

N° d'ordre : 3675

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Sanae LOULIDI

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Modélisation stochastique en finance, application à la construction
d'un modèle à changement de régime avec des sauts

Soutenue le : 28 novembre 2008

Devant la commission d'examen formée de :

M.	ABGRALL R.	Professeur - Univ. Bordeaux 1	Co-directeur
M.	BACHELOT A.	Professeur - Univ. Bordeaux1	Président
M.	BEN TAMAROUT Z.	Responsable recherche - Dexia Paris	Co-directeur
Mme.	de BOUARD A.	Professeur - Ecole Polytechnique	Rapporteur
M.	DUFOUR F.	Professeur - Univ. Bordeaux 1	Directeur
M.	GOUT C.	Professeur - Univ. Valenciennes	Rapporteur

Table des matières

Table des matières	3
Résumé	9
	10
	10
	10
1 Le cadre général	15
1.1 Généralités liées aux options	15
1.1.1 Les paramètres des options	16
1.1.2 Les opérations sur les options	17
L'achat d'une option d'achat (pour se protéger d'une hausse)	17
La vente d'une option d'achat (pour jouer d'une légère baisse)	18
L'achat d'une option de vente (pour se protéger d'une baisse)	19
Vente d'une option de vente (pour jouer une légère hausse)	19
1.2 Approche par gestion dynamique de portefeuille	20
1.3 Modélisation à l'aide du mouvement Brownien	22
1.3.1 Mouvement Brownien	22
Un peu d'histoire	22
1.3.2 Modélisation stochastique de l'actif risqué	23
1.4 Black-Scholes et la gestion parfaite	23
1.5 Approche probabiliste	25
1.6 Marché incomplet	26
Présentation	26
Problème de "réplication optimale"	27
1.7 Volatilité	29
1.7.1 Précisions sur la volatilité	29
La volatilité locale	29
Volatilité historique	29
La volatilité implicite	30
1.8 Le smile	31
Smile et options exotiques	33
1.9 La Persistance dans les Marchés financiers	33

2 Problème de contrôle stochastique	37
2.1 Problème de contrôle stochastique	37
2.1.1 Introduction	37
2.1.2 Espace de décision, variables de décision	38
2.2 Contrôle de diffusion	40
2.3 Equation de la programmation dynamique	42
2.4 Théorème de vérification	45
2.5 Application du modèle de volatilité stochastique	47
2.5.1 Le Modèle	47
3 Modèle de " Regime Switching " avec sauts	53
3.1 Formulation	53
3.2 Application du contrôle stochastique optimal	57
3.3 Résolution numérique	61
Ouverture	62
3.3.1 Différences finies généralisées (DFG)	62
Pourquoi utilise-t-on les DFG ?	62
DFG	66
3.3.2 Schéma implicite et différences finies généralisées	70
Localisation du problème	70
Algorithme de type Howard (ou méthode d'itération sur les politi- ques)	72
l'algorithme de splitting	73
3.3.3 Résolution de système linéaire	77
Objectifs	77
Stockage des matrices creuses	78
.	79
Le stockage compact par lignes (CSR) :	79
BiCGstab(1)	80
4 Calibration	83
4.1 Rappel sur le filtrage	83
4.1.1 Filtre de Wiener	84
4.1.2 Le filtre de Kalman	86
Formulation du problème d'estimation	87
4.2 Discrétisation	87
4.3 Estimation d'un HMM discret à observation continue	88
4.3.1 Processus d'état et d'observation	89
4.3.2 Espérance conditionnelle	90
4.3.3 Changement de mesure	92
Rappel	92
Détermination de la forme appropriée de la densité Λ , dans le cas d'un temps discret et des observation continue	94
4.3.4 Filtre récursif	97

4.3.5	Les estimateurs	100
	Estimateur de l'état	100
	Estimateur du nombre de transition	100
	Estimateur du temps d'occupation	101
	Estimateur du processus d'observation	101
4.3.6	Réestimation des paramètres	102
	Estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV)	102
	Algorithme EM	103
	<i>a) les paramètres a_{ji}</i>	104
	<i>b) les paramètres c_i</i>	106
	<i>c) les paramètres α_i</i>	106
4.4	Application aux données financière (VIX)	107
4.4.1	Le VIX-indicateur de la volatilité	107
4.4.2	Implémentation et résultat	109
5	Résultats	111
5.1	Conditions aux limites	111
	Le cas : $p \leq 0$, et $0 \leq q \leq N_V$	113
	Le cas : $p > N_S$, et $0 \leq q \leq N_V$	114
	Le cas : $0 \leq p \leq N_V$, et $q \leq 0$	115
	Le cas : $0 \leq p \leq N_V$, et $q > N_S$	116
	Le cas : $p < 0$, et $q < 0$	117
	Le cas : $p < 0$, et $q > N_V$	118
	Le cas : $p > N_S$, et $q < 0$	119
	Le cas : $p > N_S$, et $q > N_V$	120
5.2	Mécanisme de la fonction « PriceOption »	121
5.3	Testes numériques	122
5.3.1	Payoff $(V - 100)^2$	122
5.3.1.1	Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =1%, drift=0%	122
5.3.1.2	Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =1%, drift=1%	123
5.3.1.3	Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =40%, drift=0%	124
5.3.1.4	Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =40%, drift=1%	126
5.3.1.5	Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =40%, drift=10%	127
5.3.2	Payoff $(V - S)^2$	129
5.3.2.1	Payoff $(V - S)^2$ Volatilité =40%, drift=0%	129
5.3.2.2	Payoff $(V - S)^2$ Volatilité =40%, drift=1%	130
5.3.3	Call européen	132
5.3.3.1	Call, Volatilité=40%, drift=0%, Strike =100	132
5.3.3.2	Call, Volatilité =40%, drift=1%, Strike =100	134
5.3.4	Extraction de la volatilité implicite	134
	Bibliographie	137

Remerciements

Dans les lignes suivantes je vais tenter d'exprimer toute ma gratitude aux personnes qui m'ont soutenu et permis de mener à terme ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier François Dufour, mon directeur de thèse à l'Université Bordeaux 1, pour ses nombreux conseils, son authentique intérêt pour ma personne et ma carrière. Un grand merci.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Zouheir Ben tamarout, mon directeur de thèse à Dexia AM Paris. J'ai pu bénéficier de ses grandes qualités de chercheur, ainsi que de l'excellent environnement de travail qu'il a mis à ma disposition. Travailler à son contact m'a permis d'enrichir mes connaissances et de comprendre un peu plus le monde fascinant de la finance.

Je suis également reconnaissante envers Remi Abgrall pour son aide et sa collaboration sur la résolution numérique de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB), et envers Olivier Clapt pour sa collaboration, en particulier, sur la partie numérique et développement.

Cette thèse regroupe les résultats mathématiques de mes trois années de Doctorat, effectué dans l'université Bordeaux 1 et Dexia AM Paris, avec un financement ministériel. Cette bourse a été complétée par un monitorat de trois ans également chez Dexia AM Paris. Une grande partie de ce travail a été consacrée à programmer des codes de calcul, relativement longs, qui n'apparaissent évidemment pas dans ce mémoire. Néanmoins, les figures du chapitre 5 illustrant certains résultats numériques témoignent de ce développement informatique sous-jacent.

Le sujet dont il est question m'a été aimablement proposé en 2005 par mes deux directeurs de thèse, Zouheir Ben tamarout et François Dufour. Je les remercie, ainsi que Remi Abgrall, pour leur sympathie, leurs conseils, et leur disponibilité pendant ces trois années.

Je remercie Madame le Professeur Anne de Bouard et Monsieur le Professeur Christian Gout de la patience et de l'effort qu'ils ont accepté de fournir pour lire et juger ce travail. J'adresse ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Alain Bachelot pour avoir présidé le jury.

Cette recherche s'est effectuée en collaboration avec l'équipe de recherche quantitative de Dexia AM Paris). Son soutien scientifique et financier a hautement contribué au bon déroulement de mon doctorat. J'en remercie les acteurs.

Je salue avec un grand sourire tous mes amis de l'institut de Mathématiques de l'université Bordeaux 1.

Enfin, tous mes remerciements à ma famille et mes amis pour leur soutien tout au long de cette thèse.

Résumé

Le modèle de Black et Scholes reste le modèle de référence sur les marchés des dérivés. Sa parcimonie et sa maniabilité sont certes attractives. Il ne faut cependant pas perdre de vue les hypothèses restrictives, voire simplistes, qui lui servent de base et qui limitent sa capacité à reproduire la dynamique du marché. Afin de refléter un peu mieux cette dynamique, nous introduisons un modèle d'évaluation des options à changement de régime avec sauts. Sous ce modèle, l'hypothèse de complétude des marchés n'est plus valable. Les sources d'incertitude sont plus nombreuses que les instruments disponibles à la couverture. On ne parle plus de répliation/couverture parfaite mais plutôt de répliation optimale dans un sens à définir.

Dans cette thèse, on suppose que le marché peut être décrit par plusieurs « régimes » (ou encore par des « modes ») reflétant l'état de l'économie, le comportement général des investisseurs et leurs tendances. Pour chacun de ces régimes, le sous-jacent est caractérisé par un niveau de volatilité et de rendement donné. Avec en plus, et a priori des discontinuités du prix du sous-jacent à chaque fois qu'une transition d'un régime à un autre a lieu. La thèse comprend trois parties :

1. Modélisation du problème et application de la théorie du contrôle stochastique. Par l'utilisation du principe de programmation dynamique et la considération des différents régimes de marché, on aboutit à un système de M (le nombre de régimes) équations de Hamilton Jacobi Bellman « HJB » couplées.
2. La résolution numérique de l'équation HJB pour l'évolution d'options, par différences finies généralisées.
3. L'estimation des paramètres du modèle par un filtre récursif, qui produit une estimation récursive d'un état inconnu au vu d'observation bruitée supposée continue, dans le cas où l'état inconnu serait modélisé par une chaîne de Markov à temps discret et espace d'état fini.

Mots clés: Régime switching, processus avec saut, répliation optimale, marché incomplet, smile de volatilité, contrôle stochastique, équation Hamilton Jacobi Bellman, différences finies généralisées, méthode d'itération sur les politiques, algorithme de « splitting, matrices creuses, méthode BiCGstab(1), modèles Markov cachés.

Introduction

Le marché des options, outils de spéculation mais également d'assurance contre le mouvement du prix des actions, s'est développé avec l'élaboration des modèles permettant de les valoriser.

Une option d'achat ou de vente (i.e. Call ou Put) est un titre financier conditionnel qui donne le droit, mais non l'obligation d'acheter ou de vendre un actif déterminé à un prix convenu à l'avance le prix d'exercice K à ou avant (selon qu'il s'agit d'une option européenne ou américaine) une date d'échéance déterminée T dite maturité de l'option.

Pour obtenir ce droit d'acheter ou de vendre l'actif à un prix fixé à l'avance, l'acheteur paie immédiatement au vendeur la valeur de l'option, souvent appelée la prime. La question de la détermination de la prime est le problème du "pricing": à quel prix vendre l'option à $t = 0$, ainsi qu'à n'importe quel moment. Afin de pouvoir déterminer la prime à tout instant, on a besoin d'une modélisation mathématique des marchés financiers. Les options doivent ainsi leur succès à la formule de Black et Scholes qui donne, non seulement le prix d'un "Call", mais définit aussi la couverture du vendeur (hedging) par l'achat d'une certaine quantité de l'actif sous-jacent: la dérivée par rapport au prix de l'action ou "delta" est précisément cette quantité qui assure la réalisation d'un portefeuille insensible à la variation du prix de sous-jacent. Cette approche a été une étape révolutionnaire dans le monde de la finance, succédant à l'optimisation de portefeuilles via l'approche moyenne-variance introduite par Markowitz.

Les hypothèses considérées dans le modèle de Black et Scholes (BS) sont, cependant, restrictives rendant leur modélisation peu réaliste. Un observateur de la bourse constate qu'au cours du temps, les cours des instruments financiers subissent des sauts, et par conséquent leurs trajectoires ne sont pas continues comme celles du mouvement brownien. De plus, les études empiriques montrent que la volatilité est une fonction convexe de K (l'effet «smile»). Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse d'une volatilité constante adoptée par le modèle BS. Pour tenir compte des sauts qui peuvent se produire, des modèles à sauts ont été introduits, en décrivant l'aléa des prix par le processus de Poisson (cf. par exemple [20]), ou par des processus mixtes brownien-Poisson (cf. par exemple [13]), ou des martingales discontinues (cf. par exemple [15]).

En ce qui concerne l'effet smile, des modèles à volatilité stochastique (dirigés par des mouvements browniens) ont été suggérés. Citons par exemples :

- **Modèles de volatilité stochastique :**

Ce type de modèles va apparaître réellement en 1987, où la modélisation de la volatilité stochastique va faire l'objet de plusieurs publications par Hull & White, Wiggins, Scott et Johnson & Shanno. Ces modèles supposent un processus de diffusion sur la volatilité et évaluent, dans ce cadre stochastique, le prix d'une option européenne. Depuis, ce thème a fait l'objet de nombreux travaux, dus essentiellement aux raisons suivantes :

Les modèles à volatilité stochastique permettent de décrire, avec plus de précision que le modèle normal, la distribution réelle des rendements (Cette distribution est décrite dès 1965 par Fama comme plus leptokurtique¹ que la distribution normale avec un effet d'asymétrie). Et ils permettent d'expliquer les biais liés au modèle de Black & Scholes, qui font l'objet de plusieurs études empiriques dont on peut voir une revue dans Galai 1983 et Hull en 1990. Ces biais concernent les options loin hors de la monnaie ou loin dans la monnaie qui sont mal évaluées par rapport aux options à la monnaie.

Ces modèles se distinguent par la spécification de volatilité supposée par chaque auteur. Elle peut être de type géométrique (Hull & White, Wiggins, Johnson & Shanno 1987...) ou de type arithmétique (Scott 1989, Stein 1989, Merville & Piepsta 1989..). La dynamique de la volatilité peut aussi être représentée par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (Stein et Stein 1991, Heston 1993).

Ils sont essentiels pour l'évaluation des options à long terme qui sont les plus sensibles aux changements de volatilité. Il évite l'effet d'échelle (divergence entre le modèle et le réel) observé dans des volatilités locales à long terme. Le problème avec ces modèles de volatilité stochastique est que le sous-jacent ne suffit pas à couvrir les deux sources d'incertitude.

Le modèle de Heston constitue un exemple de cette approche, c'est le modèle le plus connu et le plus utilisée de sa classe. Il est associé au processus risque-neutre suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= r dt + \sqrt{\sigma} dW \\ d\sigma &= \kappa(\theta - \sigma) dt + \varepsilon \sqrt{\sigma} dZ\end{aligned}$$

et l'équation d'évaluation est donnée par :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma \left(S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho\varepsilon S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right) + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa(\theta - \sigma) \frac{\partial V}{\partial \sigma} = rV$$

1. Une courbe leptokurtique est plus pointue et possède des queues plus longues que la courbe normale.

Le calibrage du modèle consiste à trouver les paramètres du processus de volatilité: κ (retour à la moyenne), θ (volatilité à long terme), ε (volatilité de la volatilité), ρ (corrélation entre le processus de volatilité et le processus de prix du sous-jacent) ainsi que la volatilité initiale σ_0 , permettant d'atteindre les cotations du marché des options.

la modélisation d'Heston prend en compte une corrélation non nulle entre les variations du sous-jacent et les variations de la volatilité. Si cela présente peu d'intérêt pour l'évaluation des options de change, il peut être utilisé efficacement pour l'évaluation des options sur actions ou indices. De plus, ce modèle s'applique aussi bien pour l'évaluation d'options sur indice et sur actions (dont les modélisations sont assez semblables) que pour l'évaluation d'options de change ou d'options sur taux d'intérêt (l'obligation est l'actif sous-jacent).

- **Diffusion-saut :**

Les modèles de jump-diffusion (Merton [19]) ajoutent des sauts et des crashes au processus standard de diffusion du sous-jacent. Ils arrivent à reproduire la dynamique de sous-jacent d'une façon plus réaliste et à capturer le fort smile constaté sur les options court-terme. Leur capacité à reproduire le smile à long-terme est, cependant, beaucoup plus mitigée. En outre, la qualité de la couverture de Black-Scholes se dégrade en présence des sauts. Le modèle diffusion-saut est donné par un processus de risque-neutre géré par l'équation suivante:

$$\frac{dS}{S} = (r - \lambda m)dt + \sigma dW + (e_j - 1)dN$$

où N est un processus de poisson de fréquence λ , W est un mouvement brownien indépendant de N , j est la taille logarithmique (aléatoire) du saut de fonction de répartition $\phi(j)$ et m est l'espérance de $(e_j - 1)$.

- **Volatilité universelle**

- Modèle de Blacher:

Le modèle universel de volatilité de Blacher [13] est décrit par le processus risque-neutre suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} &= r dt + \sigma \{ 1 + \alpha(S - S_0) + \beta(S - S_0)^2 \} dW \\ d\sigma &= \kappa(\theta - \sigma) dt + \varepsilon \sigma dZ \end{aligned}$$

Blacher dit qu'un smile réaliste ne doit pas se déplacer avec le sous-jacent. Afin de réaliser ceci, il introduit l'inhomogénéité dans le modèle stochastique homogène des prix.

- Modèle lipton:

Le processus stochastique risque-neutre de Lipton est donné par :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= (r - \lambda m)dt + \sqrt{\nu} \sigma_L(t, S) dW + (e_j - 1)dN \\ d\nu &= \kappa(\theta - \nu) dt + \varepsilon \sqrt{\nu} dZ\end{aligned}$$

et l'équation d'évaluation est donnée par :

$$\begin{aligned}(r + \lambda)V &= \frac{\partial V}{\partial t} + (r - \lambda m)S \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa(\theta - \nu) \frac{\partial V}{\partial \nu} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sigma_L^2(t, S) S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2\rho \sigma_L^2(t, S) S \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \nu} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} \right) \\ &+ \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} V(e_j S) \phi(j) dj\end{aligned}$$

où $\sigma_L(t, S)$ la volatilité locale, κ le retour moyen de la volatilité, θ la volatilité à long terme, ε la volatilité de la volatilité, ρ la corrélation entre le processus de volatilité et le processus du sous-jacent, λ l'intensité du processus du saut de Poisson, $j \succ 0$ la taille logarithmique aléatoire du saut ayant la fonction de répartition $\phi(j)$ et m l'espérance de $e_j - 1$.

- **Les modèles de “regime-switching”**

Ces modèles ont été introduits pour refléter au mieux la dynamique du marché. Ils introduisent cependant un phénomène d'incomplétude. Sous ces modèles, on ne parle plus de réplication/couverture parfaite mais plutôt de réplication optimale. D'après Merton (1973), le problème de réplication optimale est de déterminer une stratégie dynamique (d'achat/vente du sous-jacent, et de prêt/emprunt sans risque) autofinancée qui approche au mieux le profil terminal “payoff” à maturité. Ainsi la constitution du portefeuille autofinancé n'assure plus la reproduction parfaite du payoff, et ce à cause du fait que les sources d'incertitude sont plus nombreuses que les instruments de couverture.

Cette thèse présente deux sujets de recherche indépendants appartenant au domaine des méthodes numériques et du contrôle stochastique avec des applications en mathématiques financières.

Nous présentons dans le premier chapitre un cadre général des mathématiques financières, les principaux instruments financiers et leur évaluation. Le but de ce chapitre est de présenter quelques outils de l'analyse mathématique utilisés en finance, et de montrer comment les équations aux dérivées partielles apparaissent dans les calculs de prix et de couverture des options.

Les chapitres 2 et 3 exposent la modélisation du problème et l'application de la théorie du contrôle stochastique. Nous décrivons formellement, dans ce chapitre, comment le principe de la programmation dynamique dû à Bellman permet de donner une caractérisation de la fonction valeur en termes d'équation aux dérivées partielles dite de Hamilton Jacobi Bellman « HJB ». Ainsi qu'un critère pour déterminer les contrôles optimaux. Par l'utilisation du principe de programmation dynamique et la considération des différents régimes de marché, on aboutit à un système de M (le nombre de régimes) équations de HJB couplées. La deuxième partie s'intéresse à la résolution numérique de systèmes couplés des équations HJB pour l'évolution d'options, par différences finies généralisées, qui se résume à trois grandes étapes :

1. La discrétisation du problème, (c'est à dire le choix des points de collocation sur lesquels sera approximé l'équation différentielle ainsi que le type d'approximation numérique des dérivées en ces mêmes points) par différences finies généralisées. On obtient ainsi, un système linéaire liant les valeurs nodales entre elles.
2. La prise en compte des conditions aux limites du problème : Au même titre que celles-ci complètent l'équation différentielle, leurs approximations numériques, injectées dans le système linéaire (relatif aux valeurs nodales) complètent ce dernier.
3. La résolution du système linéaire par la méthode d'itération sur les politiques, ou l'algorithme de "splitting", qui consiste à alterner deux étapes :
 - i. Une étape de calcul du contrôle optimal u en fonction de la fonction valeur v déjà calculée, ceci en minimisant le second membre de l'équation Hamilton Jacobi Bellman.
 - ii. Une étape de résolution de l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation Hamilton Jacobi Bellman, le contrôle optimal réel par le contrôle précédemment calculé.

Et au cours du chapitre 4 on décrit l'estimation des paramètres du modèle par un filtre récursif, qui produit une estimation récursive d'un état inconnu au vu d'observation bruitée supposée continue, dans le cas où l'état inconnu serait modélisé par une chaîne de Markov à temps discret et espace d'état fini.

Finalement, le chapitre 5 expose les résultats numérique de ce travail. Nous présentons des exemples de résolution numérique de systèmes HJB couplés.

Chapitre 1

Le cadre général

Une modification de grande ampleur a eu lieu depuis une trentaine d'années sur les marchés financiers par l'apparition de marchés et produits nouveaux. Depuis le début des années 1970, il y a eu des déséquilibres et des incertitudes sur les relations économiques internationales. Cela est la suite logique d'une politique affirmée de dérégulation, qui a mené au développement de l'inflation, à des taux d'intérêt plus volatiles et à l'instabilité des taux de change. Des marchés organisés ont alors vu le jour : Chicago en 1973, le MATIF en 1985 (marché à terme international de France) puis le MONEP en 1987 (marché des options négociables).

Aujourd'hui, de nouveaux produits financiers peuvent être valorisés, et grâce aux outils théoriques et aux outils de mathématiques appliquées, manipulés au quotidien par les ingénieurs des départements recherche et développement des institutions financières : les probabilités (mouvement brownien, calcul stochastique, méthodes de simulation de type Monte-Carlo...), les statistiques (estimations de paramètres...) et l'analyse numérique (équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires et leur résolution numérique, problèmes inverses...).

1.1 Généralités liées aux options

Nous nous intéresserons ici essentiellement à une classe de produits financiers : les options (le nombre de produits en cours sur le marché est gigantesque : chaque jour, un nouveau produit apparaît). Avant même de définir ce qu'est une option nous devons préciser ce qu'est un produit dérivé.

Définition 1.1. *Produit dérivé*

Comme son nom l'indique, un produit dérivé "dérive" d'un produit classique qu'on appelle sous-jacent. Ce sous-jacent peut être :

- *un taux d'intérêt,*
- *une devise,*
- *une action,*
- *une obligation.*

Le prix d'un produit dérivé varie en fonction des fluctuations de son sous-jacent.

Cependant, Les produits dérivés constituent une catégorie de produits financiers à part entière. Pour les produits dérivés sur taux d'intérêt, on parle essentiellement d'IRS (Interest Rate Swap), de swaptions ou d'options sur taux. Pour les devises, les actions et les obligations, on parle essentiellement d'options Call ou Put. Ils permettent aux gestionnaires de gérer leur risque lié au sous-jacent.

Définition 1.2. *Une option financière est un produit dérivé qui donne le droit (et non l'obligation) d'acheter ou de vendre une quantité donnée d'un actif financier à un prix précisé à l'avance (prix d'exercice), à (ou avant) une date d'échéance.*

En contrepartie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur de l'option une prime qui est le prix de l'option.

Ce droit est exerçable une fois au choix pendant une période fixe, cas des **options américaines**, ou seulement à une date fixe qui est souvent le dernier jour de la durée de vie de l'option, **option Européenne**.

Les options traitées sont essentiellement des options d'achat « **Call** » ou de vente « **Put** ». Chaque contrat porte sur un nombre fixé d'actifs supports (100 dans le cas des actions). Le prix, fixé dans le contrat auquel l'opération peut se faire s'appelle le prix d'exercice, ou strike.

Une option permet ainsi à son acheteur de se garantir le cours de vente (Put) ou d'achat (Call) d'un actif dans l'avenir, sans pour autant qu'il s'engage à acheter ou à céder cet actif comme c'est le cas pour les achats ou ventes à terme. S'il veut réaliser l'achat ou la vente, il doit exercer l'option.

On peut vendre une option sans la posséder, car en fait on ne vend pas un titre mais un engagement. Quand on vend une option, on s'engage à acheter ou à vendre le sous-jacent au prix fixé, si l'acheteur de l'option exerce son droit.

1.1.1 Les paramètres des options

- **Prix d'exercice** : Le prix d'exercice de l'option (ou strike) est le cours auquel l'acheteur de l'option cédera ou achètera le sous-jacent. Ce prix d'exercice est fixé initialement au gré de l'acheteur.
- **Date d'échéance** : La date d'échéance est la date au-delà de laquelle l'option devient sans valeur. C'est aussi la date limite à laquelle l'acheteur peut exercer son droit (d'achat ou de vente), ou revendre son option. Cette date est fixée au gré de l'acheteur; elle est toutefois fonction de la liquidité du marché pour les échéances lointaines.

- **La prime** : La prime est le prix que doit payer l'acheteur pour acquérir son option. Elle est payable immédiatement à la conclusion du contrat. Là encore, selon le sous-jacent de l'option, la prime s'exprimera différemment : pourcentage du montant ou points dans la plupart des cas. On peut analyser cette prime comme une assurance: si tout se passe bien, c'est à dire si les cours évoluent favorablement pour l'acheteur (l'assuré), l'assurance ne l'exercera pas. Dans le cas contraire, l'exercice de l'option (l'assurance) servira à compenser la perte occasionnée par l'évolution défavorable des cours.

1.1.2 Les opérations sur les options

L'achat d'une option d'achat (pour se protéger d'une hausse)

Si l'option est exercée en T (la date d'échéance), l'investisseur achète le sous-jacent au prix K et peut le vendre au cours du jour S supérieur à K . Comme l'acheteur du call espérait retirer un profit, cela veut dire que **l'acheteur d'une option d'achat spéculé à la hausse**. A l'échéance, ce droit n'est exercé que si les cours sont montés et ont dépassé le prix d'exercice, le retour (payoff) est égal à $\max(0, S_t - K)$. Les risques sont limités à la prime payée (une perte maximale égale à la prime C), et les gains dépendent de l'écart entre le prix d'exercice et le cours à l'échéance : $\max(0, S_t - K) - C$.

En revanche, l'acheteur d'une option d'achat réalise un profit dès que la valeur du sous-jacent est supérieure au point mort ou seuil critique (S_c) égal à $K + C$. Cette stratégie est illustrée sur la figure 1.1.

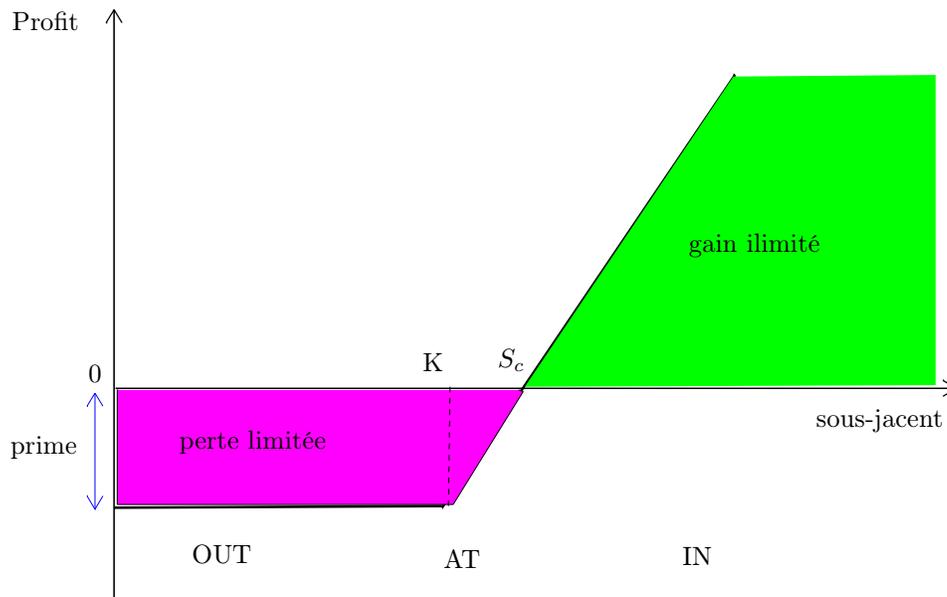


Figure 1.1. Achat d'une option d'achat

La vente d'une option d'achat (pour jouer d'une légère baisse)

L'opérateur réalise l'opération inverse de l'acheteur du call. Si l'option est exercée en T , l'investisseur vend le sous-jacent au prix K et peut l'acheter au cours du jour S inférieur à K . Le vendeur d'une option d'achat n'a donc pas intérêt à ce que l'option soit exercée, il spéculé à la baisse. A l'échéance, le retour est de $\min(0, K - S_t) = \max(0, S_t - K)$ et le profit réalisé est de $C - \max(0, S_t - K)$. Cette stratégie est illustrée sur la figure 1.2.

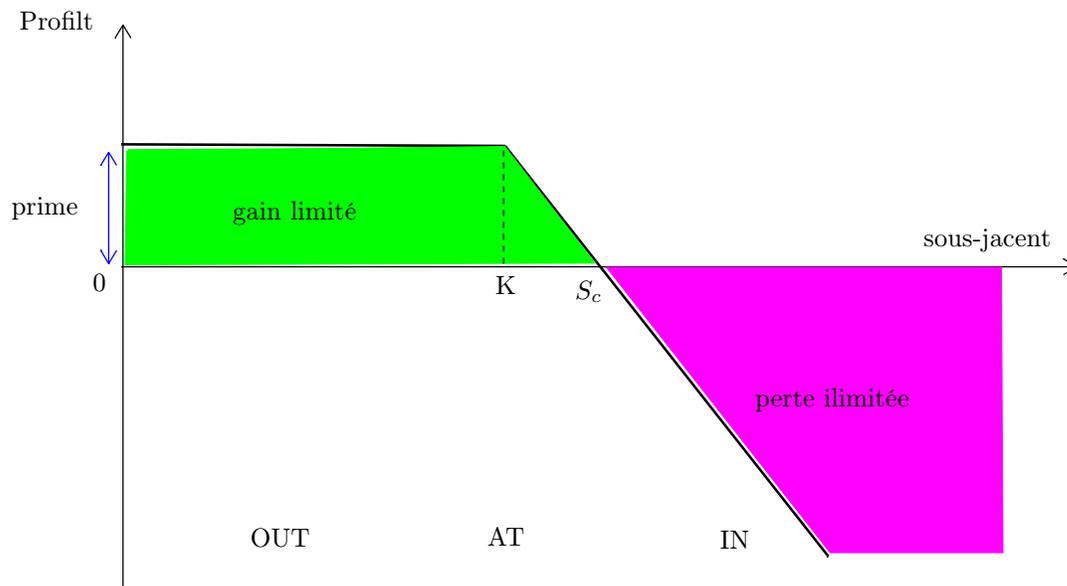


Figure 1.2. Vente d'une option d'achat

L'achat d'une option de vente (pour se protéger d'une baisse)

Si l'option est exercée, l'acheteur d'une option de vente vend l'actif au prix K et peut l'acheter au prix S inférieur à K . Un acheteur d'options de vente **spécule donc à la baisse**. A l'échéance, le retour est de $\max(0, K - S_t)$. En notant P la prime du put, le profit réalisé est de $\max(0, K - S_t) - P$. Il est positif dès que S est inférieur au seuil critique (S_c) égal à $K - P$. Le risque de perte est limité au montant de la prime. Cette stratégie est illustrée sur la figure 1.3

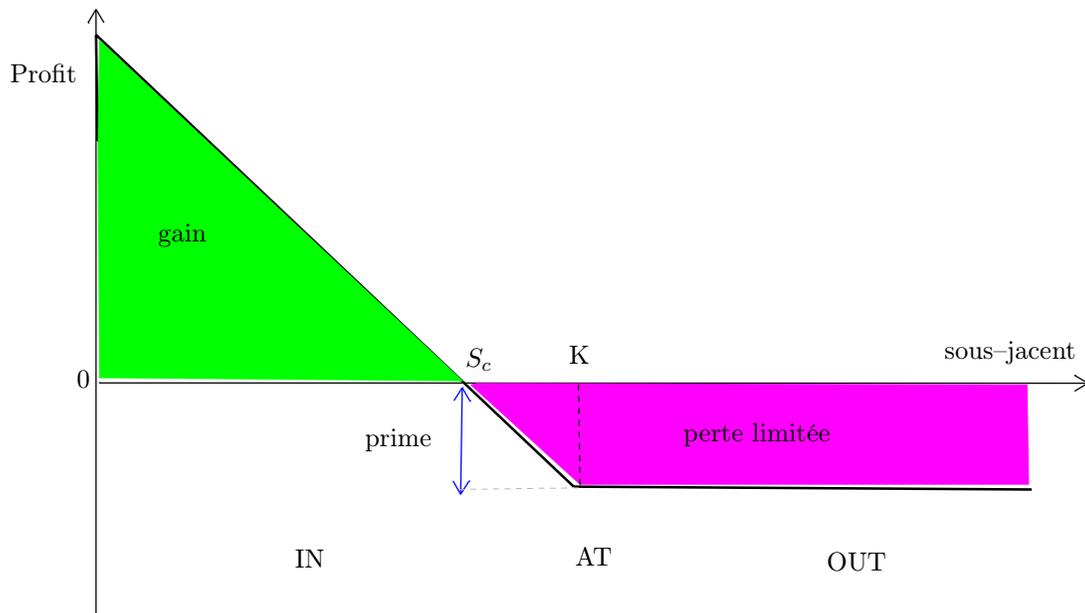


Figure 1.3. Achat d'une option de vente

Vente d'une option de vente (pour jouer une légère hausse)

Si l'option est exercée, le vendeur d'une option de vente achète l'actif au prix K et peut le vendre au prix S supérieur à K . Le vendeur d'une option de vente **spécule donc à la hausse**. A l'échéance, le retour est de $\max(0, K - S_t)$. En notant P la prime du put, le profit réalisé est de $P - \max(0, K - S_t)$. Cette stratégie est illustrée sur la figure 1.4.

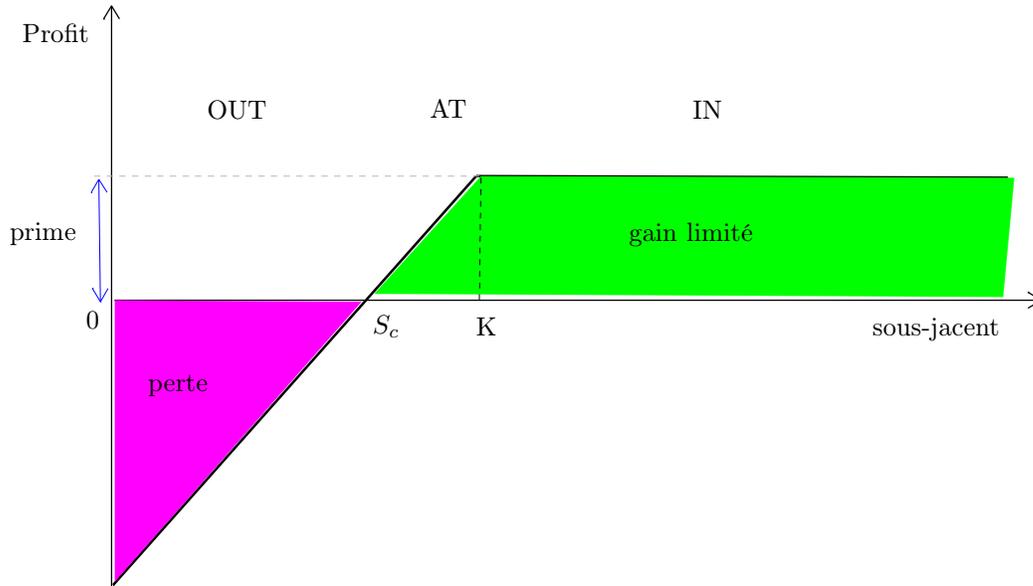


Figure 1.4. Vente d'une option de vente

1.2 Approche par gestion dynamique de portefeuille

Nous allons formaliser mathématiquement l'évolution de la valeur liquidative d'un portefeuille géré dynamiquement de manière autofinancante, c'est à dire sans modification de la valeur du portefeuille aux dates de réajustement.

L'option d'achat (ou Call) est l'un des produits financiers les plus utilisés : à travers cet exemple simple, nous allons dégager les messages fondamentaux de la finance de marché. Tout d'abord, notons S_t son cours à l'instant t . L'acheteur du contrat aura un gain en T égal à $(S_t - K)_+$ (ou x_+ désigne la partie positive de x) : en échange, il versera aujourd'hui une prime C_0 au vendeur de l'option.

Pour déterminer le montant de cette prime, Black et Scholes d'une part, Merton d'autre part, jettent en 1973 les bases modernes de l'évaluation d'instruments financiers, en s'appuyant sur une gestion dynamique de portefeuille : partant d'une richesse initiale C_0 , le vendeur de l'option va rechercher une stratégie qui lui permettra d'atteindre la richesse terminale souhaitée $(S_t(\omega) - K)_+$ à la date T , de manière à honorer son engagement envers l'acheteur, et cela dans tous

les scénarios ω d'évolution du marché. Nous allons voir qu'il existe une solution unique à ce problème de cible aléatoire, explicite et facile à calculer.

D'un point de vue mathématique, on se place sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ où $\mathbb{T} := \{0, \dots, T\}$, $T > 0$. On suppose que $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ et que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Par convention, on pose $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$. La filtration \mathbb{F} correspond à l'information de l'agent financier.

Notons V_t la valeur de ce portefeuille dynamique, investi d'une part en **actifs risqués** (en nombre θ_t , soit pour un montant $\theta_t S_t$) et d'autre part en **actif sans risque** (rémunération au taux d'intérêt r_t suppose déterministe pour simplifier, soit pour un montant $V_t - \theta_t S_t$).

- **Les actifs risqués** : ils rapportent un rendement non connu à l'avance. Ils s'agit par exemple des actions, des obligations émises par des entreprises pouvant faire défaut,... Les actifs risqués sont modélisés par un processus d -dimensionnel $S = (S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \in \mathbb{T}}$. On suppose que S est \mathbb{F} -adapté, i.e. que S_t est \mathcal{F}_t -mesurable quelque soit $t \in \mathbb{T}$. Autrement dit, on connaît la valeur de S à la date t .
- **L'actif sans risque** : il rapporte un rendement constant connu à l'avance, i.e. le rendement du titre entre les dates t et $t + 1$ est connu à la date t . Il s'agit en général d'une obligation émise par l'état, i.e. sans risque de défaut.

Lorsque l'on traduit que les variations de la valeur du portefeuille sont uniquement dues à celles des actifs (autrement dit, sont exclus l'apport extérieur d'argent ou une consommation), on obtient une première équation, dite d'autofinancement, décrivant la variation infinitésimale de la valeur du portefeuille :

$$dV_t = r_t(V_t - \theta_t S_t)dt + \theta_t dS_t, \quad (1.1)$$

avec $V_0 = C_0$. Ainsi, pour valoriser l'option d'achat, il s'agit de trouver le coût initial V_0 et la stratégie θ_t , qui permettent d'obtenir $V_t(\omega) = (S_t(\omega) - K)_+$ dans tous les scénarios de marché.

