Thèse de doctorat

Université Paris-Est

École Doctorale : ICMS

Discipline : **Mathématiques**

Inégalités géométriques et fonctionnelles

par

Joseph Lehec

Soutenue le 3 décembre 2008 devant un jury composé de

MM.	**Franck Barthe**	Rapporteur
	Dario Cordero-Erausquin	Examinateur
	Olivier Guédon	Examinateur
	Bo'az Klartag	Rapporteur
	Rafał Latała	Examinateur
	Bernard Maurey	Directeur de thèse
	Mathieu Meyer	Examinateur
	Alain Pajor	Examinateur

Je mesure la chance que j'ai d'avoir eu Bernard Maurey pour directeur de thèse. Je le remercie de m'avoir fait profiter de son savoir et de son intuition, je le remercie également pour sa patience et sa bonne humeur.

Je suis très reconnaissant à Franck Barthe et Bo'az Klartag de s'être intéressés à mon travail et d'avoir accepté d'être rapporteurs.

J'ai effectué cette thèse au sein du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques appliquées de l'Université Paris-Est, le groupe de travail *Méthodes probabilistes en convexité* fut une source constante d'inspiration et de motivation, je remercie tous ceux qui y ont participé, notamment Mathieu Meyer et Alain Pajor, qui me font l'honneur d'être membres de mon jury, mais aussi Matthieu Fradelizi, Nathaël Gozlan et Cyril Roberto. Cette thèse doit aussi beaucoup à l'Équipe d'Analyse de l'Université Pierre et Marie Curie, et c'est un grand plaisir d'avoir Dario Cordero-Erausquin et Olivier Guédon dans mon jury.

Je voudrais remercier une seconde fois Alain Pajor, pour son implication dans le réseau européen *Phenomena in High Dimension*, qui m'a permis de participer à de nombreuses conférences, qui m'ont été très profitables. Par ce biais j'ai pu rencontrer des chercheurs de haut vol comme Keith Ball, qui m'a accueilli pendant trois mois à Londres, ou Rafał Latała qui me fait l'honneur de participer à mon jury.

Résumé. La majeure partie de cette thèse est consacrée à l'inégalité de Blaschke-Santaló, qui s'énonce ainsi : parmi les ensembles symétriques, la boule euclidienne maximise le produit $\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^\circ)$, K° désignant le polaire de K. Il existe des versions fonctionnelles de cette inégalité, découvertes par plusieurs auteurs (Ball, Artstein, Klartag, Milman, Fradelizi, Meyer...), mais elles sont toutes dérivées de l'inégalité ensembliste. L'objet de cette thèse est de proposer des démonstrations directes de ces inégalités fonctionnelles. On obtient ainsi de nouvelles preuves de l'inégalité de Santaló, parfois très simples.

La dernière partie est un peu à part et concerne le chaos gaussien : on démontre une majoration précise des moments du chaos gaussien due à Latała par des arguments de chaînage à la Talagrand.

Mots clés. Analyse fonctionnelle, inégalités, convexité, processus gaussiens.

Geometric and Functional Inequalities

Abstract. This thesis is mostly about the Blaschke-Santaló inequality, which states that among symmetric sets, the Euclidean ball maximises the product $\mathrm{vol}(K)\,\mathrm{vol}(K^\circ)$, where K° is the polar body of K. Several authors (Ball, Artstein, Klartag, Milman, Fradelizi, Meyer...) were able to derive functional inequalities from this inequality. The purpose of this thesis is to give direct proofs of these functional Santaló inequalities. This provides new proofs of Santaló, some of which are very simple.

The last chapter is about Gaussian chaoses. We obtain a sharp bound for moments of Gaussian chaoses due to Latała, using the *generic chaining* of Talagrand.

Keywords. Functional analysis, inequalities, convex geometry, gaussian processes.

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse on travaille sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de deux éléments x, y de $\mathbb{R}^n$ est noté $x \cdot y$ et $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ désigne la norme euclidienne de x. La boule euclidienne $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \leq 1\}$ est notée B_2^n. La notation vol_n désigne la mesure de Lebesgue. L'exemple fondamental d'inégalité géométrique est le théorème suivant.

Inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik. *Soient A et B deux sous-ensembles compacts et non vides de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$\mathrm{vol}_n(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \mathrm{vol}_n(A)^{\frac{1}{n}} + \mathrm{vol}_n(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Cette inégalité a de multiples applications. Elle permet notamment de résoudre le problème de l'isopérimétrie sur $\mathbb{R}^n$. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et D la boule euclidienne de même volume que A. L'inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik et l'homogénéité du volume impliquent

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(A + \epsilon B_2^n) &\geq \big(\mathrm{vol}_n(A)^{\frac{1}{n}} + \epsilon \, \mathrm{vol}_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}\big)^n \\ &= \mathrm{vol}_n(D + \epsilon B_2^n), \end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$. L'accroissement de volume est donc plus grand quand on épaissit A que quand on épaissit D. En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient l'inégalité isopérimétrique : parmi les ensembles de volume donné, la boule euclidienne minimise la surface.

Soit $\lambda \in (0,1)$, comme $\big(\lambda a^{1/n} + (1-\lambda) b^{1/n}\big)^n \geq a^\lambda b^{1-\lambda}$ pour tous réels positifs a et b, l'inégalité (1) implique

$$\mathrm{vol}_n\big(\lambda A + (1-\lambda) B\big) \geq \mathrm{vol}_n(A)^\lambda \, \mathrm{vol}_n(B)^{1-\lambda}. \tag{2}$$

De plus, il n'est pas difficile de retrouver (1) à partir de (2) en utilisant l'homogénéité du volume. L'inégalité (2) possède en outre l'avantage de rester vraie si les ensembles A ou B sont vides et de ne pas faire intervenir la dimension. Elle permet également de deviner une version fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski due à Prékopa [23, 24] et Leindler [16].

Inégalité de Prékopa-Leindler. *Soient* $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, *et* $\lambda \in (0,1)$ *tels que pour tous* x *et* y *dans* $\mathbb{R}^n$ *on ait*

$$f_3\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq f_1(x)^\lambda f_2(y)^{1-\lambda}.$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_3 \geq \big(\int_{\mathbb{R}^n} f_1\big)^\lambda \big(\int_{\mathbb{R}^n} f_2\big)^{1-\lambda}.$$

Naturellement si on applique ce théorème aux fonctions indicatrices de A, B et $\lambda A + (1-\lambda)B$ on retrouve l'inégalité (2).

Donnons la démonstration de cette inégalité par récurrence sur la dimension. Si $n = 1$ on peut faire comme suit. Par homogénéité, on peut supposer $\int_{\mathbb{R}} f_1 = \int_{\mathbb{R}} f_2 = 1$, auquel cas il existe une fonction croissante x de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout t

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f_1(s)\,ds = \int_0^t f_2(s)\,ds.$$

Admettons que x est dérivable, en dérivant on obtient $x'(t) f_1(x(t)) = f_2(t)$. Posons $z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda)t$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$\begin{aligned} z'(t) &= \lambda x'(t) + (1-\lambda) \\ &\geq x'(t)^\lambda = f_2(t)^\lambda f_1(x)^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} f_3 &\geq \int_{\mathbb{R}} f_3(z(t)) z'(t)\,dt \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} f_1(x)^\lambda f_2(t)^{1-\lambda} f_2(t)^\lambda f_1(x)^{-\lambda} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_2 = 1, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Dans le cas général, on peut se ramener au cas x dérivable par un argument de densité.

Supposons que l'inégalité est vraie en dimension $n-1$, on identifie $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $i = 1, 2, 3$, on pose $(f_i)_x\colon t \mapsto f_i(x,t)$ et

$$F_i\colon x \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_i(x,t)\,dt.$$

Fixons x, y dans $\mathbb{R}^{n-1}$, on a pour tous réels s, t

$$(f_3)_{\lambda x+(1-\lambda)y}(\lambda s + (1-\lambda)t) \geq (f_1)_x(s)^\lambda (f_2)_y(t)^{1-\lambda},$$

En appliquant l'inégalité réelle on obtient

$$F_3(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq F_1(x)^\lambda F_2(y)^{1-\lambda}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_3 \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_1\Big)^\lambda \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_2\Big)^{1-\lambda}$$

ce qui est le résultat par Fubini.
L'inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik est donc un cas particulier de l'inégalité de Prékopa-Leindler ; laquelle se démontre très facilement par récurrence. On voudrait copier ce modèle pour une autre inégalité géométrique très importante.

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, le polaire de K est défini par

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall y \in K,\ x \cdot y \leq 1\}.$$

Remarquons que $B_2^n = \left(B_2^n\right)^\circ$.

Inégalité de Blaschke-Santaló. *Soit K un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ ayant son centre de masse en 0, alors*

$$\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leq \mathrm{vol}_n(B_2^n)^2. \tag{3}$$

Ce résultat est dû à Blaschke pour les dimensions 2 et 3 et à Santaló [26] pour le cas général. La démonstration de Santaló repose sur le calcul des variations. Des démonstrations plus simples, par des arguments de symétrisation, ont été trouvées depuis par Saint-Raymond [25], puis par Meyer et Pajor [20].

Il existe plusieurs versions fonctionnelles de cette inégalité, dues à Keith Ball [3], Artstein, Klartag et Milman [2] ou encore Fradelizi et Meyer [11]. Énonçons le résultat de Keith Ball.

Version fonctionnelle de Santaló (Keith Ball). *Soient $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $\rho\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Si pour tous x, y vérifiant $x \cdot y \geq 0$ on a*

$$f(x)g(y) \leq \rho(\sqrt{x \cdot y})^2 \tag{4}$$

et si f est paire, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x|)\, dx\Big)^2.$$

Par exemple, si $f = \mathbf{1}_K$, $g = \mathbf{1}_{K^\circ}$ et $\rho = \mathbf{1}_{[0,1]}$, alors (4) est clairement vraie, ce qui montre que l'inégalité de Keith Ball implique l'inégalité de Santaló pour les ensembles symétriques.

Artstein, Klartag et Milman s'intéressent au cas $\rho(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, qui pousse à introduire la notion de polarité suivante. Si f est une fonction positive, sa polaire est définie par

$$f^\circ : x \mapsto \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \Big(\frac{\mathrm{e}^{-x \cdot y}}{f(y)}\Big). \tag{5}$$

De manière équivalente $\big(\mathrm{e}^{-\phi}\big)^\circ = \mathrm{e}^{-\mathcal{L}\phi}$, où $\mathcal{L}\phi$ est la transformée de Legendre de ϕ :

$$\mathcal{L}\phi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \big(x \cdot y - \phi(y)\big).$$

En particulier f° est log-concave, et remarquons que $\big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x|^2}\big)^\circ = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x|^2}$. Dans ce cas particulier, l'inégalité de Ball s'écrit ainsi : si f est paire, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} f^\circ \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x|^2}\,dx\Big)^2 = (2\pi)^n. \tag{6}$$

Cette inégalité permet elle aussi de retrouver Blaschke-Santaló dans le cas symétrique. En effet, soit K un convexe et N_K la norme associée. L'inégalité

$$x \cdot y \leq N_K(x) N_{K^\circ}(y) \leq \tfrac{1}{2} N_K(x)^2 + \tfrac{1}{2} N_{K^\circ}(y)^2$$

permet de montrer que $\big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}N_K^2}\big)^\circ = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}N_{K^\circ}^2}$. Si K est symétrique on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}N_K^2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}N_{K^\circ}^2} \leq (2\pi)^n$$

ce qui est le résultat, car en intégrant $\mathbf{1}_K$ et $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}N_k^2}$ en polaire on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}N_K^2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}$$

et de même pour K°.

Le barycentre d'une fonction f vérifiant $0 < \int f < \infty$ et $\int |x| f(x)\,dx < \infty$, est défini par

$$\mathrm{bar}(f) = \frac{\int f(x) x\,dx}{\int f(x)\,dx}.$$

Les auteurs de [2] s'intéressent au cas non-symétrique de l'inégalité (6). Ils démontrent qu'il suffit que le barycentre de f° soit en 0 pour qu'elle soit vraie. Pour ce faire, il suffit de montrer qu'il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_z \int_{\mathbb{R}^n} (f_z)^\circ \leq (2\pi)^n,$$

en posant $f_z\colon x \mapsto f(x+z)$. En effet, comme $(f_z)^\circ(y) = f^\circ(y)\mathrm{e}^{z\cdot y}$, en multipliant l'inégalité $1 \le \mathrm{e}^{y\cdot z} - y\cdot z$ par $f^\circ(y)$ et en intégrant en y il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\circ(y)\,dy \le \int_{\mathbb{R}^n} (f_z)^\circ(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} (y\cdot z) f^\circ(y)\,dy.$$

Si $\mathrm{bar}(f^\circ) = 0$, le dernier terme est nul et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} f^\circ \le \int_{\mathbb{R}^n} (f_z) \int_{\mathbb{R}^n} (f_z)^\circ$$

pour tout z.

Enfin Fradelizi et Meyer démontrent une version non-symétrique de l'inégalité de Ball, dans le cas général (c'est-à dire pour n'importe quel ρ).

Dans ces trois articles [3, 2, 11], les preuves utilisent l'inégalité ensembliste (3), soit en l'appliquant aux ensembles de niveau de la fonction f, soit à d'autres ensembles associés à la fonction. Dans les chapitres 1, 2 et 3, on démontre toutes ces inégalités, avec des preuves plus simples que les preuves originelles, mais surtout directes, c'est-à dire ne faisant pas appel à l'inégalité de Blaschke-Santaló.

On utilisera beaucoup l'inégalité de Prékopa-Leindler pour la moyenne géométrique, ou inégalité de Prékopa-Leindler logarithmique, due à Borell [6].

Inégalité de Prékopa-Leindler logarithmique. *Soient* $g_1, g_2, g_3\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant* $g_1(s)g_2(t) \le g_3(\sqrt{st})^2$ *pour tous* $s, t \in \mathbb{R}_+$. *Alors*

$$\int_{\mathbb{R}_+} g_1 \int_{\mathbb{R}_+} g_2 \le \Big(\int_{\mathbb{R}_+} g_3\Big)^2.$$

Cette inégalité s'obtient en appliquant Prékopa à f_1, f_2, f_3, avec $f_i(x) = g_i(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$. Pour d'autres démonstrations et applications, on peut voir [3, 8]. Donnons le lien entre cette inégalité et l'inégalité de Santaló. Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\rho\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant (4). En appliquant deux fois l'inégalité précédente on trouve

$$\int_{\mathbb{R}_+} f \int_{\mathbb{R}_+} g \le \Big(\int_{\mathbb{R}_+} \rho\Big)^2$$
$$\int_{\mathbb{R}_-} f \int_{\mathbb{R}_-} g \le \Big(\int_{\mathbb{R}_+} \rho\Big)^2.$$

En additionnant ces deux inégalités, il vient

$$\int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g \le \frac{1}{4\theta(1-\theta)}\Big(\int_{\mathbb{R}} \rho(|t|)\,dt\Big)^2$$

où $\theta = \frac{\int_{\mathbb{R}_+} f}{\int_{\mathbb{R}} f}$. Remarquons que $4\theta(1-\theta)$ atteint son maximum 1 quand $\theta = \frac{1}{2}$, c'est-à dire quand 0 est une médiane pour f. C'est en particulier le cas quand f est paire, on a donc démontré l'inégalité de Keith Ball en dimension 1. On retrouvera aux chapitres 2 et 3 ce phénomène *d'équipartition*, qui veut qu'il se passe quelque chose quand on découpe l'espace en parties de même mesure pour la fonction f.

On présente ci-dessous nos travaux chapitre par chapitre.

Dans le **Chapitre 1** on s'intéresse à la propriété (τ), introduite par Maurey dans [19]. Soit (X,μ) un espace de probabilité et $c : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $c(x,y) = c(y,x)$ et $c(x,x) = 0$ pour tous x,y (on parlera de fonction de coût). Par exemple c peut-être une distance, ou le carré d'une distance. On dira que le couple (μ, c) vérifie la propriété (τ) si toute fonction minorée f vérifie

$$\int \mathrm{e}^{-f}\, d\mu \int \mathrm{e}^{f \boxdot c}\, d\mu \leq 1, \tag{7}$$

où $f \boxdot c$ est l'inf-convolée de f et c :

$$f \boxdot c(x) = \inf_{y \in X} \big(f(y) + c(x,y) \big). \tag{8}$$

En prenant $y = x$ dans cette définition on trouve $f \boxdot c \leq f$ ce qui est raisonnable pour espérer avoir (7) puisque par Jensen on a toujours $\int \mathrm{e}^{-f} \int \mathrm{e}^{f} \geq 1$. La propriété (τ) est une propriété de concentration de la mesure. En effet, soit (μ, c) vérifiant (τ) et $A \subset X$. Prenant pour f la fonction qui vaut 0 sur A et $+\infty$ ailleurs, on a

$$f \boxdot c(x) = c(x, A) := \inf_{y \in A} c(x,y),$$

et (7) devient

$$\int \mathrm{e}^{c(x,A)}\, d\mu(x) \leq \frac{1}{\mu(A)}.$$

Supposons que A est de mesure $\frac{1}{2}$, et que c est le carré d'une distance d. En utilisant Markov, l'inégalité précédente montre que la mesure de l'épaissi

$$\{x \in X \mid d(x,A) \leq t\}$$

de A est au moins $1 - 2\mathrm{e}^{-t^2}$. Ainsi, l'espace (X, μ, d) possède une concentration gaussienne, au sens de Ledoux [15].

Maurey remarque que la mesure gaussienne vérifie la propriété (τ) avec un coût quadratique. Soit N le carré de la norme euclidienne $N(x) = |x|^2$ et

c le coût $c(x,y) = N(x-y)$. Par définition de l'inf-convolée et en utilisant le parallélogramme, on a pour tous x, y

$$\begin{aligned}(f \boxdot \tfrac{c}{4})(x) - \tfrac{1}{2}|x|^2 - f(y) - \tfrac{1}{2}|y|^2 &\leq \tfrac{1}{4}|x-y|^2 - \tfrac{1}{2}|x|^2 - \tfrac{1}{2}|y|^2 \\ &= |\tfrac{1}{2}(x+y)|^2.\end{aligned}$$

Ce qui montre que le triplet de fonctions

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathrm{e}^{f \boxdot \frac{c}{4} - \frac{N}{2}} \\ f_2 &= \mathrm{e}^{-f - \frac{N}{2}} \\ f_3 &= \mathrm{e}^{-\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

vérifie les hypothèses de Prékopa-Leindler, avec $\lambda = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\int \mathrm{e}^{-f}\, d\gamma_n \int \mathrm{e}^{f \boxdot \frac{c}{4}}\, d\gamma_n \leq 1.$$

Autrement dit $(\gamma_n, \frac{c}{4})$ vérifie la propriété (τ). Il est fait mention dans l'article [2] d'un lien entre la propriété (τ) gaussienne et l'inégalité fonctionnelle de Santaló. En effet si $\mathcal{L}$ désigne la transformée de Legendre, on a

$$-\mathcal{L}(f + \tfrac{N}{2}) = (f \boxdot \tfrac{c}{2}) - \tfrac{N}{2}.$$

Soit f minorée et paire, en appliquant l'inégalité (6) à la fonction (paire) $\mathrm{e}^{-f-\frac{N}{2}}$, et en utilisant l'égalité précédente, on obtient

$$\int \mathrm{e}^{-f}\, d\gamma_n \int \mathrm{e}^{f \boxdot \frac{c}{2}}\, d\gamma_n \leq 1.$$

Ce qui signifie que si on se restreint aux fonctions paires, on a la propriété (τ) avec le coût $\frac{c}{2}$ au lieu de $\frac{c}{4}$ (ce qui est mieux, plus le coût est grand, meilleure est l'inégalité).

On obtient donc la correspondance suivante

$$\begin{array}{rcl} \text{Prékopa-Leindler} & \longleftrightarrow & \text{Propriété } (\tau) \\ \text{Santaló fonctionnel} & \longleftrightarrow & \text{Propriété } (\tau) \text{ paire} \end{array}$$

L'objet de cette deuxième partie est de démontrer directement la propriété (τ) paire pour la mesure gaussienne, sans passer par l'étape Santaló. L'approche donne aussi une démonstration de la propriété (τ) usuelle qui ne fait pas appel à Prékopa.

La démonstration se fait en deux étapes, on montre d'abord une propriété (τ) pour des petites gaussiennes puis on tensorise. Le résultat pour les petites gaussiennes s'obtient en faisant un développement de Taylor pour f et $f \boxdot \frac{c}{2}$ et en utilisant l'inégalité de Poincaré : pour f suffisamment régulière de moyenne nulle, on a

$$\int f^2 \, d\gamma_n \leq \int |\nabla f|^2 \, d\gamma_n.$$

On peut démontrer cette inégalité en remarquant que l'opérateur

$$L = \Delta - x \cdot \nabla$$

est auto-adjoint dans $L_2(\gamma)$, qu'il se diagonalise dans la base des polynômes d'Hermite et que son spectre est $\mathbb{N}$. Cette démonstration montre que si f est de moyenne nulle et *paire*, alors il faut aller chercher la deuxième valeur propre et on obtient

$$\int f^2 \, d\gamma_n \leq \frac{1}{2} \int |\nabla f|^2 \, d\gamma_n.$$

Cette inégalité améliorée pour les fonctions paires ($\frac{1}{2}$ au lieu de 1) se répercute et explique qu'on obtienne une propriété (τ) améliorée pour les fonctions paires, avec $\frac{c}{2}$ au lieu de $\frac{c}{4}$.

Pour tensoriser la propriété (τ) paire, on utilise un argument de symétrisation, méthode classique pour démontrer des inégalités ensemblistes, mais peu utilisée pour les versions fonctionnelles. Soit K est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ et H un hyperplan vectoriel. Soit P_H la projection orthogonale sur H, et v un vecteur unitaire orthogonal à H. Pour tout $x \in P_H(K)$, l'intersection de la perpendiculaire à H passant par x et de K est un segment, soit $\ell_H(x)$ sa longueur. Le *symétrisé* $s_H(K)$ de *Steiner* de K est l'union de segments

$$s_H(K) = \bigcup_{x \in P_H(K)} \big(x + [-\tfrac{1}{2}\ell_H(x), \tfrac{1}{2}\ell_H(x)]v\big).$$

C'est un outil très important en géométrie des convexes. Comme son nom l'indique $s_H(K)$ est symétrique par rapport à H, et il est facile de voir qu'il est convexe. De plus, par Fubini

$$\mathrm{vol}_n\big(s_H(K)\big) = \int_H \ell_H(x) \, dx = \mathrm{vol}_n(K).$$

On renvoie à [5] pour une présentation plus détaillée et un certain nombre d'applications. Dans [20], Meyer et Pajor montrent en utilisant l'inégalité de Brunn-Minkowski-Lusternik que si K est symétrique, alors $\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leq \mathrm{vol}_n\big(s_H(K)^\circ\big)$. Par conséquent, le produit $\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K^\circ)$ augmente après symétrisation. Il est par ailleurs bien connu qu'il existe une suite $(H_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'hyperplans telle que la suite $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de corps convexes définie par

$$K_p = s_{H_p}(\cdots s_{H_1}(s_{H_0}(K))\cdots)$$

converge (au sens de Hausdorff) vers la boule euclidienne de même volume que K. En passant à la limite dans l'inégalité

$$\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leq \mathrm{vol}_n(K_p)\,\mathrm{vol}_n(K_p^\circ)$$

ils obtiennent l'inégalité de Blaschke-Santaló pour les ensembles symétriques.

