

N° d'ordre : 4080

THÈSE
présentée à
L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Pascal MOLIN**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES – THÉORIE DES NOMBRES

Intégration numérique et calculs de fonctions L

Soutenue le 18 octobre 2010 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

après avis de :

Eduardo FRIEDMAN	Professeur	Université du Chili
Michael RUBINSTEIN	Professeur	Université de Waterloo

devant la commission d'examen composée de :

Karim BELABAS	Professeur	Université Bordeaux 1	Directeur
Régis DE LA BRETÈCHE	Professeur	Université Paris 7	
Henri COHEN	Professeur	Université Bordeaux 1	
Jean-Marc COUVEIGNES	Professeur	Université Toulouse 2	
Eduardo FRIEDMAN	Professeur	Université du Chili	Rapporteur
Ahmed SEBBAR	Professeur	Université Bordeaux 1	

Résumé

Cette thèse montre la possibilité d'une application rigoureuse de la méthode d'intégration numérique double-exponentielle introduite par Takahasi et Mori en 1974, et sa pertinence pour les calculs à grande précision en théorie des nombres. Elle contient en particulier une étude détaillée de cette méthode, des critères simples sur son champ d'application, et des estimations rigoureuses des termes d'erreur.

Des paramètres explicites et précis permettent de l'employer aisément pour le calcul garanti de fonctions définies par des intégrales.

Cette méthode est également appliquée en détail au calcul de transformées de Mellin inverses de facteurs gamma intervenant dans les calculs numériques de fonctions L . Par une étude unifiée, ce travail démontre la complexité d'un algorithme de M. Rubinstein et permet de proposer des algorithmes de calcul de valeurs de fonctions L quelconques dont le résultat est garanti et dont la complexité est meilleure en la précision.

Abstract

This thesis contains a detailed study of the so-called double exponential integration formulas introduced by Takahasi and Mori in 1974, and provides explicit bounds for a rigorous application of the method in number theory.

Accurate parameters are given, which makes it possible to use it as a blackbox for the rigorous computation of functions defined by integrals.

It also deals with numerical computations of L functions. The complexity of an algorithm due to M. Rubinstein is proven. In the context of double-exponential transformation, a new algorithm is provided whose complexity is low in terms of precision.

Intégration numérique et calculs de fonctions L

thèse de doctorat

Pascal MOLIN

Université Bordeaux 1, octobre 2010

Sommaire

Sommaire	iii
1 Introduction	1
2 Intégration numérique par la méthode double-exponentielle	7
1 Principe	7
2 Méthode d'application à l'intégration sur divers domaines	23
3 Validité du principe	38
4 Exemples complets	46
3 Calculs de fonctions L	53
1 Calcul de fonctions L	53
2 Stratégies proposées	57
3 Majoration de G_v	63
4 Sommes de Riemann	72
5 Méthode double-exponentielle	76
6 Double-exponentielle et facteur gaussien	90
7 Calcul des dérivées	92
Annexes	95
A Intégration	95
B Fonctions L	99
C Un algorithme de calcul des racines de l'unités dans les corps de nombres	105
Table des matières	121
Table des figures	125
Bibliographie	125

Théorie de l'intégration double-exponentielle

L'intégration numérique est une composante indispensable de tous les logiciels de calcul mathématique. La plupart d'entre eux cherchent à se doter de méta-algorithmes très génériques et fiables permettant de donner un résultat correct quelle que soit la construction entrée par l'utilisateur.

Pour la plupart des besoins auxquels répondent ces systèmes, l'évaluation de l'ordre de grandeur et de quelques chiffres significatifs d'une intégrale sont suffisants.

Dans le cadre plus spécifique de la théorie des nombres, les besoins sont précisés, et les solutions doivent l'être d'autant :

- les fonctions à intégrer sont généralement simples et régulières — pas de définitions par cas, de discontinuités ;
- on doit pouvoir atteindre de grandes précisions : l'ordre de grandeur du millier de chiffres décimaux constitue un objectif raisonnable ;
- le résultat doit pouvoir être garanti.

Il est alors nécessaire de disposer d'une méthode à la fois rapide et prouvée, quitte à se montrer plus restrictif sur les classes de fonctions intégrées, quitte aussi à demander un certain nombre d'informations sur l'intégrale calculée.

Depuis une trentaine d'années existe une méthode d'intégration connue sous le nom de «formules double-exponentielles» qui semble répondre à ces besoins. Son principe, présenté tout d'abord de manière assez heuristique dans [TM73], préconise de ramener le calcul de toute intégrale à l'application de la méthode des trapèzes sur $\mathbb{R}$ à des fonctions très régulières possédant une décroissance rapide de type doublement exponentielle (c'est-à-dire du type $O(\exp(-\exp|x|))$ en l'infini. Pour cela, un certain nombre de changements de variables génériques sont proposés, construits à partir de la fonction exponentielle en fonction de l'intervalle d'intégration et de la décroissance de l'intégrande.

D'un point de vue pratique, la méthode obtenue est remarquablement efficace : pour une précision donnée sur le résultat, on a couramment besoin d'un nombre d'évaluations de l'intégrande quasi-linéaire, ce qui permet d'atteindre de grandes précisions. C'est cette méthode qui sous-tend la routine d'intégration `intnum` de PARI/gp, et elle fait également partie des méthodes d'intégration numérique de Maple ou de Mathematica.

Pour cette raison, un certain nombre de travaux de nature plus théorique ont accompagné son succès, qui ont dégagé les raisons de son efficacité, en particulier le besoin d'holomorphie des fonctions intégrées. Mais surtout l'objectif était de parvenir à démontrer l'optimalité de cette méthode parmi les différentes formules de quadrature. Le résultat a été atteint dans une large mesure par Sugihara [Sug97]. Un historique de ces développements est relaté dans [Mor05].

Toutefois, les travaux que nous avons cités négligent le problème de la validité des transformations effectuées pour des problèmes concrets, et se cantonnent à des estimations de convergence asymptotiques ne permettant pas d'appliquer la théorie pour calculer de manière certaine et rigoureuse une intégrale donnée.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons d'abord abordé cette méthode en vue des calculs de

fonctions L effectués dans notre second chapitre ; cependant les lacunes que comportait la théorie double-exponentielle, le besoin d'énoncés explicites et les motivations spécifiques liées aux fonctions L nous ont conduit à des développements plus poussés, en vue d'obtenir une théorie véritablement efficace, c'est-à-dire à la fois intuitive et aisément applicable. Nous avons donc poursuivi deux buts : d'une part dégager des conditions plus claires du champ d'application de la méthode ; d'autre part établir des hypothèses les plus simples possibles sous lesquelles une intégrale peut-être calculée effectivement et de manière garantie, à une précision arbitraire.

Illustrons par un exemple l'importance de ce premier but. Dans le calcul 1.1 ci-dessous, nous utilisons le logiciel gp pour évaluer une intégrale très simple, mais de deux manières : dans le premier cas elle se présente de manière classique, dans le second on effectue un décalage de la droite d'intégration.

Il se produit dans ce cas un phénomène étrange : alors que la méthode double-exponentielle permet de calculer parfaitement la première intégrale, dans le second cas le résultat est faux dès la 11^e décimale.

```
? \p100
    realprecision = 105 significant digits (100 digits displayed)
? oo=[1];
? #
    timer = 1 (on)
? intnum(t=-oo,oo,1/(1+t^2))-Pi
time = 60 ms.
%2 = 0.E-105
? shifted=intnum(t=-oo,oo,1/(1+(t+10)^2));show(shifted-Pi)
time = 60 ms.
%3 = 6.79601547 E-11
Goodbye!
```

Listing 1.1: un exemple avec gp

Si l'on essaie de réaliser les mêmes calculs avec le système Maple, la première intégrale est calculée à peu près instantanément. En ce qui concerne la seconde, les méthodes de validation de Maple permettent de déterminer à nouveau un résultat correct, mais au prix de calculs singulièrement longs pour un problème de ce type.

```
> I1:=evalf(Int(1/(1+z^2),z=-infinity..infinity),100):evalf(I1-Pi,5);
memory used=3.8MB, alloc=2.8MB, time=0.13
memory used=7.6MB, alloc=3.9MB, time=0.26
0.

> I2:=evalf(Int(1/(1+(z+10)^2),z=-infinity..infinity),100):evalf(I2-Pi,5);
memory used=11.4MB, alloc=4.2MB, time=0.40
memory used=15.2MB, alloc=4.2MB, time=0.54
memory used=19.0MB, alloc=4.2MB, time=0.68
[...]
memory used=520.2MB, alloc=7.1MB, time=17.23
memory used=524.0MB, alloc=7.1MB, time=17.37
memory used=527.8MB, alloc=7.1MB, time=17.50
memory used=531.6MB, alloc=7.1MB, time=17.65
0.
```

Listing 1.2: un exemple en maple

Pour pouvoir utiliser la méthode double-exponentielle, il faut être en mesure d'expliquer ce type de phénomène, et de l'éviter.

Résultats obtenus

Notre étude se fonde sur une interprétation très générale de la convergence de la méthode des trapèzes à l'aide de la formule de Poisson, ce qui permet de démontrer de manière quantitative que la méthode des trapèzes est d'autant plus efficace que la fonction à intégrer

- décroît rapidement en l'infini ;
- possède une large bande d'holomorphic au voisinage de l'intervalle d'intégration ;
- a un comportement symétrique de part et d'autre du chemin.

Les changements de variable «double exponentiels» sont traditionnellement choisis de manière à optimiser la convergence de l'intégration en fonction du seul premier critère ; nous avons dégagé plus clairement leur influence sur le suivant, ce qui permet de comprendre précisément les cas d'application de la méthode, ou ceux où elle échoue.

Dans ce cadre, nous établissons des résultats de convergence prouvée en terme de paramètres dépendant explicitement de la fonction à intégrer, qui prennent la forme suivante :

Théorème. *Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant :*

- *g est absolument intégrable sur I ;*
- *g possède un prolongement holomorphe borné à un voisinage Z_τ de I , où $(Z_\tau)_\tau$ est une famille de voisinages de I dépendant explicitement de I et de l'intégrabilité de g , qui ont pour limite I quand $\tau \rightarrow 0$;*

alors, à l'aide d'un changement de variable φ_I , on peut calculer $\int_I g$ avec une précision absolue de D chiffres en $O\left(\frac{D \log D}{\tau}\right)$ évaluations de la fonction g .

Cela nous rend aussi capable de résoudre certains problèmes, ou d'améliorer considérablement la convergence sur quelques exemple.

Pour illustrer la méthode, nous passons en revue quelques exemples illustrant les cas d'application, et permettant de saisir la pertinence des hypothèses proposées. Dans de nombreux cas où ces dernières ne sont pas vérifiées, nous sommes en mesure de proposer des modifications permettant de retrouver une convergence quasi-linéaire, ou bien de démontrer des résultats de convergence polynomiale.

Il faut mentionner ici un remarquable concours de circonstance : les raisons mentionnées ci-dessus ont également motivé un nouveau travail [TSM09] de la part de l'équipe japonaise à l'origine de la méthode, qui aboutit à des conclusions semblables aux nôtres dans le principe. Les délais de publication étant ce qu'ils sont, je n'ai pris connaissance de ce travail que postérieurement à la rédaction du chapitre concerné.

L'existence de cette nouvelle référence sur le sujet ne remet pourtant pas en cause l'intérêt des résultats obtenus ici :

- l'interprétation que nous avons faite de l'intégration en terme de formule de Poisson nous semble plus claire et féconde : elle permet d'obtenir des résultats sous forme de conditions nécessaires et suffisantes ; elle était aussi le paradigme d'optimalité en dégageant les cas qui lui échappent ;
- elle permet d'obtenir des extensions de la méthode ;
- enfin, les résultats obtenus ici sont complètement explicites et directement applicables au calcul d'intégrales.

Ainsi, pour un théoricien des nombres, il est possible d'utiliser la méthode double-exponentielle avec plus de pertinence lors d'expérimentations numériques. Pour le programmeur, il est surtout possible de l'utiliser comme algorithme sous-jacent au calcul de diverses fonctions définies à l'aide d'intégrales.

Nous avons traité deux cas d'application très simple de notre théorie pour le calcul de fonctions usuelles en théorie des nombres, où la capacité à calculer rapidement à grande précision est cruciale :

- l'évaluation de la fonction gamma incomplète ;
- l'évaluation des intégrales de périodes de variétés hyperelliptiques.

Mais les résultats que nous avons obtenus nous permettent surtout d'aborder des calculs de plus grande envergure, et d'importance centrale en théorie des nombres, avec l'évaluation simultanée de transformées de Mellin pour le calcul de valeurs spéciales de fonctions L .

Calculs numériques de fonctions L

L'étude des propriétés des fonctions L issues de divers objets mathématiques constitue, en particulier depuis Riemann, une branche fondamentale de la théorie des nombres à laquelle nous devons quantité de résultats. Depuis une cinquantaine d'années, les expérimentations rendues possibles par le calcul informatique ont ouvert un champ d'étude considérable pour affiner, valider expérimentalement ou même découvrir de nouvelles conjectures.

Il est remarquable que ces calculs aient accompagné dès le début la naissance de l'ordinateur. Citons en particulier les calculs gigantesques effectués pour valider expérimentalement la conjecture de Riemann, à la suite par exemple de Turing [Tur53] pour la fonction zeta ; ou encore l'énoncé de la célèbre conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer [BSD65] dès 1965.

Bien que sur le plan théorique la démonstration de propriétés pourtant simples soit une entreprise extrêmement ardue et dans bien des cas hors de la portée actuelle des mathématiques, il en va différemment sur le plan des calculs numériques, où les fonctions L construites de bien des manières semblent effectivement toutes jouir des mêmes familles de propriétés, du point de vue des expérimentations numériques.

En particulier, nous pouvons citer :

- la célèbre conjecture de Riemann sur la localisation des zéros non triviaux ;
- la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer citée plus haut, et plus généralement les conjectures de Zagier, de Bloch-Kato [BK90] ou de Beilinson [Bei84], sur le contenu géométrique des valeurs spéciales de fonctions L ;
- les théories de matrices aléatoires qui modélisent les répartitions statistiques de valeurs de fonctions L , en particulier leurs zéros [KS00].

Le champ expérimental est donc vaste tant par les questions posées — ou qui ne le sont pas encore — que par l'immense variété des fonctions L , dont les définitions ne sont pas épuisées. Dans ce contexte, il faut disposer de méthodes de calcul numérique fiables permettant :

- d'effectuer des calculs assez haut en partie imaginaire sur la bande critique ;
- d'atteindre de grandes précisions sur le résultat en un point fixé ;
- d'effectuer des calculs rapides sur des familles de valeurs ou de fonctions L .

Même sur le demi-plan de convergence absolue, la définition usuelle d'une fonction L comme somme de Dirichlet est totalement inadaptée pour les calculs, en raison d'une convergence très lente. Toutefois, les propriétés de cohérence auxquelles satisfont les fonctions L — telles que le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle sur le plan analytique, ou les propriétés arithmétiques des coefficients d'un point de vue algébrique — permettent de s'abstraire de ce schéma. Riemann lui-même mit au point les transformations principales permettant d'améliorer la convergence, obtenant en particulier la formule désormais connue sous le nom de formule de Riemann-Siegel [Edw01], dont la convergence est suffisamment rapide pour calculer à la main des valeurs quelconques de la fonction zeta.

Dans les années 60, Lavrik [Lav66, Lav67] exploita ces mêmes propriétés dans le cadre des fonctions L de Dirichlet et les fonctions zêta de corps de nombres, pour ramener le calcul à l'évaluation d'une somme de transformées de Mellin inverses d'un produit de facteurs gamma, et introduisit le principe d'équation fonctionnelle approchée qui rend les calculs raisonnables quand la partie imaginaire augmente.

Sur cette base, des algorithmes de calcul très généraux reposant sur les hypothèses de prolongement analytique et d'existence d'une équation fonctionnelle — acquises ou seulement supposées — ont pu voir le jour et augmenter considérablement le champ d'étude numérique, à la fois sur l'étendue du domaine, comme l'illustrent les calculs effectués très haut sur la bande critique par Odlyzko [Odl01] ; ou en précision du résultat.

En ce qui concerne la vérification de l'hypothèse de Riemann, nous pouvons citer en particulier les travaux de Tollis pour les fonctions zeta de Dedekind [Tol97], de Rubinstein [Rub05b] dans un cadre assez général, ou de Booker [Boo06] pour les fonctions L d'Artin. Ces méthodes ont été étudiées avec l'objectif de pouvoir calculer haut sur la bande critique, mais en relativement faible précision. Dans un cadre très général de fonctions motiviques, Dokchitser a d'autre part mis au point un algorithme [Dok04] qui permet de calculer des valeurs spéciales avec une précision arbitraire. En revanche, celui-ci ne permet pas de monter très haut en partie imaginaire. Mais surtout, il repose de manière fondamentale sur un développement en fractions continues dont la convergence vers la valeur désirée n'est pas démontrée (il ne l'est que dans le cadre des fonctions L de degré 1, [AT99]).

L'objectif de cette thèse est d'obtenir un algorithme général reprenant les avantages de chacune des approches ci-dessus, c'est-à-dire le plus générique possible, rapide et prouvé — sous les hypothèses habituelles de prolongement et d'équation fonctionnelle qui sous-tendent les calculs. Il doit permettre à la fois de monter en partie imaginaire et de calculer à grande précision des valeurs spéciales, pour une fonction L quelconque satisfaisant aux hypothèses standard.

Résultats obtenus

L'algorithme de Rubinstein repose sur des calculs de transformées de Mellin inverses sur une droite verticale par intégration numérique à l'aide de sommes de Riemann. En reprenant les outils d'équation fonctionnelle approchée qu'il a développés, nous avons d'abord démontré des estimations explicites qui permettent d'étudier de manière unifiée plusieurs stratégies d'intégration.

Notre premier résultat est une démonstration de la complexité de l'algorithme de Rubinstein, avec des formules explicites pour chacun des paramètres :

Théorème. *Pour une fonction L de degré r et de conducteur q , l'algorithme de Rubinstein permet de calculer $L(\sigma + i\tau)$ à précision absolue D avec*

$$O\left(\sqrt{q}\tau^{\frac{r}{2}}D^2\right)$$

évaluations de la fonction exponentielle en précision $D(1 + \frac{r}{6}) + O(\log D)$.

Nous considérons d'autre part le problème de l'application d'un changement de variable double-exponentiel pour le calcul des transformées de Mellin inverses. Il est ici remarquable de constater que, bien que les calculs expérimentaux montrent une excellente convergence de cette technique, les hypothèses autorisant son emploi ne sont pas vérifiées et la théorie développée dans le premier chapitre exclut la vitesse de convergence habituelle de l'intégration double-exponentielle. Une étude plus fine des intégrales considérées nous permet toutefois d'obtenir deux résultats :

- une démonstration de la vitesse de convergence obtenue en pratique, qui ne diffère que d'un terme logarithmique de la convergence habituelle de l'intégration double-exponentielle ;
- l'introduction d'un décalage de contour, qui permet d'appliquer la théorie du premier chapitre et d'obtenir de manière beaucoup plus commode une convergence quasi-linéaire.

Ces résultats nous permettent de valider l'approche double-exponentielle pour le calcul de fonctions L, avec des algorithmes de complexité prouvée pour lesquels le terme D^2 ci-dessus est remplacé par $D \log(D)^2$, au prix de l'apparition d'un facteur τ supplémentaire.

D'un point de vue pratique, une phase de précalcul pour une fonction L donnée et une borne sur la partie imaginaire permet de calculer très efficacement de nombreuses valeurs.

Nous proposons enfin une approche dont la programmation serait plus délicate et pour laquelle nous n'avons fait qu'une étude de complexité plus sommaire, mais qui ramène la complexité à l'estimation suivante :

Affirmation. *Avec les hypothèses précédentes, le calcul de $L(\sigma + i\tau)$ à précision D peut se faire en*

$$O\left(\sqrt{q}\tau^{\frac{r+1}{2}}\sqrt{D \log D}\right)$$

évaluations d'exponentielle en précision $D(1 + \frac{r}{3}) + O(\log D)$.

Autres travaux

Cette thèse comporte deux annexes démontrant des estimations techniques que nous utilisons pour les deux premiers chapitres.

Nous présentons également en annexe C un travail d'importance moindre réalisé en début de thèse. Il s'agit d'une contribution d'ordre algorithmique au calcul des racines de l'unité dans un corps de nombres. Cette tâche d'apparence anodine s'avère cruciale lors du travail sur les réseaux d'entiers ou le calcul de groupes de classes, et l'implantation du système PARI se heurtait fréquemment à des calculs interminables sur certaines extensions composées.

À l'énumération exhaustive des plus courts vecteurs du réseau des entiers algébriques couramment employée, nous avons substitué une approche locale-globale permettant d'une part d'identifier rapidement les éventuelles racines présentes, puis de calculer leurs coordonnées sur la base d'entiers par relèvement modulaire ou par réduction de réseau.

Bien que la vitesse d'exécution de cet algorithme soit moins bonne que la recherche de vecteurs courts dans les meilleurs cas (les corps cyclotomiques donnés par une base réduite en sont l'archétype), la complexité en moyenne est meilleure, et la complexité dans les pire cas est polynomiale et non exponentielle. L'algorithme de calcul des racines proposé a été ajouté au système PARI/gp, et adopté comme algorithme par défaut.

Ce travail nous a également donné l'occasion de proposer une approche de programmation linéaire pour la construction d'extension de corps à ramification prescrite.

Sommaire

1	Principe	7
2	Méthode d'application à l'intégration sur divers domaines	23
3	Validité du principe	38
4	Exemples complets	46

Notations, conventions

Dans tout ce qui suivra :

- g désigne une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable, dont on calcule l'intégrale par la méthode des trapèzes ;
- sa transformée de Fourier est définie avec les conventions habituelles en théorie des nombres :

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} g(t) dt;$$

- pour tout réel $\tau > 0$ on note $\Delta_\tau = \mathbb{R} + i] - \tau, \tau[$ la bande complexe de largeur τ autour de l'axe réel ;
- lorsque g possède un prolongement holomorphe à une bande Δ_τ , on désignera par g ce prolongement et on dira que g est définie sur Δ_τ .

1 Principe

1.1 Méthode des trapèzes et formule de Poisson

Pour une fonction décroissant suffisamment en l'infini, la formule de Poisson relie un échantillonnage régulier de la fonction à un échantillonnage (de pas inverse) de sa transformée de Fourier, dont le premier terme est l'intégrale de la fonction.

Si l'on applique cette formule au réseau $h\mathbb{Z}$, on a

$$h \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(kh) = \int_{\mathbb{R}} g + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{g}\left(\frac{k}{h}\right), \quad (1.1)$$

ce qui constitue un lien entre une somme des trapèzes infinie de pas h et l'intégrale sur $\mathbb{R}$ correspondante, les termes de Fourier exprimant de manière exacte l'erreur réalisée lors de cette quadrature.

L'intégration numérique par la méthode des trapèzes sur l'axe réel revient à choisir d'une part un intervalle hors duquel on tronquera la somme, et d'autre part un pas h , en majorant précisément les erreurs ① de troncature et ② de quadrature réalisées à cette occasion.

$$h \sum_{k=-n}^n g(kh) + \underbrace{h \sum_{|k|>n} g(kh)}_{\text{①}} = \int_{\mathbb{R}} g + \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{g}\left(\frac{k}{h}\right)}_{\text{②}} \quad (1.2)$$

Erreur de quadrature La transformée de Fourier transforme les régularités de la fonction initiale en décroissance à l'infini. L'interprétation en terme d'erreur de quadrature est simple : pour une fonction très régulière, les variations ont une grande cohérence globale, si bien que les erreurs se compensent.

Si la fonction g est de classe $\mathcal{C}^k$, une intégration par parties montre que la transformée est en $O(x^{-k})$. Si l'on considère des fonctions non seulement $\mathcal{C}^\infty$, mais même holomorphes au voisinage de l'axe réel, on démontre alors que la décroissance de la transformée de Fourier est exponentielle. La section 1.4 présente les liens que l'on peut établir entre la régularité de g et la décroissance de $\hat{g}$, donc l'estimation de l'erreur de quadrature.

Erreur de troncature Une fois choisi le pas h , la connaissance de la décroissance de g permet de choisir la borne de troncature nh de sorte que les termes éliminés constituent une erreur de troncature maîtrisée.

Le principe de l'intégration numérique par la méthode des trapèzes est de considérer les fonctions possédant à la fois une décroissance maximale, afin d'échantillonner sur un nombre réduit de termes, tout en conservant la plus grande régularité possible, c'est-à-dire l'holomorphie au voisinage de la zone d'intégration, afin de prendre un pas h le moins petit possible.

Plus précisément, nous allons considérer des fonctions qui possèdent une décroissance au moins exponentielle sur l'axe réel, et dont les transformées de Fourier possèdent elles aussi une décroissance au moins exponentielle. De la sorte, la complexité de l'intégration sur $\mathbb{R}$ sera au plus quadratique

L'intuition de l'intégration double-exponentielle est que le procédé est en général optimal lorsque la fonction g possède une décroissance doublement exponentielle, et une régularité suffisante pour que sa transformée ait une décroissance exponentielle.

1.2 Exemple : le cas optimal

Pour fixer les idées, considérons le cas d'une fonction gaussienne $f : x \mapsto e^{-Ax^2}$, de variance $A > 0$, dont la décroissance est exponentielle. On sait qu'elle est — au facteur A près — sa propre transformée de Fourier, ce qu'on démontre à l'aide d'un décalage de la droite d'intégration

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} e^{-At^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-A(t + \frac{i\pi x}{A})^2 - \frac{\pi^2 x^2}{A}} dt = e^{-\frac{\pi^2 x^2}{A}} \hat{f}(0).$$

On peut en outre calculer la constante $\hat{f}(0)$, précisément à l'aide de la formule de Poisson utilisée tout au long de cet article :

$$h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-Ak^2 h^2) = \hat{f}(0) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-\frac{\pi^2 k^2}{h^2 A});$$

en prenant $h = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$, les deux sommes sont égales, non nulles, et on obtient $\hat{f}(0) = h$.

Ici, f et $\hat{f}$ sont toutes les deux holomorphes sur $\mathbb{C}$ tout entier et intégrables sur les droites horizontales, et nous verrons au paragraphe suivant que cela correspond au fait qu'elles ont toutes deux une décroissance plus qu'exponentielle sur l'axe réel. Il s'agit là d'une situation idéale pour la sommation par trapèzes.

Pour un calcul de $\int_{\mathbb{R}} f = \sqrt{\frac{\pi}{A}}$ à une précision d'ordre D , on choisit

- h de sorte que $\hat{f}(\frac{1}{h}) = e^{-\frac{\pi^2}{h^2 A}} \leq e^{-D}$, soit $h \leq \frac{\pi}{\sqrt{DA}}$.
- nh de sorte que $f(nh) = e^{-A(nh)^2} \leq e^{-D}$, soit $nh \geq \sqrt{\frac{D}{A}}$.

Ainsi, le nombre d'évaluations $n = \frac{D}{\pi}$ pour obtenir une précision de l'ordre de D est linéaire et indépendant de la variance de la gaussienne.

Remarque : L'indépendance en la variance est tout à fait normal et général : en effet changer de variance revient à faire un changement de variable homothétique sur f ; on obtient alors l'homothétie inverse sur $\hat{f}$, et les deux facteurs d'homothétie se simplifient — l'un multipliant nh et l'autre $1/h$ — lorsqu'on calcule le nombre de points d'intégration.

Remarque : Ce qui est vrai pour la gaussienne l'est de toutes les fonctions de Hermite, et plus généralement pour toutes les fonctions de la forme $P(x)e^{-Q(x^2)}$ où P et Q sont deux polynômes, et Q est à coefficients positifs. Il y a donc une famille infinie de fonctions non triviales pour lesquelles l'intégration se fait en complexité linéaire.

1.3 Complexité théorique

Décroissance simplement exponentielle Considérons une fonction g et sa transformée de Fourier $\hat{g}$, et supposons que chacune ait une décroissance de nature exponentielle, de sorte qu'on puisse écrire pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|g(x)| \leq M_1 e^{-\alpha_1 |x|^{\beta_1}} \quad (1.3)$$

$$|\hat{g}(x)| \leq M_2 e^{-\alpha_2 |x|^{\beta_2}} \quad (1.4)$$

pour des constantes $M_i, \alpha_i > 0$ et $\beta_i \geq 1$.

Proposition 1.1

Avec les hypothèses précédentes, pour obtenir des erreurs de quadrature et de troncature de l'ordre de e^{-D} il suffit de prendre

$$nh \geq \max \left(\left(\frac{D + \log(\frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1})}{\alpha_1} \right)^{1/\beta_1}, 1 \right)$$

$$\frac{1}{h} \geq \left(\frac{D + \log(2M_2 + e^{-D})}{\alpha_2} \right)^{1/\beta_2}.$$

Pour $D \rightarrow \infty$, le nombre d'évaluations de la fonction g vérifie donc

$$n \sim \frac{D^{\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}}}{\alpha_1^{\frac{1}{\beta_1}} \alpha_2^{\frac{1}{\beta_2}}}.$$

Démonstration : • Sous ces hypothèses l'erreur de troncature vérifie

$$\begin{aligned} \left| h \sum_{k=n+1}^{\infty} g(kh) \right| &\leq M_1 h \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha_1 (kh)^{\beta_1}} \\ &\leq M_1 h \int_n^{\infty} e^{-\alpha_1 (th)^{\beta_1}} dt \\ &\leq \frac{M_1}{\alpha_1 \beta_1 (nh)^{\beta_1 - 1}} \int_{nh}^{\infty} \alpha_1 \beta_1 u^{\beta_1 - 1} e^{-\alpha_1 u^{\beta_1}} du \quad (\text{car } \beta_1 \geq 1) \\ &\leq \frac{M_1}{\alpha_1 \beta_1} e^{-\alpha_1 (nh)^{\beta_1}} \quad \text{si } n \geq 1 \end{aligned}$$

la même estimation valant pour $k < -n$, si bien que vérifier

$$\left| h \sum_{|k| > n} g(kh) \right| \leq \frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1} e^{-\alpha_1 (nh)^{\beta_1}} \leq e^{-D}$$

donne la condition annoncée.

- si $\beta_2 \geq 1$, alors $e^{-\alpha_2(\frac{k}{h})^{\beta_2}} \leq e^{-\alpha_2 \frac{k}{h^{\beta_2}}}$, et l'erreur de quadrature est majorée par la série géométrique :

$$\sum_{k \neq 0} \left| \hat{g}\left(\frac{k}{h}\right) \right| \leq 2 \sum_{k \geq 1} M_2 e^{-\alpha_2 \frac{k}{h^{\beta_2}}} = \frac{2M_2}{e^{\frac{\alpha_2}{h^{\beta_2}}} - 1} \quad (1.5)$$

qui donne immédiatement la condition sur h . $\square$

Pour avoir une bonne convergence, l'important est donc de minimiser $\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$.

Décroissance doublement exponentielle Ceci correspond au cas $\beta_1 = \infty$ ci-dessus, et on obtient logiquement $D^{1/\beta_1} = \log(D)$. Nous verrons en 1.6 que pour des fonctions holomorphes non nulles cela implique $\beta_2 \leq 1$. Nous considérons donc $\beta_2 = 1$ dans ce paragraphe.

Supposons donc

$$|g(x)| \leq M_1 e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 |x|}} \quad (1.6)$$

$$|\hat{g}(x)| \leq M_2 e^{-\alpha_2 |x|} \quad (1.7)$$

pour des constantes $M_i, \alpha_i > 0$ et $\beta_1 > 0$.

Proposition 1.2 (DE)

Avec les hypothèses précédentes, il suffit de poser

$$\begin{aligned} nh &\geq \frac{\log(D + \log(\frac{2M_1}{\alpha_1 \beta_1}))}{\beta_1} \\ \frac{1}{h} &\geq \frac{D + \log(2M_2 + e^{-D})}{\alpha_2}, \end{aligned}$$

ce qui donne pour $D \rightarrow \infty$ un nombre d'évaluations

$$n \sim \frac{D \log(D)}{\beta_1 \alpha_2}.$$

Démonstration : Comme précédemment on majore

$$\begin{aligned} \left| h \sum_{k=n+1}^{\infty} g(kh) \right| &\leq M_1 h \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 xh}} \\ &\leq M_1 h \int_n^{\infty} e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 xh}} dx \\ &\leq \frac{M_1 h}{\alpha_1 \beta_1 h e^{\beta_1 nh}} \int_n^{\infty} \alpha_1 \beta_1 h e^{\beta_1 xh} e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 xh}} dx \\ &\leq \frac{M_1}{\alpha_1 \beta_1 e^{\beta_1 nh}} e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 nh}}. \end{aligned}$$

On a la même majoration pour les termes négatifs. En négligeant la division par $e^{\beta_1 nh} > 1$, majorer ces deux erreurs de troncature par e^{-D} donne la condition. $\square$

1.4 Régularité et décroissance

Le lien entre la régularité de la fonction g et la décroissance de sa transformée de Fourier $\hat{g}$ est explicité par des théorèmes de type Paley-Wiener. Du fait de la réciprocité de Fourier, tous les résultats peuvent être formulés indifféremment en remplaçant g par $\hat{g}$.

1.4.1 Régularité de g d'après la décroissance de $\hat{g}$

Tout d'abord, l'hypothèse d'une décroissance exponentielle de la transformée de Fourier implique immédiatement l'holomorphie de la fonction g au voisinage de l'axe réel.

Proposition 1.3

Soit $\hat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\hat{g}(x) = O(e^{-2\pi\tau|x|}), \tau > 0,$$

alors $\hat{g}$ est la transformée de Fourier d'une fonction g holomorphe sur une bande Δ_τ . De plus, pour tout $|t| < \tau$, on a $g \in L^2(\mathbb{R} + it)$.

Démonstration : Sous ces hypothèses, $\hat{g}$ est L^1 , de même que $\hat{g}(x)e^{2i\pi xt}$ pour tout $|t| < \tau$, d'où l'existence de $g(x + it)$. De plus, $(2i\pi x)e^{2i\pi xt}\hat{g}(x)$ est elle aussi L^1 , donc g est dérivable sur Δ_τ par dérivation sous le signe intégral. L'égalité de Plancherel assure l'intégrabilité L^2 . $\square$

Corollaire 1.4

En particulier, si

$$\hat{g}(x) = O(e^{-\alpha|x|^\beta}) \text{ avec } \beta > 1$$

alors g est une fonction entière.

1.4.2 Décroissance de $\hat{g}$ d'après la régularité de g

Réciproquement, et c'est ce qui importe pour l'intégration numérique, on peut chercher à assurer la décroissance exponentielle de $\hat{g}$ à partir d'hypothèses sur g . Si l'on ajoute des conditions convenables qui permettent de décaler la droite d'intégration dans la direction imaginaire, on peut chercher la décroissance de l'exponentielle hors de l'axe, ce qui donne le résultat suivant :

Proposition 1.5

Soit $\tau > 0$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction L^1 , telle que

- g possède un prolongement analytique holomorphe sur un voisinage ouvert de Δ_τ (que l'on note toujours g);
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{x-i\tau}^{x+i\tau} g(z) dz = 0$;
- $g \in L^1(\mathbb{R} \pm i\tau)$;

alors $\hat{g}$ vérifie

$$|\hat{g}(x)| \leq M_2 e^{-2\pi|x|\tau}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où $M_2 = \int_{\mathbb{R}} |g(t + i\tau)| + |g(t - i\tau)| dt$.

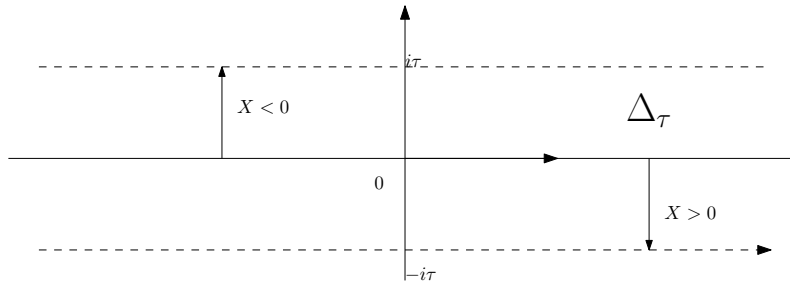


FIG. 2.1: décalage de la droite d'intégration

Démonstration : Les hypothèses permettent, via la formule de Cauchy, de dire que pour tout $|t| \leq \tau$, on a $\int_{\mathbb{R}} g(u) e^{2i\pi x u} du = \int_{\mathbb{R}+it} g(u) e^{2i\pi x u} du$.

Ce qui donne en décalant la droite d'intégration vers le bas de $-i\tau$ pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} |\hat{g}(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x(z-i\tau)} g(z-i\tau) dz \right| \\ &\leq e^{-2\pi x\tau} \int_{\mathbb{R}} |g(z-i\tau)| dt \\ &\leq \|g(\cdot - i\tau)\|_1 e^{-2\pi x\tau} \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse d'intégrabilité. De même pour $x < 0$, en décalant vers le haut. $\square$

Remarque : Les deux hypothèses supplémentaires sont cruciales :

- le fait qu'une transformée de Fourier ait une décroissance exponentielle n'entraîne pas d'hypothèse L^1 sur la fonction initiale : le cas le plus simple est celui de la fonction indicatrice $1_{[-1,1]}$ qui est la transformée de Fourier de la fonction $\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}$, laquelle n'est pas L^1 .
- en ce qui concerne l'annulation en l'infini des intégrales de bord, la fonction $x \mapsto e^{-\cosh(x)}$ est L^1 sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} + 2i\pi$, mais explose sur $\mathbb{R} + i\pi$ (où le cosinus hyperbolique est remplacé par son opposé).

Toutefois, nous verrons dans la section 1.6 (proposition 1.13) que ces deux hypothèses peuvent être obtenues à partir des hypothèses de décroissance que nous ferons sur g .

En combinant ces deux résultats, on a un moyen simple de connaître la vitesse de décroissance de la transformée de Fourier à partir d'hypothèses sur la fonction initiale :

Théorème 1.6

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à décroissance double-exponentielle possédant un prolongement holomorphe à une bande Δ_τ . Alors

- si g est bornée sur Δ_τ et $g \in L^1(\mathbb{R} \pm it)$, alors $\hat{g}(x) = O(e^{2\pi t|x|})$ au voisinage de $\mp\infty$;
- si $\hat{g}(\pm x) = O(e^{-2\pi\tau x})$ au voisinage de $+\infty$, alors $g \in L^2(\mathbb{R} \mp it)$ pour tout $0 \leq t < \tau$;

Démonstration : Pour le premier point, on applique la proposition 1.5, en déduisant l'hypothèse de décroissance en l'infini de la proposition 1.13. Le second est la proposition 1.3. $\square$

Remarque : On peut raffiner le résultat à l'aide d'hypothèses sur $\hat{g}$: par exemple si $\hat{g}$ est $\mathcal{C}^1$ et que sa dérivée a également une décroissance exponentielle en $e^{-2\pi\tau x}$, alors du fait que xg est L^2 sur $\mathbb{R} + i\tau$ on déduit que g y est L^1 . Toutefois on cherche des conditions qui fassent intervenir uniquement g pour connaître précisément la décroissance de $\hat{g}$.

1.5 Autres exemples

1.5.1 Une autre fonction propre

Prenons l'autre exemple de fonction invariante par la transformation de Fourier $f : x \mapsto \frac{1}{\cosh(\pi x)}$ dont l'intégrale vaut $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\cosh(\pi x)} = 1$.

On a alors $\cosh(\pi z) = 0 \Leftrightarrow z \in i(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$, donc f est holomorphe sur $\Delta_{\frac{1}{2}}$, et on a bien $\hat{f}(x) = f(x) = O(e^{-\frac{2\pi}{2}x}) = O(e^{-\pi x})$.

On pose ici $h = \frac{\pi}{D}$ et $nh = \frac{D}{\pi}$, soit $n = \frac{D^2}{\pi^2}$, ce qui ne donne qu'une convergence quadratique.

1.5.2 Au-delà de la gaussienne

Essayons d'améliorer le cas de la Gaussienne, en considérant la fonction

$$f : x \mapsto e^{-\pi x^4}$$

À présent, $\beta_1 = 4$ et f est intégrable sur toutes les droites $\mathbb{R} + it$ puisque

$$-(x + it)^4 \sim -x^4$$

donc $\hat{f}$ a une décroissance plus qu'exponentielle, $\beta_2 \geq 1$.

D'après la proposition 1.5, on sait dans tous les cas que pour tout $t > 0$,

$$|\hat{f}(x)| \leq M_2(t)e^{-2\pi t|x|}$$

avec une constante $M_2(t) = \|f(\cdot + it)\| + \|f(\cdot - it)\|$ que l'on peut majorer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}+it} |f(z)| \, dz &\leq 2 \int_0^\infty e^{-(it+x)^4} \, dx \\ &\leq 2 \int_0^\infty e^{-t^4 + 6t^2x^2 - x^4} \, dx \\ &\leq 2 \int_0^\infty e^{-x^2 + x^2(6t^2+1) - x^4} \, dx \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sup_x e^{x^2(6t^2+1) - x^4}. \end{aligned}$$

Le supremum est atteint en $2x^2 = 6t^2 + 1$, ce qui donne

$$M_2(t) \leq \sqrt{\pi} e^{\frac{(6t^2+1)^2}{4}}.$$

Ainsi, d'après le lemme 1.1, on peut poser

$$\frac{1}{h} = \frac{D + \frac{(6t^2+1)^2}{4} + \log(2\sqrt{\pi} + e^{-D})}{2\pi t}.$$

Ceci est valable quel que soit t , aussi on maximise la valeur de h en posant $t^2 = \frac{\sqrt{12D'+1}-1}{18}$, avec $D' = D + \frac{1}{4} + \log(4\sqrt{\pi} + e^{-D})$.

Dans ce cas, on a

$$\frac{1}{h} \sim \frac{4D'^{\frac{3}{4}}}{2\pi 3^{\frac{1}{4}}}.$$

Puisque par ailleurs on pose $nh = \sqrt[4]{D}$, on obtient une complexité linéaire d'ordre

$$n \sim \frac{2D}{\pi \sqrt[4]{3}}.$$

C'est toujours linéaire, mais le nombre d'évaluations est environ deux fois supérieur à celui obtenu pour la gaussienne. Nous montrerons en section 1.8 que la complexité de l'intégration est toujours au moins linéaire. Et le cas des fonctions $e^{-z^{2k}}$ sont autant d'exemples où on atteint une complexité linéaire, comme l'illustre la figure 2.2.

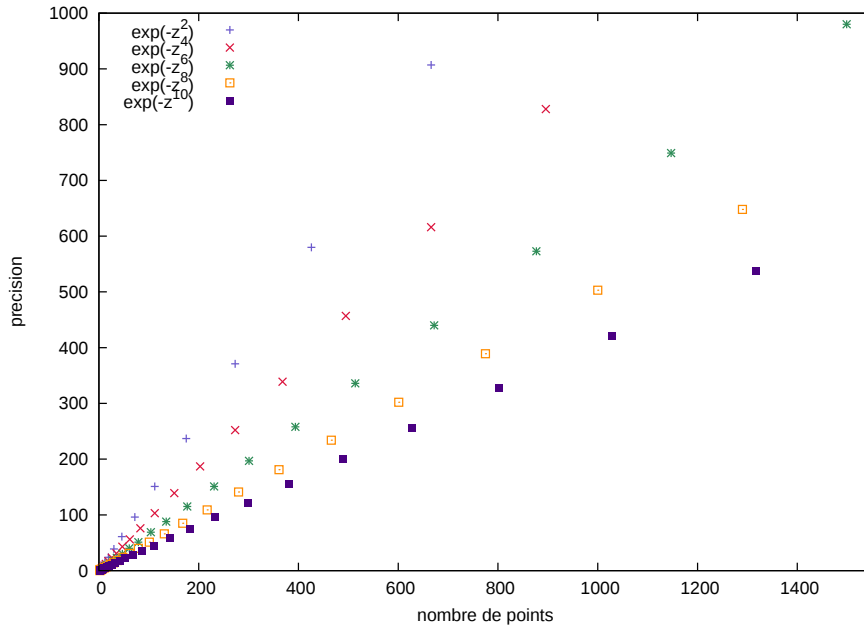
1.6 Décroissance des fonctions holomorphes

La grande rigidité des fonctions holomorphes permet d'étendre des hypothèses de croissance ou de décroissance à un voisinage de l'endroit où on en dispose.

Nous démontrons ici quelques résultats classiques obtenus à partir du principe du maximum par la théorie de Phragmén-Lindelöf, et qui se ramènent tous à l'idée suivante :

pour des variations de nature exponentielle, les variations les plus faibles sont obtenues par la fonction exponentielle elle-même.

Ces résultats sont donnés dans deux cadres :

FIG. 2.2: convergence des intégrales de fonctions $e^{-x^{2k}}$.

- celui des fonctions à décroissance simplement exponentielle, définies sur des secteurs angulaires et pour lesquelles les fonctions de référence sont les exponentielles $e^{\alpha x^\beta}$. On peut trouver ces résultats dans [Car56].
- celui des fonctions à décroissance doublement exponentielle définies, soit sur des bandes Δ_τ auquel cas les fonctions de référence sont les doubles-exponentielles $e^{\alpha \cosh(\beta x)}$, soit sur des demi-bandes Δ_τ^+ pour des fonctions $e^{\alpha e^{\beta x}}$.

1.6.1 Fonctions à décroissance simplement exponentielle

Notons

$$C_\theta = \left\{ z = re^{it}, r \geq 1, -\theta \leq t \leq \theta \right\}$$

le secteur angulaire des $|z| \geq 1$ délimité par les deux rayons

$$R_{\pm\theta} = e^{i\pm\theta}[1, \infty[.$$

Lemme 1.7

Si f est une fonction holomorphe sur C_θ , et vérifie

- $|f| \leq M$ sur le bord de C_θ ;
- $|f(z)| = O(e^{\alpha|z|^\beta})$ sur C_θ avec $\beta\theta < \frac{\pi}{2}$;

alors $|f| \leq M$ uniformément sur C_θ .

Démonstration : En effet, pour tout $\beta < \beta' < \frac{\pi}{2\theta}$, les fonctions $h_\varepsilon(z) = \exp(-\varepsilon z^{\beta'})$, $\varepsilon > 0$, sont bornées par 1 sur le bord de C_θ et ont une décroissance plus rapide que la croissance de f :

$$\left| h_\varepsilon(re^{it}) \right| = e^{-\varepsilon \cos(\beta'\tau)r^{\beta'}} \text{ avec } \beta'\tau \leq \beta'\theta < \frac{\pi}{2}.$$

Par le principe du maximum, les fonctions fh_ε sont donc toutes bornées uniformément par le supremum de f sur le bord de C_θ . Or à z fixé, $h_\varepsilon(z) \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 1$, donc cette borne est valide pour $f(z)$. $\square$

Corollaire 1.8

En particulier, si f est bornée sur chaque rayon R_t d'un secteur C_θ , elle l'est par ses majorants sur le bord.

Lemme 1.9

Si f est une fonction holomorphe bornée sur C_θ , et

$$|f(z)| = O(e^{-\alpha|z|^\beta}) \text{ sur un rayon } R_\tau, \tau \in]-\theta, \theta[$$

avec $\theta\beta > \frac{\pi}{2}$, alors f est nulle.

Démonstration : En effet pour $\beta' = \frac{\pi}{2\theta} < \beta$ et tout $n \geq 1$ la fonction $h_n(z) = e^{nz^{\beta'}}$ est bornée par 1 sur les rayons $R_{\pm\theta}$, par e^n sur la portion de cercle qui les joint, et elle a une croissance d'ordre β' inférieure à la décroissance de f sur R_τ . Notons M un majorant de f sur C_θ , Me^n y est un majorant de fh_n , et notons $M_n > M$ un majorant de fh_n sur le rayon R_τ . Donc le produit fh_n est borné par M_n sur le bord de chacun des secteurs $C_{-\theta,\tau}$ et $C_{\tau,\theta}$, et a une croissance d'ordre β' sur ces secteurs qui sont d'ouverture inférieure à $\frac{\pi}{\beta'}$, donc d'après le lemme 1.7 fh_n est uniformément borné sur chacun d'eux par M_n . Elle l'est donc sur C_θ , a priori par M_n mais le corollaire 1.8 montre qu'en réalité fh_n est bornée par ses valeurs sur le bord de C_θ , donc par Me^n . Pour tout z assez grand tel que $\operatorname{Re} z^{\beta'} > 1$, on en déduit que $|f(z)| \leq Me^{n - n\operatorname{Re} z^{\beta'}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, donc f est partout nulle. $\square$

Théorème 1.10

Si f est une fonction holomorphe sur C_θ , telle que

- $|f(x)| = O(e^{-\alpha x^\beta})$ sur un rayon $R_\tau, \tau \in]-\theta, \theta[,$ avec $\beta > \frac{\pi}{2\theta}$;
- $|f(z)| \leq e^{A|z|^\rho}$ sur C_θ avec $\rho\theta < \frac{\pi}{2}$;

alors f est nulle.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $f(z)e^{-\lambda z^\rho}$ où λ est choisi de sorte que $\lambda \cos(\frac{\rho\theta}{2}) > A$. $\square$

1.6.2 Fonctions à décroissance doublement exponentielle

Les résultats suivants s'obtiennent en remplaçant z^β par $e^{\beta z}$ sur des demi-bandes $\Delta_\tau^+ = [0, \infty[+ i] - \tau, \tau[,$ ou sur les bandes complètes Δ_τ en considérant plutôt les fonctions $e^{-\alpha \cosh(\beta z)}$.