1.3 Modélisation à l'aide du mouvement Brownien

1.3.1 Mouvement Brownien

Un peu d'histoire

Le mouvement Brownien est un modèle pour les phénomènes aux mouvements très erratiques : en physique, biologie, économie et finance. Le botaniste R. Brown (1773-1858) observe d'abord vers 1828 le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. En 1877, Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau. Ce type de mouvement est alors appelé mouvement au hasard.

En 1900, Bachelier (1870-1946) a soutenu à la Sorbonne, sous la direction de Henri Poincaré, une thèse intitulée « Théorie de la spéculation ». Il introduit le mouvement brownien et jette les bases de la finance moderne. En vue d'étudier les cours de la bourse, il met en évidence le caractère « Markovien » du mouvement Brownien : la position d'une particule à l'instant $t + s$ dépend de sa position en t , et ne dépend pas de sa position avant t .

Puis, vers 1905 Albert Einstein construit un modèle pour décrire la trajectoire des atomes soumis à des chocs : la densité vérifie l'équation de la chaleur et est de ce fait gaussienne. Ainsi il relie le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. La même année, Smoluchowski décrit le mouvement Brownien comme une limite de promenades aléatoires.

La première étude mathématique rigoureuse est faite par N.Wiener (1923), qui construit une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues sous laquelle le processus canonique est un mouvement Brownien. Ensuite P.Lévy (1948) s'intéresse aux propriétés fines des trajectoires du Brownien. Depuis le mouvement Brownien continue de passionner les probabilistes, aussi bien pour l'étude de ses trajectoires que pour la théorie de l'intégration stochastique (Wiener, Itô, Watanabe, Meyer, Yor, LeGall, Salminen, Durrett, Chung, Williams, Knight, Pitman,...).

Définition 1.3.

On se donne un espace (Ω, \mathcal{F}, P) et un processus $(W_t, t \geq 0)$ sur cet espace. On dit que le processus $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien (standard) si

- a) $P(W_t = 0) = 1$;
- b) *Tous accroissement $W_t - W_s$, où $s < t$, est une variable réelle de loi gaussienne centrée, de variance $(t - s)$.*
- c) *Pour tout $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les accroissements $\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}; 0 \leq i \leq n - 1\}$ sont indépendantes.*

1.3.2 Modélisation stochastique de l'actif risqué

Samuelson (1960), puis Black, Scholes et Merton (1973) proposent une modélisation de l'actif risqué à l'aide d'un mouvement brownien W_t , le rendement instantané $\frac{dS_t}{S_t}$ de l'actif est décomposé comme la superposition d'une tendance locale $\mu_t dt$ et d'un bruit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t. \quad (1.2)$$

L'amplitude locale du bruit est donnée par la fonction $\sigma(t, S_t) \succ 0$, appelée volatilité : elle joue un rôle fondamental comme nous le verrons par la suite.

On remarque que le premier terme de l'expression à droite de l'équation (1.2) est une intégrale de Lebesgue-Stieljes mais le second ne peut pas être généralisé à l'aide d'intégrales de type $\int_0^t h_s dW_s$. En effet, une des propriétés importantes du mouvement brownien est que presque sûrement ses trajectoires ne sont nulle part différentiables. Cependant, on peut donner un sens précis à ce type d'intégrales, appelée intégrale d'Itô par le calcul stochastique. On construit cette intégrale comme une limite appropriée de somme de Riemann non anticipative.

$$\lim_{h_{t_i} \rightarrow 0} \sum_i h_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Comme on peut supposer que la valeur d'une stratégie de gestion à l'instant s ne dépende que de l'information disponible à l'instant t , alors il est tout à fait naturel de considérer des intégrands non anticipatifs.

On peut aussi développer un calcul différentiel. La formule d'Itô y joue un rôle central :

$$d[u(t, S_t)] = \partial_t u(t, S_t) dt + \partial_x u(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2(t, S_t) S_t^2 \partial_{xx}^2 u(t, S_t) dt, \quad (1.3)$$

le terme de dérivée seconde supplémentaire provenant de la variation quadratique finie du mouvement brownien.

1.4 Black-Scholes et la gestion parfaite

Revenons au problème de la valorisation de l'option d'achat et cherchons la valeur d'un portefeuille autofinçant sous la forme $V_t = u(t, S_t)$ pour une certaine fonction u à déterminer. Comparons les deux écritures dV_t et $d[u(t, S_t)]$ données par (1.1) et (1.3) en identifiant les termes en dt et dS_t : il en découle que d'une part la stratégie vaut $\theta_t = \partial_x u(t, S_t)$ et que d'autre part, u doit nécessairement satisfaire l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t u + Lu - r_t u = 0, \quad (1.4)$$

où L est l'opérateur linéaire du second ordre défini par

$$L u(t, x) = r_t \partial_x u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) x^2 \partial_{x,x}^2 u(t, x),$$

avec pour condition terminale $u(T, x) = (x - K)_+$. Remarquons que la tendance locale μ_t n'intervient plus : le prix d'une option d'achat est le même si la tendance de l'actif est haussière ou baissière, ce qui va contre l'intuition première. Cette particularité se retrouvera plus loin avec la valorisation par probabilité neutre au risque.

Lorsque la volatilité $\sigma(t, x) = \sigma(t)$ ne dépend que du temps de façon déterministe, une solution à l'équation (1.4) est facilement calculable (faire par exemple un changement de variables $y = \log(x)$ pour se ramener à l'équation de la chaleur) : cela conduit à la célèbre formule de Black-Scholes utilisée dans toutes les salles de marché du monde, donnant $V_0 = u(0, S_0)$ pour la valeur de l'option aujourd'hui.

Définition 1.4. *Une opportunité d'arbitrage est la possibilité donnée à un intervenant du marché de monter une opération à investissement nul lui rapportant dans le futur des gains toujours positifs et strictement positifs avec une probabilité non nulle.*

Pour valoriser les actifs sur les marchés liquides, on fait l'hypothèse que sur ces marchés il y a Absence d'Opportunité d'Arbitrage « AOA ». Cette hypothèse se justifie par le fait que, sur les marchés liquides, les opportunités d'arbitrage sont très vite repérées par des arbitragistes et que le marché, sous leur intervention, se rééquilibre très rapidement.

Ainsi, dans l'exemple traité, le prix du Call est bien V_0 puisque s'il était supérieur (disons $V'_0 > V_0$), il suffirait de vendre un tel contrat et, avec la prime, de suivre la stratégie $(\theta_t = \partial_x u(t, S_t))_{0 \leq t \leq T}$ pour finalement générer à coup sûr un profit $V'_0 - V_0 > 0$ à partir de rien. Cette notion d'arbitrage a largement contribué au développement de la finance moderne, en mettant l'accent sur la cohérence des prix de produits dérivés entre eux.

D'une façon plus générale, les flux terminaux H peuvent dépendre de toute la trajectoire de l'actif risqué, et pas seulement de sa valeur en T . De plus, la valorisation de l'exemple précédent reste valable pour les options de multi sous-jacent, en modélisant-leur risques par plusieurs mouvements Browniens de même nombre que les actifs risqués. Cela conduit dans bien des cas à des équations partielles paraboliques linéaires du second ordre avec des variables multidimensionnelles : c'est le point d'entrée de l'analyse numérique en finance.

1.5 Approche probabiliste

Un autre point de vue que celui du trajectoirel et des équations aux dérivées partielles (EDP) est celui basé sur les martingales. Les martingales sont des processus stochastiques dont les accroissements $M_{t+\delta} - M_t$, compte tenu de l'information disponible en t , sont centrés : ces processus ont donc en particulier une espérance constante, $E(M_t) = M_0$. L'équation d'autofinancement (1.1) se réécrit à l'aide de la valeur actualisée $\tilde{V}_t = e^{-\int_0^t r_s ds} V_t$, $(\tilde{S}_t = e^{-\int_0^t r_s ds} S_t)$

$$d\tilde{V}_t = \theta_t d\tilde{S} \quad (1.5)$$

avec la condition terminale $\tilde{V}_T = e^{-\int_0^T r_s ds} H =: \tilde{H}$, H étant le flux terminal de l'option (par exemple $H = (S_T - K)_+$). Un résultat important relie l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage à l'existence d'une probabilité Q sous laquelle l'actif actualisé $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale (voir Föllmer, 2001 et ses références). L'unicité de Q est acquise dans les marchés "browniens" décrits précédemment pourvu que la matrice de volatilité $\sigma(t, x)$ soit inversible. Par l'équation (1.5), $(\tilde{V}_t)_{0 \leq t \leq T}$ hérite de la propriété de martingale sous la probabilité Q (avec quelques hypothèses sur $(\tilde{\theta}_t)_{0 \leq t \leq T}$ et donc nécessairement

$$V_0 = E^Q[\tilde{H}] \quad (1.6)$$

Ainsi, le prix de l'option est l'espérance des gains actualisés sous une certaine probabilité Q . Soulignons que cette dernière n'est qu'un outil de calcul et ne correspond en rien à la probabilité du monde réel. Elle est appelée probabilité neutre au risque, car sous celle-ci, la tendance locale de l'actif dans (1.2) devient r_t au lieu de μ_t . Le fait que la solution donnée par (1.4) et (1.6) coïncide lorsque $H = (S_T - K)_+$ repose sur le lien classique entre les EDP (équation de la chaleur et généralisation) et certaines espérances, donné par les formules de FeynmanKac.

Ramener un prix d'option à un calcul d'espérance a ouvert plusieurs perspectives. Bon nombre de travaux de recherche ont été consacrés (et le sont toujours) aux calculs explicites (en général la plus rapide des approches en terme de temps de calcul), sous-tendant des analyses fines des processus stochastiques et de leur loi (Yor, 2000).

Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir des formules fermées, les méthodes numériques sont à privilégier : hormis les méthodes d'analyse numérique déjà mentionnées, on peut avoir recours aux méthodes de Monte-Carlo, dont le principe est, à l'aide d'un grand nombre M de simulations indépendantes de scénarios ω_i , d'utiliser l'approximation :

$$E^Q[\tilde{H}] \approx \sum_{i=1}^M \tilde{H}(\omega_i)$$

due à la loi des grands nombres. La vitesse de convergence est connue pour ne pas être rapide (néanmoins, des techniques d'accélération existent), mais elle est indépendante de la dimension du problème. Ainsi, c'est une alternative intéressante comparée aux méthodes déterministes, car la dimension des problèmes dépasse souvent 3-4, pour parfois atteindre 40 par exemple (avec les actions de l'indice CAC40). Notons aussi que la simulation de \tilde{H} passe souvent par celle de fonctionnelle de solutions des équations stochastiques du type (1.2). Les difficultés proviennent alors de deux sources : d'une part, les fonctionnelles à prendre en compte sont souvent irrégulières (des fonctions des extrêmes de la trajectoire ou même des indicatrices impliquant des temps de sortie) et, d'autre part, la simulation exacte des équations stochastiques n'est pas simple, notamment lorsque $\sigma(t, x)$ est non constant. Après avoir stimulé la recherche pendant les 15 dernières années, ces problèmes sont maintenant assez bien maîtrisés (Dupire, 1998). La nécessité de calculer aussi la couverture et plus généralement d'autres sensibilités du prix d'option par rapport à des paramètres a encouragé le développement de méthodes performantes, pour calculer aussi par simulations Monte-Carlo des dérivées d'espérances (Fournie et al., 1999).

1.6 Marché incomplet

Définition 1.5. *marché complet*

On dit qu'un marché financier est complet si toute option européenne est simulable.

Contrairement à l'axiome de viabilité qui paraît inhérent à la nature d'un marché, cette hypothèse apparaît comme une commodité mathématique ; on peut même se demander si le fait d'exiger que toute option puisse être simulée par une stratégie convenable est bien réaliste ; on notera tout de même que l'on ne demande pas pour l'instant d'exhiber cette stratégie : savoir qu'elle existe est suffisant pour obtenir des résultats. D'autre part, le modèle de Black and Scholes qui est le plus couramment utilisé fournit un exemple important de marché complet ;

Présentation

Nous avons déjà mentionné que lorsque le nombre de browniens est au plus égal au nombre d'actifs risqués, il existe une gestion de portefeuille parfait, dans le sens que le flux promis H est atteignable dans tous les scénarios de marché : le risque résiduel $V_T - H$ est alors nul.

Maintenant, si le nombre de sources d'aléas est supérieur ou si des phénomènes de sauts sur les cours d'actifs sont incorporés dans la modélisation, cette couverture parfaite n'est plus possible en général. Du côté probabiliste, cela correspond à affirmer que l'ensemble Q des probabilités neutres au risque est infini. De nombreux critères d'optimisation sont possibles. Une première solution consiste à chercher à dominer avec une probabilité de 1 le flux terminal : $V_T \geq H$. Le plus petit coût à la date d'aujourd'hui de telles stratégies s'appelle le prix de sur-réplication et est donné essentiellement par $\sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q(\tilde{H})$ (El Karoui et Quenez, 1995). Malheureusement, cette quantité se révèle être en général très élevée et n'est pas utilisée en pratique. Une alternative consiste à trouver la stratégie de coût V_0 minimal, étant donné un niveau de risque fixé par un critère de type $E[l(V_T - H)]$ mesurant l'écart entre le flux terminal de l'option H et la valeur terminale du portefeuille (pour une fonction de perte l). A l'aide d'arguments fins de dualité et de techniques de contrôle stochastique (dont l'homologue EDP est l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellmann).

Problème de "réplication optimale"

On considère un actif^{1.1} (dit actif sous-jacent) avec un prix S_t à l'instant t ($0 \leq t \leq T$), et $H(S_t, Z_t)$ une fonction qui représente le profit d'un produit dérivé de type "européen" avec une maturité T . Z_t représente un vecteur de variables d'état.

D'après Merton (1973), le problème de réplication optimale est de déterminer une stratégie dynamique (d'achat et de vente du sous-jacent, et de prêt/emprunt sans risque) auto-financée qui approche au mieux le profil terminal à maturité.

Formulation du problème :

- Les marchés sont sans frottements (taxes, frais de transactions, limites de vente à découvert, limites d'emprunt).
- Le taux d'emprunt et de prêt est sans risque et est nul.
- Il existe un vecteur de dimension fini Z_t de variables d'état, dont aucune composante n'est parfaitement corrélée avec un actif traité et tel que $[S_t, Z_t]'$ est un processus de Markov.
- Les dates $t \in \mathcal{T}$ des échanges commerciaux (trading) sont connues et fixées. Si $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ l'échange est dit discret. Si $\mathcal{T} = [0, T]$ l'échange est dit continu.

1.1. Tout élément de patrimoine ayant une valeur économique positive pour l'entité est considéré comme un élément d'actif. Les éléments d'actif destinés à servir de façon durable à l'activité de l'entité constituent l'actif immobilisé. Ceux qui, en raison de leur destination ou de leur nature, n'ont pas cette vocation constituent l'actif circulant. Tout élément du patrimoine ayant une valeur économique négative pour l'entité est considéré comme un élément du passif. L'ensemble de ces éléments est dénommé passif externe.

Notons V_0 le prix du portefeuille à la date origine. θ_t , B_t , et V_t désignent respectivement le nombre des actions détenues, la valeur d'obligations sans-risque détenues, et la valeur totale du portefeuille à la date t .

$$\text{Pour } t \in \mathcal{T}, \quad V_t = \theta_t S_t + B_t \quad (1.7)$$

En plus, on impose au portefeuille d'être auto-financé, i.e., toutes les positions acheteuses longues) sont complètement financées par les positions vendeuses (courtes ou "short")^{1,2}, ce qui élimine toute entrée-sortie de fonds.

$$\begin{aligned} S_{t_{i+1}}(\theta_{t_{i+1}} - \theta_{t_i}) + B_{t_{i+1}} - B_{t_i} &= 0, \quad 0 < t_i < t_{i+1} \leq T \\ V_{t_{i+1}} - V_{t_i} &= \theta_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}), \end{aligned}$$

et, en temps continu

$$dV_t = \theta_t dS_t \quad (1.8)$$

On cherche une stratégie auto-financée $\{\theta_t\}$, $t \in \mathcal{T}$, telle que la valeur du profil terminal V_T soit aussi proche que possible de la valeur de l'option $H(S_T, Z_t)$. Le problème de réplication optimale est en fait un problème d'optimisation qui s'écrit sous la forme suivant:

$$\min_{\{\theta_t\}} E[V_T - H(S_t, Z_t)]^2 \quad (1.9)$$

E dénote l'espérance conditionnelle sachant l'information à $t = 0$.

On mesure la qualité de la réplication par la racine carrée de l'erreur quadratique évaluée au point optimum, notée $\varepsilon(V_0)$

$$\varepsilon(V_0) = \sqrt{\min_{\{\theta_t\}} E[V_T - H(S_t, Z_t)]^2}$$

On montre l'existence d'une stratégie qui minimise l'erreur de réplication. On note alors ε^*

$$\varepsilon^* \equiv \min_{V_0} \varepsilon(V_0) \quad (1.10)$$

Dans le cas de Black-Scholes (1973) et Merton (1973), il existe une stratégie de réplication optimale pour laquelle $\varepsilon^* = 0$. La valorisation sous condition de non-arbitrage est alors dite parfaite.

1.2. Position de change nette d'une entité dont les ventes de devises pour une date donnée ont dépassé les achats dans la même devise pour la même date. Note(s) : Le terme "position courte" est également utilisé dans le cas d'une position de taux d'intérêt d'un établissement de crédit dont le montant nominal des emprunts est supérieur aux prêts pour une même échéance et dans une même devise

1.7 Volatilité

1.7.1 Précisions sur la volatilité

Le concept de volatilité est une notion fondamentale qui constitue l'un des principaux outils de gestion d'un portefeuille d'options. La remise en cause de la formule de Black et Scholes où la volatilité était figée à entraîner cette dernière sur le devant de la scène, devenant ainsi l'objet d'une myriade d'études et de recherches...

La volatilité d'un actif est définie comme étant l'écart type de sa rentabilité. Elle représente un indicateur de mesure de risque. Plus la volatilité d'un actif est importante, plus il est risqué. Elle est un des principaux facteurs de détermination de la prime, avec le cours de l'actif sous-jacent. La volatilité n'est pas observable.

Selon certains analystes, la volatilité d'un actif provient uniquement de la succession aléatoire d'informations relatives aux rentabilités futures de l'actif. D'autres situent son origine dans l'activité de cotation elle-même, affirmé par des études empiriques menées par FAMA et FRENCH.

C'est un paramètre clé en finance, qui parfois recouvre des notions un peu différentes telles que : volatilité instantanée locale, volatilité moyenne sur une période, volatilité implicite, etc...

La volatilité locale

La volatilité locale est le paramètre qui mesure le risque associé à la variation instantanée du sous-jacent. Elle peut-être déterministe comme dans le cas d'un sous-jacent qui suit un brownien géométrique, ou stochastique comme dans le cas des options.

Définition 1.6. *La volatilité locale d'un actif de prix (X_t) est le paramètre éventuellement aléatoire σ_t^X défini par :*

$$\frac{dX_t}{X_t} = r_t dt + \sigma_t^X \left(d\widehat{W}_t + \lambda_t \right) \quad (1.11)$$

Volatilité historique

Dans le cadre de la formule de Black et Scholes, le paramètre de volatilité σ est le seul paramètre qui ne peut pas être observé directement. Deux approches sont possibles pour l'identifier.

- des méthodes empiriques utilisant des données historiques sur les cours (d'ouverture, de fermeture, le plus haut, le plus bas....)

- des méthodes implicites basées sur l'observation des prix des options et des cours des sous-jacents.

La première méthode utilise les estimateurs standards de la variance par unité de temps logarithme du cours du sous-jacent, qui par hypothèse suit un mouvement brownien non centré.

On utilise des données régulièrement espacées de h et on introduit :

$$S_{(j+1)h} = S_{jh} e^{\mu h - \sigma(W_{(j+1)h} - W_{jh})}$$

et on pose:
$$\tilde{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln(S_{(j+1)h} / S_{jh})$$

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \ln(S_{(j+1)h} / S_{jh} - \tilde{\mu}_n)^2$$

On en retient, en général, des valeurs de n comprises entre 50 et 180 jours. Le $\tilde{\sigma}_n$ observé est l'estimateur de σ appelé volatilité historique.



Figure 1.5. Cours du yen et volatilité historique Oct2000-Oct2001

La volatilité implicite

La volatilité implicite ne fait référence à aucune notion statistique. Elle repose sur le fait que dans un marché très liquide, la loi de l'offre et de la demande permet de fixer des prix d'équilibre, qui correspondent à un consensus de marché. Le marché se sert alors des modèles moins pour fixer des prix, (sauf sur des produits complexes), que pour évaluer et couvrir le risque attaché à un produit dérivé. Le problème est aussi de comparer les prix de différents produits optionnels écrits sur un même sous-jacent.

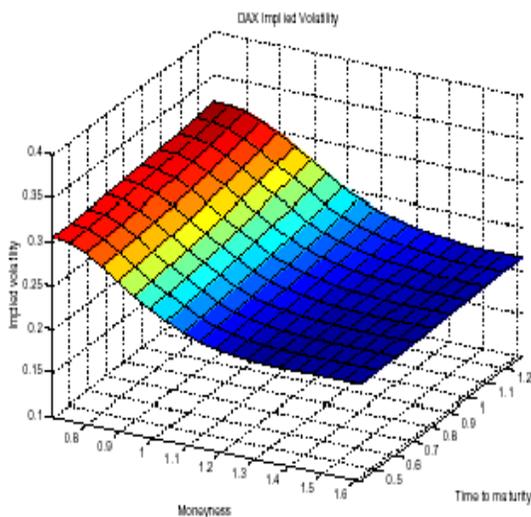
L'outil de référence essentiel est la volatilité implicite, obtenue en inversant la formule qui donne le prix du Call, c'est à dire qu'à un prix de Call et à un niveau de cours donnés, on associe la valeur de σ qui introduite dans la formule de Black et Scholes donne comme prix celui observé sur le marché.

$$C^{Obs}(t, x, T, K) = C^{BS}(t, x, T, K, \sigma^{impl}) \quad (1.12)$$

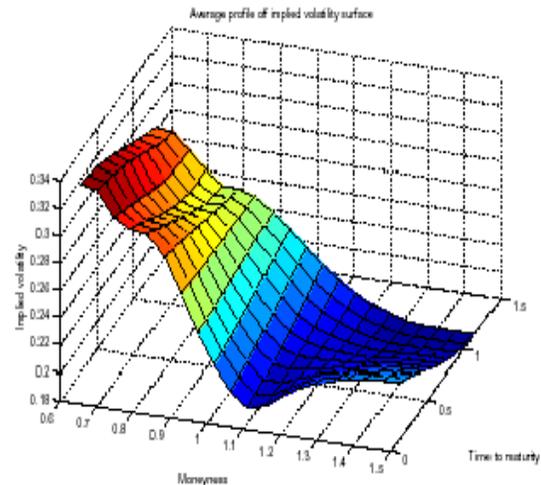
La volatilité implicite peut s'écarter notablement de la volatilité historique car elle est censée refléter la volatilité future anticipée par le marché. Elle incorpore également toutes les incertitudes sur la qualité du modèle utilisé.

1.8 Le smile

Aussi robuste que soit le modèle de BS, ses limites sont rapidement apparues. La volatilité effectivement utilisée par les opérateurs de marché varie selon le prix d'exercice de l'option considéré. D'après le modèle de BS, la volatilité est censée être un paramètre constant, objectif, issu de l'estimation statistique : elle ne devrait donc pas dépendre du prix d'exercice. Pourtant l'observation du prix des options standards sur les marchés liquides révèle des anomalies. On constate en effet que le prix des options dépend de leur éloignement de la monnaie. Le calcul des volatilités implicites qui redonnent les prix de marchés par la formule de BS, permet de représenter efficacement ce phénomène. La courbe obtenue est typiquement convexe : on l'appelle l'effet « smile » car elle présente une forme de sourire (il est d'ailleurs intéressant de noter qu'après le krach de 1987, cette forme s'est modifiée sur les marchés d'actions : les options de vente hors de la monnaie sont devenues plus chères que les options d'achat hors de la monnaie ; Dans ce cas les termes de « skew » ou « smirk » sont employés).



Surfaces de volatilité implicite sur le DaX



Moyenne des historiques de volatilités

Définition 1.7. *On appelle courbe de la volatilité ou smile de volatilité la fonction qui lie la volatilité implicite des options au prix d'exercice.*

Le smile de volatilité provient du fait que les distributions des probabilités des options de change ne suit pas exactement une distribution log-normale. En effet, la distribution implicite est plus pointue et présente des extrémités plus épaisses que la loi log-normale.

Ce smile présente des caractéristiques intéressantes mis en évidence par Rubinstein (1985), Clewlow et Xu (1993) notamment :

- La volatilité, représentant une fonction convexe par rapport aux prix d'exercice, le minimum de cette fonction se situe à un niveau de prix d'exercice correspondant à des options très proches de la monnaie.
- Le smile de volatilité, comme fonction convexe par rapport au prix d'exercice, est assez souvent symétrique.
- Cependant il peut être asymétrique (c'est une situation plus fréquente depuis le krach de 1987). Cette asymétrie peut être décrite comme l'addition d'une courbe strictement monotone au smile symétrique standard :
 - si une courbe décroissante est ajoutée, les volatilités implicites ont tendance à augmenter plus pour des prix d'exercice décroissants et le minimum de la courbe se situe à un niveau de prix d'exercice correspondant à des options hors de la monnaie
 - Dans le cas inverse (ajout d'une courbe croissante), les volatilités implicites ont tendance à augmenter plus pour des prix d'exercices croissants et le minimum de la courbe se situe à un niveau de prix d'exercice correspondant à des options dans la monnaie
- L'amplitude du smile augmente fortement au fur et à mesure que la date d'échéance de l'option se rapproche. En effet, le smile est très prononcé pour des maturités courtes, tandis qu'il a presque complètement disparu pour des maturités longues .

La combinaison des effets smile de volatilité des options européennes et de leur structure par terme forme une surface de volatilités implicites qui représente les écarts entre les prix théoriques avec volatilité constante d'un modèle de type BS ou Garman-Kohlhagen (pour des options de change) et les prix de marché.

Smile et options exotiques

La prise en compte de l'effet de smile a pris ces dernières années une importance accrue pour la raison suivante.

Dans la gestion du marché, la formule de Black et Scholes est donc essentielle plus pour quantifier le portefeuille de couverture que pour faire le prix des options classiques. La règle qui consiste à dire,

- le trader observe un prix d'option dans le marché,
- il en déduit la volatilité implicite associée,
- il couvre l'option avec le Delta correspondant à cette volatilité.

est parfaitement cohérente, puisqu'il s'agit de couvrir une option avec du sous-jacent. Il s'agit d'une gestion produit par produit.

Ces dernières années, la grande liquidité des options classiques entretenue par la présence des marchés organisés, a conduit les intervenants des marchés à considérer ces options standards comme des produits dont la gestion est parfaitement maîtrisée. ce sont des produits "vanilla". Elles deviennent des produits de base qu'on souhaite utiliser comme instruments de couverture d'options plus complexes comme les options exotiques.

Le problème du smile de volatilité se pose alors autrement, puisqu'il est nécessaire maintenant, pour pouvoir prendre en compte dans un même portefeuille de couverture plusieurs options, d'avoir un modèle commun qui respecte le smile et qui permette de faire des prix d'options exotiques, notamment d'options barrières.

1.9 La Persistance dans les Marchés financiers

En économie et en finance, le comportement des agents diffère suivant que l'on se trouve en période d'expansion ou de récession. La consommation des ménages est sensible à l'activité économique. Il en est de même de l'investissement des entreprises, et l'on sait bien que la croissance permet une diminution du chômage alors que la tendance s'inverse dès qu'une récession s'annonce. Les investissements des entreprises vont ainsi être sensibles aux comportements de certains indices économiques. De même les marchés vont réagir différemment en période de crise, entraînant une augmentation de la volatilité des prix des actifs. Dans ce cas, les séries peuvent sembler non stationnaires alors quelles sont marquées par des faits structurels qui peuvent être pris en compte par des modèles intégrant certaines non linéarités.

Les modèles à changements de régimes ont été introduits afin de prendre en compte l'existence de changements structurels non visibles à l'oeil nu dans les données économiques étudiées. L'idée de base de ces modèles repose sur le fait que les données sont localement linéaires avec des paramètres qui changent suivant l'état dans lequel on est: ainsi une certaine non stationnarité semble inhérente aux données et donc aux modèles considérés.

La manière dont on établit le lien entre l'évolution d'une série et les régimes ou les sauts qui la caractérisent peut se faire de plusieurs manières. On peut se servir d'une variable observable, c'est le cas des processus SETAR (Tong,1990), ou utiliser une variable inobservable qui suit par exemple un processus Markovien (Hamilton, 1988) ou non Markovien (Collet et Ladoucette, 2004).

Considérons donc un modèle de prix X_t s'exprimant comme la somme d'une moyenne μ_t et d'un bruit ε_t :

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (1.13)$$

Il n'est pas très difficile de comprendre qu'un changement d'état apparaît sur le niveau du prix ou de l'indice si l'on permet à la variable μ_t de suivre plusieurs comportements. Par exemple la variable μ_t peut prendre la valeur 0 ou 1 suivant un schéma pré-établi. On a alors 2 états (expansion, récession, etc...). c'est la façon de changer de niveau qui peut rendre le modèle plus ou moins complexe et créer les comportements que l'on cherche à modéliser. Ainsi ces changements peuvent avoir lieu avec une certaine probabilité p , et la loi sous jacente va induire différents types de comportements. Si p est grand les prix changent souvent d'état et le modèle présente une forme de volatilité et un comportement de mémoire courte. Si p est petit alors les prix restent longtemps dans un état et cela peut induire une fonction d'autocorrélation qui décroît lentement. On peut supposer que les changements d'état vont dépendre de l'état précédent en utilisant la matrice de transition P d'une chaîne de Markov S_t qui agit sur la variable μ_t . Cette variable que l'on note alors formellement $\mu(S_t)$ est caractérisée par la matrice de transition de la chaîne S_t . Cette matrice de transition P est définie par :

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & p_{11} \end{pmatrix}$$

où p_{ij} sont des probabilités fixes a priori, avec $p_{ij} = P[s_t = j / s_{t-1} = i]$, $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $i, j = 0, 1$ et $\sum_j p_{ij} = 1$. A partir d'une telle matrice de transition, on obtient le modèle à changement de régime introduit par Hamilton (1988) pour étudier les taux d'intérêt américains. Ces modèles sont connus pour avoir une fonction d'autocorrélation à décroissance exponentielle, identique à celle de GRACH.

On peut bien sûr imaginer encore d'autres types de comportements pour le modèle (1.13). Par exemple, en mettant une loi binomiale sur la variable μ_t et en "jouant" sur la probabilité p de cette loi. Dans ce cas là, on va moduler la capacité des prix à rester plus ou moins longtemps dans un état particulier. Maintenant, si on veut prendre en compte à la fois l'existence d'une tendance stochastique sur les prix (pour éviter de les stationnariser), et l'existence de sauts, on peut mettre un modèle de marche aléatoire sur la variable aléatoire μ_t et un comportement spécifique sur le bruit ε_t : une loi binomiale avec un p spécifique, ou bien une chaîne de Markov ou semi-Markovienne avec une matrice de transition ad hoc. On se rapproche alors du modèle "mean-plus-noise" ou du modèle "Stop-break" étudiés par plusieurs auteurs dont Chen et Tiao (1990), Granger et Hyung (1999), Smith (2003) et Collet, Guégan et Wol (2005). Le modèle (1.13) est un modèle à mémoire courte mais l'introduction de lois spécifiques sur les variables μ_t et ε_t permet de créer des temps de séjour longs dans chaque état et provoque un comportement de mémoire longue en covariance. Pour une revue détaillée de certains de ces modèles, on renvoie à Guégan (2004).

L'intérêt de ces modèles est qu'ils montrent que l'influence de bruits structurels sur le niveau d'une série ou sur le niveau de sa variance (et donc sur sa volatilité) peut être source de persistance. On observe ainsi que des prix dont le comportement semble dépendre d'informations de court terme (probabilité d'être dans l'état précédant par exemple), risquent d'être modéliser par des processus de long terme, comme ceux introduits dans le modèle de Gegenbauer, à cause du comportement spécifique de leur fonction d'autocorrélation. En effet, s'il n'y a pas trop de sauts dans la série, un phénomène de persistance s'installe qui se traduit par une fonction d'autocorrélation qui n'arrive pas à décroître vers zéro. Par exemple la figure 1.6 montre la fonction d'autocorrélation d'un processus à deux régimes.

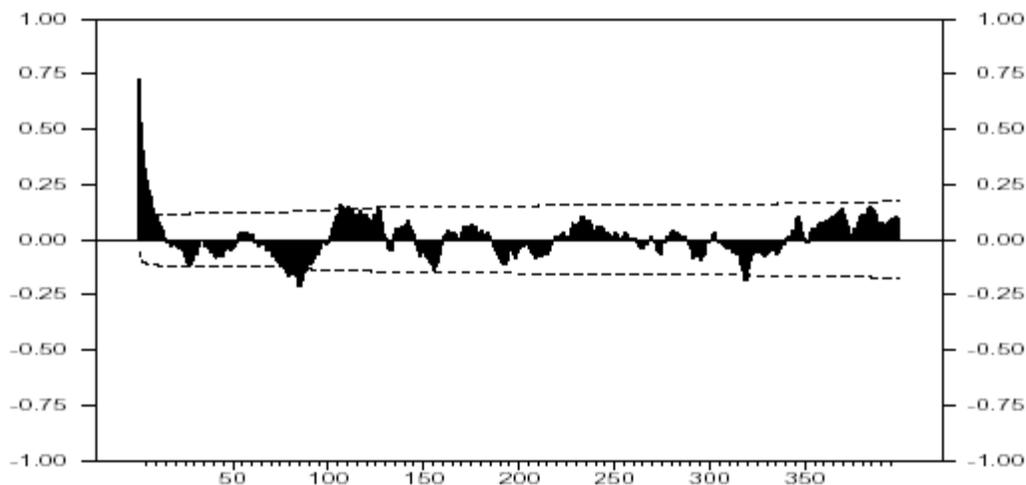


Figure 1.6. Fonction d'autocorrélation d'un processus à changement de régimes.

On s'attend à ce qu'elle décroisse exponentiellement vite vers zéro, alors qu'en réalité elle est comparable à celle d'un processus à mémoire longue, voir figure 1.7. Malgré tout, cette confusion peut parfois être source d'intérêt, car on peut montrer qu'un processus de long terme calé sur des données issues d'un modèle à changement de régime à mémoire courte, fournit parfois de meilleures prévisions. Concernant la gestion des risques de court terme, cette confusion peut être préjudiciable.

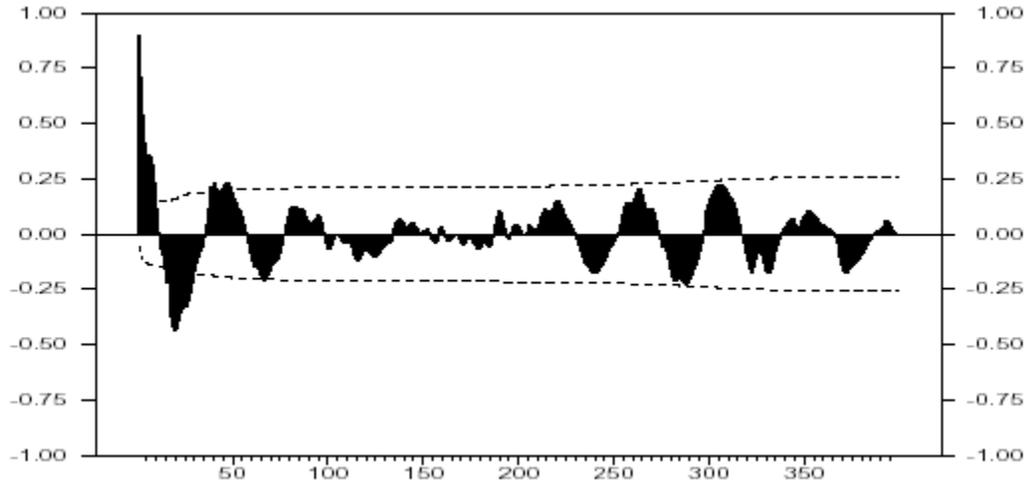


Figure 1.7. Fonction d'autocorrélation d'un processus Gegenbauer à 2 facteurs.

Chapitre 2

Problème de contrôle stochastique

2.1 Problème de contrôle stochastique

Les problèmes d'optimisation dynamique stochastique ont de nombreuses applications dans des problèmes de gestion, d'économie et de finance. Ce sont des situations où l'on fait face à des systèmes dynamiques évoluant dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser un critère économique.

2.1.1 Introduction

La théorie du contrôle stochastique a de nombreuses applications en gestion et en finance. En effet, dans ces domaines, on considère des systèmes dynamiques (c'est à dire évoluant au cours du temps) en avenir incertain et sur lesquels on peut agir en vue d'optimiser un certain critère économique.

Pour décrire un problème de contrôle stochastique, il est important de préciser quelle est l'information disponible à tout instant. Plusieurs situations sont possibles :

1. Le "contrôleur" n'a aucune information pendant l'évolution du système. Dans ce cas, il choisit un contrôle qui est fonction du temps. Ces contrôles sont appelés en "boucle ouverte" ou "open-loop" en anglais.
2. Le contrôleur connaît l'état du système à chaque instant. C'est le cas de l'observation (ou information) incomplète.
3. Le contrôleur a une connaissance partielle de l'état du système. C'est le cas de l'observation incomplète.

Pour les problèmes de contrôle déterministe, les contrôles peuvent être indifféremment choisis en boucle ouverte ou en boucle fermée (appelés alors "feedback"). Les contrôles en feedback ne donneront pas un plus petit minimum. En effet, l'état du système à tout instant t peut être déduit des données initiales et du contrôle appliqué jusqu'à l'instant t par la résolution de l'équation différentielle satisfaite par l'état du système. Donc l'observation de l'état courant du système à tout instant t ne donne pas davantage d'informations que les données initiales.

Par contre, pour les problèmes de contrôle stochastique, à partir d'une donnée initiale et d'un contrôle, le système peut suivre différentes trajectoires. Dans le cas stochastique la trajectoire optimale dépend de l'information disponible au contrôleur à tout instant t .

Dans le cas de l'information complète, auquel nous nous restreindrons ici, la méthode de la Programmation Dynamique conduit à des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre non linéaires (équations d'Hamilton Jacobi Bellman) dont la résolution permet d'obtenir la fonction valeur et des contrôles en boucle fermée. Dans le cas de l'observation incomplète, la méthode de la Programmation Dynamique conduit à des équations de dimension infinie.

Un problème de contrôle stochastique est la généralisation au cas du temps continu d'un problème de contrôle de chaîne de Markov [10, 12,31]. Les méthodes classiques de résolution de ce dernier problème (itération sur les valeurs, itérations sur les politiques [12, 46, 47]) permettent de résoudre numériquement un problème de contrôle stochastique si on peut l'approcher par un problème de contrôle de chaîne de Markov. Autrement dit ; pour discrétiser un problème de contrôle stochastique, on utilise en général des méthode d'approximation (éléments fini, différences finies) discrétisant directement l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman (équation de la programmation dynamique continue).