Revenons à la propriété (τ). Toujours dans l'article [19], Maurey démontre que la propriété (τ) se tensorise : si (X,μ,c_1) et (Y,ν,c_2) vérifient (τ) alors $(X\times Y,\mu\otimes\nu,\overline{c})$ aussi, avec $\overline{c}(x,y)=c_1(x)+c_2(y)$. Esquissons la démonstration de ce fait. Soit $f : X\times Y \to \mathbb{R}$. Pour tout $y\in Y$ posons $f_y\colon x\to f(x,y)$ et définissons ϕ par

$$\mathrm{e}^{-\phi(y)} = \int_X \mathrm{e}^{-f_y(x)}\,d\mu(x).$$

En appliquant le propriété (τ) à f_y, on obtient

$$\int_X \mathrm{e}^{f_y\boxdot c_1(x)}\,d\mu(x) \leq \mathrm{e}^{\phi(y)},$$

ce qui implique facilement

$$\int_X \mathrm{e}^{f\boxdot\overline{c}(x,y)}\,d\mu(x) \leq \mathrm{e}^{\phi\boxdot c_2(y)}.$$

En combinant cette inégalité avec la propriété (τ) pour ν :

$$\int_Y \mathrm{e}^{-\phi(y)}\,d\nu(y)\int_Y \mathrm{e}^{\phi\boxdot c_2(y)}\,d\nu(y) \leq 1,$$

on obtient le résultat. Si on veut tensoriser une propriété (τ) paire on est confronté à la difficulté suivante. Rajouter l'hypothèse "f paire" n'implique pas que les fonctions f_y et ϕ le soient. Cependant, remarquons que s'il existe une fonction Sf vérifiant d'une part

$$Sf(x,y) = Sf(x,-y) = Sf(-x,y)$$

pour tous x,y ; et d'autre part

$$\int_{X\times Y} \mathrm{e}^{-f}\,d(\mu\otimes\nu) \leq \int_{X\times Y} \mathrm{e}^{-Sf}\,d(\mu\otimes\nu),$$
$$\int_{X\times Y} \mathrm{e}^{f\boxdot\overline{c}}\,d(\mu\otimes\nu) \leq \int_{X\times Y} \mathrm{e}^{(Sf)\boxdot\overline{c}}\,d(\mu\otimes\nu);$$

alors on obtient le résultat. Dans notre cas particulier, c'est à dire X et Y euclidiens, μ et ν des mesures gaussiennes, c_1 et c_2 des coûts quadratiques, on exhibe une telle fonction Sf en s'inspirant de la symétrisation de Steiner.

La première valeur propre du Laplacien donne (τ), la deuxième donne (τ) paire, il serait tentant de continuer. A-t'on une propriété améliorée en prenant une fonction orthogonale aux polynômes de degré inférieur ou égal à deux ? Nous ne connaissons pas la réponse à cette question. En effet si l'étape "petite gaussienne" fonctionne de la même manière que pour les degrés 0 et 1, la tensorisation ne passe plus.

En annexe de cette partie on donne une preuve directe de l'inégalité d'Artstein, Klartag et Milman dans le cas pair, par récurrence sur la dimension, en utilisant aussi un argument de symétrisation.

On démontre au **Chapitre 2** l'inégalité suivante, qui améliore un tout petit peu le résultat d'Artstein, Klartag et Milman. Si f et g vérifient la relation de dualité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad f(x)g(y) \leq \mathrm{e}^{-x \cdot y}$$

et si f (ou g) a son barycentre en 0, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g \leq (2\pi)^n.$$

L'amélioration par rapport à l'article [2] est qu'on ne suppose pas que la fonction ayant son barycentre en 0 est log-concave. De plus la démonstration est vraiment très simple. On procède par récurrence sur la dimension. Pour tensoriser l'inégalité, on est confronté au même problème que dans le cas pair : les marginales de f n'ont pas leur barycentre en 0. Il n'y a pas de symétrisation dans ce chapitre, l'argument est plus naturel. Définissons les marginales positives et négatives de f :

$$\begin{aligned} F_+ \colon y \in \mathbb{R}^{n-1} &\mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(y,t)\, dt \\ F_- \colon y \in \mathbb{R}^{n-1} &\mapsto \int_{\mathbb{R}_-} f(y,t)\, dt \end{aligned} \tag{9}$$

et définissons G_+ et G_- de manière analogue. En utilisant l'inégalité de Prékopa-Leindler logarithmique, on a facilement

$$\int_{\mathbb{R}_+} f_x \int_{\mathbb{R}_+} g_y \leq \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-x \cdot y},$$

pour tous x, y. Autrement dit F_+ et $\frac{2}{\pi} G_+$ vérifient la relation de dualité, et de même pour F_- et G_-. Si par chance on a les égalités suivantes

(i) $\int F_+ = \int F_- = \frac{1}{2}\int f$
(ii) $\operatorname{bar} F_+ = \operatorname{bar} F_- = 0$,
alors d'après (ii) on peut appliquer l'hypothèse récurrence à F_+ et F_-, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_+ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_+ \leq \frac{\pi}{2}(2\pi)^{n-1}$$
$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_- \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_- \leq \frac{\pi}{2}(2\pi)^{n-1}.$$

En additionnant ces deux inégalités, en utilisant (i) et le fait que $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_+ + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_- = \int_{\mathbb{R}^n} g$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g \leq (2\pi)^n,$$

ce qui est le résultat. Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que quitte à effectuer une transformation affine, c'est à dire remplacer f par $f \circ T$ avec T affine, on peut toujours supposer (i) et (ii).

Au **Chapitre 3** on démontre une inégalité plus générale, due à Fradelizi et Meyer. Selon cette inégalité, étant donnée une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, on peut trouver un point $c \in \mathbb{R}^n$ tel que pour toute $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ et $\rho\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant l'hypothèse de dualité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot y \geq 0 \Rightarrow f(c+x)g(y) \leq \rho(\sqrt{x \cdot y})^2, \tag{10}$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x|)\, dx\Big)^2.$$

Dans la suite on appelle point de Santaló de f un tel c. L'inégalité de Keith Ball, citée plus haut, se traduit ainsi : si f est paire, alors 0 est un point de Santaló de f. On peut aussi s'intéresser à cette inégalité avec une fonction ρ fixée et parler de point de Santaló de f par rapport à ρ. Au chapitre précédent, nous avons montré que si $\rho(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ alors $\operatorname{bar}(f)$ est un point de Santaló de f par rapport à ρ. Quand on prend un ρ général, il n'y a pas de raison que le barycentre soit un point de Santaló, on perd donc ce phénomène linéaire qui nous avait permis de mener à bien la tensorisation au chapitre précédent.
Rappelons qu'en dimension 1, nous avons vu que l'inégalité de Prékopa-Leindler logarithmique entraîne que toute médiane de f, c'est-à dire tout réel c vérifiant $\int_{-\infty}^{c} f = \int_{c}^{+\infty} f$, est un point de Santaló. Essayons de démontrer l'inégalité de Fradelizi-Meyer par récurrence, en reprenant les idées du chapitre précédent. On considère les marginales positive F_+ et négative F_- de f définies par (9). Supposons

(i) $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_+ = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} F_- = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} f$.

(ii) Il existe $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ qui soit un point de Santaló pour F_+ et F_-.

Alors, il n'est pas très difficile de voir que c est un point de Santaló de f. En travaillant un peu plus on se rend compte qu'il suffit d'avoir une situation qui soit une image affine de (i) et (ii) pour faire marcher les choses. Introduisons donc la définition suivante.

Définition. Nous dirons que c est un *centre* pour $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ intégrable, si l'alternative suivante a lieu. Soit $n = 1$ et c est une médiane de f. Soit $n \geq 2$, et il existe un hyperplan affine H séparant $\mathbb{R}^n$ en deux demi-espaces H_+ et H_-, et un vecteur v non parallèle à H tels qu'en définissant

$$F_+\colon y \in H \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(y+tv)\,dt$$

$$F_-\colon y \in H \mapsto \int_{\mathbb{R}_-} f(y+tv)\,dt$$

on ait

- H est médian pour f, au sens où $\int_{H_+} f = \int_{H_-} f = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} f$.
- $c \in H$ et c est un centre pour F_+ et F_-.

Il est ensuite assez simple de démontrer par récurrence que si c est un centre pour f alors c est un point de Santaló de f. Le théorème de Fradelizi-Meyer se ramène donc à montrer que toute fonction intégrable possède un centre.

Il se trouve que cette notion de centre a déjà été étudiée par A.C. Yao et F.F. Yao. Dans [29], ils démontrent que toute fonction continue, strictement positive et intégrable possède un centre. Si l'on fait abstraction des hypothèses techniques de continuité et de positivité (ce sera l'objet du chapitre suivant), toute fonction intégrable possède un centre, et donc un point de Santaló d'après ce qui précède. D'où le théorème de Fradelizi et Meyer.

Il y a un moyen plus direct de voir qu'un centre est un point de Santaló. Soient f, g, ρ vérifiant (10) et A un cône de la forme $M(\mathbb{R}^n_+)$ avec $M \in GL_n$. En tensorisant l'inégalité de Prékopa-Leindler logarithmique, on obtient facilement

$$\int_A f(c+x)\,dx \int_{A^*} g(y)\,dy \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} \rho(|z|)\,dz\Big)^2, \tag{11}$$

où A^* est le cône dual de A :

$$A^* = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall x \in A,\ x \cdot y \geq 0\}.$$

Remarquons que nous n'adoptons pas la définition la plus courante qui consisterait à remplacer "$\geq$" par "$\leq$". Yao et Yao montrent que si c est un centre pour f, alors il existe une partition $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^n$ en 2^n cônes partant de c, qui soient tous de même mesure pour la mesure ayant pour densité f, et de sorte que tout hyperplan affine évite (l'intérieur d') au moins un des cônes. De manière un peu plus précise la partition $\mathcal{P}$ de Yao-Yao vérifie

(i) les éléments de $\mathcal{P}$ sont de la forme $c + A$ avec A image linéaire de $\mathbb{R}^n_+$

(ii) pour tout $B \in \mathcal{P}$, $\int_B f = 2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f$

(iii) l'ensemble $\{A^* \mid (c + A) \in \mathcal{P}\}$ est une partition de $\mathbb{R}^n$.

On traduit la propriété (ii) en disant que $\mathcal{P}$ est une *équipartition* pour f. En sommant l'inégalité (11) sur tous les morceaux de la partition, on obtient

$$\sum_{(c+A)\in\mathcal{P}} \int_A f(c+x)\,dx \int_{A^*} g(y)\,dy \leq 2^n \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} \rho(|z|)\,dz\Big)^2.$$

D'après (ii), on a

$$\int_A f(c+x)\,dx = 2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f$$

pour chacun des cônes A. De plus (iii) implique

$$\sum_A \int_{A^*} g = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g &\leq 4^n \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} \rho(|z|)\,dz\Big)^2 \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|z|)\,dz\Big)^2,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Cette démonstration ressemble à la démonstration faite en dimension 1, prouvant que toute médiane de f est un point de Santaló. Du point de vue Santaló, le centre de Yao-Yao est donc la bonne manière de généraliser la médiane pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$.

Le **chapitre 4** est consacré au théorème de Yao-Yao : étant donnée une mesure finie μ sur $\mathbb{R}^n$ ayant une densité continue et strictement positive, il est possible de partitionner $\mathbb{R}^n$ en 2^n cônes, qui soient tous de même mesure $2^{-n}\mu(\mathbb{R}^n)$ pour μ et de sorte que tout hyperplan affine évite (l'intérieur d') une des régions. Plus précisément, les partitions de Yao-Yao sont définies de la manière suivante.

Définition. Si $E = \{c\}$ est un espace affine de dimension 0, la seule partition possible $\mathcal{P} = \{c\}$ est une partition de Yao-Yao et son centre est c.

Soit E un espace affine de dimension $n \geq 1$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est une partition de Yao-Yao de E s'il existe un hyperplan affine F de E, un vecteur $v \in \vec{E} \backslash \vec{F}$ et deux partitions de Yao-Yao $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{P}_-$ de F *centrées au même point* c telles que

$$\mathcal{P} = \left\{ A + \mathbb{R}_- v \,|\, A \in \mathcal{P}_- \right\} \cup \left\{ A + \mathbb{R}_+ v \,|\, A \in \mathcal{P}_+ \right\}.$$

Le centre de $\mathcal{P}$ est par définition c.

Plusieurs remarques s'imposent. Une partition de Yao-Yao $\mathcal{P}$ est une partition de l'espace E au sens où $\cup \mathcal{P} = E$ et où les intérieurs de deux éléments distincts de $\mathcal{P}$ ne se rencontrent pas (par contre leurs frontières peuvent s'intersecter). Par exemple, l'ensemble $\{(-\infty, 0], [0, +\infty)\}$ est une partition de Yao-Yao de $\mathbb{R}$, et son centre est 0. En dimension 2, les partitions de Yao-Yao sont les partitions induites par deux droites non-parallèles.

On dira qu'une partition de Yao-Yao $\mathcal{P}$ est une *équipartition* pour μ si $\mu(A) = 2^{-n}\mu(E)$, pour tout $A \in \mathcal{P}$. Yao et Yao se restreignent aux mesures finies ayant une densité strictement positive et continue. En dimension 1, trouver une équipartition de Yao-Yao revient à trouver une médiane ; les hypothèses de continuité et positivité sont donc trop fortes, il est plus raisonnable de supposer que la mesure est sans atome. En dimension supérieure, il est naturel de considérer des mesures finies ne chargeant pas les hyperplans, c'est ce qu'on fera dorénavant.

La notion de partition de Yao-Yao est suffisamment rigide pour vérifier la propriété suivante. Si $\mathcal{P}$ est une partition de Yao-Yao de centre c, alors tout demi-espace affine fermé contenant le centre c contient au moins un des éléments de $\mathcal{P}$. Cette propriété, qui est facile à démontrer par récurrence sur la dimension de E, est fondamentale. Voici un exemple d'application. Soit μ une mesure finie ne chargeant pas les hyperplans et $\mathcal{P}$ une équipartition de Yao-Yao pour μ. Soit K un convexe vérifiant

$$\mu(K) > (1 - 2^{-n})\mu(E). \tag{12}$$

D'après Hahn-Banach, si le centre c de $\mathcal{P}$ n'appartient pas à K, il existe un demi-espace affine H contenant c et n'intersectant pas K. D'après la propriété précédente, le demi-espace H contient alors un élément de $\mathcal{P}$ et donc $\mu(H) \geq 2^{-n}\mu(E)$, ce qui est contradictoire avec (12). Nous avons donc démontré le

Lemme. *Un convexe K vérifiant* (12) *contient tous les centres de Yao-Yao de μ.*

Dans le chapitre 4 on démontre le résultat suivant, qui débarrasse le théorème de Yao-Yao de ses hypothèses techniques (densité continue positive).

Théorème d'équipartition de Yao-Yao. *Soit E un espace affine de dimension n. Soit μ une mesure finie ne chargeant pas les hyperplans de E, alors il existe une équipartition de Yao-Yao pour μ, c'est-à dire une partition de Yao-Yao $\mathcal{P}$ vérifiant $\mu(A) = 2^{-n}\mu(E)$ pour tout $A \in \mathcal{P}$.*

De plus, si μ possède un centre de symétrie c, alors il existe une telle partition $\mathcal{P}$ centrée en c.

Si un hyperplan affine F sépare E en deux demi-espaces F_+ et F_- vérifiant $\mu(F_+) = \mu(F_-) = \frac{1}{2}\mu(E)$, on dit que F est *médian* pour μ. Soit v un vecteur non parallèle à F, on définit la projection $\mu_{F,v}$ de μ par

$$\mu_{F,v}(A) = \mu(A + \mathbb{R}_+ v)$$

pour tout sous-ensemble mesurable A de F. Notons que si μ est finie et ne charge pas les hyperplans de E, alors $\mu_{F,v}$ est finie et ne charge pas les hyperplans de F. Comme on l'a vu au chapitre précédent, un point $c \in E$ est le centre d'une équipartition de Yao-Yao pour μ si et seulement si l'alternative suivante a lieu :

- si $\dim E = 1$, alors c est une médiane pour μ
- si $\dim E > 1$, il existe un hyperplan F, contenant c et médian pour μ, et un vecteur $v \in \vec{E}\backslash\vec{F}$ tels que c soit un centre de Yao-Yao pour $\mu_{F,v}$ et $\mu_{F,-v}$

En utilisant cette caractérisation des centres de Yao-Yao, on cherche à démontrer leur existence par récurrence sur la dimension.

À partir de la dimension 2, même en se restreignant à des mesures à densité positive, ou plus généralement à des mesures chargeant tous les ouverts, il n'y pas unicité du centre. Sans rentrer dans les détails, disons qu'en considérant une notion plus restrictive de centre (on parle de centre compatible avec une base), on peut s'assurer de l'unicité du centre, pour une mesure chargeant les ouverts.

Soit μ une mesure finie sur un espace affine E de dimension supérieure ou égale à 2, telle que μ charge les ouverts et ne charge pas les hyperplans. Étant donné un hyperplan F médian pour μ, on sait par hypothèse de récurrence que les mesures $\mu_{F,v}$ pour tout v admettent un unique centre, il s'agit de montrer qu'on peut trouver v tel que les centres de $\mu_{F,v}$ et $\mu_{F,-v}$ coïncident. Yao et Yao utilisent le théorème de Borsuk-Ulam ; pour ce faire il faut avoir continuité du centre de $\mu_{F,v}$ en fonction de v et il faut comprendre ce qu'il advient du centre de $\mu_{F,v}$ quand on prend v très proche de l'hyperplan F. En utilisant le lemme énoncé plus haut, il est facile de montrer qu'il est rejeté à l'infini dans la direction opposée à la projection de v sur F.

Notre démonstration reprend les idées de Yao et Yao, mais au lieu d'utiliser Borsuk-Ulam ou Brouwer, on montre que l'application qui à une direction v associe le centre de $\mu_{F,v}$ vérifie certaines propriétés de monotonie, qui permettent de faire coïncider les centres de $\mu_{F,v}$ et $\mu_{F,-v}$ en utilisant simplement le théorème des valeurs intermédiaires. On obtient ainsi le résultat pour toutes les mesures finies ne chargeant pas les hyperplans et chargeant tous les ouverts. Enfin, on enlève cette dernière hypothèse par un argument de densité.

Le **chapitre 5** n'a rien à voir avec Santaló. Il s'agit d'une réécriture de l'article [14] dans lequel Latała obtient une estimation précise des moments du chaos gaussien, c'est à dire de la variable aléatoire

$$\sum a_{n_1,\ldots,n_d} g_{n_1} \cdots g_{n_d},$$

où $g_1, g_2, \ldots$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes. Le cas $d = 1$ est facile, puisque

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{E}|\textstyle\sum a_i g_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} &= |a|_2 \big(\mathrm{E}|g_1|^p\big)^{\frac{1}{p}} \\ &\approx |a|_2 \sqrt{p},\end{aligned}$$

avec $|a|_2^2 = \sum a_i^2$. Dans le cas $d = 2$, il retrouve un résultat de Hanson et Wright [12] qui fait invervenir les normes de Hilbert-Schmidt et d'opérateur de la matrice $a = (a_{ij})$:

$$\big(\mathrm{E}|\textstyle\sum a_{ij} g_i g_j|^p\big)^{\frac{1}{p}} \approx \sqrt{p}\|a\|_{\mathrm{HS}} + p\|a\|_{\mathrm{op}}.$$

Sans donner le résultat général, disons simplement qu'il mélange des normes de Hilbert-Schmidt et des normes tensorielles injectives.

Dans cette estimation, c'est la majoration qui est délicate. Après quelques manipulations, Latała se ramène à l'étude du sup d'un processus gaussien. Par exemple, si $d = 3$ il faut estimer

$$\mathrm{E} \sup_{(x,y)\in B_2^n \times B_2^n} \textstyle\sum a_{ijk} x_i y_j g_k.$$

Évidemment, la majoration grossière

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\sup \textstyle\sum a_{ijk} x_i y_j g_k &\le \mathrm{E}\big(\textstyle\sum_{ij}(\sum_k a_{ijk} g_k)^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \big(\textstyle\sum a_{ijk}^2\big)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ne donne rien d'intéressant. Posons

$$P_{x,y} = \textstyle\sum a_{ijk} x_i y_j g_k.$$

Il est bien connu que l'estimation du sup du processus gaussien P se ramène à l'étude de l'espace métrique $(B_2^n \times B_2^n, d)$ avec

$$\begin{aligned} d\big((x,y),(x',y')\big)^2 &= \mathrm{E}\big(P_{x,y} - P_{x',y'}\big)^2 \\ &= \textstyle\sum_k \big(\sum_{ij} a_{ij}(x_i y_j - x'_i y'_j)\big)^2. \end{aligned}$$

Pour estimer le sup du processus, on peut utiliser la majoration de Dudley : il existe une constante C universelle telle que

$$\mathrm{E} \sup P_{x,y} \leq C \int_0^\infty \sqrt{\log N(B_2^n \times B_2^n, d, \epsilon)}\, d\epsilon,$$

où le nombre d'entropie $N(B_2^n \times B_2^n, d, \epsilon)$ est défini comme étant le plus petit nombre de boules (au sens de la distance d) de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir $B_2^n \times B_2^n$. Renvoyons au livre de Fernique [10] pour la démonstration de cette majoration et un certain nombre d'applications. Notons que l'estimation de Dudley n'est pas *précise* au sens où il existe des processus gaussiens pour lesquels l'intégrale est sensiblement plus grande que l'espérance du sup. Malheureusement le phénomène se produit ici : Latała parvient à estimer précisément les nombres d'entropies, mais l'utilisation de la majoration de Dudley ne donne pas le bon ordre de grandeur, il faut donc faire quelque chose de plus fin.

L'estimation précise du sup d'un processus en termes d'entropie métrique a été trouvée par Talagrand, c'est le fameux *théorème de la mesure majorante* [27]. Depuis, Talagrand a simplifié son résultat qui ne fait plus intervenir de mesure. Sa théorie, qu'il appelle *chaînage générique*, est présentée en détails dans le livre [28]. Il se trouve que Latała n'est pas parvenu à utiliser le formalisme de Talagrand pour résoudre ce problème. Après l'estimation entropique, il fait tout le travail de raffinement de l'estimation de Dudley *à la main*. L'objet de ce chapitre est donc de reprendre le travail de Latała jusqu'à l'estimation entropique puis de bifurquer et d'utiliser le chaînage générique. On obtient ainsi une preuve un petit peu plus courte et surtout plus lisible.

