , d'où :

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{M}}{\rho_m} = \mathbf{v}_m + \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m}. \quad (\text{C.5})$$

Donc, l'équation de conservation de la masse pour le streaming est obtenue en utilisant cette vitesse moyenne dans l'équation de conservation moyennée (C.4) :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Cette nouvelle équation garde la même forme que l'équation de continuité usuelle (C.1).

## C.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}. \quad (\text{C.7})$$

1) Le développement du premier terme du membre de gauche donne :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \mathbf{v}_m + \rho_m \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\rho} \mathbf{v}_m + \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}), \quad (\text{C.8})$$

en effectuant la moyenne temporelle il devient :

$$\frac{\partial \langle \rho \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \mathbf{v}_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle). \quad (\text{C.9})$$

En utilisant la définition de la vitesse de transport de masse :

$$\frac{\partial \langle \rho \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \mathbf{U}). \quad (\text{C.10})$$

2) Selon la décomposition de la masse volumique et de la vitesse particulaire, le terme de la divergence s'écrit comme suivant :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot [(\rho_m \mathbf{v}_m + \rho_m \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\rho} \mathbf{v}_m + \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) \otimes (\mathbf{v}_m + \tilde{\mathbf{v}})], \quad (\text{C.11})$$

ou :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \nabla \cdot ((\rho_m \mathbf{v}_m + \rho_m \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\rho} \mathbf{v}_m + \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) \otimes \mathbf{v}_m) + \nabla \cdot ((\rho_m \mathbf{v}_m + \rho_m \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\rho} \mathbf{v}_m + \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) \otimes \tilde{\mathbf{v}}). \quad (\text{C.12})$$

La moyenne fait disparaître tous les termes de perturbations d'ordre impair :

$$\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \rangle = \nabla \cdot ((\rho_m \mathbf{v}_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle) \otimes \mathbf{v}_m) + \langle \nabla \cdot ((\rho_m \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\rho} \mathbf{v}_m) \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \rangle. \quad (\text{C.13})$$

La vitesse moyenne du streaming est exprimée en fonction de la vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$  comme suit :

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{U} - \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle / \rho_m. \quad (\text{C.14})$$

Le remplacement de  $\mathbf{U}$  et de  $\mathbf{v}_m$  par leurs expressions, permet d'écrire :

$$\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \rangle = \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) \otimes (\mathbf{U} - \langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle / \rho_m) + \langle \nabla \cdot (\rho_m \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\rho} (\mathbf{U} - \langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle / \rho_m)) \otimes \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \quad (\text{C.15})$$

ou encore :

$$\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \rangle = \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) - \nabla \cdot \left( \rho_m \mathbf{U} \otimes \left( \frac{\langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \right) + \langle \nabla \cdot (\rho_m \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \rangle + \langle \nabla \cdot (\tilde{\rho} \mathbf{U} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \rangle - \left\langle \nabla \cdot \tilde{\rho} \left( \frac{\langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \otimes \tilde{\mathbf{v}} \right\rangle. \quad (\text{C.16})$$

Puisque la masse volumique moyenne  $\rho_m$  et sa perturbation  $\tilde{\rho}$  sont des scalaires contrairement à la vitesse de transport de la masse  $\mathbf{U}$  et à la vitesse acoustique  $\tilde{\mathbf{v}}$ , la somme du deuxième et du quatrième terme est nulle, parce que :

$$\nabla \cdot \left( \rho_m \mathbf{U} \otimes \left( \frac{\langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \right) = \left\langle \nabla \cdot \left( \rho_m \mathbf{U} \otimes \left( \frac{\tilde{\rho \mathbf{v}}}{\rho_m} \right) \right) \right\rangle = \langle \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \tilde{\rho \mathbf{v}}) \rangle = \langle \nabla \cdot (\tilde{\rho} \mathbf{U} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \rangle, \quad (\text{C.17})$$

d'où :

$$\langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \rangle = \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \langle \nabla \cdot (\rho_m \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \rangle - \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle \otimes \langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right). \quad (\text{C.18})$$

La moyenne de membre gauche de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (C.7) écrite en vitesse de transport de masse est :

$$\frac{\partial \langle \rho \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \langle \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \rangle = \frac{\partial (\rho_m \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \langle \nabla \cdot (\rho_m \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \rangle - \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle \otimes \langle \tilde{\rho \mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right). \quad (\text{C.19})$$

On constate que ce membre garde sa forme mathématique générale avec l'apparition de deux termes purement acoustiques qui doivent être considérés comme des forces d'excitation de l'écoulement redressé, et qui seront placés au second membre de l'équation.