Proposition 1.11

Soit f une fonction holomorphe sur la demi-bande $\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+ = \mathbb{R}_+ + i] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et telle que

- $|f| \leq M$ sur $\partial\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$;
- $f(x + it) = O(e^{\alpha e^{\beta x}})$ sur $\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$ avec $\beta < 1$;

alors $|f| \leq M$ uniformément sur $\Delta_{\frac{\pi}{2}}^+$.

Décroissance maximale : De même, on limite la décroissance de fonctions qui possèdent une certaine bande d'holomorphie sur laquelle elles restent bornées : si β est l'ordre de décroissance et 2τ la largeur de la bande, on a $\beta 2\tau \leq \pi$.

Théorème 1.12

Soit f une fonction holomorphe et bornée sur une bande Δ_τ^+ , qui possède une décroissance

$$f(x + it) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}}), \quad x > 0$$

avec $\beta > \frac{\pi}{2\tau}$, pour une certaine valeur $t \in]-\tau, \tau[$. Alors f est la fonction nulle.

Extension de la décroissance : Dans ce cadre double-exponentiel, donnons un exemple d'utilisation plus précise du principe de Phragmén-Lindelöf en étendant la décroissance d'une fonction à un voisinage.

Proposition 1.13

Si f est une fonction holomorphe sur une bande Δ_τ^+ vérifiant

- $f(x) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}})$ sur $\mathbb{R}_+$;
- $|f| \leq M$ sur Δ_τ^+ ;

alors pour tout $|t| < \tau$,

$$|f(x + it)| \leq M e^{-\alpha_t e^{\beta x}} \quad (1.8)$$

où $\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \frac{\sin(\beta t)}{\tan(\beta \tau)})$.

Démonstration : Si f est nulle, la conclusion est vraie. On suppose donc f non nulle, et le théorème 1.12 impose $\tau \leq \frac{\pi}{2\beta}$. On considère une fonction $h(z) = e^{(a+ib)e^{\beta z}}$ de sorte que hf soit bornée sur $\mathbb{R}_+ + i\tau$. Puisque

$$|h(x + it)| = e^{(a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t))e^{\beta x}}$$

il suffit de choisir $a = \alpha$ et $b = \frac{\alpha}{\tan(\beta \tau)}$ on a $|h| = 1$ sur $\mathbb{R}_+ + i\tau$ et $|fh| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$. Puisque en outre fh a une croissance d'ordre β sur la bande $\Delta_{0,\tau}$ de largeur $\tau \leq \frac{\pi}{2\beta} < \frac{\pi}{\beta}$, on a $|fh| \leq M$ sur $\Delta_{0,\tau}$. La même chose est vraie sur la demi-bande inférieure en prenant l'opposé de b , ce qui démontre le résultat. $\square$

Proposition 1.14

Si f est une fonction holomorphe sur une bande Δ_τ vérifiant

- $f(x) = O(e^{-\alpha e^{\beta x}})$ sur $\mathbb{R}_+$ pour des valeurs $\alpha, \beta > 0$;
- $|f(x + it)| \leq M e^{\lambda x + A e^{\gamma x}}$ sur Δ_τ avec $\gamma < \beta$;

alors pour tout $|t| < \tau$,

$$|f(x + it)| \leq M e^{\lambda x + A_t e^{\gamma x} - \alpha_t e^{\beta x}} \quad (1.9)$$

où $\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \frac{\sin(\beta t)}{\tan(\beta \tau)})$ et $A_t = A \frac{\cos(\gamma t)}{\cos(\gamma \tau)}$.

Démonstration : D'après 1.12, on a $\beta \tau \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\gamma \tau) > 0$. On applique alors simplement le théorème précédent au produit fh , où on pose $h(z) = e^{-\lambda z - \frac{A}{\cos(\gamma \tau)} e^{\gamma z}}$. $\square$

1.7 Énoncé du théorème double-exponentiel

Le théorème général d'intégration des fonctions à décroissance doublement exponentielle consiste simplement à utiliser les résultats de la section précédente pour appliquer la proposition 1.2 uniquement en terme de la fonction g .

Nous donnons trois versions du théorème d'intégration pour les fonctions à décroissance doublement exponentielle : le premier fait appel à des hypothèses assez précises mais permet d'obtenir en pratique les meilleures constantes, tandis que les suivants affaiblissent les hypothèses au prix d'une perte de précision sur les constantes.

Théorème 1.15 (intégration double exponentielle 1)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. f possède un prolongement holomorphe borné sur une bande Δ_τ ;
2. $|f(x)| \leq M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $\int_{\mathbb{R}} |f(x - i\tau)| + |f(x + i\tau)| dx \leq M_2$;

alors, pour tout $D > 0$, en posant

$$h \leq \frac{2\pi\tau}{D + \log(4M_2 + 2e^{-D})} \quad (1.10)$$

$$\text{et } n \geq \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha\beta}))}{h\beta} \quad (1.11)$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^n f(kh) \right| \leq e^{-D}.$$

Démonstration : Les paramètres sont ceux de la proposition 1.2, où l'on obtient $\alpha_2 = 2\pi\tau$ à l'aide du théorème 1.6. $\square$

En raison des résultats de la section 1.6, on peut assouplir l'hypothèse L^1 au moyen de calculs génériques :

Théorème 1.16 (intégration double exponentielle 2)

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. g possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ ;
2. $|g(x)| \leq M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $|g(z)| \leq M_2$ sur Δ_τ ;

alors, pour tout $D > 0$, en posant

$$\delta = \frac{1}{\tan(\beta\tau)} \quad (\delta = 0 \text{ si } \beta\tau = \frac{\pi}{2}) \quad (1.12)$$

$$t = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{D - \beta\delta\tau}{\delta D + \beta\tau}\right) \quad (1.13)$$

$$\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \delta \sin(\beta t)) \quad (1.14)$$

$$h \leq \frac{2\pi t}{D + \log(\frac{4M_2 e^{-\alpha_t}}{\alpha_t \beta} + 2e^{-D})} \quad (1.15)$$

$$\text{et } n \geq \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha_1 \beta_1}))}{h\beta_1} \quad (1.16)$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g - h \sum_{k=-n}^n g(kh) \right| \leq e^{-D}.$$

Démonstration : D'après la proposition 1.13, pour tout $t < \tau$,

$$|g(x \pm it)| \leq M_2 e^{-\alpha(t) e^{\beta|x|}}$$

où $\alpha(t) = \cos(\beta t) - \delta \sin(\beta t)$, avec $\delta = \frac{1}{\tan(\beta\tau)}$. En particulier, pour tout $|t| < \tau$, g vérifie les hypo-

thèses de la proposition 1.5 avec $\|g(\cdot + it)\|_1 \leq \frac{2M_2 e^{-\alpha(t)}}{\alpha(t)\beta}$ (cf. (A.2.6)). On a donc

$$|\hat{g}(X)| \leq \frac{4M_2 e^{-\alpha(t)}}{\alpha(t)\beta} e^{-2\pi X t}$$

et $\alpha(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \tau$.

Choix de t : À X fixé, et en négligeant le terme $e^{-\alpha(t)}$, on minimise le membre de droite au maximum de $2\pi t X + \log(\alpha(t))$, soit en posant $\tan(\beta t) = \frac{2\pi X - \beta\delta}{\beta + 2\pi X\delta}$. Pour $D \rightarrow \infty$, on a $t \rightarrow \tau$ et $2\pi t X \sim D$, donc $X \sim \frac{D}{2\pi\tau}$. On pose donc

$$t = \frac{1}{\beta} \arctan\left(\frac{D - \beta\delta\tau}{\delta D + \beta\tau}\right).$$

Choix de h , de nh : Une fois t fixé, les paramètres sont issus de la proposition 1.2. □

Complexité asymptotique (théorème 1.16) : De plus, on a

$$\tan(\beta t) = \tan(\beta\tau) \left(1 - \frac{\delta + \delta^{-1}}{D}\right) + O(D^{-2})$$

donc

$$t = \tau - \frac{1 + \delta^{-2}}{\beta(1 + \delta^{-2})D} + O(D^{-2}) = \tau - \frac{1}{\beta D} + O(D^{-2}).$$

On en déduit

$$\alpha(t) = 0 + (\beta \sin(\beta\tau) + \beta\delta \cos(\beta\tau)) \frac{1}{\beta D} + O(D^{-2}) = \frac{\sin(\beta\tau)(1 + \delta^2)}{D} + O(D^{-2})$$

et donc pour $D \rightarrow \infty$

$$n \sim \frac{(D + \log(\frac{4M_2 D}{\beta \sin(\beta\tau)(1 + \delta^2)})) \log(D + \frac{4M_1}{\alpha\beta})}{2\pi\tau\beta}.$$

Enfin, si l'on affaiblit encore l'hypothèse de régularité, on peut écrire le théorème très général suivant.

Théorème 1.17 (intégration double exponentielle 3)

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

1. g possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ ;
2. $|g(x)| \leq M_1 e^{-\alpha e^{\beta|x|}}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $|g(z)| \leq M_2 e^{\lambda|x| + A e^{\gamma|x|}}$ sur Δ_τ ;

pour des constantes positives telles que $\beta > \gamma$. Alors pour tout $D > 1$ et tout $t \in]0, \tau[$, en posant

$$\delta = \frac{1}{\tan(\beta\tau)} \quad (\delta = 0 \text{ si } \beta\tau = \frac{\pi}{2}) \quad (1.17)$$

$$\alpha_t = \alpha(\cos(\beta t) - \delta \sin(\beta t)) \quad (1.18)$$

$$A_t = A \frac{\cos(\gamma t)}{\cos(\gamma\tau)} \quad (1.19)$$

$$C_t = A_t \left(\frac{A_t \gamma + \lambda + 1}{\alpha_t \beta} \right)^{\frac{\gamma}{\beta - \gamma}} - \alpha_t \left(\frac{A_t \gamma}{\alpha_t \beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \gamma}} + \frac{\lambda + 1}{\beta - \gamma} \log \left(\frac{A_t \gamma + \lambda + 1}{\alpha_t \beta} \right) \quad (1.20)$$

$$h \leq \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D - C_t})} \quad (1.21)$$

$$\text{et } n \geq \frac{\log(D + \log(\frac{4M_1}{\alpha\beta}))}{h\beta} \quad (1.22)$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g - h \sum_{k=-n}^n g(kh) \right| \leq e^{-D}.$$

Démonstration : À présent, d'après la proposition 1.14 on étend la décroissance de g en

$$|g(x + it)| \leq M_2 e^{\lambda|x| + A_t e^{\gamma|x|} - \alpha_t e^{\beta|x|}}$$

d'où l'on tire (cf. lemme A.2.1)

$$\|g(\cdot + it)\| \leq 2M_2 \exp(C_t)$$

avec la constante C_t (1.20). □

Et pour déterminer une bonne valeur de t , on peut remplacer α_t par son équivalent $\alpha_t \sim \alpha\beta(\sin(\beta\tau) + \delta \sin(\beta\tau)^{-1})(\tau - t) = a(\tau - t)$, avec $a = \alpha\beta \sin(\beta\tau)(1 + \delta^2)$, et maximiser la valeur de h , c'est-à-dire résoudre numériquement sur $t \in]0, \tau[$

$$D + \log(4M_2 + 2e^{-D}) + U(\tau - t)^{-\frac{\gamma}{\beta - \gamma}} = \frac{\gamma}{\beta - \gamma} U t (\tau - t)^{-\frac{\beta}{\beta - \gamma}}$$

$$\text{avec } U = A \left(\frac{A\gamma + \lambda + 1}{a\beta} \right)^{\frac{\gamma}{\beta - \gamma}} - a \left(\frac{A\gamma}{a\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \gamma}}.$$

En posant $\tilde{D} = D + \log(4M_2 + 2e^{-D})$, on maximise $X = \frac{1}{h}$ en les zéros de

$$2\pi t^2 \frac{dX}{dt} = t \frac{d}{dt} C_t - C_t - \tilde{D}.$$

Pour $t \rightarrow \tau$, on remplace α_t par son équivalent $a(\tau - t)$, où $a = \alpha\beta \sin(\beta\tau)(1 + \delta^2)$, et A_t par son équivalent A .

Si $A = 0$, $C_t \sim \frac{\lambda + 1}{\beta} \log(\frac{\lambda + 1}{a(\tau - t)\beta e})$ et on résout

$$\frac{\lambda + 1}{\beta} \frac{t}{\tau - t} = \tilde{D} + \frac{\lambda + 1}{\beta} \log\left(\frac{\lambda + 1}{a(\tau - t)\beta e}\right),$$

soit, en posant $D_1 = \frac{\beta}{\lambda+1} \tilde{D} + \log(\frac{\lambda+1}{a\beta e})$,

$$(\tau - t) \log(\tau - t) + t = (\tau - t) D_1.$$

1.8 Optimalité du principe double-exponentiel

1.8.1 Principe d'incertitude

Le théorème 1.12 s'inscrit dans une famille plus générale de résultats d'incertitude, qui limitent la décroissance simultanée de g et $\hat{g}$.

Les résultats énoncés dans la section 1.6 permettent d'obtenir très simplement des résultats dans ce sens :

Lemme 1.18

Si $|\hat{g}(x)| \leq M_2 e^{\alpha_2 |x|^{\beta_2}}$, $\beta_2 > 1$, alors

$$|g(x + it)| \leq 2M_2 e^{\frac{(2\pi|t|+1)^{\lambda+1}}{(\alpha_2 \beta_2)^\lambda}}, \quad \text{où } \lambda = \frac{1}{\beta_2 - 1}. \quad (1.23)$$

Démonstration : Par transformée de Fourier inverse, on majore $|g(x + it)| \leq M_2 \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i u t - \alpha_2 |u|^{\beta_2}} du$ à l'aide du lemme A.2.2. $\square$

Dès lors, si on suppose des décroissances de paramètres α_1, β_1 et α_2, β_2 sur g et $\hat{g}$ avec $\beta_1 > 1$ et $\beta_2 > 1$, g et $\hat{g}$ sont des fonctions entières.

Puisque $\beta_1 > 1$, en appliquant le théorème 1.10 sur un secteur d'ouverture $\frac{\pi}{\beta_1}$ on obtient $\lambda + 1 = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} \geq \beta_1$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \geq 1.$$

Le très élégant théorème suivant, dû à Beurling [Hör91], donne un énoncé très symétrique du principe d'incertitude

Théorème 1.19

Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\iint |g(x)| |\hat{g}(y)| e^{2\pi |xy|} dx dy < \infty$$

si et seulement si g est nulle.

1.8.2 Complexité minimale

Ainsi, sous réserve de majorer les erreurs de quadrature et de troncature comme nous l'avons fait aux propositions 1.1 ou 1.2, on a les résultats suivants :

Théorème 1.20

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à décroissance simplement exponentielle

$$|g(x)| \leq M_1 e^{-\alpha_1 |x|^{\beta_1}}.$$

- L'intégration numérique de g à précision D par la méthode des trapèzes se fait au minimum en $O(D)$ évaluations, et ce cas est atteint pour les fonctions de Hermite.
- S'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $g \notin L^2(\mathbb{R} + it)$ (en particulier si g n'est pas holomorphe sur le plan complexe tout entier), alors la complexité est au minimum en $O(D^{1+\frac{1}{\beta_1}})$ évaluations.

Démonstration : Nous avons montré que $\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \geq 1$. La seconde affirmation est issue de la proposition 1.3. $\square$

Proposition 1.21

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle à décroissance doublement exponentielle

$$|g(x)| \leq M_1 e^{-\alpha_1 e^{\beta_1 |x|}},$$

et dont la transformée de Fourier possède une décroissance

$$|g(x)| \leq M_2 e^{-\alpha_2 |x|^{\beta_2}}.$$

Alors $\beta_2 \leq 1$ et si $\beta_2 = 1$ on a

$$\alpha_2 \beta_1 \leq \pi^2.$$

Ainsi l'intégration numérique de g à précision D par la méthode des trapèzes se fait au minimum en $D \log(D) (\frac{1}{\pi^2} + o(1))$ évaluations.

Démonstration : En effet, si $\beta_2 > 1$, alors g est bornée sur toutes les droites $\mathbb{R} + i\tau$, ce qui est impossible d'après le théorème 1.12. Le cas d'égalité se traite par le même théorème : pour tout α_2 la transformée de Fourier inverse permet de borner g sur les droites $\mathbb{R} + it$ avec $2\pi t < \alpha_2$, donc on ne peut avoir $\beta \frac{\alpha_2}{2\pi} > \frac{\pi}{2}$. $\square$

Mentionnons également un autre résultat d'optimalité qui ne se limite pas à la méthode des trapèzes. Il s'agit du théorème obtenu par Sugihara dans [Sug97], qui montre une certaine optimalité en moyenne de la méthode double-exponentielle parmi les autres méthodes de quadrature.

Théorème 1.22 (Sugihara 1997)

Soit T_n une formule de quadrature d'ordre n sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme

$$T_n : f \mapsto \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{d_i} a_{i,j} f^{(j)}(x_i)$$

pour une famille de points x_i et de poids $a_{i,j}$ tels que $\sum_{i,j} j \delta_{a_{i,j} \neq 0} = n$.

Alors il existe une constante absolue $C > 0$ indépendante de n telle que pour tous $\alpha, \beta > 0$ et pour tout $\tau < \frac{\pi}{2\beta}$, il existe une fonction f vérifiant les hypothèses du théorème 1.15 telle que

$$\left| T_n(f) - \int_{\mathbb{R}} f \right| \geq C \log(n) \exp \left(-\frac{2\pi\tau\beta n}{\log(\pi\tau\beta n/\alpha)} \right).$$

Démonstration : Nous ne donnons que les idées principales, tous les détails sont dans [Sug97].

La fonction f est obtenue en multipliant la fonction $e^{-2\alpha \cosh(\beta x)}$ par un produit de Blaschke choisi pour que f s'annule à l'ordre d_i en tous les x_i , de sorte que $T_n(f) = 0$, et tel que f satisfasse toujours les hypothèses du théorème 1.15. En prenant un produit symétrique $b(z)\overline{b(\bar{z})}$ du produit de Blaschke, on obtient même une fonction f réelle positive sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'effectuer une minoration adéquate de l'intégrale et donne le résultat. $\square$

L'énoncé ci-dessus raisonne en terme de nombre de points d'intégration, mais il correspond exactement aux énoncés donnés ici en terme de précision D . En effet l'inversion de $\frac{2\pi\tau\beta n}{\log(\pi\tau\beta n/\alpha)} = D$ donne $n = \frac{D \log(\frac{D}{\alpha} \log(\frac{D}{\alpha} \log \dots))}{2\pi\tau\beta} \sim \frac{D \log(D/\alpha)}{2\pi\tau\beta}$, c'est-à-dire la complexité de la méthode double-exponentielle.

Puisque la méthode double-exponentielle est réalisée à l'aide de $2n + 1$ points, ce théorème montre que la complexité est sous-optimale d'un facteur au plus 2 en moyenne.

1.9 Exemples

Considérons des fonctions de la forme

$$g(z) = \exp(-2\alpha \cosh(\beta z) + i \cosh(\gamma z))$$

pour des paramètres $\beta > \gamma > 0$. Elles sont holomorphes sur tout le plan complexe, possèdent une décroissance doublement exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour des paramètres α et β donnés.

Puisque l'on a supposé $\beta > \gamma$, le terme oscillant est d'amplitude modérée par rapport à la décroissance et la fonction g vérifie les hypothèses du théorème 1.17. Nous pouvons illustrer les choix de paramètres avec les calculs suivants.

```
? \p100
  realprecision = 115 significant digits (100 digits displayed)
? f(x)=exp(-2*cosh(2*x)+I*cosh(x));
? M1=1; alpha=1; beta=2; tau=Pi/4; M2=exp(1/2); lambda=0; A=1/2; gamma_=1;
? \g2
  debug = 2
? ref=integration_DE3(f,M1,alpha,beta,tau,M2,lambda,A,gamma_);show(ref)
  t=tau-1.59 e-2
  Ct=1.00 e1
  h=2.00 e-2
  npoints=137
%4 = 0.05623941459713397837 + 0.09870950579199922671*I
? better=integration(f,0.01,300);show(ref-better)
%5 = 2.1780804863332850922 E-107 + 6.963010647414833401 E-107*I
? worse=integration(f,0.022,137);show(ref-worse)
%6 = -5.773744673841420694 E-98 + 5.162307772563297185 E-97*I
? f(x)=exp(-2*cosh(2*x)+10*I*cosh(x));
? ref=integration_DE3(f,M1,alpha,beta,tau,exp(10/2),lambda,10/2,gamma_);sho
w(ref)
  t=tau-7.65 e-2
  Ct=6.49 e1
  h=1.48 e-2
  npoints=185
%8 = -0.05114173265552785833 - 0.07932418654637353478*I
? worse=integration(f,0.02,200);show(ref-worse)
%9 = -2.3470847574068943050 E-91 + 8.700839605836354857 E-91*I
```

1.10 Dimension quelconque

L'étude précédente se transpose à l'intégration de fonctions holomorphes sur $\mathbb{R}^n$, où holomorphe signifie ici la notion très forte d'holomorphie par rapport à chacune des variables.

En effet la formule de Poisson écrite pour un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$, de volume V ,

$$V \sum_{\omega \in \Lambda} g(\omega) = \sum_{\omega \in \Lambda^*} \hat{g}(\omega) \quad (1.24)$$

que l'on applique au réseau $(h\mathbb{Z})^n$, sous la forme

$$\underbrace{h^n \sum_{\|k\| \leq n} g(hk)}_S + \underbrace{h^n \sum_{\|k\| > n} g(kh)}_{E_2} = \int_{\mathbb{R}^n} g + \underbrace{\sum_{k \in (\mathbb{Z}^n)^*} \hat{g}\left(\frac{k}{h}\right)}_{E_1} \quad (1.25)$$

donne un procédé d'intégration numérique de I par la somme S , où E_1 est l'erreur commise lors de la quadrature de pas h , et E_2 l'erreur de troncature à la boule de rayon n .

2 Méthode d'application à l'intégration sur divers domaines

Dans cette partie, nous décrivons l'application des théorèmes précédents à l'intégration sur des intervalles quelconques. Dans le cas d'une fonction f

1. définie sur un intervalle I ;
2. possédant certaines propriétés d'intégrabilité sur I ;
3. holomorphe dans un voisinage Z de I sur lequel elle reste bornée, ou garde une croissance modérée ;

il convient d'introduire un changement de variable

$$z = \varphi(z')$$

de sorte que la fonction $g(z') = \varphi(z')f \circ \varphi(z')$ vérifie les hypothèses du théorème 1.17, c'est-à-dire que

1. $\varphi(\mathbb{R}) = I$;
2. g ait une décroissance doublement-exponentielle sur $\mathbb{R}$;
3. il existe une valeur $\tau > 0$ et une zone $Z_\tau \subset Z$ telle que φ et φ' soient holomorphe sur Δ_τ , et $\varphi(\Delta_\tau) \subset Z_\tau$.

Le changement de variable est construit de manière à satisfaire les deux premiers points. Il induit une géométrie particulière aux images réciproques $Z_\tau = \varphi^{-1}(\Delta_\tau)$, que nous explicitons.

En outre, pour choisir la borne de troncature, on se référera au lemme suivant

Lemme 2.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, on suppose que $|f|$ est majorée par une fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ et que le changement φ est croissant et tel que $\varphi' \times F \circ \varphi$ soit décroissante sur $[nh, \infty[$, alors l'erreur de troncature réalisée lors de l'intégration vérifie

$$h \left| \sum_{|k|>n} g(kh) \right| \leq \int_{\varphi(nh)}^{\varphi(\infty)} F(t) dt. \quad (2.1)$$

Démonstration : En effet, si on dispose d'une fonction $F > 0$ décroissante et intégrable qui majore f sur I , alors

$$h \left| \sum_{|k|>n} g(kh) \right| \leq h \sum_{|k|>n} \varphi'(kh) F(\varphi(kh)) \leq \int_{nh}^{\infty} \varphi'(t) F(\varphi(t)) dt \leq \int_{\varphi(nh)}^{\varphi(\infty)} F(t) dt.$$

□

Pour éviter d'exhiber des majorations exactes trop compliquées de ces restes intégraux, on introduit la fonction implicite suivante pour des valeurs α, β et D strictement positives

$$L_{\alpha,\beta}(D) = \inf \left\{ X, \int_X^\infty e^{-\alpha x^\beta} dx \leq e^{-D} \right\} \sim \left(\frac{D}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (2.2)$$

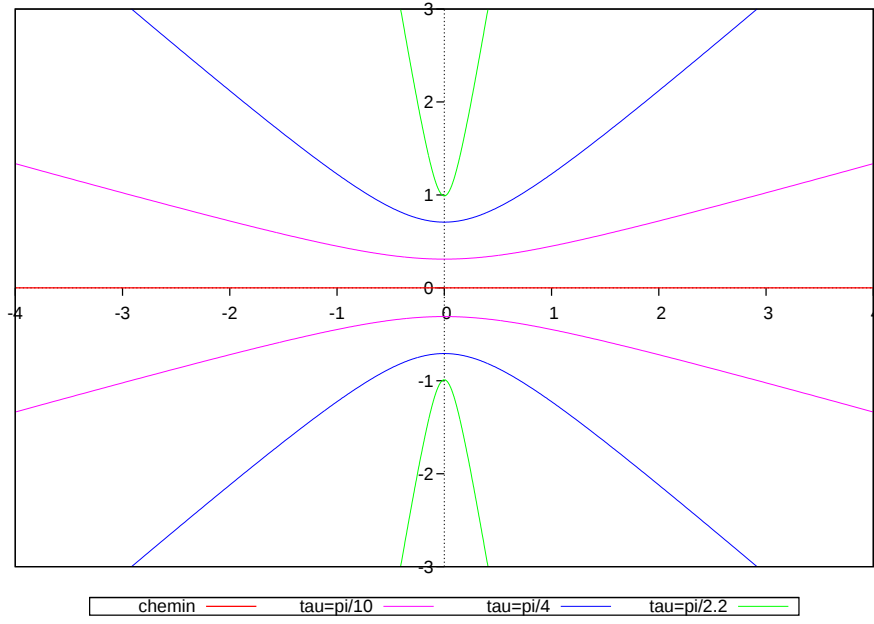
Ce type d'estimation est uniquement théorique. En pratique, lors d'une intégration, on se contente de sommer les termes $g(kh)$ jusqu'à ce que leur module soit négligeable.

2.1 Droite réelle

2.1.1 Cas d'une décroissance simplement exponentielle

On suppose $f(x) = O(e^{-\alpha|x|^\beta})$ sur $\mathbb{R}$, on pose alors :

$$z = \varphi(z') = \sinh(z'). \quad (2.3)$$


 FIG. 2.3: zone Z_τ pour le changement $\sinh$.

Zone Z_τ Soit $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on note B_τ la bande définie par

$$B_\tau = \{z, \operatorname{Im}(z) \in [\tan \tau \operatorname{Re}(z), \tan \tau \operatorname{Re}(z) + \sin \tau]\}$$

et on appelle cône épaissi d'ouverture τ l'union des bandes $B_{\pm\delta}$, $\delta \leq \tau$:

$$Z_\tau = \{z, |\arg(z)| \leq \tau \bmod \pi\} + i[-\sin \tau, \sin \tau].$$

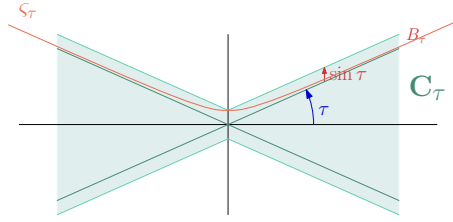


FIG. 2.4: cône épaissi.

Lemme 2.2

Soit $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(x + i\tau) = \sinh(x + i\tau) \in B_\tau$$

En particulier $\varphi(\Delta_\tau) \subset Z_\tau$.

Démonstration : En effet, en posant $X + iY = \sinh(x + i\tau)$,

$$\begin{aligned} Y &= \cosh x \sin \tau = \sin \tau \sqrt{1 + \sinh^2 x} \\ &= \sin \tau \sqrt{1 + \frac{X^2}{\cos^2 \tau}} \end{aligned}$$

$$= \tan \tau \sqrt{X^2 + \cos^2 \tau}$$

On a donc toujours

$$X \tan \tau \leq Y \leq X \tan \tau + \sin \tau$$

c'est-à-dire que $\sinh(x + i\tau)$ est dans la bande B_τ . □

Théorème 2.3 (changement de variable exponentiel)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant :

1. $|f(x)| \leq M_1 e^{-\alpha|x|^\beta}$ pour $x \in \mathbb{R}$, avec $\alpha, \beta > 0$;
2. f possède un prolongement holomorphe sur un cône épaissi Z_τ ;
3. $|f(z)| \leq M_2 e^{Ae^{\gamma|z|}}$ sur Z_τ avec $A \geq 0$ et $\gamma < \beta$.

Alors pour $D > 1$ et $t < \tau$, en posant

$$h \leq \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D-C_t})}$$

$$nh \geq \operatorname{arcsinh}(L_{\alpha,\beta}(D + \log(2M_1)))$$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^n f(\sinh(kh)) \cosh(kh) \right| < e^{-D}.$$

Le nombre d'évaluations possède l'équivalent

$$n \sim \frac{(D + C_t) \log\left(\frac{2(D+\log(M_1))}{\alpha}\right)}{2\pi\tau\beta}.$$

Démonstration : Quitte à faire un changement de variable initial $x \mapsto \lambda x$, on suppose $\alpha\beta \geq 1$ sans perdre en généralité.

La fonction $g(x) = \cosh(x)f(\sinh(x))$ a une décroissance doublement exponentielle sur $\mathbb{R}$ d'ordre α', β pour tout $\alpha' < \alpha$, et d'après les encadrements (A.1.4),

$$\begin{aligned} |g(x + it)| &\leq |f(\sinh(x + it))| |\cosh(x + it)| \\ &\leq M_2 e^{A(\cosh x)^\gamma} \cosh x \\ &\leq M_2 e^{x + Ae^{\gamma x}} \end{aligned}$$

donc g vérifie (3) avec $\lambda = 1$. On peut donc poser h selon le théorème 1.17.

En ce qui concerne le produit nh , on utilise plutôt le lemme de troncature 2.1, en résolvant l'équation $\int_{\sinh(kh)}^\infty M_1 e^{-\alpha t^\beta} dt < e^{-D}$. □

Exemple 1 (intégration de la gaussienne). Nous reprenons l'exemple 1.2 en effectuant le changement de variable $\sinh$. Ici l'angle maximal est $\tau = \frac{\pi}{4}$, et pour $z \in C_\tau$, on écrit $z = iy + re^{i\theta}$ avec $|\theta| \leq \frac{\pi}{4}$ et $|y| \leq y_0 = \sin \tau$, si bien que

$$\begin{aligned} |e^{-z^2}| &\leq e^{-(iy + re^{i\theta})^2} \\ &\leq e^{y^2 - r^2 \cos(2\theta) + 2ry \sin \theta} \\ &\leq e^{y^2 + \sqrt{2}yr} \\ &\leq e^{y_0^2 + \sqrt{2}y_0|z|} \end{aligned}$$

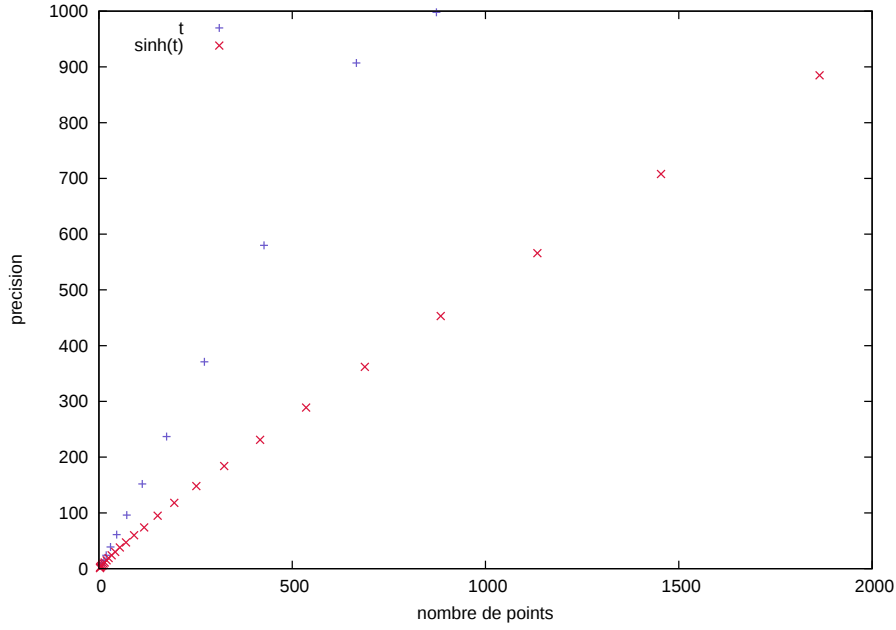


FIG. 2.5: intégration double-exponentielle de la gaussienne

Les hypothèses sont donc vérifiées pour les constantes $\alpha = 1, \beta = 2, M_1 = 1$ et $\tau = \frac{\pi}{4}, A = 1, \gamma = 1, M_2 = \sqrt{e}$.

On obtient une convergence en $O(D \log D)$, ce qu'illustre le graphique 2.5.

Exemple 2. Reprenons aussi l'exemple de la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{\cosh z}$ du paragraphe 1.5.1. Nous avons vu que l'intégration par la méthode des trapèzes était quadratique. En outre, cette fonction n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc par un changement de variable on aura toujours $\beta_2 \leq 1$ (corollaire 1.4), et une intégration de complexité plus que linéaire.

Or pour toute valeur τ telle que $\sin \tau < \frac{1}{2}$, le cône C_τ évite les pôles de f , et la fonction f a une décroissance exponentielle si bien que le théorème 2.3 permet d'atteindre une complexité d'environ $\frac{3D \log D}{\pi^2}$ évaluations.

On peut également considérer d'autres changements de variables pour améliorer la convergence initiale. Si l'on pose $\varphi(x) = x^m$ pour un certain m impair, alors

- $\pi z^m = i \frac{\pi}{2}$ pour $z = 2^{-m} e^{i \frac{\pi}{2m} + 2ik\pi/m}$;
- donc g est holomorphe sur Δ_τ défini par $\tau 2^{-m} = \sin(\frac{\pi}{2m}) = s_m$;

On a donc une valeur τ strictement positive mais qui tend très rapidement vers 0 à mesure que m croît.

Avec les notations de la proposition 1.1, on a alors $\beta_1 = m$ et $\beta_2 = 1$, d'où une complexité en $O(D^{\frac{m+1}{m}})$ évaluations.

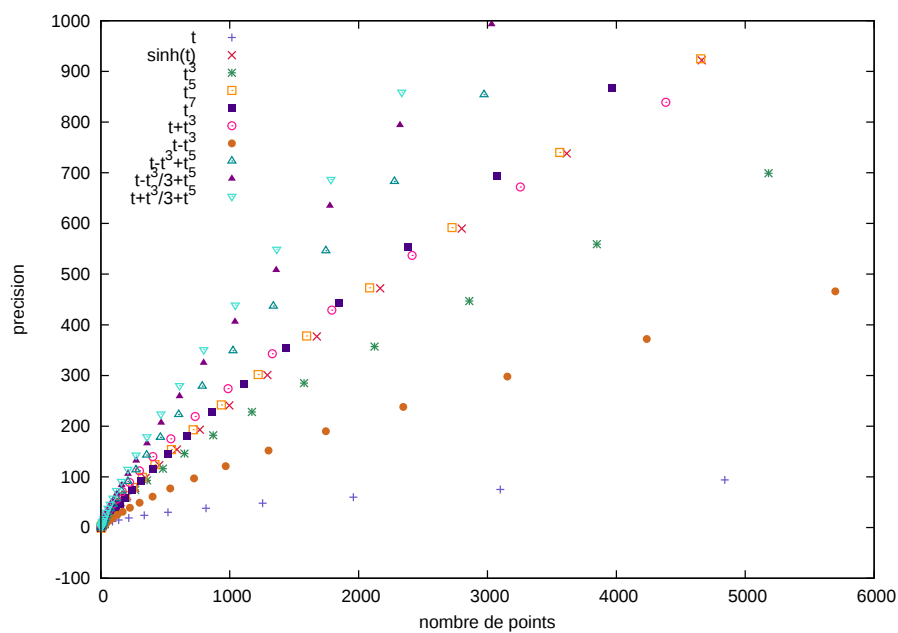
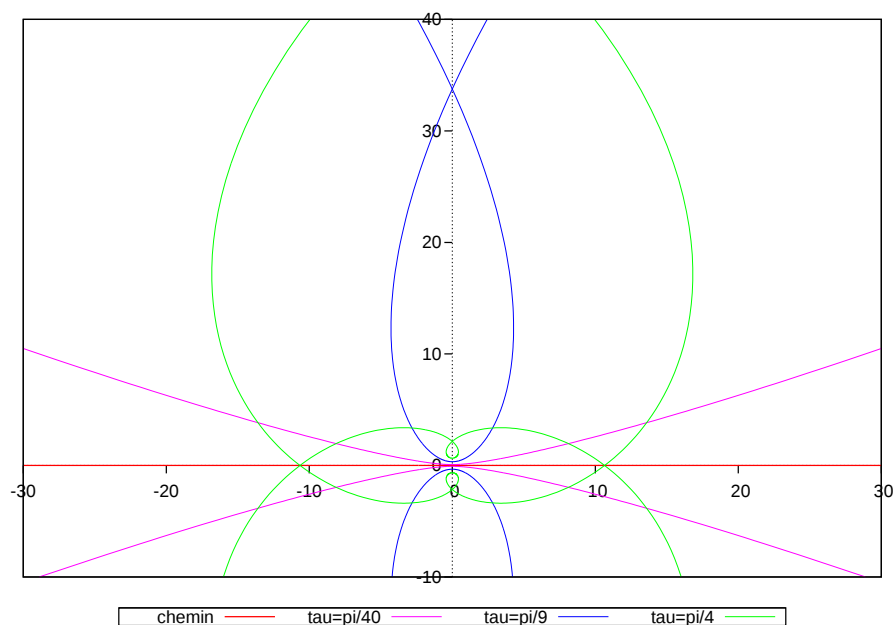
Le graphique de convergence 2.6 illustre la pertinence de différents changements de variables, avec la convergence quadratique initiale et le gain apporté par chaque croissance plus rapide.

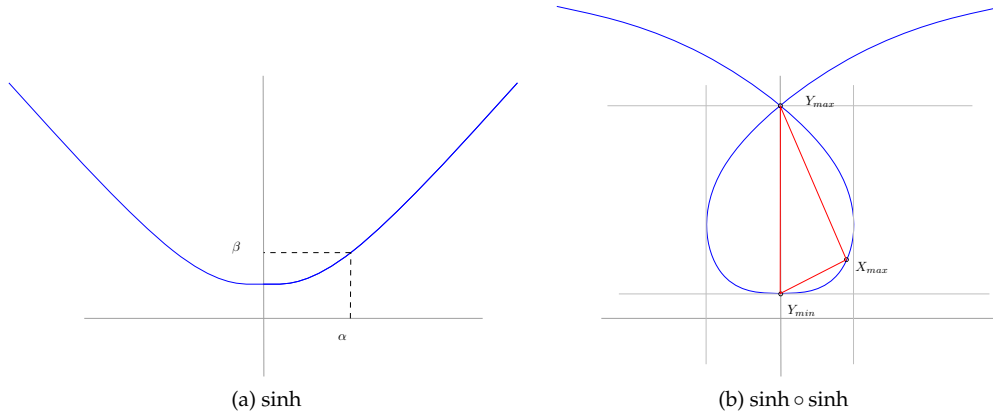
Le changement $\varphi = \sinh$ de la théorie double-exponentielle est une limite des changements précédents. Il n'est pas optimal pour une précision donnée, mais il donne la meilleure asymptotique.

2.1.2 Cas d'une décroissance polynomiale

Si $f(x) = O(|x|^{-n})$ pour $n > 1$, on effectue le changement de variable

$$z = \varphi(z') = \sinh(\sinh(z')). \quad (2.4)$$


 FIG. 2.6: convergence de l'intégration de $\frac{1}{\cosh \pi x}$.

 FIG. 2.7: zone Z_τ pour le changement $\sinh(\sinh)$.


 FIG. 2.8: géométrie du changement de variable $\sinh(\sinh)$.

Zone Z_τ Dans ce cas, quelle que soit la valeur de τ , la zone couvre à peu près tout le plan complexe, mais on peut toujours isoler deux zones autour de $\pm i$.

Lemme 2.4

Soit $\tau < \frac{\pi}{2}$: on définit deux points $Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ sur l'axe imaginaire, de hauteur respectives $\sin(\sin \tau)$ et $\cosh(\cos \tau \sqrt{(\frac{\pi}{2\sin \tau})^2 - 1})$, ainsi qu'un point $X_{\max}$ de coordonnées

$$X_{\max} : \begin{pmatrix} \sinh(\cot \tau \sqrt{(\frac{\pi}{2} - \tau)^2 - \sin^2 \tau}) \sin \tau \\ \cosh(\cot \tau \sqrt{(\frac{\pi}{2} - \tau)^2 - \sin^2 \tau}) \cos \tau \end{pmatrix}.$$

Alors le triangle (ouvert) défini par ces trois points est situé en dehors de Z_τ , ainsi que ses symétriques par rapport aux axes et à l'origine. En particulier, $\pm i \notin Z_\tau$.

Démonstration : On considère la zone délimitée par la courbe ζ_τ paramétrée par $t \mapsto \varphi(t + i\tau)$. Soit donc $z' = t + i\tau$, on pose $\alpha + i\beta = \sinh(z')$ et $x + iy = \sinh(\alpha + i\beta)$, c'est-à-dire (cf. figure 2.8) :

$$\begin{cases} \alpha = \sinh t \cos \tau \\ \beta = \cosh t \sin \tau \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \sinh \alpha \cos \beta \\ y = \cosh \alpha \sin \beta \end{cases}.$$

On considère ζ_τ comme une courbe paramétrée par α :

$$\zeta_\tau(\alpha) : \begin{cases} x = \sinh \alpha \cos \beta \\ y = \cosh \alpha \sin \beta \end{cases}.$$

et ceci sur un intervalle $[0, \alpha_0]$ tel que $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ pour rester dans le quatran positif. C'est aussi une courbe paramétrée par β en vertu des relations

$$\begin{cases} \beta(\alpha) = \tan \tau \sqrt{\alpha^2 + \cos^2 \tau} \\ \alpha(\beta) = \cot \tau \sqrt{\beta^2 - \sin^2 \tau} \end{cases}.$$

On démontre alors

1. que ζ_τ passe par les points $Y_{\min}$, $Y_{\max}$ ainsi que par le point $X_{\max}$ défini dans l'énoncé ;
2. que ζ_τ a une courbure constamment négative.

Cela permet de conclure comme annoncé, puisque sans changement de courbure ζ_τ reste à droite de ses cordes.

Par symétrie, on suppose $t, \tau > 0$.

En $t = 0$, ζ_τ passe par le point $(0, y_{\min})$ où $y_{\min} = \sin \beta = \sin \sin \tau$.
 ζ_τ coupe à nouveau l'axe des abscisses pour $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $x_0 = \operatorname{arccosh}(\frac{\pi}{2 \sin \tau})$. On a alors
 $\alpha_0 = \cos \tau \sqrt{\frac{\pi^2}{4 \sin^2 \tau} - 1}$, d'où une ordonnée

$$y = \cosh(\alpha_0) = \cosh(\cos \tau \sqrt{\frac{\pi^2}{4 \sin^2 \tau} - 1})$$

ce qui définit les points $Y_{\min}$ et $Y_{\max}$ annoncés.

Essayons de minorer la valeur maximale de x sur $[0, \alpha_0]$. De

$$\begin{cases} \beta(\alpha) \leq \alpha \tan \tau + \sin \tau \\ \beta'(\alpha) = \tan \tau \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \cos^2 \tau}} \leq \tan \tau \end{cases}$$

on tire la minoration

$$x'(\alpha) = \cosh \alpha \cos \beta - \sinh \alpha \beta' \sin \beta \quad (2.5)$$

$$\geq \cosh \alpha (\cos \beta - \tan \tau \sin \beta); \quad (2.6)$$

en particulier $x'(\alpha) \geq 0$ pour $\tan \beta \leq \cot \tau$, c'est-à-dire $\beta \leq \frac{\pi}{2} - \tau = \beta_1$.

On pose alors $X_{\max}$ le point de paramètre $\alpha_1 = \alpha(\beta_1)$. En reportant les valeurs de β et $\alpha(\beta)$ dans x et y on trouve les coordonnées annoncées. Par construction, ζ_τ passe par $X_{\max}$.

Le fait que la courbure soit de signe constant se démontre aisément par le calcul : on développe l'expression

$$y''(\alpha)x'(\alpha) - x''(\alpha)y'(\alpha)$$

en fonction de α , $\beta'(\alpha) > 0$ et $\beta''(\alpha) > 0$, en constatant après réduction qu'elle est formée de termes positifs. $\square$

On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 2.5 (changement de variable double-exponentiel)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant :

1. f possède un prolongement holomorphe sur une zone Z_τ définie ci-dessus ;
2. $|f(z)| \leq \frac{M_2}{1+|z|^{1+v}}$ sur Z_τ , avec $v > 0$;
3. $|f(x)| \leq M_1 x^{-\alpha}$ pour $x \in \mathbb{R}$, avec $\alpha > 1$.

Alors, pour tout $D > 1$, en prenant

- $h \leq \frac{2\pi\tau}{D + \log(\frac{2M_2}{v \cos \tau})}$;
- $nh \geq \operatorname{arcsinh}(\operatorname{arcsinh}(\exp(\frac{D + \log(\frac{2M_1}{\alpha-1})}{\alpha-1}))) \sim \log(2 \frac{D + \log(\frac{2M_1}{\alpha-1})}{\alpha-1})$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^n f(\sinh(kh)) \cosh(kh) \right| \leq e^{-D}$$

soit environ $D \log D$ évaluations de f .

Démonstration : • On majore

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}+i\tau} |g(t)| \, dt &\leq M_2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|\cosh(x+i\tau) \cosh(\sinh(t+i\tau))|}{1 + |\sinh(\sinh(x+i\tau))|^{1+v}} \, dt \\ &\leq M_2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\cosh(t) \cosh(\sinh t \cos \tau)}{1 + |\sinh(\sinh t \cos \tau)|^{1+v}} \, dt \\ &\leq \frac{M_2}{\cos \tau} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + |u|^{1+v}} \, du \\ &\leq \frac{2M_2}{v \cos \tau} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit une majoration de $\hat{g}$ et le pas h .

- le reste intégral $\int_X^\infty x^{-\alpha} dx$ vaut $\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$, ce qui permet de déterminer nh selon le lemme 2.1. $\square$

Exemple 3. Un cas de convergence typique mais remarquable est celui de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}. \quad (2.7)$$

Il s'agit d'une fonction à décroissance polynomiale, pour laquelle le domaine d'holomorphic requis est le plan complexe privé des pôles $\pm i$. Or ces singularités sont précisément évitées par Z_τ quelle que soit la valeur $\tau < \frac{\pi}{2}$. La convergence est donc d'ordre $\frac{D \log D}{\pi^2}$.