2.1.2 Espace de décision, variables de décision

Dans l'application d'une prise de décision, on rencontre souvent des contraintes qui permettent d'identifier les scénarios non réalisables et de les éliminer. Puis une fois que l'on a sélectionné les scénarios possibles (espace de décision), on peut alors déterminer le quel, parmi ces scénarios, représente le cas le moins contraignant (qui minimise un critère donné).

Définition 2.1.

1. On appelle espace de décision le triplet $\{U, \mathcal{U}, M\}$ où U est un espace topologique, \mathcal{U} est l'ensemble des ouverts de U et M une application de \mathcal{U} dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ telle que :

$$a) M(U) = 0 ,$$

$$b) M(\emptyset) = +\infty ,$$

$$c) M(\bigcup_n A_n) = \inf_n M(A_n), \forall A_n \in \mathcal{U} .$$

2. L'application M est appelée mesure de coût.

3. Une application $m: U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ telle que $M(A) = \inf_{a \in A} m(a)$, pour tout A dans \mathcal{U} est appelée densité de coût de la mesure M .

4. On peut définir aussi le surcoût conditionnel de prendre la décision dans A sachant qu'elle doit nécessairement être prise dans B par

$$M(A \setminus B) := M(A \cap B) - M(B).$$

Théorème 2.2. Soit m une fonction à valeurs réelles dont l'infimum est 0, l'expression $M(A) = \inf_{a \in A} m(a)$ pour tout $A \in \mathcal{U}$ définit une mesure de coût.

A cause de ce théorème dans la suite on ne s'intéresse qu'aux densités de coût qu'on appelle simplement coût.

La variable de décision est une quantité mesurable définie avec une valeur et c'est lorsque le preneur de décision peut contrôler cette variable que cette dernière entre dans l'appellation "**variable de décision**". On a trois catégories pour les variables de décision : binaire, discrète ou continue. On peut aussi les regrouper dans les variables dites :

- **Variables déterministes:** ce sont des variables auxquelles on assigne des valeurs qui ne sont pas choisies aléatoirement. Les variables déterministes sont utilisées pour modéliser les problèmes de décision dans la certitude.
- **Variables aléatoires:** lorsque les variables décrivant un scénario ont une distribution de probabilité connue, on parle alors de décision basée sur un modèle stochastique (ou probabiliste). Ces variables représentent les situations de décision dans l'incertitude

Définition 2.3. On appelle espace polonais tout espace mesurable $(E; \mathcal{E})$ constitué par un espace métrique complet séparable, muni de la tribu de ses parties boréliennes.

Définition 2.4.

1. Une variable de décision X sur $\{U, \mathcal{U}, M\}$ est une application de U dans E un espace topologique que l'on suppose polonais. Elle induit une mesure de coût M_X sur (E, \mathcal{O}) par $M_X(A) = M_*(X^{-1}(A))$ pour tout A dans \mathcal{O} (l'ensemble des ouverts de E). La mesure de coût M_X admet une densité de coût notée m_X .
2. Quand $E = \mathbb{R}$ [resp. \mathbb{R}^n , resp. \mathbb{R}_{\min}] avec la topologie induite par la valeur absolue [resp. La distance euclidienne, resp. $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$] alors X est appelée variable de décision réelle [resp. vectorielle, resp. à valeurs coûts].
3. Deux variables de décision X et Y sont dites indépendantes quand

$$m_{X,Y} = m_X(x) + m_Y(y).$$

4. L'optimum d'une variable de décision réelle est défini par

$$\mathcal{L}(X) = \arg \min_x m_X(x)$$

quand le minimum existe. Quand une variable de décision X satisfait $\mathcal{L}(X) = 0$, on dit qu'elle est centrée.

2.2 Contrôle de diffusion

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de Probabilité complet et soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration. On considère des systèmes dynamiques dont l'état X_t est modélisé par des processus stochastiques de diffusion dans \mathbb{R}^n . Les variables de décision, appelés variables de contrôle, sont des processus stochastiques dont la valeur peut être décidée à tout instant en fonction des informations disponibles à cet instant, et ces variables de contrôle apparaissent dans l'équation d'évolution du système. On note u_t les contrôles et l'on suppose qu'ils sont à valeurs dans une partie fermée \mathcal{A} de \mathbb{R}^m . Les contrôles u_t sont des processus adaptés à \mathcal{F} , selon la terminologie usuelle.

On suppose que l'état X_t du système dynamique est gouverné par l'équation différentielle stochastique (EDS):

$$dX_t = \beta(X_t, u_t) dt + \Gamma(X_t, u_t) dW_t \quad (2.1)$$

Où W est un mouvement brownien de dimension d sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Les termes $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Gamma: \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ sont des fonctions mesurables, satisfont une condition de croissance linéaire: $\exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{A}$

$$|\beta(x, u)| + |\Gamma(x, u)| \leq C(1 + |x| + |u|) \quad (2.2)$$

ainsi qu'une condition de Lipchitz en x , uniforme en u $\exists L > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \mathcal{A}$

$$|\beta(x, u) - \beta(y, u)| + |\Gamma(x, u) - \Gamma(y, u)| \leq L|x - y| \quad (2.3)$$

On choisit comme norme matricielle: $|\Gamma| = (\text{tr}(\Gamma\Gamma^T))^{\frac{1}{2}}$ La matrice de covariance (à un facteur $\frac{1}{2}$ près) est :

$$a(t, u) := \Gamma(x, u)\Gamma^T(x, u), \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}.$$

Problème à horizon fini

On fixe un horizon fini $0 \leq T \leq +\infty$, . Pour $t \in [0, T]$, on note \mathcal{A}_t l'ensemble des processus de contrôle $\{u_s, t \leq s \leq T\}$ \mathcal{F}_s -adapté, à valeurs \mathcal{A} , et tel que :

$$E \left[\int_t^T |u_s|^2 ds \right] < +\infty \quad (2.4)$$

Les conditions (2.2)-(2.3) et (2.4) assurent pour tout $u \in \mathcal{A}_t$, et pour toute condition initiale $(t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$, l'existence et l'unicité du processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ solution forte de l'équation différentielle stochastique (EDS) multidimensionnelle (2.1) partant de x en $t = s$. On note alors $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ cette solution qui est p.s. à trajectoires continues. Sous ces conditions sur β, Γ et u on a:

$$E \left[\int_t^T \sup_{t \leq s \leq T} |X_s^{t,x}|^2 ds \right] < +\infty$$

Soit $f: [0, T[\times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable qui peut représenter les coûts payés par l'investisseur sur la période entre t et T , et $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que: (**Hg**)

- i. g est bornée inférieurement
- ii. g est à croissance quadratique :

$$\exists C > 0: \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |g(x)| \leq C(1 + |x|^2). \quad (2.5)$$

La fonction g peut représenter une mesure de risque.

Pour $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{A}(t, x)$ le sous-ensemble des contrôles u de l'ensemble \mathcal{A}_t tel que:

$$E \left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, u_s) ds \right] < +\infty \quad (2.6)$$

On peut alors définir sous (**Hg**) la fonction de coût :

$$J(t, x, u) = E \left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, u_s) ds + g(X_T^{t,x}) \right]$$

Pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{A}(t, x)$. L'objectif étant de minimiser cette fonction coût, on introduit la fonction valeur:

$$v(t, x) = \inf_{u \in \mathcal{A}(t,x)} J(t, x, u) \quad (2.7)$$

qu'on cherchera à calculer et si possible un contrôle $u^* \in \mathcal{A}(t, x)$ tel que $v(t, x) = J(t, x, u^*)$. u^* est appelé contrôle optimal. Si de plus le processus u^* peut s'exprimer comme une fonction mesurable du temps et de l'état du système, $u^* = u^*(s, X_s^{t,x})$ pour $t \leq s \leq T$, on dit que u^* est un contrôle optimal Markovien pour (2.7).

2.3 Equation de la programmation dynamique

Dans cette section, nous décrivons formellement comment le principe de la programmation dynamique dû à Bellman permet de donner une caractérisation de la fonction valeur en termes d'équation aux dérivées partielles dite de Hamilton Jacobi Bellman, ainsi qu'un critère pour déterminer les contrôles optimaux. On renvoie à Fleming et Soner (1993, Section IV.7) pour les résultats mathématiques rigoureux, et pour le détail de la preuve rigoureuse (et technique) qui fait appel à des arguments délicats de sélection mesurable.

On considère le cas d'un problème de contrôle à horizon fini. Soit $0 \leq h \leq T - t$. Supposons que nous exerçons un contrôle u_s sur l'intervalle $[t, t + h]$. A l'instant $t + h$, l'état du système devient X_{t+h} et nous l'observant à la date $t + h$. Supposons que nous connaissons à partir de $t + h$ la politique optimale à appliquer, sachant qu'à l'instant $t + h$, l'état du système est X_{t+h} . Autrement dit, supposons connu le contrôle u_s^* , $t + h \leq s \leq T$, tel que:

$$\begin{aligned} v(t + h, X_{t+h}) &= J(t + h, X_{t+h}, u^*) \\ &= E \left[\int_{t+h}^T f(s, X_s, u_s^*) ds + g(X_T) | X_{t+h} \right]. \end{aligned}$$

Considérons le contrôle :

$$\hat{u}_s = \begin{cases} u_s & t \leq s \leq t + h \\ u_s^* & t + h \leq s \leq T. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} J(t, x, \hat{u}) &= E \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s, u_s) ds + \int_{t+h}^T f(s, X_s, u_s^*) ds + g(X_T) \middle| X_t = x \right] \\ &= E \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s, u_s) ds + E \left[\int_{t+h}^T f(s, X_s, u_s^*) ds + g(X_T) | X_{t+h} \right] \middle| X_t = x \right] \\ &= E \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s, u_s) ds + v(t + h, X_{t+h}) | X_t = x \right] \\ &= E \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, u_s) ds + v(t + h, X_{t+h}^{t,x}) \right], \end{aligned} \tag{2.8}$$

par la loi des espérances conditionnelles itérées. Le principe d'optimalité de Bellman dit que si l'on choisit u_s sur $[t, t + h]$ de façon à minimiser l'expression $J(t, x, \hat{u})$, on obtient ainsi le contrôle \hat{u} optimal. Ceci signifie que le contrôle

optimal sur $[t, T]$ peut être décomposé en u_s^* , $s \in [t, t+h]$, et u_s^* , $s \in [t+h, T]$, cette dernière étant la politique optimale pour un problème démarré en $t+h$ dans l'état $X_{t+h}^{t,x}$. On a donc d'après (2.8) :

$$v(t, x) = \inf_u E \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, u_s) ds + v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) \right] \quad (2.9)$$

Nous dérivons maintenant, de manière formelle, l'équation de la programmation dynamique obtenue à partir de (2.9). Considérons le contrôle constant $u_s = \theta \in \mathcal{A}$ sur $[t, t+h]$. Alors d'après (2.9), on a

$$v(t, x) \leq E \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, \theta) ds + v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) \right] \quad (2.10)$$

En supposant que $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, on a par la formule d'Itô entre t et $t+h$:

$$\begin{aligned} v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) &= v(t, x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^\theta v \right)(s, X_s^{t,x}) ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \nabla_x v(s, X_s^{t,x})' \Gamma(X_s^{t,x}, \theta) dW_s \end{aligned}$$

où \mathcal{L}^θ est l'opérateur défini par :

$$\mathcal{L}^\theta w = \beta(x, \theta) \cdot \nabla_x w + \frac{1}{2} \text{tr}(\Gamma(x, \theta) \Gamma'(x, \theta) D_x^2 w).$$

En prenant l'espérance, on a :

$$E[v(t+h, X_{t+h}^{t,x})] = v(t, x) + E \left[\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^\theta v \right)(s, X_s^{t,x}) ds \right],$$

d'où en substituant dans (2.10)

$$0 \leq E \left[\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}^\theta v \right)(s, X_s^{t,x}) + f(s, X_s^{t,x}, \theta) ds \right].$$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on obtient :

$$0 \leq \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \mathcal{L}^\theta v(t, x) + f(t, x, \theta).$$

Ceci étant valable pour tout $\theta \in \mathcal{A}$, on a alors :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \inf_{\theta \in \mathcal{A}} \{ \mathcal{L}^\theta v(t, x) + f(t, x, \theta) \} \geq 0. \quad (2.11)$$

D'autre part, supposons que u^* est un contrôle optimal. Alors dans (2.9), on a :

$$v(t, x) = E \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^*, u_s^*) ds + v(t+h, X_{t+h}^*) \right],$$

où X^* est l'état du système solution de (2.1) partant de x en t avec le contrôle u^* . Par un argument similaire et avec des conditions de régularités sur v on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \mathcal{L}^{u^*} v(t, x) + f(t, x, u_t^*) = 0 \quad (2.12)$$

ce qui combiné avec (2.11) prouve que v satisfait :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \inf_{\theta \in \mathcal{A}} \{ \mathcal{L}^\theta v(t, x) + f(t, x, \theta) \} = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

On réécrit souvent cette EDP sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + H(t, x, \nabla_x v(t, x), D_x^2 v(t, x)) = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n \quad (2.14)$$

où pour $\forall (t, x, p, Q) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n$ (\mathcal{S}_n est l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques) :

$$H(t, x, p, Q) = \inf_{u \in \mathcal{A}} \left\{ f(t, x, u) + \beta(x, u) \cdot p + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u) Q_{ij} \right\}$$

cette fonction H est appelée Hamiltonien du problème de contrôle considéré. Et l'équation (2.14) est appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). A cette équation aux dérivées partielles, il faut ajouter la condition terminale:

$$v(T, x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.15)$$

qui résulte immédiatement de la définition (2.7) de la fonction v .

2.4 Théorème de vérification

Dans la section précédente on a montré que, sous certaines hypothèses, l'équation de Hamilton Jacobi Bellman est une EDP nécessairement satisfaite par la fonction valeur du problème de contrôle stochastique étudié. On s'intéresse maintenant à la réciproque de ce résultat.

Théorème 2.5. *Théorème de vérification (Horizon fini)*

Soit $w \in C^{1,2}([0, T[\times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0, T[\times \mathbb{R}^n)$ à croissance quadratique, i.e. il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$|w(t, x)| \leq C(1 + |x|^2)$$

a) Supposons que : $\forall (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + H(x, \nabla_x w(t, x), D_x^2 w(t, x)) \geq 0 \quad (2.16)$$

$$w(T, x) \leq g(x) \quad (2.17)$$

Alors $w \leq v$ sur $([0, T[\times \mathbb{R}^n$.

b) supposons de plus que $w(T, \cdot) = g$, et pour tout $(t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$ il existe $\hat{u}(t, x)$ mesurable à valeur dans \mathcal{A} réalisant le minimum de la fonction $u \mapsto L^u w(t, x)$ tel que :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + \inf_{u \in \mathcal{A}_t} \{L^u w(t, x)\} = 0$$

et l'EDS :

$$dX_t = \beta(X_t, \hat{u}(t, x)) dt + \Gamma(X_t, \hat{u}(t, x)) dW_t$$

admette une unique solution, notée \hat{X} , pour $t \leq s \leq T$ et pour chaque condition initiale $\hat{X}_t = x$ et $\hat{u}(s, \hat{X}_s) \in \mathcal{A}(t, x)$. Alors $w = v$ sur $[0, T[\times \mathbb{R}^n$ et \hat{u} est le contrôle optimal Markovien.

Démonstration.

a) Puisque $w \in (C^{1,2}[0, T[\times \mathbb{R}^n)$ on a pour tout $t \in [0, T[$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{A}(t, x)$, $s \in [t, T]$ et pour tout temps d'arrêt $\tau \geq t$, et par application de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} w(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t,x}) &= w(t, x) + \int_t^{s \wedge \tau} \frac{\partial w}{\partial t}(r, X_r^{t,x}) dr \\ &\quad + \int_t^{s \wedge \tau} w'(t, X_r^{t,x}) dX_r + \int_t^{s \wedge \tau} w''(t, X_r^{t,x}) \langle X_r, X_r \rangle \end{aligned}$$

après simplification, on trouve

$$\begin{aligned} w(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t,x}) &= w(t, x) + \int_t^{s \wedge \tau} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(r, X_r^{t,x}) + L^{u_r} w(t, X_r^{t,x}) \right) dr \\ &\quad + \int_t^{s \wedge \tau} \nabla_x w(t, X_r^{t,x})' \Gamma(X_r^{t,x}, u_r) dW \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} L^{u_r} w(t, X_r^{t,x}) &= \beta(X_r^{t,x}, u_r) \cdot \nabla_x w(X_r^{t,x}, u_r) \\ &\quad + \frac{1}{2} t r (\Gamma \Gamma'(X_r^{t,x}, u_r) D_x^2 w(X_r^{t,x}, u_r)) \end{aligned}$$

On choisit $\tau = \tau_n = \inf \left\{ r \geq t : \left| \nabla_x w(t, X_r^{t,x})' \Gamma(X_r^{t,x}, u_r) \right| \geq n \right\}$ en notant que $\tau_n \nearrow +\infty$ quand n tend vers l'infini. Donc $\nabla_x w(t, X_r^{t,x})' \Gamma(X_r^{t,x}, u_r)$ est bornée sur $[t, s \wedge \tau_n]$, en conséquence l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. D'où :

$$E \left[w(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t,x}) \right] = w(t, X_T^{t,z} Z_T^{t,z}) + E \left[\int_t^{s \wedge \tau} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, X_r^{t,x}) + L^{u_r} w(t, X_r^{t,x}) \right) dr \right]$$

Et d'après l'hypothèse (2.15):

$$E \left[w(s \wedge \tau_n, X_{s \wedge \tau_n}^{t,x}) \right] \geq w(t, x)$$

or

$$w(s \wedge \tau_n, X_{s \wedge \tau_n}^{t,x}) \leq C \left(1 + \sup_{s \in [0, T]} |X_s^{t,x}|^2 \right)$$

En appliquant le théorème de convergence dominée et en faisant tendre n vers l'infini, on trouve :

$$E \left[w(s, X_s^{t,x}) \right] \geq w(t, x)$$

Comme w est continue et bornée d'après (2.16) sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée, en faisant tendre s vers T :

$$w(t, x) \leq E \left[g(X_T^{t,x}) \right] = J(t, x; u)$$

or v est le plus grand des minorants de J , donc $w(t, x) \leq v(t, x)$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$.

b) On applique la formule d'Ito à $w\left(s, \hat{X}_{s \wedge \tau_n}^{t,x}\right)$ (après avoir localisé avec τ_n):

$$E\left[w\left(s, \hat{X}_s^{t,x}\right)\right] = w(t, x) + E\left[\int_t^s \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, \hat{X}_r^{t,x}) + L^{\hat{u}(t, \hat{X}_r^{t,x})}w(t, \hat{X}_r^{t,x})\right)dr\right]$$

or par définition de $\hat{u}(t, x)$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + \inf_{u \in \mathcal{A}_t} \{L^{\hat{u}(t,x)}w(t, x)\} = 0$$

d'où

$$E\left[w\left(s, \hat{X}_s^{t,x}\right)\right] = w(t, x)$$

En faisant tendre s vers T , on obtient ainsi :

$$w(t, x) = E\left[g\left(X_T^{t,x}\right)\right] = J(t, x; \hat{u})$$

Donc $w(t, x) = J(t, x; \hat{u}) \geq v(t, x)$, et d'après (a) $w = v$ avec \hat{u} comme contrôle optimal Markovien.

□

2.5 Application du modèle de volatilité stochastique

2.5.1 Le Modèle

Le modèle de Black et Scholes sert de référence à tous ceux qui manipulent des produits contingents

- Il est simple : adopter le modèle de Black et Scholes, c'est simplement supposer que les cours S sont à trajectoires continues et à accroissements relatifs indépendants et stationnaires.
- Il est maniable : il donne lieu à des formules fermées pour le prix des calls et des puts et pour les deltas correspondants, c'est-à-dire pour les quantités d'actifs risqués que doit contenir le portefeuille de couverture.

Cependant :

- Les données de marché font apparaître une dépendance en prix d'exercice de la volatilité implicite.

Ce phénomène est connu sous le nom de smile, car il arrive souvent que cette dépendance de la volatilité par rapport au strike ait la forme d'un sourire. Une manière naturelle d'étendre le modèle de Black et Scholes est d'autoriser la volatilité à être un processus stochastique gouverné par un deuxième bruit modélisé par un deuxième brownien \hat{Z} éventuellement corrélé à W le brownien du sous-jacent.

On suppose dans cette partie que l'incomplétude des marchés est due à la présence d'une volatilité stochastique. Nous nous plaçons sous les hypothèses qu'il n'y a ni de frais de transactions, ni taxes, ni limites de vente à découvert et que les taux d'intérêt sont nuls.

Nous considérons un portefeuille autofinçant constitué de deux actifs: l'un risqué et l'autre non risqué. Ce dernier sera supposé constant au cours du temps à cause de l'hypothèse de taux nuls. On notera u_t la quantité de titres risqués détenue par l'investisseur à la date t . La valeur du portefeuille est alors donnée par :

$$V_t = u_t S_t + B_t$$

Ce portefeuille étant autofinçant, la variation de sa valeur n'est due qu'à la variation des actifs (la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait de cash), on trouve donc :

$$dV_t = u_t dS_t$$

Pour la dynamique du cours du sous-jacent nous conservons l'écriture BS, mais la volatilité est désormais un processus aléatoire dépendant du temps et du hasard (W, \hat{Z}). Elle évolue selon un modèle de diffusion stochastique. On considère un modèle analogue à « Hull and White » (1987) et Wiggins(1987) :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ dV_t = \mu u_t S_t dt + \sigma_t u_t S_t dW_t \\ d\sigma_t = f(\sigma_t) dt + \kappa \sigma_t d\hat{Z}_t \end{cases}$$

Dans cette écriture :

- S représente le sous-jacent, S_t son cours à la date t ,
- μ est le rendement instantané, supposée constant,
- W est un mouvement brownien standard
- σ_t est la valeur à la date t de la volatilité du cours du sous-jacent ; elle mesure l'intensité du bruit $\sigma_t S_t dW_t$ auquel est soumis le cours du sous-jacent. La volatilité est elle-même un processus stochastique.
- la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

- \hat{Z} est un mouvement brownien standard éventuellement corrélé à W ; nous supposons dans la suite cette corrélation constante et nous la notons ρ , avec $\rho \in]-1; 1[$, de sorte que $d \langle W, \hat{Z} \rangle_t = \rho dt$. Si nous définissons Z_t par l'égalité $\hat{Z}_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t$, alors W et Z sont deux browniens indépendants.

On donne ci-dessous un exemple de trajectoires possibles pour les trajectoires de $(W; Z)$ et de $(W; \hat{Z})$, dans le cas $\rho = 0.5$ puis dans le cas $\rho = -0.5$. Dans les deux cas, on a utilisé les mêmes séries d'aléas.

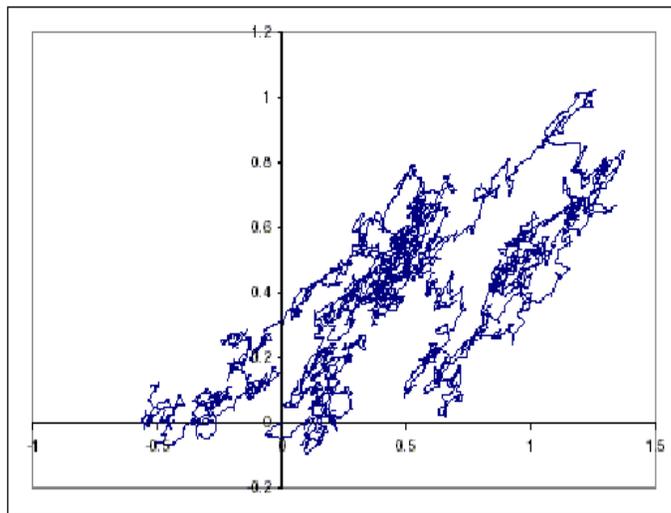


Figure 2.1. Une trajectoire de $(W; \hat{Z})$ entre $t=0$ et $t=1$. La corrélation ρ vaut 0.5.

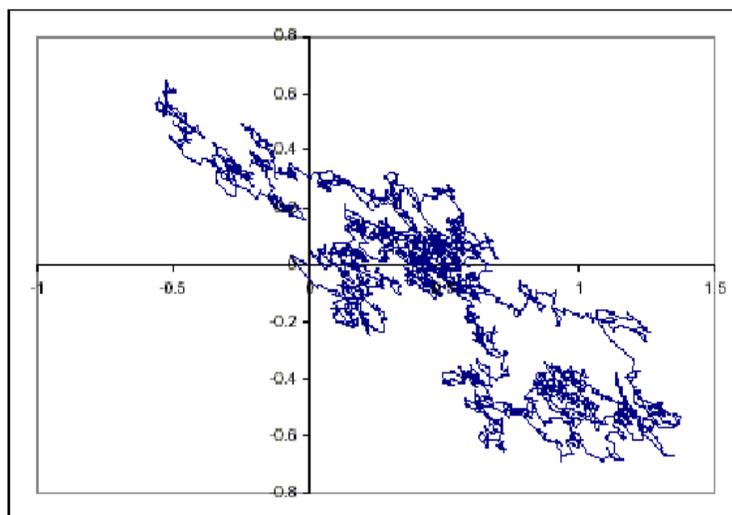


Figure 2.2. Une trajectoire de $(W; \hat{Z})$ entre $t=0$ et $t=1$. La corrélation ρ vaut -0.5 .

Nous nous plaçons sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, Z_s, 0 \leq s \leq t)$. Par exemple, on pourra considérer l'espace $\Omega = C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{R}^2 muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Wiener sur cette tribu. Dans ce cas, il faut voir un événement ponctuel w comme une trajectoire $t \mapsto (W_t(w), Z_t(w))$. Par ailleurs, la filtration \mathcal{F}_t représente l'information sur les deux mouvements browniens W et Z jusqu'à la date t ; c'est l'augmentation habituelle de la tribu engendrée par les ensembles de la forme $\{w \in \Omega \mid |W_s| \leq R_1, |Z_s| \leq R_2, 0 \leq s \leq t\}$.

Dans toute la suite, Nous nous plaçons sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Plus précisément, nous supposons l'existence d'une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) sous laquelle le prix des actifs actualisé est une martingale locale.

On considère le processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, $X_t = (S_t, V_t, \sigma_t)$, alors $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = \beta(X_t, u_t) dt + \Gamma(X_t, u_t) d\mathbf{Z}_t$$

avec :

$$\beta(X_t, u_t) = \begin{pmatrix} \mu S_t \\ \mu u_t S_t \\ f(\sigma_t) \end{pmatrix}, \Gamma(X_t, u_t) = \begin{pmatrix} \sigma_t S_t & 0 \\ \sigma_t u_t S_t & 0 \\ \rho \kappa \sigma_t & \kappa \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_t \end{pmatrix}, \mathbf{Z}_t = \begin{pmatrix} W_t \\ Z_t \end{pmatrix}$$

En prenant $g(X_T) = (V_T - F(S_T, \sigma_T))^2$, à partir des résultats précédents la fonction valeur v est solution de l'équation de HJB suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \inf_{u \in \mathbb{R}} \left[\mu S \frac{\partial v}{\partial S} + \mu u S \frac{\partial v}{\partial V} + f(\sigma) \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} \left(\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + u^2 \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial V^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \kappa^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} + 2u \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S \partial V} + 2\kappa \rho \sigma^2 S \frac{\partial^2 v}{\partial S \partial \sigma^2} + 2\kappa \rho u \sigma^2 S \frac{\partial^2 v}{\partial S \partial \sigma^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Ici, puisque la mesure de risque est quadratique, nous pouvons chercher la solution sous la forme :

$$v(t, x) = a(t, S_t, \sigma_t) \times (V_t - b(t, S_t, \sigma_t))^2 + c(t, S_t, \sigma_t) \quad (2.19)$$

pour simplifier, on notera a_t , b_t et c_t au lieu de $a(t, S_t, \sigma_t)$, $b(t, S_t, \sigma_t)$ et $c(t, S_t, \sigma_t)$.

Dans ce cas particulier, nous pouvons exprimer u_t^* la stratégie optimale de réplcation en fonction des dérivées partielles de v pour tout couple (t, x) fixé au préalable :

$$u_t^* = \frac{\partial b_t}{\partial S} + \frac{\kappa \rho}{S_t} \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} - (V_t - b_t) \left(\frac{\mu}{\sigma_t^2 S_t} + \frac{1}{a_t} \frac{\partial a_t}{\partial S} + \frac{\kappa \rho}{S_t a_t} \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \right) \quad (2.20)$$

En reportant dans (2.18), nous parvenons aux trois équations à dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_t}{\partial t} &= \frac{\mu^2}{\sigma_t^2} a_t - (f(\sigma_t) - 2\mu\kappa\rho) \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} + \frac{1}{a_t} \kappa^2 \rho^2 \sigma_t^2 \left(\frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 a_t}{\partial \sigma^2} + \mu S_t \frac{\partial a_t}{\partial S} \\
&\quad + \frac{1}{a_t} \sigma_t^2 S_t^2 \left(\frac{\partial a_t}{\partial S} \right)^2 - \frac{\sigma_t^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 a_t}{\partial S^2} - \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 a_t}{\partial S \partial \sigma} + \frac{2}{a_t} \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial a_t}{\partial S} \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \\
-\frac{\partial b_t}{\partial t} &= (f(\sigma_t) - 2\mu\kappa\rho) \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 b_t}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma_t^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 b_t}{\partial S^2} + \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 b_t}{\partial S \partial \sigma} \\
&\quad + (1 - \rho^2) \frac{1}{a_t} \kappa^2 \sigma_t^2 \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} \\
-\frac{\partial c_t}{\partial t} &= f(\sigma_t) \frac{\partial c_t}{\partial \sigma} + \mu S_t \frac{\partial c_t}{\partial V} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial \sigma^2} + \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_t}{\partial S \partial \sigma} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial S^2} \\
&\quad + (1 - \rho^2) \frac{1}{a_t} \kappa^2 \sigma_t^2 \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \frac{\partial b_t}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites :

$$a(T, S_T, \sigma_T) = 1, \quad b(T, S_T, \sigma_T) = F(S_T, \sigma_T), \quad c(T, S_T, \sigma_T) = 0.$$

Ces résultats s'étendent aisément lorsqu'on tient compte du taux sans risque r , on aboutit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_t}{\partial t} &= \frac{(\mu - \mathbf{r})^2}{\sigma_t^2} a_t - (f(\sigma_t) - 2(\mu - \mathbf{r})\mu\kappa\rho) \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} + \frac{1}{a_t} \kappa^2 \rho^2 \sigma_t^2 \left(\frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 a_t}{\partial \sigma^2} \\
&\quad + \mu S_t \frac{\partial a_t}{\partial S} + \frac{1}{a_t} \sigma_t^2 S_t^2 \left(\frac{\partial a_t}{\partial S} \right)^2 - \frac{\sigma_t^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 a_t}{\partial S^2} - \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 a_t}{\partial S \partial \sigma} \\
&\quad + \frac{2}{a_t} \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial a_t}{\partial S} \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} + 2\mathbf{r} a_t \\
-\frac{\partial b_t}{\partial t} &= \mathbf{r} S_t \frac{\partial b_t}{\partial S} + (f(\sigma_t) - 2(\mu - \mathbf{r})\mu\kappa\rho) \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 b_t}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma_t^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 b_t}{\partial S^2} + \\
&\quad + \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 b_t}{\partial S \partial \sigma} + (1 - \rho^2) \frac{1}{a_t} \kappa^2 \sigma_t^2 \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} - \mathbf{r} b_t \\
-\frac{\partial c_t}{\partial t} &= f(\sigma_t) \frac{\partial c_t}{\partial \sigma} + \mu S_t \frac{\partial c_t}{\partial V} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial \sigma^2} + \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_t}{\partial S \partial \sigma} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial S^2} \\
&\quad + (1 - \rho^2) \frac{1}{a_t} \kappa^2 \sigma_t^2 \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \frac{\partial b_t}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

avec les mêmes conditions aux limites.

Dans le cas où a est indépendant du sous-jacent et le taux sans risque r est nul, on voit que l'expression (2.19) est la forme de la solution proposée par l'article (D. Bertsimas [27]). En tenant compte de cette forme particulière, on trouve exactement les résultats de l'article :

$$\frac{\partial a_t}{\partial t} = \frac{\mu}{\sigma_t^2} a_t - (f(\sigma_t) - 2\mu\kappa\rho) \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} + \frac{1}{a_t} \kappa^2 \rho^2 \sigma_t^2 \left(\frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 a_t}{\partial \sigma^2} \quad (2.21)$$

$$-\frac{\partial b_t}{\partial t} = (f(\sigma_t) - 2\mu\kappa\rho) \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 b_t}{\partial \sigma^2} + \frac{\sigma_t^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 b_t}{\partial S^2} + \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 b_t}{\partial S \partial \sigma} + (1 - \rho^2) \frac{1}{a_t} \kappa^2 \sigma_t^2 \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} \quad (2.22)$$

$$-\frac{\partial c_t}{\partial t} = f(\sigma_t) \frac{\partial c_t}{\partial \sigma} + \mu S_t \frac{\partial c_t}{\partial V} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial \sigma^2} + \kappa \rho \sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c_t}{\partial S \partial \sigma} + \frac{\kappa^2 \sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 c_t}{\partial S^2} + (1 - \rho^2) \frac{1}{a_t} \kappa^2 \sigma_t^2 \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} \quad (2.23)$$

et

$$u_t^* = \frac{\partial b_t}{\partial S} + \frac{\kappa \rho}{S_t} \frac{\partial b_t}{\partial \sigma} - (V_t - b_t) \left(\frac{\mu}{\sigma_t^2 S_t} + \frac{\kappa \rho}{S_t a_t} \frac{\partial a_t}{\partial \sigma} \right)$$

Remarque 2.6. La réplication parfaite, au cas des marchés complets, est possible lorsque l'équation suivante est satisfaite : $\kappa^2(\rho^2 - 1) = 0$, ce qui correspond à l'une des situations suivantes :

- $\kappa = 0$, La volatilité est une fonction déterministe du temps, l'hypothèse du modèle Black & Scholes.
- $\rho^2 = 1$, Les mouvements Browniens régissant le sous-jacent et sa volatilité sont parfaitement corrélés. Le sous-jacent lui seul est suffisant pour répliquer le « payoff ».

Chapitre 3

Modèle de ” Regime Switching ” avec sauts

En économie et en finance, le comportement des agents diffère suivant que l'on se trouve en période d'expansion ou de récession. La consommation des ménages est sensible à l'activité économique. Il en est de même de l'investissement des entreprises, et l'on sait bien que la croissance permet une diminution du chômage alors que la tendance s'inverse dès qu'une récession s'annonce. Les investissements des entreprises vont ainsi être sensibles aux comportements de certains indices économiques. De même les marchés vont réagir différemment en période de crise, entraînant une augmentation de la volatilité des prix des actifs.

Les modèles à changements de régimes ont été introduits afin de prendre en compte l'existence de changements structurels non visibles à l'oeil nu dans les données économiques étudiées.

3.1 Formulation

Dans cette partie, on suppose que le marché peut être décrit par plusieurs ” régimes ” (ou encore par des ” modes ”) reflétant l'état de l'économie, le comportement général des investisseurs et leurs tendances. Pour chacun de ces régimes, le sous-jacent est caractérisé par un niveau de volatilité et de rendement donné. Avec en plus, et a priori des discontinuités du prix du sous-jacent à chaque fois qu'une transition d'un régime à un autre a lieu.

Dans l'étude qui suit, le cadre de départ est un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) sur lequel le prix S_t subit des sauts à chaque fois qu'il y'a un changement de régime. On suppose que le nombre de régime possible du marché est fini, on le notera N . Ces différents régimes seront modélisés par une chaîne de Markov $Z = \{Z_t\}$ continue et \mathcal{F}_t^Z -adapté^{3.1} qui prend ses valeurs dans l'espace discret $\mathcal{E} = \{e_1,$

3.1. $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leq t\}$ est une filtration complète continue à droite engendrée par le processus X .

$e_2, \dots, e_M\}$ où e_i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de \mathbb{R}^M . On supposera que cette chaîne est homogène. La transition d'un régime à un autre est décrit par la distribution de probabilité $p_t^i = P(Z_t = e_i)$, $0 \leq i \leq M$. Pour une Q-matrice ^{3.2} $\Pi = (\pi_{ij})_{1 \leq i, j \leq M}$, on suppose que $p_t = (p_t^1, p_t^2, \dots, p_t^M)'$ vérifie l'équation de Kolmogorov

$$\frac{dp_t}{dt} = \Pi p_t \quad (3.1)$$

La matrice de transition fondamentale associée à Π est donnée par $\Phi(t, s)$,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi(t, s)}{dt} &= \Pi \Phi(t, s), & \Phi(s, s) &= I \\ \frac{d\Phi(t, s)}{ds} &= -\Phi(t, s) \Pi, & \Phi(t, t) &= I \end{aligned} \quad (3.2)$$

On note $Z_{s,t}^x$ l'état du système à l'instant t ($t \geq s$), partant de l'état x à la date s . Alors $E[Z_{s,t}^x] = E_{s,x}[Z_t] = \Phi(t, s)x$, on trouve un résultat basique:

Lemme 3.1. $M_t = Z_t - Z_0 - \int_0^t \Pi Z_{s-} ds$ est une \mathcal{F}_t^Z -martingale.

Démonstration.

On suppose que $0 \leq s \leq t$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s^Z] &= E\left[Z_t - Z_s - \int_s^t \Pi Z_{r-} dr | \mathcal{F}_s^Z\right] \\ &= E\left[Z_t - Z_s - \int_s^t \Pi Z_{r-} dr | Z_s\right] \\ &= E\left[Z_t - Z_s - \int_s^t \Pi Z_r dr | Z_s\right] \end{aligned}$$

puisque $Z_r = Z_{r-} = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} Z_{r-\varepsilon}$ pour tout $\omega \in \Omega$. □

Finalement, on déduit que Z_t est un processus qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \Pi Z_s ds + M_t$$

3.2. $\Pi = (\pi_{ij})_{1 \leq i, j \leq M}$ est une Q-matrice si Π satisfait $\sum_{i=1}^M \pi_{ij} = 0$, $\pi_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et $\pi_{jj} \leq 0$.

où $M = \{M_t\}$ est une martingale telle que $\sup_{t \leq T} E_0[|M_t|^2] \leq +\infty$

Pour x et y deux vecteurs colonnes dans \mathbb{R}^M , on note $\langle x, y \rangle = x'y$ leur produit scalaire. Soit $0 \leq i, j \leq M$ avec $i \neq j$, alors

$$\begin{aligned} \langle Z_{s-}, e_i \rangle e'_j dZ_s &= \langle Z_{s-}, e_i \rangle e'_j \Delta Z_s \\ &= \langle Z_{s-}, e_i \rangle e'_j (Z_s - Z_{s-}) \\ &= I(Z_{s-} = e_i, Z_s = e_j). \end{aligned}$$

Considérons la martingale

$$M_t(i, j) = \int_0^t \langle Z_{s-}, e_i \rangle e'_j dM_s.$$

alors

$$M_t(i, j) = \int_0^t \langle Z_{s-}, e_i \rangle e'_j dZ_s - \int_0^t \langle Z_{s-}, e_i \rangle e'_j \Pi Z_{s-} ds$$

et on note $N(i, j) = \{N_t(i, j)\}$ le nombre de sauts du processus Z de e_i à e_j à la date t (avec $i \neq j$), on a alors (voir [15])

$$\begin{aligned} M_t(i, j) &= N_t(i, j) - \int_0^t \langle Z_{s-}, e_i \rangle \pi_{ji} ds \\ &= N_t(i, j) - \int_0^t \langle Z_s, e_i \rangle \pi_{ji} ds, \end{aligned}$$

en effet, pour tout $s \in [0, t]$, $Z_{s-} = Z_s$ pour tout $\omega \in \Omega$, sauf pour un ensemble infini dénombrable. Donc pour $i \neq j$,

$$N_t(i, j) = \int_0^t e'_i Z_s \pi_{ji} ds + M_t(i, j)$$

D'autre part, la composante martingale continue du prix est obtenue à partir d'un processus de Wiener W_t supposé indépendant de N et l'on se donnera comme filtration \mathcal{F}_t la filtration augmentée de celle engendrée par W et N .