3) La moyenne du gradient de la pression est :

$$\langle \nabla p \rangle = \langle \nabla (p_m + \tilde{p}) \rangle = \nabla p_m. \quad (\text{C.20})$$

4) Le tenseur des contraintes visqueuses est :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) + \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}} \nabla \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \mu_m (\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T) + \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}}_m \nabla \cdot \mathbf{v}_m + \tilde{\mu} (\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T) + \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}}_m \nabla \cdot \mathbf{v}_m \\ + \mu_m (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}}_m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}}_m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

La prise de la moyenne donne :

$$\langle \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \rangle = \mu_m (\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T) + \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}}_m \nabla \cdot \mathbf{v}_m + \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}}_m \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle. \quad (\text{C.22})$$

Remplacer la vitesse  $\mathbf{v}_m$  par l'introduction de  $\mathbf{U}$  dans le premier terme permet d'écrire :

$$\mu_m (\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \mathbf{v}_m = \mu_m \left( \nabla \mathbf{U} - \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + (\nabla \mathbf{U})^T - \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \left( \mathbf{U} - \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right), \quad (\text{C.23})$$

$$\text{ou : } \mu_m (\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \mathbf{v}_m = \mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \mathbf{U} - \mu_m \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right). \quad (\text{C.24})$$

Donc :

$$\langle \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \rangle = \mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \mathbf{U} + \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle - \mu_m \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right). \quad (\text{C.25})$$

De nouveau, on constate l'apparition de deux termes purement acoustiques. Au final, l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour les phénomènes acoustique lents est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) + \langle \nabla \cdot (\rho_m \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) \rangle - \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle \otimes \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) = -\nabla p_m + \nabla \cdot \left( \mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \mathbf{U} \right) \\ - \nabla \cdot \left( \mu_m \left( \nabla \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) + \left( \nabla \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \right)^T \right) - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \right) + \nabla \cdot \left( \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

On peut l'écrire sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\nabla \cdot (p_m \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) + \eta_m \underline{\underline{\mathbf{I}}}\nabla \cdot \mathbf{U}) + \mathbf{F} \quad (\text{C.27})$$

Cette équation est presque identique à l'équation habituelle (C.7), en remplaçant la vitesse particulière  $\mathbf{v}$  par la vitesse de transport de masse  $\mathbf{U}$ . La seule différence, mais elle est fondamentale en ce qui concerne l'écoulement redressé, est le terme supplémentaire  $\mathbf{F}$ , qui joue le rôle d'une excitation de l'écoulement. Le terme de force rend compte du transport de fluide par les fluctuations acoustiques, et il est composé de quatre quantités,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$ , avec :

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla \cdot \langle \rho_m \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \quad \mathbf{F}_2 = \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle \otimes \langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right), \quad \mathbf{F}_3 = \nabla \cdot \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle,$$

$$\mathbf{F}_4 = -\nabla \cdot \left( \mu_m \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle + \left( \nabla \left\langle \frac{\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right)^T \right) - \mathbf{I} \eta_m \nabla \cdot \left( \left\langle \frac{\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \right) \right). \quad (\text{C.28})$$

### C.3 Équation de conservation de l'énergie

On peut traiter de même le problème du transport de la chaleur et des fluctuations de température dans un écoulement redressé. Dans le cas général, l'équation de conservation de l'énergie dans un fluide est :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) + \rho h \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + E_{dis}. \quad (\text{C.29})$$

1) Le développement du premier terme s'écrit :

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = (\rho_m C_{pm} + \tilde{\rho} C_{pm} + \rho_m \tilde{C}_p + \tilde{\rho} \tilde{C}_p) \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \mathbf{v}_m \cdot (\nabla T_m + \nabla \tilde{T}) + \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\nabla T_m + \nabla \tilde{T}) \right), \quad (\text{C.30})$$

soit, après prise de moyenne :

$$(\rho C_p)' \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{v}_m \cdot \nabla T_m \right) + (\rho C_p)' \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle + \left\langle (\rho_m \tilde{C}_p + \tilde{\rho} C_{pm}) \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \mathbf{v}_m \cdot \nabla \tilde{T} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla T_m \right) \right\rangle, \quad (\text{C.31})$$

$$\text{où } (\rho C_p)' = \rho_m C_{pm} + \langle \tilde{\rho} \tilde{C}_p \rangle.$$

En introduisant la vitesse de transport de masse :

$$\left\langle \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) \right\rangle = \left\{ \begin{aligned} & (\rho C_p)' \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_m \right) - (\rho C_p)' \left( \left\langle \frac{\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \cdot \nabla T_m \right) + (\rho C_p)' \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle \\ & + \left\langle (\rho_m \tilde{C}_p + \tilde{\rho} C_{pm}) \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{T} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla T_m \right) \right\rangle - \left\langle (\rho_m \tilde{C}_p + \tilde{\rho} C_{pm}) \left( \left\langle \frac{\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \cdot \nabla \tilde{T} \right) \right\rangle \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.32})$$

On peut l'écrire sous forme d'une somme de trois quantités :

$$\left\langle \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) \right\rangle = \left\{ \begin{aligned} & (\rho C_p)' \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_m \right) \\ & + \left\langle (\rho_m \tilde{C}_p + \tilde{\rho} C_{pm}) \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{T} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla T_m \right) \right\rangle + (\rho C_p)' \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{T} \rangle (\text{noté } -q_{as}) \\ & - \left\langle (\rho_m \tilde{C}_p + \tilde{\rho} C_{pm}) \left( \left\langle \frac{\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \cdot \nabla \tilde{T} \right) \right\rangle - (\rho C_p)' \left( \left\langle \frac{\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}}}{\rho_m} \right\rangle \cdot \nabla T_m \right) (\text{noté } -q_{as}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{C.33})$$