Calculons par exemple cette intégrale avec 1000 chiffres significatifs :

```
? \p1000
  realprecision = 1001 significant digits (1000 digits displayed)
? tau=1.57;
? h=2*Pi*tau/(1000*log(10)+log(2/cos(tau))); show(h)
%3 = 0.004269625286763468718
? n=ceil(asinh(asinh(2*10^1000))/h)
%4 = 1976
? #
  timer = 1 (on)
? Pi-integration_shsh(z->1/(1+z^2),h,n,1)
time = 1,026 ms.
%5 = 5.946130296599909037 E-1002
```

Si l'on décale l'intégration selon les calculs faits en introduction nous avons vu que des pertes de précision considérables avaient lieu. En effet, les pôles ainsi décalés ne sont évités que pour de très petites valeurs de τ . Mais une fois déterminée une valeur convenable, le théorème s'applique. L'exemple suivant le prouve pour un décalage de 10.

```
? \p1000
  realprecision = 1001 significant digits (1000 digits displayed)
? f(z)=1/(1+z^2);
? D=1000*log(10);
? show(asinh(asinh(10+I)))
%6 = 1.8198999017302092895 + 0.03132601926270185771*I
? tau=0.03; h=pas_h_shsh(tau,1,1,D); show(h)
%7 = 8.183792956273686739 E-5
? n=ceil(asinh(asinh(2*10^1000+10))/h); show(n)
%8 = 103077
? Pi-integration_shsh(z->f(z-10),h,n,1)
%9 = 7.729969385579881748 E-1001
```

2.2 Demi-droite

2.2.1 Cas d'une décroissance exponentielle

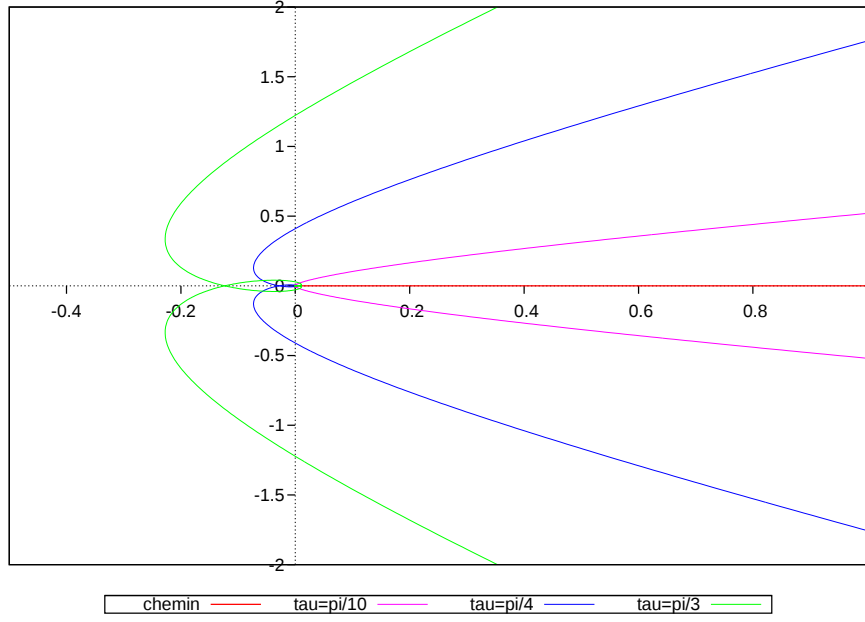
Si f possède une limite finie en 0 vers laquelle elle ne tend pas trop vite (c-à-d. si elle possède un développement limité non nul en 0)¹, et si f possède une décroissance exponentielle en l'infini de la forme

$$|f(x)| \leq M_1(1+x)^\sigma e^{-\alpha x^\beta},$$

on effectue le changement de variable

$$z = \varphi(z') = e^{z' - \alpha e^{-\beta z'}}. \quad (2.8)$$

¹On demandera de toutes façons que f soit holomorphe au voisinage de 0, donc ce sera le cas.


 FIG. 2.9: zone Z_τ pour le changement $\exp(t - \alpha \exp(-\beta t))$.

Remarque : Pour simplifier les calculs, on suppose $\beta \geq 1$. On peut toujours s'y ramener par un changement de variable préliminaire.

Majorations On a pour $|\beta\tau| \leq \pi/2$

$$\varphi(x + i\tau) = e^{x+i\tau-\alpha e^{-\beta x-i\beta\tau}} \quad (2.9)$$

$$\varphi'(x + i\tau) = (1 + \alpha\beta e^{-\beta x-i\beta\tau})\varphi(x + i\tau) \quad (2.10)$$

donc

$$|\varphi(x + i\tau)| = e^{x-\alpha \cos(\beta\tau)e^{-\beta x}} \quad (2.11)$$

$$|\varphi'(x + i\tau)| \leq (1 + \alpha\beta \cos(\beta\tau)e^{-\beta x}) |\varphi(x + i\tau)| \quad (2.12)$$

$$\arg(\varphi(x + i\tau)) = \tau + \alpha \sin(\beta\tau)e^{-\beta x} \quad (2.13)$$

Zone Z_τ Étudions l'image par φ d'une bande Δ_τ :

$\varphi(x + i\tau) = \rho e^{i\theta}$ avec $\begin{cases} \rho = e^{x-\alpha \cos(\beta\tau)e^{-\beta x}} \\ \theta = \tau + \alpha \sin(\beta\tau)e^{-\beta x} \end{cases}$, donc pour $0 < \beta\tau < \frac{\pi}{2}$, la courbe obtenue est d'équation polaire :

$$\rho = \left(\frac{\alpha \sin(\beta\tau)}{\theta - \tau} \right)^{1/\beta} e^{-\frac{\theta - \tau}{\tan(\beta\tau)}}, \quad \theta > \tau. \quad (2.14)$$

On a une asymptote en $\theta = \tau$ et

$$\rho \sin(\theta - \tau) \sim_{\theta \rightarrow \tau} (\alpha \sin(\beta\tau))^{\frac{1}{\beta}} (\theta - \tau)^{1 - \frac{1}{\beta}}$$

par valeurs inférieures, donc

- si $\beta = 1$, on a une droite asymptote $y = x \tan \tau + \alpha$, et la courbe reste en dessous de cette asymptote ;
- si $\beta > 1$, la courbe est également en-dessous de cette courbe, et tend vers son asymptote $y = x \tan(\beta\tau)$.

Cette courbe est incluse dans le demi-cône $|y| \leq \tan \tau (x + \alpha)$.

On peut remarquer que, ρ étant décroissante en θ , les abscisses sont minorées par celles obtenues pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, donc on peut tronquer le cône aux valeurs d'abscisse supérieures à

$$-\rho_m = -\rho(\pi/2) = -\frac{\alpha \sin(\beta\tau)}{\frac{\pi}{2} - \tau} e^{-\frac{\frac{\pi}{2} - \tau}{\tan(\beta\tau)}}. \quad (2.15)$$

Lemme 2.6

On appelle cône tronqué d'ouverture $\tau \in [0, \frac{\pi}{2}[$ l'ensemble

$$T_\tau = \left\{ z, \begin{array}{l} |\operatorname{Im}(z)| \leq \tan(\tau)(\operatorname{Re}(z) + \alpha) \\ \operatorname{Re}(z) + \rho_m \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Cet ensemble tend vers l'ensemble $\mathbb{R}_+$ quand $\tau \rightarrow 0$, et il contient la zone Z_τ .

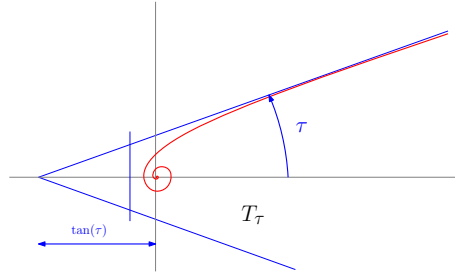


FIG. 2.10: cône tronqué.

Remarque : Dans le changement de variable φ , il n'est pas nécessaire de choisir α égal au α de décroissance de f : si une valeur plus faible permet d'obtenir un angle τ meilleur, on pourra prendre un pas h plus grand. Il faut mesurer les deux effets : cette augmentation de h tend à faire diminuer n , d'un autre côté une diminution de α augmente la valeur de $t_{\min}$ et donc le nombre de termes à sommer du côté négatif. L'influence de α est logarithmique, tandis que celle de τ est linéaire.

Ces observations fournissent le théorème suivant

Théorème 2.7

Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction vérifiant :

1. f possède un prolongement holomorphe sur un cône tronqué T_τ , $\tau < \frac{\pi}{2}$;
2. $|f(z)| \leq M_2 e^{A|z|^\gamma}$ sur T_τ avec $v > 0$;
3. $|f(x)| \leq M_2 e^{-\alpha x^\beta}$ sur $[0, \infty[$;

alors pour $D > 1$, si l'on choisit $t < \tau$ selon le théorème 1.17, en posant

- $h = \frac{2\pi t}{D + C_t + \log(4M_2 + 2e^{-D - C_t})}$
- $nh \geq \log L_{\alpha, \beta}(D + \log M) + \alpha e^{-\beta L_{\alpha, \beta}(D + \log M)}$

on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f - h \sum_{k=-n}^n f(\varphi(kh)) \varphi'(kh) \right| \leq e^{-D}.$$

Démonstration : On pose $g(z) = f \circ \varphi(z) \times \varphi'(z)$.

Pas d'intégration D'après les majorations effectuées sur φ , et puisque $\beta \geq 1$ on a pour $x \geq 0$ les majorations grossières $|\varphi'(x + it)| \leq e^x + \alpha\beta$, et $|\varphi'(-x + it)| \leq \alpha\beta e^{\beta-1}x + 1$.

Enfin $|\varphi(x + it)| \leq e^x$, donc d'après (2) $g(x + it) \leq M_2(1 + \alpha\beta)e^{Ae^{\gamma x} + \lambda|x|}$ avec $\lambda = \max(1, \beta - 1)$.

De plus, sur $\mathbb{R}$, on a

en $-\infty$: $|f| \leq M_1$ donc $g(-x) \leq |\varphi'(-x)| \leq (1 + \alpha\beta e^{\beta x})e^{-x - \alpha e^{\beta x}} = O(e^{-\alpha' e^{\beta x}})$ pour tout $\alpha' < \alpha$.

en ∞ : $\varphi(x) \sim e^x$ donc $g(x) = O(e^{-\alpha' e^{\beta x}})$ pour tout $\alpha' < \alpha$.

Donc on peut appliquer le théorème 1.17 pour déterminer le pas h .

Troncature Enfin, on définit nh via le lemme 2.1, avec les estimations des restes intégraux suivantes :

- $\int_0^{\varphi(-x)} M_1 dt \leq M_1 \varphi(-x) = M_1 e^{-x - \alpha e^{\beta x}}$ donc pour une erreur de e^{-D} sur le reste $k < -n$ on pose $nh = \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{D + \log M_1}{\alpha}\right)$.
- $\int_{\varphi(x)}^{\infty} e^{-\alpha t^{\beta}} dt \leq e^{-D}$ donne

$$\varphi(x) = e^{x - \alpha e^{-\beta x}} = L_{\alpha, \beta}(D + \log M_1).$$

En particulier $x \geq \log(L_{\alpha, \beta}(D + \log M_1))$, donc on pose $x = nh = \log L_{\alpha, \beta}(D + \log M) + \alpha e^{-\beta L_{\alpha, \beta}(D + \log M)} \sim \frac{1}{\beta} \log\left(\frac{D + \log M_1}{\alpha}\right)$. $\square$

2.3 Intervalle compact

Si l'intervalle est de la forme $[a, b]$, on effectue un changement de variable

$$z = \varphi(z') = \frac{b-a}{2} \tanh(\lambda \sinh(z')) + \frac{a+b}{2} \quad (2.16)$$

pour un paramètre $\lambda > 0$ que l'on déterminera.

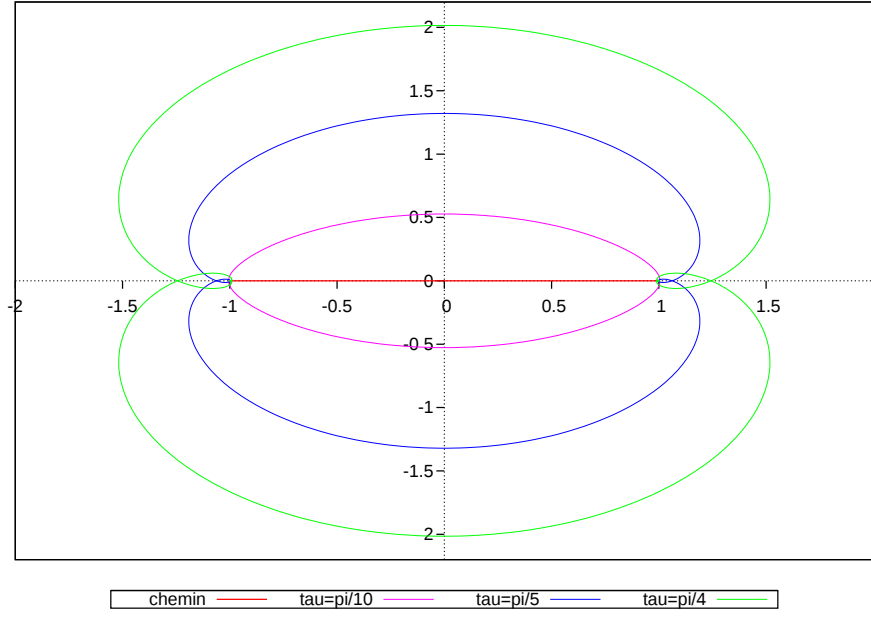
Par la suite, on suppose que $[a, b] = [-1, 1]$.

Définition

$$\varphi'(z) = \frac{\lambda \cosh(\lambda z)}{\cosh^2(\lambda \sinh(z))}$$

Les zéros de $\cosh$ sont situés en $i\pi/2 + 2i\pi\mathbb{Z}$, ils ne sont pas atteints dans la zone Δ_τ pour $\tau < \frac{\pi}{2}$ et $\lambda \sin \tau < \frac{\pi}{2}$. On suppose ces inégalités vérifiées, ce qui assure que φ et φ' sont holomorphes sur Δ_τ .

Zone Z_τ On localise l'image de la bande Δ_τ de la manière suivante :


 FIG. 2.11: zone Z_τ pour le changement $\tanh(\lambda \sinh)$.

Lemme 2.8

Pour tout $z' \in \Delta_\tau$ avec λ, τ vérifiant $\lambda \sin(\tau) < \frac{\pi}{2}$, si l'on choisit $Y_\tau \in]\lambda \sin \tau, \frac{\pi}{2}[$, en posant $X_\tau = \frac{\sqrt{Y_\tau^2 - \lambda^2 \sin^2 \tau}}{\tan \tau}$, on a :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(\varphi(z'))| &\leq X_m = \max\left(\frac{\tanh X_\tau}{\cos^2(Y_\tau)}, \frac{1}{\tanh(X_\tau)}\right) \\ |\operatorname{Im}(\varphi(z'))| &\leq Y_m = \max\left(\tan(Y_\tau), \frac{1}{2 \sinh^2 X_\tau}\right). \end{aligned}$$

En particulier, pour $Y_\tau \rightarrow 0$ et $X_\tau \rightarrow \infty$, Z_τ converge vers le segment $[-1, 1]$.

On minimise X_m, Y_m en prenant pour Y_τ les solutions dans $] \lambda \sin \tau, \frac{\pi}{2}[$ de

$$\tanh(X_\tau) = \cos(Y_\tau) \quad \text{pour } X_m \quad (2.17)$$

$$2 \sinh^2(X_\tau) \tan(Y_\tau) = 1 \quad \text{pour } Y_m \quad (2.18)$$

Remarque : Inversement, si l'on se donne des valeurs X_m et Y_m à ne pas dépasser, la détermination de X_τ et Y_τ par les équations

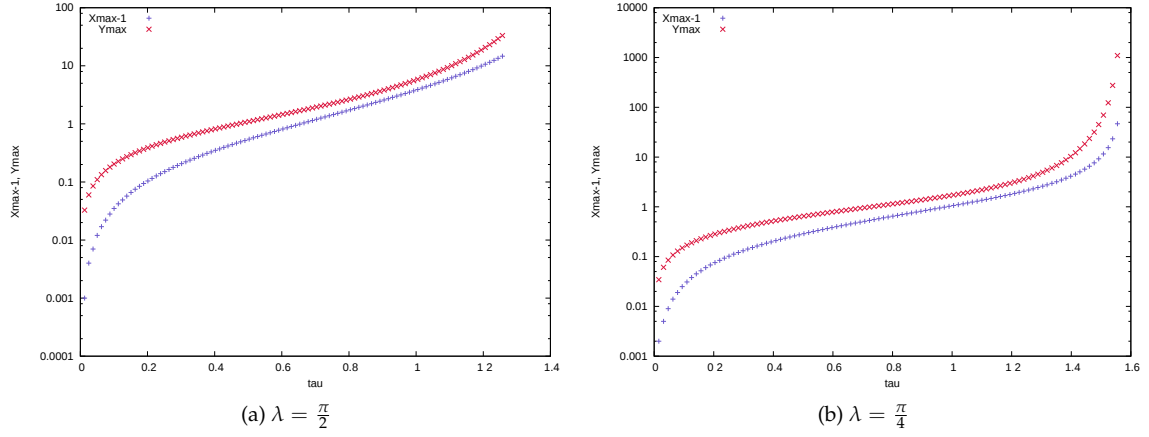
$$\tanh(X_\tau) = \frac{1}{X_m} \quad \text{et} \quad \cos(Y_\tau) = \frac{1}{X_m} \quad \text{d'une part,} \quad (2.19)$$

$$\sinh^2(X_\tau) = \frac{1}{2Y_m} \quad \text{et} \quad \tan(Y_\tau) = Y_m \quad \text{d'autre part} \quad (2.20)$$

et la relation

$$\tau = \operatorname{Im}(\operatorname{arcsinh}(\frac{X_\tau + iY_\tau}{\lambda}))$$

permettent de choisir une bonne valeur de τ , si l'on impose λ . On remarque que par construction, la condition $\lambda \sin \tau < \frac{\pi}{2}$ est vérifiée puisque le fait que X_τ, Y_τ sont sur la courbe $\mathcal{H}_\tau$ donne $\frac{Y_\tau^2}{\sin^2 \tau} \geq \lambda^2$ et que l'on a $Y_\tau = \arccos(\frac{1}{X_m}) < \frac{\pi}{2}$.


 FIG. 2.12: encadrement de Z_τ pour le changement $\tanh(\lambda \sinh)$.

Remarque : Le problème de minimisation possède des solutions uniques, puisque sur l'intervalle considéré, $X \in]0, X_{\frac{\pi}{2}}[$ et

- $\tanh(X)$ croît de 0 à $\tanh(X_{\frac{\pi}{2}}) > 0$ et $\cos(Y)$ décroît de $\cos(\sin \tau)$ à 0;
- $\sinh^2(X) \tan Y$, produit de deux fonctions croissantes, croît de 0 à ∞ .

On détermine aisément ces solutions par la méthode de Newton.

Démonstration du lemme 2.8 : On pose $\lambda \sinh(x + i\tau) = X + iY$ avec $Y = \tan \tau \sqrt{X^2 + \lambda^2 \cos^2 \tau} \in [X \tan \tau, X \tan \tau + \lambda \sin \tau]$.

Alors

$$\begin{aligned} \tanh(X + iY) &= \frac{\sinh X \cos Y + i \cosh X \sin Y}{\cosh X \cos Y + i \sinh X \sin Y} \\ &= \frac{\sinh X \cosh X + i \cos Y \sin Y}{\cosh^2 X \cos^2 Y + \sinh^2 X \sin^2 Y} \end{aligned} \quad (2.21a)$$

$$= \frac{\sinh X \cosh X + i \cos Y \sin Y}{\sinh^2 X + \cos^2 Y}. \quad (2.21b)$$

Par croissance de Y , et puisque $Y(0) = \lambda \sin(\tau) < \frac{\pi}{2}$, on déduit l'existence d'une valeur Y_τ annoncée.

On a

$$X_\tau = \frac{\sqrt{Y_\tau^2 - \lambda^2 \sin^2 \tau}}{\tan \tau}. \quad (2.22)$$

Alors, pour $X \in [0, X_\tau]$, $Y \leq Y_\tau < \frac{\pi}{2}$ donc d'après (2.21a)

$$\operatorname{Re}(\varphi(z')) \leq \frac{\sinh X \cosh X}{\cosh^2 X \cos^2 Y} \leq \frac{\tanh X_\tau}{\cos^2(Y_\tau)}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi(z')) \leq \frac{\cos Y \sin Y}{\cosh^2 X \cos^2 Y} \leq \tan Y_\tau$$

et pour $X \in [X_0, \infty[$, d'après (2.21b)

$$\operatorname{Re}(\varphi(z')) \leq \frac{\sinh X \cosh X}{\sinh^2 X} \leq \frac{1}{\tanh(X_\tau)}$$

$$\operatorname{Im}(\varphi(z')) \leq \frac{\cos Y \sin Y}{\sinh^2 X} \leq \frac{1}{2 \sinh^2 X_\tau}$$

ce qui démontre l'encadrement annoncé. $\square$

Pas d'intégration Supposons que f est holomorphe et donc majorée sur Z_τ d'après le principe du maximum.

Pour étudier $\hat{g}_\tau(X)$, il suffit donc de majorer $\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(t + i\tau)| dt$.

Or, en reprenant les notations X, Y ,

$$|\varphi'(t + i\tau)| = \left| \frac{\lambda \cosh(t + i\tau)}{\sinh^2(X) + \cos^2(Y)} \right| dt$$

soit, par le changement de variable $X = \lambda \cos \tau \sinh(t)$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(t + i\tau)| \leq 2 \int_0^\infty \frac{\lambda \cosh(t)}{\sinh^2(X) + \cos^2(Y)} \leq \frac{2}{\cos(\tau)} \int_0^\infty \frac{dX}{\sinh^2(X) + \cos^2(Y(X))}.$$

On sépare comme précédemment en une valeur $X_\tau > 0$ telle que $Y_\tau < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \int_0^{X_\tau} &\leq \int_0^{X_\tau} \frac{dX}{\cosh^2(X) \cos^2(Y)} \\ &\leq \frac{\tanh(X_\tau)}{\cos^2(Y_\tau)} \\ \int_{X_\tau}^\infty &\leq \int_{X_\tau}^\infty \frac{dX}{\sinh^2(X) + \cos^2(Y)} \\ &\leq \int_{X_\tau}^\infty \frac{dX}{\sinh^2(X)} \\ &= \frac{1}{\tanh(X_\tau)} - 1 < \frac{1}{\tanh(X_\tau)}. \end{aligned}$$

Égaliser les termes de cette dernière majoration nous ramène exactement à la forme (2.17), donc en séparant l'intégrale en la valeur X_τ , on obtient que chacune de ces intégrales est majorée par X_m .

Ainsi, $\int |\varphi'| \leq \frac{4X_m}{\cos(\tau)}$, et

$$\sum_{k \neq 0} \left| \hat{g}_\tau\left(\frac{k}{h}\right) \right| \leq \frac{8X_m M_2}{\cos \tau (e^{2\pi\tau/h} - 1)}.$$

Donc pour avoir

$$\sum_{|k| > 0} \hat{g}_\tau\left(\frac{k}{h}\right) \leq e^{-D}$$

on pose

$$h = \frac{2\pi\tau}{D + \log\left(\frac{8X_m M_2}{\cos \tau} + 1\right)}.$$

Borne de troncature **Lemme 2.9**

Si $|f| \leq M_1$ sur $]a, b[$, on a

$$h \sum_{|k| > n} |g(kh)| \leq M_1 2e^{-2\lambda \sinh(nh)}.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} h \sum_{|k| > n} |g(kh)| &\leq h M_1 \int_{nh}^\infty \frac{\lambda \cosh(t)}{\cosh^2(\lambda \sinh(t))} dt \\ &\leq M_1 \int_{\lambda \sinh(nh)}^\infty \frac{dt}{\cosh^2 t} \\ &\leq M_1 2e^{-2\lambda \sinh(nh)}. \end{aligned}$$

□

On obtient donc le théorème :

Théorème 2.10

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que

1. $|f| \leq M_1$ sur $]a, b[$;
2. f possède un prolongement holomorphe à un rectangle $R = \frac{a+b}{2} + [-X_m, X_m] + i[-Y_m, Y_m]$;
3. $|f| \leq M_2$ sur ∂R .

Alors pour tout $D > 0$, en posant

- $\lambda = \frac{\pi}{2}$ et τ tel que $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} Z_\tau \subset R$;
- $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \tanh(\lambda \sinh t)$;
- $h = \frac{2\pi\tau}{D + \log(\frac{2^4 X_m M_2}{\cos \tau} + 1)}$;
- $nh \geq \operatorname{arcsinh}\left(\frac{D + \log(2^3 M_1)}{\lambda}\right)$;

on a

$$\left| \int_a^b f - h \sum_{k=-n}^n f(\varphi(kh)) \varphi'(kh) \right| < e^{-D} \quad (2.23)$$

et une convergence

$$n \sim_{D \rightarrow \infty} \frac{(D + \log(\frac{X_m M_2}{\cos \tau})) \log(D)}{2\pi\tau}. \quad (2.24)$$

2.3.1 Présence de singularités intégrables

Dans le cas où la fonction f présente des singularités intégrables en a ou b , nous pouvons également appliquer la méthode.

Remplaçons par exemple l'hypothèse 1 par l'hypothèse plus faible

$$|f(x)| \leq \frac{M_1}{|x-a|^\alpha |b-x|^\beta} \quad (2.25)$$

où $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

On peut supposer $\alpha \geq \beta$, et quitte à multiplier f par $(b-x)^{\alpha-\beta}$ on peut supposer $\alpha = \beta$. Notons $h(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\alpha f(x)$. Alors en posant toujours φ selon (2.16), et du fait des relations $(1 - \tanh x)(1 + \tanh x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \tanh'(x)$, l'intégrale prend la forme

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda \cosh t}{(\cosh^2(\lambda \sinh t))^{1-\alpha}} h \circ \varphi(t) dt.$$

Si h est holomorphe au voisinage de $[a, b]$, la théorie précédente s'adapte.

En supposant que h est bornée par M_1 sur $]a, b[$ et par M_2 sur R , on peut reprendre la démonstration du théorème 2.10, où lors du choix du pas d'intégration on majore cette fois l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dX}{(\sinh^2 X + \cos^2 Y)^{1-\alpha}}.$$

Notons I un majorant de sa valeur. On pose dès lors

$$h = \frac{2\pi\tau}{D + \log\left(1 + \frac{4M_2 I}{\cos \tau}\right)}.$$

En ce qui concerne la borne de troncature, on part cette fois de la majoration $|g(t)| \leq \frac{\lambda M_1 \cosh(t)}{(\cosh(\lambda \sinh(t)))^{2-2\alpha}}$, si bien que $h \sum_{k>n} |g(kh)| \leq M_1 \int_{\lambda \sinh(nh)}^\infty \frac{dt}{(\cosh t)^{2-2\alpha}} \leq \frac{4^{1-\alpha} M_1}{2-2\alpha} \exp(-(2-2\alpha)\lambda \sinh(nh))$, la même estimation valant pour la somme $k < -n$.

De sorte que l'on peut prendre

$$nh = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{D + \log\left(\frac{4^{1-\alpha}M_1}{2-2\alpha}\right)}{(2-2\alpha)\lambda}\right)$$

On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 2.11

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que pour une valeur $\alpha \in]0, 1[$ on peut écrire $f(x) = (x-a)^\alpha(b-x)^\alpha h(x)$ avec

1. $|h| \leq M_1$ sur $]a, b[$;
2. h possède un prolongement holomorphe à un rectangle $R = \frac{a+b}{2} + [-X_m, X_m] + i[-Y_m, Y_m]$;
3. $|h| \leq M_2$ sur ∂R .

Alors pour tout $D > 0$, avec la majoration de I donnée plus haut, si l'on pose

- $\lambda = \frac{\pi}{2}$ et τ tel que $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}Z_\tau \subset R$;
- $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \tanh(\lambda \sinh t)$;
- $h = \frac{2\pi\tau}{D + \log\left(\frac{2^4 X_m M_2 I}{\cos \tau} + 1\right)}$;

- $nh \geq \operatorname{arcsinh}\left(\frac{D + \log\left(\frac{4^{1-\alpha}M_1}{2-2\alpha}\right)}{(2-2\alpha)\lambda}\right)$;

on a

$$\left| \int_a^b f - h \sum_{k=-n}^n f(\varphi(kh)) \varphi'(kh) \right| < e^{-D} \quad (2.26)$$

et une convergence

$$n \sim_{D \rightarrow \infty} \frac{(D + \log\left(\frac{X_m M_2}{\cos \tau}\right)) \log(D)}{2\pi\tau}. \quad (2.27)$$

3 Validité du principe

On teste la méthode double-exponentielle sur des fonctions régulières illustrant la nécessité des hypothèses du théorème 1.15.

3.1 Une intégrale de référence

On peut considérer comme référence l'intégrale de la fonction gaussienne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz \quad (3.1)$$

où $f : z \mapsto e^{-z^2}$ est entière et à décroissance exponentielle. Nous avons vu que l'on obtenait une complexité linéaire de $\frac{D}{\pi}$ en appliquant la méthode des trapèzes directement à f .

On peut néanmoins appliquer une transformation double-exponentielle : f restant bornée sur les cônes d'ouverture $\frac{\pi}{4}$, on obtient une complexité de

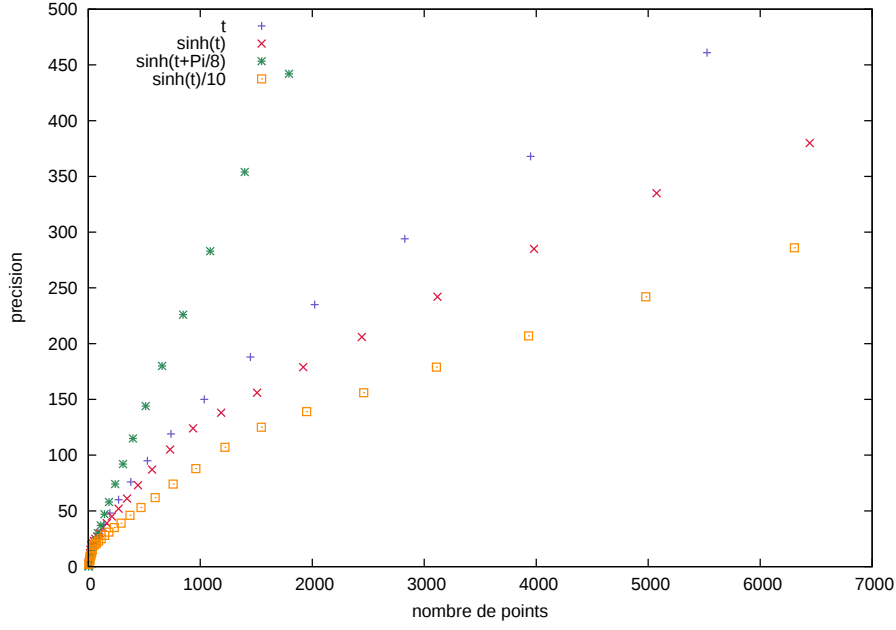
$$\frac{2D \log D}{\pi^2}.$$

3.2 Cas problématiques

3.2.1 Pôles dans Z_τ

Si l'on décale simplement l'exemple 2.7, l'intégration par méthode double-exponentielle de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1 + (x + 10)^2}. \quad (3.2)$$


 FIG. 2.13: convergence de l'intégration de $\frac{e^{-z^2}}{1-e^{iz}-1}$.

donne un résultat totalement aberrant. En effet les pôles sont désormais en $-10 \pm i$, qui se trouvent dans la zone Z_τ pour toute valeur de τ pas trop petite.

Nous verrons avec le lemme 3.2 comment prendre en compte ces pôles pour retrouver le résultat.

3.2.2 Pôles proches de l'axe

On considère la fonction

$$f : z \mapsto \frac{e^{-z^2}}{1 - e^{iz} - 1} \quad (3.3)$$

qui est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et possède une ligne de pôles parallèles à l'axe réel. Ils intersectent donc tout cône C_τ obtenu par changement de variable simplement exponentiel $z = \sinh(z')$. Les hypothèses du théorème 2.3 ne sont pas vérifiées.

La figure 2.13 illustre la convergence obtenue à l'aide de différents changements de variables :

- avec le changement exponentiel en $\sinh$, la convergence n'est clairement pas quasi-linéaire, on remarque qu'elle est plutôt d'ordre D^2 , ce que nous pourrions expliquer par le théorème 3.1.
- sans changement de variable, la convergence observée en $D\sqrt{D}$ s'explique naturellement puisque la bande d'holomorphie indique que la transformée de Fourier a une décroissance exponentielle, tandis que la fonction une décroissance d'ordre $\beta = 2$.
- le moyen le plus efficace pour calculer cette intégrale consiste à décaler le chemin au centre de la zone de décroissance holomorphe : c'est exactement ce que réalise le changement de variable $\sinh(t + i\frac{\pi}{8})$ qui permet d'obtenir une convergence quasi-linéaire.
- en revanche, espérer s'éloigner des pôles en appliquant une homothétie sur le changement de variable exponentiel est voué à l'échec, ce qu'illustre la mauvaise convergence obtenue.

Toutefois, on observe dans le cas d'une intégration avec le changement de variable en $\sinh$ une convergence en $\sqrt{n}$, qui est expliquée par le théorème 3.1.

3.2.3 Fonction Gamma

On intègre la fonction Γ sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma(\delta + it) dt. \quad (3.4)$$

La formule de Stirling démontre les estimations de croissance suivantes :

- sur les droites verticales

$$\log |\Gamma(\delta + it)| \sim -\frac{\pi}{2} |t|; \quad (3.5)$$

- et sur les rayons $\theta \neq 0$

$$\log |\Gamma(\delta + ire^{i\theta})| \sim -\sin(\theta)r \log r. \quad (3.6)$$

Ainsi, $f(z) = \Gamma(\delta + iz)$ a une décroissance de nature simplement exponentielle sur l'axe réel, mais le changement de variable $z = \sinh(z')$ prescrit par la méthode générale ne permet pas d'obtenir la convergence attendue puisque f a une croissance exponentielle dans la partie inférieure de tout cône épaissi C_τ , $\tau > 0$.

En particulier, g n'est pas L^2 sur les droites $\mathbb{R} - i\tau$ pour $\tau > 0$, donc d'après le théorème 1.6, $\hat{g}$ a une décroissance au plus sous-exponentielle pour les valeurs positives. Le théorème 3.1 permet d'expliquer une convergence en D^2 . Toutefois, nous obtenons expérimentalement une convergence quasi-linéaire. Ce fait remarquable s'explique par une estimation *ad hoc* des transformées de Fourier : on démontrera dans la proposition 5.8 du second chapitre une décroissance du type

$$\log |\hat{g}(X)| \ll \frac{\pi^2 X}{\log(1 + \frac{2\pi X}{\log X})},$$

ce qui permet d'affirmer une convergence de la méthode double-exponentielle utilisant

$$\frac{D \log(D)^2}{\pi^2}$$

évaluations.

La figure 2.15 montre la précision de cette estimation ; elle illustre aussi les effets de divers autres schémas d'intégration que suggèrent les théories développées ici :

1. Si l'on ne réalise aucun changement de variable, on intègre une fonction à décroissance $e^{-\frac{\pi}{2}t}$, et qui possède une bande d'holomorphic limitée seulement par les pôles en $-\mathbb{N}$, donc de largeur δ . On obtient donc une convergence en $\frac{2D}{\pi} \cdot \frac{D}{2\pi\delta}$, d'autant meilleure que δ augmente. La figure 2.15 présente les valeurs $\delta = 3$ et $\delta = 8$.
2. On peut aussi aller chercher la décroissance de la fonction gamma à gauche de la droite d'intégration, en intégrant selon les valeurs de $\delta + i \sinh(t + i\theta)$. Selon la valeur de θ , on aura un cône d'holomorphic d'ouverture $\min(\theta, \frac{\pi}{2} - \theta)$ sur lequel on peut appliquer le théorème 2.3 (cf. figure 2.14). En prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$, on obtient une convergence en $\frac{2D \log D}{\pi^2}$: c'est là la manière la plus efficace de calculer l'intégrale, comme le montre la figure 2.15.
3. On peut également parcourir une parabole $\delta - \alpha t^2 + it$, ce qui améliore également considérablement la convergence. La figure 2.15 montre cependant que le résultat est moins bon dans le cadre double-exponentiel précédent.

3.3 Résultats étendus

Lorsqu'on a une fonction f à décroissance simplement exponentielle sur la droite réelle, mais à laquelle le théorème 2.3 ne s'applique pas — soit que f ne soit pas holomorphe sur un cône C_τ , ou qu'elle ne possède pas une décroissance suffisante sur ce cône —, on peut, sous réserve de conditions affaiblies étudier la vitesse de convergence de la transformation double-exponentielle.

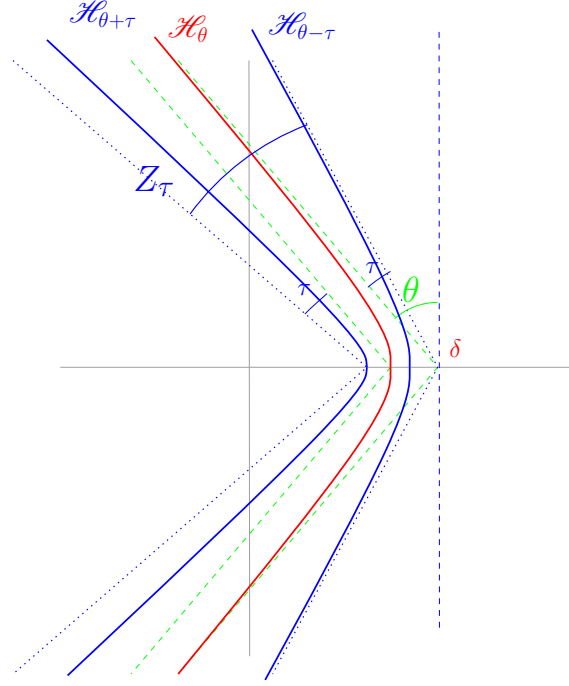


FIG. 2.14: décalage du chemin

3.3.1 Bande d'holomorphic

Le cas se produit lorsque f ne possède qu'une bande d'holomorphic Δ_τ , comme dans l'exemple 3.3.

On obtient alors le remarquable résultat suivant : modulo le fait d'exiger une certaine uniformité sur Δ_τ de l'hypothèse de décroissance exponentielle, la transformation double-exponentielle ne fait perdre qu'un terme de complexité logarithmique par rapport à l'intégration faite sans transformation.

Théorème 3.1

Soit f une application telle que

1. f possède un prolongement holomorphe sur une bande Δ_τ ;
2. $f(x + iy) \leq Me^{-\alpha|x|^\beta}$ uniformément en $y \in [-\tau, \tau]$;

alors en appliquant la méthode d'intégration double-exponentielle à f on obtient une complexité de $O\left(\frac{D^{\frac{\beta+1}{\beta}} \log D}{2\pi\tau}\right)$ évaluations.

Remarque : L'hypothèse de décroissance est ici demandée uniformément sur toute la bande, et non plus sur l'axe réel seul. Elle est en effet utilisée pour estimer l'erreur de quadrature.

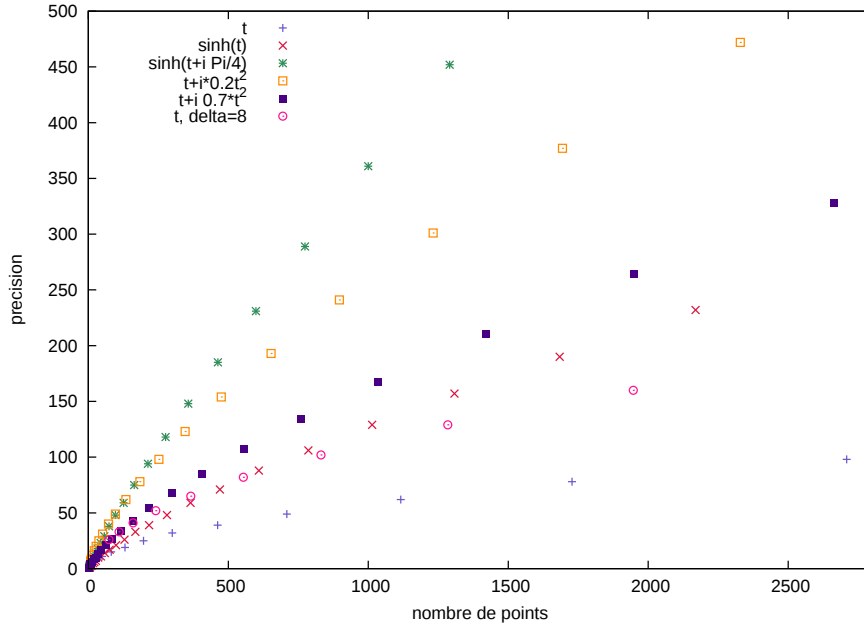
Démonstration : On détermine tout d'abord un domaine $\tilde{\Delta} \subset \mathbb{C}$ tel que $\sinh(\tilde{\Delta}) \subset \Delta_\tau$.

Pour $x > 0, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\sinh(x + iy)) \leq \tau &\Leftrightarrow \cosh(x) \sin(y) \leq \tau \\ &\Leftrightarrow y \leq \arcsin\left(\frac{\tau}{\cosh(x)}\right). \end{aligned}$$

La fonction arcsin n'étant pas définie si $\tau > \frac{\pi}{2}$, on se contente de la majoration $\arcsin(x) \geq x$ pour définir

$$\tilde{\Delta} = \left\{ x + iy, |y| \leq \frac{\tau}{\cosh x} \right\}.$$


 FIG. 2.15: convergence de l'intégration de $\Gamma(\delta + iz)$.

On réalise une intégration double-exponentielle de f avec le changement de variable $\varphi(z) = \sinh(z)$, en posant donc

$$g(z) = f(\sinh z) \cosh(z), z \in \tilde{\Delta}.$$

L'hypothèse (3) du théorème 1.15 n'étant pas vérifiée, c'est l'estimation de l'erreur de quadrature qui doit être adaptée aux nouvelles hypothèses.

Soit donc $X > 0$, on doit trouver une majoration du coefficient de Fourier

$$\hat{g}(X) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi Xz} g(z) dz.$$

On décale désormais le chemin d'intégration à la courbe

$$z = \gamma(t) = t - i \frac{\tau}{\cosh t}, \gamma'(t) = 1 + i\tau \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

en notant que d'après l'hypothèse 2,

$$|g(\gamma(t))| = |f(\sinh(\gamma(t))) \cosh(\gamma(t))| \leq M e^{-\alpha \cos(\frac{\tau}{\cosh(t)}) \sinh(t)} \cosh(t).$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} |\hat{g}(X)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2\pi X\tau}{\cosh t}} e^{-2i\pi Xt} g(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq 2M(1 + \tau) \int_0^\infty \underbrace{e^{-2\pi X\tau e^{-t}}}_{\varphi_1(t)} \underbrace{e^{-\alpha(\cos \tau)^\beta (\sinh t)^\beta} \cosh(t)}_{\varphi_2(t)} dt. \end{aligned}$$

On sépare cette intégrale en deux en une valeur $T > 0$:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) \leq e^{-2\pi X\tau e^{-T}} \text{ sur } [0, T] \\ \int_0^T \varphi_2(t) dt = \int_0^{\sinh T} e^{-\alpha(\cos \tau)^\beta u^\beta} du \leq \frac{1}{\alpha^{1/\beta} \cos \tau} \frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta} \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \varphi_1(t) \leq 1 \text{ sur } [T, \infty] \\ \int_T^\infty \varphi_2(t) dt = \int_{\sinh T}^\infty e^{-\alpha(\cos \tau)^\beta u^\beta} du \leq \frac{e^{-\alpha e^{\beta T}}}{\alpha \beta} \text{ si } \beta \geq 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T e^{-2\pi X\tau e^{-t}} e^{-\alpha(\cos \tau)^\beta (\sinh t)^\beta} dt &\leq e^{-2\pi X\tau e^{-T}} \int_0^{\sinh T} e^{-\alpha(\cos \tau)^\beta u^\beta} du \\
 &\leq e^{-2\pi X\tau e^{-T}} \frac{1}{\alpha\beta} \text{ d'une part;} \\
 \int_T^\infty e^{-2\pi X\tau e^{-t}} e^{-\alpha e^{\beta t}} dt &\leq \int_T^\infty e^{-\alpha e^{\beta t}} dt \\
 &\leq \frac{e^{-\alpha e^{\beta T}}}{\alpha\beta} \text{ d'autre part.}
 \end{aligned}$$

Ces termes sont égaux pour

$$T = \frac{1}{\beta+1} \log\left(\frac{2\pi X\tau}{\alpha}\right)$$

et dans ce cas,

$$|\hat{g}(X)| \leq \frac{2M(1+\tau)}{\alpha\beta} e^{-\left(2\pi X\tau\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}}. \quad (3.9)$$

Il reste à majorer la somme de ces termes :

$$\sum_{k \geq 1} e^{-\left(\frac{k2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} \leq e^{-\left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} + \int_1^\infty e^{-\left(\frac{t2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}} dt. \quad (3.10)$$

Par un changement de variable $t = \frac{h}{2\pi\tau} u^{\frac{\beta+1}{\beta}}$, l'intégrale s'écrit

$$\frac{h(\beta+1)}{2\pi\tau\beta} \int_{\left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}}^\infty u^{\frac{1}{\beta}} e^{-u} du = \Gamma_{\text{inc}}\left(1 + \frac{1}{\beta}, \left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\right)$$

où Γ_{inc} désigne la fonction Gamma incomplète.

En utilisant le lemme A.2.4 pour $s = \frac{1}{\beta}$ et $x = \left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}$, et en supposant h assez petit pour que $\frac{x}{s} > 2$ de sorte que $(1 - \frac{s}{x})^{-1} \leq 2$, l'intégrale est majorée par $2\left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} e^{-\left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}}$.

Donc la somme des (3.9) vérifie

$$\sum_{k \geq 1} \left| \hat{g}\left(\frac{k}{h}\right) \right| \leq \frac{2M(1+\tau)}{\alpha\beta} \left[2\left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} + 1 \right] e^{-\left(\frac{2\pi\tau}{h}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}}$$

ce qui permet de définir h précisément. On a en tous cas

$$h(D) \sim \frac{D^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{2\pi\tau}$$

ce qui démontre l'énoncé de complexité. □

Exemple 4 (ligne de pôles). On reprend l'exemple 3.3

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2}}{1 - e^{iz-1}} dz = \sqrt{2\pi} \sum_{k \geq 0} e^{-k-k^2/4},$$

$$\text{avec } f(z) = \frac{\exp(-z^2)}{1 - \exp(iz-1)}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [-\tau, \tau]$ avec $\tau < 1$, on a la majoration uniforme en y

$$\begin{aligned}
 |f(x+iy)| &= \left| \frac{e^{-x^2+y^2-2ixy}}{1 - e^{ix-y-1}} \right| \\
 &\leq \frac{e^{-x^2+y^2}}{1 - |e^{ix-y-1}|}
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{e^{\tau^2}}{1 - e^{\tau-1}} e^{-x^2}.$$

Donc f vérifie les hypothèses du théorème 3.1 pour les constantes $M = \frac{e^{\tau^2}}{1 - e^{\tau-1}}$, $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

Le graphique de convergence 2.13 présenté auparavant montre la pertinence de ce résultat, ainsi que la perte du terme logarithmique par rapport à l'intégration réalisée sans changement de variable.

3.4 Fonctions méromorphes

La théorie de l'intégration double-exponentielle repose principalement sur l'estimation des transformées de Fourier par décalage de contour sur une bande d'holomorphie. Ce procédé reste possible avec des fonctions méromorphes, si l'on prend en compte les pôles franchis lors du décalage des chemins à l'aide de la formule des résidus. Supposons donc une fonction g vérifiant les hypothèses du théorème 1.15, mais n'étant que méromorphe sur Δ_τ .