On considère un portefeuille autofinçant de valeur instantanée V_t , constitué de S_t et d'un actif sans risque. Notons u_t le nombre des actions détenues à la date t . Pour simplifier, on se restreint au cas où les éléments de \mathcal{A} , l'ensemble des stratégies admissible de portefeuille, prennent leurs valeurs dans un compact K . Cet ensemble permettrait de tenir compte des contraintes de portefeuille ou certaines incomplétude du marché. A taux d'intérêt nul, le système peut être décrit par :

$$\begin{cases} dS_t = \mu(Z_t)S_t dt + \sigma(Z_t)S_t dW_t + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{ij}(S_{t-}) dN_t(i, j) \\ dV_t = u_t dS_t \end{cases} \quad (3.3)$$

où l'on note $\gamma_{ij}(S_{t-})$ la taille de saut de e_i à e_j . le système (3.3) peut être réécrit comme suit :

$$dX_t = \beta(X_t, u_t, Z_t) dt + \Gamma(X_t, u_t, Z_t) dW_t + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{ij}(X_{t-}) U_t dN_t(i, j) \quad (3.4)$$

avec
$$X_t = \begin{pmatrix} S_t \\ V_t \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{pmatrix} 1 \\ u_t \end{pmatrix},$$

$$\beta(X_t, u_t, Z_t) = \mu(Z_t) S_t U_t, \quad \Gamma(X_t, u_t, Z_t) = \sigma(Z_t) S_t U_t.$$

Pour toute condition initiale (X_0, Z_0) , le système (3.4) admet une solution unique (X_t, Z_t) sous les conditions suivantes :

- $\beta: \mathbb{R}^2 \times \mathcal{A} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\Gamma: \mathbb{R}^2 \times \mathcal{A} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 1}$ sont des fonctions mesurables, vérifiant la condition de croissance linéaire: $\forall i \in \{1, \dots, M\}, \exists C_i > 0$, tel que $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$

$$|\beta(x, u, e_i)| + |\Gamma(x, u, e_i)| \leq C_i(1 + |x| + |u|)$$

ainsi que la condition de Lipchitz en x , uniforme en u : $\forall i \in \{1, \dots, M\}, \exists L_i > 0$, tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall u \in \mathcal{A}$

$$|\beta(x, u, e_i) - \beta(y, u, e_i)| + |\Gamma(x, u, e_i) - \Gamma(y, u, e_i)| \leq L_i |x - y|$$

- $\forall u \in \mathcal{A}$,

$$\int_0^T \left| \sum_{i,j, i \neq j} \gamma_{ij}(X_{s-}) U_s dN_s(i, j) \right| < +\infty$$

En effet :

- Pour tout $i \in \{1, \dots, M\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall u \in \mathcal{A}$, on a:

$$|\beta(x, u, e_i) - \beta(y, u, e_i)| \leq \max_{1 \leq i \leq M} \mu_i |x - y|;$$

– Pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall u \times \mathcal{A}$, on a :

$$|\beta(x, u, e_i)| + |\Gamma(x, u, e_i)| \leq \max_{1 \leq i \leq M} (|\mu_i| + |\sigma_i|)(1 + |x| + |u|)$$

Cette solution satisfait aussi la propriété de Markov.

Ainsi, on peut appliquer, à quelques modification près, la théorie du contrôle stochastique au processus de Markov solution de (3.4).

3.2 Application du contrôle stochastique optimal

Le critère J à optimiser sur l'intervalle de temps fini $0 \leq t \leq T$ est :

$$J(t, x, z; u) = E \left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, u_s, Z_s^{t,z}) ds + g(X_T^{t,x}, Z_T^{t,z}) \right]$$

avec $(Z_s^{t,z})_{s \geq t}$ le processus Markov associé à Z_s , partant de z à l'instant t , $f: [0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{A} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables, g bornée inférieurement et à croissance quadratique :

$$\exists C > 0: \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{E} \quad |g(x, z)| \leq C(1 + |x|^2)$$

On cherche alors à déterminer la fonction valeur $v \in C^{1,2}([0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E})$ associée au programme de minimisation du risque de l'investisseur et définie par :

$$v(t, x, z) = \inf_{u \in \mathcal{A}_t} J(t, x, z; u) \quad (3.5)$$

pour tout $\forall (t, x, z) \in [0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}$.

On se place dans le cas où la chaîne de Markov Z serait observable par l'investisseur. En d'autres termes, A chaque instant t , l'investisseur sait dans quel régime i se trouve le marché et connaît donc les paramètres correspondant μ_i et σ_i . Par contre, On ne peut pas prévoir l'instant de transition. Donc, si on note \mathcal{F}_t^Z la filtration engendrée par la chaîne de Markov, la filtration totale $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^Z$ résume tout le passé et toute l'information disponible jusqu'à l'instant t . Ainsi, dans la mesure où l'optimisation se fait dans le cadre d'information complète, le principe de programmation dynamique reste toujours valable même en modulant le processus d'état par la chaîne de Markov observable. En conséquence, on a le théorème suivant :

Théorème 3.2.

Soit $(x, z) \in \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}$. Pour tout temps d'arrêt $\tau \in [0, T[$ et pour tout régime i à l'instant t , on a :

$$v(t, x, z) = \inf_{u \in \mathcal{A}_t} \left\{ E \left[\int_t^\tau f(s, X_s^{t,x}, \theta, Z_s^{t,z}) ds + v(s, X_\tau^{t,x}, Z_\tau^{t,z}) \right] \right\}. \quad (3.6)$$

Ce résultat représente la base de la théorie du contrôle optimal : toute politique optimale est composée de sous-politiques optimales. En d'autres termes, si nous connaissons le contrôle optimal à partir de τ , il suffit de déterminer la politique optimale entre t et τ pour avoir la politique optimale sur $[t, T]$.

A partir de ce résultat, on prend X le processus d'état décrit dans le paragraphe précédent. L'utilisation du principe de programmation dynamique implique l'équation de la programmation dynamique suivante appelée équation d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB) :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x, z) + H(x, \nabla_x v(t, x, z), D_x^2 v(t, x, z)) = 0 \\ v(T, x, z) = g(x, z) \end{cases} \quad (3.7)$$

avec

$$H(x, \nabla_x v(t, x, z), D_x^2 v(t, x, z)) = \inf_{u \in \mathcal{A}_t} \{L^u v(t, x, z) + f(t, x, u, z)\}$$

où le générateur L^u de (X_t, Z_t) est défini par : $(\exists i: Z_t = e_i)$

$$\begin{aligned} L^u v(t, x, e_i) &= \beta(x, u, e_i) \cdot \nabla_x v(t, x, e_i) + \frac{1}{2} tr(\Gamma \Gamma'(x, u, e_i) D_x^2 v(t, x, e_i)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^M \pi_{ji} [v(t, x + \gamma_{ij}(x), e_j) - v(t, x, e_i)] \end{aligned}$$

Pour des raisons techniques, nous considérerons des processus progressivement mesurables et même adaptés tel que

$$E \left[\int_0^t [u_s]^2 ds \right] \prec + \infty.$$

Pour finir dans notre cas nous aurons simplement

$$J(t, x, z; u) = E[g(X_T^{t,x}, Z_T^{t,z})]$$

ainsi, en considérant les différents régimes de marché, on aboutit à un système de M équations à dérivées partielles couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x, e_i) + \inf_{u \in \mathcal{A}_t} \{L^u v(t, x, e_i)\} = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^2 \\ v(T, x, e_i) = g(x, e_i) \end{cases} \quad (3.8)$$

Le résultat précédent établit que l'équation de Hamilton Jacobi Bellman (3.7) est une EDP nécessairement satisfaite par la fonction valeur $v \in C^{1,2}([0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E})$ décrit par (3.5). On donne dans ce paragraphe une réciproque à ce résultat, il s'agit du théorème de vérification suivant.

Théorème 3.3. *Théorème de vérification*

Soit $w \in C^{1,2}([0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}) \cap C^0([0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E})$ à croissance quadratique, i.e. il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$|w(t, x, z)| \leq C(1 + |x|^2)$$

a) Supposons que : $\forall (t, x, z) \in [0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x, z) + H(x, \nabla_x w(t, x, z), D_x^2 w(t, x, z)) \geq 0 \quad (3.9)$$

$$w(T, x, z) \leq g(x, z) \quad (3.10)$$

Alors $w(t, x, z) \leq v(t, x, z)$ sur $(t, x, z) \in [0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}$

b) supposons de plus que $w(T, \cdot, \cdot) = g$, et pour tout $(t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^2$ il existe $\hat{u}(t, x)$ mesurable à valeur dans \mathcal{A} réalisant le minimum de la fonction $u \mapsto L^u w(t, x, z)$ tel que :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x, z) + \inf_{u \in \mathcal{A}_t} \{L^u w(t, x, e_i)\} = 0$$

et l'EDS :

$$\begin{aligned} dX_t &= \beta(X_t, \hat{u}(t, x), Z_t) dt + \Gamma(X_t, \hat{u}(t, x), Z_t) dW_t \\ &+ \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \gamma_{ij}(X_{t-}) \hat{U}(t, x) dN_t(i, j) \end{aligned}$$

admette une unique solution, notée \hat{X} , pour $t \leq s \leq T$ et pour chaque condition initiale $\hat{X}_t = x$ et $\hat{u}(s, \hat{X}_s) \in \mathcal{A}(t, x)$. Alors $w(t, x, z) = v(t, x, z)$ sur $[0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}$ et \hat{u} est le contrôle optimal Markovien.

Démonstration.

a) Puisque $w \in (C^{1,2}[0, T[\times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E})$ on a pour tout $t \in [0, T[$, $x \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathcal{E}$, $u \in \mathcal{A}(t, x)$, $s \in [t, T]$ et pour tout temps d'arrêt $\tau \geq t$, et par application de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} w(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t,x}, Z_{s \wedge \tau}^{t,z}) &= w(t, x, z) + \int_t^{s \wedge \tau} \frac{\partial w}{\partial t}(r, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) dr \\ &+ \int_t^{s \wedge \tau} w'(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) dX_r + \int_t^{s \wedge \tau} w''(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) \langle X_r, X_r \rangle \\ &+ \sum_{1 \leq r \leq s \wedge \tau} (w(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) - w(t, X_{r-}^{t,x}, Z_{r-}^{t,z}) - w'(t, X_{r-}^{t,x}, Z_{r-}^{t,z}) \Delta X_r). \end{aligned}$$

après simplification, on trouve

$$\begin{aligned}
& w(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t,x}, Z_{s \wedge \tau}^{t,z}) = w(t, x, z) \\
& + \int_t^{s \wedge \tau} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(r, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) + L^{u_r} w(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) \right) dr \\
& + \int_t^{s \wedge \tau} \nabla_x w(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z})' \Gamma(X_r^{t,x}, u_r, Z_r^{t,z}) dW \\
& + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_t^{s \wedge \tau} \left(w(r, X_{r-}^{t,x} + \gamma_{ij}(X_{r-}^{t,x}), Z_r^{t,z}) - w(r, X_{r-}^{t,x}, Z_r^{t,z}) \right) dM(i, j)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
& L^{u_r} w(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) = \beta(X_r^{t,x}, u_r, Z_r^{t,z}) \cdot \nabla_x w(X_r^{t,x}, u_r, Z_r^{t,z}) \\
& + \frac{1}{2} t r (\Gamma \Gamma'(X_r^{t,x}, u_r, Z_r^{t,z}) D_x^2 w(X_r^{t,x}, u_r, Z_r^{t,z})) \\
& + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} w(t, X_{r-}^{t,x} + \gamma_{ij}(X_{r-}^{t,x}), Z_r^{t,z}) - w(t, X_{r-}^{t,x}, Z_r^{t,z}) \Big] \pi_{ji} e_i' Z_{r-}^{t,z}
\end{aligned}$$

On choisit $\tau = \tau_n = \inf \left\{ r \geq t : \left| \nabla_x w(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z})' \Gamma(X_r^{t,x}, u_r, Z_r^{t,z}) \right| \geq n \right\}$ (on a $\tau_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$). Donc $\nabla_x w(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z})' \Gamma(X_r^{t,x}, u_r, Z_r^{t,z})$ est bornée sur $[t, s \wedge \tau_n]$, en conséquence l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle. D'où :

$$\begin{aligned}
& E[w(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t,x}, Z_{s \wedge \tau}^{t,z})] = w(t, x, z) \\
& + E\left[\int_t^{s \wedge \tau} \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) + L^{u_r} w(t, X_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) \right) dr \right]
\end{aligned}$$

Et d'après l'hypothèse (3.9):

$$E[w(s \wedge \tau_n, X_{s \wedge \tau_n}^{t,x}, Z_{s \wedge \tau_n}^{t,z})] \geq w(t, x, z)$$

or

$$w(s \wedge \tau_n, X_{s \wedge \tau_n}^{t,x}, Z_{s \wedge \tau_n}^{t,z}) \leq C \left(1 + \sup_{s \in [0, T]} |X_s^{t,x}|^2 \right)$$

En appliquant le théorème de convergence dominée et en faisant tendre n vers l'infini, on trouve :

$$E[w(s, X_s^{t,x}, Z_s^{t,z})] \geq w(t, x, z)$$

Comme w est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}$, en faisant tendre s vers T , on a par le théorème de convergence dominée et on utilisant (3.10) :

$$w(t, x, z) \leq E[g(X_T^{t,x}, Z_T^{t,z})] = J(t, x, z; u)$$

or v est le plus grand des minorants de J , donc $w(t, x, z) \leq v(t, x, z)$ pour tout $(t, x, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}$.

- b) On applique la formule d'Ito à $w(s, \hat{X}_{s \wedge \tau_n}^{t,x}, \hat{Z}_{s \wedge \tau_n}^{t,z})$ (après avoir localisé avec τ_n):

$$E\left[w\left(s, \hat{X}_s^{t,x}, Z_s^{t,z}\right)\right] = w(t, x, z) \\ + E\left[\int_t^s \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t, \hat{X}_r^{t,x}, Z_r^{t,z}) + L^{\hat{u}(t, \hat{X}_r^{t,x})}w(t, \hat{X}_r^{t,x}, Z_r^{t,z})\right) dr\right]$$

or par définition de $\hat{u}(t, x)$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x, z) + \inf_{u \in \mathcal{A}_t} \{L^{\hat{u}(t,x)}w(t, x, e_i)\} = 0$$

d'où

$$E\left[w\left(s, \hat{X}_s^{t,x}, Z_s^{t,z}\right)\right] = w(t, x, z)$$

En faisant tendre s vers T , on obtient ainsi :

$$w(t, x, z) = E[g(X_T^{t,x}, Z_T^{t,z})] = J(t, x, z; \hat{u})$$

Donc $w(t, x, z) = J(t, x, z; \hat{u}) \geq v(t, x, z)$, et d'après (a) $w = v$ avec \hat{u} comme contrôle optimal Markovien. \square

3.3 Résolution numérique

Passons maintenant à la résolution numérique de l'équation HJB, qui se résume à trois grandes étapes :

1. La discrétisation du problème, (c'est à dire le choix des points de collocation sur lesquels sera approximé l'équation différentielle ainsi que le type d'approximation numérique des dérivées en ces mêmes points) par différences finies généralisées. On obtient ainsi, un système linéaire liant les valeurs nodales entre elles.
2. La prise en compte des conditions aux limites du problème : Au même titre que celles-ci complètent l'équation différentielle, leurs approximations numériques, injectées dans le système linéaire (relatif aux valeurs nodales) complètent ce dernier.
3. La résolution du système linéaire par la méthode d'itération sur les politiques, ou l'algorithme de "splitting", qui consiste à alterner deux étapes :
 - i. Une étape de calcul du contrôle optimal u en fonction de la fonction valeur v déjà calculée, ceci en minimisant le second membre de l'équation Hamilton Jacobi Bellman.
 - ii. Une étape de résolution de l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation Hamilton Jacobi Bellman, le contrôle optimal réel par le contrôle précédemment calculé.

Ouverture

La résolution de l'équation HJB par les méthodes usuelles de différences finies n'est pas très efficace, à cause de la forte instabilité de leur schéma. Ces dernières ne sont monotones, et donc valides, que si la matrice de covariance mise à l'échelle est à diagonale dominante. Afin de remédier à ce problème, il existe plusieurs méthodes qui sont en cours de développement. Parmi ces méthodes la méthode DFG qui sera exposée dans la section suivante, l'idée principale de cette méthode est de se ramener à schéma monotone en approchant la matrice Γ' par une matrice semi-définie positive à diagonale dominante. En effet, pour un noeud i donné, on note \mathcal{S}_i l'ensemble des points voisins qui interviennent dans le schéma d'approximations. On cherche donc à déterminer le système quadratique suivant :

$$\inf_{\alpha_k \geq 0} \left\| \Gamma \Gamma'(t, i, u) - \sum_{1 \leq k \leq |\mathcal{S}_i|} \alpha_k(t, i, u) \xi_k \xi_k' \right\|$$

où les ξ_k désignent les points de \mathcal{S}_i . Grâce à une telle approximation, on est amené à travailler localement dans un cadre unidirectionnel. Cette méthode assure la convergence et la consistance du schéma.

D'autres méthodes alternatives sont : L'utilisation des schémas implicites et des méthodes de splitting afin d'éviter l'inversion matricielle; Schéma Lax-Friedrichs local " LLF "; Méthode de décomposition de domaine par la résolution de l'inégalité quasi-variationnelle "Equivalent QVI ".

3.3.1 Différences finies généralisées (DFG)

Pourquoi utilise-t-on les DFG ?

On considère un maillage G^h uniforme de \mathbb{R}^2 ; On choisit une numérotation des sommets notés de gauche à droite ; le pas du maillage sera noté $h = (h_1, h_2)$; on note $k = (k_1, k_2)$ élément de \mathbb{Z}^2 les coordonnées associée au point $x_k \in \mathbb{R}^2$ de la forme :

$$x_k = (k_1 h_1, k_2 h_2).$$

La discrétisation de l'équation HJB est équivalente à l'approximation du processus d'état X par une chaîne de Markov discrète $\{X_q^h\}_{1 \leq q \leq N}$ ^{3.3}. On se ramène ainsi d'un problème de contrôle de processus markovien continu à celui du contrôle d'une chaîne de Markov discrète. Cette approximation doit obéir aux critères de consistance (locale) (B,Z,[10]) suivants:

3.3. X_q^h l'état de la chaîne de Markov à la date q , N est le nombre de pas de temps.

$$\begin{aligned}
E_{k,q}^{h,u}[X_{q+1}^h - x_k] &= \Delta t^h \beta(x_k, u, r) + o(\Delta t^h), \\
\text{Var}_{k,q}^{h,u}[X_{q+1}^h - x_k] &= 2\Delta t^h a(x_k, u, r) + o(\Delta t^h), \\
\lim_{\Delta t^h \rightarrow 0} \sup_q [X_{q+1}^h - X_q^h] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

avec :

- $E_{k,q}^{h,u}$ l'espérance conditionnelle de X_{q+1}^h sachant que $X_q^h = x_k$, avec le contrôle u ,
- le pas de discrétisation temporelle $\Delta t^h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$,
- r le numéro de régime, dans cette partie, on suppose que le marché peut être décrit par deux régime .

Ces conditions permettent d'imposer des relations entre les probabilités de transition $p^h(x, y|u, r)$ de la chaîne $\{X_q^h\}_{1 \leq q \leq N}$, qui doivent par ailleurs être positives et de somme égale à 1. Une fois ces probabilités définies, on a à résoudre le système suivant ^{3.4} :

$$\begin{aligned}
v_h(t, x_k, r) = \min_{u \in \mathcal{A}_t} \left\{ \Delta t^h f(t, x_k, u, r) + \Delta t^h \pi_{sr} v_h(t, x_k + \gamma_{rs}, s) \right. \\
\left. + \sum_{y \in G^h} p^h(x_k, y|u, r) v_h(t, y, r) \right\}
\end{aligned}$$

avec $r, s \in \{1, 2\}$, on montre que la solution de ce problème discret converge uniformément vers l'unique solution de l'équation HJB, quand $h \rightarrow 0$, si les conditions de "consistance locale" sont vérifiées; voir Kushner and Dupuis ([26], p 71).

Lorsqu'on utilise la méthode des différences finies "classiques" pour la discrétisation de HJB, on prouve que ce schéma ne peut être interprété comme une approximation consistante^{3.5} par une chaîne de Markov que si la matrice $a^h(r)$, de terme général $a_{ij}^h(r) = \frac{a_{ij}(r)}{h_i h_j}$, est à diagonale dominante^{3.6}. En effet, on peut utiliser la discrétisation suivante :

- Pour la dérivée temporelle :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_q, x_k, r) \approx \frac{v_k^q - v_k^{q-1}}{\Delta t^h}$$

- Pour la dérivée première en espace :

3.4. c'est la version discrète du principe de programmation dynamique.

3.5. Il existe d'autres conditions qu'on ne va pas discuter ici.

3.6. Une matrice a est dite à diagonale dominante si , $\forall i, |a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(t_q, x_k, r) \approx (D_k^u v_k^q)_i = \begin{cases} \frac{v_{k+e_i}^q - v_k^q}{h_i} & \text{si } \beta_i(x_k, u, r) \geq 0; \\ \frac{v_k^q - v_{k-e_i}^q}{h_i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour la dérivée seconde en espace :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(t_q, x_k, r) \approx \frac{v_{k+e_i}^q - 2v_k^q + v_{k-e_i}^q}{h_i^2} = D_{ii} v_k^q$$

- Pour la dérivée croisée en espace :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t_q, x_k, r) \approx \begin{cases} D_{ij}^+ v_k^q & \text{si } a_{ij} \geq 0; \\ D_{ij}^- v_k^q & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec

$$D_{ij}^+ v_k^q = \frac{2v_k^q + v_{k+e_i+e_j}^q + v_{k-e_i-e_j}^q - v_{k+e_i}^q - v_{k-e_i}^q - v_{k+e_j}^q - v_{k-e_j}^q}{2h_i h_j}$$

$$D_{ij}^- v_k^q = \frac{-2v_k^q - v_{k+e_i-e_j}^q - v_{k-e_i+e_j}^q + v_{k+e_i}^q + v_{k-e_i}^q + v_{k+e_j}^q + v_{k-e_j}^q}{2h_i h_j}$$

Note 3.4. Pour simplifier l'écriture, on note : $\beta_i^r(x_k, u, r) = \beta_i(x_k, u)$; $a_{ij}^r(x_k, u) = a_{ij}(x_k, u, r)$; $v_k^{q,r} = v(t_q, x_k, r)$.

Ainsi, on obtient l'équation HJB discrète suivante :

$$\begin{aligned} v_k^{q-1,r} &= \inf_{u \in \mathcal{A}} \left\{ \Delta t^h f(t^{q-1}, x_k, u, r) + \Delta t^h \pi_{sr} v^{q,s}(x_k + \gamma_{rs}) \right. \\ &\quad + \Delta t^h \left(\frac{1}{\Delta t^h} - \sum_{i=1}^2 \left(\frac{|\beta_i^r(x_k, u)|}{h_i} - 2 \frac{a_{ii}^r(x_k, u)}{h_i^2} - \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}^r(x_k, u)|}{h_i h_j} \right) - \pi_{sr} \right) v_k^{q,r} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\Delta t^h}{h_i} \beta_i^r(x_k, u)_- + \frac{\Delta t^h}{h_i^2} a_{ii}^r(x_k, u) - \sum_{j \neq i} \frac{\Delta t^h}{h_i h_j} |a_{ij}^r(x_k, u)| \right) v_{k-e_i}^{q,r} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\Delta t^h}{h_i} \beta_i^r(x_k, u)_+ + \frac{\Delta t^h}{h_i^2} a_{ii}^r(x_k, u) - \sum_{j \neq i} \frac{\Delta t^h}{h_i h_j} |a_{ij}^r(x_k, u)| \right) v_{k+e_i}^{q,r} \\ &\quad \left. + \sum_{i>j} \frac{\Delta t^h}{h_i h_j} \left[a_{ij}^r(x_k, u)_+ (v_{k+e_i+e_j}^{q,r} + v_{k-e_i-e_j}^{q,r}) + a_{ij}^r(x_k, u)_- (v_{k+e_i-e_j}^{q,r} + v_{k-e_i+e_j}^{q,r}) \right] \right\} \end{aligned}$$

avec $\phi_+ = \max(\phi, 0)$ et $\phi_- = \min(-\phi, 0)$, pour toute fonction ϕ .

En identifiant les probabilités de transition qui correspondent aux poids des $v_k^{q,r}$, on trouve:

$$p^h(x_k, x_{k \pm e_i} | u, r) = \Delta t^h \left[\frac{\beta_i^r(x_k, u)_\pm}{h_i} + \frac{a_{ii}^r(x_k, u)}{h_i^2} - \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}^r(x_k, u)|}{h_i h_j} \right],$$

donc, si $\beta_i^r(x_k, u) > 0$ pour un point k donnée, alors $\beta_i^r(x_k, u)_- = 0$ et :

$$p^h(x_k, x_{k-e_i}|u, r) = \Delta t^h \left[\frac{a_{ii}^r(x_k, u)}{h_i^2} - \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}^r(x_k, u)|}{h_i h_j} \right].$$

En conclusion pour assurer $p^h(x_k, x_{k \pm e_i}|u, r) \succ 0$, il faut que a^h soit à diagonale dominante.

Une analyse plus complète sur le lien entre schéma des différences finies "classiques" et l'approximation par une chaîne de Markov est faite dans l'article (B,Z,[22]). On se basant sur les résultats de cet article, on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Le schéma des différences finies "classiques" :*

$$\begin{aligned} v_k^{q-1,r} = \inf_{u \in \mathcal{A}} & \left\{ v_k^{q,r} + \Delta t^h f(t^{q-1}, x_k, u, r) + \Delta t^h \sum_{i=1}^2 \beta_i^r(x_k, u) \cdot (D_k^u v_k^q)_i \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=1}^2 \frac{1}{2} a_{ii}^r(x_k, u) D_{ij}^\pm v_k^q + \Delta t^h \pi_{sr} (v^{q,s}(x_k + \gamma_{rs}) - v_k^{q,r}) \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

peut être interprété comme un schéma consistant d'approximation par une chaîne de Markov, ssi les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- Si $i \neq j$ tel que $a_{ij}^r(x_k, u) \neq 0$, alors $D_{ij}^\pm = \begin{cases} D_{ij}^+ & \text{si } a_{ij}^r(x_k, u) \succ 0, \\ D_{ij}^- & \text{sinon.} \end{cases}$
- Les matrices $a^h(x_k, u, r)$, avec $r \in \{1, 2\}$, sont à diagonale dominante.
- La pas de temps Δt^h vérifie:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{|\beta_i^r(x_k, u)|}{h_i} + \sum_{i=1}^2 \left(2 \frac{a_{ii}^r(x_k, u)}{h_i^2} - \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}^r(x_k, u)|}{h_i h_j} \right) + \pi_{sr} \leq \frac{1}{\Delta t^h} \quad (3.13)$$

Remarque 3.6. La positivité des probabilités de transition dans le cadre de l'approximation du processus d'état par une chaîne de Markov implique la monotonie du schéma^{3.7} dans le cadre de la discrétisation directe de HJB.

Donc, lorsque cette condition de diagonale dominante n'est pas assurée, le schéma des différences finies "classiques" n'est plus valide. On pourrait alors le remplacer par celui de différences finies généralisées que l'on présentera dans la section suivante.

^{3.7.} Un schéma de la forme : $u_j^{q+1} = \sum_{k=-l_1}^{l_2} b_k u_{j+k}^q$ est monotone si tous les coefficients b_k sont positifs ou nuls.

DFG

On considère le processus d'état $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ solution de l'équation (3.4) et le problème de contrôle stochastique (3.5). On s'intéresse toujours à la discrétisation de X en une chaîne de Markov. On discrétise l'espace \mathbb{R}^2 selon le vecteur de pas $h = (h_1, h_2)$, et on associe le vecteur $k = (k_1, k_2)$ au point x_k . Pour cela, on commencera tout d'abord par définir un schéma de discrétisation de l'équation HJB en utilisant des approximations des dérivées secondes suivant des directions quelconques. Ensuite, on identifiera ce schéma à celui de l'approximation consistante du processus d'état par une chaîne de Markov.

Pour un point k donné du maillage, on définit l'ensemble des points de \mathbb{Z}^2 pour lesquels on autorise les transitions, appelé *stencil* et noté \mathcal{S} dans la suite. Cet ensemble peut être composé de points voisins directs ou indirects^{3.8}. Ainsi, pour chaque point k et à chaque pas de temps q , on cherche à définir un *stencil* ainsi que l'ensemble des probabilités de transition tel que les conditions de consistance soient vérifiées. Ceci revient à rechercher des conditions sur la matrice a pour qu'elle soit compatible avec la définition de l'ensemble des probabilités.

Notation 3.7. Soit φ une fonction définie sur \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout point du maillage $k \in \mathbb{Z}^2$, on note φ_k l'approximation de φ en (x_k) . A tout point $\xi \in \mathbb{Z}^2$, on associe l'opérateur décalage δ_ξ tel que: $\delta_\xi \varphi_k := \varphi_{k+\xi}$, ainsi que l'opérateur de différences finies: $\Delta_\xi = \delta_\xi + \delta_{-\xi} - 2\delta_0$. Ainsi, si φ est \mathcal{C}^2 , on montre par la formule de Taylor que:

$$\Delta_\xi \varphi_k = \sum_{i,j=1}^2 h_i h_j \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x_k) + o(\|h\|^2)$$

On définit l'opérateur de différences finies correspondant à la dérivée première par rapport à la i^e variable d'espace:

$$(D_k^u \varphi_k)_i = \begin{cases} \frac{\varphi_{k+e_i} - \varphi_k}{h_i}, & \text{si } \beta^r(x_k, u) > 0 \\ \frac{\varphi_k - \varphi_{k-e_i}}{h_i}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit un sous-ensemble fini \mathcal{S} de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ contenant les vecteurs de la base canonique $\{e_1, e_2\}$. On considère le schéma explicite suivant:

$$v_k^{q-1}(r) = \inf_{u \in \mathcal{A}} \left\{ v_k^q(r) + \Delta t^h \beta^r(x_k, u) \cdot D_k^u v_k^q(r) + \Delta t^h \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k,\xi}^{u,r} \Delta_\xi v_k^q + \Delta t^h \pi_{sr}(v^q(x_k + \gamma_{rs}, s) - v_k^q(r)) \right\} \quad (3.14)$$

3.8. On parle alors d'ordre du *stencil* égal à: $\sup_{\xi \in \mathcal{S}} \|\xi\|$.

Par identification avec la version discrète du principe de programmation dynamique (3.12), on obtient les expressions des probabilités de transition:

$$\begin{aligned} p^h(x_k, x_k | u, r) &= 1 - \Delta t^h \left(\sum_{i=1}^2 \frac{|\beta_i^r(x_k, u)|}{h_i} + 2 \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k, \xi}^{u, r} + \pi_{sr} \right), \\ p^h(x_k, x_{k \pm e_i} | u, r) &= \Delta t^h \left(\frac{\beta_i^r(x_k, u)_{\pm}}{h_i} + \alpha_{k, e_i}^{u, r} \right), \\ p^h(x_k, x_{k \pm \xi} | u, r) &= \Delta t^h \alpha_{k, \xi}^{u, r} \text{ pour } \xi \in \mathcal{S}, \xi \neq e_i, \\ p^h(x_k, x_k + \gamma_{rs} | u, r) &= \Delta t^h \pi_{sr}, \\ p^h(x_k, y | u, r) &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

où $\beta_i^r(x_k, \theta)_+ = \max(\beta_i^r(x_k, u), 0)$ et $\beta_i^r(x_k, \theta)_- = -\min(\beta_i^r(x_k, u), 0)$.

Comme les réels $p^h(x_k, \cdot | u, r)$ définissent des probabilités de transition, leur somme doit être égale à 1 (c'est ce qu'on vérifie immédiatement) et ils doivent être positifs ou nuls. D'où les conditions sur les $\alpha_{k, \xi}^{u, r}$:

$$\begin{aligned} \forall (\xi, k, u, r) \in \mathcal{S} \times \mathbb{Z}^2 \times \mathcal{A} \times \{1, 2\}: & \quad \alpha_{k, \xi}^{u, r} \geq 0, \\ \forall (k, u, r, s) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathcal{A} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\}: & \quad \sum_{i=1}^2 \frac{|\beta_i^r(x_k, u)|}{h_i} + 2 \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k, \xi}^{u, r} + \pi_{sr} \leq \frac{1}{\Delta t^h} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sous ces hypothèses, le schéma (3.14) est une approximation du processus d'état par une chaîne de Markov. Si on veut en plus qu'il soit consistant, il faut que :

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \sum_{i, j=1}^2 h_i h_j \xi_i \xi_j \alpha_{k, \xi}^{u, r} e_i e_j' = a(x_k, u, r) + o(1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2$$

ou encore:

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k, \xi}^{u, r} \xi \xi' = a^h(x_k, u, r) + o(1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2 \quad (3.16)$$

En effet, en posant $\hat{x}_k := x_k + \Delta t^h \beta^r(x_k, u)$ et en utilisant les expressions explicites des probabilités de transition, on obtient:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{k, q}^{h, u} [X_{q-1}^h - x_k] &= \mathbb{E}_{k, q}^{h, u} [(X_{q-1}^h - \hat{x}_k)(X_{q-1}^h - \hat{x}_k)'] + o(\Delta t^h) \\ &= \Delta t^h \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \sum_{i, j=1}^2 h_i h_j \xi_i \xi_j \alpha_{k, \xi}^{u, r} e_i e_j' + o(\Delta t^h) \end{aligned}$$

Outre que cette condition *faible* de consistance, il existe une condition de consistance *forte*:

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k, \xi}^{u, r} \xi \xi' = a^h(x_k, u, r), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2 \quad (3.17)$$

Sur le plan théorique, on ne sait caractériser que la condition forte. En effet, la relation (3.17) revient, puisque les coefficients $\alpha_{k,\xi}^{u,r}$ sont positifs, à vérifier que les matrices $a^h(x_k, u, r)$ appartiennent au cône engendré par $\{\xi\xi', \xi \in \mathcal{S}\}$ qu'on notera:

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) := \left\{ \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{\xi\xi'} \xi\xi'; \alpha \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{S}|} \right\}$$

Ce cône dépend donc de la taille du *stencil* (ou encore de son ordre). Suite à une analyse convexe, on arrive à caractériser ce cône dans le cas de situations simples de faibles dimension et ordre.

Exemple 3.8. Par exemple, dans le cas de la dimension $n = 2$ et l'ordre $q = 1$, l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ est caractérisé par 4 contraintes et une classe d'équivalence :

$$a_{ii}^h \geq |a_{ij}^h|, \quad 1 \leq i \neq j \leq 2.$$

l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{S}^2)$ est caractérisé par 8 contraintes et 2 classes d'équivalence :

$$\begin{cases} 2a_{ii}^h \geq |a_{ij}^h|, \\ 2a_{ii}^h + a_{jj}^h \geq 3|a_{ij}^h|. \end{cases}$$

pour $1 \leq i \neq j \leq 2$. l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{S}^3)$ est caractérisé par 16 contraintes et 4 classes d'équivalence :

$$\begin{cases} 3a_{ii}^h \geq |a_{ij}^h|, \\ 3a_{ii}^h + 2a_{jj}^h \geq 5|a_{ij}^h|, \\ 6a_{ii}^h + a_{jj}^h \geq 5|a_{ij}^h|, \\ 6a_{ii}^h + 2a_{jj}^h \geq 7|a_{ij}^h| \end{cases}$$

		# contraintes	#classes d'équivalence
2	1	4	1
2	2	8	2
2	3	16	4
2	4	24	6
2	5	40	10
2	6	48	12
2	7	72	18
2	8	88	22
2	9	112	28
2	10	128	32

Tableau 3.1. le tableau ci-dessous souligne l'importance de la réduction des contraintes en utilisant les classes de l'équivalence

La caractérisation de la condition de consistance *faible* ne peut pas être faite de façon exacte. Il faudrait donc, pour chaque point du maillage repéré par $k \in \mathbb{Z}^2$ et pour chaque pas de temps, choisir tout d'abord le *stencil* et essayer ensuite de minimiser la distance: $\left| a^h(x_k, u, r) - \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k,\xi}^{u,r} \xi \cdot \xi' \right|$ par rapport aux coefficients $\alpha_{k,\xi}^{u,r}$ positifs ou nuls. En choisissant le *stencil*, on doit tenir compte de deux facteurs: D'une part, l'erreur: $\left| a^h(x_k, u, r) - \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k,\xi}^{u,r} \xi \cdot \xi' \right|$ et D'autre part le fait que le problème quadratique est d'autant plus simple à résoudre que le *stencil* est petit.

Donc, dans la pratique, il faut commencer par les *stencils* les plus petits et estimer cette erreur.

On se référera aux articles suivants [21,22] pour de plus amples détails.

Remarque 3.9.

- En prenant la trace des deux membres de la relation (3.17), on déduit que les coefficients $\alpha_{k,\xi}^\theta$ doivent satisfaire:

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k,\xi}^{u,r} \leq \text{tr}(a^h(x_k, u, r)) = O\left(\left(\inf_i (h_i)\right)^{-2}\right)$$

car $\text{tr}(\xi \xi') \geq 1$.

- En combinant cette dernière relation avec celle de consistance (3.15), on peut déduire une estimation du pas de temps:

$$\Delta t^h = O\left(\left(\inf_i (h_i)\right)^2\right)$$

3.3.2 Schéma implicite et différences finies généralisées

Cette méthode repose sur l'approximation consistante du processus d'état par une chaîne de Markov, c'est-à-dire sur la décomposition (3.16) ou (3.17) de la matrice $a^h(r)$. Cette décomposition est réalisée par l'utilisation de l'algorithme DECOM décrit dans l'article [22]. Avec cette décomposition, on peut réécrire le terme de second ordre de l'équation HJB comme suit:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(a(x, u, r).D_x^2 v(t, x, r)) &= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, u, r) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t, x, r) \\
&= \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^h(x, u, r) h_i h_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t, x, r) \\
&= \text{tr}(a^h(x, u, r).M(t, x, r)) \\
&= \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k,\xi}^{u,r} \text{tr}(\xi.\xi'.M(t, x, r)) \\
&= \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k,\xi}^{u,r} \left(\sum_{i,j=1}^n \xi_i h_i \xi_j h_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t, x, r) \right) \\
&= \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k,\xi}^{u,r} v_{x_\xi x_\xi}(t, x, r)
\end{aligned}$$

où $M(t, x, r)$ est la matrice de terme général $h_i h_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t, x, r)$.