2) De même pour le deuxième terme :

$$\left\langle \rho h \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right) \right\rangle = \begin{cases} (\rho h)' \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p_m \right) \\ + \left\langle (\rho_m \tilde{h} + \tilde{\rho} h_m) \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{p} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla p_m \right) \right\rangle + (\rho h)' \langle \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{p} \rangle (\text{noté} - q_{bs}) \\ - \left\langle (\rho_m \tilde{h} + \tilde{\rho} h_m) \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \cdot \nabla \tilde{p} \right) \right\rangle - (\rho h)' \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \cdot \nabla p_m \right) (\text{noté} - q_{es}) \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

où  $(\rho h)' = \rho_m h_m + \langle \tilde{\rho} \tilde{h} \rangle$ .

La moyenne du premier membre de l'équation d'énergie (C.10) est alors :

$$\left\langle \rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) \right\rangle + \left\langle \rho h \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right) \right\rangle = \begin{cases} (\rho C_p)' \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_m \right) + (\rho h)' \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p_m \right) \\ - (q_{as} + q_{ds} + q_{bs} + q_{es}) \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

Là encore, la combinaison de la moyenne et la vitesse de transport de masse fait apparaître des termes sources  $q_{as}$ ,  $q_{bs}$ ,  $q_{ds}$ , et  $q_{es}$  déterminés par la composante acoustique.

3) La moyenne du terme de la conduction de la chaleur est :

$$\langle \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \rangle = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m) + \underbrace{\nabla \cdot (\langle \tilde{\lambda} \nabla \tilde{T} \rangle)}_{q_{cs}} \quad (\text{C.36})$$

4) Le terme de dissipation par effet de viscosité est :

$$E_{dis} = \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}(\nabla \mathbf{v}) = \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)(\nabla \mathbf{v}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta(\nabla \cdot \mathbf{v})(\nabla \mathbf{v}), \quad (\text{C.37})$$

qui prend la forme suivante, après le développement :

$$E_{dis} = \begin{cases} \mu_m(\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T)(\nabla \mathbf{v}_m) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m(\nabla \cdot \mathbf{v}_m)(\nabla \mathbf{v}_m) + \tilde{\mu}(\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T)(\nabla \mathbf{v}_m) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta}(\nabla \cdot \mathbf{v}_m)(\nabla \mathbf{v}_m) \\ + \mu_m(\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T)(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m(\nabla \cdot \mathbf{v}_m)(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{\mu}(\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T)(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta}(\nabla \cdot \mathbf{v}_m)(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \\ + \mu_m(\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T)(\nabla \mathbf{v}_m) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})(\nabla \mathbf{v}_m) + \tilde{\mu}(\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T)(\nabla \mathbf{v}_m) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta}(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})(\nabla \mathbf{v}_m) \\ + \mu_m(\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T)(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{\mu}(\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T)(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta}(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})(\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \end{cases} \quad (\text{C.38})$$

Après la prise de la moyenne, il ne reste que quatre termes :

$$\langle \mathbf{E}_{dis} \rangle = \left\{ \underbrace{\mu_m (\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T) (\nabla \mathbf{v}_m) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m (\nabla \cdot \mathbf{v}_m) (\nabla \mathbf{v}_m)}_{(*)} + \underbrace{\langle \tilde{\mu} (\nabla \mathbf{v}_m + (\nabla \mathbf{v}_m)^T) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} (\nabla \cdot \mathbf{v}_m) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle}_{(**)} \right. \\ \left. + \underbrace{\langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) (\nabla \mathbf{v}_m) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) (\nabla \mathbf{v}_m) \rangle}_{(***)} + \underbrace{\langle \mu_m (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle}_{\mathbf{E}_1} \right. \quad (C.39)$$

La vitesse moyenne de streaming  $\mathbf{v}_m$  étant exprimée à partir de la vitesse de transport de la masse  $\mathbf{U}$  :

$$(*) = \left\{ \underbrace{\mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) (\nabla \mathbf{U}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m (\nabla \cdot \mathbf{U}) (\nabla \mathbf{U})}_{\mathbf{E}_2} \right. \\ \left. - \underbrace{\mu_m \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) (\nabla \mathbf{U}) - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m (\nabla \cdot \mathbf{U}) \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)}_{\mathbf{E}_3} \right. \\ \left. - \underbrace{\mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \left( \nabla \cdot \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) (\nabla \mathbf{U})}_{\mathbf{E}_4} \right. \\ \left. + \underbrace{\mu_m \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \left( \nabla \cdot \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)}_{\mathbf{E}_5} \right. \quad (C.40)$$

$$(**) = \left\{ \underbrace{\langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) (\nabla \mathbf{U}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) (\nabla \mathbf{U}) \rangle}_{\mathbf{E}_6} \right. \\ \left. - \underbrace{\langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \rangle}_{\mathbf{E}_7} \right. \quad (C.41)$$

$$(***) = \left\{ \underbrace{\langle \tilde{\mu} (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} (\nabla \cdot \mathbf{U}) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle}_{\mathbf{E}_8} \right. \\ \left. - \underbrace{\langle \tilde{\mu} \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) - \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} \left( \nabla \cdot \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) (\nabla \tilde{\mathbf{v}}) \rangle}_{\mathbf{E}_8} \right. \quad (C.42)$$