En notant (r_ρ) les résidus associés aux pôles (ρ) inclus dans Δ_τ , on a pour $X > 0$

$$\hat{g}(X) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi X t} g(t) dt = \int_{\mathbb{R}-i\tau} e^{-2i\pi X t} g(t) dt - 2i\pi \sum_{-\tau < \text{Im}(\rho) < 0} r_\rho e^{-2i\pi X \rho}.$$

Pour $X < 0$ on prend en compte les pôles tels que $0 < \text{Im}(\rho) < \tau$, en prenant cette fois en compte les résidus de manière positive, de sorte que la contribution de ces pôles à $\sum_{|k|>0} \hat{g}(k/h)$ est égale à

$$2i\pi \sum_{\rho} \sum_{k>0} \varepsilon_\rho r_\rho e^{\varepsilon_\rho 2i\pi k \rho / h} = \sum_{\rho} \frac{\varepsilon_\rho 2i\pi r_\rho}{e^{-\varepsilon_\rho 2i\pi \rho / h} - 1} \quad (3.11)$$

où $\varepsilon_\rho = \pm 1$ est égal au signe de $\text{Im}(\rho)$.

Pour conserver l'estimation (1.5) de l'erreur de quadrature, il suffit de corriger la formule d'intégration en ajoutant cette somme. De manière générale dans le cas d'un changement de variable, la correction prend la forme suivante.

Lemme 3.2

Soit f une fonction méromorphe sur une zone Δ'_τ , dont les pôles ρ ont résidus r_ρ , et $\varphi : \Delta_\tau \rightarrow \Delta'_\tau$ un changement de variable holomorphe par lequel on applique un procédé d'intégration double-exponentielle à

$$g(z) = f \circ \varphi(z) \cdot \varphi'(z)$$

sur Δ_τ .

Alors l'erreur de quadrature peut s'estimer en

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \hat{g}\left(\frac{k}{h}\right) - 2i\pi \sum_{\rho \in \Delta'_\tau} \sum_{z \in \varphi^{-1}(\rho) \cap \Delta_\tau} \varepsilon_z \frac{r_\rho}{e^{-\varepsilon_z 2i\pi z / h} - 1} \right| \leq \frac{M_1}{e^{2\pi\tau/h} - 1} \quad (3.12)$$

où ε_z est le signe de $\text{Im}(z) \in]-\tau, \tau[$, et M_1 majore $\int_{\mathbb{R}} |g(t + i\tau)| + |g(t - i\tau)| dt$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que pour un pôle ρ de f

$$\text{res}_{|z=\varphi^{-1}(\rho)} g(z) = \text{res}_{|\varphi(z)=\rho} f \circ \varphi(z) \varphi'(z) = \text{res}_{|z'=\rho} f(z') = r_\rho.$$

□

Exemple 5. Illustrons la pertinence des corrections apportées par les pôles en reprenant l'exemple 3.2 : si l'on décale l'intégrale de $\frac{1}{1+x^2}$, les pôles en $\pm i$ ne sont plus hors de la zone Δ'_τ pour le changement de variable $\varphi = \sinh \circ \sinh$. On corrige comme précisé ci-dessus à l'aide d'une fonction `poles_shsh` qui code la somme intervenant dans (3.12) pour le changement φ . Dans ce cas, les pôles images sont de la forme $z = \text{arcsinh}(\varepsilon_k \text{arcsinh}(\rho) + ik\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ (et les résidus sont $\mp \frac{i}{2}$).

```

? \p1000
  realprecision = 1001 significant digits (1000 digits displayed)
? f(z)=1/(1+z^2);
? tau=Pi/2.2;
? h=2*Pi*tau/(1000*log(10)+log(2/cos(tau)));show(h)
%6 = 0.003892182386142456451
? n=ceil(asinh(asinh(2*10^1000))/h)
%7 = 2168
? Pi-integration_shsh(f,h,n,1)
%8 = 0.E-1001
? diff=Pi-integration_shsh(z->f(z-15),h,n,1);show(diff)
%9 = 2.988841749810731359 E-14
? Rho=[15+I,15-I];Res=[-I/2,I/2];
? diff+poles_shsh(Rho,Res,h)
%11 = -2.9500027961671405652 E-1002 + 0.E-1014*I

```

3.5 Décalages de contour

Pour une fonction donnée, la décroissance de sa transformée de Fourier est directement liée à la largeur d'holomorphie de part et d'autre de l'axe d'intégration. Or si lors de la sommation on peut prendre en compte une inhomogénéité de la décroissance de f selon les axes positifs et négatifs, l'erreur de quadrature sera liée à la plus grande des valeurs $\hat{g}(\frac{1}{h})$ ou $\hat{g}(-\frac{1}{h})$. L'erreur est donc minimale quand ces valeurs sont comparables.

Ainsi, si g possède une bande d'holomorphie bornée non symétrique autour de l'axe réel, il est très avantageux de décaler le chemin pour se situer exactement au milieu de cette bande.

Exemple 6. La mise en œuvre de cette idée est illustrée par les graphiques de convergence 2.13 et 2.15.

3.5.1 Fonction gamma

Cette observation permet de résoudre le problème posé par l'intégration de la fonction gamma sur une droite verticale (3.4). Un décalage d'un angle $+i\theta$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ après transformation par $\sinh$ permet d'obtenir facilement une décroissance en $e^{-2\pi\theta x}$ de la transformée de Fourier selon les x positifs, et en $e^{-2\pi(\frac{\pi}{2}-\theta)|x|}$ sur l'axe négatif. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ on obtient une complexité de

$$\frac{2D \log D}{\pi}$$

évaluations.

Cette méthode est d'autant meilleure pour l'intégration de gamma que par ce décalage on se situe sur un chemin où la décroissance de la fonction est amplifiée.

On retrouve le principe de la méthode du col, lui aussi dérivé du principe du maximum : une intégrale complexe a intérêt à être évaluée selon un chemin de plus grande décroissance, les chemins de module décroissant existant toujours puisque les fonctions holomorphes sont harmoniques.

3.5.2 Oscillations

Dans l'exemple donné en section 1.9 d'une fonction

$$g(z) = \exp(-2\alpha \cosh(\beta z) + i \cosh(\gamma z));$$

nous nous sommes restreints au cas de valeurs $\gamma < \beta$ pour pouvoir appliquer le théorème double-exponentiel.

Dans le cas contraire, les oscillations rendent la quadrature très difficile, ce qui se traduit par l'explosion de la fonction g hors de l'axe. Toutefois cette explosion est anisotrope, et la fonction

$g(x + i\tau)$ reste petite au voisinage de l'axe quand x et τ sont de même signe. Et dans ce cas, on dispose d'une bande de décroissance pour les valeurs $|\tau| \in [0, \frac{\pi}{2\gamma}]$.

Avec les valeurs $\beta = 1$ et $\gamma = 2$, nous pouvons exploiter donc ce fait en parcourant le chemin

$$z = \varphi(t) = t + i\frac{\pi}{4} \tanh(t).$$

Le calcul ci-dessous illustre les gains énormes qu'apporte ce simple décalage : pour l'obtention de 50 chiffres, on passe de plus de 50 000 à seulement 70 évaluations !

```
? f(z)=exp(-cosh(z)+I*cosh(2*z));
? show(acosch(log(10^55)))
%5 = 5.534497222932338100
? \p50
    realprecision = 57 significant digits (50 digits displayed)
? ref=integration(f,0.0001,56000);
? worse=integration(f,0.00015,56000);show(ref-worse)
%7 = 4.346836330130355456 E-47 + 4.473133008711754695 E-47*I
? jerk=integration(f,0.01,560);show(ref-jerk)
%8 = -4.952617273823383328 E-7 + 5.191438096721172272 E-8*I
? g(t)=f(t+I*Pi/4*tanh(t))*(1+I*Pi/(4*cosh(t)^2));
? show(g(2.8))
%10 = -2.736350774341735799 E-62 + 4.670477678195473199 E-62*I
? ref-integration(g,0.04,70)
%11 = -5.109618276407337678 E-55 + 4.686079856596108373 E-55*I
```

4 Exemples complets

4.1 Fonction gamma incomplète

On considère la fonction

$$\Gamma_{\text{inc}}(s, x) = \int_x^\infty t^s e^{-t} \frac{dt}{t}$$

où s, x sont des nombres complexes tels que $x \notin \mathbb{R}_-$ ou $\text{Re}(s) > 0$, et le chemin d'intégration est la demi-droite positive issue de x .

L'intégrande $f(z) = e^{(s-1)\log(z)-z}$ possède une singularité en 0, qui doit donc se trouver en dehors d'une zone T_τ issue de x . Elle a en outre une décroissance exponentielle de paramètres $\alpha = \cos \theta$ et $\beta = 1$ sur tout rayon $X + re^{i\theta}$.

4.1.1 Ouverture τ et décalage éventuel

Supposons $\text{Im}(X) > 0$. En considérant pour zone Z_τ un cône d'ouverture τ issu de $X - \alpha$, on évite le point 0 à condition que $\text{Re}(X) > \alpha$, ou que

$$\tan \tau < \frac{\text{Im}(X)}{\alpha - \text{Re}(X)}.$$

Dans le premier cas, la décroissance exponentielle de l'intégrande permet de choisir une ouverture τ arbitrairement proche de $\frac{\pi}{2}$. Dans le second, la valeur limite $\tau < \arctan\left(\frac{\text{Im}(X)}{\alpha - \text{Re}(X)}\right)$ peut devenir très faible, et rendre l'intégration très longue. Il est alors judicieux d'effectuer un décalage de la demi-droite d'intégration d'un angle θ pour rendre la situation plus symétrique et obtenir une valeur de τ proche de $\frac{\pi}{4}$ dans le pire des cas. La figure 2.16 illustre ces différentes situations.

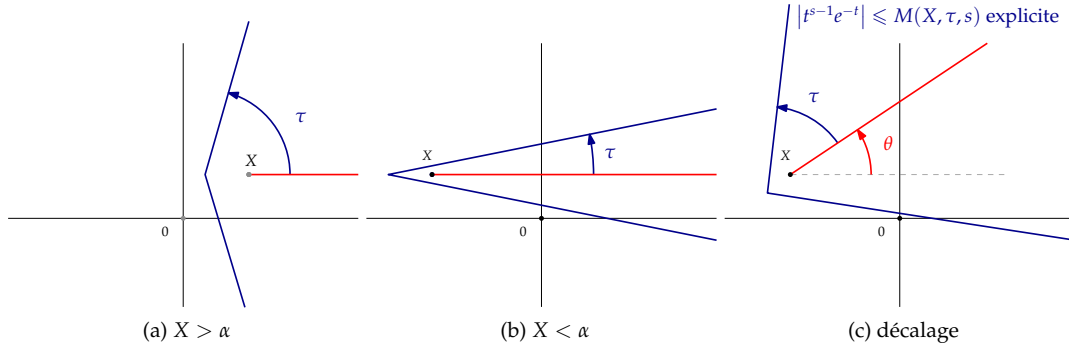


FIG. 2.16: Zone d'holomorphie pour la fonction gamma incomplète.

4.1.2 Majoration sur T_τ

Donnons une majoration de f sur une demi-droite $R_\theta = \{x + iy + re^{i\theta}, r \geq 0\}$, que l'on suppose passer au-dessus de l'origine.

En posant $z_r = x + iy + re^{i\theta}$, on majore $\operatorname{Re}((s-1) \log z_r - z_r)$ par

$$\underbrace{\sup_{r \geq 0} \{-\operatorname{Im}(s) \arg(z_r) - \lambda r\}}_{S_1} + \underbrace{\sup_{r \geq 0} \{\operatorname{Re}(s-1) \log |z_r| - \mu r\}}_{S_2} - x,$$

où l'on décompose $\cos \theta$ sous la forme $\cos \theta = \lambda + \mu$ avec $\lambda, \mu > 0$.

Majorant S_1 : On détermine tout d'abord l'argument de z_r . Supposons que la droite (z_r) soit au-dessus de l'origine. Par une rotation d'angle $-(\frac{\pi}{2} + \theta)$, on ramène le point $x + iy = z_0$ à droite de l'origine, avec des coordonnées

$$\begin{cases} x_0 &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ y_0 &= -x \cos \theta - y \sin \theta \end{cases}$$

vérifiant $x_0 > 0$ par hypothèse. Avec cette rotation, le point $z_r e^{-i(\frac{\pi}{2} + \theta)}$ est de la forme $x_0 + i(y_0 - r)$, et son argument vaut $\arctan(\frac{y_0 - r}{x_0})$. Avec la rotation inverse, le point z_r a donc pour argument $\frac{\pi}{2} + \theta + \arctan(\frac{y_0 - r}{x_0})$. Cet argument est compris entre les valeurs θ et $\frac{\pi}{2} + \theta + \arctan(\frac{y_0}{x_0})$.

Ainsi, le supremum S_1 est atteint en $r = 0$ ou en une éventuelle solution positive de

$$\frac{\operatorname{Im}(s)x_0}{x_0^2 + (y_0 - r)^2} = \lambda.$$

Dans le cas où la droite (z_r) passe sous l'origine (soit $x_0 < 0$), il faut plutôt considérer la rotation la rotation d'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$, ce qui donne la demi-droite formée des $z_r e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} = -x_0 - iy_0 + ir$. Les signes négatifs se factorisent en début d'expression, si bien qu'en remplaçant s par son conjugué on garde les mêmes expressions.

Majorant S_2 : Avec les valeurs x_0, y_0 introduites ci-dessus, $|z_r|^2 = x_0^2 + y_0^2 - 2ry_0 + r^2$, donc le supremum S_2 est atteint en $r = 0$ ou en une des éventuelles racines positives de

$$\frac{\operatorname{Re}(s) - 1}{2} \frac{-2y_0 + 2r}{r^2 - 2ry_0 + x_0^2 + y_0^2} = \mu$$

soit

$$r^2 - 2r(y_0 + 2 \frac{\operatorname{Re}(s) - 1}{2\mu}) + x_0^2 + y_0^2 + \frac{\operatorname{Re}(s) - 1}{\mu} y_0 = 0.$$

Ainsi, pour toute décomposition $\cos \theta = \lambda + \mu$, on détermine un majorant

$$\log M_2 = S_1 + S_2 - x$$

de $\log |f|$ sur R_θ . Cette majoration est valable sur tout le cône T_τ , et permet d'appliquer le théorème 2.7, en adoptant une précision de calcul tenant compte de la majoration M_2 .

Théorème 4.1

Avec les paramètres précédents, la méthode double-exponentielle permet de calculer $\Gamma_{\text{inc}}(s, x)$ à précision D avec

$$\frac{D \log D}{\pi^2} + o(D \log D)$$

évaluations d'exponentielles en précision

$$D + \log(M_2) \log(D \log D).$$

4.2 Fonction d'erreur

On considère la fonction²

$$\operatorname{erfc}(s) = \int_s^\infty e^{-u^2} du$$

où pour $s = x + it$ l'intégration se fait sur la demi-droite $[x + it, \infty + it[$.

On sait que pour tout t

$$\int_{\mathbb{R}+it} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

et que

$$\int_{-\infty+it}^{-x+it} e^{-u^2} du = \int_{x-it}^{\infty-it} e^{-u^2} du$$

donc quitte à remplacer $\int_{-\infty+it}^\infty$ par $\sqrt{\pi} - \int_{x-it}^\infty$ on suppose $x \geq 0$. Enfin, $\operatorname{erfc}(\bar{z}) = \overline{\operatorname{erfc}(z)}$, donc on peut également supposer $t > 0$.

4.2.1 Encadrement

Pour $s = x + it$, on a

$$\left| e^{-(s+re^{i\tau})^2} \right| = e^{-x^2+t^2-2r(x \cos \tau - t \sin \tau) - r^2 \cos(2\tau)}. \quad (4.1)$$

Une intégration par parties fournit l'encadrement suivant, valable pour $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{|e^{-z^2}|}{2|z|(1 + \frac{1}{2|z|^2})} \leq |\operatorname{erfc}(z)| \leq \frac{|e^{-z^2}|}{2|z|(1 - \frac{1}{2|z|^2})}.$$

Ainsi, on calculera plutôt $\operatorname{erfc}(z)e^{x^2-t^2}$ avec une précision absolue donnée pour obtenir la précision relative correspondante sur le résultat.

4.2.2 Application directe

On intègre $f(z) = e^{x^2-t^2-(s+z)^2}$ sur $[0, \infty[$ à l'aide du théorème 2.7.

²la normalisation de PARI/gp est plutôt $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(x)$.

Changement de variable D'après (4.1), on a $|f(u)| \leq e^{-2xu-u^2}$ pour $u \in [0, \infty[$, donc

$$|f(u)| \leq Me^{-\alpha u^\beta}$$

avec $M_1 = 1, \alpha = 1$ et $\beta = 2$.

On pose donc le changement de variable $z = \varphi(u) = e^{u-e^{-2u}}$.

Majoration sur T_τ D'après (4.1) f est bornée pour $\tau < \frac{\pi}{4}$, et a une croissance ou une décroissance (selon le signe de $x - t$) d'ordre 1 en $\tau = \frac{\pi}{4}$.

On choisit donc $\tau = \frac{\pi}{4}$. Dans ce cas, T_τ est incluse dans le secteur angulaire d'ouverture τ issu de $-a = -\alpha \tan \tau = -1$ et on a pour tout $z \in T_\tau$

$$|f(z)| = |f(-x + re^{i\theta})| \leq e^{-(x-a)^2+t^2-2r(\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}t)} \leq e^{-(x-a)^2+t^2+\sqrt{2}(|z|+a)(t-x)^+}$$

d'après (4.1), en notant $(t-x)^+ = \max(t-x, 0)$.

Ainsi, en posant $M = e^{-a^2+2ax+a\sqrt{2}(t-x)^+}$ et $A = \sqrt{2}(t-x)^+$, on a

$$|f(z)| \leq Me^{A|z|}$$

sur T_τ .

On peut appliquer le théorème 2.7 qui donne une convergence en $O(D \log D)$ évaluations d'exponentielle, mais avec des constantes qui peuvent devenir très mauvaises pour $t > x$.

Théorème 4.2

La méthode double-exponentielle permet de calculer $\operatorname{erfc}(x)$ à précision D en $O(D \log D)$ évaluations d'exponentielle en précision $D + \log(D \log D)$.

4.2.3 Avec changement de variable préliminaire

On suppose $x > 0$ et on transforme d'abord l'intégrale en

$$\operatorname{erfc}(s) = \frac{1}{2} \int_{s^2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$$

qui ramène le calcul à celui d'une fonction gamma incomplète issue du point $(x^2 - t^2) + 2ixt$ qui n'est pas situé sur l'axe réel négatif, et donc à l'énoncé du théorème 4.1.

4.3 Intégrales de périodes

Considérons une courbe hyperelliptique d'équation $\mathcal{C} : y^2 = P(x)$ où P est un polynôme à racines simples. Le travail diophantien sur $\mathcal{C}$ nécessite de disposer d'approximations à grande précision d'une base de périodes, c'est-à-dire d'intégrales de la forme

$$\int_a^b \frac{x^k}{P(x)} dx$$

où $k < \deg(P)$, et a et b sont deux racines de P .

Soit donc l'intégrale

$$I_{a,b,Q} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)Q(x)}}. \quad (4.2)$$

Théorème 4.3

La méthode double-exponentielle permet de calculer l'intégrale $I_{a,b,Q}$ à précision D en

$$O(DM(D)(\log D)^3)$$

opérations binaires, où $M(D)$ est la complexité de la multiplication de deux entiers de taille D .

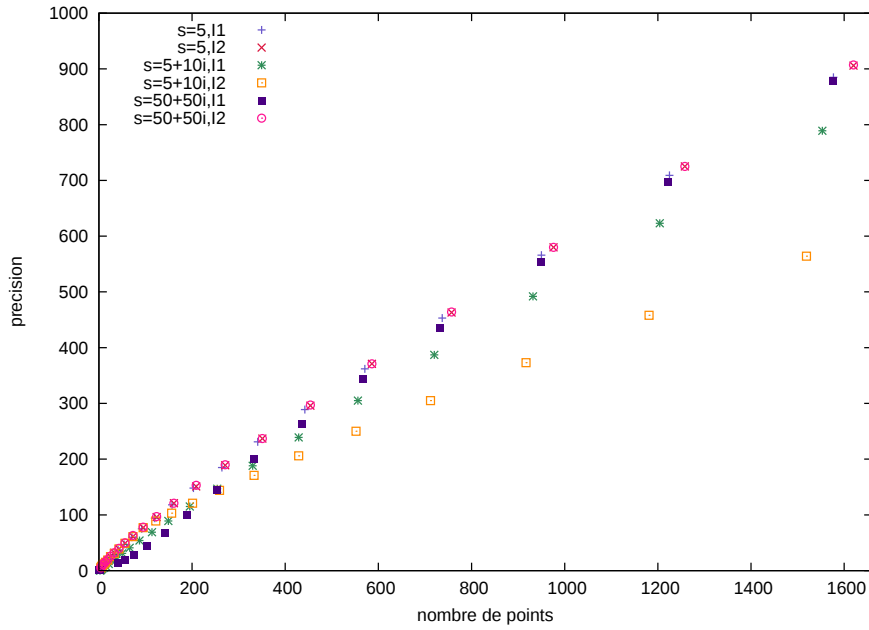


FIG. 2.17: convergence pour la fonction d'erreur.

Démonstration : Puisque les racines de P sont simples, on peut supposer que les racines de Q évitent un rectangle R autour du segment $]a, b[$. On se trouve donc exactement dans les hypothèses du théorème 2.11 pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, et une période se calcule en $n = O(D \log D)$ étapes dominées par l'évaluation d'une exponentielle en précision D , qui est de complexité $M(D) \log(D)^2$ [FHL⁺07].

Ainsi, la complexité du calcul est de $O(DM(D) \log(D)^3)$. □

4.3.1 Comparaisons

Pour les variétés hyperelliptiques de genre 1 et 2, la moyenne arithmético-géométrique et l'algorithme de Richelot [BM88] (restreint au cadre de racines réelles) donnent chacun un algorithme de complexité quasi-linéaire déterminant ces périodes.

Notre algorithme ne soutient évidemment pas la comparaison avec ces méthodes, mais elles permettent de valider son implantation.

Pour la courbe elliptique $y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)$ en précision de 100 chiffres, on a par exemple en comparant l'agm, l'algorithme décrit dans ces pages, et l'implantation générique de PARI :

```
gp > compare([1,2,3])
temps agm : 1ms.
tau=7.91 e-1
M1=1.00 e0
M2=2.24 e0
h=1.93 e-2
npoints=301
temps integration : 22ms.
erreur : 4.060706939705038757 E-115
temps pari intnum : 110ms.
erreur : 4.8623536692370044288214183751344356294 E-69
time = 134 ms.
%3419 = 2.6220575542921198104648395898911194136827...
```

tandis que si l'on place une singularité très proche du segment d'intégration

```

gp > \p100
      realprecision = 115 significant digits (100 digits displayed)
gp > compare([1,3,2+I/100])
      temps agm : 0ms.
      tau=2.64 e-3
      M1=1.00 e0
      M2=2.24 e1
      h=6.41 e-5
      npoints=90255
      temps integration : 8,588ms.
      erreur : 4.826657786206901693 E-111 - 4.826860821553886945 E-111*I
      temps pari intnum : 133ms.
      erreur : -1.68646530657685144... E-6 + 1.68646530657685144... E-6*I

```

Ce dernier cas illustre la pertinence des bornes établies, mais concrètement dans un tel cas l'algorithme serait considérablement amélioré en réalisant un décalage du contour d'intégration selon les principes de la section 3.5.

Sommaire

1	Calcul de fonctions L	53
2	Stratégies proposées	57
3	Majoration de G_v	63
4	Sommes de Riemann	72
5	Méthode double-exponentielle	76
6	Double-exponentielle et facteur gaussien	90
7	Calcul des dérivées	92

1 Calcul de fonctions L

On considère une fonction L donnée par une série de Dirichlet

$$L(s) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n^s}$$

de poids r , de conducteur q , de facteur gamma $\gamma(s) = \prod_{i=1}^r \Gamma(\frac{\mu_i + s}{2})$, $\text{Re}(\mu_i) \geq 0$, de sorte que la fonction complétée

$$\Lambda(s) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \gamma(s) L(s) \quad (1.1)$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ne possède qu'un nombre fini de pôles ρ_i de résidus r_i . Notons $Q = (\frac{q}{\pi})^{\frac{1}{2}}$, que nous qualifions par la suite de conducteur.

En un point $s = \sigma + i\tau$, la valeur de Λ peut être calculée à l'aide de la formule de Cauchy

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{Q^z \gamma(z) L(z)}{z - s} dz \quad (1.2)$$

où $\mathcal{C}$ est un chemin fermé autour de s ne contenant aucun pôle de Λ .

On peut déformer $\mathcal{C}$ en un chemin constitué de deux droites verticales $\text{Re}(z) = \delta_1, \delta_2$ enserrant tous les pôles de Λ , de sorte qu'en prenant en compte les résidus rencontrés on a l'égalité

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\delta_1) - (\delta_2)} \frac{Q^z \gamma(z) L(z)}{z - s} dz + \sum_i \frac{r_i}{s - \rho_i}. \quad (1.3)$$

Supposons à présent que Λ satisfait à une équation fonctionnelle de la forme

$$\Lambda(s) = \varepsilon \Lambda^*(w - s), \quad (1.4)$$

alors si l'on prend $\delta_1 = w - \delta_2 = \delta$ suffisamment grand, par le changement de variable $z \mapsto w - z$ sur la deuxième intégrale, on obtient

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\delta)} Q^z \gamma(z) \left[\frac{L(z)}{z - s} + \frac{\varepsilon L^*(z)}{z - w + s} \right] dz + \sum_i \frac{r_i}{s - \rho_i}. \quad (1.5)$$

En développant L en série de Dirichlet, on obtient la formule classique

$$\Lambda(s) = \sum_{n \geq 0} a_n G(s, n/Q) + \varepsilon a_n^* G(w - s, n/Q) + \sum_i \frac{r_i}{s - \rho_i}, \quad (1.6)$$

où G est la transformée de Mellin inverse

$$G(s, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta+i\mathbb{R}} \gamma(z) \frac{x^{-z}}{z-s} dz. \quad (1.7)$$

Si l'on dispose en outre d'une condition de croissance des coefficients de la forme

$$|a_k| \leq C_a k^\alpha, \quad k > N_0, \quad (1.8)$$

— ce qui correspond à la convergence absolue de la série de Dirichlet pour $\operatorname{Re}(s) > \alpha + 1$ —, la décroissance exponentielle des termes $G(s, x)$ permet de calculer $\Lambda(s)$.

1.1 Équation fonctionnelle approchée

Tout calcul numérique reposant sur le calcul d'une somme telle que (1.6) ne permet d'atteindre qu'une certaine précision absolue sur le résultat. La décroissance exponentielle de Λ quand la partie imaginaire de s grandit implique qu'aient lieu des compensations et rend nécessaire des augmentations de précision importantes pour ne pas perdre le résultat.

En reprenant une idée introduite par Lagarias et Odlyzko [LO79] et développée par Rubinstein [Rub05b], on peut cependant considérer une fonction Λ modifiée par l'ajout d'un facteur v qui corrige dans une certaine mesure la décroissance exponentielle en l'infini, sans toutefois ôter l'intégrabilité et la validité des raisonnements précédents, modulo le fait que v introduit une dissymétrie vis-à-vis de l'équation fonctionnelle.

On calcule dans ce cas la somme

$$\Lambda(s)v(s) = \sum_{n \geq 0} a_n G_v(s, n/Q) + \varepsilon a_n^* G_v^*(w - s, n/Q) + \sum_i \frac{r_i v(\rho_i)}{s - \rho_i}, \quad (1.9)$$

où G_v est la transformée de Mellin inverse

$$G_v(s, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\delta)} \gamma(z) v(z) \frac{x^{-z}}{z-s} dz \quad (1.10)$$

et G_v^* vaut

$$G_v^*(s, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\delta)} \gamma(z) v(w-z) \frac{x^{-z}}{z-s} dz. \quad (1.11)$$

1.1.1 Exponentielle verticale

Le prototype des facteurs de lissage consiste à poser

$$v(z) = e^{-ir \frac{\pi}{4} \eta z} \quad (1.12)$$

pour une certain facteur de correction $\eta < 1$. Dans ce cas, on note

$$\beta = \frac{\pi}{2}(1 - \eta) \in]0, \frac{\pi}{2}] \quad (1.13)$$

le coefficient de décroissance de chaque facteur gamma corrigé, de sorte que la décroissance verticale de Λ soit d'ordre $\frac{\pi}{2}\beta \operatorname{Im}(z)$. Si β est proche de 0, il n'y a presque plus de décroissance verticale de la fonction L approchée, et les termes $G_v(s, x)$ décroissent très peu en x . À la limite $\beta = 0$, l'intégrale est divergente. Si $\beta = \frac{\pi}{2}$, la décroissance est maximale, mais la précision requise augmente d'autant.

Il convient donc de choisir une valeur de β en fonction de la valeur s à calculer. Booker [Boo06] la détermine par exemple de manière empirique, nous donnerons un critère dans le lemme 2.1.

1.1.2 Enveloppe gaussienne

L'idée de Rubinstein [Rub05b] est d'introduire en outre une enveloppe gaussienne centrée verticalement en τ :

$$e^{-A(t-\tau)^2} = e^{A(z-s+\sigma-\delta)^2} \quad (1.14)$$

qui prend le pas sur la décroissance du facteur gamma et permet de réaliser une intégrale locale au voisinage de s . Nous verrons qu'elle améliore considérablement la complexité des calculs.

Ce facteur gaussien a en effet deux effets : d'un côté il améliore l'intégrabilité verticale et permet de prendre de grandes valeurs de correction η sans perdre totalement la décroissance des termes G_v .

D'un autre côté ce facteur introduit une nouvelle source de croissance lorsqu'on décale vers la droite, de la forme $A\delta^2$, qui diminue la décroissance des fonctions G_v .

Nous verrons que la combinaison de ces deux effets rend nécessaire de prendre des valeurs de A assez faibles, de l'ordre de l'inverse de la précision voulue, auquel cas on retrouve les deux avantages d'une meilleure décroissance de G_v en fonction de x , et d'une meilleure intégrabilité verticale de ces fonctions.

1.2 Somme des résidus

Le moyen le plus direct de calculer les fonctions G_v est de sommer les résidus obtenus par décalage de la droite (δ) vers $-\infty$.

Par exemple, dans le cas de la fonction ζ de Riemann, c'est-à-dire pour $\gamma(z) = \Gamma(z/2)$, on obtient la formule

$$G_v(s, x) = - \sum_{m \geq 0} \frac{2(-x^2)^m v(-2m)}{m!(2m+s)} + \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) x^{-s} v(s).$$

Ici, le facteur v peut être la correction de croissance (1.12), ce qui donne un terme oscillant, mais il ne peut comporter de gaussienne (1.14) qui rendrait la série divergente.

Comme dans le cas de la série exponentielle pour un argument négatif, au sein de cette somme ont lieu des compensations phénoménales, puisque des termes d'amplitude e^{x^2} donnent un résultat de l'ordre de e^{-x^2} .

Dans un cadre légèrement différent puisqu'il s'intéresse au calcul de transformées de Fourier de fonctions L, Booker emploie cette méthode avec un facteur de lissage de la forme (1.12). Dokchitser [Dok04] ne réalise la sommation que dans les cas où x reste petit, et opte sinon pour un développement en fractions continues, malheureusement la convergence de ce procédé n'est pas établie rigoureusement.

1.3 Intégration numérique

C'est pour éviter l'augmentation de précision liée à ce calcul que nous calculons G_v à l'aide d'une méthode d'intégration numérique, qui permet de ne sommer que des termes d'amplitude raisonnable, en restant au voisinage de la droite verticale (δ) .

1.3.1 Restriction

Nous faisons ici l'hypothèse que les constantes μ_i sont toutes réelles positives. Cette restriction ne permet pas d'aborder toute la variété des fonctions L : elle n'est due qu'aux estimations que nous avons faites sur la fonction gamma dans l'annexe B.1, et que nous utilisons dans le cadre de l'intégration double-exponentielle. Des estimations plus générales libéreraient l'ensemble des calculs effectués ici de cette limitation.

1.3.2 Notations

Précisions On note D_{res} la précision désirée sur le résultat $L(s)$. En raison de la décroissance de Λ , et en fonction du facteur de lissage choisi, cela se traduit par un calcul de $\Lambda(s)v(s)$ avec une précision absolue D_{abs} ; enfin l'amplitude des termes rencontrés au cours du calcul impose une précision de calcul D_{calc} .

Par commodité dans les formules, toutes ces précisions sont exprimées sur la base de l'exponentielle naturelle.

Fonctions Notons

$$f(z) = \gamma(z) \frac{x^{-z}v(z)}{z-s} = \prod_{i=1}^r \Gamma\left(\frac{\mu_i + z}{2}\right) \frac{x^{-z}v(z)}{z-s}$$

la fonction à intégrer sur une droite verticale d'abscisse δ .

Selon le changement de variable φ adopté pour obtenir une fonction définie sur $\mathbb{R}$ on note

$$g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Pour une méthode des trapèzes simples, on pose¹

$$g(t) = f(\delta + it);$$

tandis que pour la méthode double-exponentielle on notera

$$g_\theta(t) = f(\delta + i \sinh(t + i\theta)) \cosh(t + i\theta).$$

Paramètres En fonction du facteur de correction v apporté à l'équation fonctionnelle, on note

$$\beta = \frac{\pi}{2}(1 - \eta).$$

β est le facteur de décroissance verticale de chaque facteur gamma corrigé.

1.3.3 Méthode des trapèzes

Selon la théorie développée dans le chapitre précédent, une intégration numérique rigoureuse est obtenue en écrivant la formule de Poisson sur l'intégrande g :

$$\left| h \sum_{|kh| \leq t_{\max}} g(kh) - \int_{\mathbb{R}} g \right| \leq h \sum_{|kh| > t_{\max}} |g(kh)| + \sum_{k \neq 0} \left| \hat{g}\left(\frac{k}{h}\right) \right|.$$

Pour obtenir une erreur démontrée d'ordre $e^{-D_{\text{res}}}$, on se contente de choisir une borne de troncature $t_{\max}$ et un pas h tels que les deux termes du membre de droite rentrent dans l'erreur.

1.3.4 Convergence

La convergence du procédé d'intégration numérique adopté dépend de trois paramètres que l'on fixe en fonction du comportement de l'intégrande. De manière très schématique :

- il faut choisir un contour d'intégration adapté. L'analyse complexe invite à choisir un chemin de plus grande pente, sur lequel le module de l'intégrande est décroissant. Le choix d'un tel chemin uniforme en la variable x est difficile.
- le pas d'intégration h dépend de la largeur de la zone sur laquelle l'intégrande reste bornée — avec une norme raisonnable en terme des données du problème — autour du chemin d'intégration.
- la longueur d'intégration $t_{\max}$, au-delà de laquelle l'intégrande ne contribue plus au résultat, dépend de la vitesse de décroissance de l'intégrande.

¹on «oublie» donc la constante i du changement de variable, laquelle disparaît simplement dans toutes les formules.

2 Stratégies proposées

Pour choisir au mieux l'intégration, il convient donc d'examiner le comportement de l'intégrande dans le plan complexe. On néglige ici la contribution de nature polynomiale du quotient par $z - s$, et on exprime uniquement les termes asymptotiques dominant la fonction

$$\log \left| \gamma(z) v(z) x^{-z} \right|, \text{ où l'on pose } z = \delta + it.$$

- Les variations horizontales sont de la forme

$$-\delta \log x + r\delta \ln \delta + A\delta^2;$$

- les variations verticales sont de la forme

$$r\delta \log(\delta + t) - \beta r t - A(t - \tau)^2.$$

En tirant partie de la souplesse de l'équation fonctionnelle approchée d'une part, de décalages de contour et changements de variable d'autre part, on peut imaginer divers schémas d'intégration.

2.1 Sans changement de variable

Cela revient à considérer un pas d'intégration régulier. L'intérêt de cette méthode est que l'on dispose d'une large bande d'holomorphic autour de la droite d'intégration, ce qui permet de prendre un pas d'intégration assez grand. L'inconvénient est que l'intégrande a une décroissance relativement lente, et qu'il faut tronquer plus loin.

À ce stade, Rubinstein tire à nouveau parti de la souplesse dans le choix du facteur de lissage pour introduire le facteur gaussien (1.14) centré en $\tau = \text{Im}(s)$.

2.2 Changement de variable exponentiel

Ce changement de variable $t \mapsto \sinh(t)$ consiste à tasser le plan autour de l'origine. Il présente l'avantage de diminuer la valeur de troncature $t_{\max}$ de manière logarithmique. L'inconvénient est que la zone d'holomorphic s'en trouve réduite, et que le pas d'intégration doit se trouver lui aussi réduit. De plus, selon la théorie double-exponentielle exposée au chapitre précédent, le mauvais comportement du facteur gamma à droite de la droite d'intégration exclut l'application des théorèmes généraux et un calcul de complexité quasi-linéaire en $O(D \log D)$. On obtient cependant par des estimations spécifiques un complexité d'ordre $O(D(\log D)^2)$ qui rend compte de l'excellente convergence observée en pratique.

2.3 Décalage de contour

Puisque les fonctions gamma ont une décroissance excellente sur la partie gauche du plan complexe, on réalise en outre un décalage de contour $t \mapsto t + i\theta$, avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ de telle manière qu'on soit ramené à intégrer la fonction f sur l'hyperbole $\mathcal{H}_\theta$ décrite par les $\delta + i \sinh(t + i\theta)$, $t \in \mathbb{R}$ (cf. figure 3.1). Ce décalage permet surtout d'estimer beaucoup plus simplement la décroissance des transformées de Fourier.

L'inconvénient que présente ce décalage du contour est que le facteur x^{-z} de la transformation de Mellin a une croissance exponentielle sur les droites horizontales.

Ainsi, si $x > 1$, en un point $z = \delta + i\rho e^{i\theta}$ il donne une contribution d'ordre $\rho \sin \theta \log x$.

Avec une décroissance de Γ d'ordre

$$-\sin \theta \rho \log \rho - \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos(\theta) \rho + \rho \sin \theta$$

l'intégrande aura d'abord une croissance exponentielle jusqu'à des modules d'ordre $\log \rho = \log x^{\frac{2}{r}}$.

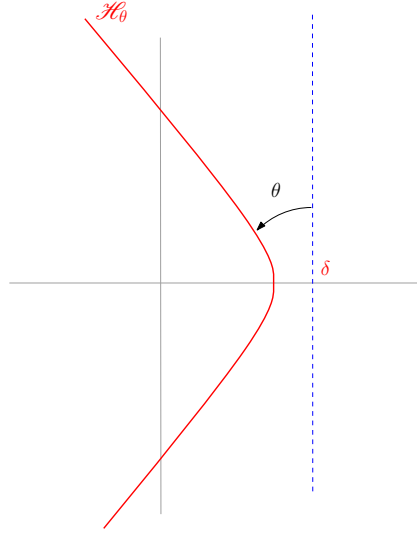


FIG. 3.1: chemin d'intégration et décalage.

Ceci rend nécessaire d'augmenter la précision, ou bien de rester en dehors de la zone de croissance définie par

$$\sin \theta \rho \log \rho + \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos(\theta) \rho \geq \rho \sin \theta (1 + \log x^{\frac{2}{r}})$$

soit

$$\rho(\theta) \geq \frac{ex^{\frac{2}{r}}}{e^{\frac{\pi/2+\theta}{\tan \theta}}}$$

2.4 Contour parabolique

On peut rester en dehors de la zone précédente en parcourant une parabole : avec $X = \rho \cos \theta$ et $Y = \rho \sin \theta$, on a

$$\frac{Y}{X^2} = \frac{\tan \theta e^{\frac{\beta+\theta}{\tan \theta}}}{\cos \theta ex^{\frac{2}{r}}} \geq \frac{\tan \theta e^{\frac{\beta}{\tan \theta}}}{ex^{\frac{2}{r}}}$$

qui est minimal en $\tan \theta = \beta$.

Ainsi l'intégrande ne subit aucune croissance si $Y \leq \frac{e\beta}{ex^{\frac{2}{r}}} X^2$, c'est-à-dire si l'on parcourt le contour défini par

$$z(t) = \delta + it - \frac{\beta}{x^{\frac{2}{r}}} t^2.$$

Cette méthode semble efficace en pratique, mais sur le plan théorique la complexité est de l'ordre de celle obtenue avec un décalage simple et nous n'avons pas effectué les calculs en détail.

2.5 Complexité

On considère le calcul à précision relative D_{res} d'une fonction L au point s . La complexité s'exprime en terme des données suivantes :

- le degré r ;
- le conducteur (arithmétique) Q ;
- la partie imaginaire τ du point s ;
- la précision D_{res} du résultat.

La méthode de calcul de $L(s)$ par intégration numérique fait intervenir les quatre paramètres principaux suivants :

- la précision D_{calc} adoptée pour le calcul (en tenant compte des compensations) ;
- la taille N de la somme de Dirichlet (1.9) ;
- la longueur t_{max} de l'intervalle d'intégration ;
- le pas d'intégration h , dont on note X l'inverse.

Si l'on note $z_l = \varphi(lh)$ le l -ième point d'intégration, et en supposant que $(a_n) = (a_n^*)$, on effectue le calcul de $\Lambda(s)$ sous la forme suivante², qui correspond à une inversion entre la somme finie de termes G_v et l'intégration numérique :

$$h \sum_{l=-Xt_{\text{max}}}^{Xt_{\text{max}}} \varphi'(lh) \gamma(z_l) \left[\frac{v(z_l)}{z_l - s} + \varepsilon \frac{v(w - z_l)}{z_l - w + s} \right] \left[\sum_{k=1}^n a_k \exp(z_l \log(k/Q)) \right] + \sum_i \frac{r_i}{s - \rho_i}. \quad (2.1)$$

En supposant donnés les coefficients de Dirichlet a_n , la complexité du calcul est de

- $2rXt_{\text{max}}$ évaluations de la fonction gamma à une précision D_{calc} ;
- $Nt_{\text{max}}/h = NXt_{\text{max}}$ évaluations d'exponentielle en précision D_{calc} .

Le second terme est prépondérant, et c'est lui que nous définissons comme le nombre d'évaluations nécessaire au calcul de $L(s)$. D'un point de vue binaire, on peut considérer que la complexité de l'exponentielle est d'ordre $D_{\text{calc}} \log(D_{\text{calc}})^3$ [FHL⁺07], ce qui nous donne une mesure de la complexité globale du calcul. Les algorithmes présentés par la suite tentent de minimiser l'augmentation de précision du calcul. En considérant la valeur maximale que peut prendre une somme intermédiaire, nous adoptons une précision

$$D_{\text{calc}} = D_{\text{abs}} + \log(M) \log(Xt_{\text{max}}), \quad (2.2)$$

où M est un majorant des termes sommés dans (2.1).

En ce qui concerne N , le principe de sommation induit une dépendance du type

$$N \approx Q \sqrt{D_{\text{abs}}}^r.$$

C'est là le terme principal de la complexité asymptotique, qui est inhérent à cette méthode de calcul.

La méthode d'intégration fournit quant à elle un nombre de points d'évaluation sous forme du quotient t_{max}/h .

On a classiquement $t_{\text{max}} = O(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta})$ et $h \approx \frac{1}{D_{\text{abs}}}$. Le principe de facteur de lissage gaussien de Rubinstein permet de supprimer la dépendance de t_{max} en β . La méthode introduite ici permet d'obtenir plutôt $t_{\text{max}} = O(\log D_{\text{abs}})$, mais au prix d'une diminution de h et de moins bonnes constantes.

Le présent travail repose entièrement sur ce principe d'équation fonctionnelle approchée et n'améliore pas la complexité asymptotique du point de vue de la dépendance en le conducteur analytique. En revanche, l'introduction d'une méthode d'intégration double exponentielle permet d'obtenir une complexité asymptotique meilleure du point de vue de la dépendance en la précision.

Ce travail fournit surtout une explicitation de toutes les bornes qui permet de garantir le résultat obtenu, et qui démontre la complexité des algorithmes étudiés.

2.6 Évaluation

Dressons un bilan comparatif des paramètres employés selon les stratégies évoquées précédemment.

Pour un calcul de $L(\sigma + i\tau)$ à précision relative D_{res} , on peut dresser la table 3.1. Elle donne la dépendance de chacun des paramètres en les données du problème, en ne conservant que les termes principaux.

²en fonction du chemin choisi et de sa proximité avec s il peut être nécessaire d'ajouter un nombre fini de termes dûs au pôle en s .

Pour simplifier le tableau, on a omis de mentionner dans les mesures de complexité binaire le terme $(\log D_{\text{abs}})^3$ commun à toutes les stratégies, et le terme logarithmique d'augmentation de précision $\log(M) \log(Xt_{\text{max}})$ commun à toutes les valeurs D_{calc} .

Dans le cas où l'on s'intéresse à de grandes parties imaginaires, le choix de β et la complexité résultante sont déterminés à l'aide du lemme 2.1, en négligeant la contribution des termes logarithmiques.

Les sections suivantes fournissent des explications de chacun de ces paramètres. Seule la dernière colonne doit être considérée comme heuristique, nous nous bornerons à justifier de telles valeurs des paramètres sans les établir rigoureusement.

Nous pouvons remarquer les points suivants :

- le facteur de lissage gaussien permet de diminuer la complexité en la partie imaginaire τ , via le procédé d'intégration ;
- le changement de variable en $\sinh$ permet de baisser la complexité en la précision.

<i>enveloppe gaussienne</i>	sans			avec	
<i>changement de variable</i>	sans	$\sinh(t)$	$\sinh(t + i\theta)$	sans	$\sinh(t)$
D_{abs}		$D_{\text{res}} + \frac{\beta r \tau}{2}$			$D_{\text{res}} + \frac{\beta r \tau}{2}$
$x_{\text{max}}^{\frac{2}{r}}$		$\frac{D_{\text{abs}}}{\beta}$			$\frac{r e^{\beta}}{8 \beta A} \exp(\frac{8}{r} \sqrt{A D_{\text{abs}}})$
A		$\star$			$\frac{r^2}{2 D_{\text{abs}}}$
N		$Q \left(\frac{D_{\text{abs}}}{r \beta} \right)^{\frac{2}{r}}$			$Q \left(\frac{D_{\text{abs}}}{r \beta} \right)^{\frac{2}{r}}$
$X = \frac{1}{h}$	$\frac{D_{\text{abs}}}{2\pi(\delta - \delta')}$	$\frac{D_{\text{abs}}}{2\pi\beta} \log(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta})$	$\frac{D_{\text{abs}}}{2\pi\theta}$	$\frac{D_{\text{abs}}}{2\pi(\delta - \delta')}$	$\frac{D_{\text{abs}}}{2\pi\theta}$
t_{max}	$\frac{2D_{\text{abs}}}{\beta r}$	$\log(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta})$	$\log(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta})$	$\sqrt{\frac{D_{\text{abs}}}{A}} = D_{\text{abs}}$	$\log(D_{\text{abs}})$
θ	$\star$	$\star$	$\frac{\beta}{2 \log(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta})}$	$\star$	$\sqrt{\frac{D_{\text{abs}} \log D_{\text{abs}}}{r \tau}}$
<i>complexité</i>	$Q D_{\text{abs}}^{3+\frac{r}{2}} \beta^{-1-\frac{r}{2}}$	$Q D_{\text{abs}}^{2+\frac{r}{2}} \beta^{-1-\frac{r}{2}} \log(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta})^2$		$Q D_{\text{abs}}^{3+\frac{r}{2}} \beta^{-\frac{r}{2}} \log(D_{\text{abs}})^3$	$Q D_{\text{abs}}^{1+\frac{r+1}{2}} \beta^{-\frac{r}{2}} \tau^{\frac{1}{2}} (\log D_{\text{abs}})^{\frac{1}{2}}$
β pour $\tau \gg D_{\text{res}}$	$\frac{(r+2)D_{\text{res}}}{2r\tau}$	$\frac{(r+2)D_{\text{res}}}{r\tau}$		$\frac{D_{\text{res}}}{3\tau}$	$\frac{D_{\text{res}}}{3\tau}$
<i>complexité</i> $\tau \gg D_{\text{res}}$	$Q \tau^{1+\frac{r}{2}} D_{\text{res}}^3$	$Q \tau^{1+\frac{r}{2}} (\log \tau)^2 D_{\text{res}}$		$Q \tau^{\frac{r}{2}} D_{\text{res}}^3$	$Q \tau^{\frac{r+1}{2}} D_{\text{res}} (D_{\text{res}} \log D_{\text{res}})^{\frac{1}{2}}$
D_{calc}	$D_{\text{res}}(\frac{3}{2} + \frac{r}{4})$	$D_{\text{res}}(2 + \frac{r}{2})$		$D_{\text{res}}(1 + \frac{r}{6})$	$D_{\text{res}}(1 + \frac{r}{3})$
référence	4.2	5.12	5.12	4.3	6.2

TAB. 3.1: comportement asymptotique des paramètres et complexité du calcul.