Ainsi, le terme de second ordre se décompose sous la forme d'une somme de dérivées secondes selon les directions particulières $x_\xi = (h_1 \xi_1, h_2 \xi_2)'$:

$$v_{x_\xi x_\xi}(t, x, r) = \sum_{i,j=1}^2 \xi_i h_i \xi_j h_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t, x, r).$$

Localisation du problème

Cela consiste à se restreindre à un domaine borné, pour la résolution numérique de l'équation HJB, et à imposer des conditions aux limites adéquates. Dans notre application, on travaille sur un espace à trois dimensions $(S, V, u) \in \mathbb{R}^3$. La localisation consiste à se restreindre à un domaine du type $D = [S_{\min}, S_{\max}] \times [V_{\min}, V_{\max}] \times [u_{\min}, u_{\max}]$, S_{\min} , S_{\max} , V_{\min} , V_{\max} , u_{\min} et u_{\max} étant des constantes à choisir soigneusement pour que l'algorithme soit efficace. Par exemple :

- Pour S le prix de l'actif risqué, dans le cas d'une option européenne(Call ou put)

$$\begin{cases} S_{\min} = \exp\left(\log(S_0) - 3.76 \times \sigma \times \sqrt{T} - \log(1.1)\right), \\ S_{\max} = \exp\left(\log(S_0) + 3.76 \times \sigma \times \sqrt{T} + \log(1.1)\right). \end{cases}$$

- Pour V la valeur instantanée du portefeuille, dans le cas d'une option d'achat (Call) européenne :

$$\begin{cases} V_{\min} = 0, \\ V_{\max} = S_{\max} - K. \end{cases}$$

- Pour V la valeur instantanée du portefeuille, dans le cas d'une option de vente (Put) européenne :

$$\begin{cases} V_{\min} = 0, \\ V_{\max} = K - S_{\min}. \end{cases}$$

- Pour u la variable du contrôle (u_t est le nombre des actions détenues à la date t) :

$$\begin{cases} u_{\min} = -1, \\ u_{\max} = 1. \end{cases}$$

Il faut de plus imposer des conditions au bord de ce domaine, leur choix dépendent du produit à évaluer ainsi que de la mesure de risque utilisée. Dans le cas d'une mesure de risque (fonction payoff $g(\cdot)$) quadratique, on considère les conditions aux limites suivantes :

$\frac{\partial^3 v}{\partial S^3} = 0, \text{ pour } S = S_{\min} \text{ ou } S = S_{\max}$
$\frac{\partial^3 v}{\partial V^3} = 0, \text{ pour } V = V_{\min} \text{ ou } V = V_{\max}$
$\frac{\partial^3 v}{\partial V \partial S^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial S \partial V^2} = 0, \text{ pour } S \in \{S_{\min}, S_{\max}\} \text{ et } V \in \{V_{\min}, V_{\max}\}$

Tableau 3.2.

Algorithme de type Howard (ou méthode d'itération sur les politiques)

La méthode d'itération sur les politiques consiste à alterner deux étapes :

1. Une étape de calcul du contrôle optimal u en fonction de la fonction valeur v déjà calculée, ceci en minimisant le second membre de l'équation Hamilton Jacobi Bellman.
2. Une étape de résolution de l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation Hamilton Jacobi Bellman, le contrôle optimal réel par le contrôle précédemment calculé.

L'algorithme est défini comme suit:

- Initialiser de $v^T(r) = g(X_T, r)$.
- Puis itérer pour $q = N, \dots, 2, 1, 0$, et $r = 1, 2$:
 - i. chercher $u^{q,r}$, solution de :

$$u^q(r) := \arg \min_{u \in \mathcal{A}} \left\{ \beta^r(t^q, x, u) \cdot D_k^u v^q(r) + \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_\xi^{u,r}(t^q, x) \Delta_\xi v^q + \pi_{sr}(v^q(x + \gamma_{rs}, s) - v^q(r)) \right\}$$

- ii. Résoudre en $v^{q-1}(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{v^{q-1}(r) - v^q(r)}{\Delta t^h} &= \beta^r(t^{q-1}, x, u^{q,r}) \cdot D_k^{u^{q,r}} v^{q-1}(r) \\ &+ \sum_{\xi \in \mathcal{S}} \alpha_{k,\xi}^{u^{q,r},r}(t^{q-1}, x) \Delta_\xi v^{q-1} \\ &+ \pi_{sr}(v^q(x + \gamma_{rs}, s) - v^{q-1}(r)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

l'algorithme de *splitting*

L'équation HJB peut être réécrite sous la forme: $\forall (t, x, r) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \times \{1, 2\}$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x, r) + \inf_{u \in \mathcal{A}} \left[G_0^u v(t, x, r) + \sum_{\xi \in \mathcal{S}} G_\xi^u v(t, x, r) + G_s^u v(t, x, r) \right] = 0 \quad (3.19)$$

où:

- $G_0^\theta v(t, x, r) = \beta^r(x, u) \cdot \nabla_x v(t, x, r)$ désigne le terme du premier ordre,
- $G_\xi^\theta v(t, x, r) = \alpha_{k, \xi}^{u, r} v_{x_\xi x_\xi}(t, x, r)$ désigne le terme de diffusion unidirectionnelle selon ξ .
- $G_s^u v(t, x, r) = \pi_{sr}(v(t, x + \gamma_{rs}, s) - v(t, x, r))$.

On reprend les notations du paragraphe précédent. On procède de la façon suivante:

→ Le terme de premier ordre $G_0^\theta v(t, x)$ est discrétisé selon le schéma des différences finies classiques: $\beta^r(x_k, u, r) \cdot D_k^u v_k^q = G_0^u(t_q, x_k, r) + o(\|h\|)$.

→ Les termes de diffusion $G_\xi^u v(t, x)$ sont discrétisés comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_{k, \xi}^{u, r} \Delta_\xi v_k^q &= \alpha_{k, \xi}^{u, r} \sum_{i, j=1}^n \xi_i h_i \xi_j h_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t_q, x_k, r) + o(\|h\|^2) \\ &= G_\xi^u v(t_q, x_k, r) + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

On a vu dans le paragraphe précédent que

$$\Delta_\xi v_k^q(r) = \sum_{i, j=1}^n \xi_i h_i \xi_j h_j \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(t_q, x_k, r) + o(\|h\|^2)$$

et $\alpha_{k, \xi}^{u, r} = O\left(\frac{1}{\|h\|^2}\right)$ (puisque les termes de $a^h(r)$ le sont). Donc on s'attendrait à avoir:

$$\alpha_{k, \xi}^{u, r} \Delta_\xi v_k^q = G_\xi^{u, r} v(t_q, x_k, r) + O(\|h\|).$$

Pour résoudre l'EDP (3.20) à un instant t_q et un régime r donnés, on applique l'algorithme de *splitting* suivant:

- Étape 1: pour $m = 0$, on dispose de $v^q(r)$ et $u^{q,r}$. Par utilisation du schéma implicite pour le terme de premier ordre, on calcule $v_k^{q,1}(r)$ pour un point k du maillage tel que:

$$\frac{v_k^{q,1}(r) - v_k^q(r)}{\Delta t^h} + \beta(x_k, u^{q,r}, r) \cdot D_k^{u^{q,r}} v^{q,1}(r) = 0, \quad (3.20)$$

- Étape 2: pour $1 \leq m \leq |\mathcal{S}|$, on calcule $v^{q,m+1}(r)$ par le schéma implicite suivant:

$$\frac{v^{q,m+1}(r) - v^{q,m}(r)}{\Delta t^h} + \alpha_{m,\xi_m}^{u^{q,r},r} \cdot \Delta_{\xi_m} v^{q,m+1}(r) = 0, \quad (3.21)$$

- Étape 3: pour $m = |\mathcal{S}| + 1$, on calcule $v^{q,m+1}(r)$ par le schéma implicite suivant:

$$\frac{v^{q,m+1}(r) - v^{q,m}(r)}{\Delta t^h} + \pi_{sr}(v^q(x + \gamma_{rs}, s) - v^{q,m+1}(x, r)) = 0, \quad (3.22)$$

- Étape 4: on obtient

$$v^{q-1}(r) := v^{q,|\mathcal{S}|+2}(r).$$

Dans cet algorithme, on s'est basé sur le résultat suivant: Soit un problème du type^{3.9}: pour $t \in [0, T]$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $F \in \mathcal{C}^\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \dot{y} = F(y) = \sum_{i=0}^m F_i(y), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Une méthode possible pour résoudre ce problème consiste à utiliser un algorithme séquentiel. En effet, si on applique directement F à y_0 , on obtient le flux associé à $F(y) = \dot{y}$ à l'instant t , noté ϕ_t^F . On a alors:

$$\phi_t^F(y_0) = y_0 + t F(y) + O(t^2)$$

Si on calcule maintenant y à l'instant t de la façon suivante: on applique F_0 à y_0 , on obtient le flux associé à F_0 , noté $\phi_t^{F_0}$. Ensuite, on applique F_1 à ce flux, on obtient $\phi_t^{F_1}$, etc... Après les $m + 1$ itérations, on obtient un flux final correspondant à F :

$$\phi_{seq,t}^F(y_0) = \phi_t^{F_m} \circ \dots \circ \phi_t^{F_1} \circ \phi_t^{F_0}(y_0) + O(t^2).$$

3.9. La condition initiale peut être remplacée par une condition terminale.

Maintenant, remarquons que les étapes 1 et 2 de l'algorithme de splitting nécessitent la résolution d'un système linéaire « creux », c.à.d qu'un grand nombre des coefficients de la matrice du système sont non nuls.

En tenant compte des conditions limites décrites précédemment, on se restreint au domaine $\mathcal{D} = [S_{\min} + h_S, S_{\max} - h_S] \times [V_{\min} + h_V, V_{\max} - h_V]$ qu'on discrétise uniformément par les points (S_{i_1}, V_{i_2}) , pour $i_1 = 0, \dots, N_S$ et $i_2 = 0, \dots, N_V$ avec $S_{i_1} = i_1 h_S$, $V_{i_2} = i_2 h_V$, $h_S = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{N_S}$ et $h_V = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{N_V}$, représentée en figure (3.1). On obtient alors un système linéaire :

$$M \cdot v^{q,m+1}(r) = b$$

où $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ avec $N = (N_S + 1) \times (N_V + 1) - 1$. utilisons l'ordre « lexicographique » pour numéroter les inconnues, c.à.d de gauche à droite et bas en haut : les inconnues sont numérotées de 0 à $N = (N_S + 1) \times (N_V + 1) - 1$ et le second membre s'écrit $b = (b_1, \dots, b_N)'$.

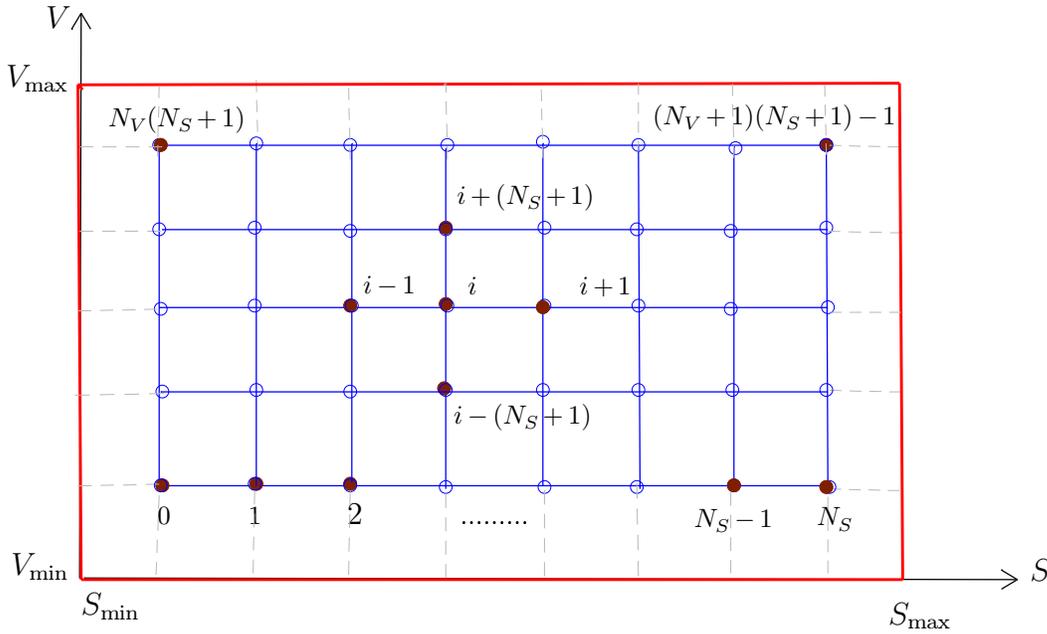


Figure 3.1. Représentation du support

Les composantes b_1, \dots, b_N sont définies par : pour $i_1 = 0, \dots, N_S$, $i_2 = 0, \dots, N_V$, on pose $i = i_1 + i_2(N_S + 1)$ et $b_i = v^{q,m}(r)(S_{i_1}, V_{i_2})$.

Les coefficients de $M = (M_{ij})_{0 \leq i, j \leq N}$ peuvent être calculés de la manière suivante :

- Pour l'EDP (3.20): On note $\beta_1 = \mu S$, $\beta_2 = \mu S u$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $\beta^+ = \max(\beta, 0)$
et $\beta^- = \max(-\beta, 0)$.

$$\begin{cases} M_{i, i-e_1} = \frac{\Delta t}{h_x} \beta_1^-, \\ M_{i, i-e_2} = \frac{\Delta t}{h_y} \beta_2^-, \\ M_{i, i} = 1 + \Delta t \left(\frac{|\beta_1|}{h_x} + \frac{|\beta_2|}{h_y} \right), \\ M_{i, i+e_1} = -\frac{\Delta t}{h_x} \beta_1^+, \\ M_{i, i+e_2} = -\frac{\Delta t}{h_y} \beta_2^+, \\ M_{i, j} = 0; \text{ pour } 0 \leq j \leq N, \text{ tel que } j \notin \{i \pm e_1, i, i \pm e_2\}. \end{cases}$$

- Pour l'EDP (3.21) : Pour $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $i_1 = 0, \dots, N_S$, $i_2 = 0, \dots, N_V$, on note $i + \xi = i_1 + \xi_1 + (i_2 + \xi_2)(N_S + 1)$.

$$\begin{cases} M_{i, i-\xi} = -\alpha_\xi \Delta t, \\ M_{i, i} = 1 + 2\alpha_\xi \Delta t, \\ M_{i, i+\xi} = -\alpha_\xi \Delta t, \\ M_{i, j} = 0; \text{ pour } 0 \leq j \leq N, \text{ tel que } j \notin \{i, i \pm \xi\}. \end{cases}$$

Lorsqu'on fait affaire à de très gros systèmes, où N peut être de l'ordre de plusieurs milliers, on cherche à utiliser des méthodes nécessitant le moins de mémoire possible. On a intérêt dans ce cas à utiliser des méthodes itératives. Ces méthodes ne font appel qu'à des produits matrice vecteur, et ne nécessitent donc pas le stockage du profil de la matrice mais uniquement des termes non nuls. La résolution de ce type de problème sera le sujet de la section suivante.

3.3.3 Résolution de système linéaire

Objectifs

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n . Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible, et $b \in \mathbb{C}^n$, on a comme objectif de résoudre le système linéaire $Ax = b$, c'est à dire de trouver x solution de :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{C}^n \\ Ax = b \end{cases} \quad (3.23)$$

Comme A est inversible, il existe un unique vecteur x solution de (3.21). Il y a principalement deux types de méthodes pour calculer ce vecteur x : les méthodes directes et les méthodes itératives.

La taille des systèmes à résoudre est l'un des points essentiels dans l'efficacité des méthodes de résolution de systèmes linéaires. Les dernières décennies ont été marquées par une grande évolution du parc informatique avec l'apparition de machine de plus en plus performantes, la taille de la mémoire de ces ordinateurs a augmenté de une façon extrême. La taille des systèmes qu'on peut résoudre sur ordinateur a donc également augmenté, selon l'ordre de grandeur suivant :

	1980	2000
matrice « pleine »	10^2	10^6
matrice « creuse »	10^6	10^8

Tableau 3.3.

Le développement des méthodes de résolution de systèmes linéaires est lié à l'évolution des machines informatiques. Un grand nombre de recherches sont d'ailleurs en cours pour tirer profit de l'architecture des ordinateurs modernes, par exemple des techniques de type décomposition de domaines en sous domaines pour profiter des architectures parallèles. De nouvelles méthodes de résolution de système linéaire ont ainsi été introduites pour permettre la résolution de problèmes de plus en plus complexes et de taille sans cesse croissante en un temps raisonnable.

La Solution de grands systèmes linéaires creux : $A \cdot x = b$, où A est une matrice $\mathbb{C}^{n \times n}$ et $b \in \mathbb{C}^n$ est au centre de nombreux problèmes en calcul scientifique. Ces systèmes linéaires résultent principalement de la discrétisation et de la linéarisation des équations aux dérivées partielles (EDP) de types elliptiques et paraboliques. En effet, Le calcul précis des contraintes et des déplacements dans les structures complexes nécessite la prise en compte d'une description détaillée de la géo-

métrie. Ceci conduit souvent à l'utilisation de maillages raffinés, comportant un nombre important de neouds.

Les méthodes directes qui sont basées sur la factorisation des coefficients de la matrice A en des matrices simplement inversibles comme l'algorithme de Gauss, sont généralement utilisées et sont les solveurs de choix dans beaucoup de codes de calcul industriels. Les solveurs directs sont très robustes mais sont très coûteux en termes de stockages et de temps. Alors que les méthodes itératives exigent moins de stockages et souvent moins d'opérations que les méthodes directes. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de résoudre ces systèmes linéaires par une méthode itérative BiCGStab.

Stockage des matrices creuses

Dans de nombreuses simulations numériques, la discrétisation du problème aboutit à manipuler une matrice de très grande taille (d'ordre pouvant aller jusqu'à 108) mais dont la plupart des coefficients sont nuls. Dans ce cas, on considère un stockage creux (par abus, on parle d'une matrice creuse) qui permet de ne pas stocker une grande partie des coefficients nuls et de réduire considérablement la complexité des résolutions de systèmes. Les stockages courants sont :

- **Le stockage bande** : on stocke toutes les diagonales situées entre les deux diagonales contenant les éléments non nuls les plus éloignés de la diagonale principale comme colonnes d'une matrice rectangulaire dont le nombre de lignes est égal à l'ordre de la matrice creuse tandis que le nombre de colonnes de la matrice est égal à la largeur de la bande.
- **Le stockage profil** : Il peut arriver que les éléments non nuls extrêmes de chaque ligne soient à des distances de la diagonale très différentes suivant les lignes. Un stockage bande oblige alors à stocker un grand nombre d'éléments non nuls. Pour diminuer cet effet, on peut stocker les portions de chaque ligne situées entre ces éléments extrêmes.
- **Le stockage par coordonnées (COO)**: dans un tableau à une dimension, on range tous les éléments non nuls de la matrice. Les indices de ligne et de colonne de chacun de ces éléments sont stockés dans le même ordre dans deux tableaux d'entiers à une dimension. C'est le stockage de référence dans MATLAB.
- **Le stockage compact par lignes (CSR)** : dans un tableau à une dimension on range tous les éléments non nuls par ligne, une ligne après l'autre. Les indices de colonnes et les limites de lignes sont retenus dans deux tableaux d'entiers.

- **Le stockage compact par colonnes (CSC)** : ce format est le même que le précédent, mais en remplaçant le rôle des lignes par celui des colonnes.

Il existe encore d'autres stockages compacts, par exemple par diagonales creuses ou en définissant des blocs. La bibliothèque LAPACK permet le stockage bande. Beaucoup de solveurs directs ou itératifs utilisent un stockage compact, par lignes ou par colonnes.

Le stockage compact par lignes (CSR) :

Comme la plupart des blocs de A sont des blocs nuls, on utilisait de la mémoire inutile en stockant la matrice A entièrement. C'est la raison pour laquelle on se sert d'un format de stockage qui s'appelle "**Compressed Sparse Row**" (CSR), on dit souvent simplement "stockage morse". Au lieu de stocker toutes les valeurs de la matrice A , on ne stocke que les valeurs non nulles avec leur position dans la matrice. La structure des données consiste en trois parties :

- Un tableau AA qui contient les valeurs non nulles de la matrice A , stockées colonne par colonne de la première colonne à la dernière. La taille de ce tableau correspond au nombre de valeurs non nulles (noté Nz).
- Un tableau JA de taille Nz contenant les numéros de colonne des éléments non nuls de la matrice A stockés dans AA.
- Un tableau IA de pointeurs de longueur nbln + 1 (où nbln est le nombre de lignes). Le i -ème pointeur pointe sur le numéro de la valeur dans AA et JA qui contient le premier élément non nul de la ligne i dans A . La valeur IA[nbln + 1] indique la fin des valeurs non nulles dans AA et JA.

Exemple 3.10.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est représentée par

$$\begin{aligned} \text{AA} &= \boxed{1\ 3\ 4\ 2\ 3\ 1\ 2} \\ \text{JA} &= \boxed{0\ 3\ 1\ 3\ 1\ 0\ 1} \\ \text{IA} &= \boxed{0\ 2\ 4\ 5\ 7} \end{aligned}$$

Et de la linéarisation des équations aux dérivées partielles (EDP) de types elliptiques et paraboliques.

BiCGstab(1)

La méthode BiCGstab(l) a été développée par Sleijpein et Fokkema [30] en 1993 dans le but de résoudre de grands systèmes linéaires creux non hermitiens et qui possèdent des spectres complexes. Tout a commencé avec la méthode Bi-CG. Dans chaque étape d'itération, la solution approchée x_k est révisée par quelques corrections qui dépendent du vrai résidu r_k ($r_k = b - Ax_k$) et quelques "ombres" résidus \tilde{r}_k . Chaque étape nécessite une multiplication par A pour produire le vrai résiduel r_k suivant, et une multiplication par A^T pour produire "l'ombre" résidu suivant. Bi-CG semble comme un algorithme idéal mais dans la pratique il a quelques inconvénients: le transposé de A n'est pas facile à expliciter, alors le calcul de \tilde{r}_k n'est pas évident.

$k = -1$ choisir arbitrairement x_0 et \tilde{r}_0 , calculer $r_0 = b - Ax_0$, prendre $u_{-1} = \tilde{u}_{-1} = 0$, $\rho^{-1} = 1$, pour $k = 0, 1, \dots$ jusqu'à convergence faire $\rho_k = (r_k, \tilde{r}_k), \quad \beta_k = -\frac{\rho_k}{\rho_{k-1}},$ $u_k = r_k - \beta_k u_{k-1}, \quad c_k = Au_k,$ $\tilde{u}_k = \tilde{r}_k - \beta_k \tilde{u}_{k-1},$ $\gamma_k = (c_k, \tilde{r}_k), \quad \alpha_k = -\frac{\rho_k}{\gamma_k},$ $x_{k+1} = x_k + \alpha_k u_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k c_k, \quad \tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k - \alpha_k A^T \tilde{u}_k,$

l'algorithme Bi-CG.

Pour éviter les produits par A^T , il est possible de modifier le polynôme sous-jacent dans BICG. C'est l'idée des méthodes CGS et BiATCGstab.

la méthode CGS calcule les approximations x_k avec un résidu de la forme $r_k = q_k(A)r_k$, où q_k est un polynôme de degré k qui joue le rôle réductif du vrai résidu r_k . Dans plusieurs situations, le choix de q_k par CGS conduit à une amplification de r_k au lieu d'une réduction. Ceci mène à une convergence irrégulière ou même une divergence et rend la méthode plus sensible aux erreurs d'évaluation.

Pour cela Van der Vorst a proposé de prendre pour q_k un produit de polynômes de degré 1 (1-step Minimal Residual polynomials MR) de la forme $1 - w_k t$ pour des w_k optimaux, c'est la méthode BiCGstab qui converge plus rapidement que Bi-CG et CGS, elle est aussi plus lisse. Cependant, w_k peut être la fermeture du zéro, dans ce cas Bi-CGstab peut stagner même diverger. Enfin Sleijpen et Fokkema ont introduit une généralisation de BiCGstab2, c'est l'algorithme BiCGstab(l) qui choisit le polynôme q_k comme le produit des MR-polynômes de degré l . Pour $l = 1$, Bi-CGstab(l) coïncide avec Bi-CGstab et pour $l = 2$ il est presque équivalent à BiCGstab2 sauf qu'il réduit à 10% le coût du stockage en mémoire.

```

k = - 1
    choisir arbitrairement  $x_0$  et  $\tilde{r}_0$ ,
    calculer  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ ,
    prendre  $\mathbf{u}_{-1} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_0 = x_0$ ,  $\rho^{-1} = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $w = 1$ .

Répéter jusqu'à ce que  $\|r_{k+1}\|$  soit assez petit.
k = k + l,
    mettre  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_{k-1}$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_k$  et  $\hat{x}_0 = \mathbf{x}_k$ .
     $\rho_0 = -w\rho_0$ 

    pour j = 0, ..., l - 1 faire // (BI-CG part)
         $\rho_1 = (\hat{\mathbf{r}}_j, \tilde{\mathbf{r}}_0)$ ,  $\beta = \beta_{k+j} = \alpha \frac{\rho_1}{\rho_0}$ ,  $\rho_0 = \rho_1$ 
        pour i = 0, ..., j faire
             $\hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{r}}_i - \beta \hat{\mathbf{u}}_i$ 
        fin
         $\hat{\mathbf{u}}_{j+1} = A \hat{\mathbf{u}}_j$ 
         $\gamma = (\hat{\mathbf{u}}_{j+1}, \tilde{\mathbf{r}}_0)$ ,  $\alpha = \alpha_{k+j} = \frac{\rho_0}{\gamma}$ ,
        pour i = 0, ..., j faire
             $\hat{\mathbf{r}}_i = \hat{\mathbf{r}}_i - \alpha \hat{\mathbf{u}}_{i+1}$ 
        fin
         $\hat{\mathbf{r}}_{j+1} = A \hat{\mathbf{r}}_j$ ,  $\hat{x}_0 = \hat{x}_0 + \alpha \hat{\mathbf{u}}_0$ 
    fin

    pour j = 0, ..., l faire // (MR part)
        pour i = 0, ..., j - 1 faire
             $\tau_{ij} = \frac{1}{\alpha_i} (\hat{\mathbf{r}}_j, \hat{\mathbf{r}}_i)$ 
             $\hat{\mathbf{r}}_j = \hat{\mathbf{r}}_j - \tau_{ij} \hat{\mathbf{r}}_i$ 
        fin
         $\alpha_j = (\hat{\mathbf{r}}_j, \hat{\mathbf{r}}_j)$ ,  $\gamma'_j = \frac{1}{\alpha_j} (\hat{\mathbf{r}}_0, \hat{\mathbf{r}}_j)$ 
    fin
     $\gamma_l = \gamma'_l$ ,  $w = \gamma_l$ 
    pour j = l - 1, ..., 1 faire
         $\gamma_j = \gamma'_j - \sum_{i=j+1}^l \tau_{ji} \gamma_i$ 
    fin
    pour j = 1, ..., l - 1 faire
         $\gamma''_j = \gamma_{j+1} - \sum_{i=j+1}^{l-1} \tau_{ji} \gamma_{i+1}$ 
    fin
     $\hat{x}_0 = \hat{x}_0 + \gamma_1 \hat{\mathbf{r}}_0$ ,  $\hat{\mathbf{r}}_0 = \hat{\mathbf{r}}_0 + \gamma'_l \hat{\mathbf{r}}_l$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 + \gamma_l \hat{\mathbf{r}}_l$ ,
    pour j = 1, ..., l - 1 faire
         $\hat{\mathbf{u}}_0 = \hat{\mathbf{u}}_0 + \gamma_j \hat{\mathbf{r}}_j$ ,
         $\hat{x}_0 = \hat{x}_0 + \gamma''_j \hat{\mathbf{r}}_j$ ,
         $\hat{\mathbf{r}}_0 = \hat{\mathbf{r}}_0 + \gamma'_j \hat{\mathbf{r}}_j$ ,
    fin
    prendre  $\mathbf{u}_{k+l-1} = \hat{\mathbf{u}}_0$ ,  $\mathbf{r}_{k+1} = \hat{\mathbf{r}}_0$  et  $\mathbf{x}_{k+1} = \hat{x}_0$ .

```

l'algorithme Bi-CGstab(l).

Chapitre 4

Calibration

L'estimation d'un signal utile $X(k)$ à partir de l'observation d'un autre signal, $Y(k)$, avec lequel le premier est corrélé, est un des problèmes les plus importants en traitement de signal et en automatique. Dans de nombreuses applications, le signal $Y(k)$ est une version bruitée ou distordue de $X(k)$, mais il peut aussi être un signal différent qui contient de l'information sur $X(k)$.

Dans les applications de traitement de signal, le signal observé est souvent une version bruitée et/ou distordue du signal utile. C'est le cas par exemple du signal de parole mesuré à la sortie d'un microphone, et noyé dans le bruit de fond, ou d'une mesure du rythme cardiaque à l'aide d'électrodes, ou encore d'un écho radar qui doit être distingué du bruit électromagnétique afin de décider si oui ou non une cible a été détectée. En télécommunications, c'est le cas de symboles qui sont envoyés au travers d'un canal (ligne téléphonique par exemple) et qui arrivent distordus et bruités à l'extrémité réceptrice.

L'objet de ce chapitre est de synthétiser un filtre récursif décrit dans le théorème 4.11, qui produit une estimation récursive du signal utile à partir du signal observé. Ce filtre sera obtenu par optimisation de la fonction de vraisemblance après un changement de probabilité (sous la nouvelle mesure de probabilité le signal observé est gaussien).

4.1 Rappel sur le filtrage

Les filtres optimaux qui seront abordés dans cette section sont le *filtre de Wiener*, valable dans le cas où les signaux considérés $X(k)$ et $Y(k)$ seraient conjointement stationnaires, et le *filtre de Kalman*, qui est une généralisation du filtre de Wiener valable aussi dans le cas de processus ou de signaux non stationnaires.

4.1.1 Filtre de Wiener

Au début des années 1940, et dans le cadre de très gros efforts de recherche militaires menés au MIT, N. Wiener s'intéressa au problème de l'estimation d'un signal à partir d'observations bruitées d'un signal corrélé avec celui-ci. Le filtre que Wiener a développé à cette occasion permet de construire une estimée $\hat{x}(k)$ de $x(k)$ à partir d'un échantillon de mesures bruitées $y(j)$:

$$\hat{x}(k) = \sum_{l=l_1}^{l=l_2} w(l) y(k-l) \quad (4.1)$$

Les coefficients $w(l)$ sont calculés de manière à minimiser l'erreur quadratique moyenne d'estimation ξ :

$$\xi = \mathbb{E}\left[|E(k)|^2\right] \quad (4.2)$$

L'hypothèse requise pour la construction d'un filtre de Wiener est que le processus stochastique

$$Z(k) = \begin{pmatrix} X(k) \\ Y(k) \end{pmatrix}$$

soit un processus vectoriel stationnaire au sens faible. Cela signifie donc que l'on peut définir la fonction (matricielle) de covariance et la fonction de densité spectrale (matricielle) du processus $Z(k)$. Le filtre peut alors se calculer à partir de cette fonction de covariance, ou de la fonction de densité spectrale, qui en est la transformée de Fourier. C'est l'information contenue dans la covariance mutuelle (ou dans la densité spectrale mutuelle) de $X(\cdot)$ et $Y(\cdot)$ qui permet d'estimer \hat{x} à partir de y .

Il existe plusieurs variantes du problème de Wiener selon que l'on utilise, pour l'estimation de $x(k)$, les observations $y(j)$

1. jusqu'à l'instant $j = k$: on parle alors de *filtrage* ;
2. jusqu'à un instant antérieur $j < k$: on parle alors de *prédiction* ;
3. ou jusqu'à un instant postérieur $j > k$: on parle alors de *lissage*.

Les filtres d'estimation, pour ces trois cas, auront donc les formes suivantes :

1. dans le cas du filtrage

$$\hat{x}(k) = \sum_{l=0}^{l=l_2} w(l) y(k-l) \quad \text{avec } l_2 > 0.$$

2. dans le cas de la prédiction

$$\hat{x}(k) = \sum_{l=l_1}^{l=l_2} w(l) y(k-l) \quad \text{avec } 0 < l_1 < l_2.$$

3. dans le cas du lissage

$$\hat{x}(k) = \sum_{l=l_1}^{l=l_2} w(l) y(k-l) \quad \text{avec } l_1 < 0 < l_2.$$

Remarque 4.1. Remarquons que dans le cas du filtrage et de la prédiction, le filtre est causal, alors que dans le cas du lissage, il est non-causal (ou anticipatif) puisqu'il faut attendre jusqu'à l'instant $k - l_1$ ($l_1 < 0$) pour estimer $x(k)$. Remarquons aussi que le filtre défini en (4.1) peut être fini ou infini, selon les valeurs de l_1 et l_2 .

4.1.2 Le filtre de Kalman

Le filtre de Wiener permet de calculer l'estimée optimale d'un signal $X(k)$ à partir d'un signal $Y(k)$ avec lequel ce signal X est corrélé. Un cas particulier important, que nous avons traité, est celui où le signal Y est une version bruitée du signal utile X . L'information nécessaire au calcul de l'estimée optimale du signal utile X consiste en la fonction de corrélation matricielle du signal vectoriel formé de X et Y , les fonctions d'auto-corrélation de X et de Y , et la fonction de cross-corrélation entre X et Y . Le fait même que l'on utilise ces fonctions de corrélation implique qu'une hypothèse importante pour le calcul d'un filtre de Wiener est que les processus X et Y soient stationnaires au sens large. Il en résulte en particulier que les estimées calculées par les différentes variantes du filtre de Wiener ne tiennent pas compte de conditions initiales ou de réponses transitoires.

Le filtre de Kalman est une extension du filtre de Wiener où l'extension porte dans trois directions.

- L'information sur les signaux X et Y est donnée sous forme d'un modèle à représentation Markovienne, ce qui signifie que Y est une combinaison linéaire bruitée des composantes du vecteur utile X . Rappelons qu'un modèle à représentation Markovienne permet de calculer complètement la fonction de corrélation d'un processus. À l'inverse, la connaissance de la fonction de corrélation d'un processus permet, sous certaines conditions, de calculer une représentation d'état Markovienne de ce processus. La théorie qui permet de calculer une représentation d'état à partir d'une fonction de covariance s'appelle *la théorie de la réalisation stochastique*.
- Les estimées du signal utile X que l'on peut calculer à partir du filtre de Kalman tiennent compte de l'information sur le signal observé Y à partir d'un instant initial quelconque, $k = 0$, alors que dans le filtre de Kalman on suppose implicitement les mesures disponibles depuis un temps infiniment long. Le filtre de Kalman permet donc de prendre en compte le transitoire, c'est-à-dire le calcul de l'estimée optimale à partir d'un ensemble de mesures observées depuis un instant initial fixé.
- Enfin, le filtre de Kalman se calcule pour un modèle du processus qui est lui-même à paramètres variables. Cela signifie que les matrices qui définissent la représentation d'état Markovienne peuvent être elles-mêmes des matrices variables dans le temps. On peut donc calculer des estimées optimales de Kalman pour des processus qui sont complètement non stationnaires, c'est-à-dire qu'ils sont décrits par des modèles variant dans le temps.

Formulation du problème d'estimation

On supposera que le signal utile x et le signal observé y peuvent être représentés par un modèle d'état Gaussien Markovien :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \\ y_k &= H_k x_k + v_k\end{aligned}$$

avec $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la dynamique linéaire, le signal u_k est supposé déterministe et connu (dans des problèmes d'automatique c'est un signal de commande), G_k est la matrice d'entrée de bruit w_k qui est un bruit Gaussien de moyenne zéro et de matrice de covariance Q_k , H_k est un opérateur linéaire d'observation et v_k représente l'erreur sur les observations produit par un bruit Gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance R_k . l'état initial x_0 est supposé gaussien : $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$.

Les bruits w_k et v_k ont des significations typiquement différentes : w_k est considéré comme un bruit agissant sur le processus, tandis que v_k est un bruit de mesure. Ces deux signaux sont des bruits blancs Gaussiens mutuellement indépendants et ils sont indépendants de x_0 : $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_k)$, $v_k \sim \mathcal{N}(0, R_k)$.

4.2 Discrétisation

Parmi les plus simples méthodes d'approximation discrète en temps pour un processus Markovien est l'approximation d'Euler. Rappelons que la chaîne de Markov $\{Z_t\}$ qui modélise les différents régimes du marché admet la représentation martingale suivante :

$$Z_t = \Pi Z_t dt + dMt, \quad t_0 \leq t \leq T$$

avec M_t une martingale, et $Z_{t_0} = Z_0$.

On considère une discrétisation régulière $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$ de l'intervalle $[t_0, T]$ en pas de temps de longueur $\Delta t = \frac{T-t_0}{N}$. Notons $X(\tau_k) = X_k$. Une discrétisation naturelle pour le processus Markovien $\{Z_t\}$ s'obtient en remplaçant les éléments différentiels par leurs accroissements. La discrétisation d'Euler de pas Δt de Z_t est un processus stochastique $X = \left\{ X(t), t_0 \leq t \leq T \right\}$ qui vérifie le schéma itératif suivant

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + \Pi X_k (\tau_{k+1} - \tau_k) + (M_{\tau_{k+1}} - M_{\tau_k}), & k = 0, 1, \dots, N \\ X_0 = Z_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce processus X est une chaîne de Markov que l'on peut réécrire sous la forme :

$$X_{k+1} = AX_k + B_{k+1}$$

en posant $A = \mathbf{I} + \Delta t \Pi$, et $B_{k+1} = M_{\tau_{k+1}} - M_{\tau_k}$.

Comme $\Pi = (\pi_{ij})_{1 \leq i, j \leq M}$ est une Q-matrice, c-à-d Π satisfait $\sum_{i=1}^M \pi_{ij} = 0$, $\pi_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et $\pi_{jj} \leq 0$, alors

$$\sum_{i=1}^M a_{ij} = 1, \quad a_{ij} \geq 0. \quad (4.4)$$

Pour $k = 0, 1, \dots, N$, B_{k+1} est une suite des incréments de martingale. En effet

$$E[B_{k+1} | \mathcal{F}_k] = E[M_{\tau_{k+1}} - M_{\tau_k} | \mathcal{F}_k] = M_{\tau_k} - M_{\tau_k} = 0.$$

Une telle chaîne de Markov peut se prolonger en un processus en temps continu en supposant qu'elle reste constante entre deux observations successives :

$$X_t^{\Delta t} = X_k \quad \text{si } k \Delta t \leq t < (k+1) \Delta t \quad (k \in \mathbb{N})$$

Le processus $X_t^{\Delta t}$ est continue à droite et limité à gauche. Pour l'étude de la convergence de ces processus, l'approche la plus simple consiste à étudier la convergence des lois fini-dimensionnelles des processus, mais il est aussi possible d'étudier la convergence des lois des processus $X_t^{\Delta t}$ considérés globalement sur $[0, T]$ en se plaçant sur l'espace des fonctions càd-làg (fonctions continue à droite et limité à gauche) muni d'une topologie adéquate : la topologie de Skorohod (Billingsley 1968).

4.3 Estimation d'un HMM discret à observation continue

Les modèles Markov cachés (plus souvent désigné par l'acronyme HMM pour Hidden Markov Models), constituent une classe de modèles à l'origine de quelques unes des plus spectaculaires avancées de ces dernières années. Le principe central de cette famille de modèles est de supposer l'existence d'un état cachée (latent) évoluant suivant une dynamique markovienne, les observations étant des fonctions (déterministes ou aléatoires) de cet état caché. Les modèles HMM sont très flexibles du fait de l'introduction de variables latentes (non observées), qui permettent de modéliser des structures de dépendances temporelles complexes.

Dans cette partie, on se propose d'étudier le problème de filtrage, c'est-à-dire le problème de l'estimation d'un état inconnu au vu d'observations bruitées supposées continu, dans le cas où l'état inconnu est modélisé par une chaîne de Markov à temps discret et espace d'état fini. En se basant sur les travaux d'Elliot dans son livre (« Hidden Markov Models: Estimation and Control » [31]).