La nouvelle équation de conservation de l'énergie, portée sur la vitesse de transport de masse, prend alors la forme suivante :

$$(\rho C_p) \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_m \right) + (\rho h) \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p_m \right) = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m) + q_s + \langle \mathbf{E}_{dis} \rangle \quad (C.43)$$

où  $q_s$  et  $\langle \mathbf{E}_{dis} \rangle$  sont les termes sources :

$$q_s = q_{as} + q_{bs} + q_{cs} + q_{ds} + q_{es}, \quad \langle E_{dis} \rangle = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6 + E_7 + E_8 + E_9.$$

L'écoulement redressé et le transfert de chaleur sont deux phénomènes lents de l'acoustique. Pour écrire les lois qui régissent les variations de la vitesse et de la température, on s'est intéressé plus particulièrement au comportement de grandeurs moyennes. Les équations sont écrites à partir des équations de Navier-Stokes instantanées [(C.1),(C.7),(C.29)], où toutes les variables sont décomposées en une grandeur moyenne et une fluctuation acoustique. Par la méthode détaillée ci-dessus, les équations du mouvement moyen sont mises sous la forme habituelle pour les équations de conservation, afin de pouvoir les implémenter et les résoudre facilement avec les codes numériques de la mécanique des fluides :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0, \quad (\text{C.44})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\nabla \cdot (p_m \mathbf{I} + \mu_m (\nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T)) + \eta_m \mathbf{IV} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{F}, \quad (\text{C.45})$$

$$(\rho C_p) \left( \frac{\partial T_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla T_m \right) + (\rho h) \left( \frac{\partial p_m}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p_m \right) = \nabla \cdot (\lambda_m \nabla T_m) + q_s + \langle E_{dis} \rangle. \quad (\text{C.46})$$

## ANNEXE D

### Composantes axiale et radiale de force $\mathbf{F}$ pour un calcul 2D

Le terme de force volumique qui donne naissance à l'écoulement redressé est composé de quatre quantités, en négligeant le terme  $\mathbf{F}_2$  qui est de quatrième ordre, nous avons  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$ , avec :

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla \cdot \langle \rho_m \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \quad (\text{D.1})$$

$$\mathbf{F}_3 = \nabla \cdot \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle, \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{F}_4 = -\nabla \cdot \left( \mu_m \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\eta_m \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \right). \quad (\text{D.3})$$

Pour intégrer ces forces dans le code de calcul, il faut décomposer chaque terme en deux ou trois composantes selon le cas à étudier 2D où 3D. Cette décomposition doit être faite de manière analytique, où nous montrons dans la partie qui suit les étapes principales de ce calcul pour un cas 2D.

1) Le terme  $\mathbf{F}_1 = -\nabla \cdot \langle \rho_m \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} \rangle = -\rho_m \nabla \cdot \begin{bmatrix} \langle \tilde{v}_x \tilde{v}_x \rangle & \langle \tilde{v}_x \tilde{v}_y \rangle \\ \langle \tilde{v}_y \tilde{v}_x \rangle & \langle \tilde{v}_y \tilde{v}_y \rangle \end{bmatrix}$ , ce qui donne après décomposition :

$$F_{1x} = -\rho_m \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{v}_x \tilde{v}_x \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{v}_x \tilde{v}_y \rangle \right) \quad (\text{D.4})$$

$$F_{1y} = -\rho_m \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{v}_y \tilde{v}_x \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{v}_y \tilde{v}_y \rangle \right) \quad (\text{D.5})$$

2) Le terme  $\mathbf{F}_3 = \nabla \cdot \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}} + (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T) + \underline{\underline{\mathbf{I}}}\tilde{\eta} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} \rangle$  peut s'écrire sous la forme suivante  $\mathbf{F}_3 = \underbrace{\nabla \cdot \langle \tilde{\mu} \nabla \tilde{\mathbf{v}} \rangle}_I + \underbrace{\nabla \cdot \langle \tilde{\mu} (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T \rangle}_{II} + \underbrace{\nabla \cdot \langle \tilde{\eta} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \rangle}_{III}$ , où nous pouvons faire la décomposition de chaque partie :

$$I = \nabla \cdot \langle \tilde{\mu} \nabla \tilde{v} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{\mu} \tilde{v}_{x,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{\mu} \tilde{v}_{x,y} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{\mu} \tilde{v}_{y,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{\mu} \tilde{v}_{y,y} \rangle \end{bmatrix}, \text{ en remplaçant } \tilde{\mu} \text{ par son expression } \tilde{\mu} = \beta \frac{\mu_m}{T_m} \tilde{T}$$

(Amari [68]), nous trouvons :

$$I_x = \frac{\beta \mu_m}{T_m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,y} \rangle \right) \quad (\text{D.6})$$

$$I_y = \frac{\beta \mu_m}{T_m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,y} \rangle \right) \quad (\text{D.7})$$