2.7 Précalculs

Les complexités décrites dans le tableau 3.1 concernent l'évaluation d'une valeur de fonction L . Mais les calculs effectués peuvent être réutilisés dans une large partie pour l'évaluation d'autres valeurs de la même fonction L : en effet, la variable s n'apparaît que dans le terme contenant des fractions dans (2.1). Si l'on conserve les coefficients de ces fractions en posant

$$c_l = \varphi'(lh)\gamma(z_l)v(z_l) \left[\sum_{k=1}^n a_k \exp(z_l \log(k/Q)) \right]$$

l'évaluation de L en une valeur s' de partie imaginaire inférieure à $\text{Im}(s)$ se fait à l'aide de la somme

$$h \sum_{l=-X_{t_{\max}}}^{X_{t_{\max}}} \left[\frac{c_l}{z_l - s} + \varepsilon \frac{c'_l}{z_l - w + s} \right] + \sum_i \frac{r_i}{s - \rho_i}.$$

La complexité n'est plus que de $2X_{t_{\max}}$ inversions en précision D_{calc} , ce qui correspond à supprimer les termes de complexité $Q(\tau D_{\text{abs}})^{\frac{r}{2}}$.

2.8 Algorithme

Algorithme 1: calcul d'une valeur de fonction L

Entrées : un complexe $s \in \mathbb{C}$, une précision relative D_{res} sur le résultat

Sorties : un complexe z tel que $\left| \frac{L(s)-z}{L(s)} \right| < \exp(-D_{\text{res}})$

début

calculer la précision absolue du résultat D_{abs} ;
calculer le nombre N de valeurs $G_v(k/Q)$ à sommer ;
choisir un chemin d'intégration et un changement de variable qui le paramètre ;
évaluer l'amplitude des termes et la précision D_{calc} ;
calculer le pas d'intégration h ;
calculer le nombre de points d'intégration n ;
effectuer la somme (2.1) ;

fin

2.9 Précision absolue du calcul

On suppose $\text{Re}(s) = \sigma \geq \frac{1}{2}$, alors

$$|\gamma(s)Q^s| \sim_{\tau \rightarrow \infty} Q^\sigma \prod_{i=1}^r \left(\frac{\mu_i + \sigma + \tau}{2} \right)^{\frac{\mu_i + \sigma - 1}{2}} e^{-\frac{\pi r \tau}{4}}. \quad (2.3)$$

Donc pour avoir une précision absolue D_{res} sur le calcul de $L(s)$, on doit adopter une précision absolue

$$D_{\text{abs}} = D_{\text{res}} + \frac{\pi r \tau}{4} - \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i + \sigma - 1}{2} \log\left(\frac{\mu_i + \sigma + \tau}{2}\right) - \sigma \log Q \sim D_{\text{res}} + \frac{\pi r \tau}{4} - \sigma \log Q$$

sur le calcul de $\Lambda(s)$.

Dans le cas de l'ajout du facteur v , on réalise une augmentation de précision de la forme

$$D_{\text{abs}} = D_{\text{res}} + \frac{\beta r}{2} \tau - \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i + \sigma - 1}{2} \log\left(\frac{\mu_i + \sigma + \tau}{2}\right) - \sigma \log Q \sim D_{\text{res}} + \frac{\beta r \tau}{2} - \sigma \log Q. \quad (2.4)$$

2.10 Choix de β , complexité

Pour choisir le paramètre de correction verticale η , on emploiera le lemme suivant :

Lemme 2.1

Soient $a > b > 0$. Supposons que l'évaluation de $L(s)$ se fasse avec une complexité binaire

$$C \frac{D_{abs}^a}{\beta^b},$$

où $D_{abs} = D_{res} + \frac{\beta r}{2} \tau$. Alors pour $\tau \gg D_{res}$, on atteint le minimum de cette expression en posant

$$\beta = \frac{2bD_{res}}{(a-b)r\tau}; \quad (2.5)$$

et dans ce cas on a une complexité de

$$CD_{res}^{a-b} \tau^b \left(1 + \frac{b}{a-b}\right)^a \left(\frac{r(a-b)}{2b}\right)^b \quad (2.6)$$

et la précision vaut $D_{abs} = D_{res}(1 + \frac{b}{a-b})$.

Démonstration : On minimise en annulant la dérivée logarithmique en β avec $D_{abs} = D_{res} + \frac{\beta r}{2} \tau$, soit pour $\frac{ar\tau}{2(D_{res} + \frac{\beta r}{2} \tau)} = \frac{b}{\beta}$. □

3 Majoration de G_v

Un aspect critique de la complexité réside dans la troncature de la sommes (1.9). Pour cela une estimation prouvée de la décroissance des termes $G_v(s, x)$ est cruciale.

On estime la décroissance de

$$2i\pi G_v(s, x) = \int_{(\delta)} \gamma(z) v(z) \frac{x^{-z}}{z-s} dz$$

en reprenant de manière détaillée des calculs effectués par Booker [Boo06] dans un cadre similaire. L'intégrande est le produit d'une enveloppe intégrable $\gamma(z)v(z)$ par un facteur oscillant x^{-z} qui décroît à mesure qu'on décale le chemin d'intégration vers la droite. Inversement, le facteur gamma croît exponentiellement vers la droite en δ^δ , tout en restant intégrable sur les droites verticales où il a une décroissance exponentielle. On obtient la majoration cherchée en optimisant la valeur du décalage δ .

En présence du facteur $v(z) = e^{i\frac{r\eta z}{2}}$, on a toujours la même croissance à droite, tandis que la croissance verticale de $\gamma(z)v(z)$ devient beaucoup plus faible.

Si l'on ajoute enfin une enveloppe gaussienne $e^{A(z-s)^2}$, on obtient à nouveau une décroissance satisfaisante sur les droites verticales au prix d'une croissance supplémentaire d'ordre $e^{A\delta^2}$ sur l'axe réel.

3.1 Majorations des intégrales verticales

Nous démontrons deux estimations, selon que l'on introduit ou non le facteur de lissage gaussien. Chacune dérive de l'estimation verticale

$$|\Gamma(\delta + it)| \leq \sqrt{2\pi}(\delta + |t|)^{\delta - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi|t|}{2}}, \quad \delta \geq 1/2, t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

que l'on trouve dans [Boo06].

Commençons par réduire le problème à la moyenne obtenue selon chacun des facteurs gamma

Lemme 3.1

Pour tout $\delta > \operatorname{Re}(s)$ (et $\delta \geq 1$), on a

$$|G_v(s, x)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}^r x^{-\delta} e^{A\delta^2}}{\delta - \operatorname{Re}(s)} \left(\prod_{i=1}^r I(\delta + \mu_i) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (3.2)$$

où

$$I(\delta) = \int_0^\infty \left(\frac{\delta + t}{2} \right)^{r\frac{\delta-1}{2}} e^{\frac{r\beta t}{2}} e^{-A(t-\tau)^2} dt. \quad (3.3)$$

Démonstration : On écrit

$$G_v(s, x) = \int_{(\delta)} \gamma(z) \frac{x^{-z} v(z)}{z - s} dz$$

avec δ assez grand et

$$\begin{cases} \gamma(z) = \prod_{i=1}^r \Gamma\left(\frac{\mu_i + z}{2}\right) \\ v(z) = e^{-i\frac{\pi}{4}\eta z + A(z-s)^2}. \end{cases}$$

Alors d'après l'inégalité de Hölder,

$$|G(s, x)| \leq \frac{x^{-\delta}}{\delta - \operatorname{Re}(s)} \prod_{i=1}^r \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \Gamma\left(\frac{\delta + \mu_i + it}{2}\right) \right|^r e^{\frac{\pi}{4}\eta t} e^{A\delta^2 - A(t-\tau)^2} dt \right)^{\frac{1}{r}}$$

ce qui donne le résultat en appliquant la majoration (3.1) à la puissance de Γ . $\square$

Il reste à estimer la croissance horizontale des intégrales $I(\delta)$ pour déterminer une bonne majoration de G_v .

3.2 Sans facteur de lissage gaussien

On définit pour toute cette section les constantes

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i - 1 + \frac{1}{r} \quad (3.4)$$

$$\gamma = \frac{2}{r} \quad (3.5)$$

$$\lambda = \alpha + \frac{1}{r} \sum \tilde{\mu}_i + 1 \quad (3.6)$$

$$\kappa = \frac{r\beta}{e^\beta}. \quad (3.7)$$

Lemme 3.2

Supposons que $A = 0$, alors pour tout δ tel que $\delta + \mu_i \geq 1$, on a

$$I(\delta + \mu_i) \leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{r\beta}} e^{\frac{r}{2}\beta(1-\frac{1}{r})} \left(1 + \frac{\tilde{\mu}_i}{\delta} \right)^{\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} \left(\frac{\delta}{\gamma\kappa} \right)^{\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} \left(\frac{\delta}{\gamma e\kappa} \right)^{\frac{\delta}{\gamma}}. \quad (3.8)$$

Démonstration : Traitons d'abord le cas $\mu_i = 0$:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{r\beta}{2}\delta} I(\delta) &= \int_0^\infty \left(\frac{\delta + t}{2} \right)^{r\frac{\delta-1}{2}} e^{-\frac{r\beta}{2}(t+\delta)} dt \\ &= \frac{2}{(r\beta)^{1+r\frac{\delta-1}{2}}} \int_{\frac{r\beta\delta}{2}}^\infty u^{r\frac{\delta-1}{2}} e^{-u} du, \text{ en posant } u = \frac{r\beta}{2}(t+\delta) \\ &= \frac{2}{(r\beta)^{1+r\frac{\delta-1}{2}}} \Gamma_{\text{inc}}\left(1 + r\frac{\delta-1}{2}, \frac{r\beta\delta}{2}\right). \end{aligned}$$

On majore

$$\Gamma_{\text{inc}}(1 + \alpha, \frac{r\beta\delta}{2}) \leq \Gamma(1 + \alpha) \leq \sqrt{2\pi} \left(\frac{\alpha + 1/2}{e} \right)^{\alpha + \frac{1}{2}},$$

où $\alpha = r\frac{\delta-1}{2} > 0$ par hypothèse.

On a donc

$$I(\delta) \leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{(r\beta)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{r\beta}{2}\delta} \left(\frac{r\frac{\delta-1}{2} + \frac{1}{2}}{er\beta} \right)^{r\frac{\delta-1}{2} + \frac{1}{2}}.$$

Pour un décalage μ_i quelconque on extrait le terme principal en écrivant

$$\begin{aligned} I(\delta + \mu_i) &\leq \frac{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r\beta}} e^{\frac{r}{2}\beta(\delta + \mu_i)} \left(\frac{\frac{r}{2}(\delta + \tilde{\mu}_i)}{er\beta} \right)^{\frac{r}{2}(\delta + \tilde{\mu}_i)} \\ &\leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{r\beta}} e^{\frac{r}{2}\beta(\mu_i - \tilde{\mu}_i)} \left(1 + \frac{\tilde{\mu}_i}{\delta} \right)^{\frac{r}{2}(\delta + \tilde{\mu}_i)} \left(\frac{r\delta e^{\beta}}{2er\beta} \right)^{\frac{r}{2}(\delta + \tilde{\mu}_i)} \\ &\leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{r\beta}} e^{\frac{r}{2}\beta(1 - \frac{1}{r})} \left(1 + \frac{\tilde{\mu}_i}{\delta} \right)^{\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} \left(\frac{\delta}{\gamma\kappa} \right)^{\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} \left(\frac{\delta}{\gamma e\kappa} \right)^{\frac{\delta}{\gamma}}, \end{aligned}$$

avec la simplification $\left(1 + \frac{\tilde{\mu}_i}{\delta} \right)^{\frac{r}{2}\delta} e^{-\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} \leq 1$. □

Proposition 3.3

Supposons que $A = 0$, alors pour tout x vérifiant $x^\gamma > \frac{\max(1 - \mu_i, \text{Re}(s))}{\gamma\kappa}$, on a

$$|G_v(s, x)| \leq C(\delta) x^{\frac{1}{r}} \Sigma \tilde{\mu}_i e^{-\kappa x^\gamma} \quad (3.9)$$

où $\delta = \gamma\kappa x^\gamma$ et

$$C(\delta) = \frac{4(2\pi)^{\frac{r+1}{2}}}{\delta - \text{Re}(s)} \frac{e^{-\frac{r}{2}\beta(1 - \frac{1}{r})}}{\sqrt{r\beta}} \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{\tilde{\mu}_i}{\delta} \right)^{\frac{\tilde{\mu}_i}{2}}. \quad (3.10)$$

Démonstration : Le terme principal commun aux $I(\delta + \mu_i)$ est

$$\left(\frac{\delta}{\gamma e\kappa} \right)^{\frac{\delta}{\gamma}}$$

donc, d'après le lemme 3.1, le terme principal de $\log |G_v(s, x)|$ est $-\delta \log x + \frac{\delta}{\gamma} \log \left(\frac{\delta}{\gamma e\kappa} \right)$ qui est minimal, à x fixé, quand

$$\log x^\gamma = \log \left(\frac{\delta}{\gamma e\kappa} \right) + 1.$$

On pose donc $\delta = \gamma\kappa x^\gamma$. Le terme

$$x^{-\delta} \left(\frac{\delta}{\gamma\kappa} \right)^{\frac{\Sigma \tilde{\mu}_i}{2}} \left(\frac{\delta}{\gamma e\kappa} \right)^{\frac{\delta}{\gamma}}$$

extrait de (3.2) vaut alors

$$x^{\frac{\gamma}{2} \Sigma \tilde{\mu}_i} e^{-\frac{\delta}{\gamma}} = x^{\frac{1}{r} \Sigma \tilde{\mu}_i} e^{-\kappa x^\gamma},$$

et on met les autres dans la constante $C(\delta)$, ce qui démontre l'énoncé. □

3.2.1 Borne N de sommation

En considérant le terme principal, on a donc

$$|G_v(s, x)| \leq e^{-D_{\text{abs}}}$$

pour

$$x_{\max} \approx \left(\frac{D_{\text{abs}}}{\kappa} \right)^{\frac{r}{2}}.$$

De manière plus précise, pour tronquer la somme (1.9), on doit poser $x_{\max} = N/Q$ tel que $\sum_{k>N} |a_k G_v(s, k/Q)| \leq e^{-D_{\text{abs}}}$.

Lemme 3.4

On suppose que la suite (a_n) vérifie l'hypothèse (1.8), et soit N tel que $\kappa(\frac{N}{Q})^\gamma \geq \max(D_{\text{abs}}, \frac{\lambda}{\gamma})$, alors

$$\sum_{k>N} |a_k G_v(s, k/Q)| \leq C_a C(\frac{D_{\text{abs}}}{\gamma}) Q^{\alpha+1} \frac{(N/Q)^\lambda e^{-\kappa(N/Q)^\gamma}}{\gamma \kappa (N/Q)^\gamma + \gamma - \lambda}. \quad (3.11)$$

Démonstration : D'après l'hypothèse faite sur N , $\kappa x^\gamma \geq D_{\text{abs}}$ donc la valeur de $\delta = \gamma \kappa x^\gamma$ fixée dans la proposition précédente vérifie $\delta > \frac{D_{\text{abs}}}{\gamma}$, ce qui permet de majorer les termes de 1.9 sous la forme

$$\begin{aligned} |a_k G_v(s, k/Q)| &\leq C_a k^\alpha C(\frac{D_{\text{abs}}}{\gamma}) (k/Q)^{\frac{1}{\gamma}} \Sigma \tilde{\mu}_i e^{-\kappa(k/Q)^\gamma} \\ &= C_a C(\frac{D_{\text{abs}}}{\gamma}) Q^\alpha (k/Q)^{\lambda-1} e^{-\kappa(k/Q)^\gamma} \end{aligned}$$

où $C(\frac{D_{\text{abs}}}{\gamma})$ est la constante de la proposition 3.3. Puisque l'on suppose $\kappa \gamma (N/Q)^\gamma > \lambda$, ces termes sont décroissants et la majoration par l'intégrale $\int_N^\infty Q^\alpha (t/Q)^{\lambda-1} e^{-\kappa(t/Q)^\gamma} dt = Q^{\alpha+1} \int_{N/Q}^\infty x^{\lambda-1} e^{-\kappa x^\gamma} dx \leq Q^{\alpha+1} \frac{(N/Q)^\lambda e^{-\kappa(N/Q)^\gamma}}{\kappa \gamma (N/Q)^\gamma + \gamma - \lambda}$ (cf. lemme A.2.6) donne le résultat. $\square$

On en déduit immédiatement que pour une précision D_{abs} , la borne de sommation N peut être déterminée de la manière suivante

Proposition 3.5

Si l'on pose $\tilde{D} = D_{\text{abs}} + \log(\frac{r}{2} C Q^{\alpha+1})$, et

$$x_{\max}^\gamma = \frac{\lambda}{\kappa \gamma} L_x \left(\frac{\lambda}{\kappa \gamma} e^{\frac{\gamma \tilde{D}}{\lambda}} \right)$$

alors la valeur $N = \lceil Q x_{\max} \rceil$ vérifie

$$\sum_{k>N} |a_k G_v(s, k/Q)| \leq e^{-D_{\text{abs}}}.$$

De plus, on a l'équivalent pour $D_{\text{abs}} \rightarrow \infty$

$$x_{\max}^\gamma \sim \frac{\tilde{D}}{\kappa} + \frac{\lambda}{\gamma \kappa} \log(\tilde{D}) \quad (3.12)$$

soit

$$N = Q x_{\max} \sim Q \left(\frac{D_{\text{abs}} + (\alpha+1) \log Q}{\kappa} \right)^{\frac{r}{2}}. \quad (3.13)$$

Démonstration : D'après le lemme précédent, en minorant le dénominateur de (3.11) par $\gamma = \frac{2}{r}$, on résout $\frac{r}{2} C Q^{\alpha+1} x_{\max}^\lambda e^{-\kappa x_{\max}^\gamma} < e^{-D_{\text{abs}}}$. Le lemme B.2.2 donne la solution et l'équivalent. $\square$

3.3 Avec lissage gaussien

Les variations horizontales ont désormais un facteur supplémentaire

$$e^{A\delta^2}$$

tandis que les intégrales verticales ont une croissance moindre. On évalue ces dernières de deux manières, en intégrant plutôt selon l'exponentielle $e^{-\beta t}$ ou selon la gaussienne $e^{-A(t-\tau)^2}$.

On note à présent

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i - 1 \quad (3.14)$$

et toujours

$$\lambda = \alpha + \frac{1}{r} \sum \tilde{\mu}_i + 1 \quad (3.15)$$

$$\gamma = \frac{2}{r} \quad (3.16)$$

$$\kappa = \frac{r\beta}{e^\beta}. \quad (3.17)$$

3.3.1 Intégration selon la gaussienne

En prenant un facteur gaussien de paramètre $A > 0$, on peut écrire la majoration suivante :

Lemme 3.6

Si $A > 0$, alors

$$I(\delta + \mu_i) \leq \sqrt{\frac{\pi}{A}} \left(1 + \frac{\tilde{\mu}_i}{\delta}\right)^{\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} e^{\frac{r}{2}\beta} \left(\frac{\delta}{\gamma\kappa}\right)^{\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} \left(\frac{\delta}{\gamma\kappa e}\right)^{\frac{\delta}{\gamma}} \quad (3.18)$$

Démonstration : On intègre selon la gaussienne :

$$I(\delta) \leq \sqrt{\frac{\pi}{A}} \sup_{t \geq 0} \left\{ \left(\frac{\delta+t}{2}\right)^{\frac{r}{2}(\delta-1)} e^{-\frac{r}{2}\beta t} \right\}$$

le supremum est obtenu en $t = \frac{\delta-1}{\beta} - \delta$ et donne

$$I(\delta) \leq \sqrt{\frac{\pi}{A}} \left(\frac{\delta-1}{2\beta}\right)^{\frac{r}{2}(\delta-1)} e^{-\frac{r}{2}(\delta-1-\beta\delta)}.$$

On en déduit le résultat en $\delta + \mu_i$, en extrayant le terme principal de manière similaire à ce qui a été fait au lemme 3.2 :

$$\sqrt{\frac{\pi}{A}} \left(1 + \frac{\tilde{\mu}_i}{\delta}\right)^{\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} e^{\frac{r}{2}\beta} \left(\frac{\delta}{\gamma\kappa}\right)^{\frac{r}{2}\tilde{\mu}_i} \left(\frac{\delta}{\gamma\kappa e}\right)^{\frac{\delta}{\gamma}}.$$

□

À x fixé, on en déduit une majoration de $G_v(s, x)$ en minimisant

$$-\delta \log(x) + A\delta^2 + \frac{\delta}{\gamma} \log\left(\frac{\delta}{\gamma\kappa e}\right)$$

en la solution δ de

$$-\log(x^\gamma) + 2\gamma A\delta + \log\left(\frac{\delta}{\gamma\kappa e}\right) + 1 = 0 \quad (3.19)$$

c'est-à-dire, selon le lemme B.2.1, pour

$$\delta = \frac{1}{2\gamma A} L_w \left(2A\gamma^2 \kappa x^\gamma\right). \quad (3.20)$$

Notons $X = L_w \left(2A\gamma^2 \kappa x^\gamma\right) = 2\gamma A\delta$, de sorte que d'après (3.19) le terme exponentiel vaut

$$-\delta \log(x) + A\delta^2 + \frac{\delta}{\gamma} \log\left(\frac{\delta}{\gamma\kappa e}\right) = -A\delta^2 - \frac{\delta}{\gamma} = -\frac{1}{4\gamma^2 A} X^2 - \frac{1}{2\gamma^2 A} X. \quad (3.21)$$

Choix de A : Le terme principal (3.21) est inférieur à $-D_{\text{abs}}$ pour $X^2 + 2X \geq 4\gamma^2 AD_{\text{abs}}$, soit

$$X = L_w \left(2A\gamma^2 \kappa x^\gamma \right) \geq \sqrt{1 + 4\gamma^2 AD_{\text{abs}}} - 1.$$

En particulier, la condition $|G_\nu(s, x)| \leq e^{-D_{\text{abs}}}$ implique

$$2A\gamma^2 \kappa x^\gamma = Xe^X \geq (\sqrt{1 + 4\gamma^2 AD_{\text{abs}}} - 1)e^{\sqrt{1 + 4\gamma^2 AD_{\text{abs}}} - 1}$$

c'est-à-dire que x croît exponentiellement en AD_{abs} . Pour conserver une valeur de N raisonnable dans la somme (1.9), il est donc nécessaire de choisir A de sorte que AD_{abs} reste borné. Nous posons

$$A = \frac{((\nu + 1)^2 - 1)}{4\gamma^2 D_{\text{abs}}} = \frac{\nu(\nu + 2)}{4\gamma^2 D_{\text{abs}}} \quad (3.22)$$

avec une constante $\nu > 0$ à choisir ultérieurement, de sorte que la condition $-A\delta^2 - \frac{\delta}{\gamma}\delta \leq -D_{\text{abs}}$ impose seulement que $2A\gamma^2 \kappa x^\gamma = Xe^X \geq \nu e^\nu$, soit la condition

$$x^\gamma \geq \frac{2e^\nu D_{\text{abs}}}{(\nu + 2)\kappa} \quad (3.23)$$

qui est polynomiale en D_{abs} .

Ces calculs permettent d'établir la proposition suivante.

Proposition 3.7

Soit $\nu > 0$, et A défini selon (3.22). Alors pour tout x vérifiant (3.23) on a la majoration

$$|G_\nu(s, x)| \leq C_\nu X^{\frac{\sum \tilde{\mu}_i}{2}} e^{-\frac{D_{\text{abs}}}{\nu} X} \quad (3.24)$$

où $X(x)$ est défini par

$$X = L_w \left(2A\gamma^2 \kappa x^\gamma \right) \sim \log \left(\frac{\kappa x^\gamma}{D_{\text{abs}}} \right)$$

et

$$C_\nu = \sqrt{\frac{2}{A}} \frac{(2\pi)^{\frac{r+1}{2}}}{\frac{2\gamma D_{\text{abs}}}{\nu+2} - \text{Re}(s)} \left[\prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{(\nu+2)\tilde{\mu}_i}{2\gamma D_{\text{abs}}} \right)^{\frac{\tilde{\mu}_i}{2}} \right] e^{\frac{r\beta}{2}} \left(\frac{2D_{\text{abs}}}{\nu(\nu+2)\kappa} \right)^{\frac{\sum \tilde{\mu}_i}{2}}. \quad (3.25)$$

Démonstration : D'après les calculs précédents, une fois sortie de (3.2) et (3.18) la constante

$$C(\delta) = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \frac{2\sqrt{2\pi}^r}{\delta - \text{Re}(s)} \left[\prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{\tilde{\mu}_i}{\delta} \right)^{\frac{\tilde{\mu}_i}{2}} \right] e^{\frac{r\beta}{2}}$$

qui dépend faiblement de δ , on s'intéresse à la contribution principale

$$x^{-\delta} e^{A\delta^2} \left(\frac{\delta e^\beta}{2\beta} \right)^{\frac{\sum \tilde{\mu}_i}{2}} e^{\frac{\delta}{\gamma} \log \left(\frac{\delta}{\gamma \kappa e} \right)}.$$

Avec le choix de δ fait en (3.20) et la simplification (3.21), on obtient la majoration

$$|G_\nu(s, x)| \leq C(\delta) \left(\frac{\delta}{\gamma \kappa} \right)^{\frac{\sum \tilde{\mu}_i}{2}} e^{-\frac{X^2 + 2X}{4\gamma^2 A}}.$$

La condition (3.23) imposée sur x assure que $X > \nu$, ce qui permet de majorer $C(\delta)$ par $C(\frac{\nu}{2\gamma A}) = C(\frac{2\gamma D_{\text{abs}}}{\nu+2})$ et d'écrire $\frac{X^2 + 2X}{4\gamma^2 A} \geq \frac{X(\nu+2)}{4\gamma^2 A} = \frac{D_{\text{abs}}}{\nu}$. Enfin le terme $\frac{\delta}{\gamma \kappa}$ vaut $\frac{X}{2A\gamma^2 \kappa} = \frac{2D_{\text{abs}}}{\nu(\nu+2)\kappa} X$, ce qui donne le résultat. $\square$

Enfin, on calcule la borne de sommation N de la manière suivante :

Lemme 3.8

On suppose que la suite (a_n) vérifie l'hypothèse (1.8), et soit N un entier vérifiant $\left(\frac{N}{Q}\right)^\gamma \geq \frac{2e^\nu D_{abs}}{(\nu+2)\kappa}$. Alors en posant les constantes

$$\begin{aligned} a &= \frac{r}{2}\lambda \\ \varepsilon &= \frac{\nu(\alpha+1)}{\gamma D_{abs}} \\ b &= \frac{D_{abs}}{\nu}(1-\varepsilon) \\ C &= C_a C_\nu \frac{r}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) (2A\gamma^2\kappa)^{-\frac{r}{2}(1+\alpha)} \end{aligned}$$

on a la majoration

$$\sum_{k>N} |a_k G_\nu(s, k/Q)| \leq C Q^{1+\alpha} \frac{X(N/Q)^{a+1} e^{-bX(N/Q)}}{b\nu - a}. \quad (3.26)$$

Démonstration : $X(x) = L_w \left(2A\gamma^2\kappa x^\gamma\right)$ est croissant en x . Alors d'après la proposition 3.7, en supposant que $N/Q = x$ vérifie (3.23) on a

$$\begin{aligned} \sum_{k>N} a_k |G_\nu(s, k/Q)| &\leq C_a C_\nu \int_N^\infty t^\alpha X(t/Q)^{\frac{\Sigma \mu_i}{2}} e^{-\frac{D_{abs}}{\nu} X(t/Q)} dt \\ &\leq C_a C_\nu Q^{\alpha+1} \int_{N/Q}^\infty x^\alpha X(x)^{\frac{\Sigma \mu_i}{2}} e^{-\frac{D_{abs}}{\nu} X(x)} dx. \end{aligned}$$

On réalise le changement de variable $X = X(x)$, soit $x = \left(\frac{Xe^X}{2A\gamma^2\kappa}\right)^{\frac{r}{2}}$, et d'après (3.23) l'on minore X par ν , ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{k>N} a_k |G_\nu(s, k/Q)| &\leq C_a C_\nu Q^{\alpha+1} (2A\gamma^2\kappa)^{-\frac{r}{2}(1+\alpha)} \frac{r}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \\ &\quad \int_{X(N/Q)}^\infty X^{\frac{r}{2}(1+\alpha) + \frac{\Sigma \mu_i}{2}} e^{\frac{r}{2}(1+\alpha)X - \frac{D_{abs}}{\nu} X} dX \\ &\leq C Q^{1+\alpha} \int_{X(N/Q)}^\infty X^{\frac{r}{2}\lambda} e^{-\frac{D_{abs}}{\nu}(1-\varepsilon)X} dX \\ &\leq C Q^{1+\alpha} \frac{X(N/Q)^{a+1} e^{-bX(N/Q)}}{bX(N/Q) - a} \\ &\leq C Q^{1+\alpha} \frac{X(N/Q)^{a+1} e^{-bX(N/Q)}}{b\nu - a}. \end{aligned}$$

□

On obtient enfin la borne de sommation suivante :

Proposition 3.9

Aves les définitions précédentes, si l'on pose $\tilde{D} = D_{\text{abs}} + \log(\frac{CQ^{1+\alpha}}{b\nu-a})$, alors en calculant

$$X = \frac{a}{b} L_x \left(\frac{a}{b} e^{\frac{\tilde{D}}{a}} \right)$$

et

$$x_{\max}^\gamma = \frac{X^{1+\frac{a}{b}} e^{\frac{\tilde{D}}{b}}}{2A\gamma^2\kappa},$$

la valeur $N = \lceil Qx_{\max} \rceil$ vérifie

$$\sum_{k>N} |a_k G_\nu(s, k/Q)| \leq e^{-D_{\text{abs}}}.$$

De plus, on a l'équivalent pour $D_{\text{abs}} \rightarrow \infty$

$$x_{\max}^\gamma \approx \frac{2e^\nu \tilde{D}}{(\nu+2)\kappa} \quad (3.27)$$

soit

$$N = Qx_{\max} \approx Q \left(\frac{2e^\nu}{(\nu+2)\kappa} (D_{\text{abs}} + (\alpha+1) \log Q) \right)^{\frac{\gamma}{2}}. \quad (3.28)$$

Démonstration : D'après le lemme précédent, on résout $X^a e^{-bX} = e^{-\tilde{D}}$. Le lemme B.2.2 donne la solution en X . On en déduit l'expression de $x_{\max}$ en inversant la fonction L_w :

$$x_{\max}^\gamma = \frac{X e^X}{2A\gamma^2\kappa} = \frac{X^{1+\frac{a}{b}} e^{\frac{\tilde{D}}{b}}}{2A\gamma^2\kappa} = \frac{2D_{\text{abs}}}{\nu(\nu+2)\kappa} X^{1+\frac{a}{b}} e^{\frac{\tilde{D}}{b}}.$$

En supposant $D_{\text{abs}} \rightarrow \infty$, on a $X \sim \frac{\tilde{D}}{b}$ et $a = o(b)$, donc $x^\gamma \approx \frac{2D_{\text{abs}}}{\nu(\nu+2)\kappa} \chi e^\chi$ avec $\chi = \frac{\tilde{D}}{b} \sim \nu(1 + \frac{\alpha+1}{D_{\text{abs}}} \log Q) \sim \nu$, d'où le résultat. $\square$

3.3.2 Intégration selon l'exponentielle

On peut améliorer l'estimation précédente en intégrant plutôt selon le terme exponentiel.

Lemme 3.10

$$I(\delta + \mu_i) \leq \frac{8}{r\beta} \left(\frac{\delta + \mu_i + \tau}{4} (\sqrt{\chi + 1} + 1) \right)^{\frac{\gamma}{2}(\mu_i - 1)} \left(1 + \frac{\mu_i}{\delta + \tau} \right)^{\frac{r\delta}{2}} e^{\frac{r\delta}{2} \log(\frac{\delta + t(\sqrt{1+\chi} + 1)}{4})} \quad (3.29)$$

où l'on pose $\chi = \frac{r(\delta-1)}{A(\delta+\tau)^2}$.

Démonstration : On intègre la décroissance verticale $e^{-\frac{\beta r t}{4}}$, de sorte que $I(\delta) \leq \frac{8}{r\beta} e^{K(\delta)}$, avec un ordre $K(\delta)$ donné par

$$K(\delta) = \sup_{t>0} \left\{ r \frac{\delta-1}{2} \log\left(\frac{\delta+t}{2}\right) - rA(t-\tau)^2 \right\}.$$

Ce supremum est atteint en la solution positive de $\frac{r(\delta-1)}{2(\delta+t)} = 2A(t-\tau)$, soit

$$t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\delta+\tau)^2 + \frac{r(\delta-1)}{A}} - (\delta-\tau) \right),$$

ce qui permet de calculer

$$(t-\tau)^2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{(\delta+\tau)^2 + \frac{r(\delta-1)}{A}} - (\delta+\tau) \right)^2$$

$$(\delta + t) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\delta + \tau)^2 + \frac{r(\delta - 1)}{A}} + (\delta + \tau) \right).$$

On pose donc $\chi = \frac{r(\delta-1)}{A(\delta+\tau)^2}$ pour écrire

$$K(\delta) = \frac{r}{2}(\delta - 1) \log \left(\frac{\delta + \tau}{4} (\sqrt{1 + \chi} + 1) \right) - \frac{A(\delta + \tau)^2}{4} (\sqrt{1 + \chi} - 1). \quad (3.30)$$

Quand δ ou τ tendent vers l'infini, $\chi \rightarrow 0$, si bien qu'il est raisonnable de majorer le terme négatif par $\frac{A(\delta+\tau)^2}{4} \left(\frac{\chi}{2}\right) \leq \frac{r(\delta-1)}{8}$, qui sera d'un ordre mineur devant les autres contributions. On l'oublie donc par la suite, ce qui donne la majoration du résultat. $\square$

Cette majoration permet d'obtenir une croissance horizontale d'ordre

$$\log |G_v(s, x)| \ll -\delta \log(x) + r \frac{\delta}{2} \log \left(\frac{\delta + \tau}{2} \right) + A\delta^2.$$

Pour la même valeur de A (3.22), on obtient plutôt une longueur de sommation

$$N = O \left(Q \sqrt{\tau + D_{\text{abs}}}^r \right).$$

Nous n'avons pas mené précisément ces calculs ici.

3.4 Validations numériques

Pour des paramètres correspondant à la fonction ζ en $s = 1 + 3i$ sans correction v , on obtient le graphique 3.2 ci-dessous.

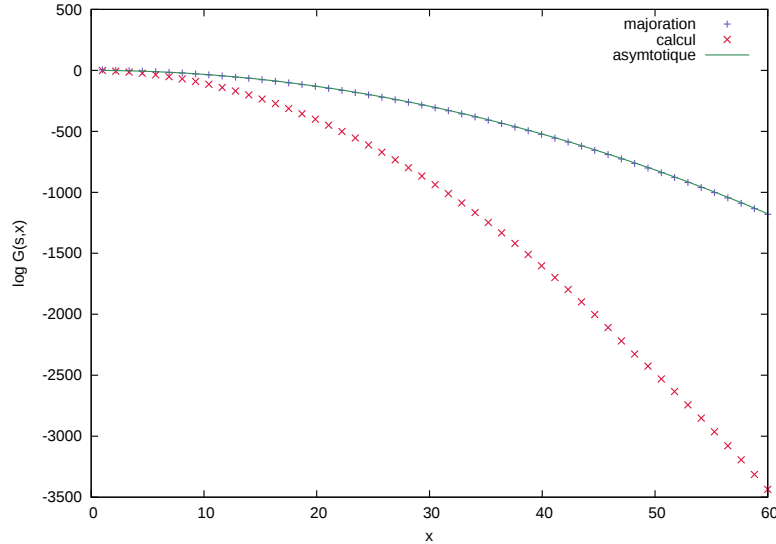


FIG. 3.2: décroissance de $G(s, x)$ en fonction de x

Il montre que l'estimation calculée est sous optimale d'un facteur environ 3. Cela est dû au passage du module sous l'intégrale lors de la première étape et l'application de la formule de Jensen, qui oublie toutes les compensations qui ont lieu en raison des oscillations des fonctions Γ .

3.5 Une autre estimation

Dans le cas d'un seul facteur gamma et sans facteur de lissage, on peut calculer l'intégrale sous forme de fonction gamma incomplète par interversion

$$\begin{aligned}
 G(s, x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(\delta)} \Gamma\left(\frac{z + \mu_i}{2}\right) \frac{x^{-z}}{z - s} dz \\
 &= \frac{x^{-s}}{2i\pi} \int_{(\delta)} \Gamma\left(\frac{z + \mu_i}{2}\right) \int_x^\infty t^{s-z-1} dt dz \\
 &= x^{-s} \int_x^\infty \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{(\delta)} \Gamma\left(\frac{z + \mu_i}{2}\right) t^{-z-\mu_i} dz \right) t^{s+\mu_i} \frac{dt}{t} \\
 &= x^{-s} \int_x^\infty e^{-t^2} t^{s+\mu_i} \frac{dt}{t};
 \end{aligned}$$

de sorte qu'une majoration de Γ_{inc} fournit une estimation précise de $G(s, x)$, tenant compte des oscillations de l'intégrande.

3.6 Majoration lorsque $x \rightarrow 0$

Par la suite, nous aurons également besoin de majorer G_v lorsque $x \rightarrow 0$. Contrairement aux majorations faites précédemment, une majoration pour $x < 1$ se fait plutôt en décalant vers la gauche, donc via l'expression en somme de résidus. Une bonne approximation de cette somme est donnée par son premier terme (le premier pôle rencontré). On a donc intérêt à majorer G_v à l'aide du lemme 3.1 en décalant seulement à une droite (δ') située à gauche de (δ) mais à droite des pôles de γ .

En prenant en compte séparément au besoin le pôle en s , on écrit la majoration de la manière suivante.

Lemme 3.11

Pour toute constante

$$\delta' > \max(\{1 - \mu_i\}, \sigma), \quad (3.31)$$

on a la majoration $|G_v(s, x)| \leq Kx^{-\delta'}$, où $Kx^{-\delta'}$ est le membre de droite de (3.2) en $\delta = \delta'$.

4 Sommes de Riemann

On réalise l'intégration sur une droite verticale (δ) , où $\delta > \max(1, \text{Re}(s))$, avec un pas régulier h .

Remarque : La condition $\delta > \text{Re}(s)$ peut mener à considérer des valeurs de δ pour lesquelles les facteurs gamma ont une amplitude trop grande. Dans ce cas, on décale la droite à gauche de s , mais en restant à droite des pôles des facteurs gamma ($\delta > 1 - \mu_i$), ce qui modulo un terme $2i\pi\gamma(s)v(s)x^{-s}$ que l'on peut compter à part, ne change pas les estimations qui suivent. On suppose donc pour la suite $\delta > \delta' > \text{Re}(s)$ avec une valeur δ' satisfaisant (3.31).

En l'absence de changement de variable, les transformées de Fourier de l'intégrande prennent alors une forme très simple, indépendamment du facteur de lissage.

Lemme 4.1

En posant $g(t) = \frac{g(\delta + it)v(\delta + it)}{\delta - s + i(t - \tau)} x^{-\delta - it}$ de sorte que $G_v(s, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(t) dt$, on a

$$\hat{g}(X) = 2\pi e^{2\pi X \delta} G_v(s, x e^{2\pi X}). \quad (4.1)$$

Démonstration : En effet,

$$\hat{g}(X) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2i\pi X t} dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{2\pi X \delta} e^{-2\pi X(\delta + it)} dt = 2\pi e^{2\pi X \delta} G_v(s, x e^{2\pi X}).$$

□

Pour $X > 0$, on se ramène donc à la décroissance de G_v , et pour $X < 0$, le facteur exponentiel donne une décroissance proportionnelle à δ .

Il est intéressant de choisir une grande valeur de δ pour obtenir une décroissance extrêmement rapide des transformées de Fourier en $X < 0$ (en effet, le décalage dégage une bande d'holomorphie plus large). En revanche, cela oblige à sommer des termes très grands au début, et donc à augmenter la précision. De surcroît il faut veiller à ce que la décroissance de G_v , qui en présence d'une enveloppe gaussienne $A \neq 0$ n'est que polynomiale, soit suffisante pour l'emporter sur le facteur exponentiel introduit pour $X > 0$.

4.1 Sans enveloppe gaussienne

On considère le facteur de lissage ne comportant qu'une correction verticale $v(z) = e^{ir\frac{\pi}{4}\eta z}$.

4.1.1 Somme principale

On emploie la proposition 3.5 qui donne

$$N \sim Q \left(\frac{D_{\text{abs}} + (\alpha + 1) \log Q}{\kappa} \right)^{\frac{r}{2}}. \quad (4.2)$$

4.1.2 Pas d'intégration

Estimations des valeurs négatives : D'après (4.1), on a d'une part $|\hat{g}(-X)| \leq e^{-D_{\text{abs}}}$ pour

$$2\pi\delta X - \log \left| 2\pi G_v(s, \frac{e^{-2\pi X}}{Q}) \right| \geq D_{\text{abs}}.$$

Or, d'après le lemme 3.11, on a une majoration explicite

$$\left| G_v(s, e^{-2\pi X}/Q) \right| \leq K Q^{\delta'} e^{2\pi\delta' X}$$

qui permet de définir précisément X . La condition obtenue est ici

$$X = \frac{D_{\text{abs}} + \log(2\pi K Q^{\delta'})}{2\pi(\delta - \delta')} \sim \frac{D_{\text{abs}}}{2\pi(\delta - \delta')}. \quad (4.3)$$

Estimations des valeurs positives : D'autre part $\hat{g}(X) \leq e^{-D_{\text{abs}}}$ si

$$2\pi \left| G_v(x e^{2\pi X}) \right| \left(e^{2\pi X} \right)^{\delta} \leq e^{-D_{\text{abs}}}.$$

En minorant x par $\frac{1}{Q}$ et en posant $U = \left(\frac{e^{2\pi X}}{Q} \right)^{\gamma}$, l'estimation de décroissance de G_v de la proposition 3.3 nous ramène à la résolution de

$$2\pi C Q^{\frac{\delta}{\gamma}} \left(U^{\frac{1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{r} \sum \beta_i + \delta} e^{-\kappa U} < e^{-D_{\text{abs}}},$$

où $C = C(\gamma D_{\text{abs}})$ est la constante (3.10) prise en un minorant trivial de U .

En posant $a = \frac{1}{2} \sum \tilde{\mu}_i + \frac{\delta}{\gamma}$ et $\tilde{D} = D_{\text{abs}} + \log(2\pi C) + \frac{\delta}{\gamma} \log Q$, la solution de $U^a e^{-\kappa U} = e^{-\tilde{D}}$ est donnée par le lemme B.2.2

$$U = \frac{a}{\kappa} L_x \left(\frac{a}{\kappa} e^{\frac{D}{a}} \right) \sim \frac{\tilde{D}}{\kappa}.$$

Ainsi, on a

$$X = \frac{1}{2\pi} \log \left(Q U^{\frac{1}{\gamma}} \right) \sim \frac{r}{4\pi} \log \left(\frac{Q^{\frac{r}{2}} D_{\text{abs}}}{\kappa} \right). \quad (4.4)$$

Choix de X : Le procédé serait symétrique en choisissant $\delta \sim \delta' + \frac{2D_{\text{abs}}}{r \log \frac{D_{\text{abs}}}{\beta}}$, mais une telle valeur de δ imposerait une augmentation de précision très importante.

On garde plutôt des valeurs de δ et δ' assez petites, si bien que

$$X \sim \frac{D_{\text{abs}}}{2\pi(\delta - \delta')}. \quad (4.5)$$

4.1.3 Intervalle d'intégration

Avec un calcul similaire à celui du lemme 3.1, en considérant $\tilde{\delta} = \max(\delta + \mu_i)$, et en posant $C = \frac{2\sqrt{2\pi'}}{\delta - \text{Re}(s)}$ on résout

$$C \int_{t_{\max}}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\delta} + t}{2} \right)^{r \frac{\tilde{\delta}-1}{2}} e^{-r \frac{\beta t}{2}} dt \leq e^{-D_{\text{abs}}},$$

ce qui permet de déterminer $t_{\max}$ d'après le lemme A.2.5. En posant $D = D_{\text{abs}} + \log C + r\beta \frac{\tilde{\delta}}{2}$, $a = r \frac{\tilde{\delta}-1}{2} + 1$ et $b = r\beta$, on a $t_{\max} + \tilde{\delta} \sim 2 \frac{D+a \log(\frac{D+a}{b})}{b}$ d'après le lemme B.2.2.

Avec les hypothèses précédentes, la longueur de l'intervalle d'intégration vérifie alors

$$t_{\max} \sim \frac{D_{\text{abs}}}{r\beta}. \quad (4.6)$$

4.1.4 Complexité

Les estimations (4.2), (4.5) et (4.6) démontrent le théorème suivant :

Théorème 4.2

Avec un facteur de lissage simple, si l'on pose

$$\beta = \frac{(r+2)D_{\text{res}}}{2r\tau}, \quad (4.7)$$

l'intégration numérique par la méthode des trapèzes permet de calculer $L(\sigma + i\tau)$ à précision D_{res} avec

$$O(Q\tau^{1+\frac{r}{2}} D_{\text{res}}^2)$$

évaluations d'exponentielle en précision

$$D_{\text{abs}} = D_{\text{res}} \left(\frac{3}{2} + \frac{r}{4} \right) + O(\log D_{\text{abs}}).$$

Démonstration : On a une complexité de $NXt_{\max} = O(QD_{\text{abs}}^{2+\frac{r}{2}} \beta^{-1-\frac{r}{2}})$ évaluations en précision D_{abs} .

D'après le lemme 2.1, en supposant la complexité de l'évaluation quasi linéaire, on pose $\beta = \frac{(r+2)D_{\text{res}}}{2r\tau}$, ce qui donne le résultat. $\square$

4.2 Méthode de Rubinstein

On considère un facteur de lissage

$$v(z) = e^{ir\frac{\pi}{4}\eta s + A(z-s)^2},$$

et dans le cas où $A \neq 0$ on centre l'intégration en $t = \tau$, c'est-à-dire qu'on pose

$$g(t) = f(\delta + i(t + \tau))v(\delta + i(t + \tau)).$$

4.2.1 Somme principale

D'après la proposition 3.9, on choisit A selon (3.22) et la taille de la somme (1.9) est d'ordre

$$N \sim Q \left(\frac{2e^\nu}{(\nu+2)\kappa} (D_{\text{abs}} + (\alpha+1) \log Q) \right)^{\frac{\nu}{2}}. \quad (4.8)$$

4.2.2 Pas d'intégration

En suivant toujours le lemme 4.1, la seule différence par rapport au cas précédent pour le choix de X selon les valeurs négatives est la présence du terme $e^{-A\delta^2}$, lequel est constant en x . Aussi on doit toujours avoir

$$X \sim \frac{D_{\text{abs}}}{2\pi(\delta - \delta')}. \quad (4.9)$$

En revanche, selon les valeurs positives, on remplace l'estimation de décroissance exponentielle de la proposition 3.3 par celle de la proposition 3.7.