Chapitre 1

La propriété (τ) paire pour la mesure Gaussienne

The Blaschke-Santaló inequality states that if K is a symmetric convex body of $\mathbb{R}^d$ then

$$\mathrm{vol}_d(K)\,\mathrm{vol}_d(K^\circ) \leq \mathrm{vol}_d(D)\,\mathrm{vol}_d(D^\circ) = v_d^2, \tag{1.1}$$

where vol_d is the d-dimensional volume, K° the polar body of K, D the Euclidean ball and v_d its volume. It was first proved by Blaschke for dimension 2 and 3 and Santaló [26] extended the result to any dimension. K. Ball in [3] was the first to prove a functional version of this inequality. Since then, several authors found either improvements or other versions of Ball's inequality, for example Lutwak and Zhang [18], Artstein, Klartag and Milman [2], or Fradelizi and Meyer [11].
Ball's inequality implies in particular the following : if F is a non negative even measurable function on $\mathbb{R}^d$ then

$$\int F(x)\,dx \int F^\circ(x)\,dx \leq (2\pi)^d, \tag{1.2}$$

where F° is the polar function of F :

$$F^\circ(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{e}^{-x\cdot y}}{F(y)}.$$

Let K be a symmetric convex body and N_K the associated norm. Defining $F_K = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}N_K^2}$, it is easy to see that $(F_K)^\circ = F_{K^\circ}$. Besides, a standard computation shows that $v_d \int F_K = (2\pi)^{d/2}\,\mathrm{vol}_d(K)$ and similarly for K°. Therefore, applying (1.2) to F_K, we get (1.1). So (1.2) is a functional form of Santaló's inequality.

In [2], Artstein, Klartag and Milman extend this inequality to the non even setting : they prove that (1.2) holds as soon as the barycenter of F° is at 0 (which is true when F is even). At the end of their paper is an interesting remark on the property (τ). This property was introduced by Talagrand and named after him by Maurey in [19]. Here is the definition : let μ be a probability measure on $\mathbb{R}^d$ and w a weight (which is a non negative function equal to 0 at 0). We say that (μ, w) satisfies property (τ) if for any non negative continuous function f, the following inequality holds :

$$\int \mathrm{e}^{-f}\, d\mu \int \mathrm{e}^{f \boxdot w}\, d\mu \leq 1, \tag{1.3}$$

where $f \boxdot w$ is the infimum convolution of f and w :

$$f \boxdot w(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \big(f(x+y) + w(y) \big).$$

Clearly, we may replace "$f \geq 0$" by "f bounded from below". Of course $f \boxdot w(x) \leq f(x)$ (take $y = 0$). In order to find $f \boxdot w(x)$, one is allowed to move from x to some $x + y$ such that $f(x + y)$ is smaller than $f(x)$, but the displacement costs $w(y)$.
Let γ_d be the standard Gaussian measure on $\mathbb{R}^d$. For $x \in \mathbb{R}^d$, we let $|x|$ be its Euclidean norm and we define the quadratic cost $c \colon x \mapsto |x|^2$. Maurey remarked that $(\gamma_d, \frac{c}{4})$ satisfies property (τ). It follows from the famous Prékopa-Leindler inequality : let u,v and w be measurable functions satisfying $w(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(u(x) + v(y))$ for all x and y in $\mathbb{R}^d$, then

$$\Big(\int \mathrm{e}^{-u}\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int \mathrm{e}^{-v}\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \int \mathrm{e}^{-w}\, dx. \tag{1.4}$$

This is a reverse form of Hölder's inequality, we refer to [4] for a proof and selected applications. Applying this inequality to $u = f + \frac{c}{2}$, $v = -(f \boxdot \frac{c}{4}) + \frac{c}{2}$ and $w = \frac{c}{2}$ yields property (τ) for the Gaussian measure.
It is pointed out in [2] that there is a strong connection between property (τ) and the functional version of Santaló's inequality. Indeed, applying (1.2) to $F = \mathrm{e}^{-f - \frac{c}{2}}$ we obtain easily

$$\int \mathrm{e}^{-f}\, d\gamma_d \int \mathrm{e}^{f \boxdot \frac{c}{2}}\, d\gamma_d \leq 1.$$

Hence, if we restrict to even functions we have property (τ) for $(\gamma_d, \frac{c}{2})$ (we gain a factor 2 in the cost). This is what we call the *symmetric* property (τ), and our purpose is to prove it directly. We will show that it is related to the eigenvalues of the Laplacian in Gauss space. This will provide a new proof of the functional Santaló inequality, and this proof avoids using the usual Santaló inequality (for convex sets), which was not the case of Ball's proof. From now on we denote by Hf the function $f \boxdot \frac{c}{2}$:

$$Hf(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \left(f(x+y) + \tfrac{1}{2}|y|^2 \right).$$

We restate the theorem we want to prove :

Theorem 1.1. *Let f be an even, bounded from below and continous function on $\mathbb{R}^d$. Then*

$$\int \mathrm{e}^{-f} \, d\gamma_d \int \mathrm{e}^{Hf} \, d\gamma_d \leq 1.$$

1.1 A "small ϵ" inequality

Definition 1.2. Let $C > 0$ and $\epsilon \in (0,1]$. Let $\mathcal{F}(C,\epsilon)$ be the class of functions on $\mathbb{R}^d$ satisfying the following properties :

(i) f is Lipschitz with constant $C\epsilon$

(ii) for any x and h in $\mathbb{R}^d$:

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \leq C\epsilon^2 |h|^2.$$

This class $\mathcal{F}(C,\epsilon)$ is stable under various operations. For example it is clearly a convex set, and, if f is in $\mathcal{F}(C,\epsilon)$ and $u \in \mathbb{R}^d$ then $x \mapsto f(x+u)$ and $x \mapsto f(-x+u)$ are also in $\mathcal{F}(C,\epsilon)$. Besides, if $(f_i)_{i \in I}$ is a family of functions in $\mathcal{F}(C,\epsilon)$ and if for some x_0, $\inf_{i \in I} f_i(x_0) > -\infty$, then $f = \inf_i f_i$ is still in $\mathcal{F}(C,\epsilon)$. Indeed, it is then clear that f is nowhere equal to $-\infty$ and that it is $C\epsilon$-Lipschitz. Let $x, h \in \mathbb{R}^d$ and let i_0 satisfy $f_{i_0}(x) \leq f(x) + \eta$; we have

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \leq f_{i_0}(x+h) + f_{i_0}(x-h) - 2f_{i_0}(x) + 2\eta.$$

Applying property (ii) for f_{i_0} and letting η go to 0, we get the result.
Let X be a standard Gaussian vector on $\mathbb{R}^d$, the expectation of a random variable will be denoted by E.

Lemma 1.3. *Let $C > 0$, for every $\epsilon \in (0,1]$, for every* even *function $f \in \mathcal{F}(C,\epsilon)$ we have*

$$\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-f(X)} \, \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{Hf(X)} \leq 1 + K\epsilon^3,$$

with a constant K depending on C solely.

The proof of this lemma is based on a Taylor expansion and on a symmetric Poincaré inequality.

Lemma 1.4. *Let f be a smooth function in $L_2(\mathbb{R}^d, \gamma_d)$. Assume that f is orthogonal to constants and to linear functions :*

$$\mathrm{E}\, f(X) = 0 \quad \textit{and} \quad \mathrm{E}\, X f(X) = 0. \tag{1.5}$$

Then

$$\mathrm{E}\, f(X)^2 \leq \tfrac{1}{2}\, \mathrm{E} |\nabla f(X)|^2. \tag{1.6}$$

It is a well-known result, we recall its proof for completeness, the reader can also have a look at [8] where a more general statement is proved.

Proof. We consider the sequence $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ of the Hermite polynomials on $\mathbb{R}^d$. It is an orthonormal basis of $L_2(\gamma_d)$ in which the (unbounded) operator

$$L \colon f \mapsto \Delta f - x \cdot \nabla f$$

is diagonal : for all α we have $-LH_\alpha = |\alpha| H_\alpha$, where $|\alpha| = \sum \alpha_i$. We refer to [22, chapter 2] for details. Moreover, we have the following integration by parts formula :

$$-\mathrm{E}\, Lf(X) g(X) = \mathrm{E}\, \nabla f(X) \cdot \nabla g(X).$$

Let us write $f = \sum f_\alpha H_\alpha$. We have $-Lf = \sum |\alpha| f_\alpha H_\alpha$ and (1.5) implies that $f_\alpha = 0$ when $|\alpha| = 0$ or 1. Therefore

$$\mathrm{E} |\nabla f(X)|^2 = -\mathrm{E}\, Lf(X) f(X) = \sum_{|\alpha| \geq 2} |\alpha| f_\alpha^2 \geq 2\, \mathrm{E}\, f(X)^2,$$

which concludes the proof. □

Proof of Lemma 1.3. In what follows, $K_1, K_2, \dots$ are constants that depend only on C. Let $\epsilon \in (0,1]$ and $f \in \mathcal{F}(C, \epsilon)$, even. Replace f by its convolution by some even regular Dirac approximation (ρ_n) (Gaussian for example). Clearly $\rho_n * f$ is even and belongs to $\mathcal{F}(C, \epsilon)$. On the other hand, since f is Lipschitz, $\rho_n * f \to f$ uniformly, which implies $H(\rho_n * f) \to Hf$. Moreover, being Lipschitz, f is bounded by a multiple of $1 + |x|$, and the same holds for Hf. Then $\mathrm{e}^{-\rho_n * f}$ and $\mathrm{e}^{H(\rho_n * f)}$ are both dominated by some function $x \to A\mathrm{e}^{B|x|}$. By the dominated convergence theorem, we obtain

$$\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-(\rho_n * f)(X)}\, \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{H(\rho_n * f)(X)} \to \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-f(X)}\, \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{Hf(X)},$$

when n goes to infinity. Hence it is enough to prove the inequality when f is $\mathcal{C}^2$. Moreover, the inequality does not change if we add a constant to f. Hence we can also assume that $\mathrm{E}\, f(X) = 0$. When f is $\mathcal{C}^2$, property (ii) implies that $\mathrm{Hess} f(x) \leq C\epsilon^2 \mathrm{Id}$ for any x. Hence by Taylor's formula

(ii') for any x and h, $f(x+h) \leq f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{C}{2}\epsilon^2 |h|^2$.
First we estimate $\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-f(X)}$. We write

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-f(X)} = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{k!}\,\mathrm{E}\,f(X)^k.$$

To estimate the moments of $f(X)$, we use the concentration property of the Gaussian measure : if ϕ is a real valued, mean 0 and 1-Lipschitz function on $\mathbb{R}^d$, then $\phi(X)$ is close to 0 with high probability. More precisely, for any $t > 0$, we have

$$\mathrm{Prob}\left\{|\phi(X)| \geq t\right\} \leq 2\mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

We refer to [15, theorem 2.5] for a proof of this statement. This yields that there exists a universal constant M such that for any $p \geq 1$

$$\Big(\mathrm{E}|\phi(X)|^p\Big)^{1/p} \leq M\sqrt{p}.$$

Since f is $C\epsilon$-Lipschitz, $\frac{f}{C\epsilon}$ is 1-Lipschitz, and it has mean 0 so the preceding inequality applies. Thus, for $k \geq 3$, we can bound $|(-1)^k\,\mathrm{E}\,f(X)^k|$ from above by $(MC\sqrt{k})^k \epsilon^3$. We obtain

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-f(X)} \leq 1 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\,f(X)^2 + K_1\epsilon^3. \tag{1.7}$$

In the same way, we have

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{f(X)} \leq 1 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{E}\,f(X)^2 + K_1\epsilon^3 \quad \text{and} \quad \mathrm{E}\big|\mathrm{e}^{f(X)} - 1\big| \leq K_2\epsilon^2. \tag{1.8}$$

We now deal with Hf. Trying $y = -\nabla f(x)$ in the definition of Hf, we get

$$Hf(x) \leq f(x - \nabla f(x)) + \tfrac{1}{2}|\nabla f(x)|^2.$$

Applying (ii') to x and $h = -\nabla f(x)$, we obtain

$$Hf(x) \leq f(x) - |\nabla f(x)|^2 + \tfrac{1}{2}|\nabla f(x)|^2 + \tfrac{C}{2}\epsilon^2|\nabla f(x)|^2.$$

Remark that since f is $C\epsilon$-Lipschitz, we have $|\nabla f(x)| \leq C\epsilon$ for any x. We obtain

$$Hf(x) \leq f(x) - \tfrac{1}{2}|\nabla f(x)|^2 + \tfrac{1}{2}C^3\epsilon^4.$$

Taking the exponential, and using $|\nabla f| \leq C\epsilon$ again, we get

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{Hf(x)} &\leq \mathrm{e}^{f(x)}\big(1 - \tfrac{1}{2}|\nabla f(x)|^2 + K_3\epsilon^4\big)\big(1 + K_4\epsilon^4\big) \\ &\leq \mathrm{e}^{f(x)} - \tfrac{1}{2}|\nabla f(x)|^2 + \tfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{f(x)})|\nabla f(x)|^2 + K_5\mathrm{e}^{f(x)}\epsilon^4. \end{aligned}$$

We take the expectation and we use (1.8), we obtain

$$\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{Hf(X)} \leq 1 + \tfrac{1}{2}\, \mathrm{E}\, f(X)^2 - \tfrac{1}{2}\, \mathrm{E}|\nabla f(X)|^2 + K_6 \epsilon^3. \tag{1.9}$$

Multiplying (1.7) and (1.9) we get

$$\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-f(X)}\, \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{Hf(X)} \leq 1 + \mathrm{E}\, f(X)^2 - \tfrac{1}{2}\, \mathrm{E}|\nabla f(X)|^2 + K\epsilon^3. \tag{1.10}$$

Now we use Lemma 1.4 : since f has mean 0 and is even, it satisfies (1.5), hence $\mathrm{E}\, f(X)^2 \leq \frac{1}{2}\, \mathrm{E}|\nabla f(X)|^2$, which concludes the proof. $\square$

Remark. Without the assumption "f even" the Poincaré inequality would only say

$$\mathrm{E}\, f(X)^2 \leq \mathrm{E}|\nabla f(X)|^2,$$

and we would be able to prove

$$\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-f(X)}\, \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{(f \boxdot \frac{c}{4})(X)} \leq 1 + K\epsilon^3.$$

In order to prove the symmetric property (τ), we tensorize Lemma 1.3. This requires various technical tools, most of which are well known to specialists. We begin with a very simple property of the class $\mathcal{F}(C,\epsilon)$.

Lemma 1.5. *Let E_1 and E_2 be Euclidean spaces, and μ a probability measure on E_1. Let $f\colon E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ be such that for any $x \in E_1$ the function $y \mapsto f(x,y)$ is in $\mathcal{F}(C,\epsilon)$. We define ϕ by*

$$\mathrm{e}^{-\phi(y)} = \int_{E_1} \mathrm{e}^{-f(x,y)}\, d\mu(x).$$

Then, unless $\phi = -\infty$, ϕ belongs to $\mathcal{F}(C,\epsilon)$.

Proof. Property (i) is simple. We check (ii) : multiplying by $-\frac{1}{2}$ the inequality $f(x,y+h) + f(x,y-h) \leq 2f(x,y) + C\epsilon^2|h|^2$, taking the exponential and integrating with respect to μ, we obtain

$$\int_{E_1} \mathrm{e}^{-f(x,y)}\, d\mu(x) \mathrm{e}^{-\frac{C\epsilon^2}{2}|h|^2} \leq \int_{E_1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}f(x,y+h)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}f(x,y-h)}\, d\mu(x).$$

Then we use Cauchy-Schwarz to bound the right hand side, we take the log and we end up with the desired inequality for ϕ. $\square$

1.2 Symmetrisation

An important tool in geometry is Steiner's symmetrisation, see [5] for definition, properties and applications. In particular, it is the main idea behind Meyer and Pajor's proof of the Blashke-Santaló inequality. It is thus natural, and as far as we know this idea dates back to [2], to introduce functional analogues of this symmetrisation.

Definition 1.6. Let E be a Euclidean space and $f\colon E \to \mathbb{R}$ be continuous. We define

$$Sf\colon x \mapsto \inf_{u\in E}\Big(\tfrac{1}{2}\big(f(u+x)+f(u-x)\big)+\tfrac{1}{2}|u|^2\Big).$$

The function Sf is even.
Let E_1, E_2 be Euclidean spaces and $g\colon E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$. We define S_1g and S_2g to be the symmetrisations of g with respect to the first and the second variable, respectively :

$$S_1g\colon x, y \mapsto \inf_{u\in E_1}\Big(\tfrac{1}{2}\big(f(u+x,y)+f(u-x,y)\big)+\tfrac{1}{2}|u|^2\Big),$$

and similarly for S_2.

Lemma 1.7. *Let γ be the normal distribution on E. For any continuous f on E, we have*

$$\int_E \mathrm{e}^{-f}d\gamma \le \int_E \mathrm{e}^{-Sf}d\gamma. \tag{1.11}$$

Let γ_1, γ_2 be the normal distributions on E_1 and E_2, respectively. Any continuous g on $E_1 \times E_2$ satisfies

$$\int_{E_1\times E_2} \mathrm{e}^{Hg}d\gamma_1\otimes d\gamma_2 \le \int_{E_1\times E_2} \mathrm{e}^{HS_2g}d\gamma_1\otimes d\gamma_2. \tag{1.12}$$

Proof. Set $\tilde{f}\colon x \to f(-x)$. By definition of Sf, we have for every z and $u \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}Sf(z)+\tfrac{1}{2}|z|^2 &\le \tfrac{1}{2}f(u+z)+\tfrac{1}{2}f(-z+u)+\tfrac{1}{2}|u|^2+\tfrac{1}{2}|z|^2\\ &= \tfrac{1}{2}\big(f(u+z)+\tfrac{1}{2}|u+z|^2\big)+\tfrac{1}{2}\big(\tilde{f}(z-u)+\tfrac{1}{2}|z-u|^2\big).\end{aligned}$$

Let $x, y \in \mathbb{R}^d$, we apply this inequality to $z=\frac{x+y}{2}$ and $u=\frac{x-y}{2}$. We obtain

$$Sf(\frac{x+y}{2})+\tfrac{1}{2}|\frac{x+y}{2}|^2 \le \tfrac{1}{2}\big(f(x)+\tfrac{1}{2}|x|^2\big)+\tfrac{1}{2}\big(\tilde{f}(y)+\tfrac{1}{2}|y|^2\big).$$

Applying the Prékopa-Leindler inequality we get (1.11).
Inequality (1.12) is the functional version of the following : if K is a centrally symmetric convex body and K_u its Steiner symmetral with respect to some direction u then $\mathrm{vol}_d(K_u)^\circ \geq \mathrm{vol}_d(K^\circ)$. This is the key argument in Meyer and Pajor's proof of the symmetric Santaló inequality, see [20]. Actually this idea dates back to Saint-Raymond [25] although he considered a symmetrisation of his own instead of Steiner's. Let us prove (1.12). It follows from

$$-S_1(-Hg) \leq HS_2 g. \tag{1.13}$$

Indeed, combining it with (1.11) we get for every $y \in E_2$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{Hg(x,y)}\, d\gamma_1(x) &= \int \mathrm{e}^{-(-Hg)(x,y)}\, d\gamma_1(x)\\ &\leq \int \mathrm{e}^{-S_1(-Hg(x,y))}\, d\gamma_1(x) \leq \int \mathrm{e}^{HS_2 g(x,y)}\, d\gamma_1(x),\end{aligned}$$

which implies (1.12). Proof of (1.13) : notations are heavy but it is straightforward.

$$\begin{aligned}2HS_2g(x,y) &= \inf_{u,v}\big\{2S_2g(x+u,y+v)+|u|^2+|v|^2\big\}\\ &= \inf_{u,v,w}\big\{g(x+u,w+y+v)+g(x+u,w-y-v)\\ &\qquad\qquad +|u|^2+|v|^2+|w|^2\big\}.\end{aligned}$$

Since g is even, the latest is the same as

$$\inf_{u,v,w}\big\{g(x+u,w+y+v)+g(-x-u,-w+y+v)+|u|^2+|v|^2+|w|^2\big\}.$$

Whereas

$$\begin{aligned}-2S_1(-Hg)(x,y) &= -\inf_t\big\{(-Hg)(t+x,y)+(-Hg)(t-x,y)+|t|^2\big\}\\ &= \sup_t\big\{Hg(t+x,y)+Hg(t-x,y)-|t|^2\big\}.\end{aligned}$$

Hence we have to prove that for any t,u,v,w

$$\begin{aligned}Hg(t+x,y)+Hg(t-x,y) \leq{}& g(x+u,w+y+v)+g(-x-u,-w+y+v)\\ &+|u|^2+|v|^2+|w|^2+|t|^2,\end{aligned}$$

which is clear : use twice $Hg(a)-g(b) \leq \frac{1}{2}|b-a|^2$. □

1.3 Tensorisation

Definition 1.8. Let $n \in \mathbb{N}^*$, we define the class $\mathcal{F}_n(C, \epsilon)$ by induction on n : let f be a function on $(\mathbb{R}^d)^n$, we say that f belongs to $\mathcal{F}_n(C, \epsilon)$ if

- for every $y \in \mathbb{R}^d$, the function $x \in (\mathbb{R}^d)^{n-1} \mapsto f(x, y)$ is in $\mathcal{F}_{n-1}(C, \epsilon)$
- for every $x \in (\mathbb{R}^d)^{n-1}$, the function $y \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x, y)$ is in $\mathcal{F}(C, \epsilon)$.

In other words $\mathcal{F}_n(C, \epsilon)$ is the class of functions on $\mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d$ that belong to $\mathcal{F}(C, \epsilon)$ with respect to each coordinate separately. The crucial point is that the class $\mathcal{F}_n(C, \epsilon)$ is stable under symmetrisation.

Lemma 1.9. *Let f belong to $\mathcal{F}_n(C, \epsilon)$, set $E_1 = (\mathbb{R}^d)^{n-1}$ and $E_2 = \mathbb{R}^d$. Then $S_2 f$ also belongs to $\mathcal{F}_n(C, \epsilon)$.*

Proof. It follows from the stability properties of the class $\mathcal{F}(C, \epsilon)$ that we mentionned earlier : for every $x \in E_1$ and $u \in E_2$, the function

$$y \mapsto \tfrac{1}{2}\big(f(x, u+y) + f(x, u-y)\big) + \tfrac{1}{2}|u|^2$$

is in $\mathcal{F}(C, \epsilon)$ so the same is true for the infimum over u, provided that this infimum is not $-\infty$, which is clear, since $\frac{1}{2}\big(f(x, u+y) + f(x, u-y)\big)$ is Lipschitz in u. Similarly, for any $y, u \in E_2$, the function

$$x \mapsto \tfrac{1}{2}\big(f(x, u+y) + f(x, u-y)\big) + \tfrac{1}{2}|u|^2$$

is in $\mathcal{F}_{n-1}(C, \epsilon)$ and the same is true for the infimum over u. □

The next lemma is a tensorisation of Lemma 1.3, with the same constant K.