De la même façon, nous obtenons :

$$II_x = \frac{\beta \mu_m}{T_m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,x} \rangle \right) \quad (\text{D.8})$$

$$II_y = \frac{\beta \mu_m}{T_m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,y} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,y} \rangle \right) \quad (\text{D.9})$$

$$III = \nabla \cdot \langle \tilde{\eta} \nabla \tilde{v} \rangle = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{\eta} \tilde{v}_{x,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{\eta} \tilde{v}_{y,y} \rangle \\ \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{\eta} \tilde{v}_{x,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{\eta} \tilde{v}_{y,y} \rangle \end{bmatrix}, \text{ avec } \tilde{\eta} = \tilde{\zeta} - \frac{2}{3} \tilde{\mu}. \text{ En négligeant la viscosité de}$$

volume  $\tilde{\zeta}$ , et en remplaçant  $\tilde{\mu}$  par son expression, nous obtenons :

$$III_x = -\frac{2\beta \mu_m}{3T_m} \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,y} \rangle \right) \quad (\text{D.10})$$

$$III_y = -\frac{2\beta \mu_m}{3T_m} \left( \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,y} \rangle \right) \quad (\text{D.11})$$

Donc au final, nous avons les deux composantes de force suivante :

$$F_{3x} = \frac{\beta \mu_m}{T_m} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,x} \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,y} \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,x} \rangle - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,y} \rangle \right) \right] \quad (\text{D.12})$$

$$F_{3y} = \frac{\beta \mu_m}{T_m} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,y} \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{y,x} \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,y} \rangle - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial}{\partial y} \langle \tilde{T} \tilde{v}_{x,x} \rangle \right) \right] \quad (\text{D.13})$$

3) Le terme  $\mathbf{F}_4 = -\nabla \cdot \left( \mu_m \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} + \left( \nabla \frac{\langle \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right)^T \right) + \underline{\eta}_m \nabla \cdot \left( \frac{\langle \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\rho_m} \right) \right)$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}_4 = - \underbrace{\frac{\mu_m}{\rho_m} \nabla \cdot (\nabla \langle \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}} \rangle)}_{I^*} - \underbrace{\frac{\mu_m}{\rho_m} \nabla \cdot (\nabla \langle \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}} \rangle)^T}_{II^*} - \underbrace{\frac{\eta_m}{\rho_m} \nabla \cdot (\nabla \cdot \langle \tilde{\rho}\tilde{\mathbf{v}} \rangle)}_{III^*}, \text{ avec :}$$

$$I^* = -\frac{\mu_m}{\rho_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

$$II^* = -\frac{\mu_m}{\rho_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

$$III^* = -\frac{\eta_m}{\rho_m} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{D.16})$$

La décomposition du terme  $\mathbf{F}_4$  est la suivante :

$$F_{4x} = -\frac{\mu_m}{\rho_m} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle \right) \right] \quad (\text{D.17})$$

$$F_{4y} = -\frac{\mu_m}{\rho_m} \left[ \frac{4}{3} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_y \rangle + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \langle \tilde{\rho}\tilde{v}_x \rangle \right) \right] \quad (\text{D.18})$$



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. J. Davidson. Mass transfer due to cavitation microstreaming. *J. Sound. Vib.*, 17(2): 261-270, 1971.
- [2] P. Lotton, E. Dalton, M. Amari, V. Gusev, and N. Joly. Acoustic streaming in annular resonator: application to pcr on-chip reactor. *Proceeding of 3<sup>ème</sup> Congrès Français de microfluidique*, INSA, Toulouse (2006).
- [3] O. V Rudenko, and A. A. Sukhorukov. Nonstationary Eckart streaming and pumping of liquid in an ultrasonic field. *Acoust. Phys.*, 44(5): 565-570, 1998.
- [4] J. Hu, K. Nakamura, and S. Ueha. An analysis of a noncontact ultrasonic motor with an ultrasonically levitated rotor. *Ultrasonics*, 35(6): 459-467, 1997.
- [5] M. K. Aktas, and B. Farouk. Numerical simulation of acoustic streaming generated by finite-amplitude resonant oscillations in an enclosure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(5): 2822-2831, 2004.
- [6] V. Gusev, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Asymptotic theory of nonlinear acoustic waves in a thermoacoustic prime-mover. *Acta acustica united with Acustica*, 86(1): 25-38, 2000.
- [7] G. W. Swift, D. L. Gardner, and S. Backhaus. Acoustic recovery of lost power in pulse tube refrigerators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 105(2): 711-724, 1999.
- [8] M. Faraday. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 121: 299-340, 1831.
- [9] S. Moreau, H. Bailliet, and J. C. Valière. Measurements of inner and outer streaming vortices in a standing waveguide using laser doppler velocimetry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 123(2) : 640-647, 2008.
- [10] L. Petit, and P. Gondret. Redressement d'un écoulement alternatif. *J. Phys. II France 2*: 2115-2144, 1992.
- [11] L. Rayleigh. On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 175: 1-20, 1883.
- [12] J. W.S Rayleigh. The theory of sound. *Dover Publications*, (2<sup>nd</sup> edition, New York), Vol.2: 333-342, 1896.
- [13] P. J. Westervelt. The theory of steady rotational flow generated by a sound field. *J. Acoust. Soc. Am.*, 25(1): 60-67, 1953.