Si l'on note $Z = L_w \left(2A\gamma^2\kappa \left(\frac{e^{2\pi X}}{Q} \right)^\gamma \right)$, de sorte que $e^{2\pi X} = Q \left(\frac{Ze^Z}{2A\gamma^2\kappa} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$, on a les majorations suivantes

$$\begin{aligned} \left| 2\pi e^{2\pi\delta X} G_v(s, x e^{2\pi X}) \right| &\leq 2\pi (e^{2\pi X})^\delta \left| G_v(s, \frac{e^{2\pi X}}{Q}) \right| \\ &\leq 2\pi C_\nu Q^\delta \left(\frac{Ze^Z}{2A\gamma^2\kappa} \right)^{\frac{\delta}{\gamma}} Z^{\frac{\sum \mu_i}{2}} e^{-\frac{D_{\text{abs}}}{\nu} Z}. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on pose $\tilde{D} = D_{\text{abs}} + \log(2\pi C_\nu Q^\delta) + \frac{\delta}{\gamma} \log\left(\frac{1}{2A\gamma^2\kappa}\right)$, $a = \frac{\sum \mu_i}{2} + \frac{\delta}{\gamma}$ et $b = \frac{D_{\text{abs}}}{\nu} - \frac{\delta}{\gamma}$, on résoud selon le lemme B.2.2

$$Z \geq \frac{a}{b} L_x \left(\frac{a}{b} e^{\frac{D}{a}} \right)$$

d'où la valeur (cf. la résolution similaire de la proposition 3.9)

$$X = \frac{1}{2\pi\gamma} \log \left(Q^\gamma \frac{Z^{1+\frac{a}{b}} e^{\frac{D}{b}}}{2A\gamma^2\kappa} \right).$$

et l'équivalent

$$X \sim \frac{1}{2\pi\gamma} \log \left(\frac{D_{\text{abs}} Q^\gamma}{\kappa} \right). \quad (4.10)$$

Des conditions (4.9) et (4.10), la première est asymptotiquement plus restrictive et l'on a un équivalent

$$X \sim \frac{D_{\text{abs}}}{2\pi(\delta - \delta')}. \quad (4.11)$$

4.2.3 Intervalle d'intégration

On reprend le raisonnement fait dans le lemme 3.6 pour majorer $\int_{|t|>t_{\max}} |g|$ par $2C \int_{t_{\max}}^{\infty} e^{-At^2} dt$, où en posant $\tilde{\delta} = \delta + \max \{\mu_i\}$ la constante vaut

$$C = \frac{2\sqrt{2\pi}^r x^{-\delta}}{\delta - \operatorname{Re}(s)} \left(\frac{\tilde{\delta} - 1}{\gamma e \kappa} \right)^{r \frac{\tilde{\delta}-1}{2}}.$$

En supposant $2At_{\max} > 1$, il suffit donc que $t_{\max}$ vérifie $t_{\max} \geq \sqrt{\frac{D_{\text{abs}} + \log(2C)}{A}}$, soit

$$t_{\max} = \frac{2\gamma D_{\text{abs}}}{\sqrt{\nu(\nu+2)}} \sqrt{1 + \frac{\log(2C)}{D_{\text{abs}}}} \sim \frac{4D_{\text{abs}}}{r\sqrt{\nu(\nu+2)}} \quad (4.12)$$

4.2.4 Complexité

Théorème 4.3

Si l'on pose

$$\beta = \frac{D_{\text{res}}}{3\tau}, \quad (4.13)$$

la méthode de Rubinstein permet de calculer $L(s)$ à précision D_{res} avec

$$O\left(Q\tau^{\frac{r}{2}} D_{\text{res}}^2\right) \quad (4.14)$$

évaluations d'exponentielle en précision

$$D_{\text{calc}} = D_{\text{res}}(1 + r/6) + O(\log D_{\text{res}}).$$

Démonstration : D'après les équivalents (4.8), (4.12) et (4.11), on a une complexité de

$$NXt_{\max} \sim Q \frac{D_{\text{abs}}^{\frac{r}{2}}}{(\beta r)^{\frac{r}{2}}} \frac{D_{\text{abs}}}{2\pi(\delta - \delta')} \frac{4D_{\text{abs}}}{r\sqrt{\nu(\nu+2)}}$$

évaluations en précision $D_{\text{calc}} = D_{\text{abs}}$. En supposant la complexité de l'évaluation quasi linéaire, le lemme 2.1 démontre le résultat. En effet $a = \frac{r}{2} + 2 + 1$ et $b = \frac{r}{2}$, donc $\beta = \frac{rD_{\text{res}}}{3r\tau}$ et on trouve un équivalent de

$$C\tau^{\frac{r}{2}} D_{\text{res}}^2 (1 + r/6)^{3+\frac{r}{2}} \left(\frac{3r}{r}\right)^{\frac{r}{2}}$$

évaluations en précision $D_{\text{abs}} = D_{\text{res}}(1 + \frac{r}{6})$, où l'on a pris $C = Qr^{-\frac{r}{2}+1} \frac{2}{\pi(\delta - \delta')\sqrt{\nu(\nu+2)}}$. $\square$

5 Méthode double-exponentielle

On suppose dans cette section que le facteur de lissage est une correction verticale de la forme (1.12).

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 2.3, l'application de la méthode double-exponentielle nécessite une évaluation précise de l'ordre de grandeur de la fonction $f(z) = \frac{\gamma(z)x^{-z}v(z)}{z-s}$ sur les hyperboles $\mathcal{H}_\theta$ décrites par le changement de variable $t \mapsto \delta + i \sinh(t + i\theta)$. Nous utilisons ces majorations pour estimer le pas d'intégration, et éventuellement choisir un décalage de contour θ .

5.1 Notations

Dans cette section, on définit les constantes suivantes :

- $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ est un angle de décalage ;
- $d = d(s, \mathcal{H}_\theta)$, on suppose $d > 0$;
- $\alpha = \frac{\beta + \theta}{\tan \theta}$;
- $\tilde{\delta} = \frac{\delta + \frac{1}{r} \sum \tilde{\mu}_i}{2}$;
- $\tilde{C}_\delta = \prod_{i=1}^r C_{\delta_i^+, \delta_i^-}$ est la constante intervenant dans les majorations de γ , qui est définie en (B.1.17).

5.2 Majoration de f sur l'hyperbole $\mathcal{H}_{\delta, \theta}$

D'après (B.1.16), on a les majorations suivantes sur g_θ pour $\theta > 0$.

Lemme 5.1

Supposons $x > 1$ et $\theta > 0$. Alors en notant $T = \frac{\sinh(t)}{2}$, on a

$$\log |g_\theta(t)| \leq A + B \log(1 + T) + CT - DT \log(1 + T) \quad (5.1)$$

où l'on pose

$$\begin{cases} A &= \log(2\tilde{C}_\delta/d) - (\delta - \sin \theta) \log(x) \\ B &= r\tilde{\delta} \\ C &= r \sin \theta (1 + \log(x^\gamma) - \alpha) \\ D &= r \sin \theta. \end{cases}$$

Remarque : Si $\theta = 0$, on a $C = -\beta$ et $D = 0$, et une majoration $\log M_\theta = A + B \log(B/\beta) - B + \beta \sim \theta$ pour θ petit.

Démonstration : À l'aide de la majoration (B.1.16) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \log |\gamma(\delta + i \sinh(t + i\theta))| &\leq \log(\tilde{C}_\delta) + \left(\sum_{i=1}^r \frac{\delta + \mu_i - 1}{2} - rT \sin \theta \right) \log(1 + T) \\ &\quad - rT \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos \theta + rT \sin \theta \\ \log \left| x^{-\delta - i \sinh(t + i\theta)} \right| &\leq -\delta \log(x) + \sqrt{1 + 4T^2} \sin \theta \log(x) \\ &\leq -\delta \log(x) + (1 + 2T) \sin \theta \log(x) \\ \log |\nu(\delta + i \sinh(t + i\theta))| &\leq \frac{r\eta\pi}{2} T \cos \theta \\ \log |\cosh(t + i\theta)| &\leq \log(\sqrt{1 + 4T^2}) \leq \log(2(1 + T)) \\ \log \left| \frac{1}{z - s} \right| &\leq \log\left(\frac{1}{d}\right) \end{aligned}$$

si bien qu'en isolant les coefficients selon les croissances en T on pose

$$\begin{cases} A &= \log(\tilde{C}_\delta) - \log(d) - \delta \log(x) + \sin \theta \log(x) + \log 2 \\ B &= 1 + \sum_{i=1}^r \frac{\delta + \mu_i - 1}{2} \\ C &= r \sin \theta (1 + \frac{2}{r} \log(x)) - r \cos \theta (\frac{\pi}{2} + \theta - \frac{\pi\eta}{2}) \\ D &= r \sin \theta \end{cases}$$

ce qui démontre le lemme 5.1 avec les constantes annoncées. $\square$

Posons

$$M_\theta = \sup_t |g_\theta(t)| \quad (5.2)$$

et définissons les constantes

$$\begin{cases} \lambda &= \frac{B+D}{D} = 1 + \frac{\delta}{\sin \theta} \\ \mu &= e^{-\frac{C-D}{D}} = e^\alpha x^{-\gamma}, \end{cases} \quad (5.3)$$

de sorte que, d'après les calculs donnés en appendice B.2.3, le maximum du membre de droite de (5.1) est obtenu en

$$T_m = \frac{\lambda}{L_w(\lambda\mu)} - 1;$$

d'où la valeur

$$\log M_\theta \leq A + B \log(1 + T_m) + CT_m - DT_m \log(1 + T_m). \quad (5.4)$$

La valeur T_m est extrêmement proche de la valeur réelle en laquelle on atteint le maximum. La majoration est donc relativement proche du maximum réel, modulo la qualité du majorant de g (essentiellement la constante $\tilde{C}_\delta$).

On a alors si $\theta > 0$ reste fixé et $x \rightarrow \infty$:

Lemme 5.2

Avec les notations précédentes et pour $\theta > 0$ fixé, $M_\theta = \sup_t |g_\theta(t)|$ vérifie

$$\log M_\theta \leq r \sin \theta e^{-\alpha} x^\gamma + (\gamma r \tilde{\delta} - \delta + \sin \theta) \log x + O(1) \quad (5.5)$$

Pour la valeur $x_{\max}$ donnée en (3.12), on a donc

$$\log M_\theta \sim \frac{r \sin \theta D_{\text{abs}}}{\kappa e^\alpha}.$$

Démonstration : On calcule un développement asymptotique de M_θ pour $x \rightarrow \infty$.

La constante λ est fixe, et $\mu = e^\alpha x^{-\frac{2}{r}} \rightarrow 0$. Du développement $L_w(\lambda\mu) = \lambda\mu + O(\mu^2)$, on déduit

$$\begin{aligned} \log(1 + T_m) &= \log(\lambda) - \log(L_w(\lambda\mu)) \\ &= -\log(\mu) + L_w(\lambda\mu) \\ &= \log(x^\gamma) - \alpha + \lambda\mu + O(x^{-2\gamma}) \\ &= \log(x^\gamma) - \alpha + \lambda e^\alpha x^{-\gamma} + O(x^{-2\gamma}) \\ T_m &= 1/\mu + \lambda - 1 + O(x^{-\gamma}) \\ &= x^\gamma e^{-\alpha} + \lambda - 1 + O(x^{-\gamma}) \\ C &= D \log(x^\gamma) + D(1 - \alpha) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} B \log(1 + T_m) &= B \log(x^\gamma) - \alpha B + O(x^{-\gamma}) \\ CT_m &= D \left[e^{-\alpha} x^\gamma \log x^\gamma + (1 - \alpha) e^{-\alpha} x^\gamma + (1 - \alpha)(\lambda - 1) \right] + O(x^{-\gamma} \log x) \\ DT_m \log(1 + T_m) &= D \left[x^\gamma \log(x^\gamma) e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha} x^\gamma \right. \\ &\quad \left. + (\lambda - 1) \log(x^\gamma) - (\lambda - 1)\alpha + \lambda \right] + O(x^{-\gamma}) \end{aligned}$$

soit en reportant

$$\begin{aligned} \log(M_\theta) - A &\leq B \log(1 + T_m) + CT_m - DT_m \log(1 + T_m) \\ &\leq D e^{-\alpha} x^\gamma \\ &\quad + [B + D(\lambda - 1) - D(\lambda - 1)] \log x^\gamma \\ &\quad + D(1 - \alpha)(\lambda - 1) + D(\lambda - 1)\alpha - \lambda D - \alpha B \\ &\quad + O(x^{-\gamma} \log x) \\ &= D e^{-\alpha} x^\gamma + B \log(x^\gamma) - D - \alpha B + O(x^{-\gamma} \log x) \end{aligned}$$

ce qui donne, en réintroduisant les valeurs de A , B et D et en simplifiant :

$$\log(M_\theta) \leq r \sin \theta e^{-\alpha} x^\gamma + (\gamma r \tilde{\delta} + -\delta + \sin \theta) \log x + \log(2C_\delta/d) + r \tilde{\delta} - r \alpha \sin \theta + O(x^{-\gamma} \log x).$$

□

Les termes croissent donc exponentiellement en x , et on doit réaliser une augmentation de précision

$$D_{\text{calc}} \sim D_{\text{abs}} \left(1 + \frac{r \sin \theta}{\kappa e^\alpha}\right). \quad (5.6)$$

La dépendance en $\kappa \sim r\beta$ est très mauvaise : si donc on souhaite limiter l'augmentation de précision D_{abs} en apportant une grosse correction verticale par le facteur de lissage v , il faut en fin de compte faire une augmentation de précision de l'ordre de ce que l'on avait gagné.

Inversement, pour éviter cette énorme augmentation de précision dans les cas où τ est grand, on majore sur un angle $\theta(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow 0$. Dans ce cas, $\alpha \sim \frac{\beta}{\theta} + 1$ et $C \sim r\theta \log x^\gamma - r\beta$. Si on choisit $\theta(x)$ tel que $C \leq 0$, on obtient la majoration suivante :

Lemme 5.3

Soit θ tel que

$$\sin \theta(1 + \log(x^\gamma)) \leq \cos \theta(\beta + \theta), \quad (5.7)$$

c'est-à-dire

$$\theta \sim \frac{\beta}{\log(x^\gamma)};$$

alors

$$\log M_\theta \sim \log \left(\tilde{C}_\delta \left(\frac{\log x^\gamma}{\beta} \right)^{r\tilde{\delta}} \right).$$

Démonstration : On a choisi θ de sorte que $C \leq 0$, si bien que l'on peut considérer à présent $\mu = e^{-\frac{C-D}{D}} \leq e$ comme une constante, tandis que $\lambda = 1 + \frac{\tilde{\delta}}{\sin \theta} \rightarrow \infty$, avec $\lambda \sim \frac{\tilde{\delta} \log(x^\gamma)}{\beta}$.

On a alors $B \log(1 + T_m) = B \log \lambda - B \log(L_w(\lambda\mu)) \sim B \log \lambda \sim r\tilde{\delta} \log(\frac{\log(x^\gamma)}{\beta})$. La contribution du terme $DT_m \log(1 + T_m) = D(\lambda + \log \mu - L_w(\lambda\mu) - \frac{\lambda \log \mu}{L_w(\lambda\mu)})$ est négligeable. □

Un tel choix de θ permet donc de ne pas augmenter la précision.

5.3 Intervalle d'intégration

L'équation $|g_\theta(t)| \leq e^{-D_{\text{abs}}}$ n'a pas de solution explicite, on la résout numériquement.

On donne cependant une approximation de cette valeur. Avec les notations précédentes, en posant $T = \frac{\sinh(t)}{2}$, on résout

$$A + B \log(1 + T) + CT - DT \log(1 + T) \leq -D_{\text{abs}}$$

ou, en posant $Z = 1 + T$, l'équation

$$DZ \log(Z) - CZ - (B + D) \log Z \geq D_{\text{abs}} + A + C = \tilde{D}.$$

En négligeant le terme $(B + D) \log(1 + T)$, on a une solution par défaut donnée par

$$Z_1 = \exp(L_w(\frac{\tilde{D}}{D} e^{-C/D}) + C/D) = \frac{\tilde{D}}{DL_w(\frac{\tilde{D}}{D} e^{-C/D})}$$

qui vérifie donc $DZ_1 \log(Z_1) - CZ_1 = \tilde{D}$.

On l'affine ensuite par l'algorithme de Newton, avec la fonction

$$\begin{cases} \psi(z) &= z(D \log z - C) - (B + D) \log(z) - \tilde{D}; \\ \psi'(z) &= D(\log(z) + 1) - C - \frac{B+D}{z}. \end{cases}$$

La solution finale est $t = \operatorname{arcsinh}(Z - 1)$.

La première itération de l'algorithme de Newton donne une solution par excès :

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_1 - \frac{DZ_1 \log(Z_1) - CZ_1 - (B + D) \log(Z_1) - \tilde{D}}{D(\log Z_1 + 1) - C - \frac{B+D}{Z_1}} \\ &= Z_1(1 + \gamma) \end{aligned}$$

avec $\gamma = \frac{(B + D)Z_1}{\tilde{D} - (B + D) + DZ_1}$.

On a effectivement $Z_2 > Z$ puisque si l'on calcule $\psi(Z_2)$, on trouve — après simplification par $(1 - \gamma)(DZ_1 \log(Z_1) - CZ_1 - \tilde{D}) = 0$:

$$DZ_1(1 + \gamma) \log(1 + \gamma) - (B + D)(\log(Z_1) + \log(1 + \gamma)) + \gamma \tilde{D}$$

or $(B + D) \log(Z_1) = \gamma \tilde{D} - (B + D)\gamma + D\gamma Z_1$, donc si $\gamma \geq 0$,

$$\psi(Z_2) = DZ_1[(1 + \gamma) \log(1 + \gamma) - \gamma] + (B + D)[\gamma - \log(1 + \gamma)] \geq 0.$$

De plus, on peut majorer γ assez simplement. En notant $L = L_w(\frac{\tilde{D}}{D}e^{-C/D}) > 0$,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{(B + D)Z_1}{\tilde{D} - (B + D) + DZ_1} \\ &\leq \frac{(B + D)\tilde{D}}{(DL)(\tilde{D} + \frac{\tilde{D}}{L})} \\ &\leq (1 + \frac{B}{D}) \frac{1}{1 + L} \end{aligned}$$

donc $\gamma \leq 1 + \frac{B}{D}$.

On obtient l'équivalent

Lemme 5.4

$$t_{\max} \sim \log(2Z) \sim \log\left(\frac{2D_{\text{abs}}}{r \sin \theta}\right) \quad (5.8)$$

Démonstration : On a pour $x \rightarrow \infty$ les équivalents $A \sim (\sin \theta - \delta) \log x$ et $C/D = (1 + \frac{2}{r} \log x - \alpha)$, donc

$$\frac{\tilde{D}}{D} = \frac{D_{\text{abs}} + C + A}{D} \sim \frac{D_{\text{abs}}}{r \sin \theta} + \frac{1}{r} \log(x) \left(3 - \frac{\delta}{\sin \theta}\right)$$

et puisque $x_{\max} \sim \left(\frac{e^\beta}{r\beta} D_{\text{abs}}\right)^{\frac{r}{2}}$

$$L_w\left(\frac{\tilde{D}}{D}e^{-C/D}\right) \sim L_w\left(\frac{\tilde{D}}{Dx^\gamma}\right) \sim \log\left(\frac{D_{\text{abs}}}{r \sin \theta x^\gamma}\right) \sim \log(\beta r)$$

Ainsi,

$$Z_1 \sim \frac{D_{\text{abs}}}{r \sin \theta \log(r\beta)}$$

Dans tous les cas, $t_{\max} \sim \log(2Z)$ donne l'équivalent de l'énoncé. $\square$

5.4 Estimation des transformées de Fourier

Notons comme précédemment $g(t) = f(\delta + i \sinh t) \cosh(t)$ et $g_\theta(t) = g(t + i\theta)$ la fonction intégrée lors du calcul de $G(s, x)$ avec décalage θ . On veut alors estimer sa transformée de Fourier $\hat{g}_\theta(X)$.

D'après la section précédente, il est aisé de majorer les normes L^1 des fonctions g_θ :

Lemme 5.5

Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\|g_\theta\| \leq \frac{2}{r \sin(\theta)} M'_\theta \quad (5.9)$$

où M'_θ est la valeur M_θ de (5.4) où l'on remplace α par $\alpha - 1$.

Pour $\theta = 0$ on peut écrire

$$\|g_0\| \leq M_0 \quad (5.10)$$

où $M_0 = KQ^\delta$ est donnée par le lemme 3.11.

Démonstration : On estime l'intégrale de $|g|$ en θ , à l'aide de la majoration (5.1). En intégrant par exemple une contribution $e^{-r \sin(\theta)T}$, cette intégrale est majorée par $\frac{2}{r \sin(\theta)} M_\theta$ où l'on aurait remplacé C par $C + D$ dans M_θ , c'est-à-dire μ par μ/e ou encore α par $\alpha - 1$.

En $\theta = 0$, quitte à défaire le changement de variable en $\sinh$, on a démontré une majoration de $\|g_0\|$ avec l'équation (3.9). Cette majoration ne dépend que des données du problème et n'intervient pas dans l'équivalent. $\square$

On en déduit des estimations de décroissance exponentielle sur $\hat{g}_\theta$, en veillant simplement à prendre en compte le pôle de f en s . Posons à cet effet

$$\Phi(X, \theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi X(t+i\theta)} g(t + i\theta) dt = e^{2\pi\theta X} \hat{g}_\theta(X). \quad (5.11)$$

On note également $\rho_s = \operatorname{arcsinh}(i(\delta - s)) = t_s + i\theta_s$ avec $\theta_s \in]0, \frac{\pi}{2}]$ le pôle dû à s , et on définit un symbole $\delta_{\theta,s}$ selon que l'hyperbole $\mathcal{H}_\theta$ reste en deçà de s ou le dépasse :

$$\delta_{\theta,s} = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta < \theta_s \quad (\mathcal{H}_\theta \text{ reste à droite de } s) \\ 0 & \text{sinon} \quad (\mathcal{H}_\theta \text{ passe à gauche de } s). \end{cases} \quad (5.12)$$

Pour $\theta < \frac{\pi}{2}$, la formule de Cauchy nous donne

$$\Phi(X, 0) = \Phi(X, \theta) + (1 - \delta_{\theta,s}) R_s(X) \quad (5.13)$$

où on définit

$$R_s(X) = 2\pi e^{-2i\pi X \rho_s} \gamma(s) x^{-s} v(s) \quad (5.14)$$

la contribution du résidu de f en s à l'erreur de quadrature.

On en déduit les estimations (cf. figure 3.3)

Proposition 5.6

Pour tout $X > 0$, et $0 \leq \theta < \theta + \theta' < \frac{\pi}{2}$,

$$\left| \hat{g}_\theta(-X) + (\delta_{\theta+\theta',s} - \delta_{\theta,s}) e^{2\pi\theta X} R_s(-X) \right| \leq \frac{2M'_{\theta+\theta'}}{r \sin(\theta + \theta')} e^{-2\pi\theta' X}; \quad (5.15)$$

$$\left| \hat{g}_\theta(X) + (1 - \delta_{\theta,s}) e^{-2\pi\theta X} R_s(X) \right| \leq M_0 e^{-2\pi\theta X}. \quad (5.16)$$

Démonstration : Pour $X < 0$, on estime $\hat{g}_\theta$ via (5.11) en écrivant $\Phi(X, \theta) = \Phi(X, \theta + \theta') + (\delta_{\theta,s} - \delta_{\theta+\theta',s}) R_s(X)$, soit $\hat{g}_\theta(X) = e^{2\pi\theta' X} \hat{g}_{\theta+\theta'}(X) + (\delta_{\theta,s} - \delta_{\theta+\theta',s}) e^{-2\pi\theta X} R_s(X)$, et en majorant $\hat{g}_{\theta+\theta'}$ via le lemme 5.5. Pour $X > 0$, on passe plutôt de θ à 0. $\square$

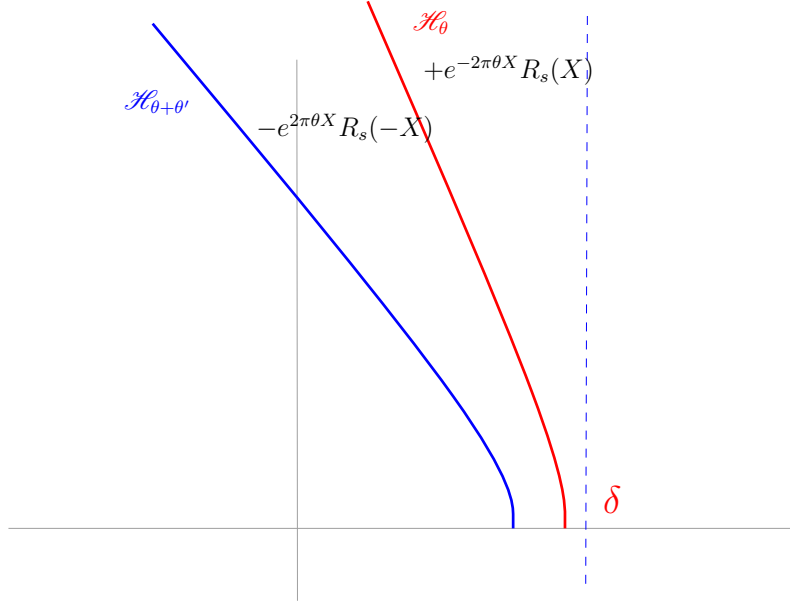


FIG. 3.3: prise en compte des résidus.

Nous donnons ici deux améliorations de ces bornes : d'une part un calcul plus explicite qui n'a malheureusement d'intérêt que dans le cas où il n'y a qu'un seul facteur gamma ; d'autre part une estimation de $\hat{g}_0(+X)$ en décalant vers la droite, ce qui permet d'améliorer (5.16) et de choisir au besoin la valeur $\theta = 0$.

5.4.1 Un lien fonctionnel

Dans le cas où il n'y a pas de facteur de lissage gaussien ($A = 0$), on peut chercher à être plus précis que le lemme précédent, en reliant de manière exacte les valeurs de $\hat{g}(X)$ à celles de $\hat{g}(-X)$ par un décalage de contour dépassant les pôles de l'axe négatif, ce qui permet de ne rechercher la décroissance que de $\hat{g}(X)$ pour $X > 0$, qui cette fois est aisément obtenue en considérant un décalage jusqu'à l'axe réel $\theta = 0$.

Si l'on ne considère qu'un facteur gamma, on peut en effet écrire

Lemme 5.7

Supposons $r = 1$. Alors pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $X \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-2\pi X(\pi/2-\theta)} \hat{g}_\theta(X) + e^{2\pi X(\pi/2-\theta)} \hat{g}_\theta(-X) = \delta_{\theta,s} T(X) - S(X) \quad (5.17)$$

où l'on pose

$$S(X) = 8\pi \sum_{m \geq 0} \frac{(-x^2)^m \cos(2\pi X \operatorname{arccosh}(2m + \mu_1 + \delta)) v(-2m)}{m!(2m + \mu_1 + s)} \quad (5.18)$$

le terme dû aux pôles de Γ , qui vérifie

$$|S(X)| \leq 8\pi \frac{e^{x^2}}{d(s + \mu_1, -2\mathbb{N})}; \quad (5.19)$$

et

$$T(X) = 4\pi \cosh(2\pi X(\frac{\pi}{2} + i\rho_s)) \gamma(s) x^{-s} \quad (5.20)$$

celui dû au pôle en s de la formule de Cauchy, à prendre en compte si $\theta > \theta_s$.

Remarque : $4\pi G(s, x) = T(0) - S(0)$, c'est exactement le développement des résidus. Dans le cas de plusieurs facteurs gamma, le résultat est le même en remplaçant la somme $S(X)$ par la somme convenable prise sur les résidus induits par chacun des facteurs. Toutefois il devient alors crucial d'obtenir une bonne majoration de la somme S en fonction de $x^{\frac{2}{r}}$ et non de x^2 ... Je n'ai pu obtenir de telle majoration, si ce n'est en la tirant de la proposition 5.6, ce qui ne constitue pas un progrès !

Démonstration : Si l'on essaie de décaler au-delà de $\pi/2$, il faut prendre en compte les pôles de Γ et de v situés sur l'axe réel négatif, obtenus pour $\theta = \pi/2$, ainsi que le pôle s qui apparaît à nouveau le cas échéant en $\pi - \theta_s$.

On a en effet pour $m \geq 0$ et $\theta < \pi$

$$\delta + \mu_1 + i \sinh(t + i\theta) = -m \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pi/2 \\ \cosh t = 2m + \delta + \mu_1 \end{cases}$$

ce qui donne la forme des pôles dûs à Γ , et

$$s = \sinh(\rho_s) = \sinh(i\pi - \rho_s)$$

les deux pôles dûs à s .

La formule de décalage est donc, pour passer de θ à $\pi - \theta$,

$$\Phi(X, \theta) - \Phi(X, \pi - \theta) = 2\pi \sum_{m \geq 0} \text{Res}_{|\varphi(z)=-m} \left(e^{-2i\pi X z} g(z) \right) + 2\pi \delta_{\theta, s} (e^{-2i\pi X \rho_s} R_s + e^{-2i\pi X (i\pi - \rho_s)} R_s)$$

avec des résidus

$$\begin{aligned} \text{Res}_{|\varphi(z)=-m} e^{-2i\pi X z} g(z) &= \frac{2(-1)^m x^{2m} e^{-2i\pi X (\pm \text{arccosh}(2m + \mu_1 + \delta) + i\pi/2)} v(-2m)}{m!(-2m - s - \mu_1)} \\ &= -e^{\pi^2 X} \frac{4(-x^2)^m \cos(2\pi X \text{arccosh}(2m + \mu_1 + \delta)) v(-2m)}{m!(2m + \mu_1 + s)}. \end{aligned}$$

Or on relie également ces deux valeurs par $i\pi$ -périodicité de $\sinh$ et parité de $\cosh$

$$\sinh(t + i\pi) = \sinh(-t), \quad \cosh(t + i\pi) = -\cosh(-t)$$

donc

$$\Phi(X, \pi - \theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi X (t - i\theta)} e^{2\pi X \pi} g(-t + i\theta) (-\cosh(-t + i\theta)) dt = -e^{2\pi^2 X} \Phi(-X, \theta).$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \Phi(X, \theta) + \Phi(-X, \theta) e^{2\pi^2 X} &= -8\pi e^{\pi^2 X} \sum_{m \geq 0} \frac{(-x^2)^m v(-2m) \cos(2\pi X \text{arccosh}(2m + \mu_1 + \delta))}{m!(2m + \mu_1 + s)} \\ &\quad + 2\pi \delta_{\theta, s} e^{\pi^2 X} (e^{-2i\pi X (\rho_s - i\frac{\pi}{2})} + e^{-2i\pi X (i\frac{\pi}{2} - \rho_s)}) R_s \\ &= -S(X) + \delta_{\theta, s} T(X) \end{aligned}$$

avec les notations de l'énoncé.

En divisant tout par $e^{\pi^2 X}$ et en reprenant la définition $\Phi(X) = e^{2\pi\theta X} \hat{g}_\theta$, on obtient finalement l'énoncé du lemme 5.7. $\square$

5.4.2 Décroissance de $\hat{g}_0$

On améliore les estimations de la proposition 5.6 en considérant de manière spécifique le cas de l'intégration sur la droite verticale (δ) pour $X > 0$.

$$\hat{g}_0(X) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi X t} \gamma(\delta + i \sinh t) \frac{x^{-\delta - i \sinh t}}{\delta + i \sinh t - s} \cosh(t) dt$$

Ici, g_0 est intégrable, mais ne l'est plus pour tout décalage vers la droite, et ne l'est pas non plus en norme L^2 , ce qui signifie que $\hat{g}_0$ n'a pas de décroissance exponentielle en $X > 0$ (théorème 1.20).

On met toutefois en évidence une décroissance sous-exponentielle en réalisant un décalage dépendant de X :

- puisque γ décroît sur les verticales, on peut restreindre l'intégrale sur un segment $[-t_X, t_X]$
- faire un décalage de θ_X sur ce segment

en choisissant t_X, θ_X de sorte que l'intégrale sur le chemin modifié ait une décroissance d'ordre $\exp(-\frac{X}{\log X})$.

On intègre donc sur un chemin formé de trois parties $\hat{g}_0(X) = I_1 + I_2 + I_3$ avec

$$\begin{aligned} I_1(X) &= \int_{t_X}^{\infty} \\ I_2(X) &= \int_{-i\theta}^{t_X - i\theta} \\ I_3(X) &= \int_{t_X}^{t_X - i\theta}. \end{aligned}$$

I_1 : **choix de t_X** Notons $\tilde{\delta} = \delta + \max\{\mu_i\}$. On a alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \left| \int_{t_X}^{\infty} e^{-2i\pi X t} \gamma(\delta + i \sinh(t)) \frac{x^{-\delta - i \sinh t} v(\delta + i \sinh t)}{\delta + i \sinh t - s} \cosh(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\sinh(t_X)}^{\infty} \frac{x^{-\delta}}{\delta - \operatorname{Re}(s)} |\gamma(\delta + it) v(\delta + it)| dt \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}^r x^{-\delta}}{(\delta - \operatorname{Re}(s)) 2^{r \frac{\delta-1}{2}}} \int_{\sinh(t_X)}^{\infty} (\tilde{\delta} + t)^{r \frac{\delta-1}{2}} e^{-r \frac{\beta}{2} t} dt \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}^r x^{-\delta}}{(\delta - \operatorname{Re}(s)) 2^{r \frac{\delta-1}{2}}} \frac{2(\tilde{\delta} + \sinh(t_X))^{r \frac{\delta-1}{2} + 1} e^{-r \frac{\beta}{2} \sinh(t_X)}}{\beta(\sinh(t_X) + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta} + 1}. \end{aligned}$$

On pose $\sinh(t_X) = 2\lambda X$, avec $\lambda > 0$ à fixer, de sorte que

$$I_1 \leq \frac{\sqrt{2\pi}^r x^{-\delta}}{(\delta - \operatorname{Re}(s)) 2^{r \frac{\delta-1}{2}}} \frac{2(\tilde{\delta} + 2\lambda X)^{r \frac{\delta-1}{2} + 1} e^{-r \beta \lambda X}}{\beta(2\lambda X + \tilde{\delta}) - \tilde{\delta} + 1}. \quad (5.21)$$

Ainsi, I_1 est d'ordre $e^{-r \beta \lambda X}$ et d'après la discussion précédente, on s'attend à ce que λ soit tel que pour $X \rightarrow \infty$, on ait $\lambda X \rightarrow \infty$ et $\lambda \rightarrow 0$.

I_2 : **choix de θ_X** On choisit θ_X de sorte que pour $t \in [0, t_X]$,

$$g_0(t - i\theta_X) \leq C_\delta \cosh(t).$$

En posant $\rho = \frac{\sinh(t)}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \log |f(\delta + i \sinh(t - i\theta))| &\leq \log\left(\frac{C_\delta}{\delta - \operatorname{Re}(s)}\right) + r\rho \sin \theta \log(\rho + 1) - r\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \theta - r\rho \sin \theta \\ &\quad - 2\rho \sin \theta \log(x) + r\rho \frac{\pi}{2} \eta \cos \theta \\ &\leq \log\left(\frac{C_\delta}{\delta - \operatorname{Re}(s)}\right) + r\rho \sin \theta \left(\log\left(\frac{\rho + 1}{x^\gamma}\right) - r \frac{\beta - \theta}{\tan \theta} - 1 \right) \end{aligned}$$

donc

$$|f| \leq C_\delta$$

si

$$\log\left(\frac{\rho + 1}{x^\gamma}\right) \leq \frac{\beta - \theta}{\tan \theta} + 1.$$

Ainsi, puisque le membre de gauche est croissant en ρ , il suffit de poser θ_X solution de l'inégalité suivante

$$\frac{\beta - \theta}{\tan \theta} \leq \log\left(\frac{1 + \lambda X}{e x^\gamma}\right). \quad (5.22)$$

La majoration $f \leq C_\delta$ est alors uniforme sur $[0, t_X]$ et on a

$$\begin{aligned} I_2 &\leq e^{-2\pi X \theta_X} \left| \int_0^{t_X} g_0(t - i\theta_X) dt \right| \\ &\leq e^{-2\pi X \theta_X} \int_0^{t_X} \frac{C_\delta}{\delta - \operatorname{Re}(s)} \cosh(t) dt \\ I_2 &\leq \frac{2\lambda X C_\delta}{\delta - \operatorname{Re}(s)} e^{-2\pi X \theta_X}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Choix de λ Afin que les termes I_1 et I_2 soient comparables, on détermine λ en posant la condition

$$r\beta\lambda = 2\pi\theta_X \quad (5.24)$$

I_3 : une autre condition sur θ_X On a alors la majoration suivante pour I_3 , tirée de la majoration de f en $\rho = \frac{\sinh(t_X)}{2} = \lambda X$;

$$\left| \int_{t_X}^{t_X - i\theta_X} e^{-2i\pi X(t)} g_0(t) dt \right| \leq C_\delta e^{r \frac{\delta-1}{2} \log(1+\lambda X)} (1 + 2\lambda X) \int_0^{\theta_X} e^{A(\theta)} d\theta$$

où la variation angulaire

$$A(\theta) = r\lambda X \sin \theta \log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right) - r\lambda X \cos \theta (\beta - \theta) - r\lambda X \sin \theta - 2\pi\theta X$$

vérifie $A(0) = -r\beta\lambda X$ et $A(\theta_X) = -2\pi\theta_X X$, ces deux valeurs étant supposées égales par choix de λ .

Pour simplifier la majoration de I_3 , on préférera diminuer légèrement la valeur θ_X de sorte que $A(\theta)$ soit décroissante.

En reportant l'inégalité (5.22), on a de toutes façons

$$\begin{aligned} A(\theta) &= r\lambda X \sin \theta \frac{\beta - \theta_X}{\tan \theta_X} - r\lambda X (\beta - \theta) \cos \theta - 2\pi\theta X. \\ &\leq 2\pi X \left[r \frac{\theta_X}{\beta} \sin \theta \log\left(\frac{1+\lambda X}{ex^\gamma}\right) - r \frac{\theta_X}{\beta} (\beta - \theta) \cos \theta - \theta \right] \\ &\leq 2\pi X \left[r \frac{\theta_X}{\beta} \left(\sin \theta \log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right) - \sin \theta + \theta \cos \theta \right) - \theta - r\theta_X \cos \theta \right] \\ &\leq 2\pi X \left[r \frac{\theta_X}{\beta} \sin \theta \log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right) - \theta - r\theta_X \cos \theta \right] \end{aligned}$$

et cette expression reste toujours inférieure à $2\pi X \theta_X$ si la dérivée

$$r\theta_X \cos \theta \log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right) - \beta + r\theta_X \beta \sin \theta \leq \theta_X^2 \beta r + \theta_X r \log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right) - \beta$$

reste négative, en particulier si θ_X vérifie la condition supplémentaire

$$\theta_X \leq \sqrt{\frac{1}{r} + \frac{\log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right)^2}{4\beta^2}} - \frac{\log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right)}{2\beta}.$$

Cette inégalité est vérifiée en posant

$$\theta_X \leq \frac{\beta}{r \log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right)}. \quad (5.25)$$

On choisit donc pour θ_X le minimum donné par les deux équations (5.22) et (5.25).

On a alors la majoration

$$\int_0^{\theta_X} e^{A(\theta)} d\theta \leq \theta_X e^{-2\pi X \theta_X}$$

et donc

$$I_3 \leq \frac{C_\delta \beta (1 + \lambda X)^{r \frac{\delta-1}{2}} (1 + 2\lambda X)}{\log\left(\frac{1+\lambda X}{x^\gamma}\right)} e^{-r\beta \lambda X}. \quad (5.26)$$

Bilan On a donc démontré la proposition suivante

Proposition 5.8

Soit $\beta > 0$, alors pour $X > 0$ on a

$$\log |\hat{g}_0(X)| \sim -\frac{2\pi\beta X}{r \log(1 + \frac{2\pi X}{\log X})}. \quad (5.27)$$

Plus précisément, en posant pour λ la solution de l'équation implicite

$$r^2 \lambda \log\left(\frac{1 + \lambda X}{x^\gamma}\right) = 2\pi \quad (5.28)$$

et en posant $\theta_X \simeq \frac{r\beta\lambda}{2\pi}$ satisfaisant les inégalités (5.22) et (5.25), on a

$$|\hat{g}_0(X)| \leq 2(I_1 + I_2 + I_3)$$

où les I_i obéissent aux majorations explicites (5.21), (5.23) et (5.26) dépendant de λ, θ_X et X .

Il s'agit bien d'une décroissance sous-exponentielle, ainsi que le prédit la théorie.

Démonstration : Les équations (5.24) et (5.25) (cette dernière est génériquement plus restrictive que (5.22)) permettent de définir λ par l'équation implicite de l'énoncé, puis θ_X en retour. On a alors l'équivalent

$$\lambda \sim \frac{2\pi}{r^2 \log(1 + \frac{2\pi X}{\log X})}$$

de sorte qu'en négligeant les termes polynomiaux

$$\log |\hat{g}_0(X)| \sim \log(I_1 + I_2 + I_3) \sim -\frac{2\pi\beta X}{r \log(1 + \frac{2\pi X}{\log X})}. \quad (5.29)$$

□

5.5 Pas d'intégration

En fonction des résultats précédents, nous pouvons étudier trois manières de choisir un pas d'intégration : en utilisant uniquement la proposition 5.6 avec une valeur de θ très faible ; en posant $\theta = 0$ et en utilisant de plus la proposition 5.29 ; ou encore si $r = 1$ en choisissant une valeur de θ selon ce que préconise le lemme 5.7.

5.5.1 Petit décalage θ

Afin d'éviter l'influence de x , on considère l'angle $\theta(x)$ défini en (5.7), en prenant même un angle moitié $\theta = \theta' = \frac{\beta}{2 \log x^\gamma}$.

Lemme 5.9

On définit $\theta \sim \frac{\beta}{2 \log x^\gamma}$ de sorte que 2θ vérifie (5.7), $C = \frac{2M'_{2\theta}}{r \sin(2\theta)} + M_0$, et on note ε_s le signe de $\theta - \theta_s$. Alors en posant

$$X = \frac{1}{h} \geq \frac{D_{\text{abs}} + \log(C+1)}{2\pi\theta} \sim \frac{D_{\text{abs}} \log(x_{\text{max}}^\gamma)}{\pi\beta} \quad (5.30)$$

l'erreur de quadrature vérifie

$$\left| \sum_{k \neq 0} \hat{g}_\theta\left(\frac{k}{h}\right) + \varepsilon_s 2\pi \frac{\gamma(s)v(s)x^{-s}}{e^{\varepsilon_s 2\pi \frac{(\theta - \theta_s) + it_s}{h}} - 1} \right| \leq e^{-D_{\text{abs}}}$$

Démonstration : En effet, d'après la proposition 5.6, les définitions de ε_s et C font en sorte que³

$$\left| \hat{g}_\theta(-X) + \hat{g}_\theta(X) + \varepsilon_s e^{-\varepsilon_s 2\pi\theta X} R_s(\varepsilon_s X) \right| \leq C e^{-2\pi\theta X}.$$

On somme ensuite terme à terme en les $\frac{k}{h}$, en effectuant la simplification $R_s(\varepsilon_s X) e^{-\varepsilon_s 2\pi\theta X} = R_s(0) e^{-2\pi\varepsilon_s X(\theta + i\rho_s)}$, d'où l'on tire

$$\sum_{k \neq 0} \hat{g}_\theta\left(\frac{k}{h}\right) + 2\pi \frac{R_s(0)}{e^{2\pi\varepsilon_s \frac{\theta + i\rho_s}{h}} - 1} \leq \frac{M_0 + M_{2\theta}}{e^{2\pi \frac{\theta}{h}} - 1}. \quad (5.31)$$

En posant $X = \frac{1}{h} \geq \frac{D_{\text{abs}} + \log(C + e^{-D_{\text{abs}}})}{2\pi\theta}$, la majoration du lemme est vérifiée. $\square$

5.5.2 Sans décalage

Le résultat obtenu est sensiblement le même : on ne décale pas la courbe d'intégration mais on évalue la décroissance de $\hat{g}_0$ via la proposition 5.8 pour les valeurs positives et via la proposition 5.6 avec des valeurs $\theta = 0$ et $\theta' \sim \theta_X$ pour les valeurs négatives.

Dans ce cas, on pose X tel que $2\pi X \theta_X \sim \frac{2\pi\beta X}{r \log(1 + \frac{2\pi X}{\log X})} = D_{\text{abs}}$, soit

$$X \sim \frac{r D_{\text{abs}}}{2\pi\beta} \log\left(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta}\right). \quad (5.32)$$

Il s'agit d'une valeur de même ordre que celle de (5.30).

5.5.3 Cas des fonctions de degré 1

Dans ce cas on utilise la relation fonctionnelle (5.17).

De (5.13), on tire pour $X > 0$

$$\hat{g}_\theta(X) + 2\pi(1 - \delta_{\theta,s}) e^{-2\pi X(\theta + i\rho_s)} R_s = e^{-2\pi\theta X} \hat{g}_0(X)$$

(remarque : $\theta - \theta_s > 0$ pour $\delta_{\theta,s} = 0$, c'est-à-dire si le terme est sommé.)

De même, en isolant $\hat{g}_\theta(-X)$ dans le lemme 5.7 on a

$$\hat{g}_\theta(-X) - 2\pi\delta_{\theta,s} (e^{2\pi X(\theta + i\rho_s)} + e^{-2\pi X(\pi - \theta - i\rho_s)}) R_s = e^{-2\pi(\frac{\pi}{2} - \theta)X} (-S(X) - e^{-2\pi(\frac{\pi}{2} - \theta)X} \hat{g}_0(X))$$

(remarque : $\theta - \theta_s < 0$ pour $\delta_{\theta,s} = 0$, c'est-à-dire si le terme est sommé.)

De sorte que si l'on corrige l'erreur de quadrature en tenant compte du pôle en s on obtient le résultat suivant :

³formellement, ε_s vaut $\delta_{2\theta,s} + 1 - 2\delta_{\theta,s}$.

Lemme 5.10

Soit $X > 0$. On pose toujours $\varepsilon_s = \text{sgn}(\theta - \theta_s) = 1 - 2\delta_{\theta,s}$ et

$$P_{s,\theta}(X) = \varepsilon_s e^{-\varepsilon_s 2\pi X(\theta + i\rho_s)} - \delta_{\theta,s} e^{-2\pi X(\pi - \theta - i\rho_s)}$$

alors

$$\hat{g}_\theta(X) + \hat{g}_\theta(-X) + 2\pi R_s P_{s,\theta}(X) = (e^{-2\pi\theta X} - e^{-4\pi(\frac{\pi}{2} - \theta)X})\hat{g}_0(X) - e^{-2\pi(\frac{\pi}{2} - \theta)X}S(X). \quad (5.33)$$

Démonstration : Il suffit d'ajouter les estimations pour $k < 0$ et $k > 0$, ce qui fait apparaître la correction

$$\begin{aligned} & 2\pi R_s \left[(1 - \delta_{\theta,s}) e^{-2\pi X(\theta + i\rho_s)} - \delta_{\theta,s} e^{2\pi X(\theta + i\rho_s)} - \delta_{\theta,s} e^{-2\pi X(\pi - \theta - i\rho_s)} \right] \\ &= 2\pi R_s \left[\text{sgn}(\theta - \theta_s) e^{-\text{sgn}(\theta - \theta_s) 2\pi X(\theta + i\rho_s)} - \delta_{\theta,s} e^{-2\pi X(\pi - \theta - i\rho_s)} \right]. \end{aligned}$$

□

En ajoutant l'estimation de décroissance de $\hat{g}_0(X)$ de la proposition 5.8 et la majoration (5.19), il reste à déterminer les paramètres θ et X de sorte que les deux termes apparaissant au membre de droite de (5.33) soient d'ordre $e^{-D_{\text{abs}}}$.

On doit alors déterminer des valeurs X et θ — ainsi que le paramètre λ de la proposition 5.8 — de manière à vérifier les équations suivantes

$$2\pi\theta X + \beta\lambda X = D_{\text{abs}} \quad [\text{terme } \hat{g}_0] \quad (5.34)$$

$$(\pi^2 - 2\pi\theta)X = D_{\text{abs}} + x^2 \quad [\text{terme } S(X)] \quad (5.35)$$

avec $\lambda = \lambda(X) \sim \frac{2\pi}{\log(2\pi X)}$ la constante donnée par l'équation implicite (5.28).

En sommant ces équations on déduit la valeur

$$X = \frac{2D_{\text{abs}} + x^2}{\pi^2 + \beta\lambda} \sim \frac{2D_{\text{abs}} + x^2}{\pi^2},$$

et l'angle

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{D_{\text{abs}}}{X} - \beta\lambda \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1 + \frac{\beta\lambda}{\pi^2}}{2 + \frac{x^2}{D_{\text{abs}}}} - \frac{\beta\lambda}{\pi^2} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1 - \frac{\beta\lambda}{\pi^2} (1 + \frac{x^2}{D_{\text{abs}}})}{1 + \frac{x^2}{2D_{\text{abs}}}} \right] \\ &\sim \frac{\pi}{4 + 2\frac{x^2}{D_{\text{abs}}}}. \end{aligned}$$

On fixe d'abord une valeur de λ via l'équation implicite (5.24) à partir de la minoration

$$X \geq X_0 = \frac{D_{\text{abs}} + x^2}{\pi^2}$$

ce qui détermine une valeur θ via l'équation ci-dessus.