Lemma 1.10. *Let $X_1, \ldots, X_n$ be independent copies of X and let f be* even *and in $\mathcal{F}_n(C, \epsilon)$. Then*

$$\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-f(X_1, \ldots, X_n)}\, \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{Hf(X_1, \ldots, X_n)} \leq (1 + K\epsilon^3)^n.$$

Proof. It is done by induction. When $n = 1$, it is Lemma 1.3. Let $n \geq 2$, we assume that the result holds for $n-1$. Let $f\colon (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$ be even and in $\mathcal{F}_n(C, \epsilon)$. Set $E_1 = (\mathbb{R}^d)^{n-1}$, $E_2 = \mathbb{R}^d$ and $\tilde{X} = (X_1, \ldots, X_{n-1})$, it is a normal vector on E_1. We have to prove

$$\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-f(\tilde{X}, X_n)}\, \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{Hf(\tilde{X}, X_n)} \leq (1 + K\epsilon)^n.$$

Let $g = S_2 f$. We use Lemma 1.7, for every $x \in E_1$ we have : $\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-f(x, X_n)} \leq \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-S_2 f(x, X_n)}$, which implies that

$$\mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-f(\tilde{X}, X_n)} \leq \mathrm{E}\, \mathrm{e}^{-S_2 f(\tilde{X}, X_n)}.$$

On the other hand, the second part of Lemma 1.7 gives

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{Hf(\tilde{X},X_n)} \leq \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{HS_2 f(\tilde{X},X_n)}.$$

Hence it is enough to prove that

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-g(\tilde{X},X_n)}\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{Hg(\tilde{X},X_n)} \leq (1+K\epsilon)^n. \tag{1.14}$$

By Lemma 1.9, we have $g \in \mathcal{F}_n(C,\epsilon)$. By definition of S_2, for every $x \in E_1$, the function $y \mapsto g(x,y)$ is even. But as g is globally even we have also $g(-x,y) = g(x,-y) = g(x,y)$. Hence, for any $y \in E_2$, the function $g^y\colon x \to g(x,y)$ is even and in $\mathcal{F}_{n-1}(C,\epsilon)$. By the induction assumption

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-(g^y)(\tilde{X})}\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{H(g^y)(\tilde{X})} \leq (1+K\epsilon^3)^{n-1}. \tag{1.15}$$

The following computation can be found in [19], we recall it for the sake of completeness. We define the operator H_1 by

$$H_1 g(x,y) = H(g^y)(x) = \inf_{u\in E_1} \big(g(x+u,y) + \tfrac{1}{2}|u|^2\big).$$

We define a new function ϕ by

$$\mathrm{e}^{-\phi(y)} = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-g(\tilde{X},y)}.$$

For any $x \in E_1$, the function $y \to g(x,y)$ is even and belongs to $\mathcal{F}(C,\epsilon)$. By Lemma 1.5, the same is true for ϕ. Hence we can apply Lemma 1.3 to get

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-\phi(X_n)}\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{H\phi(X_n)} \leq 1+K\epsilon^3. \tag{1.16}$$

On the other hand, inequality (1.15) implies that for any y and u in $\mathbb{R}^d$ we have

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{H_1 g(\tilde{X},y+u)+\frac{1}{2}|u|^2} \leq \mathrm{e}^{\phi(y+u)+\frac{1}{2}|u|^2}(1+K\epsilon^3)^{n-1}. \tag{1.17}$$

Let $(x,y) \in E_1\times E_2$. For any $u\in\mathbb{R}^d$ we have $H_1 g(x,y+u)+\frac{1}{2}|u|^2 \geq Hg(x,y)$. Hence, taking the infimum over u in (1.17), we get

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{Hg(\tilde{X},y)} \leq \mathrm{e}^{H\phi(y)}\big(1+K\epsilon^3\big)^{n-1}, \tag{1.18}$$

which of course implies that

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{Hg(\tilde{X},X_n)} \leq \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{H\phi(X_n)}\big(1+K\epsilon^3\big)^{n-1}. \tag{1.19}$$

Combining (1.19) with (1.16) yields (1.14) and the proof is complete. $\square$

1.4 Proof of Theorem 1.1

Let $n \in \mathbb{N}$, and f be an even function from $\mathbb{R}^d$ to $\mathbb{R}$ belonging to $\mathcal{F}(C,1)$. Set

$$\begin{aligned} g\colon (\mathbb{R}^d)^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto f\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}(x_1+\cdots+x_n)\big). \end{aligned}$$

It is clear that g is even and belongs to $\mathcal{F}_n(C, \frac{1}{\sqrt{n}})$. Applying Lemma 1.10, we obtain

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-g(X_1,\dots,X_n)}\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{Hg(X_1,\dots,X_n)} \le (1+K\tfrac{1}{n^{3/2}})^n \le 1+\tfrac{K'}{\sqrt{n}}. \tag{1.20}$$

The convexity of the square of the norm implies that

$$\begin{aligned} Hg(x_1,\dots,x_n) &= \inf_{u_1,\dots,u_n} f\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\textstyle\sum(x_i+u_i)\big) + \tfrac12\textstyle\sum|u_i|^2 \\ &\ge \inf_{u_1,\dots,u_n} f\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\textstyle\sum x_i + \tfrac{1}{\sqrt{n}}\textstyle\sum u_i\big) + \tfrac12\big|\tfrac{1}{\sqrt{n}}\textstyle\sum u_i\big|^2, \\ &= Hf\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\textstyle\sum x_i\big). \end{aligned}$$

We combine this inequality with (1.20), since the random vector $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum X_i$ has the same law as X, we obtain

$$\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{-f(X)}\,\mathrm{E}\,\mathrm{e}^{Hf(X)} \le 1+\tfrac{K'}{\sqrt{n}}.$$

Now we let $n \to \infty$ and we get the result for f. Hence we have the inequality for any even f in $\mathcal{F}(C,1)$. But this holds for any C, so we can take C as big as we want. In particular, we get the result for any even and $\mathcal{C}^2$ function with compact support. And a density argument shows that the inequality is valid for any function that is even, continuous and bounded from below.

Remarks

It is also possible to derive the usual property (τ) for the Gaussian measure from the Poincaré inequality. The function f is not assumed to be even anymore, we use the non-symmetric version of Lemma 1.3 and then perform the tensorisation (just as in Section 1.3 but without the symmetrisation). Of course, this is a bit more complicated than the usual proof (using the Prékopa-Leindler inequality) but we find it interesting to see that property (τ) has to do with the first eigenvalue of the Laplacian whereas its symmetric version has to do with the second eigenvalue.

Unfortunately we are not able to go farther : what happens if f is orthogonal to constants, linear functionals and polynomials of degree 2 ? Actually even in the case of a function that is orthogonal to constants and linear functionals our method does not give the result : we had to suppose that our function was even, which is stronger.
Lastly, following Klartag [13], we explain how to extend the symmetric property (τ) to measures that are even and log-concave with respect to the Gaussian. It is well known that property (τ) is stable under 1-Lipschitz image. Clearly, the symmetric property (τ) will have the following stability property : let μ satisfy the symmetric property (τ) and T be 1-Lipschitz and odd, then the image $T_{\#}\mu$ of μ by T also satisfies the symmetric property (τ). For example, it was proved by Caffarelli (see [7]) that if a probability measure μ is log-concave with respect to the Gaussian measure – this means that $\frac{d\mu}{dx}$ is of the form $\mathrm{e}^{-V-\frac{c}{2}}$ for some V convex – then the Brenier map transporting the Gaussian measure to μ is 1-Lipschitz. Now suppose additionally that μ is even, the Brenier map will automatically be odd so μ will be the image of the Gaussian measure by a 1-Lipschitz odd map and thus will satisfy the symmetric property (τ). Hence probability measures that are even and log-concave with respect to the Gaussian measure, in particular restrictions of the Gaussian measure to symmetric convex bodies, satisfy the symmetric property (τ).

1.5 Appendix : an alternate proof of Santaló

In this appendix, we leave property (τ) out and give a direct proof of the following functional Santaló inequality.

Theorem 1.11. *Let f, g satisfy*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad f(x)g(y) \leq \mathrm{e}^{-x \cdot y}. \tag{1.21}$$

If f is even*, then*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g \leq (2\pi)^n.$$

Proof. We proceed by induction on the dimension. In dimension 1, the result follows from the following logarithmic version of the Prékopa-Leindler inequality.

Lemma 1.12. *Let ϕ_1, ϕ_2 be non-negative Borel functions on $\mathbb{R}_+$. If every s and t in $\mathbb{R}_+$ satisfy $\phi_1(s)\phi_2(t) \leq \mathrm{e}^{-st}$, then*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi_1(s)\, ds \int_{\mathbb{R}_+} \phi_2(t)\, dt \leq \frac{\pi}{2}.$$

This lemma is an easy consequence of the Prékopa-Leindler inequality, its proof is given in chapter 2. We apply this lemma twice, first to $\phi_1\colon s \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(s)$ and $\phi_2\colon t \mapsto g(t)$ and then to $\phi_1\colon s \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(-s)$ and $\phi_2\colon t \mapsto g(-t)$. We get

$$\int_{\mathbb{R}_+} f \int_{\mathbb{R}_+} g \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\int_{\mathbb{R}_-} f \int_{\mathbb{R}_-} g \leq \frac{\pi}{2}.$$

Since f is even $\int_{\mathbb{R}_+} f = \int_{\mathbb{R}_-} f = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f$. Then adding the two inequalities above we get

$$\int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g \leq 2\pi$$

which is the result in dimension 1.

Assume that the result holds in dimension $n-1$. Let $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ satisfy the hypothesis, let

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x,s)\, ds$$
$$G(y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y,t)\, dt.$$

Assume additionnally that $f(x,t) = f(x,-t)$ for all $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ and $t \in \mathbb{R}$. Let $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, defining $f_x\colon t \mapsto f(x,t)$ and $g_y\colon t \mapsto g(y,t)$, we have

$$f_x(s)g_y(t)\mathrm{e}^{x\cdot y} \leq \mathrm{e}^{-st}.$$

Since f_x is even, the dimension 1 case yields

$$F(x)G(y) = \int_{\mathbb{R}} f_x \int_{\mathbb{R}} g_y \leq 2\pi\mathrm{e}^{-x\cdot y},$$

for all $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Since f is globally even, we also have $f(-x,t) = f(x,-t) = f(x,t)$, from which it follows that F is even. By the induction assumption, we get

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} F \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G \leq 2\pi(2\pi)^{n-1}.$$

By Fubini this is the same as

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g \leq (2\pi)^n$$

which concludes the proof in this case. The general case shall follow from the preceding one by a symmetrisation argument. Let

$$\begin{aligned} S_2 f &\colon (x,s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mapsto \sup_{s' \in \mathbb{R}} \big(f(x, s'-s) f(x, s'+s) \big)^{\frac{1}{2}} \\ S_1 g &\colon (y,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mapsto \sup_{y' \in \mathbb{R}^{n-1}} \big(g(y'-y, t) g(y'+y, t) \big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Since f is globally even, we clearly have

$$S_2 f(x,t) = S_2 f(x,-t) = S_2 f(-x,t) \tag{1.22}$$

for all x, t. Moreover, the duality relation (1.21) yields

$$\begin{aligned} &f(x, s'+s) f(x, s'-s) g(y'+y, t) g(y'-y, t) \\ &\qquad = \big(f(x, s'+s) g(y'+y, t) \big) \big(f(-x, -s'+s) g(y'-y, t) \big) \\ &\qquad \leq \mathrm{e}^{-2x \cdot y - 2st}, \end{aligned}$$

for all x, y, y', s, s', t. Taking suprema in s' and y', we obtain

$$S_2 f(a) S_1 g(b) \leq \mathrm{e}^{-a \cdot b}$$

for all $a, b \in \mathbb{R}^n$. By the previous case, this, together with (1.22) implies

$$\int_{\mathbb{R}^n} S_2 f \int_{\mathbb{R}^n} S_1 g \leq (2\pi)^n. \tag{1.23}$$

On the other hand, by definition of $S_2 f$, we have

$$S_2 f(x, \tfrac{s+t}{2})^2 \geq f(x,s) f(x,-t)$$

for every $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ and $s, t \in \mathbb{R}$. Then the Prékopa-Leindler inequality gives

$$\int_{\mathbb{R}} f_x \leq \int_{\mathbb{R}} (S_2 f)_x,$$

for all $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Integrating again we get

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} S_2 f.$$

In the same way $\int_{\mathbb{R}^n} g \leq \int_{\mathbb{R}^n} S_1 g$. Thus the result follows from (1.23). $\square$

Chapitre 2

Une preuve directe de l'inégalité de Santaló fonctionnelle

Introduction

The Blaschke-Santaló inequality states that any convex body K in $\mathbb{R}^n$ with center of mass at 0 satisfies

$$\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leq \mathrm{vol}_n(D)\,\mathrm{vol}_n(D^\circ) = v_n^2, \tag{2.1}$$

where vol_n stands for the volume, K° is the polar body of K, D the Euclidean ball and v_n its volume. It was first proved by Blaschke for dimension 2 and 3 and Santaló [26] extended the result to any dimension. In the sequel we use the following notation : if g is a non-negative function on $\mathbb{R}^n$ satisfying $0 < \int g < \infty$ and $\int |x| g(x)\,dx < \infty$, where $|x|$ is the Euclidean norm of x, then

$$\mathrm{bar}(g) = \frac{\int g(x) x\,dx}{\int g(x)\,dx}$$

denotes its center of mass (or barycenter). The center of mass (or centroid) of a measurable subset of $\mathbb{R}^n$ is by definition the barycenter of its indicator function.

Let us state a functional form of (2.1) due to Artstein, Klartag and Milman [2]. They define a functional analogue of the polar body : if f is a non-negative Borel function on $\mathbb{R}^n$, the polar function of f is

$$f^\circ : x \mapsto \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{-x\cdot y}}{f(y)}.$$

Equivalently $\left(\mathrm{e}^{-\phi}\right)^\circ = \mathrm{e}^{-\mathcal{L}\phi}$, where $\mathcal{L}\phi$ is the Legendre transform of ϕ :

$$\mathcal{L}\phi(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \big(x\cdot y - \phi(y)\big).$$

The function f° is in particular log-concave. Here is their result.

Theorem 2.1. *If f is a non-negative integrable function on $\mathbb{R}^n$ such that f° has its barycenter at 0, then*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} f^\circ(y)\,dy \leq (2\pi)^n.$$

In the special case where the function f is even this result dates back to Keith Ball [3]. In the present paper we prove the following :

Theorem 2.2. *Let f and g be non-negative Borel functions on $\mathbb{R}^n$ satisfying*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad f(x)g(y) \leq \mathrm{e}^{-x\cdot y}. \tag{2.2}$$

If f (or g) has its barycenter at 0 then

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy \leq (2\pi)^n. \tag{2.3}$$

This is slightly stronger than Theorem 2.1 in which the function that has its barycenter at 0 should be log-concave. We now derive from Theorem 2.2 an improved Blaschke-Santaló inequality, obtained by Lutwak in [17], with a completely different approach.

Corollary 2.3. *Let Q be a star-shaped (with respect to 0) body in $\mathbb{R}^n$ having its centroid at 0. Then*

$$\mathrm{vol}_n(Q)\,\mathrm{vol}_n(Q^\circ) \leq v_n^2. \tag{2.4}$$

Proof. If L is a star-shaped body in $\mathbb{R}^n$ we let $N_L(x) = \inf\{r > 0 \,|\, x \in rL\}$ be its gauge and

$$\phi_L : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathrm{e}^{-N_L^2(x)/2}.$$

Integrating ϕ_L and $\mathbf{1}_L$ in polar coordinates we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_L(x)\,dx = c_n\,\mathrm{vol}_n(L) \tag{2.5}$$

for some constant c_n depending only on the dimension. Replacing L by the Euclidean ball we get $c_n = (2\pi)^{n/2} v_n^{-1}$. Similarly

$$\int_{\mathbb{R}^n} x\phi_L(x)\,dx = c'_n \int_L x\,dx.$$

Thus if L has its barycenter at 0 then so has ϕ_L. Let $f = \phi_Q$ and $g = \phi_{Q^\circ}$, then $\mathrm{bar}(f) = 0$ and (2.2) holds since for any $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$x \cdot y \leq N_Q(x) N_{Q^\circ}(y) \leq \tfrac{1}{2} N_Q(x)^2 + \tfrac{1}{2} N_{Q^\circ}(y)^2.$$

Thus Theorem 2.2 applies, we obtain (2.3), which combined with (2.5), yields (2.4). □

2.1 Main results

We now state our main theorem. A similar result concerning convex bodies (instead of functions) was obtained by Meyer and Pajor in [21].

Theorem 2.4. *Let f and g be non-negative Borel functions on $\mathbb{R}^n$ satisfying (2.2). Assume that f has a barycenter. Let H be an affine hyperplane, H_+, H_- the two half-spaces separated by H and let $\lambda \in [0,1]$ be defined by $\lambda \int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{H_+} f$. Then there exists $z \in H$ such that*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\mathrm{e}^{y\cdot z}\,dy \le \frac{1}{4\lambda(1-\lambda)}(2\pi)^n. \tag{2.6}$$

In particular, in every H which splits the space into two half-spaces of equal measure with respect to the density f, there is a z_0 such that

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\mathrm{e}^{y\cdot z_0}\,dy \le (2\pi)^n. \tag{2.7}$$

Theorem 2.2 follows easily from the latter.

Proof of Theorem 2.2. Let f, g satisfy (2.2). Assume for example that g has its barycenter at 0. Then 0 cannot be separated from the support of g by a hyperplane, so there exists $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ such that 0 belongs to the interior of $\mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ and $g(x_i) > 0$ for $i = 1 \dots n+1$. Letting $\|x\| = \max(x \cdot x_i \,|\, i = 1 \dots n+1)$ we obtain from (2.2)

$$f(x) \le C\mathrm{e}^{-\|x\|}$$

for some $C > 0$ and for every $x \in \mathbb{R}^n$. We can also assume that $\int f > 0$, otherwise the result is obvious. Then f has a barycenter and we can apply Theorem 2.4. There exists $z_0 \in \mathbb{R}^n$ such that (2.7) holds. Integrating with respect to $g(x)dx$ the inequality $1 \le \mathrm{e}^{x\cdot z_0} - x \cdot z_0$ we get

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{e}^{x\cdot z_0}\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} (x \cdot z_0)g(x)\,dx.$$

Since $\mathrm{bar}(g) = 0$, the latter integral is 0 and we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{e}^{x\cdot z_0}\,dx,$$

which, together with (2.7), yields (2.3). $\square$

In order to prove Theorem 2.4, we need a simple one-dimensional lemma, sometimes called ‘Prékopa-Leindler’s inequality for the geometric mean’. Let us first recall the Prékopa-Leindler inequality, which is a functional form of the famous Brunn-Minkowski inequality, see for instance [4] for a proof and selected applications. If f, g, h are non-negative and integrable functions on $\mathbb{R}^n$ satisfying $f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \le h(\lambda x + (1-\lambda)y)$ for all x, y in $\mathbb{R}^n$ and for some fixed $\lambda \in (0,1)$, then

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\Big)^\lambda \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy\Big)^{1-\lambda} \le \int_{\mathbb{R}^n} h(z)\,dz.$$

Here is the one-dimensional lemma :

Lemma 2.5. *Let ϕ_1, ϕ_2 be non-negative Borel functions on $\mathbb{R}_+$. Assume that $\phi_1(s)\phi_2(t) \le \mathrm{e}^{-st}$ for every s, t in $\mathbb{R}_+$, then*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi_1(s)\,ds \int_{\mathbb{R}_+} \phi_2(t)\,dt \le \frac{\pi}{2}. \tag{2.8}$$

Remark. Inequality (2.8) is to be understood with the convention $0 \times \infty = 0$. However, unless ϕ_1 or ϕ_2 is identically 0 on $\mathbb{R}_+^*$, both ϕ_1 and ϕ_2 are integrable.

Proof. It is an easy consequence of the Prékopa-Leindler inequality : let $f(s) = \phi_1(\mathrm{e}^s)\mathrm{e}^s$, $g(t) = \phi_2(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t$ and $h(r) = \exp(-\mathrm{e}^{2r}/2)\mathrm{e}^r$. For all $s, t \in \mathbb{R}$ we have $\sqrt{f(s)g(t)} \le h(\frac{t+s}{2})$, hence by Prékopa $\int_{\mathbb{R}} f \int_{\mathbb{R}} g \le \big(\int_{\mathbb{R}} h\big)^2$. By change of variable, this is the same as

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi_1(s)\,ds \int_{\mathbb{R}_+} \phi_2(t)\,dt \le \Big(\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,du\Big)^2. \quad \square$$

2.2 Proof of Theorem 2.4

It is done by induction on the dimension. Let f and g be non-negative Borel functions on the line, with $0 < \int f < \infty$, and satisfying $f(s)g(t) \le \mathrm{e}^{-st}$ for any $s, t \in \mathbb{R}$. Clearly we can assume that $\int f = 1$. Let $r \in \mathbb{R}$ and $\lambda = \int_r^\infty f \in [0,1]$. Setting $\phi_1(s) = f(s+r)$ and $\phi_2(t) = g(t)\mathrm{e}^{rt}$, we have $\phi_1(s)\phi_2(t) \le \mathrm{e}^{-st}$ for any $s, t > 0$. Applying Proposition 2.5 we obtain

$$\int_r^\infty f(s)\,ds \int_0^\infty g(t)\mathrm{e}^{rt}\,dt \le \frac{\pi}{2},$$

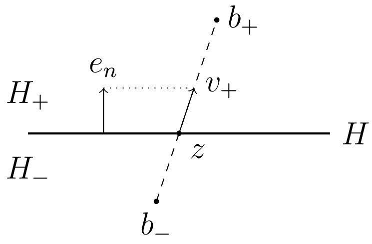
hence

$$\int_0^\infty g(t)\mathrm{e}^{rt}\,dt \le \frac{1}{4\lambda} 2\pi.$$

Similarly, working with $\phi_1(s) = f(-s+r)$ and $\phi_2(t) = g(-t)\mathrm{e}^{-rt}$, we obtain

$$\int_{-\infty}^{0} g(t)\mathrm{e}^{rt}\,dt \le \frac{1}{4(1-\lambda)}2\pi.$$

Adding the last two inequalities we get (2.6) for dimension 1.
Assume the theorem to be true in dimension $n-1$. Let f, g satisfy the hypothesis, and again assume that $\int f = 1$. Let μ be the probability measure on $\mathbb{R}^n$ whose density is f. Let H be an affine hyperplane which splits the space into two half-spaces H_+ and H_- and let $\lambda = \mu(H_+)$. Provided that $\lambda \neq 0, 1$ we can define b_+ and b_- to be the barycenters of $\mu_{|H_+}$ and $\mu_{|H_-}$, respectively. Since $\mu(H) = 0$, the point b_+ belongs to the interior of H_+, and similarly for b_-. Hence the line passing through b_+ and b_- intersects H at one point, which we call z (see the figure).