- [14] L. K. Zarembo. Acoustic streaming in high-intensity ultrasonic fields. *Edited by L. D. Rozenberg* (Plenum, New York), Part III: 156-164, 1971.
- [15] O. V. Rudenko, and S. I. Soluyan. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. (Plenum, New York,), 206-210, 1977.
- [16] W. L. Nyborg. Acoustic streaming near a boundary. *J. Acoust. Soc. Am.*, 30(4): 329-339, 1958.
- [17] N. Rott. The influence of heat conduction on acoustic streaming. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 25(3): 417-421, 1974.
- [18] Q. Qi. The effect of compressibility on acoustic streaming near a rigid boundary for a plane traveling wave. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(2): 1091-1098, 1993.
- [19] R. Waxler. Stationary velocity and pressure gradients in a thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(6): 2739-2750, 2001.
- [20] H. Bailliet, V. Gusev, R. Raspet, and R. A. Hiller. Acoustic streaming in closed thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(4): 1808-1821, 2001.
- [21] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinskii, and E. A. Zabolotskaya. Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(1): 153- 160, 2003.
- [22] D. Gedeon. DC gas flows in Stirling and pulse-tube cryocoolers in: cryocoolers. *Edited by R. G. Ross* (Plenum Press, New York), Vol.9: 385-392, 1997.
- [23] V. Gusev, S. Job, H. Bailliet, P. Lotton, and M. Bruneau. Acoustic streaming in annular thermoacoustic prime-movers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(3): 934-945, 2000.
- [24] M. Amari, V. Gusev, and N. Joly. Temporal dynamics of the sound wind in acoustitron. *Acta Acustica united with Acustica*, 89(6): 1008-1024, 2003.
- [25] M. Amari, V. Gusev, and N. Joly. Transient unidirectional acoustic streaming in annular resonators. *Ultrasonics*, 42(1-9): 573-578, 2004.
- [26] L. Menguy, and J. Gilbert. Vent acoustique non linéaire en guide d'onde cylindrique. *C. R. Acad. Sci - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(10): 643-648, 1998.
- [27] A. Kundt. Untersuchungen über die Schallgeschwindigkeit der Luft in Röhren. *Ann. Phys. Chem.*, 85 : 337, 1868.
- [28] M. Z. Carrière. Analyse ultramicroscopique des vibrations aérienne. *J. Phy. Rad.*, 5(10): 198-208, 1929.
- [29] E. N. da C. Andrade. On the circulations caused by the vibration of air in tube. *Proc. R. Soc. Lond.*, 134 (A): 445-470, 1931.
- [30] D. Rockliff, D. M. Campbell, and C. A. Greated. PIV Experimental Study on acoustic Streaming in Cylindrical Air-Filled Tubes using High Intensity Sound Fields. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> French congress on acoustics (SFA 2000)*: 199-202, 2000.
- [31] J. P. Sharpe, C. A. Greated, C. Gray, and D. M. Campbell. The measurements of acoustic streaming using particle image velocimetry. *Acoustica*, 68: 168-172, 1989.

- [32] M. P. Arroyo, and C. A. Greated. Stereoscopic particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.*, 2(12): 1181-1186, 1991.
- [33] D. B. Hann and C. A. Greated. The measurement of flow velocity and acoustic particle velocity using particle-image velocimetry. *Meas. Sci. Technol.*, 8: 1517-1522, 1997.
- [34] M. Nabavi, K. Siddiqui, and J. Dargahi. Simultaneous measurement of acoustic and streaming velocities using synchronized PIV technique. *Meas. Sci. Technol.*, 18(7): 1811–1817, 2007.
- [35] M. Nabavi, K. Siddiqui, and J. Dargahi. Analysis of regular and irregular acoustic streaming patterns in a rectangular enclosure. *Wave Motion*, 46(5): 312-322, 2009.
- [36] P. Debesse. Vers une mesure du vent thermoacoustique. *Document de thèse*, université Pierre & Marie Curie – Paris 6, 2008.
- [37] H. Schlichting. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen (Calculation of Plane Periodic Boundary Layer Streaming). *Physikalische Zeitschrift*, 33(8): 327-335, 1932.
- [38] M. W. Thompson, and A. A. Atchley. Simultaneous measurement of acoustic and streaming velocities in a standing wave using laser Doppler anemometry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117(4): 1828-1838, 2005.
- [39] S. Moreau, H. Bailliet, and J-C. Valière. Effect of a stack on Rayleigh streaming cells investigated by laser Doppler velocimetry for application to thermoacoustic devices. *J. Acoust. Soc. Am.* 125(6): 3514-3517, 2009.
- [40] C. Desjoux. Etudes thermoacoustiques en résonateurs annulaires : mesure des écoulements redressés par vélocimétrie Laser Doppler, et contrôle actif de l'amplification Thermoacoustique. *Document de thèse*, Université du Maine, 2010.
- [41] B. G. Loh, S. Hyun, P. I. Ro, and C. Kleinstreuer. Acoustic streaming induced by ultrasonic flexural vibrations and associated enhancement of convective heat transfer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(2): 875-883, 2002.
- [42] G. Q. Chen, L. Tao, and K. R. Rajagopal. Remarks on large eddy simulation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 5(3): 85-90, 2000.
- [43] A. Matesanz, A. Velázquez, A. Jiménez, and M. Rodríguez. Numerically robust 3-D finite element Reynolds Averaged Navier-Stokes solver for the study of turbulent supersonic external flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159(3-4): 383-394, 1998.
- [44] M. Kawahashi, and M. Arakawa. Nonlinear phenomena induced by finite amplitude oscillation of air column in closed duct. *The Japan Society of Mechanical Engineers*, 39(2): 280-286, 1996.
- [45] A. Gopinath, and A. F. Mills. Convective heat transfer due to acoustic streaming across the ends of Kundt tube. *J. Heat Transfer*, 116(1): 47-53, 1994.
- [46] T. Yano. Turbulent acoustic streaming excited by resonant gas oscillation with periodic shock waves in a closed tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(1):7-12, 1999.