Avec cette valeur de λ , et la majoration $X \leq X_1 = \frac{2D_{\text{abs}} + x^2}{\pi^2}$ on détermine également une constante C_1 issue de la proposition 5.8 (plus précisément des majorations (5.21), (5.23) et (5.26)) telle que

$$|\hat{g}_0(X)| \leq C_1 e^{-\beta\lambda X}$$

pour $X_0 < X < X_1$. On note d'autre part $C_2 = \frac{2\pi}{d(s+\mu_1, -2\mathbb{N})}$.

On obtient alors le lemme suivant.

Lemme 5.11

Avec les définitions de λ et θ précédentes en $x = x_{\max}$, si l'on pose

$$X = \frac{1}{h} = \max \left(\frac{D_{\text{abs}} + \log(4C_1)}{2\pi\theta + \beta\lambda}, \frac{D_{\text{abs}} + x_{\max}^2 + \log(4C_2)}{\pi^2 - 2\pi\theta} \right) \quad (5.36)$$

alors si $X \leq X_1$ ci-dessus⁴,

$$\left| \sum_{k \neq 0} \hat{g}_\theta\left(\frac{k}{h}\right) + 2\pi \frac{R_s}{e^{2\pi\epsilon_s \frac{\theta + i\rho_s}{h}} - 1} \right| \leq e^{-D_{\text{abs}}}. \quad (5.37)$$

De plus on a l'équivalent

$$X \sim \frac{D_{\text{abs}}(1 + 2\kappa)}{\pi^2\kappa}.$$

Démonstration : En sommant les termes kX de (5.33), et avec les majorations $|\hat{g}_0(kX)| \leq |\hat{g}_0(X)| \leq Ce^{-\beta\lambda X}$ et $|S(X)| \leq C_2e^{x^2}$, on a

$$\left| \sum_{k \neq 0} \hat{g}_\theta(kX) + 2\pi \frac{R_s}{e^{2\pi\epsilon_s(\theta + i\rho_s)X} - 1} \right| \leq \frac{C_1e^{-\beta\lambda X}}{e^{2\pi\theta X} - 1} + \frac{C_2e^{x^2}}{e^{(\pi^2 - 2\pi\theta)X} - 1}.$$

Avec la définition donnée pour X , chacun des membres est inférieur à $\frac{e^{-D_{\text{abs}}}}{2}$. Asymptotiquement, on a

$$X \sim \frac{2D_{\text{abs}} + x_{\max}^2}{\pi^2} \sim \frac{D_{\text{abs}}(1 + 2\kappa)}{\pi^2\kappa}$$

en utilisant (3.12). □

5.6 Complexité

Ainsi, que ce soit à l'aide d'un décalage du chemin ou non, on a

Théorème 5.12

Si $\tau \rightarrow \infty$, alors en posant

$$\beta = \frac{(r+2)D_{\text{res}}}{r\tau}, \quad (5.38)$$

la méthode double-exponentielle permet de calculer $L(s)$ à précision D_{res} avec

$$O \left(Q\tau^{1+\frac{r}{2}} \log \left(\frac{4+r}{4+2r} \tau \right)^2 \right) \quad (5.39)$$

évaluations d'exponentielle en précision

$$D_{\text{calc}} = D_{\text{res}} \left(2 + \frac{r}{2} \right) + O(\log D_{\text{res}}).$$

Démonstration : D'après les équivalents (3.13), (5.8) et (5.32) ou (5.30), on a une complexité de

$$NXt_{\max} = O \left(Q \left(\frac{D_{\text{abs}}}{r\beta} \right)^{\frac{r}{2}} \frac{rD_{\text{abs}}}{2\pi\beta} \log \left(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta} \right)^2 \right)$$

évaluations en précision $D_{\text{calc}} = D_{\text{abs}}$. En supposant la complexité de l'évaluation quasi linéaire, le lemme 2.1 avec des constantes $a = r/2 + 1 + 1$ et $b = r/2 + 1$ donne la définition de β et une complexité de

$$Q\tau^{1+\frac{r}{2}} \log \left(\frac{D_{\text{abs}}}{r\beta} \right)^2 \left(2 + \frac{r}{2} \right)^{2+\frac{r}{2}} \left(\frac{r}{r+2} \right)^{1+\frac{r}{2}}$$

évaluations en précision $D_{\text{abs}} = D_{\text{res}}(2 + \frac{r}{2})$. □

6 Double-exponentielle et facteur gaussien

Il est possible d'adopter à la fois la stratégie de Rubinstein avec le facteur de lissage gaussien centré en τ et le changement de variable double-exponentiel.

En effet le facteur de lissage apporte une décroissance exponentielle d'ordre 2 sur tout cône d'ouverture inférieure à $\frac{\pi}{4}$, qui l'emporte sur la croissance ou la décroissance de Γ , et ce tant à gauche qu'à droite de l'axe d'intégration. Il n'est dès lors pas nécessaire d'effectuer un quelconque décalage ; d'un point de vue théorique, on s'attendrait au résultat suivant :

Conjecture 6.1

Le calcul de $L(s)$ à précision D_{res} peut se faire en $O(Q\tau^{\frac{r}{2}}D_{\text{res}}\log(D_{\text{res}}))$ opérations en précision D_{calc} .

où la valeur de la précision D_{calc} n'est pas précisée... Toutefois, du fait du recentrage de l'intégration en τ , les pôles des facteurs gamma qui apparaissent dans le cône d'holomorphie introduisent un terme de complexité qui conduit plutôt au résultat suivant :

Affirmation 6.2

Le calcul de $L(s)$ à précision D_{res} peut se faire en

$$O\left(Q\tau^{\frac{r+1}{2}}\sqrt{D_{\text{res}}\log D_{\text{res}}}\right)$$

évaluations d'exponentielle en précision

$$D_{\text{res}}(1 + \frac{r}{3}) + O(\log D_{\text{res}}).$$

Nous étayons ce résultat par les estimations des paragraphes qui suivent.

6.1 Intégration

6.1.1 Intervalle d'intégration

La transformation double-exponentielle nous assure une dépendance logarithmique de l'intervalle d'intégration en les données du problème, plus précisément le logarithme de (4.12), soit

$$t_{\text{max}} \sim \log D_{\text{abs}} \tag{6.1}$$

6.1.2 Choix du pas d'intégration

Modulo la présence de pôles que nous prendrons en compte séparément ci-dessous, la décroissance apportée par le facteur de lissage permet de fixer un pas d'intégration en

$$X = O\left(\frac{D_{\text{abs}}}{2\pi\theta}\right)$$

où θ doit être choisi inférieur à $\frac{\pi}{4}$.

Pour fixer ce pas précisément, il faut évaluer l'intégrande sur les hyperboles $\mathcal{H}_{\pm\theta}$ issues de $\delta + i\tau$, en disposant par exemple d'une formule de Stirling adaptée ; nous n'avons démontré l'estimation (B.1.16) qu'à partir d'un point de l'axe réel. Numériquement, les valeurs atteintes sont raisonnables en présence du facteur exponentiel, si bien que la constante intervenant dans le O ne doit pas beaucoup dépendre de β ou τ . Les estimations ci-dessous et la valeur de θ choisie confortent ces hypothèses.

6.2 Prise en compte des pôles des facteurs gamma

Lors de la mise en œuvre de la stratégie double exponentielle, il faut prendre en compte un certain nombre de pôles contenus dans la zone d'holomorphic délimitée par l'hyperbole $\mathcal{H}_\theta$ issue de $\delta + i\tau$.

Cette courbe croise l'axe des abscisses en $-\delta_0 = \delta - \tan \theta \sqrt{\cos^2 \theta + \tau^2} \sim -\tau \tan \theta$, si bien qu'elle contient environ $\tau \tan \theta$ pôles de chacun des facteurs Γ , dont la contribution est à prendre en compte dans le cadre d'une intégration double-exponentielle centrée en τ .

Dans le cas où les décalages μ_i ont des classes distinctes dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, cette la somme vaut

$$\sum_{i=1}^r \sum_{m_i=0}^{\frac{\delta_0 - \mu_i}{2}} \frac{2x^{2m_i + \mu_i} v(-2m_i - \mu_i) \gamma_i(-2m_i - \mu_i)}{m_i! (-2m_i - \mu_i - s)}$$

où $\gamma_i(z)$ est le produit restreint $\frac{\gamma(z)}{\Gamma(\frac{z + \mu_i}{2})}$.

Si l'on ne limite pas les valeurs m_i , elle diverge.

Ils introduisent donc un terme de complexité de $Nr\tau \tan \theta$ évaluations en une précision D_{calc} que nous estimons ci-dessous.

6.2.1 Précision

La précision du calcul sera donnée par l'amplitude des termes sommés aux pôles.

Or $\max |v(-2m_i - \mu_i)| \sim e^{A(\delta_0^2 - \tau^2)}$ donc le terme maximal est d'ordre

$$2 \frac{x_{\max}^{\delta_0}}{[\delta_0/2]!} e^{A(\delta_0^2 - \tau^2)}.$$

En prenant les valeurs (3.22) pour A et (3.27) pour $x_{\max}$ on obtient une amplitude de

$$\tau \tan \theta \log \left(\frac{D_{\text{abs}}}{\beta \sqrt{\tau \tan \theta}} \right) - \frac{\nu(\nu + 2)r^2}{16D_{\text{abs}}} \tau^2 (1 - \tan^2 \theta)$$

si bien qu'on évite facilement toute augmentation de précision en prenant une valeur θ telle que

$$\frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \leq \frac{\tau \nu(\nu + 2)r^2}{16D_{\text{abs}} \log(\dots)}. \quad (6.2)$$

Pour $\tau \gg D_{\text{abs}}$, θ tend vers $\frac{\pi}{4}$.

6.3 Complexité

On obtient ainsi une complexité de $O(Nr\tau \tan \theta) + O(N \frac{D_{\text{abs}}}{\theta} \log D_{\text{abs}})$ évaluations en précision D_{abs} .

Pour τ grand, on minimise la somme de ces deux termes en posant $\theta = \sqrt{\frac{D_{\text{abs}} \log D_{\text{abs}}}{r\tau}}$. Cette définition est plus restrictive que (6.2) et assure de ne pas augmenter la précision.

Ainsi, d'après l'équivalent de N (3.28), la complexité totale de la méthode est de

$$O \left(Q D_{\text{abs}}^{\frac{r+1}{2}} \beta^{-\frac{r}{2}} \tau^{\frac{1}{2}} \sqrt{\log D_{\text{abs}}} \right)$$

opérations en précision D_{abs} .

On choisit pour finir β selon le lemme 2.1 : comme précédemment on suppose la complexité de l'évaluation quasi-linéaire pour poser $a = \frac{r+1}{2} + 1$ et $b = \frac{r}{2}$. On obtient alors $\beta = \frac{2D_{\text{res}}}{3\tau}$ et une complexité totale de

$$O \left(Q D_{\text{res}}^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{r+1}{2}} \sqrt{\log D_{\text{res}}} \right)$$

opérations en précision $D_{\text{abs}} = D_{\text{res}}(1 + \frac{r}{3})$.

7 Calcul des dérivées

Les dérivées sont données par

$$\frac{d^k}{ds^k} G(s, x) = \int_{(\delta)} \frac{\partial^k}{\partial s^k} \frac{\gamma(z)x^{-z}}{z-s} dz = (-1)^k k! \int_{(\delta)} \frac{\gamma(z)x^{-z}}{(z-s)^{k+1}} dz.$$

L'intégration numérique ne change guère, en revanche les termes dûs aux pôles en s sont modifiés.

Pôle de décalage

$$\text{Res}_{|z=s} \frac{\gamma(z)x^{-z}}{(z-s)^{k+1}} = \frac{d^k}{dz^k} \Big|_{z=s} \gamma(z)x^{-z}.$$

Or

$$\frac{d}{dz} \gamma(z)x^{-z} = \gamma(z)x^{-z} \left[\sum_{i=1}^r \frac{\Gamma'(\frac{\mu_i+z}{2})}{2\Gamma(\frac{\mu_i+z}{2})} - \log x \right] = \gamma(z)x^{-z} \left[\sum_{i=1}^r \frac{1}{2} \psi\left(\frac{\mu_i+z}{2}\right) - \log x \right]$$

où $\psi = \psi^0$ est la fonction digamma.

En considérant ses dérivées successives $\psi^{(k)}$, on obtient que

$$\frac{d^k}{dz^k} \gamma(z)x^{-z} = \gamma(z)x^{-z} P_k(\psi)(z)$$

où $P_k(\psi)$ vérifie $P_0 = \sum \psi^{(0)}/2 - \log x$ et $P_{k+1} = P_0 P_k + \frac{d}{dz} P_k$.

Formule de Poisson On considère le résidu en z tel que $\delta + i \sinh(z + i\theta) = s$ de

$$e^{-2i\pi Xz} \frac{\gamma(\delta + i \sinh(z + i\theta)) x^{-\delta - i \sinh(z + i\theta)}}{(\delta + i \sinh(z + i\theta) - s)^{k+1}}$$

c'est-à-dire, en posant

$$\varphi(z) = \text{arcsinh}(i(\delta - z)) - i\theta$$

le résidu en $z = s$ de

$$e^{-2i\pi X\varphi(z)} \frac{\gamma(z)x^{-z}}{(z-s)^{k+1}}.$$

Il est donné par

$$\frac{d^k}{dz^k} \Big|_{z=s} e^{-2i\pi X\varphi(z)} \gamma(z)x^{-z} = e^{-2i\pi X\varphi(z)} \gamma(z)x^{-z} Q_k(z)$$

où

$$Q_1(z) = \sum_i \psi(z_i) - \log(x) - \frac{2\pi X}{\sqrt{1 + (\delta - z)^2}}$$

et

$$Q_{k+1}(z) = Q_1(z)Q_k(z) + Q'_k(z).$$

Annexes

1 Formulaire

Les changements de variable faisant fréquemment intervenir les fonctions hyperboliques, on en donne ici quelques propriétés.

Trajectoires des fonctions hyperboliques Pour tous complexes x, τ :

$$\sinh(x + i\tau) = \sinh(x) \cos(\tau) + i \cosh(x) \sin(\tau); \quad (1.1)$$

$$\cosh(x + i\tau) = \cosh(x) \cos(\tau) + i \sinh(x) \sin(\tau). \quad (1.2)$$

Ainsi, la courbe paramétrée par $x \mapsto \sinh(x + i\tau)$ suit une hyperbole que l'on notera par la suite $\mathcal{H}_\tau$, d'équation cartésienne

$$\mathcal{H}_\tau : Y^2 - \tan^2 \tau X^2 = \sin^2 \tau \quad (1.3)$$

soit

$$Y = \tan \tau \sqrt{X^2 + \cos^2 \tau}.$$

Il est commode d'écrire un paramétrage mesurant l'écart aux asymptotes $Y = |X| \tan \tau$ sous la forme

$$\begin{aligned} \sinh(x + i\theta) &= \sinh(x) \cos(\theta) + i \cosh(x) \sin(\theta) \\ &= \sinh(x) e^{i\theta} + i e^{-x} \sin \theta \end{aligned}$$

où $e^{-x} \sin \theta$ est le terme d'écart.

Pour tous réels x, τ ,

$$|\sinh(x)| \leq |\sinh(x + i\tau)| = \sqrt{\sin^2(\tau) + \sinh^2(x)} \leq \cosh(x); \quad (1.4)$$

$$|\sinh(x)| \leq |\cosh(x + i\tau)| = \sqrt{\cos^2(\tau) + \sinh^2(x)} \leq \cosh(x). \quad (1.5)$$

2 Majorations

2.1 Intégrales

Lemme 2.1

Pour $\beta > \gamma > 0$ et $A, \alpha > 0$ on a

$$\int_0^\infty e^{\lambda x + A e^{\gamma x} - \alpha e^{\beta x}} dx \leq \left(\frac{\lambda + 1 + A\gamma}{\alpha\beta} \right)^{\frac{\lambda+1}{\beta-\gamma}} \exp \left[A \left(\frac{\lambda + 1 + A\gamma}{\alpha\beta} \right)^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}} - \alpha \left(\frac{A\gamma}{\alpha\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}} \right] \quad (2.1)$$

et si $A = 0$

$$\int_0^\infty e^{\lambda x - \alpha e^{\beta x}} dx \leq \left(\frac{\lambda + 1}{\alpha\beta e} \right)^{\frac{\lambda+1}{\beta}}. \quad (2.2)$$

Démonstration : En sortant $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$, on majore l'intégrale par $\sup e^{(\lambda+1)x + A e^{\gamma x} - \alpha e^{\beta x}}$, lequel est obtenu pour $\frac{(\lambda+1)e^{-\gamma x} + A\gamma}{\alpha\beta} = e^{(\beta-\gamma)x}$. Avec l'encadrement $0 < e^{-\gamma x} < 1$ on obtient le premier résultat. Le second correspond à $e^{-\gamma x} = 1$. $\square$

Remarque : Le fait que la majoration (A.2.2) soit meilleure que la limite de (A.2.1) quand $A \rightarrow 0$ est dû à l'encadrement du terme $e^{-\gamma x}$ dans le premier cas.

Lemme 2.2

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $X \in [0, \infty]$,

$$\int_0^X e^{-\alpha t^\beta} dt \leq \alpha^{-1/\beta} \frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta}. \quad (2.3)$$

Démonstration : L'intégrale est majorée par $\int_0^\infty$, puis on effectue un changement de variable. $\square$

2.2 Fonction gamma incomplète

Lemme 2.3

Soient s, x tels que $x > |s| > 0$,

$$|\Gamma_{\text{inc}}(1 + s, x)| \leq \left(1 - \frac{|s|}{x}\right)^{-1} x^{\text{Re}(s)} e^{-x} \quad (2.4)$$

et si s, x vérifient $\text{Re}(s) \leq 1$ et $x > 0$, alors

$$|\Gamma_{\text{inc}}(1 + s, x)| \leq \left(1 + \frac{|s|}{x}\right) x^{\text{Re}(s)} e^{-x}. \quad (2.5)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{inc}}(1 + s, x) &= \int_x^\infty u^s e^{-u} du \\ &= x^s e^{-x} + s \int_x^\infty \frac{u^s e^{-u}}{u} du; \end{aligned}$$

donc dans le premier cas on écrit

$$|\Gamma_{\text{inc}}(1 + s, x)| \leq x^{\text{Re}(s)} e^{-x} + \frac{|s|}{x} |\Gamma_{\text{inc}}(1 + s, x)|,$$

et dans le second, puisque $\text{Re}(s) - 1 \leq 0$,

$$|\Gamma_{\text{inc}}(1 + s, x)| \leq x^{\text{Re}(s)} e^{-x} + |s| x^{\text{Re}(s)-1} e^{-x}.$$

$\square$

2.3 Restes intégraux

Lemme 2.4

Pour tous $\alpha, \beta > 0$, et tout $X \geq 0$,

$$\int_X^\infty e^{-\alpha e^{\beta x}} dx \leq \frac{e^{-\alpha e^{\beta X}}}{\alpha \beta e^{\beta X}}. \quad (2.6)$$

Démonstration : $\int_X^\infty e^{-\alpha e^{\beta x}} dx \leq \frac{1}{\alpha \beta e^{\beta X}} \int_X^\infty \alpha \beta e^{\beta x} e^{-\alpha e^{\beta x}} dx.$ □

Lemme 2.5

Soient $\alpha, \gamma > 0$ et a, X tels que $\alpha(X+a) > \gamma$, alors

$$\int_X^\infty (a+t)^\gamma e^{-\alpha t} dt \leq \frac{(X+a)^{\gamma+1} e^{-\alpha X}}{\alpha(X+a) - \gamma}. \quad (2.7)$$

Démonstration : L'intégrale vaut

$$\begin{aligned} I &= e^{\alpha a} \int_{X+a}^\infty u^\gamma e^{-\alpha u} du \\ &= \frac{e^{\alpha a}}{\alpha^{1+\gamma}} \int_{\alpha(X+a)}^\infty u^\gamma e^{-u} du \\ &= \frac{e^{\alpha a} \Gamma_{\text{inc}}(\gamma+1, \alpha(X+a))}{\alpha^{1+\gamma}} \\ &\leq \frac{e^{\alpha a}}{\alpha^{1+\gamma} (1 - \frac{\gamma}{\alpha(X+a)})} (\alpha(X+a))^\gamma e^{-\alpha(X+a)} \end{aligned}$$

d'après (A.2.4). □

Lemme 2.6

Soient $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha X^\beta + 1 > \frac{\lambda+1}{\beta}$ (en particulier si $\alpha \beta \geq \lambda+1$),

$$\int_X^\infty t^\lambda e^{-\alpha t^\beta} dt \leq \frac{X^{\lambda+1} e^{-\alpha X^\beta}}{\alpha \beta X^\beta + \beta - \lambda - 1}.$$

Démonstration : On pose $u = t^\beta$, alors l'intégrale devient $\beta^{-1} \int_{X^\beta}^\infty u^{\frac{\lambda+1}{\beta}-1} e^{-\alpha u} du$ et on applique le lemme A.2.5. □

Lemme 2.7

Soient $\lambda, \alpha > 0$ et X tel que $\log X > 1 + \frac{(\lambda+1) \log^2 X}{\alpha X}$ (en particulier si $X \geq \frac{\lambda+1}{\alpha} \log \left(\frac{\lambda+1}{\alpha} \right)$), alors

$$\int_X^\infty t^\lambda e^{-\alpha \frac{t}{\log t}} dt \leq \frac{X^\lambda \log^2 X}{\alpha \log X - \alpha - (\lambda+1) \frac{\log^2 X}{X}} e^{-\alpha \frac{X}{\log X}}.$$

Démonstration : En intégrant par parties :

$$I = \int_X^\infty t^\lambda e^{-\alpha \frac{t}{\log t}} dt = -\frac{X^{\lambda+1}}{\lambda+1} e^{-\alpha \frac{X}{\log X}} + \frac{\alpha}{\lambda+1} \int_X^\infty \frac{t^{\lambda+1} (\log t - 1)}{(\log t)^2} e^{-\alpha \frac{t}{\log t}} dt,$$

donc

$$I \left(\frac{\alpha(X \log X - X)}{(\lambda+1) \log^2 X} - 1 \right) \leq \frac{X^{\lambda+1}}{\lambda+1} e^{-\alpha \frac{X}{\log X}}.$$

ce qui donne la conclusion si le dénominateur est positif.

□

1 Encadrement de la fonction Gamma

La formule de Stirling nous donne un équivalent de Gamma sur tout le plan complexe privé d'un secteur autour de l'axe réel négatif. Gamma y possède une décroissance simplement exponentielle.

Pour appliquer la formule double-exponentielle à la fonction f par un changement de variable en sinus hyperbolique, on s'intéresse donc au comportement de Gamma sur des demi-droites issues de $\delta > 0$.

Lemme 1.1

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon[$ et $\delta, \rho \geq 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\Gamma(\delta + i\rho e^{i\theta}) = O\left(e^{-\rho(\sin\theta - \varepsilon)\log\rho}\right). \quad (1.1)$$

Plus précisément, on démontre

Lemme 1.2

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2} - \varepsilon[$ et $\delta, \rho \geq 0$, alors on a l'estimation

$$\left|\Gamma(\delta + i\rho e^{i\theta})\right| \leq C_\delta e^{(\delta - \frac{1}{2} - \rho \sin\theta) \log(\rho+1) - \rho(\frac{\pi}{2} + \theta) \cos\theta + \rho \sin\theta} \quad (1.2)$$

où $C_\delta = \sqrt{2\pi} \left(\frac{\delta+1}{\delta(1-\sin\theta)}\right)^{2\max(\left|\delta - \frac{1}{2}\right|, \left|\frac{\delta(1-\sin^2\theta)}{1+\delta\sin\theta} - \frac{1}{2}\right|)} e^{\frac{\pi}{8\delta\cos\theta}}$.

Démonstration : En exprimant les valeurs du logarithme de Γ à l'aide de la formule d'Euler-MacLaurin, on peut écrire une formule de Stirling précisée [Rad73, 21.1(p37)] :

$$\log \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \log(s) - s + \log \sqrt{2\pi} + R(s) \quad (1.3)$$

où le reste

$$R(s) = \int_0^\infty \frac{\{x\}^2 - \{x\}}{(x+s)^2} dx \quad (1.4)$$

obéit à la majoration

$$|R(s)| \leq \frac{\pi}{8d(s, \mathbb{R}_-)} \quad (1.5)$$

($d(s, \mathbb{R}_-)$ désignant ici la distance du point s à l'axe réel négatif, et vaut le module de s ou la valeur absolue de sa partie imaginaire — selon le signe de sa partie réelle).

Pour estimer le module de la fonction gamma, il nous faut une majoration précise de la partie réelle de cette expression évaluée en $s = \delta + i\rho e^{i\theta}$.

Puisque la fonction gamma vérifie $\Gamma(\bar{s}) = \overline{\Gamma(s)}$, on peut se restreindre à considérer les valeurs de s pour lesquelles $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\rho \geq 0$.

On peut alors expliciter les différents termes de (B.1.3) en écrivant :

$$(s - \frac{1}{2}) = (\delta - \frac{1}{2} - \rho \sin \theta) + i(\rho \cos \theta) \quad (1.6)$$

$$\log(s) = \frac{1}{2} \log(\rho^2 - 2\delta\rho \sin \theta + \delta^2) + i \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\rho \sin \theta - \delta}{\rho \cos \theta}\right) \right). \quad (1.7)$$

Puisqu'il suffit de considérer la partie réelle de (B.1.3), on ramène la démonstration aux trois estimations suivantes sur la demi-droite $(\delta + i\rho e^{i\theta})_{\rho \geq 0}$:

1. parties imaginaires :

$$\left| \operatorname{Im}(s - \frac{1}{2}) \operatorname{Im}(\log(s)) - \rho \cos \theta \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right| \leq E_1(\delta, \theta)$$

2. parties réelles :

$$\left| \operatorname{Re}(s - \frac{1}{2}) \operatorname{Re}(\log(s)) - (\delta - \frac{1}{2} - \rho \sin \theta) \log(\rho + 1) \right| \leq E_2(\delta, \theta)$$

3. termes de Stirling restants :

$$\left| \operatorname{Re}(-s) + \log \sqrt{2\pi} + R(s) - (\rho \sin \theta - \delta) \right| \leq E_3(\delta, \theta)$$

qui fournissent exactement (B.1.2) avec l'erreur $C_{\delta, \theta}$ donnée par

$$\log(C_{\delta, \theta}) = E_1(\delta, \theta) + E_2(\delta, \theta) + E_3(\delta, \theta). \quad (1.8)$$

Produit des parties imaginaires On exprime à l'aide des accroissements finis

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{\rho \sin \theta - \delta}{\rho \cos \theta}\right) &= \arctan\left(\tan \theta - \frac{\delta}{\rho \cos \theta}\right) \\ &= \theta - \frac{\delta e_1}{\rho \cos \theta}, \quad |e_1| \leq 1. \end{aligned}$$

Donc on a l'estimation pour les parties imaginaires

$$\rho \cos \theta \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\tan \theta - \frac{\delta}{\rho \cos \theta}\right) \right) = \rho \cos \theta \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + E_1(\theta) \quad (1.9)$$

où

$$|E_1(\delta)| = |\delta e_1| \leq |\delta|. \quad (1.10)$$

Produit des parties réelles On extrait le terme principal en posant

$$\frac{1}{2} \log(\rho^2 - 2\delta\rho \sin \theta + \delta^2) = \underbrace{\log(\rho + 1)}_{\text{terme principal}} + \underbrace{\frac{1}{2} \log\left(\frac{\rho^2 - 2\delta\rho \sin \theta + \delta^2}{\rho^2 + 2\rho + 1}\right)}_{\text{erreur } \psi(\rho)} \quad (1.11)$$

de sorte que l'erreur E_2 est donnée par une majoration de la fonction

$$\Psi(\rho) = (\delta - \frac{1}{2} - \rho \sin \theta) \psi(\rho). \quad (1.12)$$

On remarque que ψ est une fonction valant $\log(\delta)$ pour $\rho = 0$, de limite nulle en l'infini, et atteignant son minimum

$$\psi(\rho_m) = \psi\left(\frac{\delta(\delta + \sin \theta)}{1 + \delta \sin \theta}\right) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\delta^2(1 - \sin^2 \theta)}{\delta^2 + 2\delta \sin \theta + 1}\right).$$

On peut donc écrire

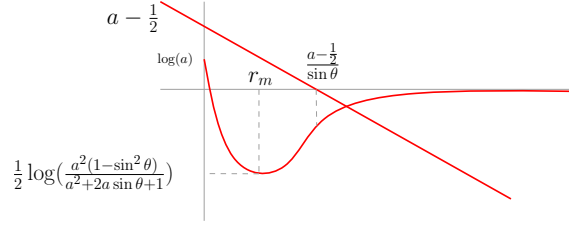


FIG. B.1: majoration du logarithme

pour $\rho \leq \rho_m$:

$$|\Psi(\rho)| \leq \max\left(\left|\delta - \frac{1}{2}\right|, \left|\delta - \frac{1}{2} - \rho_m \sin \theta\right|\right) |\psi(\rho_m)|$$

On pose $C_1 = \max\left(\left|\delta - \frac{1}{2}\right|, \left|\delta - \frac{1}{2} - \rho_m \sin \theta\right|\right)$ (cf. figure B.1).

pour $\rho \geq \rho_m$: en minorant le logarithme par concavité

$$\log(1-x) \geq \log(1-x_0) \frac{x}{x_0} \text{ pour } x \in [0, x_0] \subset [0, 1[,$$

On pose

$$x = 1 - \frac{\rho^2 - 2\delta\rho \sin \theta + \delta^2}{(\rho+1)^2} = \frac{2\rho(1+\delta \sin \theta) + 1 - \delta^2}{(\rho+1)^2}$$

$$x_0 = x|_{\rho=\rho_m} = \frac{(1+\delta \sin \theta)^2}{\delta^2 + 2\delta \sin \theta + 1} < 1$$

ce qui donne

- d'une part

$$|\log(1-x_0)| = |\psi(\rho_m)|$$

d'après le calcul ci-dessus ;

- d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_0} &= \frac{1}{\rho+1} \times \frac{2\rho(1+\delta \sin \theta) + 1 - \delta^2}{(\rho+1)(1+\delta \sin \theta)} \times \underbrace{\frac{\delta^2 + 2\delta \sin \theta + 1}{1 + \delta \sin \theta}}_{=1+\rho_m} \\ &\leq \frac{1}{\rho+1} \times \left(\frac{2\rho+1}{\rho+1}\right) \times (1+\rho_m) \\ &\leq 2 \frac{\rho_m+1}{\rho+1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |\Psi(\rho)| &= \left| \left(\delta - \frac{1}{2} - \rho \sin \theta\right) \psi(\rho) \right| \\ &\leq |\psi(\rho_m)| 2(\rho_m+1) \left| \frac{\delta - \frac{1}{2} - \rho \sin \theta}{\rho+1} \right|. \end{aligned}$$

Or $\left| \frac{\delta - \frac{1}{2} - \rho \sin \theta}{\rho+1} \right|$ est décroissant en ρ (sa dérivée vaut $\pm \frac{\sin \theta + \delta - 1/2}{(\rho+1)^2}$), donc

$$|\Psi(\rho)| \leq |\psi(\rho_m)| 2 \left| \delta - \frac{1}{2} - \rho_m \sin \theta \right| \leq 2C_1 |\psi(\rho_m)|$$

ce qui achève l'estimation pour $\rho \geq \rho_m$.

Sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, on a donc la majoration

$$|\Psi(\rho)| \leq 2C_1 |\psi(\rho_m)| = E_2(\delta, \theta). \quad (1.13)$$

Reste de Stirling La distance de la demi-droite $\delta + i\rho e^{i\theta}$ à l'axe réel négatif valant $\delta \cos \theta$, la majoration (B.1.5) permet d'écrire

$$E_3(\delta, \theta) = \log \sqrt{2\pi} + \frac{\pi}{8\delta \cos \theta}. \quad (1.14)$$

Fin de la démonstration de B.1.2 On rassemble les estimations (B.1.10), (B.1.13) et (B.1.14) pour écrire

$$\begin{aligned} \log |\Gamma(s)| &= \operatorname{Re} \left(\left(s - \frac{1}{2} \right) \log(s) - s + \log \sqrt{2\pi} + R(s) \right) \\ &= \left(\delta - \frac{1}{2} - \rho \sin \theta \right) \log(\rho + 1) - \rho \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos \theta + \rho \sin \theta - \delta \\ &\quad + E(\delta, \theta, \rho) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} |E(\delta, \theta, \rho)| &\leq E_1(\delta) + E_2(\delta, \theta) + E_3(\delta, \theta) \\ &\leq \delta + 2 \max(|\delta - 1/2|, |\delta - 1/2 - \rho_m \sin \theta|) |\psi(\rho_m)| + \log \sqrt{2\pi} + \frac{\pi}{8\delta \cos \theta}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

En simplifiant par δ , on a donc démontré B.1.2 avec la constante

$$C_{\delta, \theta} = \exp(E(\delta, \theta) - \delta).$$

□

En particulier, Γ est à décroissance exponentielle sur tout rayon $\delta + i\rho e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En revanche, Γ croît exponentiellement dès que $\theta < 0$.

1.1 Produits de facteurs gamma

Si l'on considère $\gamma(z) = \prod_{i=1}^r \Gamma(\frac{\mu_i + z}{2})$, en $z = \delta + i \sinh(t + i\theta)$, on écrit

$$\sinh(t + i\theta) = e^{i\theta} \sinh(t) + ie^{-t} \sin \theta$$

de sorte qu'en posant $\rho = \sinh(t)/2$,

$$\frac{\mu_i + z}{2} = \frac{\delta + \mu_i - e^{-t} \sin \theta}{2} + i\rho e^{i\theta}.$$

On peut donc poser $\delta_i^+ = \frac{\delta + \mu_i}{2}$ et $\delta_i^- = \frac{\delta + \mu_i - \sin \theta}{2}$ et utiliser la majoration B.1.2 terme à terme pour écrire

$$\begin{aligned} \log |\gamma(z)| &\leq \sum_{i=1}^r \log C_{\delta_i^+, \delta_i^-} + \left(\sum \delta_i^+ - \frac{r}{2} - (r \sin \theta) \rho \right) \log(1 + \rho) \\ &\quad - r \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos \theta + r \sin \theta \rho \end{aligned} \quad (1.16)$$

où l'on pose

$$C_{\delta, \delta'} = \sup_{x \in [\delta, \delta']} C_x. \quad (1.17)$$

2 Résolution des équations implicites en x et $\log(x)$

2.1 Fonction de Lambert

Lors des optimisations de paramètres, on désignera par $L_w(x)$ la solution réelle positive de

$$ze^z = x \quad (2.1)$$

où x est un réel positif.

L_w est souvent appelée *fonction de Lambert*, son prolongement multivalué à $\mathbb{C}$ ainsi que diverses applications sont étudiés dans [CGH⁺96]. Dans le domaine $\mathbb{R}_+$ que nous considérons, elle se calcule aisément par la méthode de Newton.

En posant $x_0 = \ln(x+1)$, on calcule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x^{-x_n}}{x_n + 1}.$$

2.2 Propriétés

On a les développements asymptotiques suivants :

en 0

$$L_w(x) = x - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^{-3})$$

en ∞

$$L_w(x) = \log \frac{x}{\log \frac{x}{\log \frac{x}{\dots}}}$$

ainsi que l'encadrement sur $[0, \infty[$

$$\log \left(\frac{x}{\log(1+x)} \right) \leq L_w(x) \leq \log(1+x).$$

Lemme 2.1

Soient $a, b, c > 0$, alors la solution de l'équation

$$aX + b \log X = c$$

est donnée par

$$X = \frac{a}{b} L_w \left(\frac{a}{b} e^{\frac{c}{b}} \right).$$

Démonstration : On résout en $\frac{a}{b}X$ en écrivant $\frac{a}{b}X + \log(\frac{a}{b}X) = \frac{c}{b} + \log(\frac{a}{b})$, d'où le résultat. $\square$

Autres équations On peut également écrire la solution de

$$z \log z = x$$

sous la forme $z = e^{L_w(x)} = \frac{x}{L_w(x)}$.

2.3 Cas des majorations de Gamma

On s'intéresse à une expression de la forme

$$A + B \log(1+T) + CT - DT \log(1+T).$$

Maximum Le maximum est obtenu pour la première annulation de la dérivée

$$\frac{B}{1+T} + C - D(\log(1+T) + \frac{T}{1+T}) = 0.$$

On pose d'abord $X = \frac{1}{1+T}$ pour mettre sous la forme

$$BX + C + D \log(X) - D + DX = 0$$

et le lemme B.2.1 donne

$$X = \frac{D}{B+D} L_w \left(\frac{B+D}{D} e^{-\frac{C-D}{D}} \right).$$

Avec les notations $\lambda = \frac{B+D}{D}$ et $\mu = e^{-\frac{C-D}{D}}$, le maximum est atteint en

$$T = \frac{\lambda}{L_w(\lambda\mu)} - 1.$$

2.4 Fonction L_x

Bien que la forme suivante soit exprimable à l'aide de la fonction L_w , on introduit par commodité $L_x(z)$ la solution de l'équation

$$\frac{e^z}{z} = x \quad (2.2)$$

pour $x \geq e$.

On a $L_x(z) = -L_w(-\frac{1}{z})$, et le développement

$$L_x(x) = \log(x \log(x \log(\dots))).$$

On a aussi facilement

$$L_x(x) \leq \log(2x \log x).$$

Cette fonction se calcule à nouveau très aisément par une méthode de Newton, et résout les définitions de la forme :

Lemme 2.2

Soient $a, b, D > 0$ tels que $b < D$ ou $D > aL_x(\frac{eb}{D})$, alors la solution de

$$X^a e^{-bX} \leq e^{-D}$$

est donnée par

$$X = \frac{a}{b} L_x \left(\frac{a}{b} e^{\frac{D}{a}} \right). \quad (2.3)$$

Si on suppose de plus $a = o(D)$, on a

$$X = \frac{D}{b} + \frac{a}{b} \log \left(\frac{D+a}{b} \right) + o \left(\log \left(\frac{D+a}{b} \right) \right). \quad (2.4)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} X^a e^{-bX} = e^{-D} &\Leftrightarrow e^{\frac{b}{a}X} = \left(\frac{b}{a} X \right)^{\frac{a}{b}} e^{\frac{D}{a}} \\ &\Leftrightarrow X = \frac{a}{b} L_x \left(\frac{a}{b} e^{\frac{D}{a}} \right) \end{aligned}$$

ce qui est bien défini avec les conditions données dans l'énoncé. L'équivalent s'obtient en effectuant le développement asymptotique à la main sur l'équation $X = \frac{D+a \log X}{b}$. $\square$

Un algorithme de calcul des racines de l'unités dans les corps de nombres

Sommaire

1	Courts vecteurs : algorithme de Kannan	105
2	Principe local-global	106
3	Calcul des racines par relèvement	112
4	Relation linéaire entre racines	115
5	Algorithme proposé	118
6	Comparaisons	118
1	Normes sur un corps de nombres	118

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ un corps de nombres. L'objet de cette étude est la détermination algorithmique des racines de l'unité contenues dans $\mathbb{K}$, en supposant ce dernier donné sous la forme d'un polynôme de définition et d'une base d'entiers. Par détermination, on entend l'expression d'une racine primitive sur la base d'entiers.

Après un rappel sur la stratégie d'énumération couramment employée, on suggère une approche heuristique fondée sur le principe local-global et des réductions LLL, ainsi qu'un algorithme déterministe reposant sur la factorisation du polynôme cyclotomique.

L'algorithme proposé a été intégré au logiciel de calcul PARI/gp, et adopté comme algorithme de calcul de racines par défaut (fonction `nroots`).

Notations

Dans tout ce qui suit :

- $\mathbb{K}$ désigne un corps de nombres, de degré n , d'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, de discriminant $\text{disc}_{\mathbb{K}}$.
- m est le nombre de racines de l'unité présentes ou supposées l'être dans $\mathbb{K}$. Une racine d'ordre m sera notée ζ_m .
- p est un nombre premier, $\mathfrak{p}$ un idéal premier qui le divise dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. On note $\mathbb{k}(\mathfrak{p})$ le corps résiduel associé, et $\text{Frob}_{\mathfrak{p}}$ l'automorphisme de Frobenius induit sur $\mathbb{K}$, si l'extension est galoisienne.
- σ dénote un plongement de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{C}$, et x^{σ} son action sur x .

On note $\text{Norm}(x)$ la norme algébrique d'un élément de $\mathbb{K}$.

1 Courts vecteurs : algorithme de Kannan

Le corps $\mathbb{K}$ est une extension séparable, donc on dispose de n plongements

$$\sigma : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{C}.$$

Ceci permet de définir une norme euclidienne sur le $\mathbb{Z}$ -module $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ en posant

$$T_2(x) = \sum_{\sigma} |\sigma(x)|^2$$

Les racines de l'unité présentes dans $\mathbb{K}$ sont alors caractérisées par le fait d'être les plus courts vecteurs du réseau $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ muni de la norme T_2 .

Proposition 1.1

Pour tout $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$, on a $T_2(x) \geq [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, avec égalité si et seulement si x est une racine de l'unité.

Démonstration : Posons $n = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, et soit $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique, on peut écrire

$$T_2(x) = \sum_{\sigma} |\sigma(x)|^2 \geq n \left(\prod_{\sigma} |\sigma(x)|^2 \right)^{\frac{1}{n}} = n |\text{Norm}(x)|^{\frac{2}{n}} \quad (1.1)$$

En particulier, si $x \neq 0$, $|\text{Norm}(x)| \geq 1$ ce qui démontre le premier point.

D'autre part, soit x un vecteur de norme n : le cas d'égalité arithmético-géométrique impose alors que $|\sigma(x)| = 1$ pour tout plongement.

On conclut que x est une racine de l'unité par un raisonnement classique dû à Kummer : puisque toutes les puissances de x jouissent de la même propriété, et que les coefficients du polynôme caractéristique sont bornés en les $|\sigma(x^k)|$, ces polynômes caractéristiques sont en nombre fini. Il existe donc deux exposants $k \neq l$ tels que $x^k = x^l$, et donc x est une racine de l'unité. $\square$

La détermination des racines de l'unité de $\mathbb{K}$ correspond ainsi à l'énumération des vecteurs de l'ellipsoïde $T_2(x) \leq n$.

Il existe principalement deux algorithmes de recherche de plus court vecteur pour mettre en œuvre ce principe, l'un dû à Fincke&Pohst ([FP85]), l'autre à Kannan ([Kan85]). Ce sont des algorithmes déterministes, reposant sur une réduction du réseau avant une énumération exhaustive des petits vecteurs. La complexité est toujours exponentielle, respectivement $2^{O(n^2)}$ et $O(n^{\frac{n}{2}})$ ([HS07]).

1.1 Résultats

En dépit d'une complexité théorique dirimante, cette recherche s'avère rapide dans de nombreux cas : en petite dimension (inférieure à 50), en l'absence de racines de l'unité, en présence d'un corps cyclotomique.

Cependant il est aisé de construire des extensions pour lesquelles l'énumération demande un temps très long, en particulier par composition de petits corps.

Par exemple le polynôme

$$\begin{aligned} P = & x^{66} - x^{65} + x^{64} - x^{62} + 2x^{61} - 2x^{60} + x^{59} + x^{58} - 3x^{57} + 4x^{56} - 3x^{55} \\ & + 4x^{53} - 7x^{52} + 7x^{51} - 3x^{50} - 4x^{49} + 11x^{48} - 14x^{47} + 10x^{46} + x^{45} - 15x^{44} \\ & - 20x^{43} + 21x^{42} - 36x^{41} + 16x^{40} + 5x^{39} - 41x^{38} + 57x^{37} - 52x^{36} + 11x^{35} \\ & + 46x^{34} - 98x^{33} + 109x^{32} - 63x^{31} - 35x^{30} + 144x^{29} - 207x^{28} + 172x^{27} \\ & - 28x^{26} - 179x^{25} + 351x^{24} - 379x^{23} + 200x^{22} + 151x^{21} + 114x^{20} + 86x^{19} \\ & + 65x^{18} + 49x^{17} + 37x^{16} + 28x^{15} + 21x^{14} + 16x^{13} + 12x^{12} + 9x^{11} + 7x^{10} \\ & + 5x^9 + 4x^8 + 3x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 \end{aligned}$$

définit un corps contenant les racines quarante-sixièmes de l'unité, pour lequel l'énumération, réalisée selon l'implantation du logiciel PARI/gp, a été interrompue après quatre semaines de calcul sur une machine dédiée.

2 Principe local-global

Le principe local-global est vérifié pour les racines de l'unité.

Proposition 2.1

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mu_m \subset \mathbb{K}$
- (ii) $\mu_m \subset \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ pour tout premier $\mathfrak{p}$
- (iii) pour tout p premier ne divisant pas m et tout idéal premier $\mathfrak{p}$ au-dessus de p , $\text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{m}$.

Démonstration : On considère l'extension galoisienne $\mathbb{K}(\mu(m))/\mathbb{K}$, et on suppose que pour tout premier $\mathfrak{p}$ non ramifié on a $\text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{m}$, alors l'action de $\text{Frob}_{\mathfrak{p}}$ sur une racine m -ième de l'unité est donnée par $\zeta \mapsto \zeta^{\text{Norm}(\mathfrak{p})} = \zeta$, donc ce Frobenius est l'identité. D'après le théorème de Čebotarev, le groupe de Galois est réduit à la classe de conjugaison triviale et l'extension est donc de degré 1. $\square$

Remarque : L'emploi du théorème de Čebotarev permet de remplacer *tout premier p* par *presque tout premier p* ou même *une densité positive de premiers*.

Par la suite, on note $R_{\mathbb{K}}(m, x)$ l'approximation de la propriété (iii) « jusqu'à x »

$$\forall p \leq x, \forall \mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}, \text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{m}. \quad (2.1)$$

Lorsque $\mathbb{K}$ ne contient pas μ_m , on définit à l'inverse le premier échec à ce test en posant

$$\forall p \leq x, \forall \mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}, \text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{m}. S(\mathbb{K}, m) = \inf \{p, \exists \mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \text{ t.q. } \text{Norm}(\mathfrak{p}) \not\equiv 1 \pmod{m}\}. \quad (2.2)$$

La mise en œuvre effective du principe local-global mène à étudier deux questions :

1. déterminer des valeurs $x_{\mathbb{K}}$ telles que $R_{\mathbb{K}}(m, x_{\mathbb{K}}) \Leftrightarrow \mu_m \subset \mathbb{K}$.
2. caractériser les grandes valeurs (finies) de $S(\mathbb{K}, m)$, et l'évaluer génériquement.

2.1 Théorèmes de Čebotarev effectifs

La première question est résolue par la classe des théorèmes de Čebotarev dits « effectifs ».

Sous l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH), [LO77, cor1.2] énonce le résultat suivant (où la constante est due à [Ser81]) :

Théorème 2.2

Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension galoisienne. Alors en supposant que la fonction $\zeta_{\mathbb{L}}$ de Dedekind n'a pas de zéro de partie réelle supérieure à $\frac{1}{2}$, pour toute classe de conjugaison C de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ non ramifié dans $\mathbb{K}$ tel que $\text{Frob}_{\mathfrak{p}} \in C$ et

$$\text{Norm}(\mathfrak{p}) \leq c(\log \text{disc}(\mathbb{L}))^2$$

où c est une constante absolue, que l'on peut prendre égale à 70.

On applique ce théorème à n'importe quelle classe d'isomorphismes non triviaux de l'extension $\mathbb{K}(\mu_m)/\mathbb{K}$, d'où l'on déduit la

Proposition 2.3

Si $\mu_m \not\subset \mathbb{K}$,

$$S(\mathbb{K}, m) \leq 70 \left(\log \text{disc}(\mathbb{K}(\mu_m)) \right)^2.$$

D'autre part, en utilisant les majorations de [Ser81], on peut éliminer le discriminant et donner un critère ne faisant intervenir que le degré de $\mathbb{K}$ et la ramification.

Proposition 2.4

Si $\mu_m \notin \mathbb{K}$,

$$S(\mathbb{K}, m) \leq \sqrt{70}n\varphi(m) \left(\log(n) + \log \varphi(m) + \sum_p \log p \right)$$

où p parcourt les diviseurs premiers de $m \operatorname{disc}(\mathbb{K})$.

2.2 Application : détermination heuristique

On définit la procédure suivante pour «deviner» quelles racines de l'unité sont présentes dans le corps $\mathbb{K}$: calculer le pgcd d'un certain nombre de valeurs $\operatorname{Norm}(\mathfrak{p}) - 1$ jusqu'à ce que la valeur reste stable.