Let us prove that

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{e}^{z\cdot x}\,dx \le \frac{1}{4\lambda(1-\lambda)}(2\pi)^n. \tag{2.9}$$

Let L be the hyperplane parallel to H passing through 0. Let us choose an orthonormal basis $e_1, \ldots, e_n$ such that $L = e_n^\perp$ and $(b_+ - z)\cdot e_n > 0$. Let $L_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x\cdot e_n \ge 0\}$ and $L_- = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \cdot e_n \le 0\}$. Set

$$v_+ = \frac{b_+ - z}{(b_+ - z)\cdot e_n},$$

and

$$F_+ : y \in L \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(z + y + sv_+)\,ds.$$

If A is the linear operator on $\mathbb{R}^n$ that maps e_n to v_+ and e_i to itself for $i = 1 \ldots n-1$ then, by Fubini

$$\int_L F_+(y)\,dy = \int_{L_+} f(z + Ax)\,dx.$$

Since $z+AL_+ = H_+$ and A has determinant 1, the latter is equal to $\int_{H_+} f = \lambda$. Let us check that F_+ has its barycenter at 0. Introducing the projection π with range L and kernel $\mathbb{R}v_+$, we get

$$\lambda \operatorname{bar}(F_+) = \int_{L_+} \pi(Ax) f(z+Ax)\,dx = \pi\Big(\int_{L_+} (Ax) f(z+Ax)\,dx\Big).$$

The same change of variable as before yields

$$\int_{L_+} (Ax) f(z+Ax)\,dx = \int_{H_+} (x-z) f(x)\,dx = \lambda(b_+ - z).$$

Hence $\operatorname{bar}(F_+) = \pi(b_+ - z)$ and this is 0 by definition of π. Let $B = (A^{-1})^t$, since $A_{|L}$ is the identity we have $Be_n = e_n$. Let us define

$$G_+ : y' \in L \mapsto \int_{\mathbb{R}_+} g(By' + te_n) \mathrm{e}^{z\cdot(By'+te_n)}\,dt.$$

By definition $Ax \cdot Bx' = x \cdot x'$ for all $x, x' \in \mathbb{R}^n$, so

$$(y + sv_+) \cdot (By' + te_n) = y \cdot y' + st$$

for all $s, t \in \mathbb{R}$ and $y, y' \in L$. Hence

$$f(z+y+sv_+) g(By' + te_n) \mathrm{e}^{z\cdot(By'+te_n)} \leq \mathrm{e}^{-st-y\cdot y'}.$$

Applying Lemma 2.5 to $\phi_1(s) = f(z+y+sv_+)$ and

$$\phi_2(t) = g(By' + te_n) \mathrm{e}^{z\cdot(By'+te_n)+y\cdot y'}$$

we get

$$F_+(y) G_+(y') \leq \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-y\cdot y'}, \tag{2.10}$$

for every $y, y' \in L$. Recall that $\operatorname{bar}(F_+) = 0$, then by the induction assumption (which implies Theorem 2.2 in dimension $n-1$)

$$\int_L F_+(y)\,dy \int_L G_+(y')\,dy' \leq \frac{\pi}{2}(2\pi)^{n-1}. \tag{2.11}$$

We have already seen that $\int_L F_+ = \lambda$ and again by Fubini

$$\int_L G_+(y)\,dy = \int_{L_+} g(Bx) \mathrm{e}^{z\cdot Bx}\,dx.$$

So (2.11) is the same as

$$\int_{L_+} g(Bx)\mathrm{e}^{z\cdot Bx}\,dx \le \frac{1}{4\lambda}(2\pi)^n. \tag{2.12}$$

Similarly, working with

$$\begin{aligned} F_- : y\in L &\mapsto \int_{\mathbb{R}_+} f(y-sv_+)\,ds \qquad \text{and} \\ G_- : y'\in L &\mapsto \int_{\mathbb{R}_+} g(By'-te_n)\mathrm{e}^{z\cdot(By'-te_n)}\,dt \end{aligned}$$

we obtain

$$\int_{L_-} g(Bx)\mathrm{e}^{z\cdot Bx}\,dx \le \frac{1}{4(1-\lambda)}(2\pi)^n. \tag{2.13}$$

Adding (2.12) and (2.13), we obtain $\int_{\mathbb{R}^n} g(Bx)\mathrm{e}^{z\cdot Bx}\,dx \le \frac{1}{4\lambda(1-\lambda)}(2\pi)^n$ which yields (2.9) since B has determinant 1.

Chapitre 3

Partitions et inégalités de Santaló fonctionnelles

Introduction

If A is a subset of $\mathbb{R}^n$ we let A° be the polar of A :

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall y \in A,\ x \cdot y \leq 1\},$$

where $x \cdot y$ denotes the scalar product of x and y. We denote the Euclidean norm of x by $|x| = \sqrt{x \cdot x}$. Let K be a subset of $\mathbb{R}^n$ with finite measure. The Blaschke-Santaló inequality states that there exists a point z in $\mathbb{R}^n$ such that

$$\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K - z)^\circ \leq \mathrm{vol}_n(D)\,\mathrm{vol}_n(D^\circ) = v_n^2, \tag{3.1}$$

where vol_n stands for the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^n$, D for the Euclidean ball and v_n for its volume. It was first proved by Blaschke in dimension 2 and 3 and Santaló [26] extended the result to any dimension. We say that an element z of $\mathbb{R}^n$ satisfying (3.1) is a *Santaló point* for K.
Throughout the paper a *weight* is an integrable function $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that for any n, the function $x \mapsto \rho(|x|)$ is integrable on $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1. Let f be a non-negative integrable function on $\mathbb{R}^n$, and ρ be a weight. We say that $c \in \mathbb{R}^n$ is a Santaló point for f with respect to ρ if the following holds : for all non-negative Borel function g on $\mathbb{R}^n$, if

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot y \geq 0 \ \Rightarrow\ f(c + x)g(y) \leq \rho\big(\sqrt{x \cdot y}\big)^2, \tag{3.2}$$

then

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x|)\,dx\Big)^2. \tag{3.3}$$

Heuristically, the choice of the weight ρ gives a notion of duality (or polarity) for non-negative functions. Our purpose is to give a new proof of the following theorem, due to Fradelizi and Meyer [11].

Theorem 3.2. *Let f be non-negative and integrable. There exists $c \in \mathbb{R}^n$ such that c is a Santaló point for f with respect to any ρ. Moreover, if f is even then 0 is a Santaló point for f with respect to any weight.*

The even case goes back to Keith Ball in [3], this was the first example of a functional version of (3.1). Later on, Artstein, Klartag and Milman [2] proved that any integrable f admits a Santaló point with respect to the weight $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$. Moreover, in this case the barycenter of f suits, as shown in Chapter 2. Unfortunately this is not true in general; indeed, taking

$$\begin{aligned} f &= \mathbf{1}_{(-2,0)} + 4\mathbf{1}_{(0,1)} \\ g &= \mathbf{1}_{(-0.5,0]} + \tfrac{1}{4}\mathbf{1}_{(0,1)} \\ \rho &= \mathbf{1}_{[0,1]}, \end{aligned}$$

it is easy to check that f has its barycenter at 0, and that $f(s)g(t) \leq \rho\big(\sqrt{st}\big)^2$ as soon as $st \geq 0$. However

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)\, ds \int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \tfrac{9}{2} > 4 = \Big(\int_{\mathbb{R}} \rho(|r|)\, dr\Big)^2.$$

To prove the existence of a Santaló point, the authors of [11] use a fixed point theorem and the usual Santaló inequality (for convex bodies). Our approach is based on a special form of the Prékopa-Leindler inequality and on a class of partitions of $\mathbb{R}^n$ introduced by Yao and Yao [29].
Lastly, the Blaschke-Santaló inequality follows very easily from Theorem 3.2 : we let the reader check that if c is a Santaló point for $\mathbf{1}_K$ with respect to the weight $\mathbf{1}_{[0,1]}$ then c is a Santaló point for K.

3.1 Yao-Yao partitions

In the sequel we consider real affine spaces of finite dimension. If E is such a space we denote by $\vec{E}$ the associated vector space. We say that $\mathcal{P}$ is a partition of E if $\cup\mathcal{P} = E$ and if the interiors of two distinct elements of $\mathcal{P}$ do not intersect. For instance, with this definition, the set $\{(-\infty, a], [a, +\infty)\}$ is a partition of $\mathbb{R}$. We define by induction on the dimension a class of partitions of an n-dimensional affine space.

Definition 3.3. If $E = \{c\}$ is an affine space of dimension 0, the only possible partition $\mathcal{P} = \{c\}$ is a Yao-Yao partition of E, and its center is defined to be c.
Let E be an affine space of dimension $n \geq 1$. A set $\mathcal{P}$ is said to be a Yao-Yao partition of E if there exists an affine hyperplane F of E, a vector $v \in \vec{E} \backslash \vec{F}$ and two Yao-Yao partitions $\mathcal{P}_+$ and $\mathcal{P}_-$ of F *having the same center* c such that

$$\mathcal{P} = \Big\{A + \mathbb{R}_- v \,|\, A \in \mathcal{P}_-\Big\} \cup \Big\{A + \mathbb{R}_+ v \,|\, A \in \mathcal{P}_+\Big\},$$

The center of $\mathcal{P}$ is then x.

If A is a subset of $\vec{E}$, the notation $\mathrm{pos}(A)$ stands for the positive hull of A, that is to say the smallest convex cone containing A.
A Yao-Yao partition $\mathcal{P}$ of an n-dimensional space E has 2^n elements and for each A in $\mathcal{P}$ there exists a basis $v_1, \ldots, v_n$ of $\vec{E}$ such that

$$A = c + \mathrm{pos}(v_1, \ldots, v_n), \tag{3.4}$$

where c is the center of $\mathcal{P}$. Indeed, assume that $\mathcal{P}$ is defined by $F, v, \mathcal{P}_+$ and $\mathcal{P}_-$ (see Definition 3.3). Let $A \in \mathcal{P}_+$ and assume inductively that there is a basis $v_1, \ldots, v_{n-1}$ of $\vec{F}$ such that $A = c + \mathrm{pos}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Then $A + \mathbb{R}_+ v = c + \mathrm{pos}(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$.

A fundamental property of this class of partitions is the following

Proposition 3.4. *Let $\mathcal{P}$ be a Yao-Yao partition of E and c its center. Let ℓ be an affine form on E such that $\ell(c) = 0$. Then there exists $A \in \mathcal{P}$ such that $\ell(x) \geq 0$ for all $x \in A$. Moreover there is at most one element A of $\mathcal{P}$ such that $\ell(x) > 0$ for all $x \in A \backslash \{c\}$.*

Proof. By induction on the dimension n of E. When $n = 0$ it is obvious, we assume that $n \geq 1$ and that the result holds for all affine spaces of dimension $n - 1$. Let ℓ be an affine form on E such that $\ell(c) = 0$. We introduce $F, v, \mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-$ given by Definition 3.3. By the induction assumption, there exists $A_+ \in \mathcal{P}_+$ and $A_- \in \mathcal{P}_-$ such that

$$\forall y \in A_+ \cup A_- \quad \ell(y) \geq 0.$$

If $\ell(c + v) \geq 0$ then $\ell(x + tv) \geq 0$ for all $x \in A_+$ and $t \in \mathbb{R}_+$, thus $\ell(x) \geq 0$ for all $x \in A_+ + \mathbb{R}_+ v$. If on the contrary $\ell(c + v) \leq 0$ then $\ell(x) \geq 0$ for all $x \in A_- + \mathbb{R}_- v$, which proves the first part of the proposition. The proof of the 'moreover' part is similar. $\square$

The latter proposition yields the following corollary, which deals with dual cones : if C is cone of $\mathbb{R}^n$ the dual cone of C is by definition

$$C^* = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall x \in C,\ x \cdot y \geq 0\}.$$

Corollary 3.5. *Let $\mathcal{P}$ be a Yao-Yao partition of $\mathbb{R}^n$ centered at 0. Then*

$$\mathcal{P}^* := \{A^* \mid A \in \mathcal{P}\}$$

is also a partition of $\mathbb{R}^n$.

Actually the dual partition is also a Yao-Yao partition centered at 0 but we will not use this fact.

Proof. Let $x \in \mathbb{R}^n$ and $\ell : y \in \mathbb{R}^n \mapsto x \cdot y$. By the previous proposition there exists $A \in \mathcal{P}$ such that $\ell(y) \geq 0$ for all $y \in A$. Then $x \in A^*$. Thus $\cup \mathcal{P}^* = \mathbb{R}^n$. Moreover if x belongs to the interior of A^*, then for all $y \in A \backslash \{0\}$ we have $\ell(y) > 0$. Again by the proposition above there is at most one such A. Thus the interiors of two distinct elements of $\mathcal{P}^*$ do not intersect. $\square$

We now let $\mathcal{M}(E)$ be the set of Borel measure μ on E which are finite and which satisfy $\mu(F) = 0$ for any affine hyperplane F.

Definition 3.6. Let $\mu \in \mathcal{M}(E)$, a Yao-Yao equipartition $\mathcal{P}$ for μ is a Yao-Yao partition of E satisfying

$$\forall A \in \mathcal{P}, \quad \mu(A) = 2^{-n}\mu(E). \tag{3.5}$$

We say that $c \in E$ is a Yao-Yao center of μ if c is the center of a Yao-Yao equipartition for μ.

Here is the main result concerning those partitions.

Theorem 3.7. *Let $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, there exists a Yao-Yao equipartition for μ. Moreover, if μ is even then 0 is a Yao-Yao center for μ.*

Up to some extra technical hypothesis on the measure, this is due to A.C. and F.F. Yao [29]. We refer to the following chapter for a proof of this very theorem.

3.2 Proof of the Fradelizi-Meyer inequality

In this section, all integrals are taken with respect to the Lebesgue measure. Let us recall the Prékopa-Leindler inequality, which is a functional form of the famous Brunn-Minkowski inequality, see for instance [4] for a proof and selected applications. If $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ are non-negative and integrable functions on $\mathbb{R}^n$ satisfying $\varphi_1(x)^\lambda \varphi_2(y)^{1-\lambda} \leq \varphi_3(\lambda x + (1-\lambda)y)$ for all x, y in $\mathbb{R}^n$ and for some fixed $\lambda \in (0, 1)$, then

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1\Big)^\lambda \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_2\Big)^{1-\lambda} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_3.$$

The following lemma is a useful (see [11, 3]) logarithmic version of Prékopa. We recall the proof for completeness.

Lemma 3.8. *Let f_1, f_2, f_3 be non-negative Borel functions on $\mathbb{R}_+^n$ satisfying*

$$f_1(x)f_2(y) \leq \Big(f(\sqrt{x_1y_1}, \dots, \sqrt{x_ny_n})\Big)^2.$$

for all x, y in $\mathbb{R}_+^n$. Then

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} f_1 \int_{\mathbb{R}_+^n} f_2 \leq \Big(\int_{\mathbb{R}_+^n} f_3\Big)^2. \tag{3.6}$$

Proof. For $i = 1, 2, 3$ we let

$$g_i(x) = f_i(\mathrm{e}^{x_1}, \dots, \mathrm{e}^{x_n})\mathrm{e}^{x_1+\cdots+x_n}.$$

Then by change of variable we have

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_i = \int_{\mathbb{R}_+^n} f_i.$$

On the other hand the hypothesis on f_1, f_2, f_3 yields

$$g_1(x)g_2(y) \leq g_3(\tfrac{x+y}{2}),$$

for all x, y in $\mathbb{R}^n$. Then by Prékopa

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_1 \int_{\mathbb{R}^n} g_2 \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g_3\Big)^2. \quad \square$$

Theorem 3.9. *Let f be a non-negative Borel integrable function on $\mathbb{R}^n$, and let c be a Yao-Yao center for the measure with density f. Then c is a Santaló point for f with respect to any weight.*

Combining this result with Theorem 3.7 we obtain a complete proof of the Fradelizi-Meyer inequality.

Proof. It is enough to prove that if 0 is a Yao-Yao center for f then 0 is a Santaló point. Indeed, if c is a center for f then 0 is a center for

$$f_c : x \mapsto f(c + x).$$

And if 0 is a Santaló point for f_c then c is a Santaló point for f.
Let $\mathcal{P}$ be a Yao-Yao equipartition for f with center 0. Let g and ρ be such that (3.2) holds (with $c = 0$). Let $A \in \mathcal{P}$, by (3.4), there exists an operator

T on $\mathbb{R}^n$ with determinant 1 such that $A = T\big(\mathbb{R}^n_+\big)$. Let $S = (T^{-1})^*$, then $S\big(\mathbb{R}^n_+\big) = A^*$. Let $f_1 = f \circ T$, $f_2 = g \circ S$ and $f_3(x) = \rho(|x|)$. Since for all x, y we have $T(x) \cdot S(y) = x \cdot y$, we get from (3.2)

$$f_1(x) f_2(y) \le \rho(\sqrt{x \cdot y})^2 = f_3(\sqrt{x_1 y_1}, \dots, \sqrt{x_n y_n})^2,$$

for all x, y in $\mathbb{R}^n_+$. Applying the previous lemma we get (3.6). By change of variable it yields

$$\int_A f \int_{A^*} g \le \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} \rho(|x|)\, dx\Big)^2.$$

Therefore

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \int_A f \int_{A*} g \le 2^n \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} \rho(|x|)\, dx\Big)^2. \tag{3.7}$$

Since $\mathcal{P}$ is an equipartition for f we have for all $A \in \mathcal{P}$

$$\int_A f = 2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f.$$

By Corollary 3.5, the set $\{A^*, A \in \mathcal{P}\}$ is a partition of $\mathbb{R}^n$, thus

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \int_{A^*} g = \int_{\mathbb{R}^n} g.$$

Inequality (3.7) becomes

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \int_{\mathbb{R}^n} g \le 4^n \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} \rho(|x|)\, dx\Big)^2,$$

and of course the latter is equal to $\big(\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x|)\, dx\big)^2$. $\square$

Chapitre 4

Partitions à la Yao et Yao

Introduction

In [29], A.C. and F.F. Yao show that for any probability measure μ on $\mathbb{R}^n$, having a density which is continuous and bounded away from 0, it is possible to partition $\mathbb{R}^n$ into 2^n regions of equal measure for μ, in a way that every affine hyperplane of $\mathbb{R}^n$ avoids at least one of the regions. This theorem was designed for computational geometry purposes but it turned out to be useful in other areas of mathematics. For instance, the authors of [1] use it to prove Ramsey type theorems and in the previous chapter we show a connection with the Blaschke-Santaló inequality.

The proof of Yao and Yao is by induction on the dimension and uses the Borsuk-Ulam theorem. The purpose of this paper is to show that the Yao-Yao theorem can be obtained in a much more concrete way, by applying the real intermediate values theorem again and again. Of course this proof is longer, but we believe that it gives a better understanding of the structure of the Yao-Yao partition. Also we are able to get rid of the technical assumptions (μ having a continuous density bounded away from 0) which are annoying for applications. The article [29] being very sketchy, we intend to give (almost) every detail.

The paper deals with finite dimensional real affine spaces ; if E is such a space, $\vec{E}$ denotes the associated vector space. We say that $\mathcal{P}$ is a *partition* of E if $\cup\mathcal{P} = E$ and if the interiors of two distinct elements of $\mathcal{P}$ do not intersect. For instance, with this definition, the set $\mathcal{P} = \{(-\infty, a], [a, +\infty)\}$ is a partition of $\mathbb{R}$.

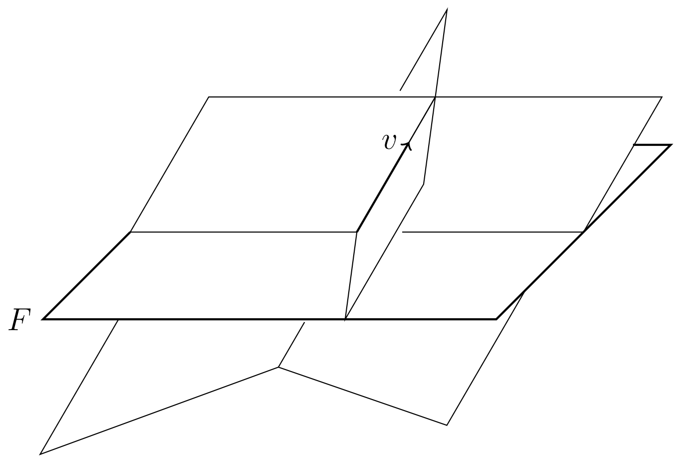
Definition 4.1. If $E = \{x\}$ is an affine space of dimension 0, we say that $\mathcal{P}$ is a Yao-Yao partition of E if $\mathcal{P} = \{x\}$ and we define the center of $\mathcal{P}$ to be x.

Let E be an affine space of dimension $n \geq 1$. We say that $\mathcal{P}$ is a Yao-Yao partition of E if there exists an affine hyperplane F of E, a vector $v \in \vec{E} \backslash \vec{F}$ and two Yao-Yao partitions $\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_{-1}$ of F *having the same center* x such that

$$\mathcal{P} = \left\{ A + \mathbb{R}_- v \,|\, A \in \mathcal{P}_{-1} \right\} \cup \left\{ A + \mathbb{R}_+ v \,|\, A \in \mathcal{P}_1 \right\},$$

and we say that x is the center of $\mathcal{P}$.

When E has dimension 2, a Yao-Yao partition is just the partition defined by two non-parallel lines. From dimension 3, the picture becomes more complicated.



If E has dimension n, then a Yao-Yao partition of E has 2^n elements and we shall see in the following section that every hyperplane of E avoids at least one of the elements of a Yao-Yao partition. Let us state our main theorem. Let $\mathcal{M}(E)$ be the set of non-negative Borel measures μ on E which are finite and satisfy $\mu(F) = 0$ for any affine hyperplane F.

Definition 4.2. Let $\mu \in \mathcal{M}(E)$, a Yao-Yao *equipartition* $\mathcal{P}$ for μ is a Yao-Yao partition of E satisfying

$$\forall A \in \mathcal{P}, \quad \mu(A) = 2^{-n} \mu(E). \tag{4.1}$$

We say that $x \in E$ is a Yao-Yao center of μ if x is the center of a Yao-Yao equipartition for μ.