- [47] D. Marx, and P. Blanc-Benon. Computation of the mean velocity field above a stack plate in a thermoacoustic refrigerator. *Comptes Rendus Mecanique*, 332(11): 867–874, 2004.
- [48] N. Rott. Thermoacoustics. *Advanced in Applied Mechanics*, 20: 135-175, 1980.
- [49] P. Merkli, and H. Thomann. Thermoacoustic effects in a resonance tube. *J. Fluid Mech.*, 70(1): 161-177, 1975.
- [50] G.W. Swift. Thermoacoustic engines, *J. Acoust. Soc. Am.* 84(4): 1145-1180, 1988.
- [51] J. R. Olson, and G. W. Swift. Acoustic streaming in pulse tube refrigerators: tapered pulse tubes. *Cryogenics*, 37(12): 769-776, 1997.
- [52] D. Marx. Simulation numérique d'un réfrigérateur thermoacoustique. *Document de thèse*, École Centrale de Lyon, 2003.
- [53] J. J. Wollan, and G. W. Swift. Development of a thermoacoustic natural gas liquefier. *Update'American gas association operations conference* , houstone, 2001.
- [54] J. J. Wollan, G. W. Swift, S. Backhaus, and D.L. Gardner. Development of a thermoacoustic naturel gas liquefier. *Proceeding of AIChE Meeting*, New Orleans, 2002.
- [55] S. Backhaus and G. Swift. New Varieties of thermoacoustic engines. *LA-UR-02-2721*, 9<sup>th</sup> International congress on sound and vibration, 2002.
- [56] P. H. Ceperley. A pistonless Stirling engine-The traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(5): 1508-1513, 1979.
- [57] P. H. Ceperley. Gain and efficiency of a short traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 77(3): 1239-1244, 1985.
- [58] T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa, and A. Tominaga. Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.*, 81(15): 3128-3131, 1998.
- [59] S. Backhaus, E. Tward, and M. Petach. Traveling-wave thermoacoustic electric generator. *Appl. Phys. Lett.*, 85(6): 1085-1087, 2004.
- [60] R. C. Longworth. An experimental investigation of pulse tube refrigeration heat pumping rates. *Advances in Cryogenic Engineering*, 12: 608-618, 1966.
- [61] R. Radebaugh. A review of pulse tube refrigeration. *Advances in Cryogenic Engineering*, 35(B): 1191-1205, 1990.
- [62] P. Nika. Convertisseurs thermoacoustiques-systèmes combinés moteur/générateur. *Technique de l'ingénieur*, Doc. BE 8 063.
- [63] P.-A. Bois. Introduction à la mécanique théorique des fluides. *Ellipses édition*, paris, 2000.
- [64] L. Boltzmann. Leçons sur la théorie des gaz, *Gauthier-Villars*, 1902-1905. Réédition Jacques Gabay, 1987.
- [65] K. Rienslagh, J. Vierendeels, and E. Dick. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite-volume method for the simulation of rotary displacement pump flow. *Applied numerical mathematics*, 32(4): 419-433, 2000.