4.3.1 Processus d'état et d'observation

Initialement, tous les processus ont un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Sur lequel on définit une nouvelle mesure de probabilité Q . On considère un système dont l'état est décrit par une chaîne de Markov $X_k, k \in \mathbb{N}$, en temps discret, homogène et qui prend ses valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{S}_X = \{e_1, \dots, e_M\}$ où e_i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de \mathbb{R} .

Soit $\mathcal{F}_k^0 = \sigma\{X_0, \dots, X_k\}$ la tribu engendrée par X_0, \dots, X_k , et $\{\mathcal{F}_k\}$ la filtration complète produite par \mathcal{F}_k^0 ; On augmente \mathcal{F}_k^0 en incluant tous les sous-ensembles des événements du probabilité zéro. Ici la propriété de Markov implique:

$$P(X_{k+1} = e_j | \mathcal{F}_k) = P(X_{k+1} = e_j | X_k)$$

Cette notion généralise la notion de système dynamique déterministe (machine à état fini, suite récurrente, ou équation différentielle ordinaire) : la distribution de probabilité de l'état présent X_{k+1} ne dépend que de l'état immédiatement passé X_k .

Rappelons qu'une chaîne de Markov X_k est entièrement caractérisée par la donnée

- de la loi initiale $\nu = (\nu_i)$

$$\nu_i = P(X_0 = e_i), \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, M\},$$

- et de la matrice de transition $\mathbf{A} = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{M \times M}$

$$a_{ji} = P(X_{k+1} = e_j | X_k = e_i), \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, M\},$$

qu'on suppose indépendante de l'instant k (chaîne de Markov homogène).

Il suffit donc d'une donnée locale (les probabilités de transition entre deux instants successifs) pour caractériser de façon globale une chaîne de Markov. On a alors,

$$E[X_{k+1} | \mathcal{F}_k] = E[X_{k+1} | X_k] = \mathbf{A}X_k.$$

En définissant

$$B_{k+1} := X_{k+1} - AX_k,$$

on obtient

$$X_{k+1} := AX_k + B_{k+1}.$$

Ceci peut désigner l'équation d'état.

Maintenant, prenant l'espérance conditionnelle et notant cela $E[AX_k | X_k] = AX_k$, nous avons

$$E[B_{k+1} | \mathcal{F}_k] = E[X_{k+1} - AX_k | X_k] = AX_k - AX_k = 0,$$

alors $\{B_k\}, k \in \mathbb{N}$ est une suite des incréments de martingale.

Supposons, que la chaîne de Markov X (qui modélise les différents régimes du marché) n'est pas observé directement, mais plutôt elle est observable à travers La volatilité historique (le VIX par exemple). cette dernière est modélisé par un processus d'observation continu $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$. Pour la simplicité on suppose que y est un scalaire.

Le modèle de signal avec le processus d'observation y à valeurs réelles a la forme suivante

$$\boxed{\begin{aligned} X_{k+1} &= AX_k + B_{k+1}, \\ y_{k+1} &= c(X_k) + \alpha(X_k) \omega_{k+1}. \end{aligned}} \quad (4.5)$$

Ici $\{w_{k+1}\}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (*i.i.d*) qui suivent une loi normale. Comme $X_k \in \mathbf{S}_X$ les fonctions c et α sont déterminées par les vecteurs $c = (c_1, c_2, \dots, c_M)'$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M)'$ dans \mathbb{R}^M ; alors $c(X_k) = \langle c, X_k \rangle$ et $\alpha(X_k) = \langle \alpha, X_k \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire défini sur \mathbb{R}^M . Nous devons avoir $\alpha \neq 0$ et ainsi sans perte de généralité on a $\sigma_i > 0, 1 \leq i \leq M$.

Notation 4.2. $\{\mathcal{F}_k\}, k \in \mathbb{N}$ la filtration complète engendrée par X ; $\{\mathcal{Y}_k\}, k \in \mathbb{N}$ la filtration complète engendrée par y ; $\{\mathcal{G}_k\}, k \in \mathbb{N}$ la filtration complète engendrée par X et y .

4.3.2 Espérance conditionnelle

D'abord, nous dérivons rapidement la distribution conditionnelle de X_k sachant \mathcal{Y}_k en utilisant des considérations élémentaires. Rappelons que $w_k, k \in \mathbb{N}$, sont des variables aléatoires gaussiennes *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ainsi w_k est indépendante de \mathcal{G}_k et, en particulier de $\mathcal{Y}_k \subset \mathcal{G}_k$.

Pour $t \in \mathbb{R}$ considérons la distribution conditionnelle

$$P(y_{k+1} \leq t \mid \mathcal{Y}_k) = \sum_{i=1}^N P(\alpha_i w_{k+1} \leq t - c_i) P(X_k = e_i \mid \mathcal{Y}_k).$$

Ecrivant $\hat{X} = \mathbf{E}[X_k \mid \mathcal{Y}_k]$ et $\phi_i(x) = \frac{1}{\alpha_i \sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2\alpha_i^2)$ la densité du loi $\mathcal{N}(0, \alpha_i^2)$, alors on aura :

$$P(y_{k+1} \leq t \mid \mathcal{Y}_k) = \sum_{i=1}^N \langle \hat{X}_k, e_i \rangle \int_{-\infty}^{t-c_i} \phi_i(x) dx.$$

et ainsi, la densité conditionnelle de y_{k+1} sachant \mathcal{Y}_k est :

$$\sum_{j=1}^N \langle \hat{X}_k, e_j \rangle \phi_j(t - c_j).$$

Passons maintenant à la distribution conjointe

$$\begin{aligned} P(X_k = e_i, y_{k+1} \leq t \mid \mathcal{Y}_k) &= P(X_k = e_i \mid \mathcal{Y}_k) P(\alpha_i w_{k+1} \leq t - c_i) \\ &= \langle \hat{X}_k, e_i \rangle \int_{-\infty}^{t-c_i} \phi_i(x) dx \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la règle de Bayes

$$\begin{aligned} E[\langle X_k, e_i \rangle \mid \mathcal{Y}_{k+1}] &= P(X_k = e_i \mid y_{k+1}, \mathcal{Y}_k) \\ &= \frac{\langle \hat{X}_k, e_i \rangle \phi_i(y_{k+1} - c_i)}{\sum_{j=1}^M \langle \hat{X}_k, e_j \rangle \phi_j(y_{k+1} - c_j)}, \end{aligned}$$

en conséquence,

$$\begin{aligned} E[X_k \mid \mathcal{Y}_{k+1}] &= \sum_{i=1}^M E[\langle X_k, e_i \rangle \mid \mathcal{Y}_{k+1}] e_i \\ &= \frac{\sum_{i=1}^M \langle \hat{X}_k, e_i \rangle \phi_i(y_{k+1} - c_i) e_i}{\sum_{j=1}^M \langle \hat{X}_k, e_j \rangle \phi_j(y_{k+1} - c_j)}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

ceci prouve donc finalement que le filtre récursif \hat{X}_k suit le théorème suivant.

Théorème 4.3.

$$\hat{X}_{k+1} = E[X_{k+1} \mid \mathcal{Y}_{k+1}] = \frac{\sum_{i=1}^M \langle \hat{X}_k, e_i \rangle \phi_i(y_{k+1} - c_i) A e_i}{\sum_{j=1}^M \langle \hat{X}_k, e_j \rangle \phi_j(y_{k+1} - c_j)} \tag{4.7}$$

Démonstration.

B_{k+1} est à accroissement \mathcal{F}_k -martingale, d'où $E[B_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0$. Cependant les w_k sont i.i.d, ainsi

$$E[B_{k+1} | \mathcal{G}_k, w_{k+1}] = E[B_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0.$$

En conséquence, $E[B_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}] = E[E[B_{k+1} | \mathcal{G}_k, w_{k+1}] | \mathcal{Y}_{k+1}] = 0$ et

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1} &= E[X_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}] = E[AX_k + V_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= AE[X_k | \mathcal{Y}_{k+1}]. \end{aligned}$$

En utilisant (4.6) le résultat est immédiat. \square

Remarque 4.4. Une difficulté avec la récursion (4.7) est qu'elle n'est pas linéaire en \hat{X}_k .

4.3.3 Changement de mesure

L'idée est de présenter une nouvelles mesures de probabilité sous laquelle le processus d'observation y est gaussienne. Ce concept de changement de mesure sera la clef de plusieurs résultats.

Rappel

Nous définissons une nouvelle mesure de probabilité Q sur $(\Omega, \bigvee_{l=1}^{\infty} \mathcal{G}_l)$ en mettant la restriction du la dérivé de Radon-Nikodym $\frac{dQ}{dP}$ sur la tribu \mathcal{G}_k est égal à Λ_k . De ce fait

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k \quad (4.8)$$

L'existence de Q est assurée par le théorème de prolongement de Kolmogorov (Kolmogorov, 1933). Cela signifie que, pour tout $B \in \mathcal{G}_k$

$$Q(B) = \int_B \Lambda_k dP.$$

D'une manière équivalente, pour toute variable aléatoire ψ \mathcal{G}_k -mesurable on a :

$$E_Q[\psi] = \int \psi dQ = \int \psi \frac{dQ}{dP} dP = \int \psi \Lambda_k dP = E[\Lambda_k \psi],$$

en désignant par E_Q (et E_P) l'espérance par rapport à Q (P , respectivement).

Théorème 4.5. (*Théorème de Bayes conditionnel*)

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. considérons Q une autre mesure de probabilité absolument continue et tel que la dérivé de Radon-Nikodym est définie par

$$\frac{dQ}{dP} = \Lambda$$

Alors si ψ est une variable aléatoire intégrable \mathcal{F} -mesurable on a

$$E_Q[\psi | \mathcal{G}] = \frac{E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]}{E_P[\Lambda | \mathcal{G}]}. \quad (4.9)$$

Démonstration.

Il suffit de montrer que $\forall B \in \mathcal{G}$

$$\int_B E_Q[\psi | \mathcal{G}] dQ = \int_B \frac{E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]}{E_P[\Lambda | \mathcal{G}]} dQ.$$

On pose $\phi = \frac{E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]}{E_P[\Lambda | \mathcal{G}]}$ si $E_P[\Lambda | \mathcal{G}] > 0$, et $\phi = 0$ ailleurs.

Soit $G = \{v : E_P[\Lambda | \mathcal{G}] = 0\}$, ainsi on a $G \in \mathcal{G}$. Par définition de G , on a aussi que $\int_G E_P[\Lambda | \mathcal{G}] dP = 0 = \int_G \Lambda dP$, et comme $\Lambda \geq 0$ p.s. on obtient $P(G) = 0$, i.e $\Lambda|_G = 0$. Ecrivons $B = (B \cap G) \cup (B \cap G^c)$,

$$\begin{aligned} \int_B E_Q[\psi | \mathcal{G}] dQ &= \int_B \psi dQ = \int_B \psi \Lambda dP \\ &= \int_{B \cap G^c} \psi \Lambda dP + \int_{B \cap G} \psi \Lambda dP. \end{aligned} \quad (4.10)$$

or $B \cap G \subset G$, d'où par définition

$$\int_{B \cap G} \psi \Lambda dP = 0 = \int_{B \cap G} \phi dQ, \quad (4.11)$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\int_{B \cap G^c} \frac{E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]}{E_P[\Lambda | \mathcal{G}]} dQ &= E_Q \left[I_{B \cap G^c} \frac{E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]}{E_P[\Lambda | \mathcal{G}]} \right] \\
&= E_P \left[I_{B \cap G^c} \Lambda \frac{E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]}{E_P[\Lambda | \mathcal{G}]} \right] \\
&= E_P \left[E_P \left[I_{B \cap G^c} \Lambda \frac{E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]}{E_P[\Lambda | \mathcal{G}]} \mid \mathcal{G} \right] \right] \\
&= E_P \left[I_{B \cap G^c} E_P[\Lambda | \mathcal{G}] \frac{E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]}{E_P[\Lambda | \mathcal{G}]} \right] \\
&= E_P [I_{B \cap G^c} E_P[\Lambda \psi | \mathcal{G}]] \\
&= E_P [I_{B \cap G^c} \Lambda \psi] \\
&= \int_{B \cap G^c} \psi \Lambda dP.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

D'après (4.10), (4.11) et (4.12) on obtient

$$\int_B E_Q[\psi | \mathcal{G}] dQ = \int_B \phi dQ.$$

□

Détermination de la forme appropriée de la densité Λ , dans le cas d'un temps discret et des observation continue

Soient $w(\cdot)$ une variable aléatoire réelle de densité $\phi(w)$ et c et α deux constantes connues à l'avance. Ecrivant $y(\cdot) = c + \alpha w(\cdot)$.

On introduit une nouvelle probabilité Q , et une densité λ tels que $\frac{dQ}{dP} = \lambda$, et sous la probabilité Q la variable aléatoire y admet la densité ϕ . On a,

$$Q(y \leq t) = \int_{]-\infty, t]} \phi(y) dy \tag{4.13}$$

$$= \int_{\Omega} I_{\{y \leq t\}} dQ$$

$$= \int_{\Omega} I_{\{y \leq t\}} \lambda dP$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\{w \leq \frac{t-c}{\alpha}\}} \lambda(w) \phi(w) dw$$

$$= \int_{-\infty}^t \lambda(w) \phi(w) \frac{dy}{\alpha}. \tag{4.14}$$

En conséquence, d'après (4.13) et (4.14) on a $\lambda(w) = \frac{\alpha \phi(y)}{\phi(w)}$.

Notons que le processus d'observation $\{y_k, k \in \mathbb{N}\}$ défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) est de la forme $y_{k+1} = \langle c, X_k \rangle + \langle \alpha, X_k \rangle w_{k+1}$, où les w_k sont *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et rappelant que $\phi(\cdot)$ est la densité de $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$. D'autre part considérons :

$$\lambda_l = \frac{\langle \alpha, X_{l-1} \rangle \phi(y_l)}{\phi(w_l)}, \quad l \in \mathbb{N},$$

et

$$\begin{cases} \Lambda_0 = 1, \\ \Lambda_k = \prod_{l=1}^k \lambda_l, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

On peut donc définir une nouvelle mesure de probabilité Q telle que la restriction de sa dérivée de Radon-Nikodym sur \mathcal{G}_k est égale à Λ_k : $(dQ/dP)|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k$.

Lemme 4.6. *Sous la probabilité Q les variables aléatoires y_k sont *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.*

Démonstration. On a $Q(y_{k+1} \leq t | \mathcal{G}_k) = E_Q [I_{\{y_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k]$, en appliquant le théorème de Bayes conditionnel, on trouve :

$$\begin{aligned} E_Q [I_{\{y_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k] &= \frac{E_P [\Lambda_{k+1} I_{\{y_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k]}{E_P [\Lambda_{k+1} | \mathcal{G}_k]} \\ &= \frac{E_P [\lambda_{k+1} I_{\{y_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k]}{E_P [\lambda_{k+1} | \mathcal{G}_k]} \end{aligned}$$

or

$$E_P [\lambda_{k+1} | \mathcal{G}_k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \alpha, X_k \rangle \phi(y_{k+1})}{\phi(w_{k+1})} \cdot \phi(w_{k+1}) dw_{k+1} = 1,$$

alors

$$\begin{aligned} Q(y_{k+1} \leq t | \mathcal{G}_k) &= E_P [\lambda_{k+1} I_{\{y_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \alpha, X_k \rangle \phi(y_{k+1})}{\phi(w_{k+1})} \cdot I_{\{y_{k+1} \leq t\}} \phi(w_{k+1}) dw_{k+1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y_{k+1}) dy_{k+1} = Q(y_{k+1} \leq t). \end{aligned}$$

□

Inversement, on suppose qu'on débute par une mesure de probabilité Q sur (Ω, \mathcal{F}) sous laquelle on a :

1. $\{X_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, est une chaîne de Markov qui prend A comme matrice de transition, de sorte que $X_{k+1} = AX_k + B_{k+1}$, où $E_Q[B_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0$,
2. $\{y_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, est une suite des variables aléatoires *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (en particulier ils sont indépendants de X_k).

Nous souhaitons alors construire une nouvelle mesure de probabilité P , tels que sous P

$$w_{k+1} := \frac{y_{k+1} - \langle c, X_k \rangle}{\langle \alpha, X_k \rangle}, \quad k \in \mathbb{N},$$

est une suite des variables aléatoires *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Pour construire la probabilité P à partir de Q nous introduisons les inverses de λ_l et Λ_k :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_l &= \lambda^{-1} = \frac{\phi(w_l)}{\langle \alpha, X_{l-1} \rangle \phi(y_l)}, \\ \bar{\Lambda}_0 &= 1, \quad \bar{\Lambda}_k = \prod_{l=1}^k \bar{\lambda}_l \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

et il suffit après de poser $(dP|dQ)|_{\mathcal{G}_k} = \bar{\Lambda}_k$. On remarque que la construction de la probabilité P nécessite l'inégalité suivante $\langle \alpha, X_k \rangle \neq 0$. La prétention que le processus d'observation a un bruit non singulier est standard dans la théorie de filtrage. En effet, si tous les composants de c sont distincts et $\langle \alpha, X_k \rangle = 0$ alors $y_{k+1} = c_r$ ce qui impliquera $X_k = e_r$. Donc sans perdre de généralisation, on suppose dans la suite que $\langle \alpha, X_k \rangle \neq 0$.

Lemme 4.7. *Sous la probabilité P , $\{w_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, est une suite des variables aléatoires *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.*

Démonstration. On a $P(w_{k+1} \leq t | \mathcal{G}_k) = E_P [I_{\{w_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k]$, On obtient après avoir appliqué, comme dans la preuve du lemme 4.6, le théorème de Bayes conditionnel :

$$\begin{aligned} E_P [I_{\{y_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k] &= \frac{E_Q [\bar{\Lambda}_{k+1} I_{\{w_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k]}{E_Q [\bar{\Lambda}_{k+1} | \mathcal{G}_k]} \\ &= \frac{E_Q [\bar{\lambda}_{k+1} I_{\{w_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k]}{E_Q [\bar{\lambda}_{k+1} | \mathcal{G}_k]} \end{aligned}$$

or

$$E_Q[\bar{\lambda}_{k+1} | \mathcal{G}_k] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(w_{k+1})}{\langle \sigma, X_k \rangle \phi(y_{k+1})} \cdot \phi(y_{k+1}) dy_{k+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(w_{k+1}) \frac{dy_{k+1}}{\langle \sigma, X_k \rangle} = 1,$$

alors

$$\begin{aligned} P(w_{k+1} \leq t | \mathcal{G}_k) &= E_Q[\bar{\lambda}_{k+1} I_{\{w_{k+1} \leq t\}} | \mathcal{G}_k] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(w_{k+1})}{\langle \sigma, X_k \rangle \phi(y_{k+1})} \cdot I_{\{w_{k+1} \leq t\}} \phi(y_{k+1}) dy_{k+1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(w_{k+1}) dw_{k+1} = P(w_{k+1} \leq t). \end{aligned}$$

□

4.3.4 Filtre récursif

On considère un vecteur $Y \in \mathbb{R}^M$ qui est fonction d'un autre vecteur $\theta \in \mathbb{R}^p$:

$$Y = h(\theta)$$

Le problème de l'estimation peut être énoncé de manière très générale : Si j'observe une réalisation $y \in \mathbb{R}^M$ de Y , que puis-je en tirer comme information sur θ ? De manière plus précise, on souhaite construire un estimateur de θ , noté $\hat{\theta}$, qui à toute réalisation y du vecteur Y fait correspondre une valeur particulière $\hat{\theta}$: $\hat{\theta} = g(y)$.

On peut distinguer les trois cas suivants :

1. θ et Y sont des vecteurs aléatoires ayant des densités de probabilité : l'estimateur appartiendra alors à la famille des estimateurs de Bayes.
2. θ est déterministe ; Y est un vecteur aléatoire ayant une densité de probabilité : l'estimateur appartiendra alors à la famille des estimateurs de Fisher.
3. θ est déterministe ; Y est une fonction bruitée mais non probabiliste de θ . Dans ce cas on peut encore définir un estimateur en dehors de tout cadre probabiliste.

Dans notre cas le problème se ramène à l'estimation optimale du signal utile X_k à partir du signal mesuré $y(0), y(1), \dots, y(k)$. Dans ce cas :

$$Y \triangleq \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(k) \end{pmatrix} \text{ et } \theta \triangleq X_k.$$

Remarquons que Y et θ sont tous deux des vecteurs aléatoires. Le problème posé est celui du filtrage optimal. La solution est fournie par un filtre récursif décrit dans le théorème 3.10, qui produit une estimation récursive de \hat{X}_k à partir des mesures $y(0), y(1), \dots, y(k)$.

Notation 4.8. Pour tout processus discret $\{H_k\}, k \in \mathbb{N}$, \mathcal{G}_k -adapté on écrit

$$\gamma_k(H_k) = E_Q[\bar{\Lambda}_k H_k \mid \mathcal{Y}_k]. \quad (4.15)$$

$\gamma_k(H_k)$ est une espérance conditionnelle normalisée de H_k par rapport à \mathcal{Y}_k . Il résulte du théorème conditionnel de Bayes 3.4 que :

$$\hat{H}_k := E_P[H_k \mid \mathcal{Y}_k] = \frac{E_Q[\bar{\Lambda}_k H_k \mid \mathcal{Y}_k]}{E_Q[\bar{\Lambda}_k \mid \mathcal{Y}_k]} = \frac{\gamma_k(H_k)}{\gamma_k(1)}. \quad (4.16)$$

Pour tout instant k , on suppose que H_k est un scalaire. En écrivant $H_{k+1} = H_k + \Delta H_k$, on obtient $\gamma_{k+1}(H_{k+1}) = E_Q[\bar{\Lambda}_{k+1} H_k \mid \mathcal{Y}_{k+1}] + E_Q[\bar{\Lambda}_{k+1} \Delta H_{k+1} \mid \mathcal{Y}_{k+1}]$, avec

$$\begin{aligned} E_Q[\bar{\Lambda}_{k+1} H_k \mid \mathcal{Y}_{k+1}] &= E_Q[\bar{\Lambda}_k H_k \bar{\lambda}_{k+1} \mid \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= E_Q \left[\bar{\Lambda}_k H_k \frac{\phi\left(\frac{y_{k+1} - \langle c, X_k \rangle}{\langle \alpha, X_k \rangle}\right)}{\langle \alpha, X_k \rangle \phi(y_{k+1})} \mid \mathcal{Y}_{k+1} \right]. \end{aligned}$$

Notation 4.9. On note $\Gamma^{(\cdot)}(y_k) = \frac{\phi\left(\frac{y_k - c(\cdot)}{\alpha(\cdot)}\right)}{\alpha(\cdot) \phi(y_k)} e(\cdot)$.

Comme $\sum_{i=1}^M \langle X_k, e_i \rangle = 1$ et les $y_l, 1 \leq l \leq k+1$ sont connus à l'avance :

$$\begin{aligned} E_Q[\bar{\Lambda}_{k+1} H_k \mid \mathcal{Y}_{k+1}] &= \sum_{i=1}^M E_Q[\bar{\Lambda}_k H_k \langle X_k, \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle \mid \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= \sum_{i=1}^M \langle \gamma_k(H_k X_k), \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle. \end{aligned}$$

On remarque alors que l'estimation de $\gamma_{k+1}(H_{k+1})$ implique celle de $\gamma_k(H_k X_k)$ ce qui nous mène à étudier la récursivité de $\gamma_{k+1}(H_{k+1} X_{k+1})$. On note $\bar{1}$ le vecteur $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^M$, on peut écrire $\langle X_k, \bar{1} \rangle = \sum_{i=1}^M \langle X_k, e_i \rangle = 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_k(H_k X_k), \bar{1} \rangle &= \gamma_k(\langle H_k X_k, \bar{1} \rangle) \\
&= \gamma_k(H_k \langle X_k, \bar{1} \rangle) = \gamma_k(H_k).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dans le cas particulier où $H_k = 1$, on trouve

$$\gamma_k(1) = \gamma_k(\langle X_k, \bar{1} \rangle) = \langle \gamma_k(X_k), \bar{1} \rangle = E_Q[\bar{\Lambda}_k | \mathcal{Y}_k]. \tag{4.18}$$

Définition 4.10. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace muni d'une filtration (\mathcal{F}_t) . On appelle tribu des prévisibles la tribu sur $(0, \infty) \times \Omega$ engendrée par les rectangles de la forme

$$]s, t] \times F, 0 \leq s \leq t, F \in \mathcal{F}_s.$$

Un processus est prévisibles si et seulement si l'application $(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles (il suffit de savoir que les processus càg (continue à gauche) sont prévisibles).

Théorème 4.11. Soit H un processus scalaire \mathcal{G} -adapté qui vérifie

$$\begin{cases} H_0 \text{ est } \mathcal{F}_{0-} \text{ mesurable} \\ H_{k+1} = H_k + p_{k+1} + \langle q_{k+1}, B_{k+1} \rangle + \delta_{k+1} f(y_{k+1}), n \geq 1. \end{cases}$$

avec, $B_{k+1} = X_{k+1} - AX_k$, f est une fonction de valeur scalaire, et p, q, δ sont des processus \mathcal{G} -prévisibles (q est un vecteur de M -dimension). Alors

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1}(H_{k+1} X_{k+1}) &:= \gamma_{k+1, k+1}(H_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^M \left\{ \langle \gamma_k(H_k X_k), \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle a_i \right. \\
&\quad + \gamma_k(p_{k+1} \langle X_k, \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle) a_i \\
&\quad + \gamma_k(\delta_{k+1} \langle X_k, \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle) f(y_{k+1}) a_i \\
&\quad \left. + (\text{diag}(a_i) - a_i a_i) \gamma_k(q_{k+1} \langle X_k, \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle) \right\},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

où $a_i = Ae_i$.

4.3.5 Les estimateurs

Estimateur de l'état

Nous utilisons ici le théorème 3.10, en posant $H_k = H_0, p_k = 0, q_k = 0, \delta_k = 0$. On constate

$$\boxed{\gamma_{k+1}(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^M \langle \gamma_k(X_k), \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle a_i.} \quad (4.20)$$

Estimateur du nombre de transition

Supposons que la chaîne de Markov X_{k+1} ($X_{k+1} = AX_k + B_{k+1}$) transite de l'état e_r à l'instant k , à l'état e_s à l'instant $k+1$, avec $1 \leq r, s \leq M$, on peut alors écrire $\langle X_k, e_r \rangle \langle X_{k+1}, e_s \rangle = 1$. Donc, le nombre de transition de l'état e_r (le r -ième régime) à l'état e_s (le s -ième régime) est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{k+1}^{rs} &= \sum_{n=1}^{k+1} \langle X_{n-1}, e_r \rangle \langle X_n, e_s \rangle \\ &= \mathcal{J}_k^{rs} + \langle X_k, e_r \rangle \langle X_{k+1}, e_s \rangle \\ &= \mathcal{J}_k^{rs} + \langle X_k, e_r \rangle (\langle AX_k, e_s \rangle + \langle B_{k+1}, e_s \rangle) \\ &= \mathcal{J}_k^{rs} + \langle X_k, e_r \rangle a_{sr} + \langle X_k, r \rangle \langle B_{k+1}, e_s \rangle. \end{aligned}$$

Puis en employant le théorème précédent 3.10, avec $H_{k+1} = \mathcal{J}_{k+1}^{rs}, H_0 = 0, p_{k+1} = \langle X_k, e_r \rangle a_{sr}, q_{k+1} = \langle X_k, e_r \rangle e'_s, \delta_{k+1} = 0$. On a

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1, k+1}(\mathcal{J}_{k+1}^{rs}) &= \sum_{i=1}^M \langle \gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs} X_k), \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle a_i \\ &\quad + \gamma_k(\langle X_k, \Gamma^r(y_{k+1}) \rangle) a_{sr} a_r \\ &\quad + \gamma_k(\langle X_k, \Gamma^r(y_{k+1}) \rangle) e'_r (\text{diag}(a_r) - a_r a'_r). \end{aligned}$$

or $e'_r(\text{diag}(a_r) - a_r a'_r) = a_{sr} e_s - a_{sr} a_r$ d'où

$$\boxed{\gamma_{k+1, k+1}(\mathcal{J}_{k+1}^{rs}) = \sum_{i=1}^M \langle \gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs}), \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle a_i + \langle \gamma_k(X_k), \Gamma^r(y_{k+1}) \rangle a_{sr} e_s.} \quad (4.21)$$

En tant compte de l'équation récursive de $\gamma_k(X_k)$ décrit en(4.20), on obtient un estimateur récursif de $\gamma_k(\mathcal{J}_k^{rs} X_k)$ et il en résulte que

$$\hat{\mathcal{J}}_{k+1}^{rs} = \frac{\langle \gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{J}_{k+1}^{rs}), \bar{1} \rangle}{\langle \gamma_{k+1}(X_{k+1}), \bar{1} \rangle}.$$

Estimateur du temps d'occupation

Soit \mathcal{O}_k^r le nombre des intervalles du temps, à l'instant k , pendant lesquels X occupait l'état e_r . Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{k+1}^r &= \sum_{n=1}^{k+1} \langle X_{n-1}, e_r \rangle \\ &= \mathcal{O}_k^r + \langle X_k, e_r \rangle. \end{aligned}$$

En appliquant encore le théorème (3.10), avec cette fois $H_{k+1} = \mathcal{O}_{k+1}^r$, $H_0 = 0$, $p_{k+1} = \langle X_k, e_r \rangle$, $q_{k+1} = 0$, $\delta_{k+1} = 0$, de sorte que

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{O}_{k+1}^r) &= \sum_{i=1}^M \left\{ \langle \gamma_k(\mathcal{O}_k^r X_k), \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle a_i \right. \\ &\quad \left. + \gamma_k(\langle X_k, \Gamma^r(y_{k+1}) \rangle \langle X_k, e_i \rangle) a_i \right\} \end{aligned}$$

Il vient

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{O}_{k+1}^r) &= \sum_{i=1}^M \langle \gamma_{k,k}(\mathcal{O}_k^r), \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle a_i \\ &\quad + \langle \gamma_k(X_k), \Gamma^r(y_{k+1}) \rangle a_r \end{aligned}} \quad (4.22)$$

et

$$\hat{\mathcal{O}}_{k+1}^r = \frac{\langle \gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{O}_k^r), \bar{1} \rangle}{\langle \gamma_{k+1}(X_{k+1}), \bar{1} \rangle}.$$

Estimateur du processus d'observation

Dans la suite on verra que la réestimation du vecteur de variance $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ et du vecteur de drift $c = (c_1, \dots, c_M)$ nécessite une estimation d'un processus de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{k+1}^r(f) &= \sum_{n=1}^{k+1} \langle X_{n-1}, e_r \rangle f(y_n), 1 \leq r, \leq M \\ &= \mathcal{T}_k^r(f) + \langle X_k, e_r \rangle f(y_{k+1}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dans le cas $f(y) = y$ ou $f(y) = y^2$, respectivement, appliquant le théorème 3.10, avec $H_{k+1} = \mathcal{T}_{k+1}^r(f)$, $H_0 = 0$, $p_{k+1} = 0$, $q_{k+1} = 0$, et $\delta_{k+1} = \langle X_k, e_r \rangle$, on a alors

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{T}_{k+1}^r(f)) &= \sum_{i=1}^M \langle \gamma_{k,k}(\mathcal{T}_k^r(f)), \Gamma^i(y_{k+1}) \rangle a_i \\ &+ \langle \gamma_k(X_k), \Gamma^r(y_{k+1}) \rangle f(y_{k+1}) a_r \end{aligned}} \quad (4.24)$$

et

$$\hat{\mathcal{T}}_{k+1}^r = \frac{\langle \gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{T}_{k+1}^r(f)), \bar{1} \rangle}{\langle \gamma_{k+1}(X_{k+1}), \bar{1} \rangle}.$$

4.3.6 Réestimation des paramètres

Dans cette section, on va étudier une technique qui permet d'estimer les paramètres d'un modèle lorsque certaines données sont cachées; c'est l'algorithme espérance-maximisation EM. Ce dernier est un processus itératif qui utilise la distribution des données complètes pour calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance lorsque les données observées sont incomplètes. L'idée de base est d'introduire une nouvelle mesure de probabilité telle que la maximisation de la fonction de vraisemblance des données complètes sachant les données observées associé à cette mesure est beaucoup plus facile que celle de départ. Chaque itération de cet algorithme se décompose en deux étapes. La première est l'étape E, c'est-à-dire l'étape d'espérance. Elle consiste à prendre l'espérance conditionnelle de la fonction de log-vraisemblance des données complètes sachant les données observées. La deuxième étape est l'étape M, soit la maximisation de l'équation trouvée sous l'étape E. Ces étapes sont répétées itérativement jusqu'à convergence et, l'obtention de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Dans le texte qui suit, on fera d'abord un rappel de la méthode du maximum de vraisemblance. Par la suite une description de l'algorithme EM, et finalement, on terminera avec une réestimation des paramètres $\{(a_{ji}), 1 \leq i, j \leq M, c_i, 1 \leq i \leq M, \alpha_i, 1 \leq i \leq M\}$ qui seront injectés dans le filtre récursif obtenu en section 4.4.4.

Estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV)

La méthode du maximum de vraisemblance est l'une des techniques les plus populaires et les plus efficaces qui permet d'estimer simultanément tous les paramètres, puisqu'en général, elle donne des estimateurs convergents et de faible variance. C'est la méthode utilisée dans l'application de l'algorithme EM.

Hypothèse : $\theta \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur déterministe mais inconnu (modèle fichier).

Définition 4.12.

L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}^{\text{ML}}(Y)$ est défini comme suit :

$$\hat{\theta}^{\text{ML}}(Y) = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} T_{Y|\Theta}(y|\theta)$$

La fonction $T_{Y|\Theta}(y|\theta)$ est considérée ici comme une fonction de θ pour un vecteur d'observations $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ donnée. L'estimée $\hat{\theta}^{\text{ML}}(Y)$ est donc la valeur de θ qui rend le vecteur y observé le plus vraisemblable. On utilise d'ailleurs souvent

$$L(\theta|y) = \ln(T_{Y|\Theta}(y|\theta))$$

et on appelle $L(\theta|y)$ la fonction de vraisemblance, que l'on maximise par rapport à θ pour un vecteur y donné.

Algorithme EM

L'algorithme EM est une approche générale qui fait un calcul itératif pour trouver des estimateurs du maximum de vraisemblance lorsque les données sont incomplètes. On l'appelle "l'algorithme EM" puisque chaque itération de l'algorithme consiste en une étape d'Espérance et une étape de Maximisation.

Sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , on considère $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ une famille des mesures de probabilité absolument continues par rapport à une mesure de probabilité fixée P_0 , et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$. La fonction de vraisemblance de θ sachant l'information obtenue de la filtration \mathcal{Y} est donnée par

$$L(\theta) = E_0 \left[\frac{dP_\theta}{dP_0} | \mathcal{Y} \right],$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) $\hat{\theta}$ de θ est une valeur qui maximise la fonction de vraisemblance ($\hat{\theta} \in \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} L(\theta)$) ou, la fonction de log-vraisemblance. L'EMV peut être obtenu en solutionnant l'équation de score $\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0$, mais en général elle est difficile à calculer directement.

L'algorithme EM procède ainsi, de manière itérative :

1. A $n=0$ on choisit $\hat{\theta}_0$.
2. Etape E (Estimation): poser $\theta^* = \hat{\theta}_n$, puis calculer la quantité

$$Q(\theta, \theta^*) = E_{\theta^*} \left[\log \frac{dP_\theta}{dP_{\theta^*}} | \mathcal{Y} \right].$$

3. Etape M (Maximisation) maximiser $Q(\theta, \theta^*)$ par rapport à θ^*

$$\hat{\theta}_{n+1} \in \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} Q(\theta, \theta^*).$$

4. On remplace n par $n + 1$ et les deux étapes E et M sont répétées jusqu'à ce que la différence entre la fonction de vraisemblance de l'itération $(n + 1)$ et celle de l'itération (n) ne change pratiquement plus.