Theorem 4.3. *Let $\mu \in \mathcal{M}(E)$, there exists a Yao-Yao equipartition for μ. Moreover, if μ has a center of symmetry $x \in E$, then x is a Yao-Yao center for μ.*

4.1 Main properties

If A is a subset of $\vec{E}$ we denote by $\mathrm{pos}(A)$ the positive hull of A, that is to say the smallest convex cone containing A.
A Yao-Yao partition $\mathcal{P}$ of an n-dimensional space E has 2^n elements and for each A in $\mathcal{P}$ there exists a basis $v_1, \ldots, v_n$ of $\vec{E}$ such that

$$A = x + \mathrm{pos}(v_1, \ldots, v_n), \tag{4.2}$$

where x is the center of $\mathcal{P}$. Indeed, assume that $\mathcal{P}$ is defined by $F, v, \mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_{-1}$ (see Definition 4.1). Let $A \in \mathcal{P}_1$ and assume inductively that there is a basis $v_1, \ldots, v_{n-1}$ of $\vec{F}$ such that $A = x + \mathrm{pos}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Then $A + \mathbb{R}_+ v = x + \mathrm{pos}(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Proposition 4.4. *Let $\mathcal{P}$ be a Yao-Yao partition of E and x be its center. Any affine half-space containing x contains an element of $\mathcal{P}$.*

Proof. When E has dimension 0, the result is obvious. Let E have dimension $n \geq 1$ and assume that the proposition holds for any affine space of dimension $n-1$. Let ℓ be an affine form on E such that $\ell(x) \geq 0$, and let $H = \{y \in E \,|\, \ell(y) \geq 0\}$. We use the notations of Definition 4.1. By the induction assumption, there exists $A_+ \in \mathcal{P}_1$ and $A_- \in \mathcal{P}_{-1}$ such that

$$\forall y \in A_+,\ \ell(y) \geq 0 \quad \text{and} \quad \forall y \in A_-,\ \ell(y) \geq 0.$$

Let $\vec{\ell}$ be the linear form on $\vec{E}$ associated to ℓ, if $\vec{\ell}(v) \geq 0$ then $\ell(x + tv) \geq 0$ for all $x \in A_+$ and $t \in \mathbb{R}_+$, thus $A_+ + \mathbb{R}_+ v \subset H$. Similarly if $\vec{\ell}(v) \leq 0$ then $A_- + \mathbb{R}_- v \subset H$. In both cases H contains an element of $\mathcal{P}$. $\square$

Proposition 4.5. *Let $\mu \in \mathcal{M}(E)$ and let K be a convex subset of E satisfying $\mu(E \backslash K) < 2^{-n}\mu(E)$. Then any Yao-Yao center x of μ is contained in K.*

Proof. Assume on the contrary that there is a center x of μ outside K, and let $\mathcal{P}$ be an equipartition with center x. By Hahn-Banach there is a half-space containing x and disjoint from K. By Proposition 4.4, this half-space contains an element A of $\mathcal{P}$. So on the one hand $\mu(A) = 2^{-n}\mu(E)$ and on the other hand $A \subset E \backslash K$, thus we get a contradiction. $\square$

4.2 Center with respect to a basis

Let E be an affine space of dimension n and $\mathcal{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ be a family of affine forms on E such that the map

$$x \in E \mapsto \big(\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x)\big) \in \mathbb{R}^n$$

is one to one. We say that $\mathcal{L}$ is a *system of coordinates*. If $x \in E$ and $v \in \vec{E}$ we write x_i and v_i for $\ell_i(x)$ and $\vec{\ell_i}(v)$, respectively. We also let $e^1, \dots, e^n$ be the basis of $\vec{E}$ satisfying $e^i_j = \delta_{ij}$. Let us introduce a restricted notion of Yao-Yao partition.

Definition 4.6. A Yao-Yao partition $\mathcal{P}$ of E given by $F, v, x, \mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_{-1}$ is *adapted to* $\mathcal{L}$ if $F = \{y \in E \,|\, y_1 = x_1\}$ and if $\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{P}_{-1}$ are adapted to $(\ell_{2|F}, \dots, \ell_{n|F})$ (which is a system of coordinates on F).

In the sequel, the vector v is called the *axis* of $\mathcal{P}$, and it is said to be *normalized* when $v_1 = 1$. Since $\mathcal{P}$ has 2^n elements, there is a one to one map between $\mathcal{P}$ and the discrete cube $\{-1, 1\}^n$. Let us construct such a map.

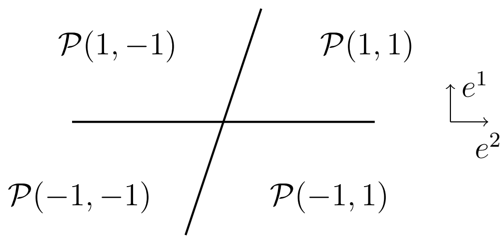
Definition 4.7. Let $\mathcal{P}$ be a Yao-Yao partition of E adapted to $\mathcal{L}$, defined by $x, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_{-1}$ and v (with $v_1 = 1$). Let $\mathcal{P}(\emptyset) = E$ and let $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ be a sequence of ± 1 of size $k \in \{1, \dots, n\}$. Recall that $\mathcal{P}_{\varepsilon_1}$ is a partition of F, hence the notation $\mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\cdot)$ is relative to F, for instance $\mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\emptyset) = F$. We assume inductively that we have defined $\mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$ and we let

$$\mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k) + \mathbb{R}_+(\varepsilon_1 v).$$

An easy induction shows that

$$\mathcal{P} = \big\{\mathcal{P}(\varepsilon) \,|\, \varepsilon \in \{-1, 1\}^n\big\}. \tag{4.3}$$

Here is a picture in dimension 2.



We now give some basic properties of the sets $\mathcal{P}(\cdot)$. It is easy to prove by induction that if $\mathcal{P}$ is a Yao-Yao partition of E adapted to the basis $\mathcal{L}$, then for all ± 1 sequence ε of size k, there exists a sequence of vectors $v^1, \dots, v^k$ satisfying $v^i_j = 0$ and $v^i_i = 1$ for all $j < i \leq k$ (we call *sub-diagonal* such a sequence hereafter) such that

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = x + \operatorname{pos}(\varepsilon_1 v^1, \dots, \varepsilon_k v^k) + \operatorname{span}(e^{k+1}, \dots, e^n), \tag{4.4}$$

where x is the center of $\mathcal{P}$. Besides, the first vector v^1 is equal to the axis of $\mathcal{P}$ (in particular, it does not depend on ε). Let $x, y \in E$ and $v^1, \dots, v^n$ and $w^1, \dots, w^n$ be two sub-diagonal sequences of $\vec{E}$. Observe that if

$$x + \operatorname{pos}(v^1, \dots, v^n) = y + \operatorname{pos}(w^1, \dots, w^n)$$

then $x = y$ and $v^i = w^i$ for all $i = 1, \ldots, n$. Let $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ be Yao-Yao partitions of E satisfying $\mathcal{P}(\varepsilon) = \mathcal{Q}(\varepsilon)$ for some ± 1 sequence ε of length $k \le n$. Let P be the projection of E with range $\operatorname{span}(e^1, \ldots, e^k)$ and kernel $\operatorname{span}(e^{k+1}, \ldots, e^n)$. Using (4.4), the equality $P\big(\mathcal{P}(\varepsilon)\big) = P\big(\mathcal{Q}(\varepsilon)\big)$ and the observation above, we get

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_k) &= (y_1, \ldots, y_k) \quad \text{and} \\ (v_1, \ldots, v_k) &= (w_1, \ldots, w_k), \end{aligned} \tag{4.5}$$

where x and y are the centers of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$, respectively ; and v and w are their normalized ($v_1 = w_1 = 1$) axes.

If S is a set of affine functions on E (possibly empty), we let $\mathcal{B}_E(S)$ be the smallest σ-algebra of subsets of E making all elements of S measurable. When a set A belongs to $\mathcal{B}_E(S)$ for some S, we say that A depends only on S. Another simple consequence of (4.4) is that for any ε of length k the set $\mathcal{P}(\varepsilon)$ depends only on $(\ell_1, \ldots, \ell_k)$.

Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and $F = \{\ell_1 = \alpha\}$. For any $u \in \vec{E} \backslash \vec{F}$ we let $\pi_{F,u} : F + \mathbb{R}_+ u \to F$ be the projection which, for any $x \in F$ and $t \in \mathbb{R}_+$, maps $x + tu$ to x. Let $A \subset F$, we let

$$A_u = (\pi_{F,u})^{-1}(A) = \{x \in E \,|\, x_1 \ge \alpha \text{ and } x - (x_1 - \alpha)\frac{u}{u_1} \in A\}. \tag{4.6}$$

Let $\mathcal{P}$ be a partition of E. Let $k < n$ and $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ be a ± 1 sequence. There exists an affine form $\ell \in \operatorname{span}(1, \ell_1, \ldots, \ell_k)$ such that

$$\mathcal{P}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 1) = \mathcal{P}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \cap \{\ell_{k+1} \ge \ell\} \tag{4.7a}$$

$$\mathcal{P}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, -1) = \mathcal{P}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \cap \{\ell_{k+1} \le \ell\}. \tag{4.7b}$$

Let us prove (4.7) by induction on k. When $k = 0$ we have $\mathcal{P}(1) = F + \mathbb{R}_+ v = \{\ell_1 \ge x_1\}$ and $\mathcal{P}(-1) = \{\ell_1 \le x_1\}$. If $k \ge 1$, let v be the normalized ($v_1 = 1$) axis of $\mathcal{P}$ and assume inductively that

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k 1) = \mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \cap \{\ell_{k+1} \ge \ell\}$$

for some $\ell \in \operatorname{span}(1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$. Let us assume that $\varepsilon_1 = 1$, then

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, 1) &= (\pi_{F,v})^{-1}\big(\mathcal{P}_1(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \cap \{\ell_{k+1} \ge \ell\}\big) \\ &= \mathcal{P}(1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k) \cap A_v, \end{aligned}$$

where $A = F \cap \{\ell_{k+1} \ge \ell\}$. Using (4.6), we obtain

$$A_v = \{x_1 \ge \alpha\} \cap \{\ell_{k+1} \ge \ell'\}$$

where $\ell' = \ell + (\ell_1 - \alpha)(v_{k+1} - \vec{\ell}(v))$. Since additionnally $\{x_1 \geq \alpha\}$ contains $\mathcal{P}(1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k)$, we get (4.7a) when $\varepsilon_1 = 1$. The proof for $\varepsilon_1 = -1$ and the proof of (4.7b) are similar.
From (4.7), we get in particular

$$\mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, 1) \cup \mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, -1).$$

Applying this equality again and again, we obtain, for any ε of size k

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \cup \big\{ \mathcal{P}(\varepsilon, \tau) \,|\, \tau \in \{-1, 1\}^{n-k} \big\}$$

where (ε, τ) is the sequence obtained by concatenation of ε and τ. Therefore, if $\mathcal{P}$ is an equipartition for μ then

$$\mu\big(\mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)\big) = 2^{-k}\mu(E). \tag{4.8}$$

4.3 Uniqueness

In this section we prove that, under reasonable assumptions, the Yao-Yao center of a measure, with respect to a given basis, is unique. In the sequel, the space E is equipped with a system of coordinates $\ell_1, \dots, \ell_n$ and all Yao-Yao partitions are adapted to this system.

Lemma 4.8. *Let $\alpha \in \mathbb{R}$ and $F = \{z \in E \,|\, z_1 = \alpha\}$.*

(i) Let $A \subset F$ depend only on $\ell_2, \dots, \ell_k$, let $v, w \in \vec{E}$ satisfying $v_1 = w_1 = 1$ and $(v_2, \dots, v_k) = (w_2, \dots, w_k)$, then $A_v = A_w$.

(ii) Let ℓ be an affine form on E, non-constant on F and let $A = F \cap \{\ell \geq 0\}$. Let v, w satisfy $v_1 = w_1 = 1$ and $\vec{\ell}(v) > \vec{\ell}(w)$, then $A_v \subsetneq A_w$.

(iii) Again let $A = F \cap \{\ell \geq 0\}$, and let (v^p) be a sequence satisfying $v_1^p = 1$ for all p and $\vec{\ell}(v^p) \uparrow +\infty$. Then for any $\mu \in \mathcal{M}(E)$ we have

$$\lim_{p \to +\infty} \mu(A_{v^p}) = 0.$$

Proof. Point *(i)* follows easily from (4.6). For *(ii)*, observe that when $A = F \cap \{\ell \geq 0\}$, equation (4.6) becomes

$$A_v = \{x \in E \,|\, x_1 \geq \alpha \text{ and } \ell(x) \geq (x_1 - \alpha)\vec{\ell}(v)\}, \tag{4.9}$$

and similarly for A_w. The inclusion $A_v \subset A_w$ follows immediately. Besides, since ℓ is non-constant on F, we can find x satisfying $x_1 = 1 + \alpha$ and

$$\vec{\ell}(w) < \ell(x) < \vec{\ell}(v),$$

so inclusion is strict. By *(ii)* the sequence (A_{v^p}) is decreasing, and clearly by (4.9) the intersection $\cap A_{v^p}$ is included in F, hence *(iii)*. □

The key step is the following

Lemma 4.9. *Let $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ satisfy*

$$\forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \quad \mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \mathcal{Q}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \tag{4.10}$$

$$\exists \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{k+1}, \quad \mathcal{P}(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{k+1}) \neq \mathcal{Q}(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{k+1}) \tag{4.11}$$

for some $k < n$. If $x_{k+1} \geq y_{k+1}$, then there exists $\delta_1, \dots, \delta_k$ such that $\mathcal{P}(\delta_1, \dots, \delta_k, 1)$ is strictly included in $\mathcal{Q}(\delta_1, \dots, \delta_k, 1)$.

Proof. The proof is by induction on k. If $k = 0$ then (4.11) becomes

$$\mathcal{P}(1) = \{\ell_1 \geq x_1\} \neq \{\ell_1 \geq y_1\} = \mathcal{Q}(1).$$

So $x_1 \neq y_1$, thus $x_1 > y_1$, hence $\mathcal{P}(1) \subsetneq \mathcal{Q}(1)$.
Assume that $k \geq 1$. Let v and w be the normalized ($v_1 = w_1 = 1$) axes of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$, respectively. Recall that (4.10) implies (4.5) : $(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_k)$ and $(v_1, \dots, v_k) = (w_1, \dots, w_k)$. Also, intersecting (4.10) with $\{\ell_1 = x_1\}$, we get

$$\forall \varepsilon_1, \dots \varepsilon_k, \quad \mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k) = \mathcal{Q}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k). \tag{4.12}$$

There are three cases. If $v_{k+1} = w_{k+1}$, since for all $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}$, the set $A = \mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k+1})$ depends only on $\ell_2, \dots, \ell_{k+1}$, Lemma 4.8 *(i)* implies that

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}) &= \mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k+1}) + \mathbb{R}_+(\varepsilon_1 v) \\ &= \mathcal{P}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k+1}) + \mathbb{R}_+(\varepsilon_1 w). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Also $\mathcal{Q}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1}) = \mathcal{Q}_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k+1}) + \mathbb{R}_+(\varepsilon_1 w)$. Therefore there must exist $(\delta_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_{k+1})$ such that

$$\mathcal{P}_{\delta_1}(\varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_{k+1}) \neq \mathcal{Q}_{\delta_1}(\varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_{k+1}),$$

otherwise (4.11) would fail. Recalling (4.12), we remark that we can apply the induction assumption to $\mathcal{P}_{\delta_1}$ and $\mathcal{Q}_{\delta_1}$: there exists $\delta_2, \dots, \delta_k$ such that $\mathcal{P}_{\delta_1}(\delta_2, \dots, \delta_k 1)$ is stricly included in $\mathcal{Q}_{\delta_1}(\delta_2, \dots, \delta_k 1)$. Then (4.13) shows that $\mathcal{P}(\delta_1, \dots, \delta_k 1)$ is strictly included in $\mathcal{Q}(\delta_1, \dots, \delta_k 1)$, which concludes the proof in this case.
If $v_{k+1} > w_{k+1}$, then by (4.7) and Lemma 4.8 *(ii)* we obtain

$$\mathcal{P}_1(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k 1) + \mathbb{R}_+ v \subsetneq \mathcal{P}_1(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k 1) + \mathbb{R}_+ w, \tag{4.14}$$

for all $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$. Therefore, it is enough to prove that there exists $\delta_2, \dots, \delta_k$ such that

$$\mathcal{P}_1(\delta_2, \dots, \delta_k 1) \subset \mathcal{Q}_1(\delta_2, \dots, \delta_k 1).$$

This holds by the induction assumption applied to $\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{Q}_1$: either we have equality for all $\delta_2, \ldots, \delta_k$, or there exists $\delta_2, \ldots, \delta_k$ such that the inclusion is strict.
The case $v_{k+1} < w_{k+1}$ is similar, we just need to deal with $\mathcal{P}_{-1}$ and $\mathcal{Q}_{-1}$ instead of $\mathcal{P}_1$ and $\mathcal{Q}_1$. $\square$

We now let $\mathcal{M}^*(E)$ be the set of measures $\mu \in \mathcal{M}(E)$ which satisfy $\mu(U) > 0$ for every open set U. Here is the main result of this section.

Proposition 4.10. *Let $\mu \in \mathcal{M}^*(E)$, then μ has at most one center with respect to the system $\mathcal{L}$. Moreover the k first coordinates of the center of μ depend only on the restriction of μ to $\mathcal{B}_E(\ell_1, \ldots, \ell_k)$.*

Proof. Let $\mu, \nu \in \mathcal{M}^*(E)$ satisfy $\nu(A) = \mu(A)$ for all $A \in \mathcal{B}_E(\ell_1, \ldots, \ell_l)$. We can assume that $\mu(E) = 1 (= \nu(E))$. Let $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ be equipartitions for μ and ν, respectively, and let us call x and y the respective centers of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$. We want to prove that $(x_1, \ldots, x_l) = (y_1, \ldots, y_l)$. If $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$, there exists k satisfying (4.10) and (4.11), we have in particular

$$(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_k) \tag{4.15}$$

and we may assume that $x_{k+1} \geq y_{k+1}$. By the previous lemma, there exists $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})$ such that $\mathcal{P}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})$ is strictly included in $\mathcal{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})$. Since these sets are polytopes, their difference $\mathcal{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1}) \backslash \mathcal{P}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})$ has non-empty interior. Recall that the set $\mathcal{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})$ depends only on $\ell_1, \ldots, \ell_{k+1}$. So if $k+1 \leq l$, applying (4.8), and the fact that $\mu(U) > 0$ for any open set U, we get

$$\begin{aligned} 2^{-k-1} = \mu\big(\mathcal{P}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})\big) &< \mu\big(\mathcal{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})\big) \\ &= \nu\big(\mathcal{Q}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k+1})\big) = 2^{-k-1}, \end{aligned}$$

which is absurd. Therefore $l \leq k$, and the result follows from (4.15).
The uniqueness of the center is obtained by letting $\nu = \mu$ and $l = n$. $\square$

4.4 Continuity

We now deal with the continuity of the center, for this we need a topology on $\mathcal{M}(E)$. Let $(\mu^p)_{p \in \mathbb{N}}$ be a sequence of elements of $\mathcal{M}(E)$ and $\mu \in \mathcal{M}(E)$. The sequence (μ^p) converges *narrowly* to μ when

$$\int \phi \, d\mu^p \to \int \phi \, d\mu \tag{4.16}$$

for any function ϕ continuous and bounded on E. A subset $\mathcal{F}$ of $\mathcal{M}(E)$ is *tight* if for every $\varepsilon > 0$ there exists a compact subset K of E such that $\mu(E\backslash K) < \varepsilon$ for all $\mu \in \mathcal{F}$. A converging sequence of measures is obviously tight.
Recall that when $T\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ is a measurable map, and μ is a measure on Ω_1, the image measure $T_{\#}\mu$ of μ by T is defined by

$$T_{\#}\mu(A) = \mu\big(T^{-1}(A)\big),$$

for every measurable subset A of Ω_2.
Let F be an affine hyperplane of E. For any $\mu \in \mathcal{M}(E)$ and $v \in \vec{E}\backslash\vec{F}$ we let $\mu_{F,v} = (\pi_{F,v})_{\#}\mu$, hence

$$\forall A \subset F, \quad \mu_{F,v}(A) = \mu(A + \mathbb{R}_+ v). \tag{4.17}$$

Let (ν^p) be a sequence of elements of $\mathcal{M}(E)$ converging narrowly towards $\nu \in \mathcal{M}(E)$. Notice that if $A \subset E$ is a polytope, then $\nu(\partial A) = 0$ and thus $\nu^p(A) \to \nu(A)$.
Let (v^p) be a sequence of elements of $\vec{E}\backslash\vec{F}$ converging to $v \in \vec{E}\backslash\vec{F}$. Then

$$\nu^p_{F,v^p} \to \nu_{F,v}, \quad \text{narrowly.}$$

Indeed, by tightness of the set $\{\nu, \nu^p \,|\, p \in \mathbb{N}\}$, we can assume that all these measures are supported by a compact set K. We can also assume that $F + \mathbb{R}_+ v^p = F + \mathbb{R}_+ v$ for all p. Then, setting $\mu^p = \nu^p_{F,v^p}$ and $\mu = \nu_{F,v}$, it is easy to see that the supports of μ and μ^p for all p are contained in a compact subset L of F. Let ϕ be continuous on F, then ϕ is uniformly continuous on L, from which we get $\phi \circ \pi_{F,v^p} \to \phi \circ \pi_{F,v}$, uniformly on K. The result follows easily.
In the same spirit, if (u^p) is a sequence of elements of $\vec{E}$ converging to 0 and if T_p is the translation of vector u^p, then $(T_p)_{\#}\nu^p \to \nu$, narrowly.
The following lemma is an easy consequence of Proposition 4.5.

Lemma 4.11. *Let $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(E)$ be tight and such that $\{\mu(E) \,|\, \mu \in \mathcal{F}\}$ is bounded. Then there exists a compact subset of E containing any center of any element of $\mathcal{F}$.*

We now reformulate the definition of a Yao-Yao center. Let $\mu \in \mathcal{M}(E)$. Then an element $x \in E$ is a center for μ according to $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ if and only if letting $F = \{\ell_1 = x_1\}$ there exists $v \in \vec{E}\backslash\vec{F}$ such that

- $\mu(F + \mathbb{R}_+ v) = \frac{1}{2}\mu(E)$.
- the point x is a center for both $\mu_{F,v}$ and $\mu_{F,-v}$, according to the system of coordinates $(\ell_{2|F}, \ldots, \ell_{n|F})$.

In the sequel, such a vector v, is called an axis for (μ, F), and we say that v is normalized if $v_1 = 1$. Here is a first continuity property of the center.