- [66] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz. Fluid mechanic. *Pergamon press*, Oxford, 1982.
- [67] N. Joly, M. Bruneau, and R. Bossart. Coupled equations for particle velocity and temperature variation as the fundamental formulation of linear acoustics in thermo-viscous fluids at rest. *Acta Acustica united with Acustica*, 92: 202-209, 2006.
- [68] M. Amari. Etude des écoulements redressés en régime transitoire dans des résonateurs annulaires à ondes progressives et stationnaires. *Document de thèse*, Université du Maine, 2004.
- [69] R. Wait, and A. R. Mitchell. Finite Element Analysis and Applications. *Wiley*, New York, 1985.
- [70] Q. Fang, T. Tsuchiya, and T. Yamamoto. Finite difference, finite element and finite volume methods applied to two-point boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 139(1): 9-19, 2002.
- [71] COMSOL Multiphysics User's Guide © COPYRIGHT 1994–2008 by COMSOL AB.
- [72] N. Joly. Finite element modeling of thermoviscous acoustics on adapted anisotropic meshes: Implementation of the particle velocity and temperature variation formulation. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(1): 102-114, 2010.
- [73] C. C. Lawrenson, L. D. Lafleur, and F. D. Shields. The solution for the propagation of sound in a toroidal waveguide with driven walls (the acoustitron). *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(3): 1253-1260, 1998.
- [74] H. Bailliet, P. Lotton, M. Bruneau, and V. Gusev. Coupling between electrodynamic loudspeakers and thermoacoustic cavities. *Acta Acustica united with Acustica*. 86(2): 363-373, 2000.
- [75] M. W. Thompson, A. A. Atchley, and M. Maccarone. Influences of a temperature gradient and fluid inertia on acoustic streaming in a standing wave. *J. Acoust. Soc. Am.*, 117: 1839-1849, 2005.
- [76] C. Desjoux, G. Penelet, P. Lotton, and J. Blondeau. Measurement of acoustic streaming in a closed-loop traveling wave resonator using Laser doppler velocimetry. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(5): 216-2183, 2009.
- [77] S. Duffourd. Réfrigérateur thermoacoustique : études analytiques et expérimentales en vue d'une miniaturisation. *Document de Thèse*, École Centrale de Lyon, Numéro d'ordre : 2001-06, 2001.
- [78] P. Lotton, P. Blan-Benon, M. Bruneau, V. Gusev. S. Duffourd. M. Mironov, and G. Poignand. Transient temperature profile inside thermoacoustic refrigerators. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(21-22): 4986-4996, 2009.









# **Modélisation numérique des phénomènes non linéaires acoustiques en fluide thermovisqueux : application à l'étude des écoulements redressés et des transferts thermiques en résonateurs.**

## **Résumé**

La propagation acoustique à fort niveau s'accompagne généralement de phénomènes secondaires non linéaires. Parmi ces phénomènes, la génération d'écoulements secondaires redressés et le transfert de chaleur induit par l'acoustique (processus thermoacoustique) font l'objet du travail présenté dans ce mémoire de thèse.

Plus précisément, l'objet du mémoire est de présenter et de valider une formulation théorique adaptée à la modélisation numérique des phénomènes non linéaires à partir de codes de calcul usuels, avec un minimum d'approximations. Les écoulements redressés et l'effet thermoacoustique présentant des échelles de temps grandes devant la période acoustique, la description théorique est réalisée sur la base d'une séparation des échelles de temps : (i) calcul du champ acoustique oscillant en régime harmonique au cours de la période acoustique, en tenant compte des effets de couches limites thermique et visqueuse, (ii) recherche des solutions des équations de conservation qui décrivent les phénomènes non linéaires lents, en utilisant la vitesse de transport de masse comme variable. L'usage de cette variable permet aux équations de conserver une forme classique en dynamique des fluides, les effets non linéaires étant traduits par différents termes sources aux seconds membres de ces équations.

Cette modélisation numérique est appliquée à l'étude de machines thermoacoustiques de deux types (machine à onde progressive, machine à onde stationnaire), à l'intérieur desquelles les écoulements redressés et les transferts thermiques sont analysés séparément. Après validation sur des configurations particulières correspondant à des études analytiques antérieures, des résultats originaux sont présentés, concernant notamment l'effet de la courbure d'un résonateur annulaire sur l'écoulement redressé ou encore l'insertion d'un empilement de plaques solides fines (stack) à l'intérieur du résonateur.

**Mots clés :** *écoulement redressé, thermoacoustique, acoustique non linéaire, modélisation numérique, éléments finis, couches limites acoustiques.*

## **Numerical modeling of nonlinear acoustic phenomena in thermoviscous fluid: application to the study of acoustic streaming and heat transfer in resonators.**

### **Abstract**

Usually, the acoustic propagation at high levels is accompanied by nonlinear secondary phenomena. Among these phenomena, the generation of secondary flows called 'acoustic streaming' and the heat transfer induced by the acoustic (thermoacoustic process) are studied.

Specifically, the aim of the thesis is to present and to validate a theoretical formulation suitable for numerical modeling of nonlinear phenomena from conventional calculation codes, using a minimum of approximations. The acoustic streaming and the thermoacoustic effect having large time scales compared to the acoustic period, the theoretical description is carried out on the basis of a separation of time scales: (i) calculation of the oscillating acoustic field in harmonic regime during the acoustic period, taking into account effects of thermal and viscous boundary layers, (ii) seek solutions of the conservation equations that describe the slow nonlinear phenomena, using the mass transport velocity as a variable. The use of this variable allows the equations to keep a classical form in fluid dynamics; the nonlinear effects are shown by different source terms in right hand side of these equations.

This numerical modeling is applied to the study of two types of machines thermoacoustic (traveling wave machine, stationary wave machine), inside which the acoustic streaming and heat transfers, are separately analyzed. After validation on specific configurations corresponding to previous analytical studies, original results are presented, concerning especially the effect of the curvature of annular resonator on the acoustic streaming or inserting a stack of thin solid plates inside the resonator.

**Keywords:** *acoustic streaming, thermoacoustic, nonlinear acoustic, numerical modeling, finite elements, acoustic boundary layers.*