Soit $\theta := (a_{ji}, 1 \leq i, j \leq M, c_i, 1 \leq i \leq M, \alpha_i, 1 \leq i \leq M)$ le vecteur des paramètres déterminant le modèle (4.2). Supposons que notre modèle est déterminé par un tel vecteur θ et nous souhaitons déterminer un nouveau vecteur

$$\hat{\theta} := (\hat{a}_{ji}, 1 \leq i, j \leq M, \hat{c}_i, 1 \leq i \leq M, \hat{\alpha}_i, 1 \leq i \leq M)$$

tel que $\hat{\theta} \in \operatorname{arg max}_{\bar{\theta} \in \Theta} Q(\bar{\theta}, \theta)$.

a) les paramètres a_{ji}

Tout d'abord considérons les paramètres a_{ji} , les probabilités de transition de la chaîne de Markov. Pour remplacer les paramètres $\hat{a}_{ji}(k)$ par a_{ji} dans la chaîne de Markov X nous définissons

$$\Lambda_k = \prod_{l=1}^k \prod_{r,s=1}^M \left[\frac{\hat{a}_{sr}(k)}{a_{sr}} \right]^{\langle X_l, e_s \rangle \langle X_{l-1}, e_r \rangle}$$

et

$$\frac{dP_{\hat{\theta}}}{dP_{\theta}} \Big|_{\mathcal{F}_k} = \Lambda_k.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \log \Lambda_k &= \sum_{r,s=1}^M \sum_{l=1}^k \langle X_l, e_s \rangle \langle X_{l-1}, e_r \rangle [\log \hat{a}_{sr}(k) - \log a_{sr}] \\ &= \sum_{r,s=1}^M \mathcal{J}_k^{rs} \log \hat{a}_{sr}(k) + R(a) \end{aligned}$$

avec $R(a)$ indépendant \hat{a} . En prenant l'expérience de cette expression, on trouve :

$$E[\log \Lambda_k | \mathcal{Y}_k] = \sum_{r,s=1}^M \hat{\mathcal{J}}_k^{rs} \log \hat{a}_{sr}(k) + \hat{R}(a) \quad (4.25)$$

On note aussi, par analogie à (4.4), que

$$\sum_{s=1}^M \hat{a}_{sr}(k) = 1$$

qu'on réécrit sous la forme dynamique suivante :

$$\sum_{l=1}^k \sum_{r,s=1}^M \langle X_{l-1}, e_r \rangle \hat{a}_{sr}(k) = k$$

puis la forme conditionnelle :

$$\sum_{r,s=1}^M \hat{\mathcal{O}}_k^r \hat{a}_{sr}(k) = k. \quad (4.26)$$

Autrement dit, on a un problème d'optimisation $\text{Max } E[\log \Lambda_k | \mathcal{Y}_k]$ sous la contrainte d'égalité (4.25). Il faut donc introduire λ multiplicateur de Lagrange, nous avons donc un nouveau problème avec deux inconnues, qui s'écrit sous la forme $\max_{\hat{a}, \lambda} L(\hat{a}, \lambda)$ tel que:

$$L(\hat{a}, \lambda) = \sum_{r,s=1}^M \hat{\mathcal{J}}_k^{\text{rs}} \log \hat{a}_{sr}(k) + \hat{R}(a) + \lambda \left(\sum_{r,s=1}^M \hat{\mathcal{O}}_k^r \hat{a}_{sr}(k) - k \right).$$

et qui en annulant les dérivées par rapport à $\hat{a}_{ji}(k)$ et λ devient :

$$\frac{\hat{\mathcal{J}}_k^{\text{rs}}}{\hat{a}_{sr}(k)} + \lambda \hat{\mathcal{O}}_k^r = 0 \quad (4.27)$$

D'après (4.26) on voit que $\lambda = -1$, ce qui donne :

$$\boxed{\hat{a}_{sr}(k) = \frac{\hat{\mathcal{J}}_k^{\text{rs}}}{\hat{\mathcal{O}}_k^r} = \frac{\gamma_k(\mathcal{J}_k^{\text{rs}})}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}}. \quad (4.28)$$

b) les paramètres c_i

Nous aborderons maintenant les paramètres c_i . Pour changer les paramètres c_i par \hat{c}_i , nous définissons une nouvelle mesure de probabilité P^* et une densité Λ_k^* tels que $(dP^*/dP)|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k^*$. Et sous la probabilité P^* , $\{y_l - \langle \hat{c}, X_{l-1} \rangle\}$, $l \in \mathbb{N}$, sont des variables aléatoires *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$. Alors, on a

en déduit

$$\lambda_{k+1}^*(X_k, y_{k+1}) = \exp\left(\frac{1}{2\langle \alpha, X_k \rangle^2} \left\{ \langle c, X_k \rangle^2 - \langle \hat{c}, X_k \rangle^2 + 2y_{k+1} \langle \hat{c}, X_k \rangle - 2y_{k+1} \langle c, X_k \rangle \right\}\right)$$

d'autre part $\Lambda_k^* = \prod_{l=1}^k \lambda_l^*(X_{l-1}, y_l)$. Alors

$$\begin{aligned} \log \Lambda_k^* &= \sum_{l=1}^k \frac{\langle c, X_{l-1} \rangle^2 - \langle \hat{c}, X_{l-1} \rangle^2 + 2y_l \langle \hat{c}, X_{l-1} \rangle - 2y_l \langle c, X_{l-1} \rangle}{2\langle \alpha, X_{l-1} \rangle^2}, \\ &= \sum_{l=1}^k \left(\sum_{r=1}^M \frac{\langle X_{l-1}, e_r \rangle (c_r^2 - \hat{c}_r^2(k) - 2y_l c_r + 2y_l \hat{c}_r(k))}{2\alpha_r^2} \right), \\ &= \sum_{r=1}^M \frac{2\mathcal{T}_k^r(y) \hat{c}_r(k) - \mathcal{O}_k^r \hat{c}_r^2(k)}{2\alpha_r^2} + R(c), \end{aligned}$$

avec $R(c)$ indépendant de \hat{c} , puis en prenant l'espérance de cette expression, on trouve

$$E[\log \Lambda_k^* | \mathcal{Y}_k] = \sum_{r=1}^M \frac{2\hat{\mathcal{T}}_k^r(y) \hat{c}_r(k) - \hat{\mathcal{O}}_k^r \hat{c}_r^2(k)}{2\alpha_r^2} + \hat{R}(c),$$

et en annulant la dérivée par rapport à \hat{c} , on obtient :

$$\boxed{\hat{c}_r(k) = \frac{\hat{\mathcal{T}}_k^r(y)}{\hat{\mathcal{O}}_k^r} = \frac{\gamma_k(\mathcal{T}_k^r(y))}{\gamma_k(\mathcal{O}_k^r)}}. \quad (4.29)$$

c) les paramètres α_i

Procédons de la même façon que la section précédente, nous définissons une nouvelle mesure de probabilité \hat{P} et une densité Λ_k^* tels que $(d\hat{P}/dP)|_{\mathcal{G}_k} = \hat{\Lambda}_k$. Et sous la probabilité \hat{P} , $\left\{ \frac{y_l - \langle c, X_{l-1} \rangle}{\langle \hat{\alpha}, X_{l-1} \rangle} \right\}$, $l \in \mathbb{N}$, sont des variables aléatoires *i.i.d* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous considérons

$$\hat{\lambda}_{k+1}(X_k, y_{k+1}) = \frac{\langle \alpha, X_k \rangle \exp\left(-\frac{1}{2\langle \hat{\alpha}, X_k \rangle^2} (y_{k+1} - \langle c, X_k \rangle)^2\right)}{\langle \hat{\alpha}, X_k \rangle \exp\left(-\frac{1}{2\langle \alpha, X_k \rangle^2} (y_{k+1} - \langle c, X_k \rangle)^2\right)},$$

et

$$\hat{\Lambda}_k = \prod_{l=1}^k \hat{\lambda}_l(X_{l-1}, y_l),$$

on peut alors écrire :

$$\log \hat{\Lambda}_k = \sum_{l=1}^k \left(-\log \langle \hat{\alpha}, X_{l-1} \rangle - \frac{1}{2 \langle \hat{\alpha}, X_{l-1} \rangle^2} (y_l - \langle c, X_{l-1} \rangle)^2 \right) + R(c, \alpha),$$

où $R(c, \alpha)$ est indépendant de $\hat{\alpha}$, puis

$$\begin{aligned} E[\log \hat{\Lambda}_k | \mathcal{Y}_k] &= E \left[\sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^M \left(-\langle X_{l-1}, e_i \rangle \log \hat{\alpha}_i(k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\langle X_{l-1}, e_i \rangle}{2 \hat{\alpha}_i(k)^2} (y_l^2 - 2c_i y_l + c_i^2) \right) / \mathcal{Y}_k \right] + \hat{R}(c, \alpha) \\ &= - \sum_{i=1}^M \left\{ \log \hat{\alpha}_i(k) \hat{\mathcal{O}}_k^i + \frac{1}{2 \hat{\alpha}_i(k)^2} \left(\hat{\mathcal{T}}_k^i(y^2) - 2c_i \hat{\mathcal{T}}_k^i(y) + c_i^2 \hat{\mathcal{O}}_k^i \right) \right\} \\ &\quad + \hat{R}(c, \alpha). \end{aligned}$$

et en annulant la dérivée par rapport à $\hat{\alpha}_i(k)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_i(k)^2 &= (\hat{\mathcal{O}}_k^i)^{-1} \left(\hat{\mathcal{T}}_k^i(y^2) - 2c_i \hat{\mathcal{T}}_k^i(y) + c_i^2 \hat{\mathcal{O}}_k^i \right) \\ &= (\gamma(\hat{\mathcal{O}}_k^i))^{-1} \left(\gamma_k(\mathcal{T}_k^i(y^2)) - 2c_i \gamma_k(\mathcal{T}_k^i(y)) + c_i^2 \gamma_k(\mathcal{O}_k^i) \right). \end{aligned} \tag{4.30}$$

4.4 Application aux données financière (VIX)

4.4.1 Le VIX-indicateur de la volatilité

Le "VIX", indicateur de Volatilité du Marché Américain largement suivi des investisseurs, constitue un moyen des anticipations de la volatilité à court terme à partir des prix des options. C'est un indice de Volatilité calculé quotidiennement par le CBOE (Chicago Board Options Exchanges). Il reflète la Nervosité des Marchés Financiers. Globalement, quand il est bas, les marchés sont peu nerveux et l'optimisme est de rigueur. A l'inverse, quand il est haut les marchés sont plus nerveux et pessimistes

La méthode de calcul du VIX a été réactualisée en Septembre 2003 par le CBOE et ce, pour avoir un indicateur plus représentatif. Ainsi, le VIX est maintenant basé sur les prix des options (Warrants Calls & Puts) sur l'index de S&P 500 (SPX), alors qu'auparavant le calcul était fait sur les options sur indice de S&P100 (OEX). Le VIX est notamment calculé en faisant la moyenne des volatilités sur les Call et Put sur l'Indice de S&P500.

l'indice VIX donne en instantané la volatilité prévue sur le S&P500 au cours des 30 jours suivants. La méthode de calcul du VIX repose sur le prix des options sur l'indice S&P500 (la volatilité implicite de cet indice). En outre, le nouveau VIX n'est plus calculé à partir du modèle d'évaluation de Black & Scholes. Le VIX utilise désormais une nouvelle formule dérivée de la volatilité attendue en faisant une moyenne pondérée des prix *out of the money* des puts et des calls. Le nouveau calcul de la volatilité VIX se conforme plus étroitement à la pratique de l'industrie.

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_t \frac{\Delta K_t}{K_t} e^{KT} Q(K_t) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (4.31)$$

où

σ est le $\frac{\text{VIX}}{100} \Rightarrow \text{VIX} = \sigma \times 100$.

T : la date d'expiration.

r : taux d'intérêt sans risque jusqu'à échéance.

F : l'indice de prix à terme, dérivé d'un indice des prix des options

$$F = \text{prix d'exercice} + e^{rT} \times (\text{prix du Call} - \text{prix du put}).$$

K_0 : le premier prix d'exercice au-dessous du niveau de l'indice de prix à terme (F).

K_i : le prix d'exercice d'une option *out of the money*.

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_i}{2}$$

$Q(K_i)$: la valeur médiane de la fourchette pour chaque option de prix d'exercice K_i .

Il est difficile de donner un sens à la valeur du VIX. Il est plus pertinent d'utiliser la direction que prend le VIX. Ces dernières années, avec les événements de 2001 et la crise des marchés financiers, la volatilité et la nervosité ont été très élevées. Depuis les plus bas de 2002/2003, le VIX n'a pas cessé de chuter et atteint en 2005 des niveaux équivalents à 1993-1995. Ces niveaux n'ont que peu d'importance... En fait, si le VIX venait à rebondir fortement, on pourrait l'interpréter comme un changement dans la perception globale du Marché. L'indice VIX est tourné vers le futur proche et utilise les sentiments et les perceptions de variations des opérateurs. C'est un indice très sensible aux réactions humaines.

4.4.2 Implémentation et résultat

Dans notre application, nous utilisons comme processus d'observation le $\log(\text{VIX})$, et on suppose que le nombre de régime du marché est égale à trois. En effet dès que le nombre de régime est supérieur ou égale à 4, on a constaté l'existence seulement de trois régime différents. Chacun de ces régimes est caractérisé par un niveau de volatilité donné, les autres sont presque semblables à l'un des trois.

Les neuf paramètres qui doivent être estimés sont : probabilité $\gamma(X)_r$, niveau moyen \hat{c}_r et l'écart-type $\hat{\alpha}_r$ pour chaque régime $r, 1 \leq r \leq 3$.

La première étape de l'implémentation ici sera d'initialiser le filtre, c'est à dire de déterminer des bonnes valeurs pour $\gamma_0(X_0)$, $c_i(t_0)$, $1 \leq i \leq M$, $\alpha_i(t_0)$, $1 \leq i \leq M$. Le plus naturelle c'est de supposer qu'à la date t_0 , la chaîne de Markov X_0 à la même probabilité d'être dans l'état e_i que dans l'état e_j avec $i \neq j$. Donc on prend :

$$\gamma_0(X_0)' = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{Moments1: } c_1 := c_2 - 0.5 = 2$$

$$\text{Moments1: } c_2 = \text{AVERAGE}(\log(\text{VIX}(t_0, t))) = 2.5$$

$$\text{Moments1: } c_3 := c_2 + 0.5 = 3$$

$$\text{Moments2: } \alpha_i := \text{STDEV}(\log(\text{VIX}(t_0, t))) = 0.3, \forall i = 1, 2, 3.$$

AVERAGE \Rightarrow calcule la moyenne des éléments.

STDEV \Rightarrow calcule l'écart type des éléments (pour un échantillon).

Après initialisation, on peut itérer les étapes de l'algorithme du filtre jusqu'à atteindre le temps t (la date d'aujourd'hui). Ceci est réalisé dans le code source par la fonction

```
FL_HMM_EM(Dates, Observation, NbRegimes, InitStates, InitTransProb,
Moments1, Moments2, out_InitTransProb, out_Moments1, out_Moments2,
out_NbTran, out_OccupTime).
```

Une itération correspond à l'ensemble des cinq étapes décrites plus haut. Dans le code source, elle est

EM_K_ParmReestimation(NbRegimes 3, Observation y_k , Dates t_k ,
 InitTransProb $(\hat{a}_{ji}(k-1))_{1 \leq i, j \leq 3}$, Moments1 $(\hat{c}_r(k-1))_{1 \leq r \leq 3}$,
 Moments2 $(\hat{\alpha}_r(k-1))_{1 \leq r \leq 3}$, States $(\gamma(X_{k-1}))$, NbTran $(\mathcal{J}_{k-1}^{r,s})_{1 \leq r, s \leq 3}$,
 OccupTime $(\mathcal{O}_{k-1}^r)_{1 \leq r \leq 3}$, ObPro1 $(\mathcal{T}_{k-1}^r(y))_{1 \leq r \leq 3}$, ObPro2 $(\mathcal{T}_{k-1}^r(y^2))_{1 \leq r \leq 3}$)

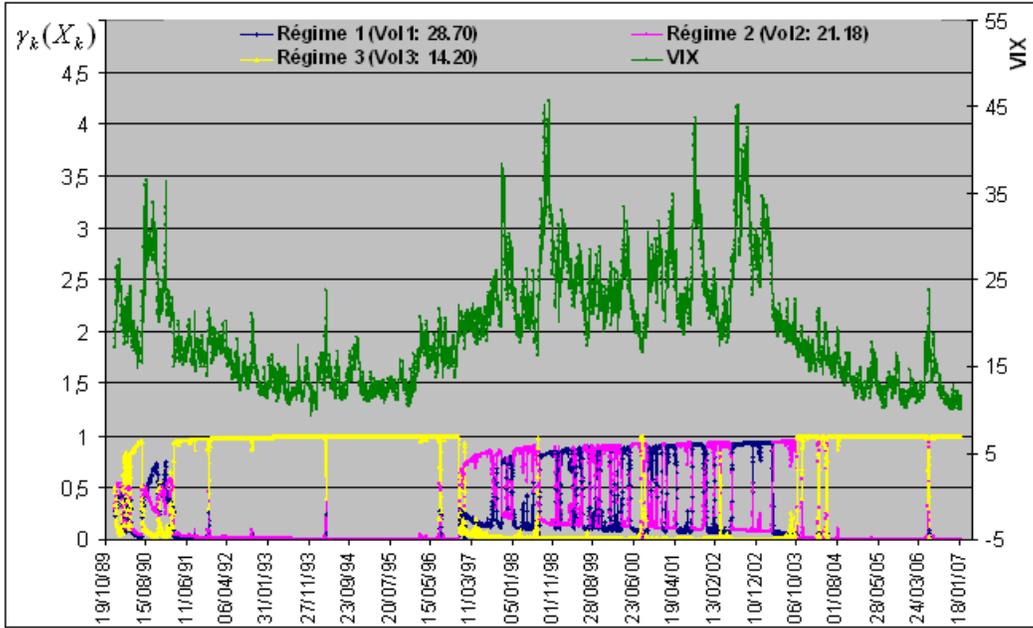


Figure 4.1. Les trois régimes de la volatilité du marché reflété de l'index VIX, sur la période du 01/01/1990 au 01/02/2007.

Nous détectons trois régimes de VIX, avec une moyenne des niveaux de vol 12 (LR : faible régime), 18 (MR : régime moyen) et 26 (HR : haut régime), respectivement.

La figure 4.1 présentent l'évolution de la probabilité conditionnelle d'être en LR (en jaune) et MR (en rose) et HR(en bleu).

Sur la période du 12/03/91 au 16/12/96, on remarque que la troisième composante de $\gamma_k(X_k)$ est très proche de 1 (ce qui signifie qu'on est au régime 3 avec une probabilité $\simeq 1$ et un niveau de volatilité de 12 %), sauf dans quelques points particuliers. Ces points correspondent à des sauts dans la valeur de VIX, sans changement de régime.

Chapitre 5

Résultats

5.1 Conditions aux limites

Nous avons décrit en section (3.3.3) les conditions aux limites nécessaires pour la résolution numérique de l'équation HJB avec une mesure de risque quadratique. Nous reprenons ici les notations du chapitre 3 et plus particulièrement de la section 3.3.3, nous avons vu qu'en éliminant les valeurs au bord à l'aide des conditions aux limites, on obtient ainsi un système de N équations linéaires à N inconnues où $N = \text{card}(\mathcal{D})$.

On notera que la discrétisation par les deux opérateurs de différence finie généralisée (D_k^u , et Δ_ξ décrit dans 3.3.1) font intervenir des « points fictifs » qui sont au bord et en dehors. Dans la suite, nous nous intéressons à la suppression de ces points.

On pourra éliminer les points fictifs en trouvant une combinaison linéaire qui n'utilise plus que les valeurs de $v(r)$ dans \mathcal{D} . Il faudra donc résoudre le système linéaire $A \cdot v^{q,m+1}(r) = v^{q,m}(r)$ à N équation et N inconnues ou cette fois la matrice A est modifier en incluant ces combinaisons linéaires.

Notation 5.1.

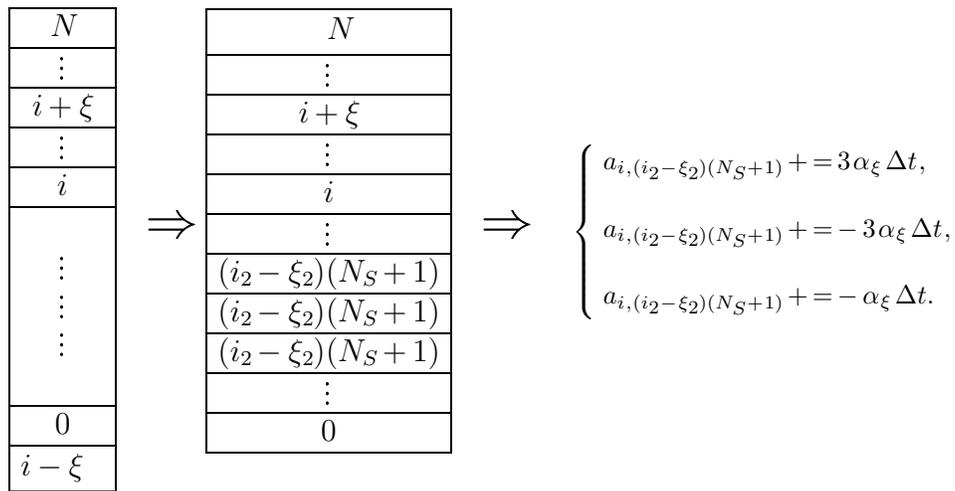
- *le point (p, q) correspond au sommet numéroté $p + q(N_S + 1)$.*
- *Afin d'alléger l'écriture, nous utiliserons la notation suivante : $v(p, q)$ pour faire référence à l'expression $v^{q,m+1}(S_p, V_q, r)$.*
- *Les pas de discrétisation seront notés $h = h_S$ et $k = h_V$.*

Exemple 5.2.

On considère $i = i_1 + i_2 (N_S + 1)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ tels que $i_1 - \xi_1 = -1$ et $0 \leq i_2 - \xi_2 \leq N$, alors le point $i - \xi$ est au bord. Pour remplacer ce point fictif, nous allons utiliser les conditions aux limites décrites dans le tableau 3.1. On obtient ainsi une combinaison linéaire entre ce point fictif et des points appartenant à D :

$$v_{i-\xi} = -3v_{0, i_2 - \xi_2} + 3v_{1, i_2 - \xi_2} + v_{2, i_2 - \xi_2}.$$

Puis, on modifie les termes $a_{i, (i_2 - \xi_2)(N_S + 1)}$, $a_{i, 1 + (i_2 - \xi_2)(N_S + 1)}$ et $a_{i, 2 + (i_2 - \xi_2)(N_S + 1)}$ dans la i ème colonne de A.



Les tableaux et les figures suivants résument toutes les possibilités de ces points fictifs.

Le cas : $p \leq 0$, et $0 \leq q \leq N_V$

$\hat{p} = p $
$v(0, q) \simeq v(p, q) + \hat{p} h v_S + \frac{(\hat{p})^2}{2} h^2 v_{SS}$
$v(1, q) \simeq v(p, q) + (\hat{p} + 1) h v_S + \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$
$v(2, q) \simeq v(p, q) + (\hat{p} + 2) h v_S + \frac{(\hat{p} + 2)^2}{2} h^2 v_{SS}$
$\frac{\partial^3 v}{\partial S^3} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{p} & \hat{p} + 1 & \hat{p} + 2 \\ \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 & (\hat{p} + 2)^2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$v(p, q) = \mathbf{a} \times v(0, q) + \mathbf{b} \times v(1, q) + \mathbf{c} \times v(2, q)$

Tableau 5.1.

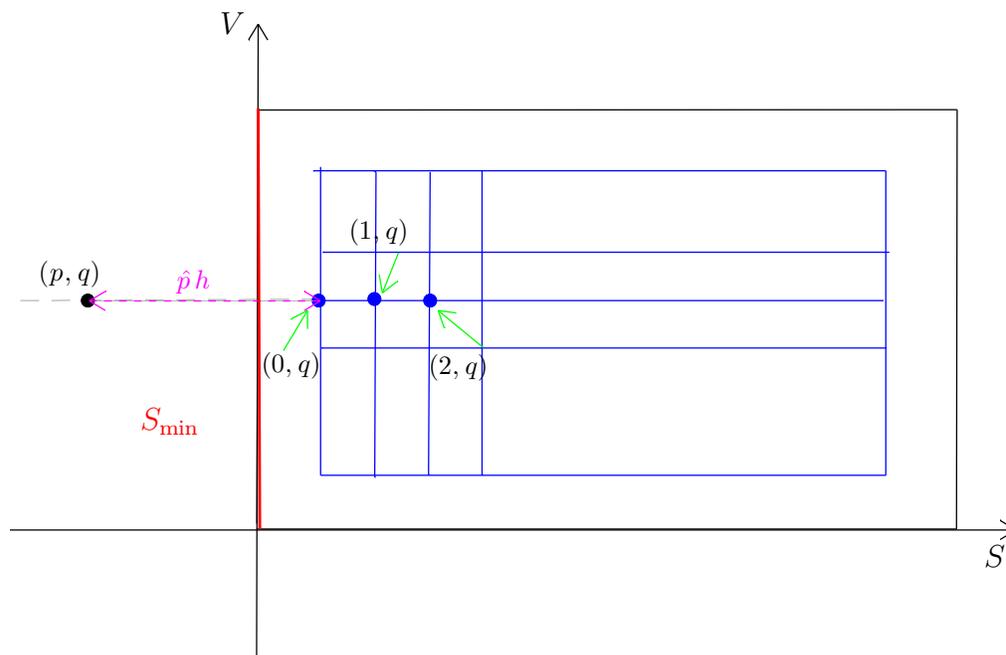


Figure 5.1.

Le cas : $p > N_S$, et $0 \leq q \leq N_V$

$\hat{p} = p - N_S$	
$v(N_S, q)$	$\simeq v(p, q) - \hat{p} h v_S + \frac{(\hat{p})^2}{2} h^2 v_{SS}$
$v(N_S - 1, q)$	$\simeq v(p, q) - (\hat{p} + 1) h v_S + \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$
$v(N_S - 2, q)$	$\simeq v(p, q) - (\hat{p} + 2) h v_S + \frac{(\hat{p} + 2)^2}{2} h^2 v_{SS}$
$\frac{\partial^3 v}{\partial S^3} = 0 \Rightarrow$	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\hat{p} & -(\hat{p} + 1) & -(\hat{p} + 2) \\ \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 & (\hat{p} + 2)^2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$v(p, q) = \mathbf{a} \times v(N_S, q) + \mathbf{b} \times v(N_S - 1, q) + \mathbf{c} \times v(N_S - 2, q)$	

Tableau 5.2.

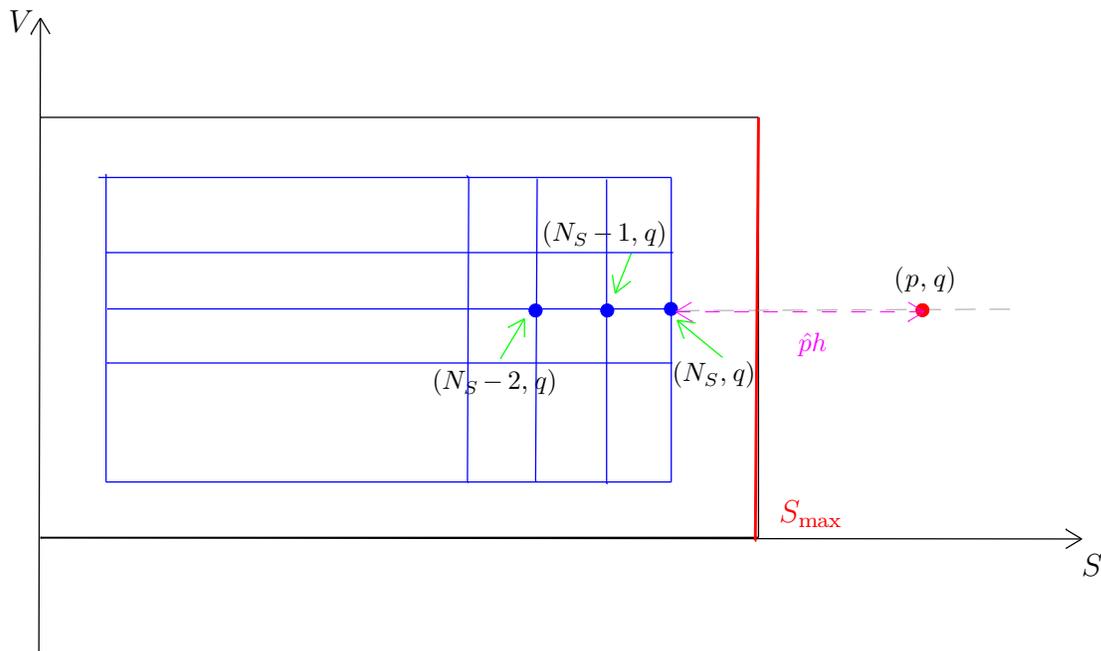


Figure 5.2.

Le cas : $0 \leq p \leq N_V$, et $q \leq 0$

$\hat{q} = q $
$v(p, 0) \simeq v(p, q) + \hat{q} k v_V + \frac{(\hat{q})^2}{2} k^2 v_{VV}$ $v(p, 1) \simeq v(p, q) + (\hat{q} + 1) k v_V + \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} h^2 v_{VV}$ $v(p, 2) \simeq v(p, q) + (\hat{q} + 2) h v_S + \frac{(\hat{q} + 2)^2}{2} h^2 v_{VV}$
$\frac{\partial^3 v}{\partial V^3} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{q} & (\hat{q} + 1) & (\hat{q} + 2) \\ \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 & (\hat{q} + 2)^2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$v(p, q) = \mathbf{a} \times v(p, 0) + \mathbf{b} \times v(p, 1) + \mathbf{c} \times v(p, 2)$

Tableau 5.3.

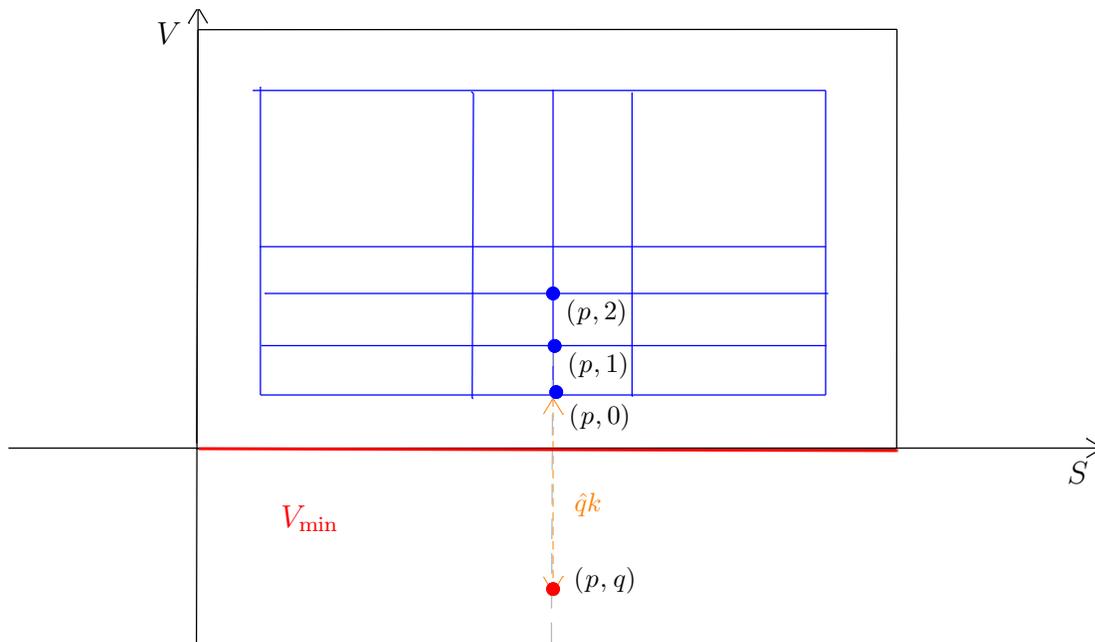


Figure 5.3.

Le cas : $0 \leq p \leq N_V$, et $q > N_S$

$\hat{q} = q - N_V$
$v(p, N_V) \simeq v(p, q) - \hat{q} k v_S + \frac{(\hat{q})^2}{2} k^2 v_{VV}$ $v(p, N_V - 1) \simeq v(p, q) - (\hat{q} + 1) k v_V + \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$ $v(p, N_V - 2) \simeq v(p, q) - (\hat{q} + 2) k v_V + \frac{(\hat{q} + 2)^2}{2} k^2 v_{VV}$
$\frac{\partial^3 v}{\partial V^3} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\hat{q} & -(\hat{q} + 1) & -(\hat{q} + 2) \\ \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 & (\hat{q} + 2)^2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$v(p, q) = \mathbf{a} \times v(p, N_V) + \mathbf{b} \times v(p, N_V - 1) + \mathbf{c} \times v(p, N_V - 2)$

Tableau 5.4.

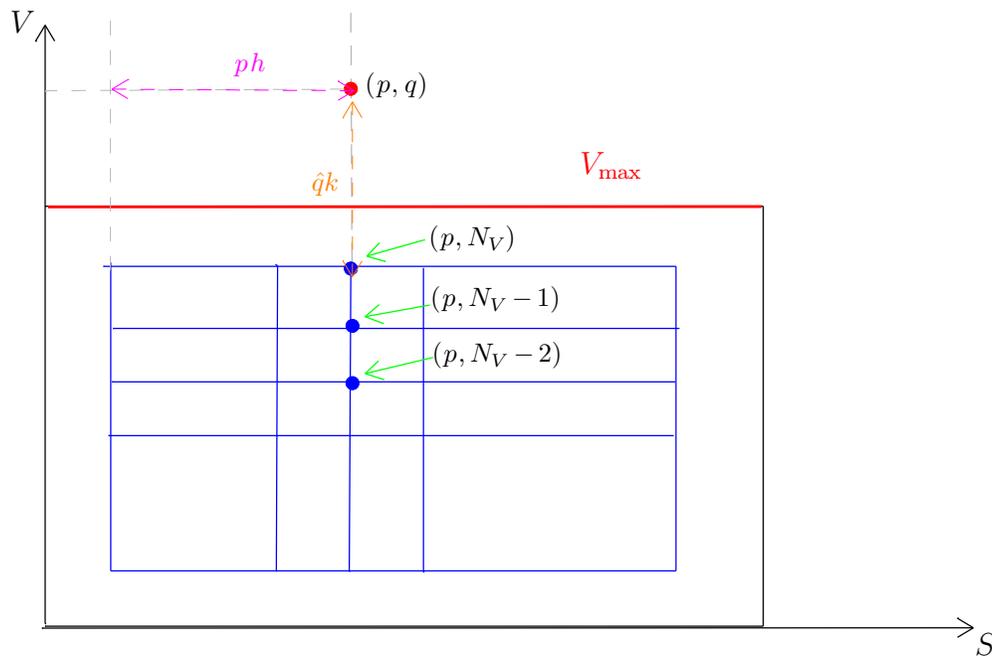


Figure 5.4.

Le cas : $p < 0$, et $q < 0$

$\hat{p} = p , \hat{q} = q $					
$v(0, 0) \simeq v(p, q) + \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ \hat{p} \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(1, 0) \simeq v(p, q) + (\hat{p} + 1) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ (\hat{p} + 1) \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(2, 0) \simeq v(p, q) + (\hat{p} + 2) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 2)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ (\hat{p} + 2) \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(0, 1) \simeq v(p, q) + \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ (\hat{q} + 1) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ \hat{p} (\hat{q} + 1) h k v_{SV}$	
$v(0, 2) \simeq v(p, q) + \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ (\hat{q} + 2) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 2)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ \hat{p} (\hat{q} + 2) h k v_{SV}$	
$v(1, 1) \simeq v(p, q) + (\hat{p} + 1) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ (\hat{q} + 1) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ (\hat{p} + 1) (\hat{q} + 1) h k v_{SV}$	
$\frac{\partial^3 v}{\partial S^3} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial V^3} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial S^2 \partial V} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial S \partial V^2} = 0.$					
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hat{p} & \hat{p} + 1 & \hat{p} + 2 & \hat{p} & \hat{p} & \hat{p} + 1 \\ \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 & (\hat{p} + 2)^2 & \hat{p}^2 & \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 \\ \hat{q} & \hat{q} + 1 & \hat{q} + 2 & \hat{q} & \hat{q} & \hat{q} + 1 \\ \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 & (\hat{q} + 2)^2 & \hat{q}^2 & \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 \\ \hat{p} \hat{q} & (\hat{p} + 1) \hat{q} & (\hat{p} + 2) \hat{q} & \hat{p} (\hat{q} + 1) & \hat{p} (\hat{q} + 1) & (\hat{p} + 1) (\hat{q} + 2) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$					
$v(p, q) = \mathbf{a} \times v(0, 0) + \mathbf{b} \times v(1, 0) + \mathbf{c} \times v(2, 0)$ $+ \mathbf{d} \times v(0, 1) + \mathbf{e} \times v(0, 2) + \mathbf{f} \times v(1, 1)$					

Tableau 5.5.

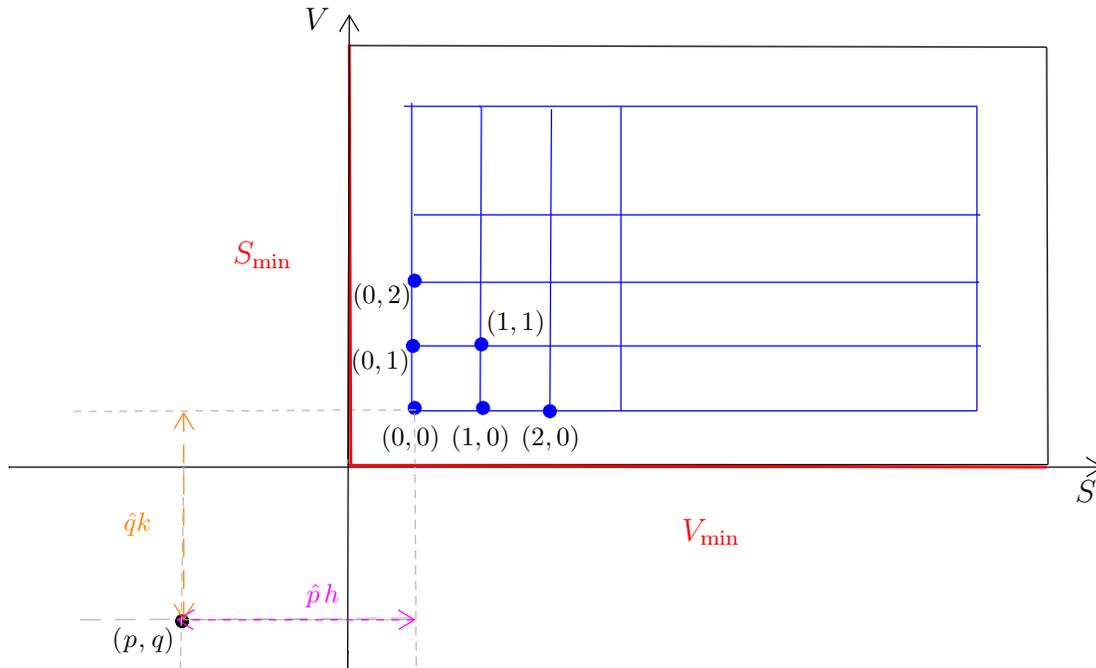


Figure 5.5.

Le cas : $p < 0$, et $q > N_V$

$\hat{p} = p , \hat{q} = q - N_V$					
$v(0, 0) \simeq v(p, q) + \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- \hat{p} \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(1, 0) \simeq v(p, q) + (\hat{p} + 1) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- (\hat{p} + 1) \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(2, 0) \simeq v(p, q) + (\hat{p} + 2) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 2)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- (\hat{p} + 2) \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(0, 1) \simeq v(p, q) + \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- (\hat{q} + 1) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- \hat{p} (\hat{q} + 1) h k v_{SV}$	
$v(0, 2) \simeq v(p, q) + \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- (\hat{q} + 2) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 2)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- \hat{p} (\hat{q} + 2) h k v_{SV}$	
$v(1, 1) \simeq v(p, q) + (\hat{p} + 1) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- (\hat{q} + 1) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- (\hat{p} + 1) (\hat{q} + 1) h k v_{SV}$	
$\frac{\partial^3 v}{\partial S^3} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial V^3} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial S^2 \partial V} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial S \partial V^2} = 0.$					
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hat{p} & \hat{p} + 1 & \hat{p} + 2 & \hat{p} & \hat{p} & \hat{p} + 1 \\ \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 & (\hat{p} + 2)^2 & \hat{p}^2 & \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 \\ -\hat{q} & -(\hat{q} + 1) & -(\hat{q} + 2) & -\hat{q} & -\hat{q} & -(\hat{q} + 1) \\ \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 & (\hat{q} + 2)^2 & \hat{q}^2 & \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 \\ -\hat{p}\hat{q} & -(\hat{p} + 1)\hat{q} & -(\hat{p} + 2)\hat{q} & -\hat{p}(\hat{q} + 1) & -\hat{p}(\hat{q} + 1) & -(\hat{p} + 1)(\hat{q} + 2) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$					
$v(p, q) = \mathbf{a} \times v(0, N_V) + \mathbf{b} \times v(0, N_V - 1) + \mathbf{c} \times v(0, N_V - 2) \\ + \mathbf{d} \times v(1, N_V) + \mathbf{e} \times v(2, N_V) + \mathbf{f} \times v(1, N_V - 1)$					

Tableau 5.6.

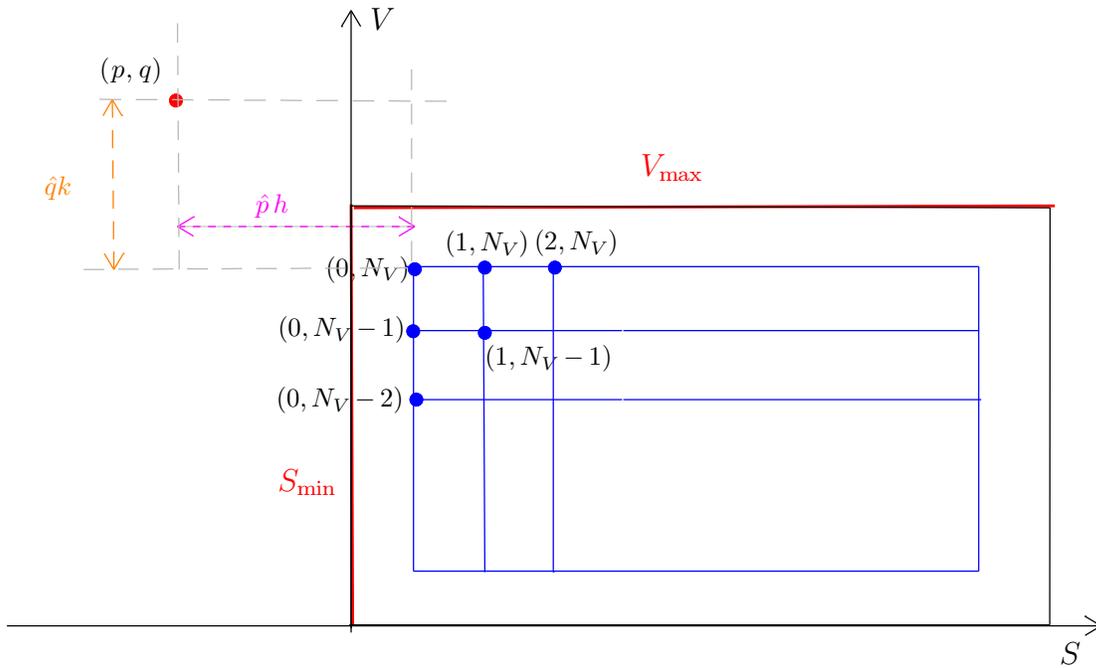


Figure 5.6.