Lemma 4.12. *Let (μ^p) be a sequence of elements of $\mathcal{M}(E)$ converging narrowly towards $\mu \in \mathcal{M}(E)$. If all the measures μ^p share a common center x with respect to $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$; then x is also a center of μ.*

Proof. The proof is by induction on the dimension n of E. When $n = 1$, the result is obvious : if x is a median for all the measures μ^p then it is a median for μ. We assume that $n \geq 2$ and that the result holds for any affine space of dimension $n-1$. We can also assume that μ and the measures μ^p are probability measures. Let $F = \{\ell_1 = x_1\}$. For all p there exists a normalized axis v^p for (μ^p, F). We claim that the sequence (v^p) is bounded. Indeed otherwise there exists ℓ affine on E such that $\vec{\ell}(v^p) \to +\infty$. Let $H = \{\ell \geq 0\} \cap F$. Let $\epsilon > 0$, by Lemma 4.8 *(iii)*, there exists w such that $w_1 = 1$ and $\mu(H_w) < \epsilon$. For p big enough $\vec{\ell}(v^p) > \vec{\ell}(w)$, applying Lemma 4.8 *(ii)* we get $H_{v^p} \subset H_w$. Also for p large, we have $\mu^p(H_w) \leq \mu(H_w) + \epsilon$. Thus

$$\mu^p_{F,v^p}(H) = \mu^p(H_{v^p}) < 2\epsilon.$$

Taking ϵ small enough, it follows from Proposition 4.5 that for any such p the center x of μ^p_{F,v^p} does not belong to H. Hence $\ell(x) \leq 0$. Let $m > 0$, the same holds if we replace ℓ by $\ell + m$, so we get $\ell(x) \leq -m$ for all $m > 0$, which is absurd.
Up to an extraction we can assume that (v^p) has a limit, say v (which satisfies $v_1 = 1$). Then

$$\mu^p_{F,v^p} \to \mu_{F,v} \quad \text{narrowly.}$$

By the induction assumption, x is a center for $\mu_{F,v}$ with respect to the basis $(\ell_{2|F}, \ldots, \ell_{n|F})$, and the same holds for $\mu_{F,-v}$. Therefore x is a center for μ. $\square$

Corollary 4.13. *Let (μ^p) be a sequence of elements of $\mathcal{M}(E)$ converging narrowly towards $\mu \in \mathcal{M}(E)$. If every measure μ^p has a center x_p with respect to $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ and if the sequence (x^p) has a limit x, then x is a center of μ with respect to $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$.*

Proof. Let $v^p = x - x^p$ and T_p be the translation of vector v^p. Since $v^p \to 0$ we have $(T_p)_\# \mu^p \to \mu$, and clearly $x = T_p(x^p)$ is a center for $(T_p)_\# \mu^p$. Then the result follows from the previous lemma. $\square$

4.5 Proof of Theorem 4.3

Let us start with an easy fact. Let V be a vector space of finite dimension n, with a given basis $(e_1, \dots, e_n)$. Let $T : V \to V$ be continuous and satisfy the following properties :

(a) For $k = 1 \dots n$ and $v \in V$, the k first coordinates of Tv depend only on the k first coordinates of v.

(b) If f is a linear form and (v^p) a sequence satisfying $f(v^p) \to +\infty$ then $f(Tv^p) \to +\infty$.

Then T is onto.

Indeed, let u in V and $u_1, \dots, u_n$ be its coordinates. By (b) and the continuity of T, we can find $v_1 \in \mathbb{R}$ such that the first coordinate of $T(v_1 e_1)$ is u_1. Then we find $v_2 \in \mathbb{R}$ such that the second coordinate of $T(v_1 e_1 + v_2 e_2)$ is u_2, and by (a) the first coordinate of $T(v_1 e_1 + v_2 e_2)$ is still u_1. And so on.

Proposition 4.14. *Let E be an affine space and $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ be a system of coordinates. Any element of $\mathcal{M}^*(E)$ admits a unique center with respect to $(\ell_1, \dots, \ell_n)$.*

Proof. We have already proved the uniqueness of the center, we shall prove its existence by induction on the dimension. If E has dimension 1 then we just have to show that any $\mu \in \mathcal{M}^*(E)$ has a median, which is clear.
If $n \geq 2$, we assume that the proposition holds for any affine space of dimension $n-1$. Let $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfy $\mu\{\ell_1 \geq \alpha\} = \frac{1}{2}\mu(E)$ and let $F = \{\ell_1 = \alpha\}$. Let $u \in \vec{E}$ satisfy $u_1 = 1$. By the induction assumption, for all $v \in \vec{F}$ and $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, the measure $\mu_{F,\varepsilon(u+v)}$ admits a unique center with respect to $(\ell_2, \dots, \ell_n)$ which we call $x^{(\varepsilon)}(v)$. If we can prove that there exists v such that $x^{(1)}(v) = x^{(-1)}(v)$, then we are done. We define

$$T : v \in \vec{F} \mapsto x^{(-1)}(v) - x^{(1)}(v) \in \vec{F}.$$

If a sequence (v^p) goes to v, then $\mu_{F,u+v^p}$ converges narrowly to $\mu_{F,u+v}$. Then by Lemma 4.11, the sequence $\big(x^{(1)}(v^p)\big)_p$ is bounded, and by Corollary 4.13, any of its converging subsequences goes to the unique center of $\mu_{F,u+v}$. Therefore $x^{(1)}(v^p) \to x^{(1)}(v)$, and similarly for $x^{(-1)}$, hence the continuity of T.
If $(v_2, \dots, v_k) = (w_2, \dots, w_k)$ then, by Lemma 4.8 *(ii)*, we have $A_{u+v} = A_{u+w}$ for all $A \in \mathcal{B}_F(\ell_2, \dots, \ell_k)$, hence $\mu_{F,u+v}(A) = \mu_{F,u+w}(A)$. By Proposition 4.10, this implies that for $i = 2, \dots, k$

$$\ell_i\big(x^{(1)}(v)\big) = \ell_i\big(x^{(1)}(w)\big),$$

and similarly for $x^{(-1)}$. Therefore T satisfies (a).
Let ℓ be an affine form on E, and (v^p) be a sequence of elements of $\vec{F}$ such that $\vec{\ell}(v^p) \to +\infty$. Then it follows from Lemma 4.8 *(iii)* that for any $m > 0$ and any big enough p we get $\mu_{u+v^p}(F \cap \{\ell \geq -m\}) < 2^{-n}\mu(F)$, which by Proposition 4.5 implies that $\ell(x^{(1)}(v^p)) \leq -m$. Hence

$$\ell\big(x^{(1)}(v^p)\big) \to -\infty.$$

Similarly $\ell\big(x^{(-1)}(v^p)\big) \to +\infty$. Thus T satisfies (b). Therefore T is onto. There exists $v \in \vec{F}$ such that $Tv = 0$, then $x^{(1)}(v) = x^{(-1)}(v)$ which concludes the proof. □

Lemma 4.15. *If $\mu \in \mathcal{M}^*(E)$ has a center of symmetry z then z is the unique Yao-Yao center of μ, whatever the basis $\mathcal{L}$.*

Proof. Let x be the Yao-Yao center of μ and $s : E \to E$ be the symmetry of center z. Then clearly $s(x)$ is a center for $s_{\#}\mu$, with respect to $\mathcal{L}$. Since $s_{\#}\mu = \mu$ and by uniqueness of the center, we obtain $s(x) = x$. Therefore $x = z$. □

We are now in a position to prove Theorem 4.3. Let E be an affine space of dimension n and $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ be a system of coordinates. Let γ be an arbitrary element of $\mathcal{M}^*(E)$. Let $\mu \in \mathcal{M}(E)$ and for $k \geq 1$ let $\mu^p = \mu + \frac{1}{p}\gamma$. Then obviously $\mu^p \in \mathcal{M}^*(E)$ and $\mu^p \to \mu$, narrowly. Let x^p be the center of μ^p with respect to $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$. By Lemma 4.11 and Corollary 4.13, the sequence (x^p) is bounded and the limit of any of its converging subsequence is a center for μ, so μ has a center.
If μ is symmetric with respect to x, then we let γ be an element of $\mathcal{M}^*(E)$ symmetric with respect to x. Then so is μ^p, by the preceding lemma we get $x^p = x$ for any p, therefore x is a center for μ.

Chapitre 5

Chaînage et chaos Gaussien

Introduction, notations

Dans ce chapitre on note $[n]$ l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Soient $g_1, \dots, g_k$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon la loi normale, et $(a_\alpha)_{\alpha \in [k]^n}$ une *matrice à multi-indices*, la variable aléatoire

$$Y = \sum_{\alpha \in [k]^n} a_\alpha g_{\alpha_1} \cdots g_{\alpha_n}$$

est appelée *chaos gaussien* d'ordre n. On s'intéresse aux moments de cette variable. Il est connu (voir [9]) que les moments du chaos *découplé*

$$\tilde{Y} = \sum_{\alpha \in [k]^n} a_\alpha g_{\alpha_1, 1} \cdots g_{\alpha_n, n}$$

où $(g_{i,j})_{i,j \in [k] \times [n]}$ est une famille de $k \times n$ gaussiennes standard indépendantes, sont comparables aux moments de Y avec des constantes ne dépendant que de n. Le but de ce chapitre est de démontrer une borne supérieure due à Latała [14] pour les moments de $\tilde{Y}$. On suivra la stratégie globale de Latała mais on prendra un raccourci en utilisant le *chaînage générique* de Talagrand.

Pour éviter de traîner des multi-indices dans toutes les formules il est commode d'utiliser la notion de produit tensoriel. Si X et Y sont espaces vectoriels normés de dimension finie, on note $X \otimes^\epsilon Y$ le produit tensoriel injectif de X et Y, de sorte que $X \otimes^\epsilon Y$ est isométrique à $\mathcal{L}(X^*, Y)$ muni de la norme d'opérateur. Si X et Y sont euclidiens, on note $X \otimes^2 Y$ leur produit tensoriel euclidien. De plus on identifie dans ce cas X et X^*, ainsi les espaces $X \otimes^\epsilon Y$ et $X \otimes^2 Y$ sont isométriques à $\mathcal{L}(X, Y)$ muni de la norme d'opérateur et de la norme de Hilbert-Schmidt, respectivement.

Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces euclidiens. Étant donné un ensemble non vide $I = \{i_1 \dots i_p\} \subset [n]$, on pose

$$E_I = E_{i_1} \otimes^2 \cdots \otimes^2 E_{i_p}.$$

On posera aussi par convention $E_\emptyset = \mathbb{R}$. On note $\|\cdot\|_I$ la norme de E_I et

$$B_I = \{x \in E_I \,|\, \|x\|_I \leq 1\}$$

sa boule unité. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ on pose $x_I = x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p} \in E_I$.
Soient $A \in E_{[n]}$ et $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_k\}$ une partition de $[n]$, on définit $\|A\|_{\mathcal{P}}$ comme étant la norme de A en tant qu'élément de l'espace

$$E_{I_1} \otimes^\epsilon \cdots \otimes^\epsilon E_{I_k}.$$

Par exemple si $n = 2$, on peut voir A comme application linéaire de E_1 dans E_2, on constate que $\|A\|_{\{1\}\{2\}}$ est la norme d'opérateur de A et $\|A\|_{\{1,2\}}$ sa norme de Hilbert-Schmidt.
Soient $I \subset [n]$ et $x \in E_I$ on note $A \cdot x$ l'image de x par A vue comme élément de $\mathcal{L}(E_I, E_{[n]\setminus I})$. Pour toute partition $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_k\}$ on a

$$\|A\|_{\mathcal{P}} = \sup\big\{A \cdot (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) \,|\, x_j \in B_{I_j}\big\}.$$

Si $\mathcal{Q} = \{J_1, \dots, J_l\}$ est une partition plus fine que $\mathcal{P}$, alors

$$\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_l \,|\, x_j \in B_{J_j}\} \subset \{y_1 \otimes \cdots \otimes y_k \,|\, y_j \in B_{I_j}\}$$

et donc $\|A\|_{\mathcal{Q}} \leq \|A\|_{\mathcal{P}}$. En particulier,

$$\|A\|_{\{1\}\cdots\{n\}} \leq \|A\|_{\mathcal{P}} \leq \|A\|_{[n]}.$$

5.1 Énoncé des résultats principaux

Si $\mathcal{P}$ est une partition de $[n]$, son cardinal $\operatorname{card}\mathcal{P}$ désigne le nombre de sous-ensembles de $[n]$ qui la composent. Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces euclidiens de dimension finie et $A \in E_{[n]}$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des vecteurs aléatoires indépendants tels que pour tout i, le vecteur X_i suive la loi gaussienne standard de E_i. Rappelons que $X_{[n]}$ désigne le tenseur (aléatoire) $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$, la variable aléatoire (réelle)

$$A \cdot X_{[n]}$$

est appelée chaos gaussien *découplé* d'ordre n. Ci-dessous, le résultat principal de Latała.

Théorème 5.1 (Majoration des moments du chaos gaussien)**.** *Il existe une constante α_n ne dépendant que de n telle que pour tout $p \geq 1$ on ait*

$$\left(\mathrm{E}|A \cdot X_{[n]}|^p\right)^{1/p} \leq \alpha_n \sum_{\mathcal{P}} p^{\frac{\operatorname{card}\mathcal{P}}{2}} \|A\|_{\mathcal{P}},$$

la somme portant sur toutes les partitions $\mathcal{P}$ de $[n]$.

Le théorème suivant et son corollaire sont des résultats intermédiaires dont on va déduire le théorème précédent. Ils ont néanmoins leur intérêt propre.

Théorème 5.2. *Soient $F_1, \dots, F_{k+1}$ des espaces euclidiens, soient $A \in F_{[k+1]}$ et X un vecteur gaussien standard de F_{k+1}. On a pour tout $t \in (0,1)$:*

$$\mathrm{E}\|A \cdot X\|_{\{1\}\cdots\{k\}} \leq \beta_k \sum_{\mathcal{P}} t^{k-\operatorname{card}\mathcal{P}} \|A\|_{\mathcal{P}},$$

la somme portant sur toutes les partitions $\mathcal{P}$ de $[k+1]$ et la constante β_k ne dépendant que de k.

Corollaire 5.3. *Sous les mêmes hypothèses, on a pour tout $p \geq 1$*

$$\left(\mathrm{E}\|A \cdot X\|^p_{\{1\}\cdots\{k\}}\right)^{1/p} \leq \delta_k \sum_{\mathcal{P}} p^{\frac{\operatorname{card}\mathcal{P}-k}{2}} \|A\|_{\mathcal{P}}.$$

Démonstration. Posons $f\colon x \in F_{k+1} \mapsto \|A \cdot x\|_{\{1\}\cdots\{k\}}$. Par concentration de la mesure gaussienne (voir par exemple [15]) on a, en posant $m = \mathrm{E}\, f(X)$,

$$\left(\mathrm{E}|f(X) - m|^p\right)^{1/p} \leq \delta' \sqrt{p} \|f\|_{\mathrm{lip}},$$

pour une constante δ' universelle, et $\|f\|_{\mathrm{lip}}$ étant la constante de Lipschitz de f. On a clairement $\|f\|_{\mathrm{lip}} = \|A\|_{\{1\}\cdots\{k+1\}}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\left(\mathrm{E}|f(X)|^p\right)^{1/p} \leq \mathrm{E}\, f(X) + \delta' \sqrt{p} \|A\|_{\{1\}\cdots\{k+1\}}.$$

Le résultat s'obtient donc en utilisant la majoration de $\mathrm{E}\, f(X)$ donnée par le théorème 5.2 avec $t = p^{-1/2}$. □

Démonstration du Théorème 5.1. Procédons par récurrence sur n. Si $n = 1$, la variable $A \cdot X_1$ suit la même loi que la gaussienne de variance $\|A\|_{\{1\}} g$. Le moment d'ordre p d'une gaussienne standard étant de l'ordre de $\sqrt{p}$, on obtient

$$\left(\mathrm{E}|A \cdot X_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha \sqrt{p} \|A\|_{\{1\}}$$

pour une constante α universelle, ce qui est le théorème au rang 1. Supposons le théorème vrai au rang $n-1$. Regardons X_n, qui est indépendant de $X_{[n-1]}$, comme un vecteur déterministe et appliquons l'hypothèse de récurrence à la matrice $A' = A \cdot X_n$. On obtient

$$\mathrm{E}\big(|A' \cdot X_{[n-1]}|^p \big| X_n\big) \leq \alpha_{n-1}^p \Big(\sum_{\mathcal{P}} p^{\frac{\operatorname{card}\mathcal{P}}{2}} \|A'\|_{\mathcal{P}}\Big)^p,$$

la somme portant sur les partitions de $[n-1]$. En prenant l'espérance puis la puissance $1/p$, il vient

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{E}|A \cdot X_{[n]}|^p\big)^{\frac{1}{p}} &\leq \alpha_{n-1} \left(\mathrm{E}\Big(\sum_{\mathcal{P}} p^{\frac{\operatorname{card}\mathcal{P}}{2}} \|A \cdot X_n\|_{\mathcal{P}}\Big)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha_{n-1} \sum_{\mathcal{P}} p^{\frac{\operatorname{card}\mathcal{P}}{2}} \Big(\mathrm{E}\|A \cdot X_n\|_{\mathcal{P}}^p\Big)^{\frac{1}{p}},\end{aligned} \tag{5.1}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Soit $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_k\}$ une partition de $[n-1]$. Posons $F_i = E_{I_i}$ pour $i \in [k]$ et $F_{k+1} = E_n$. Le corollaire, appliqué à la matrice A *vue comme élément de* $F_{[k+1]}$ donne

$$\big(\mathrm{E}\|A \cdot X_n\|_{\mathcal{P}}^p\big)^{1/p} \leq \delta_k p^{-\frac{k}{2}} \sum_{\mathcal{Q}} p^{\frac{\operatorname{card}\mathcal{Q}}{2}} \|A\|_{\mathcal{Q}}, \tag{5.2}$$

la somme portant sur toutes les partitions $\mathcal{Q}$ de $[n]$ *qui soient moins fines que la partition* $\big\{I_1, \dots, I_k, \{n\}\big\}$. Du coup, l'inégalité est encore vraie si on fait porter la somme sur toutes les partitions de $[n]$. Reportons (5.2) dans (5.1), les $p^{\frac{\operatorname{card}\mathcal{P}}{2}}$ s'éliminent et on obtient le résultat avec une constante α_n qui s'exprime en fonction de α_{n-1} et des δ_k pour $k \in [n]$. □

Il suffit donc de prouver le théorème 5.2, c'est ce qu'on se propose de faire dans la suite.

5.2 Le chaînage générique

Soient $F_1, \dots, F_{k+1}$ des espaces euclidiens, soit $A \in F_{[k+1]}$ et X un vecteur gaussien standard de F_{k+1}. Pour $i \in [k]$ soit B_i la boule unité de F_i, posons $T = B_1 \times \cdots \times B_k$. Rappelons que pour $x = (x_1, \dots, x_k) \in T$ on note $x_{[k]} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$. Remarquons que

$$\mathrm{E}\|A \cdot X\|_{\{1\}\cdots\{k\}} = \mathrm{E} \sup_{x \in T} A \cdot (x_{[k]} \otimes X). \tag{5.3}$$

Notons aussi que $(P_x)_{x\in T} = \big(A\cdot(x_{[k]}\otimes X)\big)_{x\in T}$ est un processus gaussien. L'étude de $\mathrm{E}\sup_T P_x$ se ramène à l'étude de l'espace métrique (T, d_P), en posant

$$d_P(x,y) = \big(\mathrm{E}(P_x - P_y)^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette distance se calcule explicitement, en effet $A\cdot(x_{[k]}\otimes X) = (A\cdot x_{[k]})\cdot X$ et donc

$$d_P(x,y) = \|A\cdot(x_{[k]} - y_{[k]})\|_{\{k+1\}}. \tag{5.4}$$

Le chaînage générique, développé par Talagrand, permet de résoudre ce type de problèmes ; rappelons les grandes lignes de la théorie, et renvoyons le lecteur désireux d'en savoir plus au livre de Talagrand [28].

On se donne un espace métrique (T,d). On dira qu'une suite $\big(\mathcal{A}_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathcal{P}(T)$ est une *suite admissible de partitions* si les propriétés suivantes sont vérifiées.

- Pour tout n, l'ensemble $\mathcal{A}_n$ est une partition de T.
- La partition $\mathcal{A}_n$ est moins fine que $\mathcal{A}_{n+1}$.
- $\mathcal{A}_0 = \{T\}$ et $\operatorname{card}\mathcal{A}_n \le 2^{2^n}$ pour $n \ge 1$.

Quand seules les deux premières conditions sont vérifiées on parle de *suite de partitions emboîtées.*

Si $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de partitions de T et t un élément de T, on note $A_n(t)$ l'unique élément de $\mathcal{A}_n$ qui contienne t. Pour $S\subset T$, on note $\Delta(S,d)$ le diamètre de S.

Définition 5.4. On pose

$$\gamma_2(T,d) = \inf\Big(\sup_{t\in T}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\big(A_n(t),d\big)2^{n/2}\Big),$$

l'infimum portant sur toutes les suites admissibles de partitions de T.

Remarquons que $\gamma_2(T,d)\ge\Delta(T,d)$; en particulier si T n'est pas réduit à un point alors $\gamma_2(T,d)$ est non nul. Par conséquent il existe une suite admissible de partitions $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\sup_{t\in T}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\big(A_n(t),d\big)2^{n/2} \le 2\gamma_2(T,d).$$

Rappelons le théorème fondamental suivant :

Théorème de la mesure majorante. *Il existe une constante universelle κ telle que pour tout processus gaussien centré $(X_t)_{t\in T}$ on ait*

$$\tfrac{1}{\kappa}\gamma_2(T,d_X) \le \mathrm{E}\sup_{t\in T} X_t \le \kappa\gamma_2(T,d_X),$$

la distance d_X étant donnée par la formule $d_X(s,t) = \big(\mathrm{E}(X_s - X_t)^2\big)^{1/2}$.

Suivent deux lemmes simples, qui illustrent la souplesse de la notion de γ_2.