On peut affiner cette prédiction en considérant les conditions de ramification que l'on peut déduire de l'inclusion $\mathbb{Q}(\zeta_m) \subset \mathbb{K}$.

Proposition 2.5

Si $\mathbb{Q}(\zeta_{p^k}) \subset \mathbb{K}$, on a

- d'une part $(p-1) \mid [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ et $k \leq 1 + v_p([\mathbb{K} : \mathbb{Q}])$;
- d'autre part $k \leq \frac{v_p(\operatorname{disc}(\mathbb{K}))}{[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]} - \frac{1}{p-1}$.

Démonstration : À partir de la multiplicativité des degrés on a

$$[\mathbb{Q}(\zeta_{p^k}) : \mathbb{Q}] = (p-1)p^{k-1} \mid [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$$

d'où l'on tire le premier point.

D'autre part, en considérant les discriminants, on peut écrire ([Lan64]) :

$$\operatorname{disc}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^k})) = \pm p^{p^{k-1}(pk-k-1)}$$

et

$$\operatorname{disc}(\mathbb{K}_1 \mathbb{K}_2) = \operatorname{disc}(\mathbb{K}_1)^{[\mathbb{K}_1 \mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_1]} \operatorname{disc}(\mathbb{K}_2)^{[\mathbb{K}_1 \mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_2]}.$$

On en tire le critère supplémentaire :

$$v_p(\operatorname{disc}(\mathbb{K})) \geq \frac{pk-k-1}{p-1} [\mathbb{K} : \mathbb{Q}], \quad (2.3)$$

d'où le second point de la proposition. □

La procédure est alors la suivante :

Algorithme 2: Heuristique sur le nombre de racines

Entrée : $\mathbb{K}$ un corps de nombres
Sortie : m tel que le nombre de racines de l'unité de $\mathbb{K}$ divise m ;
 poser $m = 0$;
répéter
 calculer la décomposition de p dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$;
 calculer le pgcd f des degrés d'inertie ;
 poser $m = \text{pgcd}(m, p^f - 1)$;
jusqu'à ce que m soit stable sur N itérations ;
pour chaque diviseur $p_i^{k_i}$ de m **faire**
 si $p_i - 1 \nmid [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ **alors**
 $k_i = 0$
 sinon
 $k_i = \min(k_i, 1 + v_{p_i}([\mathbb{K} : \mathbb{Q}])$;
 $k_i = \min(k_i, \frac{v_{p_i}(\text{disc}(\mathbb{K}))}{[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]} - \frac{1}{p_i - 1})$;
 fin
fait
retourner le produit des $p_i^{k_i}$

Le nombre de racines obtenu est dans tous les cas un multiple du nombre de racines présentes réellement dans le corps, et dans la plupart des cas on obtient la bonne valeur.

2.3 Pertinence de ce test

Cette détermination heuristique est assez perspicace en pratique. Cependant on peut construire des corps $\mathbb{K}$ pour lesquels $S(\mathbb{K}, m)$ est grand, ce qui signifie qu'une implémentation du test 2 — munie d'une valeur N raisonnable — donnera de manière erronée un multiple strict de m .

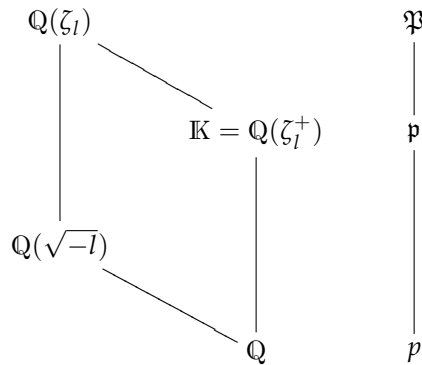
Nous esquissons de telles constructions dans les paragraphes suivants.

2.3.1 Exemple des corps cyclotomiques réels

On considère le l -ième corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_l)$, et son sous-corps totalement réel $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\zeta_l^+)$.

On cherche les premiers l permettant d'obtenir de grandes valeurs de $S(\mathbb{Q}(\zeta_l^+), l)$.

Dans $\mathbb{Q}(\zeta_l)$, on a bien sûr $\text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{l}$ pour tout premier $\mathfrak{p}$, et le degré d'inertie de $\mathfrak{p}$ est exactement l'ordre de p dans $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$. Ainsi, on aura encore $\text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{l}$ dans $\mathbb{K}$ si et seulement si p possède déjà le même degré d'inertie dans $\mathbb{K}$.



On veut donc que $\mathfrak{p}$ soit totalement décomposé dans l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{K}$, c'est-à-dire que son groupe de décomposition $\mathfrak{D}_{\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{K}}$ soit trivial.

Or $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{K})$ ne contient que la conjugaison complexe τ , donc en reportant la condition cherchée sur l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$, cela signifie que $\mathfrak{D}_{\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{Q}}$ ne doit pas contenir cette conjugaison complexe.

Puisque $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{Q})$ est cyclique, τ en est l'unique élément d'ordre 2, donc il faut et il suffit que $\#\mathfrak{D}_{\mathbb{Q}(\zeta_l)/\mathbb{Q}}$ soit impair; ceci équivaut au fait que $\mathfrak{D}_{p/p}$ n'a pas de sous groupe d'indice 2, donc p est décomposé dans l'unique sous-corps quadratique de $\mathbb{Q}(\zeta_l)$, qui est $\mathbb{Q}(\sqrt{l^*})$ avec $l^* = (-1)^{\frac{l-1}{2}}l$.

$$\text{Ainsi, } \text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{l} \Leftrightarrow \left(\frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}l}{p} \right) = 1.$$

Une recherche numérique donne des valeurs intéressantes de l ainsi que le premier p pour lequel $\text{Norm}(\mathfrak{p}) \not\equiv 1 \pmod{l}$:

premier l	$S(\mathbb{K}, l)$
2	5
41	13
1361	23
3449	29
21089	31
23201	37
70769	41
174929	47
658649	53

Les valeurs de S obtenues par cette méthode sont très faibles.

2.3.2 Exemple des composés de corps quadratiques

Là en revanche on a de meilleurs imposteurs.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ un corps quadratique. On recherche des discriminants permettant d'approcher la ramification correspondant aux racines quatrièmes et sixièmes de l'unité.

μ_4 : On veut $\text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{4}$, ce qui équivaut à ce que les premiers congrus à 3 mod 4 soient inertes. On choisit donc D tel que pour tous les petits p , $p \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow \left(\frac{D}{p} \right) = -1$.

μ_6 : Cette fois on veut $\text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{3}$, soit l'inertie $\left(\frac{D}{p} \right) = -1$ de tous les premiers $p \equiv 2 \pmod{3}$ (2 excepté).

En ne considérant qu'un corps on obtient les résultats suivants :

D	$S(\mathbb{Q}(\sqrt{D}), 4)$	$c \geq$	D	$S(\mathbb{Q}(\sqrt{D}), 6)$	$c \geq$
2	7	2.28e-1	2	17	4.21e-1
3	11	4.45e-1	-5	23	3.43e-1
6	19	3.17e-1	7	29	3.69e-1
21	43	5.48e-1	10	41	4.47e-1
-133	47	2.98e-1	17	47	7.60e-1
-253	67	3.50e-1	-177	71	4.12e-1
1190	71	2.11e-1	1295	89	2.39e-1
-1290	83	2.43e-1	-2033	101	2.47e-1
-4830	107	2.40e-1	-5270	113	2.31e-1
46221	127	2.16e-1	19587	137	2.70e-1
47033	131	2.22e-1	160978	179	1.31e-2
93057	139	2.11e-1			

En considérant des composés $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2})$ on peut également imiter la présence de racines huitièmes de l'unité, si tous les premiers congrus à 3, 5, 7 mod 8 ont un degré d'inertie non nul dans l'un des sous-corps.

Par exemple $P = x^4 + 1432x^2 + 532900$ obtenu par composition de $x^2 - 7$ et $x^2 + 723$ passe tous les tests jusqu'à $p = 131$. L'heuristique détecte donc de manière erronée des racines 24ièmes de l'unité.

En se focalisant sur les racines 8ièmes, on obtient par exemple $P = x^4 + 24x^2 + 1156$ qui passe les tests jusqu'à $p = 127$.

2.3.3 Cas quelconque : programmation linéaire

On poursuit cette idée de composition de petits corps permettant, en distribuant les propriétés d'inertie selon les sous-corps, d'obtenir de grandes valeurs de $S(\mathbb{K}, m)$.

Les techniques de programmation linéaire permettent précisément de déterminer une combinaison de corps, minimale selon un critère choisi, dont chacun satisfait une partie des relations de congruence.

Soit donc $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \dots \mathbb{K}_n$ le composé des corps $\mathbb{K}_k = \mathbb{Q}[X]/(Q_k)$.

Comme précédemment, on désire que pour tout premier p jusqu'à une certaine borne, le degré d'inertie $f_{\mathfrak{p}/p}$ de $\mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ soit multiple de l'ordre de p dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Notons

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \prod_q \prod_i \mathbb{Z}/q^{e_{q,i}}\mathbb{Z},$$

la décomposition en composantes p -primaires de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ et

$$o(p) = \prod_q q^{\alpha_{p,q}}$$

la décomposition en facteurs premiers de l'ordre de p modulo m .

En posant

$$\delta(\mathbb{K}_j, p, q^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall \mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_{\mathbb{K}_j}, \text{Norm}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{[q^\alpha]} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la vérification de $R(m, x)$ se traduit par le programme linéaire suivant, où les colonnes décrivent une famille de polynômes Q_j , et les lignes décrivent les degrés d'inertie selon chaque premier p inférieur à x :

$$\forall p \leq x, \forall q \mid o(p), \sum_j x_j \delta(\mathbb{K}_j, p, q^{\alpha_{p,q}}) \geq 1 \quad (2.4)$$

On ajoute enfin l'objectif suivant :

$$\text{Minimiser } \sum_j x_j \deg(Q_j) - \text{disc}(Q_j)^{-1}$$

pour minimiser le degré de l'extension $\mathbb{K}$ obtenue, et dans une moindre mesure son discriminant.

En l'état, ce programme linéaire produira l'extension cyclotomique comme composée de ses sous-corps, il faut donc rajouter des contraintes qui l'en empêchent, à savoir imposer une inertie trop faible sur quelque premier plus grand que p_n .

La résolution de ce programme en nombres entiers, même sans aller jusqu'à l'optimum, permet d'exhiber des extensions aux propriétés de ramification exceptionnelles du point de vue du théorème de Čebotarev effectif.

En particulier, on peut essayer par ces exemples de minorer la constante c qui intervient dans le théorème effectif 2.2. Le tableau C.1 montre quelques extensions composées obtenues, et les valeurs de c correspondantes. Ces dernières sont très faibles, en particulier dès que l'on essaie d'atteindre de grandes valeurs de S ou que l'on s'intéresse aux racines d'ordre supérieur à 6.

m	$\deg(\mathbb{K})$	$\log \text{disc}(\mathbb{K}(\mu_m))$	$S(\mathbb{K}, m)$	$c \geq$
6	8	29.1	131	1.55e-1
6	8	29.9	149	1.67e-1
4	16	137.3	991	5.26e-2
4	32	249.4	2003	3.22e-2
4	32	364.0	2999	2.26e-2
6	32	344.0	2999	2.53e-2
6	32	397.1	3089	1.96e-2

TAB. C.1: Corps déterminés par programmation linéaire avec GLPK

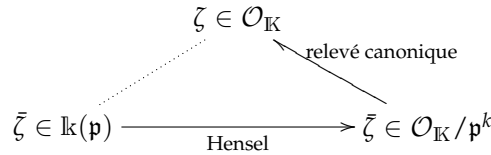
3 Calcul des racines par relèvement

Toute cette partie est une adaptation au cas des racines de l'unité de l'algorithme de factorisation dans les corps de nombres, présenté en toute généralité dans [Bel04].

3.1 Principe

Il s'agit d'une application de la démarche modulaire pour déterminer une racine d'un polynôme cyclotomique Φ_m :

1. calculer une racine ζ modulo un idéal premier $\mathfrak{p}$;
2. relever ζ modulo $\mathfrak{p}^k$ par le lemme de Hensel ;
3. prendre un relevé dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ dès que le domaine fondamental du réseau $\mathfrak{p}^k$ est suffisamment grand.



Les deux premières étapes n'occasionnent pas de difficulté particulière. Pour la troisième, il convient de s'assurer qu'un relevé coïncide avec une racine de l'unité.

3.1.1 Conditions de relèvement dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$

Pour un réseau $\mathfrak{p}^k$ donné par une base $(v_1, \dots, v_n)$, le relevé canonique de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{p}^k$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ est le relevé appartenant au domaine fondamental centré

$$D = \left\{ \sum x_i v_i, x_i \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \right\}.$$

Or on dispose d'après la proposition 1.1 d'une information de localisation des racines de l'unité :

$$\zeta \in B_{T_2}(0, n) = \{x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}, T_2(x) \leq n\}.$$

Par conséquent, l'opération de relèvement permet d'obtenir ζ si on peut inclure une boule de rayon n dans le domaine fondamental du réseau $\mathfrak{p}^k$.

À réseau fixé, ce rayon est d'autant plus grand que la base $(v_1, \dots, v_n)$

- est presque orthogonale ;
- est formée des vecteurs courts du réseau.

De manière analogue à l'optimisation réalisée pour énumérer, il est judicieux d'imposer à la base considérée d'être une base LLL-réduite, ce qui correspond précisément à satisfaire les conditions ci-dessus.

3.2 Algorithme détaillé

On suppose connaître un multiple m du nombre de racines de l'unité présentes dans $\mathbb{K}$ via l'heuristique 2.

Algorithme 3: Calcul modulaire des racines

Entrée : $\mathbb{K}$ un corps de nombres muni d'une base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, un multiple m de l'ordre de $\mu_{\mathbb{K}}$
Sortie : l'expression d'une racine primitive de $\mu_{\mathbb{K}}$

début

- choisir un idéal premier $\mathfrak{p}$;
- évaluer l'exposant k nécessaire ;
- répéter pour** k croissant
 - calculer $\mathfrak{p}^k$ et en déterminer une base LLL-réduite ;
 - calculer le rayon de la plus grande boule incluse dans le domaine fondamental D ;
- jusqu'à ce que** $B_{T_2}(0, n) \subset D$;
- pour chaque** $q = p^l$ *divisant* m **faire**
 - /*recherche de ζ_q */*
 - répéter pour** l décroissant
 - calculer une racine q ième de l'unité modulo $\mathfrak{p}$;
 - la remonter modulo $\mathfrak{p}^k$ par Hensel ;
 - jusqu'à ce que** on a un représentant ζ_q dans $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} \cap B$;
- fait**
- retourner** le produit des ζ_q

fin

Par la suite, nous donnons des détails de chaque étape.

3.2.1 Choix de l'idéal $\mathfrak{p}$

Du point de vue théorique, tout idéal non ramifié permet le déroulement des étapes ultérieures.

En pratique, il y a un arbitrage à réaliser : une grande valeur de p ainsi qu'un grand degré d'inertie permettent d'obtenir un réseau $\mathfrak{p}$ plus volumineux, ce qui permet de réduire l'exposant k . Ceci au détriment de la vitesse des calculs dans $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$.

D'un point de vue algorithmique, $\mathfrak{p}$ est déterminé par deux générateurs $\langle p, \overline{P}(\alpha) \rangle$, où $\overline{P}$ est un facteur de P modulo p , de degré $f(\mathfrak{p}/p)$.

3.2.2 Calcul dans $\mathbb{K}(\mathfrak{p})$

On utilise ici l'algorithme de Berlekamp pour factoriser le polynôme cyclotomique Φ_m dans le corps fini $\mathbb{K}(\mathfrak{p}) = \mathbb{F}_p[X]/\overline{P}$.

Par hypothèse, Φ_m est scindé à racines simples, on en sélectionne une racine $\bar{\zeta}$.

3.2.3 Relèvement

Pour tout exposant k , les puissances de $\mathfrak{p}$ sont données par

$$\mathfrak{p}^k = \langle p^k, \beta^k \rangle.$$

La valeur de $\zeta \bmod \mathfrak{p}^k$ est calculée par le lemme de Hensel.

Il reste ensuite à réduire $\mathfrak{p}^k$ par l'algorithme LLL pour «redresser» son domaine fondamental et favoriser le critère d'inclusion.

3.2.4 Critère d'inclusion

Commençons par évaluer précisément le rayon d'une boule inscriptible :

Lemme 3.1 (Plus grand rayon)

Pour un réseau Λ donné par une base $(v_1, \dots, v_n)$, notons $G = (\langle v_i, v_j \rangle)$ sa matrice de Gram.

Le rayon de la plus grande boule inscriptible dans le domaine fondamental de Λ est donné par la plus grande norme des colonnes de G^{-1}

$$R_{\max} = \frac{1}{2 \max_j \sqrt{(G^{-1})_{j,j}}}.$$

Démonstration : Ce rayon est la plus petite distance du centre de D à chacune des faces. Par translation, chacune de ces distances revient à calculer

$$d\left(\sum \frac{v_i}{2}, H_j\right) = \frac{1}{2} d(v_j, H_j)$$

où $H_j = \text{Vect}(v_1, \dots, \check{v}_j, \dots, v_n)$ est l'hyperplan engendré par les $v_i, i \neq j$.

Notons $\tilde{v}_j$ le vecteur orthogonal à H_j défini par

$$\langle \tilde{v}_j, v_i \rangle = \delta_{i,j}$$

c'est-à-dire que $\tilde{v}_j$ est solution du système

$$G\tilde{v}_j = (\delta_{i,j})_i.$$

soit la j -ième colonne de G^{-1} .

On a alors $|\langle \tilde{v}_j, v_j \rangle| = d(v_j, H_j) \|\tilde{v}_j\| = 1$, d'où

$$d(v_j, H_j) = \|\tilde{v}_j\|^{-1} = \|G_j^{-1}\|^{-1}.$$

Il reste à calculer le produit scalaire

$$\|G_j^{-1}\|^2 = {}^t G_j^{-1} G G_j^{-1} = G_{j,j}^{-1}.$$

Ce qui démontre la proposition. $\square$

Pour les calculs, il est préférable d'exprimer $\tilde{v}_i$ dans la base orthogonalisée (v_i^*) , ce qui permet de remplacer la matrice de Gram G par la matrice d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

$$K = (\langle v_i^*, v_j \rangle)_{i,j}$$

L'inversion est plus simple puisque cette matrice est triangulaire.

D'autre part, le calcul diffère au moment du calcul de la norme, puisque cette fois la norme d'un vecteur exprimé selon une base orthogonale vaut

$$\|K_j^{-1}\|^2 = \sum_i \frac{K_{i,j}^2}{\|v_i^*\|^2}.$$

D'où une expression alternative

$$R_{\max} = \frac{1}{2} \min_j \sqrt{\sum_i \frac{K_{i,j}^2}{\|v_i^*\|^2}}^{-1}. \quad (3.1)$$

Ainsi, l'on dispose d'un domaine fondamental convenable dès que $R_{\max} \geq n$ pour une base idoine du réseau $\mathfrak{p}^k$.

3.2.5 Estimation de l'exposant nécessaire

L'étape la plus coûteuse de l'algorithme consiste à effectuer une réduction LLL de l'idéal $\mathfrak{p}^k$. La complexité étant cubique en k , il est crucial d'évaluer aussi précisément que possible l'exposant k afin qu'il soit suffisant pour permettre le relèvement.

Une étude de la formule (3.1) utilisant le fait que la base est LLL réduite donne la majoration suivante ([Bel04])

$$R_{\max} \geq \frac{T_2(v_1)}{2 \left(\frac{3\sqrt{\gamma}}{2} \right)^{n-1}}.$$

Si on ajoute le fait que $v_1 \in \mathfrak{p}^k$ est de norme divisible par $\text{Norm}(\mathfrak{p})^k$, en utilisant la moyenne arithmético-géométrique (1.1) on obtient

$$T_2(v_1) \geq n \text{Norm}(\mathfrak{p})^{\frac{2k}{n}}.$$

Ce qui permet de donner une majoration de k :

$$k \leq \frac{n \log(2n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3\sqrt{\gamma}}{2} \right)^{n-1})}{2f \log(p)} = O\left(\frac{n^2}{f \log(p)} \right).$$

4 Relation linéaire entre racines

Si au terme de l'heuristique 2 on a de bonnes raisons de croire que $\mathbb{K}$ contient μ_m , on peut essayer de déterminer une racine primitive en cherchant une relation de dépendance linéaire entière entre une approximation complexe de cette racine et celles des éléments d'une base d'entiers.

De telles relations peuvent être exhibées à l'aide de l'algorithme LLL, en calculant une base réduite du réseau donné par les colonnes de la matrice suivante, où $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$ est un plongement que l'on a fixé.

$$A_{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \lfloor M \text{Re}(\omega_1^{\sigma}) \rfloor & \cdots & \lfloor M \text{Re}(\omega_n^{\sigma}) \rfloor & \lfloor M e^{\frac{2i\pi}{m}} \rfloor \\ \lfloor M \text{Im}(\omega_1^{\sigma}) \rfloor & \cdots & \lfloor M \text{Im}(\omega_n^{\sigma}) \rfloor & \lfloor M e^{\frac{2i\pi}{m}} \rfloor \end{pmatrix}$$

On choisit ici M de sorte que le plus court vecteur du réseau fournisse une l'égalité

$$e^{\frac{2i\pi}{m}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i^{\sigma},$$

c'est-à-dire ait une dernière composante nulle et des coefficients tous petits, tandis que les autres vecteurs aient plutôt une norme d'un ordre M bien supérieur.

La mise en œuvre de cette stratégie de sac à dos nécessite deux estimations : un majorant de la norme du vecteur attendu, et une minoration de la norme des autres. C'est là le contenu de la proposition 4.2 suivante.

Ensuite, les propriétés des réduites LLL (proposition 4.4) permettent de choisir la constante M pour filtrer uniquement le vecteur attendu.

Notations Tout vecteur Z de Λ est la donnée d'un entier algébrique x donné par ses coordonnées sur la base $\mathcal{O}$, et de l'approximation d'un complexe Mz formé des deux dernières composantes.

Plus précisément, pour tout vecteur $X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ k \end{bmatrix}$, on pose $Z = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ a \\ b \end{bmatrix}$ le produit $A_\Lambda X \in \Lambda$, et on

lui associe le nombre complexe $z = \sum \alpha_i \omega_i^\sigma + k e^{2i\pi/m}$.

On note $\|X\|_2 = \left(\sum \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ la norme euclidienne usuelle et $\|X\|_1 = \sum |\alpha_i|$.

On a alors

$$\|Z\|_2^2 = \sum \alpha_i^2 + a^2 + b^2 = \|X\|_2^2 + a^2 + b^2. \quad (4.1)$$

Lemme 4.1

Avec les notations précédentes, on a l'encadrement

$$\|X\|_2^2 + \left(M|z| + \sqrt{2}\|X\|_1\right)^2 \geq \|Z\|_2^2 \geq \|X\|_2^2 + \left(M|z| - \sqrt{2}\|X\|_1\right)^2$$

Démonstration : En effet, l'encadrement de la partie entière donne

$$M\operatorname{Re}(z) - \sum |\alpha_i| \leq a \leq M\operatorname{Re}(z) + \sum |\alpha_i|$$

et l'inégalité correspondante sur les parties imaginaires, donc en passant au carré,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq M^2 |z|^2 - 2M \|X\|_1 (|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|) + 2 \|X\|_1^2 \\ &\geq \left(M|z| - \sqrt{2}\|X\|_1\right)^2 \end{aligned}$$

□

Proposition 4.2

Supposons que $\mu_m \subset \mathcal{O}$, et notons

$$\zeta_m = \sum \alpha_i \omega_i$$

la racine de l'unité dont l'image par σ est $e^{\frac{2i\pi}{m}}$. Alors

- le vecteur $Z \in \Lambda$ obtenu comme image du vecteur X de composantes $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, -1)$ vérifie

$$\|Z\|_2^2 \leq 2nC_{\mathcal{O}} + 2 \quad (4.2)$$

- pour tout vecteur Z de Λ dont le nombre complexe z associé est non nul, on a

$$\|Z\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{M}{\sqrt{2}\check{C}_\sigma} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (4.3)$$

où $C_{\mathcal{O}}$ et $\check{C}_\sigma$ sont des constantes explicites dépendant de $\mathcal{O}$ et définies par les équations (1.1) et (1.4) (en appendice).

Démonstration : Au vecteur Z défini dans le premier point correspond le complexe $z = 0$, donc d'après le lemme 4.1, $\|Z\|_2^2 \leq \|X\|_2^2 + \|X\|_1^2 = \|\zeta\|_2^2 + \|\zeta\|_1 + 2$. En majorant trivialement $\|\zeta\|_1 \leq \|\zeta\|_2^2$ et d'après le corollaire 1.2 on obtient la majoration annoncée.

Le second point se déduit de la majoration établie dans le lemme 4.1, ainsi que de la minoration suivante :

Lemme 4.3

On suppose $\zeta_m \in \mathcal{O}$, alors avec les notations en cours, si $z \neq 0$ on a

$$|z| \geq \frac{1}{\check{C}_\sigma \|X\|_1^{n-1}}. \quad (4.4)$$

où $\check{C}_\sigma$ est définie dans la proposition 1.4.

Démonstration : puisque l'on suppose $\zeta_m \in \mathcal{O}$, le complexe z est le plongement par σ du vecteur $y = \sum \alpha_i \omega_i + k \zeta_m$ de $\mathcal{O}$, qui est non nul par hypothèse. Or par inégalité triangulaire, et en supposant $C_\tau \geq 1$,

$$|y^\tau| \leq |x^\tau| + |ke^{2i\pi k/m}| \leq C_\tau \|x\|_{\mathcal{O}} + |k| \leq C_\tau \|X\|_1$$

et puisque par hypothèse $y \in \mathcal{O}$, on tire le résultat de $|\text{Norm}(y)| = \prod |y^\tau| \geq 1$. $\square$

Poursuivons la démonstration de la proposition : en posant la variable $U = \|X\|_1 \geq 1$, $|z|$ vérifie le système

$$\begin{cases} \sqrt{n+2} \|Z\|_2 \geq U + |M|z| - \sqrt{2}U \\ |z| \geq \frac{1}{\check{C}_\sigma U^{n-1}} \end{cases}$$

Si $M|z| \leq \sqrt{2}U$, alors

$$U \geq \left(\frac{M}{\sqrt{2}\check{C}_\sigma} \right)^{\frac{1}{n}} = U_M \quad (4.5)$$

et donc

$$\sqrt{n+2} \|Z\|_2 \geq U_M$$

tandis que si $M|z| \geq \sqrt{2}U$, alors

$$\sqrt{n+2} \|Z\|_2 \geq \frac{M}{\check{C}_\sigma U^{n-1}} - (\sqrt{2}-1)U$$

avec un membre de droite est décroissant en U , donc toujours supérieur à sa valeur en U_M , qui est U_M . Ainsi, si $|z| \neq 0$, on a l'inégalité (4.3) voulue. $\square$

D'autre part, la réduction LLL nous donne une borne de qualité sur le vecteur court trouvé :

Proposition 4.4

Soit Λ un réseau de dimension n , et Z_1 le premier vecteur d'une réduite LLL. Alors pour tout vecteur Z non nul de Λ

$$\|Z_1\|_2 \leq 2^n \|Z\|_2.$$

Démonstration : Ceci découle directement des propriétés de la réduction LLL, c.f. [vzGG03]. Remarquer qu'ici le réseau est de dimension $n+1$. $\square$

Pour faire en sorte que, sous les hypothèses de la proposition 4.2, la réduction LLL ne puisse donner d'autre vecteur court que ceux correspondant à la racine ζ_m , il suffit de rendre impossible l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{M}{\sqrt{2}\check{C}_\sigma} \right)^{\frac{1}{n}} \leq 2^n (2nC_{\mathcal{O}} + 2)$$

c'est à dire poser

$$M > \sqrt{2} 2^{n(n+1)} \check{C}_\sigma (\sqrt{n+2} (nC_{\mathcal{O}} + 1))^n \quad (4.6)$$

On en déduit le

Théorème 4.5

Si M vérifie la condition ci-dessus, le premier vecteur Z_1 d'une réduite LLL de la matrice fournit l'alternative suivante

- soit ses n premières composantes fournissent l'expression d'une racine m -ième primitive de l'unité ζ_m ;
- sinon, $\mathcal{O}$ ne contient pas les racines m -ièmes de l'unité.

En pratique, la taille de la constante M rendrait l'exécution de cet algorithme très longue. En revanche il est possible de lancer une réduction avec une valeur de M plus faible. Si le résultat fournit une racine m -ième de l'unité, c'est parfait. Sinon il faut passer à un algorithme dont le résultat est garanti pour obtenir cette racine ou démontrer son inexistence.

5 Algorithme proposé

On réalise les étapes suivantes, en interrompant l'algorithme dès qu'il donne une réponse définitive.

Algorithme 4: Stratégie proposée

Entrée : un corps de nombres $\mathbb{K}$ muni d'une base de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$

Sortie : l'ordre de μ_m et l'expression d'une racine primitive ζ

début

déterminer $m = \#\mu_{\mathbb{K}}$ par l'heuristique 2;

si $m = 2$ **alors**

retourner $m = 2, \zeta = -1$

sinon

 essayer d'obtenir une relation de dépendance linéaire;

si on obtient ζ d'ordre m **alors**

retourner m, ζ

sinon

 exécuter l'algorithme modulaire 3;

retourner son résultat m', ζ

fin

fin

fin

6 Comparaisons

Le tableau C.2 ci-dessous donne les résultats obtenus par les algorithmes proposés sur un panel de polynômes. Une étoile (*) indique que le test a été interrompu en cours de calcul.

Ces résultats illustrent la robustesse de l'algorithme de factorisation, qui a l'avantage de toujours rendre une réponse dans un temps raisonnable, mais également l'intérêt de l'approche hybride proposée, qui résout assez rapidement les cas simples pour lesquels l'algorithme de Kannan est excellent.

1 Normes sur un corps de nombres

$\mathbb{K}$ est donné par sa base canonique $(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$, et l'ordre $\mathcal{O}$ par une base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$. On définit M la matrice des coordonnées des vecteurs ω_i dans la base (α) , de sorte que

$$(\omega_j) = (\alpha^j)M.$$

degré	racines m	factorisation	énumération	lindep
<i>petits corps</i>				
12	36	20.0ms	0.0ms	20.0ms
32	96	310.0ms	30.0ms	440.0ms
<i>grands cyclotomiques</i>				
96	194	2mn	690.0ms	5.2s
180	362	1.6h	5.4s	17.4s
<i>compositums de petits corps</i>				
54	18	7.7s	$\star > 3 \text{ j}$	2.3s
66	46	17.4s	$\star > 4 \text{ sem.}$	1.1s
72	24	15.3s	5h27	<i>échec</i>
<i>déterminés par programme linéaire</i>				
24	72	0.2s	0.1s	0.2s
48	24	11s	0.2s	1.7s
54	6	12s	0.2s	2.1s
64	4	18.6s	0.4s	3.3s
64	6	36.4s	0.4s	3.7s

TAB. C.2: comparaison des différents algorithmes

Dans ce qui suit, on indice respectivement par i et j les lignes et les colonnes des matrices, de sorte que (x_j) représente le vecteur ligne $(x_1, \dots, x_n)$ et (x_i) le vecteur colonne correspondant.

Outre la norme algébrique, on dispose de deux normes naturelles sur $\mathbb{K}$:

- la norme $T_2(x) = \sum_{\sigma} |\sigma(x)|^2$ où σ parcourt $G = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$
- la norme euclidienne $\|x\| = \|\sum_i x_i \omega_i\| = \sum_i |x_i|^2$

On peut expliciter l'équivalence entre ces normes

Proposition 1.1

Soit $x \in \mathcal{O}$, alors

$$\|VM\|^{-1} T_2(x) \leq \|x\| \leq \|(VM)^{-1}\| T_2(x)$$

où $V = (\sigma(\alpha^j))_{\sigma,j}$ est la matrice de Vandermonde des conjugués de α et M est la matrice de passage définie ci-dessus.

On note

$$C_{\mathcal{O}} = \|(VM)^{-1}\| \quad (1.1)$$

la constante intervenant à droite.

Démonstration : Les différents conjugués de x sont les

$$x^{\sigma} = [(\omega_j)(x_i)]^{\sigma} = (\alpha_j)^{\sigma} M(x_i) = V_{\sigma} M(x_i) \quad (1.2)$$

où $V_{\sigma} = ((\alpha^j)^{\sigma})$ est la ligne de V correspondant au plongement σ .

On a donc $(x^{\sigma})_{\sigma} = VM(x_i)$. La norme T_2 étant la norme euclidienne du vecteur $(x^{\sigma})_{\sigma}$, on en déduit les deux inégalités.

Si $x = \zeta$ est une racine de l'unité, on a $T_2(x) = n$ d'où le corollaire. $\square$

Corollaire 1.2

En particulier, si ζ est une racine de l'unité de $\mathbb{K}$, on a

$$\|\zeta\| \leq nC_{\mathcal{O}}. \quad (1.3)$$

1.1 Estimations sur les plongements

De l'équation (1.2) on tire également

Lemme 1.3

Pour tout $x \in \mathcal{O}$,

$$|x^\sigma| \leq \|V_\sigma\| \|M\| \|x\| = C_\sigma \|x\|.$$

Ce qui permet de démontrer une minoration des plongements

Proposition 1.4

Soit $x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$. alors

$$|\sigma(x)| \geq \frac{1}{\check{C}_\sigma \|x\|^{n-1}}$$

où

$$\check{C}_\sigma = \|M\|^{n-1} \prod_{\tau \neq \sigma} \|V_\tau\|. \quad (1.4)$$

Démonstration : En effet, $|\text{Norm}(x)| = \prod_G |\sigma(x)| \geq 1$, et on applique la majoration précédente pour les plongements $\tau \neq \sigma$. $\square$

Table des matières

Sommaire	iii
1 Introduction	1
2 Intégration numérique par la méthode double-exponentielle	7
1 Principe	7
1.1 Méthode des trapèzes et formule de Poisson	7
1.2 Exemple : le cas optimal	8
1.3 Complexité théorique	9
1.4 Régularité et décroissance	10
1.4.1 Régularité de g d'après la décroissance de $\hat{g}$	11
1.4.2 Décroissance de $\hat{g}$ d'après la régularité de g	11
1.5 Autres exemples	12
1.5.1 Une autre fonction propre	12
1.5.2 Au-delà de la gaussienne	12
1.6 Décroissance des fonctions holomorphes	13
1.6.1 Fonctions à décroissance simplement exponentielle	14
1.6.2 Fonctions à décroissance doublement exponentielle	15
1.7 Énoncé du théorème double-exponentiel	16
1.8 Optimalité du principe double-exponentiel	20
1.8.1 Principe d'incertitude	20
1.8.2 Complexité minimale	20
1.9 Exemples	22
1.10 Dimension quelconque	22
2 Méthode d'application à l'intégration sur divers domaines	23
2.1 Droite réelle	23
2.1.1 Cas d'une décroissance simplement exponentielle	23
2.1.2 Cas d'une décroissance polynomiale	26
2.2 Demi-droite	30
2.2.1 Cas d'une décroissance exponentielle	30
2.3 Intervalle compact	33
2.3.1 Présence de singularités intégrables	37
3 Validité du principe	38
3.1 Une intégrale de référence	38
3.2 Cas problématiques	38
3.2.1 Pôles dans Z_τ	38
3.2.2 Pôles proches de l'axe	39
3.2.3 Fonction Gamma	40
3.3 Résultats étendus	40
3.3.1 Bande d'holomorphie	41
3.4 Fonctions méromorphes	44
3.5 Décalages de contour	45

	3.5.1	Fonction gamma	45
	3.5.2	Oscillations	45
4		Exemples complets	46
	4.1	Fonction gamma incomplète	46
	4.1.1	Ouverture τ et décalage éventuel	46
	4.1.2	Majoration sur T_τ	47
	4.2	Fonction d'erreur	48
	4.2.1	Encadrement	48
	4.2.2	Application directe	48
	4.2.3	Avec changement de variable préliminaire	49
	4.3	Intégrales de périodes	49
	4.3.1	Comparaisons	50
3		Calculs de fonctions L	53
1		Calcul de fonctions L	53
	1.1	Équation fonctionnelle approchée	54
	1.1.1	Exponentielle verticale	54
	1.1.2	Enveloppe gaussienne	55
	1.2	Somme des résidus	55
	1.3	Intégration numérique	55
	1.3.1	Restriction	55
	1.3.2	Notations	56
	1.3.3	Méthode des trapèzes	56
	1.3.4	Convergence	56
2		Stratégies proposées	57
	2.1	Sans changement de variable	57
	2.2	Changement de variable exponentiel	57
	2.3	Décalage de contour	57
	2.4	Contour parabolique	58
	2.5	Complexité	58
	2.6	Évaluation	59
	2.7	Précalculs	62
	2.8	Algorithme	62
	2.9	Précision absolue du calcul	62
	2.10	Choix de β , complexité	63
3		Majoration de G_v	63
	3.1	Majorations des intégrales verticales	63
	3.2	Sans facteur de lissage gaussien	64
	3.2.1	Borne N de sommation	65
	3.3	Avec lissage gaussien	66
	3.3.1	Intégration selon la gaussienne	67
	3.3.2	Intégration selon l'exponentielle	70
	3.4	Validations numériques	71
	3.5	Une autre estimation	72
	3.6	Majoration lorsque $x \rightarrow 0$	72
4		Sommes de Riemann	72
	4.1	Sans enveloppe gaussienne	73
	4.1.1	Somme principale	73
	4.1.2	Pas d'intégration	73
	4.1.3	Intervalle d'intégration	74
	4.1.4	Complexité	74
	4.2	Méthode de Rubinstein	75
	4.2.1	Somme principale	75

	4.2.2	Pas d'intégration	75
	4.2.3	Intervalle d'intégration	76
	4.2.4	Complexité	76
5		Méthode double-exponentielle	76
	5.1	Notations	77
	5.2	Majoration de f sur l'hyperbole $\mathcal{H}_{\delta,\theta}$	77
	5.3	Intervalle d'intégration	79
	5.4	Estimation des transformées de Fourier	81
	5.4.1	Un lien fonctionnel	82
	5.4.2	Décroissance de $\hat{g}_0$	83
	5.5	Pas d'intégration	86
	5.5.1	Petit décalage θ	86
	5.5.2	Sans décalage	87
	5.5.3	Cas des fonctions de degré 1	87
	5.6	Complexité	89
6		Double-exponentielle et facteur gaussien	90
	6.1	Intégration	90
	6.1.1	Intervalle d'intégration	90
	6.1.2	Choix du pas d'intégration	90
	6.2	Prise en compte des pôles des facteurs gamma	91
	6.2.1	Précision	91
	6.3	Complexité	91
7		Calcul des dérivées	92
Annexes			95
A Intégration			95
1		Formulaire	95
2		Majorations	95
	2.1	Intégrales	95
	2.2	Fonction gamma incomplète	96
	2.3	Restes intégraux	97
B Fonctions L			99
1		Encadrement de la fonction Gamma	99
	1.1	Produits de facteurs gamma	102
2		Résolution des équations implicites en x et $\log(x)$	102
	2.1	Fonction de Lambert	102
	2.2	Propriétés	103
	2.3	Cas des majorations de Gamma	103
	2.4	Fonction L_x	104
C Un algorithme de calcul des racines de l'unités dans les corps de nombres			105
1		Courts vecteurs : algorithme de Kannan	105
	1.1	Résultats	106
2		Principe local-global	106
	2.1	Théorèmes de Čebotarev effectifs	107
	2.2	Application : détermination heuristique	108
	2.3	Pertinence de ce test	109
	2.3.1	Exemple des corps cyclotomiques réels	109
	2.3.2	Exemple des composés de corps quadratiques	110
	2.3.3	Cas quelconque : programmation linéaire	111
3		Calcul des racines par relèvement	112
	3.1	Principe	112

3.1.1	Conditions de relèvement dans $\mathcal{O}_K$	112
3.2	Algorithme détaillé	113
3.2.1	Choix de l'idéal $\mathfrak{p}$	113
3.2.2	Calcul dans $\mathbb{k}(\mathfrak{p})$	113
3.2.3	Relèvement	113
3.2.4	Critère d'inclusion	114
3.2.5	Estimation de l'exposant nécessaire	115
4	Relation linéaire entre racines	115
5	Algorithme proposé	118
6	Comparaisons	118
1	Normes sur un corps de nombres	118
1.1	Estimations sur les plongements	120
Table des matières		121
Table des figures		125
Bibliographie		125

Table des figures

2.1	Décalage de la droite d'intégration	11
2.2	Convergence des intégrales de fonctions $e^{-x^{2k}}$	14
2.3	Zone Z_τ pour le changement $\sinh$	24
2.4	Cône épaissi	24
2.5	Intégration double-exponentielle de la gaussienne	26
2.6	Convergence de l'intégration de $\frac{1}{\cosh \pi x}$	27
2.7	Zone Z_τ pour le changement $\sinh(\sinh)$	27
2.8	Géométrie du changement de variable $\sinh(\sinh)$	28
2.9	Zone Z_τ pour le changement $\exp(t - \alpha \exp(-\beta t))$	31
2.10	Cône tronqué	32
2.11	Zone Z_τ pour le changement $\tanh(\lambda \sinh)$	34
2.12	Encadrement de Z_τ pour le changement $\tanh(\lambda \sinh)$	35
2.13	Convergence de l'intégration de $\frac{e^{-z^2}}{1-e^{iz}-1}$	39
2.14	Décalage du chemin	41
2.15	Convergence de l'intégration de $\Gamma(\delta + iz)$	42
2.16	Zone d'holomorphie pour la fonction gamma incomplète	47
2.17	Convergence pour la fonction d'erreur	50
3.1	Chemin d'intégration et décalage	58
3.2	Décroissance de $G(s, x)$ en fonction de x	71
3.3	Prise en compte des résidus	82
B.1	Majoration du logarithme	101

Bibliographie

- [AT99] Shigeki Akiyama and Yoshio Tanigawa. Calculation of values of L -functions associated to elliptic curves. *Math. Comp.*, 68(227) :1201–1231, 1999.
- [Bei84] A. A. Beĭlinson. Higher regulators and values of L -functions. In *Current problems in mathematics, Vol. 24*, Itogi Nauki i Tekhniki, pages 181–238. Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.
- [Bel04] Karim Belabas. A relative van Hoeij algorithm over number fields. *J. Symbolic Comput.*, 37(5) :641–668, 2004.
- [BK90] Spencer Bloch and Kazuya Kato. L -functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 333–400. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [BM88] Jean-Benoît Bost and Jean-François Mestre. Moyenne arithmético-géométrique et périodes des courbes de genre 1 et 2. *Gaz. Math.*, (38) :36–64, 1988.
- [Boo06] Andrew R. Booker. Artin’s conjecture, Turing’s method, and the Riemann hypothesis. *Experiment. Math.*, 15(4) :385–407, 2006.
- [BSD65] B. J. Birch and H. P. F. Swinnerton-Dyer. Notes on elliptic curves. II. *J. Reine Angew. Math.*, 218 :79–108, 1965.
- [Car56] M. L. Cartwright. *Integral functions*. Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics, No. 44. Cambridge, at the University Press, 1956.
- [CGH⁺96] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.*, 5(4) :329–359, 1996.
- [Dok02] Tim Dokchitser. Computel : Pari package to compute motivic L -functions, 2002. available from <http://maths.dur.ac.uk/~dma0td/computel/>.
- [Dok04] Tim Dokchitser. Computing special values of motivic L -functions. *Experiment. Math.*, 13(2) :137–149, 2004.
- [Edw01] H. M. Edwards. *Riemann’s zeta function*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2001. Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York ; MR0466039 (57 #5922)].
- [Evg78] M. A. Evgrafov. *Analytic functions*. Dover Publications Inc., New York, 1978. Translated from the Russian, Reprint of the 1966 original English translation, Edited and with a foreword by Bernard R. Gelbaum.
- [FHL⁺07] Laurent Fousse, Guillaume Hanrot, Vincent Lefèvre, Patrick Pélicissier, and Paul Zimmermann. Mpf : A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding. *ACM Trans. Math. Softw.*, 33(2) :13, 2007.
- [FP85] U. Fincke and M. Pohst. Improved methods for calculating vectors of short length in a lattice, including a complexity analysis. *Math. Comp.*, 44(170) :463–471, 1985.
- [Hoo67] Christopher Hooley. On Artin’s conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 225 :209–220, 1967.
- [Hör91] Lars Hörmander. A uniqueness theorem of Beurling for Fourier transform pairs. *Ark. Mat.*, 29(2) :237–240, 1991.

- [HS07] Guillaume Hanrot and Damien Stehlé. Improved analysis of Kannan's shortest lattice vector algorithm (extended abstract). In *Advances in cryptology—CRYPTO 2007*, volume 4622 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 170–186. Springer, Berlin, 2007.
- [IK04] Henryk Iwaniec and Emmanuel Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [Kan85] R. Kannan. Lattices, basis reduction and the shortest vector problem. In *Theory of algorithms (Pécs, 1984)*, volume 44 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 283–311. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [KS00] J. P. Keating and N. C. Snaith. Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$. *Comm. Math. Phys.*, 214(1) :57–89, 2000.
- [Lan64] Serge Lang. *Algebraic numbers*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-Palo Alto-London, 1964.
- [Lav66] A. F. Lavrik. Functional equations of the Dirichlet functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 171 :278–280, 1966.
- [Lav67] A. F. Lavrik. An approximate functional equation for the Hecke zeta-function of an imaginary quadratic field. *Mat. Zametki*, 2 :475–482, 1967.
- [LMO79] J. C. Lagarias, H. L. Montgomery, and A. M. Odlyzko. A bound for the least prime ideal in the Chebotarev density theorem. *Invent. Math.*, 54(3) :271–296, 1979.
- [LO77] J. C. Lagarias and A. M. Odlyzko. Effective versions of the Chebotarev density theorem. In *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, pages 409–464. Academic Press, London, 1977.
- [LO79] J. C. Lagarias and A. M. Odlyzko. On computing Artin L-functions in the critical strip. *Math. Comp.*, 33(147) :1081–1095, 1979.
- [Mor05] Masatake Mori. Discovery of the double exponential transformation and its developments. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 41(4) :897–935, 2005.
- [MR1]
- [Odl01] A. M. Odlyzko. The 10^{22} -nd zero of the Riemann zeta function. In *Dynamical, spectral, and arithmetic zeta functions (San Antonio, TX, 1999)*, volume 290 of *Contemp. Math.*, pages 139–144. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [OS88] A. M. Odlyzko and A. Schönhage. Fast algorithms for multiple evaluations of the Riemann zeta function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 309(2) :797–809, 1988.
- [Rad73] Hans Rademacher. *Topics in analytic number theory*. Springer-Verlag, New York, 1973. Edited by E. Grosswald, J. Lehner and M. Newman, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 169.
- [Rub05a] M Rubinstein. Lcalc : C++ class library and command line program for computing zeros and values of L-functions, 2005. available from http://oto.math.uwaterloo.ca/~mrubinst/L_function_public/CODE/.
- [Rub05b] Michael Rubinstein. Computational methods and experiments in analytic number theory. In *Recent perspectives in random matrix theory and number theory*, volume 322 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 425–506. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [Ser81] Jean-Pierre Serre. Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (54) :323–401, 1981.
- [Sug97] Masaaki Sugihara. Optimality of the double exponential formula—functional analysis approach. *Numer. Math.*, 75(3) :379–395, 1997.
- [The10] The PARI Group, Bordeaux. *PARI/GP, version 2.3.5*, 2010. available from <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>.

- [Tit39] E. C. Titchmarsh. *The theory of Functions*. Oxford University Press, New York, second edition, 1939. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown.
- [TM73] Hidetosi Takahasi and Masatake Mori. Double exponential formulas for numerical integration. *Kyoto University. Research Institute for Mathematical Sciences. Publications*, 9 :721–741, 1973.
- [Tol97] Emmanuel Tollu. Zeros of Dedekind zeta functions in the critical strip. *Math. Comp.*, 66(219) :1295–1321, 1997.
- [TSM09] Ken'ichiro Tanaka, Masaaki Sugihara, Kazuo Murota, and Masatake Mori. Function classes for double exponential integration formulas. *Numer. Math.*, 111(4) :631–655, 2009.
- [Tur53] A. M. Turing. Some calculations of the Riemann zeta-function. *Proc. London Math. Soc.* (3), 3 :99–117, 1953.
- [vzGG03] Joachim von zur Gathen and Jürgen Gerhard. *Modern computer algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2003.