Lemme 5.5. *Soit (T, d) un espace métrique. Soient a, b des réels supérieurs à 1, et $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de partitions emboitées de T vérifiant pour tout n*

$$\operatorname{card}\mathcal{A}_n \leq 2^{a+b2^n}.$$

Posant $S = \sup_{x\in T}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\big(A_n(x), d\big)2^{n/2}$, on a pour un ρ universel

$$\gamma_2(T, d) \leq \rho\big(\sqrt{ab}\Delta(T, d) + \sqrt{b}S\big).$$

Démonstration. Soient p, q entiers minimaux tels que $a \leq 2^p$ et $b \leq 2^q$. Posons

$$\mathcal{B}_n = \begin{cases} \{T\} & \text{si } n \leq p+q \\ \mathcal{A}_{n-q-1} & \text{si } n \geq p+q+1. \end{cases}$$

Si $n \geq p+q+1$ alors $p \leq n-1$ et donc

$$\operatorname{card}\mathcal{B}_n \leq 2^{2^p+2^{n-1}} \leq 2^{2^n}.$$

La suite de partitions $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc admissible. D'autre part, pour tout $t \in T$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\big(B_n(t), d\big)2^{n/2} &= \sum_{n=0}^{p+q}\Delta(T, d)2^{n/2} + \sum_{n=p}^{\infty}\Delta\big(A_n(x), d\big)2^{\frac{n+q+1}{2}} \\ &\leq \frac{2^{\frac{p+q+1}{2}}-1}{\sqrt{2}-1}\Delta(T, d) + 2^{\frac{q+1}{2}}S.\end{aligned}$$

De plus $2^p \leq 2a$ et $2^q \leq 2b$, d'où le résultat. □

Lemme 5.6. *Supposons que l'espace T possède N métriques $d_1, \ldots, d_N$. Alors*

$$\gamma_2\big(T, d_1 + \cdots + d_N\big) \leq \rho'\sqrt{N}\big(\gamma_2(T, d_1) + \cdots + \gamma_2(T, d_N)\big).$$

Démonstration. Pour tout $i \in [N]$, il existe une suite admissible $(\mathcal{A}_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\sup_{t\in T}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta\big(A_n^i(t), d_i\big)2^{n/2} \leq 2\gamma_2(T, d_i).$$

On pose ensuite

$$\mathcal{B}_n = \{A^1 \cap \cdots \cap A^N \mid A^i \in \mathcal{A}_n^i\}.$$

Il est facile de voir que $(\mathcal{B}_n)$ est une suite de partitions emboitées de T et que pour tout n on a

$$\operatorname{card}\mathcal{B}_n \leq 2^{N2^n}. \tag{5.5}$$

Par ailleurs, pour $t \in T$ et $i \in [N]$ on a $B_n(t) \subset A_n^i(t)$, par conséquent

$$\Delta\big(B_n(t), d_1 + \cdots + d_N\big) \le \sum_{i=1}^{N} \Delta\big(A_n^i(t), d_i\big).$$

En multipliant par $2^{n/2}$ et en sommant en n il vient

$$\sup_{t\in T} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\big(B_n(t), d_1 + \cdots + d_N\big) 2^{n/2} \le \sum_{i=1}^{N} \gamma_2(T, d_i). \tag{5.6}$$

D'après le lemme précédent, les équations (5.5) et (5.6) impliquent le résultat. □

5.3 Démonstration du Théorème 5.2

Procédons par récurence sur k. Pour $k = 1$ le théorème se déduit du fait suivant : soit $A \in F_1 \otimes F_2$ et X suivant la loi normale de F_2 on a

$$\mathrm{E}\|A \cdot X\|_{\{1\}} \le \big(\mathrm{E}\|A \cdot X\|_{\{1\}}^2\big)^{\frac{1}{2}} = \|A\|_{\{1,2\}}.$$

Supposons donc que $k \ge 2$ et que le théorème est vrai au rang $k-1$. Soit $A \in F_{[k+1]}$. Rappelons que pour $i \in [k]$ on note B_i la boule unité de F_i et T le produit $B_1 \times \cdots \times B_k$. Soit $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ un sous ensemble non vide de $[k]$ et soit d_I la pseudo-distance sur T définie par

$$d_I(x, y) = \|A \cdot (x_I - y_I)\|_{[k+1]\backslash I}. \tag{5.7}$$

D'après le théorème de la mesure majorante et les équations (5.3) et (5.4), le théorème 5.2 est équivalent au

Théorème 1.2'. *Pour tout $t \in (0,1)$ on a*

$$\gamma_2(T, d_{[k]}) \le \beta'_k \sum_{\mathcal{P}} t^{k-\operatorname{card}\mathcal{P}} \|A\|_{\mathcal{P}},$$

la somme portant sur toute les partitions $\mathcal{P}$ de $[k+1]$.

Supposons $I \neq [k]$ (donc $p < k$), pour $j \in [p]$ posons $F'_j = F_{i_j}$ et posons $F'_{p+1} = F_{[k+1]\backslash I}$. D'après l'hypothèse de récurrence, le théorème 1.2' est vrai pour la matrice A vue comme élément de $F'_{[p+1]}$. On obtient, pour tout $t \in (0,1)$

$$\gamma_2(T, d_I) \le \beta'_p \sum_{\mathcal{Q}} t^{p-\operatorname{card}\mathcal{Q}} \|A\|_{\mathcal{Q}}, \tag{5.8}$$

la somme portant sur toutes les partitions $\mathcal{Q}$ de $[k+1]$ qui soient moins fines que $\{i_1\}, \ldots, \{i_p\}, [k+1]\backslash I$. L'inégalité reste vraie en faisant porter la somme sur toutes les partitions de $[k+1]$. Pour tout $t > 0$, on définit la distance

$$\delta_t = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subsetneq [k]} t^{k-\operatorname{card} I} d_I.$$

D'après le Lemme 5.6 et l'homogénéité du γ_2, on a

$$\gamma_2(T, \delta_t) \leq \rho' \sqrt{N} \sum_{\emptyset \subsetneq I \subsetneq [k]} t^{k-\operatorname{card} I} \gamma_2(T, d_I)$$

où N est le nombre de sous-ensembles de $[k]$ qui soient différents de $\emptyset$ et $[k]$, à savoir $2^k - 2$. En utilisant (5.8) il vient

$$\gamma_2(T, \delta_t) \leq \eta_k \sum_{\mathcal{P}} t^{k-\operatorname{card} \mathcal{P}} \|A\|_{\mathcal{P}}, \tag{5.9}$$

pour une constante η_k ne dépendant que de k.
Rappelons que si (T, d) est un espace métrique et $\epsilon > 0$, on définit le nombre d'entropie $N(T, d, \epsilon)$ comme étant le plus petit entier n tel qu'on puisse recouvrir T par n boules de rayon ϵ. Admettons le lemme suivant.

Lemme 5.7. *Pour tout $S \subset T$, pour tout $t > 0$ on a*

$$N\big(S, d_{[k]}, 2\Delta(S, \delta_t) + 2t^k \|A\|_{[k+1]}\big) \leq 2^{k(1+\rho t^{-2})},$$

pour un ρ universel.

En substance, ce lemme est dans le papier de Latała ([14, Corollary 2]), on en donne la démonstration à la fin de ce chapitre.
Posons $t_n = \min(t, 2^{-n/2})$. Soit $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite admissible de partitions de T vérifiant

$$\sup_{x \in T} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\big(B_n(x), \delta_t\big) 2^{\frac{n}{2}} \leq 2\gamma_2(T, \delta_t). \tag{5.10}$$

On affine la suite de partitions $(\mathcal{B}_n)$ de la manière suivante : pour tout n et $B \in \mathcal{B}_n$ on applique à B et t_n le Lemme 5.7. Il existe alors une partition $\mathcal{P}_B = \{B^{(1)}, \ldots, B^{(N)}\}$ de B vérifiant

$$N \leq 2^{k(1+\rho t_n^{-2})}, \tag{5.11}$$

$$\Delta(B^{(i)}, d_{[k]}) \leq 2\Delta(B, \delta_{t_n}) + 2t_n^k \|A\|_{[k+1]}, \quad \forall i \in [N]. \tag{5.12}$$

On pose ensuite $\mathcal{A}_n = \cup\{\mathcal{P}_B \,|\, B \in \mathcal{B}_n\}$. Il est clair qu'on forme ainsi une suite de partitions de T. Comme $t_n^{-2} \leq 2^n + t^{-2}$, on a par (5.11)

$$\begin{aligned} \operatorname{card} \mathcal{A}_n &\leq N \operatorname{card} \mathcal{B}_n \\ &\leq 2^{(1+\rho k)2^n + k(1+\rho t^{-2})}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Soient $x \in T$ et $n \in \mathbb{N}$. Par construction, $A_n(x)$ provient du découpage de $B_n(x)$ avec le Lemme 5.7. On a donc par (5.12)

$$\begin{aligned} \Delta\big(A_n(x), d_{[k]}\big) &\leq 2\Delta\big(B_n(x), \delta_{t_n}\big) + 2t_n^k \|A\|_{[k+1]}, \\ &\leq 2\Delta\big(B_n(x), \delta_t\big) + 2t_n^k \|A\|_{[k+1]}, \end{aligned}$$

car $t_n \leq t$ et donc $\delta_{t_n} \leq \delta_t$. En utilisant (5.10) on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta\big(A_n(x), d_{[k]}\big) 2^{n/2} \leq 4\gamma_2(T, \delta_t) + 2\sum_{n=0}^{\infty} t_n^k 2^{n/2} \|A\|_{[k+1]}.$$

On rappelle que $t_n = \min(t, 2^{-n/2})$. Soit n_0 le plus petit entier vérifiant $2^{-\frac{n_0}{2}} \leq t$. On a facilement

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t_n^k 2^{\frac{n}{2}} &\leq t^k \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{\frac{n}{2}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{\frac{(1-k)n}{2}} \\ &\leq 10 t^{k-1}. \end{aligned}$$

En utilisant (5.9), on trouve donc

$$\begin{aligned} \sup_{x\in T} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\big(A_n(x), d_{[k]}\big) 2^{n/2} &\leq 4\eta_k \sum_{\mathcal{P}} t^{k-\operatorname{card}\mathcal{P}} \|A\|_{\mathcal{P}} + 20 t^{k-1} \|A\|_{[k+1]} \\ &\leq (4\eta_k + 20) \sum_{\mathcal{P}} t^{k-\operatorname{card}\mathcal{P}} \|A\|_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Rappelons que le cardinal de $\mathcal{A}_n$ est contrôlé par (5.13) ; en utilisant le Lemme 5.5, il vient

$$\gamma_2(T, d_{[k]}) \leq \eta'_k \Big(t^{-1}\Delta(T, d_{[k]}) + \sum_{\mathcal{P}} t^{k-\operatorname{card}\mathcal{P}} \|A\|_{\mathcal{P}}\Big).$$

De plus

$$\begin{aligned} \Delta(T, d_{[k]}) &= 2\sup_{x\in T} \|A \cdot x\|_{\{k+1\}} \\ &= 2\|A\|_{\{1\}\cdots\{k+1\}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\gamma_2(T, d_{[k]}) &\leq \eta'_k\big(2t^{-1}\|A\|_{\{1\}\cdots\{k+1\}} + \sum_{\mathcal{P}} t^{k-\operatorname{card}\mathcal{P}}\|A\|_{\mathcal{P}}\big)\\ &\leq 3\eta'_k \sum_{\mathcal{P}} t^{k-\operatorname{card}\mathcal{P}}\|A\|_{\mathcal{P}},\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du théorème 1.2'.

Pour être complet, on donne on donne la démonstration du lemme 5.7, essentiellement due à Latała.

5.4 Démonstration du lemme 5.7

Soit $x = (x_1, \ldots, x_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k$, on note $|x_i|$ la norme de x_i dans F_i. Soit $X_1, \ldots, X_k$ des vecteurs gaussiens indépendants et tels que X_i soit à valeur dans F_i et suive la loi normale.

Lemme 5.8. *Pour toute semi-norme $\|\cdot\|$ sur $F_{[k]}$, on a*

$$\mathrm{P}\Big(\|X_{[k]} - x_{[k]}\| \leq \mathrm{E}\sum_{\emptyset\subsetneq I\subset[k]} 4^{\operatorname{card} I}\|X_I \otimes x_{[k]\setminus I}\|\Big) \geq 2^{-k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k |x_i|^2}.$$

Démonstration. Commençons par une remarque élémentaire. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, soient X un vecteur gaussien standard de $\mathbb{R}^n$ et K un sous-ensemble symétrique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\gamma_n(x + K) \geq \gamma_n(K)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x|^2}. \tag{5.14}$$

En effet, en utilisant la symétrie de K et la convexité de l'exponentielle on a

$$\begin{aligned}\int_{x+K} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|z|^2}\,dz &= \int_K \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x+y|^2} + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x-y|^2})\,dy\\ &\geq \int_K \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)}\,dy\end{aligned}$$

ce qui démontre (5.14).

On va démontrer le lemme par récurrence sur k. Pour $k = 1$, en appliquant (5.14) à $K = \{y \in F_1 \mid \|y\| \leq 4\,\mathrm{E}\|X_1\|\}$ et $x = x_1$, il vient

$$\mathrm{P}\big(\|X_1 - x_1\| \leq 4\,\mathrm{E}\|X_1\|\big) \geq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x_1|^2}\,\mathrm{P}\big(\|X_1\| \leq 4\,\mathrm{E}\|X_1\|\big).$$

De plus, par Markov $\mathrm{P}\big(\|X_1\| \geq 4\,\mathrm{E}\|X_1\|\big) \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$, d'où le résultat pour $k = 1$.

Soit $k \geq 2$, supposons le résultat connu au rang $k-1$. Posons

$$S = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset [k-1]} 4^{\operatorname{card} I} \|X_I \otimes x_{[k-1]\setminus I} \otimes X_k\|$$
$$T = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset [k-1]} 4^{\operatorname{card} I} \|X_I \otimes x_{[k-1]\setminus I} \otimes x_k\|$$

et considérons les événements

$$A = \big\{\|x_{[k-1]} \otimes (X_k - x_k)\| \leq 4\,\mathrm{E}\|x_{[k-1]} \otimes X_k\|\big\}$$
$$B = \big\{\|(X_{[k-1]} - x_{[k-1]}) \otimes X_k\| \leq \mathrm{E}(S \,|\, X_k)\big\}$$
$$C = \big\{\mathrm{E}(S \,|\, X_k) \leq 4\,\mathrm{E}\,S + \mathrm{E}\,T\big\}.$$

D'après l'inégalité triangulaire suivante

$$\|X_{[k]} - x_{[k]}\| \leq \|x_{[k-1]} \otimes (X_k - x_k)\| + \|(X_{[k-1]} - x_{[k-1]}) \otimes X_k\|,$$

quand A, B et C se produisent on a

$$\|X_{[k]} - x_{[k]}\| \leq 4\,\mathrm{E}\|x_{[k-1]} \otimes X_k\| + 4\,\mathrm{E}\,S + \mathrm{E}\,T$$
$$= \mathrm{E} \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset [k]} 4^{\operatorname{card} I} \|X_I \otimes x_{[k]\setminus I}\|.$$

Supposons X_k fixé, en appliquant l'hypothèse de récurrence à $F_1, \ldots, F_{k-1}$ et à la semi-norme $\|y\|_1 = \|y \otimes X_k\|$ pour tout $y \in F_{[k-1]}$, on obtient

$$\mathrm{P}(B \,|\, X_k) \geq 2^{-k+1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^2}.$$

Comme A et C ne dépendent que de X_k, il vient

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) \geq \mathrm{P}(A \cap C) 2^{-k+1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} |x_i|^2}.$$

Pour $y \in F_k$ posons

$$\|y\|_2 = \|x_{[k-1]} \otimes y\|,$$
$$\|y\|_3 = \mathrm{E} \sum_{\emptyset \subsetneq I \subset [k-1]} 4^{\operatorname{card} I} \|X_I \otimes x_{[k-1]\setminus I} \otimes y\|.$$

De sorte que

$$A = \big\{\|X_k - x_k\|_2 \leq 4\,\mathrm{E}\|X_k\|_2\big\},$$
$$C = \big\{\|X_k\|_3 \leq 4\,\mathrm{E}\|X_k\|_3 + \|x_k\|_3\big\}.$$

Posons

$$K = \{y \mid \|y\|_2 \leq 4\,\mathrm{E}\|X_k\|_2\} \cap \{y \mid \|y\|_3 \leq 4\,\mathrm{E}\|X_k\|_3\},$$

alors $A \cap C \supset x + K$ d'après l'inégalité triangulaire. D'autre part, on a par Markov

$$\mathrm{P}\Big(\big\{\|X_k\|_2 \geq 4\,\mathrm{E}\|X_k\|_2\big\} \cup \big\{\|X_k\|_3 \geq 4\,\mathrm{E}\|X_k\|_3\big\}\Big) \leq \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2},$$

et donc $\mathrm{P}\big(X_k \in K\big) \geq \frac{1}{2}$. En appliquant (5.14) on obtient $P(A \cap C) \geq 2^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x_k|^2}$, ce qui achève la preuve du lemme 5.8. $\square$

On se donne maintenant un espace de plus F_{k+1} et un élément $A \in F_{[k+1]}$. Rappelons que pour $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset [k+1]$, on note

$$F_I = F_{i_1} \otimes^2 \cdots \otimes^2 F_{i_p}$$

et $\|\cdot\|_I$ la norme (euclidienne) associée. Posons $\|y\| = \|A \cdot y\|_{\{k+1\}}$ pour tout $y \in F_{[k]}$. Remarquons que pour $x \in F_1 \times \cdots \times F_k$ et $\emptyset \subsetneq I \subsetneq [k]$ on a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\|X_I \otimes x_{[k]\setminus I}\| &\leq \big(\mathrm{E}\|X_I \otimes x_{[k]\setminus I}\|^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|A \cdot x_{[k]\setminus I}\|_{I \cup \{k+1\}}, \end{aligned}$$

ce qui est encore égal à $d_{[k]\setminus I}(0, x)$, d'après la définition (5.7). Si $I = [k]$ on a de même

$$\mathrm{E}\|A \cdot X_{[k]}\|_{\{k+1\}} \leq \|A\|_{[k+1]}.$$

Ainsi le Lemme 5.8 donne

$$\mathrm{P}\Big(d_{[k]}(x, X) \leq \sum_{\emptyset \subsetneq I \subsetneq [k]} 4^{k - \operatorname{card} I} d_I(x, 0) + 4^k \|A\|_{[k+1]}\Big) \geq 2^{-k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k |x_i|^2}.$$

En appliquant ceci à $\frac{1}{t}x = (\frac{x_1}{t}, \dots, \frac{x_k}{t})$ pour $t > 0$ et $x \in T = B_1 \times \cdots \times B_k$ il vient

$$\mathrm{P}\Big(d_{[k]}(x, tX) \leq \delta_{4t}(x, 0) + (4t)^k \|A\|_{[k+1]}\Big) \geq 2^{-k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kt^{-2}}. \tag{5.15}$$

Démonstration du Lemme 5.7. Soit $t > 0$, soit $S \subset T = B_1 \times \cdots \times B_k$, comme les nombres d'entropie pour une norme sont invariants par translation, on peut supposer que $0 \in S$. Ainsi $\delta_{4t}(x, 0) \leq \Delta(S, \delta_{4t})$ pour tout $x \in S$. Posons

$$\varepsilon_t = \Delta(S, \delta_{4t}) + (4t)^k \|A\|_{[k+1]}.$$

D'après (5.15), on a pour tout $x \in S$

$$\mu(B_x) \geq 2^{-k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kt^{-2}},$$

où B_x désigne la boule de centre x et de rayon ε_t pour la distance $d_{[k]}$ et μ la loi de tX. Soit S' une famille $2\varepsilon_t$-séparée de points de S de cardinal maximal. La famille S' est donc un $2\varepsilon_t$-réseau de S, en particulier

$$N(S, d_{[k]}, 2\varepsilon_t) \leq \operatorname{card} S'.$$

De plus les boules $(B_x)_{x\in S'}$ sont deux à deux disjointes, donc

$$\mu\big(\cup\{B_x \,|\, x \in S'\}\big) \geq 2^{-k}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kt^{-2}} \operatorname{card} S'.$$

Et comme μ est une mesure de probabilité on en déduit

$$N(S, d_{[k]}, 2\varepsilon_t) \leq 2^k \mathrm{e}^{\frac{1}{2}kt^{-2}}.$$

En appliquant ceci à $\frac{t}{4}$ on obtient le Lemme 5.7. $\square$

Bibliographie

[1] N. Alon, J. Pach, R. Pinchasi, R. Radoičić, and M. Sharir. Crossing patterns of semi-algebraic sets. *J. Comb. Theory Ser. A*, 111(2) :310–326, 2005.

[2] S. Artstein, B. Klartag, and V. Milman. The Santaló point of a function, and a functional form of Santaló inequality. *Mathematika*, 51 :33–48, 2005.

[3] K. Ball. Isometric problems in ℓ_p and sections of convex sets. PhD dissertation, University of Cambridge, 1986.

[4] K. Ball. An elementary introduction to modern convex geometry. In S. Levy, editor, *Flavors of geometry*. Mathematical Science Research Institute, 1997.

[5] M. Berger. *Geometry*. Universitext. Springer, 1987. English translation by M. Cole and S. Levy.

[6] C. Borell. Convex set functions in d-space. *Period. Math. Hungar.*, 6(2) :111–136, 1975.

[7] L.A. Caffarelli. Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities. *Comm. math. phys.*, 214(3) :547–563, 2000.

[8] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi, and B. Maurey. The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems. *J. Funct. Anal.*, 214 :410–427, 2004.

[9] V.M. de la Peña and S. Montgomery-Smith. Bounds for the tail probabilities of U-statistics and quadratic forms. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 31 :223–227, 1994.

[10] X. Fernique. *Fonctions aléatoires gaussiennes, vecteurs aléatoires gaussiens*. Centre de Recherches Mathématiques, 1997.

[11] M. Fradelizi and M. Meyer. Some functional forms of Blaschke-Santaló inequality. *Math. Z.*, 256(2) :379–395, 2007.

[12] D.L. Hanson and F.T. Wright. A bound on tail probabilities for quadratic forms of independant random variables. *Ann. Math. Satist.*, 42 :1079–1083, 1971.

[13] B. Klartag. Marginals of geometric inequalities. In *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math. 1910, pages 133–166. Springer, 2007.

[14] R. Latała. Estimates of moments and tails of gaussian chaoses. *Ann. Prob.*, 34(6) :2315–2331, 2006.

[15] M. Ledoux. *The concentration of measure phenomenon*. American Mathematical Society, 2001.

[16] L. Leindler. On a certain converse of Hölder's inequality. *Acta Sci. Math.*, 33 :217–233, 1972.

[17] E. Lutwak. Extended affine surface area. *Adv. Math.*, 85(1) :39–68, 1991.

[18] E. Lutwak and G. Zhang. Blaschke-Santaló inequalities. *J. Diff. Geom.*, 47(1) :1–16, 1997.

[19] B. Maurey. Some deviation inequalities. *Geom. Funct. Anal.*, 1(2) :188–197, 1991.

[20] M. Meyer and A. Pajor. On Santaló's inequality. In *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math. 1376, pages 261–263. Springer, 1989.

[21] M. Meyer and A. Pajor. On the Blaschke Santaló inequality. *Arch. Math.*, 55 :82–93, 1990.

[22] G. Pisier. *The volume of convex bodies and Banach space geometry*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1989.

[23] A. Prékopa. Logarithmic concave measure with application to stochastic programming. *Acta Sci. Math.*, 32 :301–315, 1971.

[24] A. Prékopa. On logarithmically concave measures and functions. *Acta Sci. Math.*, 34 :335–343, 1973.

[25] J. Saint-Raymond. Sur le volume des corps convexes symétriques. In G. Choquet, M. Rogalski, and J. Saint-Raymond, editors, *Séminaire d'Initiation à l'Analyse, 20ème année*. Publ. Math. de l'Univ. Pierre et Marie Curie, 1981. (Exposé 11, 25 pages).

[26] L.A. Santaló. Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones. *Portugaliae Math.*, 8 :155–161, 1949.

[27] M. Talagrand. Regularity of gaussian process. *Acta Math.*, 159 :99–149, 1987.

[28] M. Talagrand. *The generic chaining*. Springer, 2005.

[29] A.C. Yao and F.F. Yao. A general approach to d-dimensional geometric queries. In *Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 163–168. ACM Press, 1985.