Le cas : $p > N_S$, et $q < 0$

$\hat{p} = p - N_S, \quad \hat{q} = q $					
$v(0, 0) \simeq v(p, q) - \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- \hat{p} \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(1, 0) \simeq v(p, q) - (\hat{p} + 1) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- (\hat{p} + 1) \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(2, 0) \simeq v(p, q) - (\hat{p} + 2) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 2)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- (\hat{p} + 2) \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(0, 1) \simeq v(p, q) - \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ (\hat{q} + 1) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- \hat{p} (\hat{q} + 1) h k v_{SV}$	
$v(0, 2) \simeq v(p, q) - \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ (\hat{q} + 2) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 2)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- \hat{p} (\hat{q} + 2) h k v_{SV}$	
$v(1, 1) \simeq v(p, q) - (\hat{p} + 1) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$+ (\hat{q} + 1) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$- (\hat{p} + 1) (\hat{q} + 1) h k v_{SV}$	
$\frac{\partial^3 v}{\partial S^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial V^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial S^2 \partial V} = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial S \partial V^2} = 0.$					
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\hat{p} & -(\hat{p} + 1) & -(\hat{p} + 2) & -\hat{p} & -\hat{p} & -\hat{p} + 1 \\ \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 & (\hat{p} + 2)^2 & \hat{p}^2 & \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 \\ \hat{q} & \hat{q} + 1 & \hat{q} + 2 & \hat{q} & \hat{q} & \hat{q} + 1 \\ \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 & (\hat{q} + 2)^2 & \hat{q}^2 & \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 \\ -\hat{p}\hat{q} & -(\hat{p} + 1)\hat{q} & -(\hat{p} + 2)\hat{q} & -\hat{p}(\hat{q} + 1) & -\hat{p}(\hat{q} + 1) & -(\hat{p} + 1)(\hat{q} + 2) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$					
$v(p, q) = \mathbf{a} \times v(N_S, 0) + \mathbf{b} \times v(N_S - 1, 0) + \mathbf{c} \times v(N_S - 2, 0) \\ + \mathbf{d} \times v(N_S, 1) + \mathbf{e} \times v(N_S - 1, 2) + \mathbf{f} \times v(N_S - 1, 1)$					

Tableau 5.7.

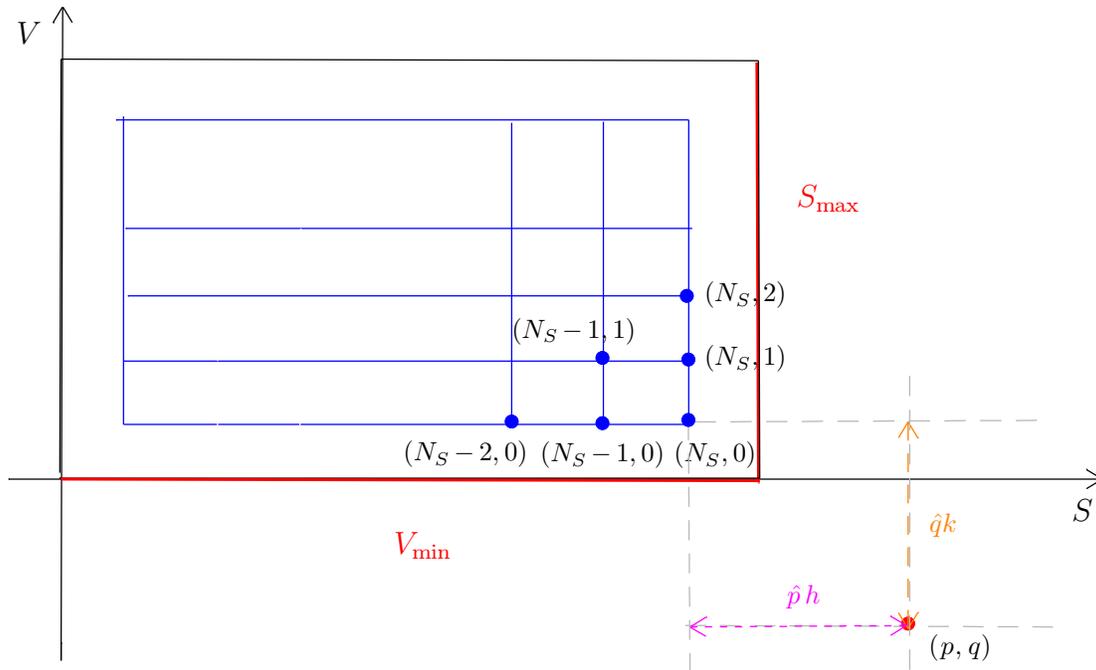


Figure 5.7.

Le cas : $p > N_S$, et $q > N_V$

$\hat{p} = p - N_S, \hat{q} = q - N_V$					
$v(0, 0) \simeq v(p, q) - \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ \hat{p} \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(1, 0) \simeq v(p, q) - (\hat{p} + 1) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ (\hat{p} + 1) \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(2, 0) \simeq v(p, q) - (\hat{p} + 2) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 2)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- \hat{q} k v_V$	$+ \frac{\hat{q}^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ (\hat{p} + 2) \hat{q} h k v_{SV}$	
$v(0, 1) \simeq v(p, q) - \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- (\hat{q} + 1) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ \hat{p} (\hat{q} + 1) h k v_{SV}$	
$v(0, 2) \simeq v(p, q) - \hat{p} h v_S$	$+ \frac{\hat{p}^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- (\hat{q} + 2) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 2)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ \hat{p} (\hat{q} + 2) h k v_{SV}$	
$v(1, 1) \simeq v(p, q) - (\hat{p} + 1) h v_S$	$+ \frac{(\hat{p} + 1)^2}{2} h^2 v_{SS}$	$- (\hat{q} + 1) k v_V$	$+ \frac{(\hat{q} + 1)^2}{2} k^2 v_{VV}$	$+ (\hat{p} + 1) (\hat{q} + 1) h k v_{SV}$	
$\frac{\partial^3 v}{\partial S^3} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial V^3} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial S^2 \partial V} = 0, \frac{\partial^3 v}{\partial S \partial V^2} = 0.$					
$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\hat{p} & -(\hat{p} + 1) & -(\hat{p} + 2) & -\hat{p} & -\hat{p} & -\hat{p} + 1 \\ \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 & (\hat{p} + 2)^2 & \hat{p}^2 & \hat{p}^2 & (\hat{p} + 1)^2 \\ -\hat{q} & -(\hat{q} + 1) & -(\hat{q} + 2) & -\hat{q} & -\hat{q} & -\hat{q} + 1 \\ \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 & (\hat{q} + 2)^2 & \hat{q}^2 & \hat{q}^2 & (\hat{q} + 1)^2 \\ \hat{p} \hat{q} & (\hat{p} + 1) \hat{q} & (\hat{p} + 2) \hat{q} & \hat{p} (\hat{q} + 1) & \hat{p} (\hat{q} + 1) & (\hat{p} + 1) (\hat{q} + 2) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$					
$v(p, q) = \mathbf{a} \times v(N_S, N_V) + \mathbf{b} \times v(N_S - 1, N_V) + \mathbf{c} \times v(N_S - 1, N_V) \\ + \mathbf{d} \times v(N_S, N_V - 1) + \mathbf{e} \times v(N_S, N_V - 2) + \mathbf{f} \times v(N_S - 1, N_V - 1)$					

Tableau 5.8.

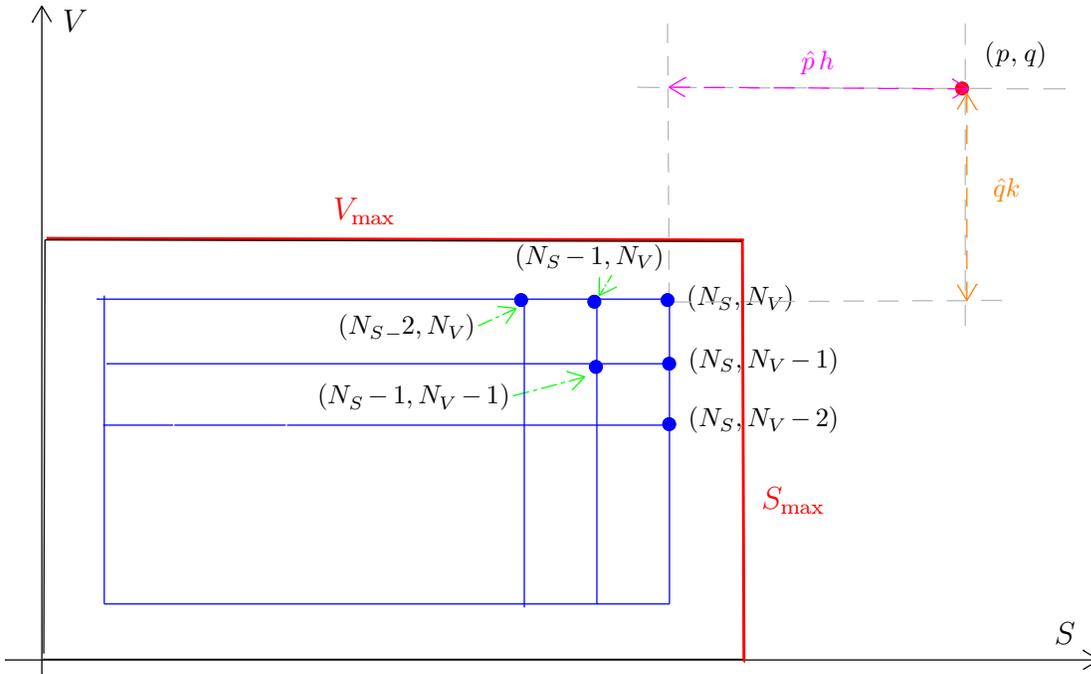


Figure 5.8.

5.2 Mécanisme de la fonction « PriceOption »

```

Price_PCPR_Option(FLOption*, FLPricingContext_Cache *, FLPricingResults *)
→ CFInstrument ;
→ Pricing Results;
→ initContext(FLPricingContext_Cache *) ; [méthode virtual (MV)]
    ↪ CalcDate et SettleDate;
    ↪ setAims(FLPricingContext_Cache *) ; [MV]
    ↪ YieldCurve(FLPricingContextValue &);
    ↪ Recovery;
    ↪ initContextSpec(FLPricingContext_Cache *) ; [MV]
→ doCalc ( ) ; [MV]
    ↪ Calc ( ) ; [MV]
        ↪ initPricing ( ) ; [MV]
            ↪ initEqForward ( ) ;
            ↪ buildHJBGrid ( ) ;
                ↪ Regular_2D(double in_Strike, double in_Spotx, double in_Spoty, double
                in_Xmin, double in_Xmax, double in_Ymin, double in_Ymax, int in_Nx,
                int in_Ny, int in_OptionType);
        ↪ initCoeff ( ) ; [MV]
        ↪ initTerminalValues ( ) ; [MV]
            ↪ if (cache_enm_OptionType = FL_OPTION_TYPE_CALL)
                
$$U = (V - (S - K)^+)^2$$

            ↪ else //cache_enm_OptionType = FL_OPTION_TYPE_PUT
                
$$U = (V - (K - S)^+)^2$$

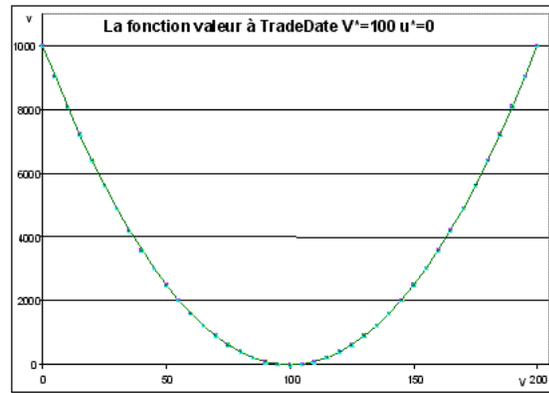
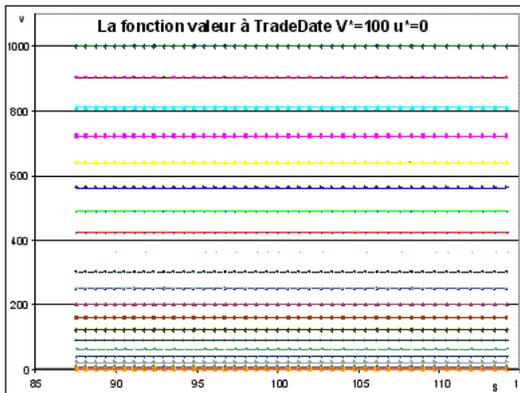
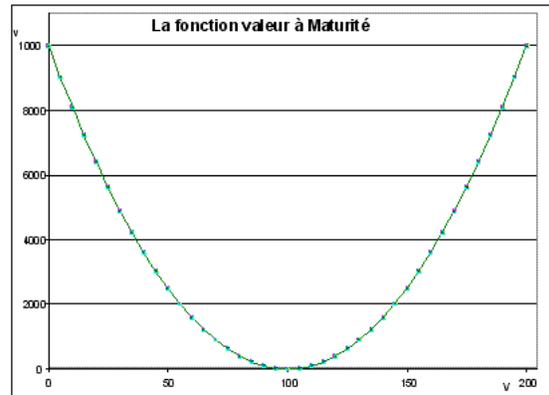
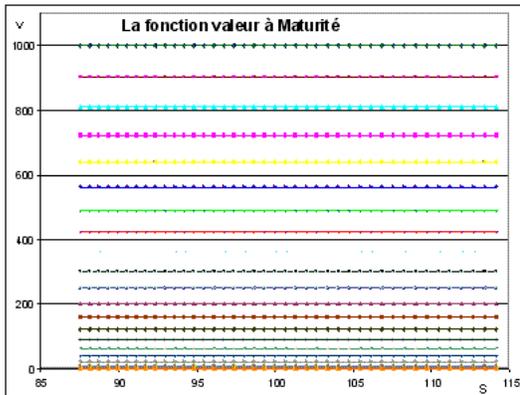
        ↪ setConstraints ( ) ;
        ↪ for (i=1_int_NbDateItems - 2; i >= 0; i--)
            ↪ PriceMethod :: Do( FLDateTime &, FLDateTime &); [MV]
                ↪ price2D (const FLDateTime &, const FLDateTime &); [MV]
                    ↪ Eval (const FLDateTime &, const FLDateTime &); [MV]
                        ↪ OptimalControl(int NumRegime, const FLDateTime &);
                        ↪ HJBMatrixCSC_Implicit (int in_NumRegime);
                        ↪ SplittingBiCG_Implicit (int in_NumRegime);
                ↪ Interpolate_Min(int in_Nx, int in_Ny, int in_NumRegime, double* pX,
                double* pY, double* & Yopt, int* & Uopt, int in_m);
                ↪ Interpolate(int Dim, double* pX , double* pVal, double dVal, double* pRes);
    ↪ writeResults_Pricing ( ) [MV]
        ↪ Write results in PricingResultats

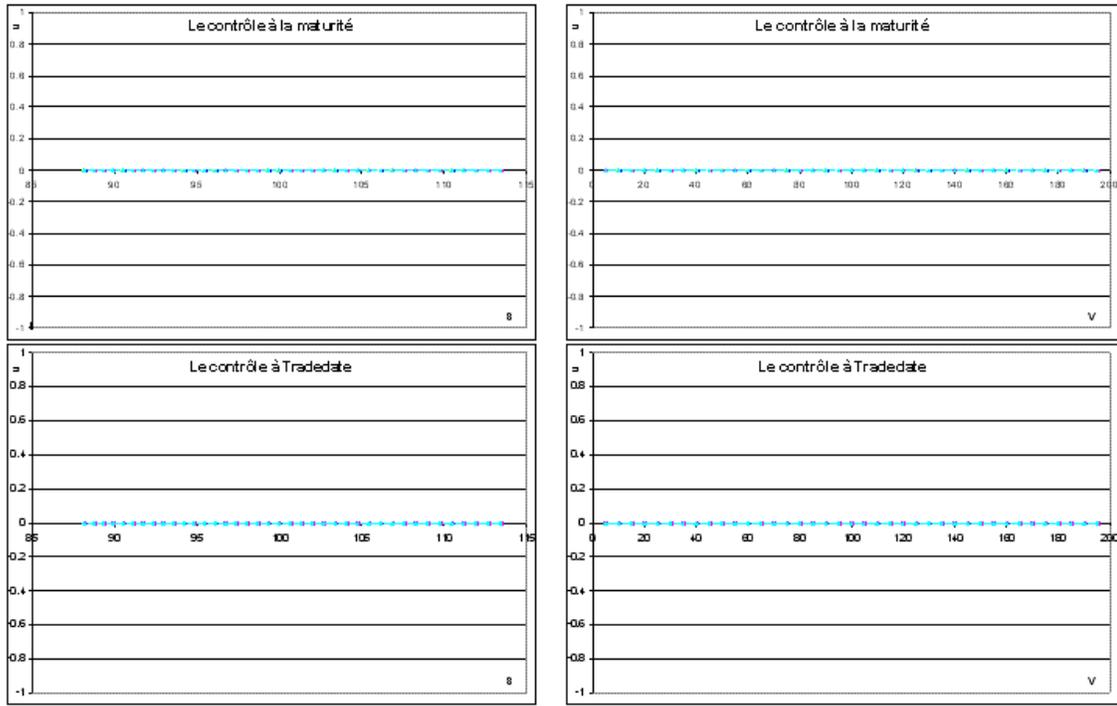
```

5.3 Testes numériques

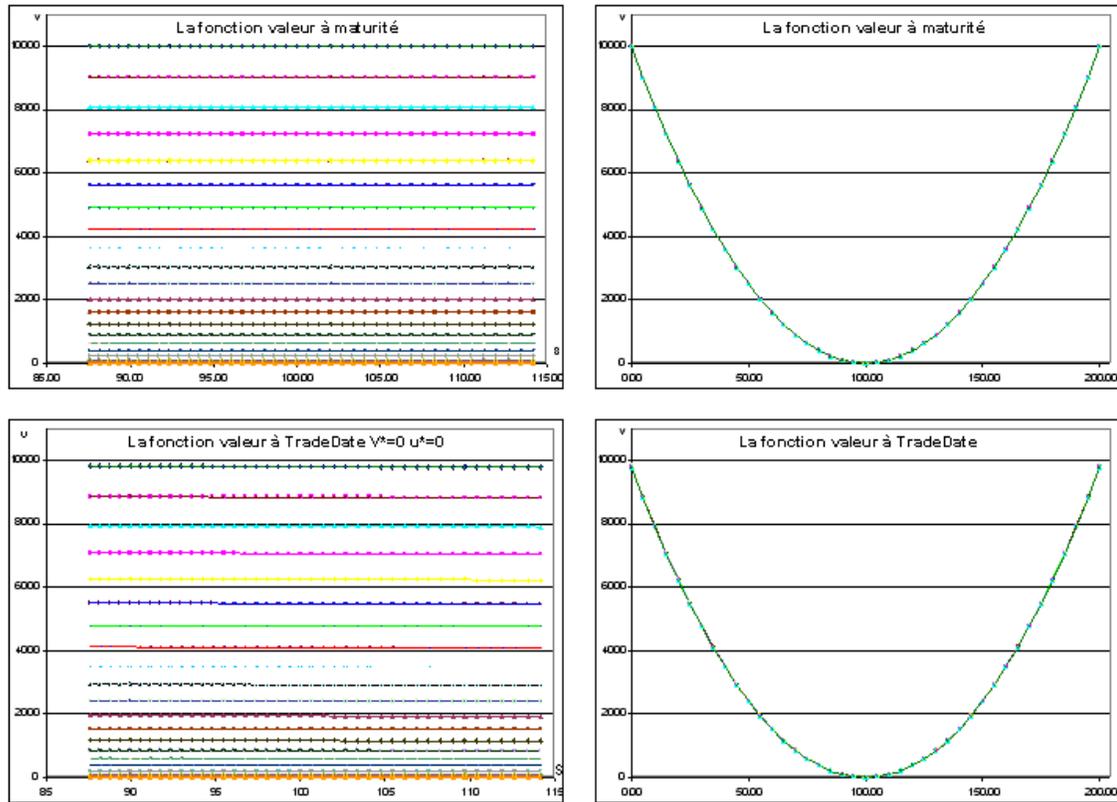
5.3.1 Payoff $(V - 100)^2$

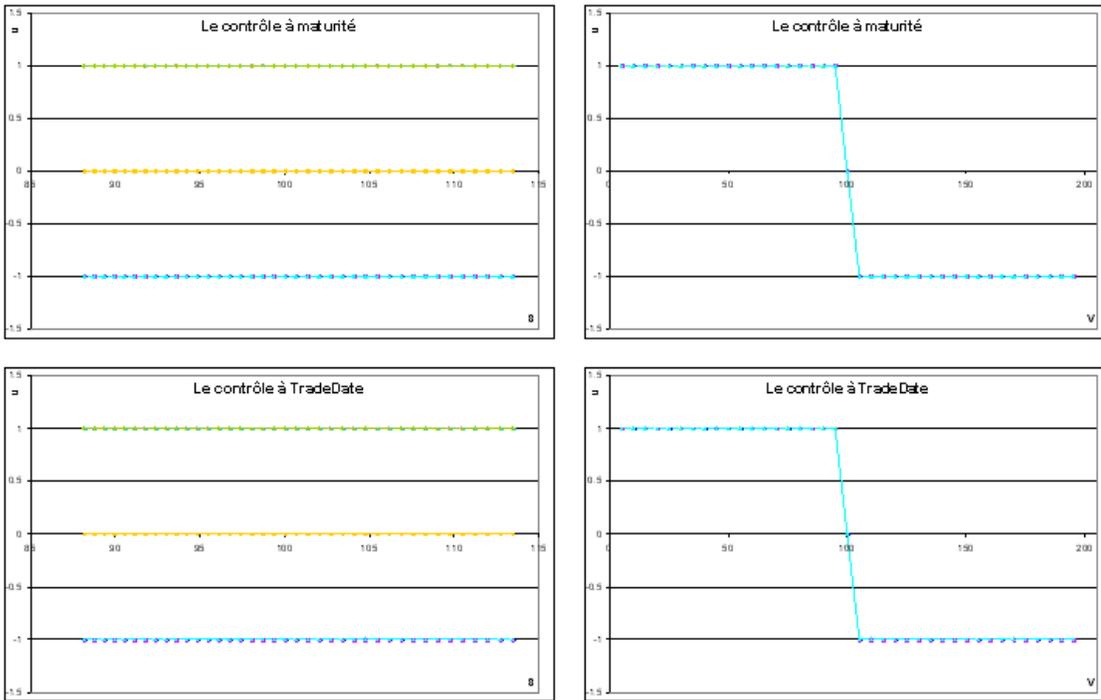
5.3.1.1 Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =1%, drift=0%



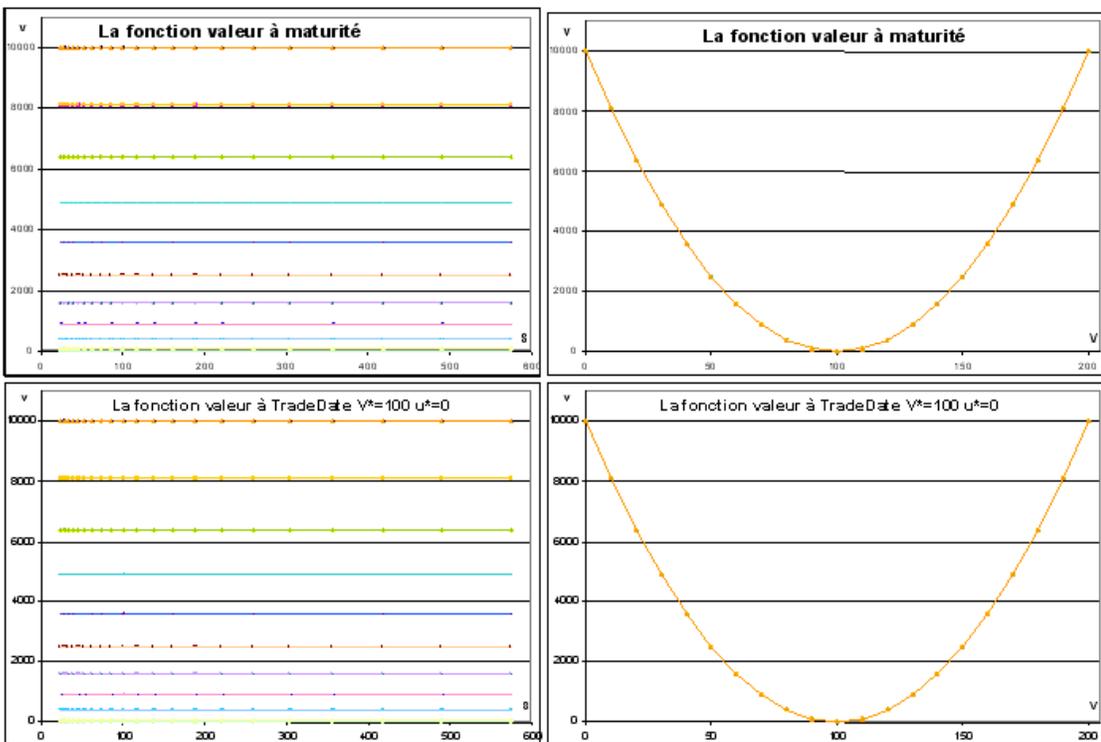


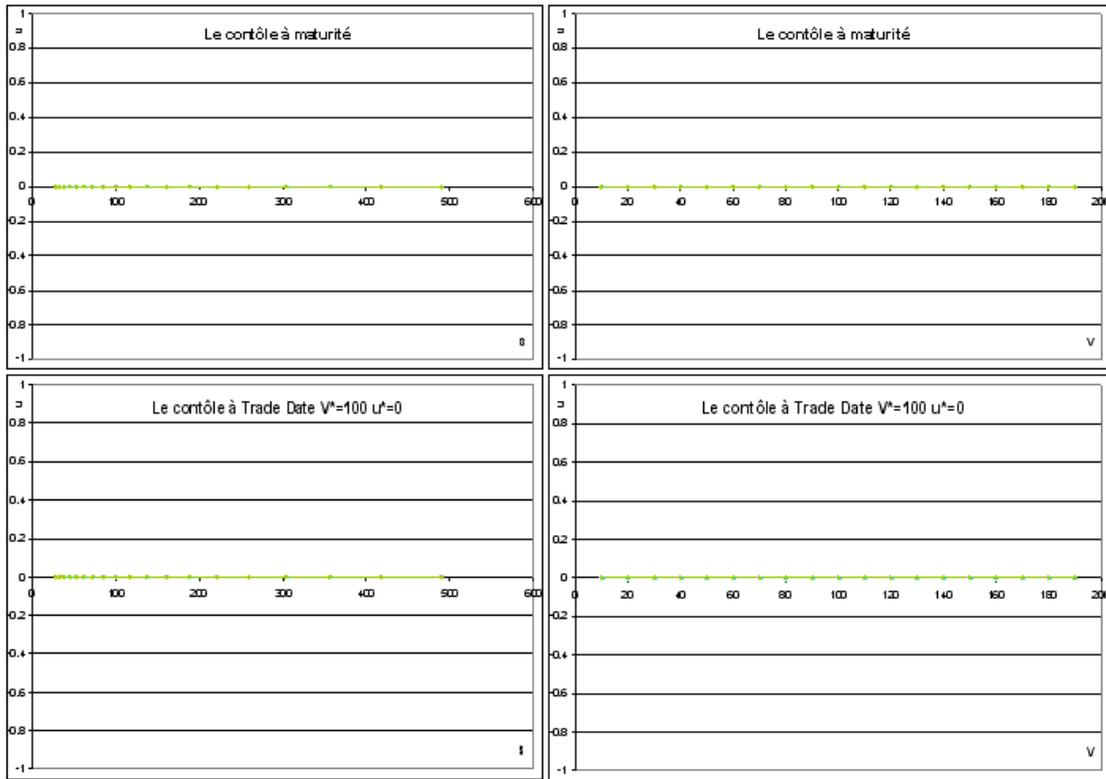
5.3.1.2 Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =1%, drift=1%



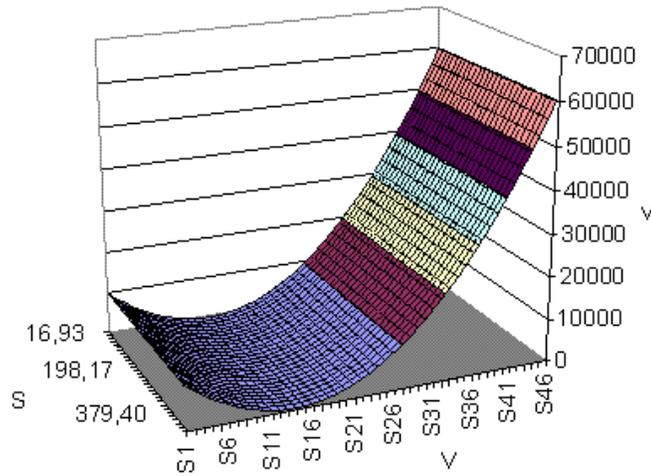


5.3.1.3 Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =40%, drift=0%

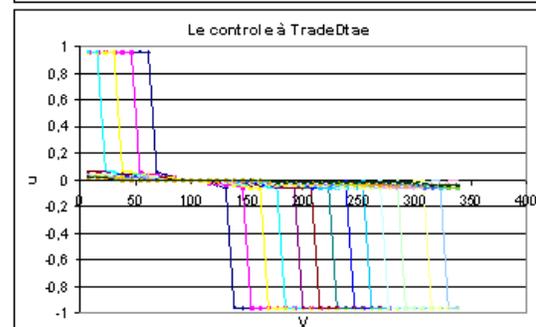
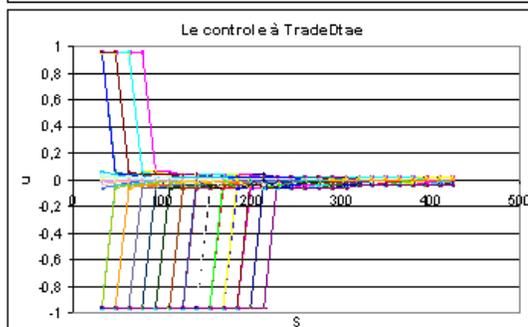
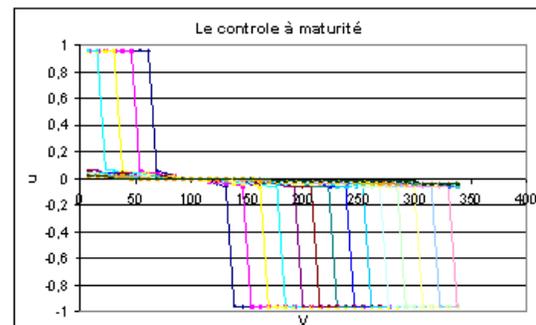
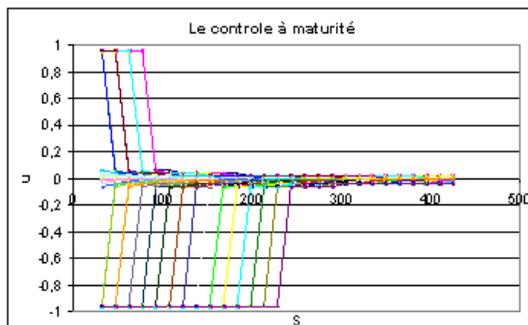
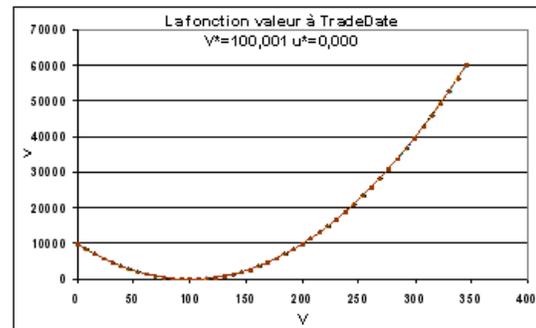
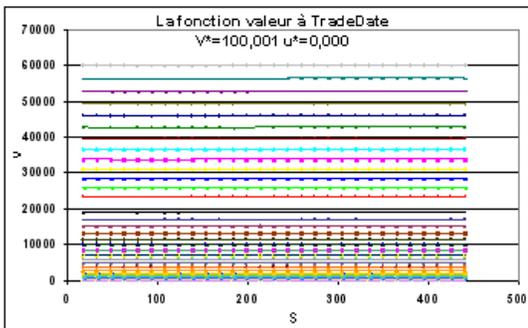
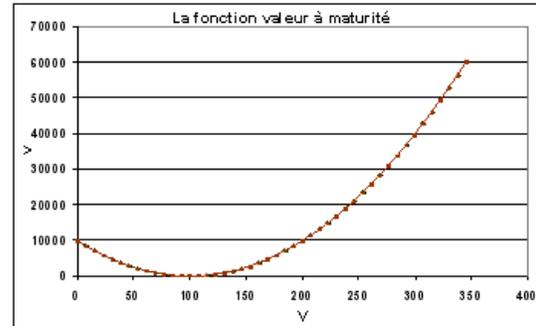
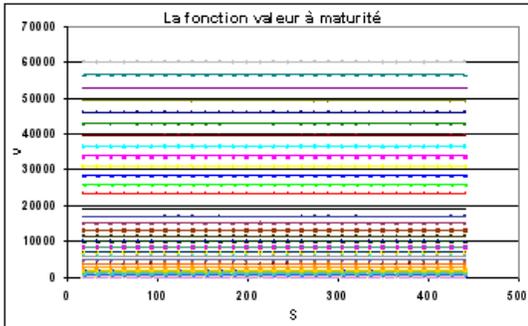


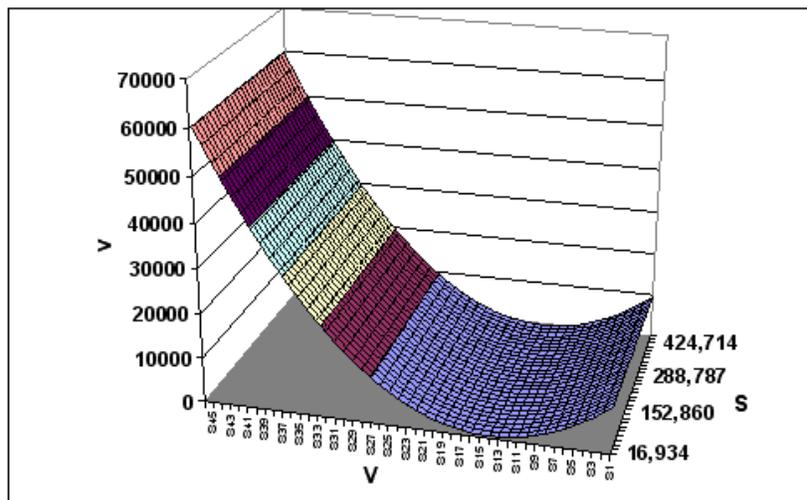


La fonction valeur à TradeDate

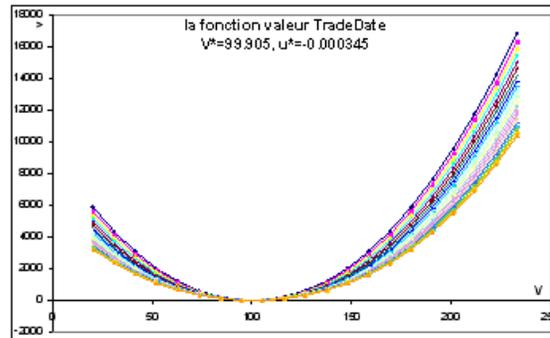
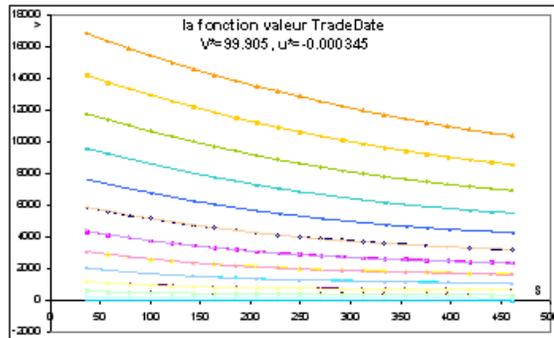
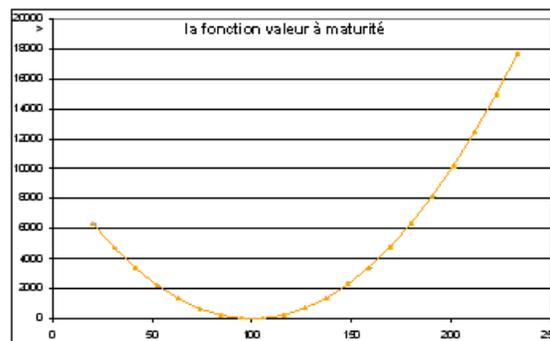
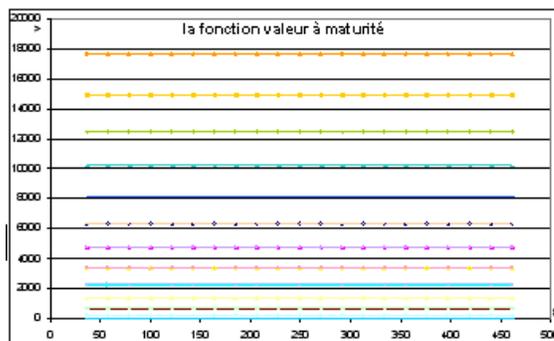


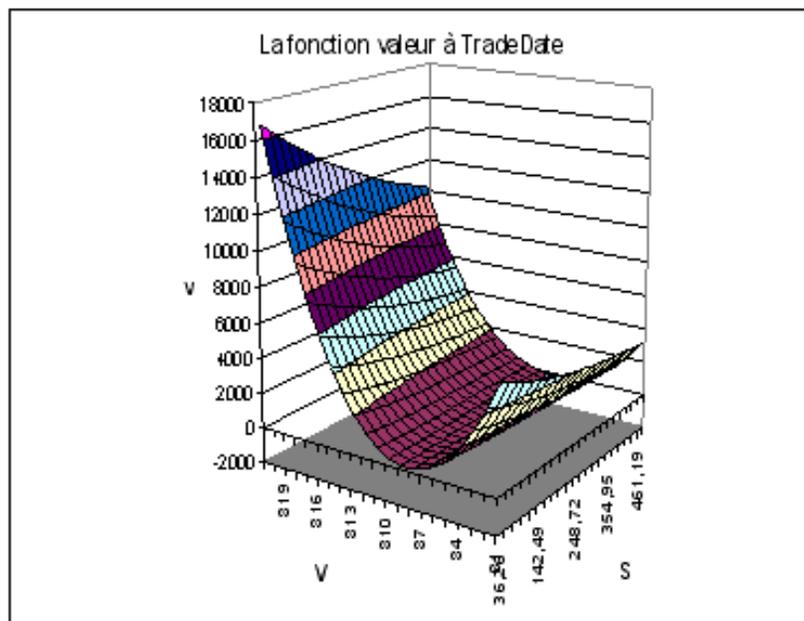
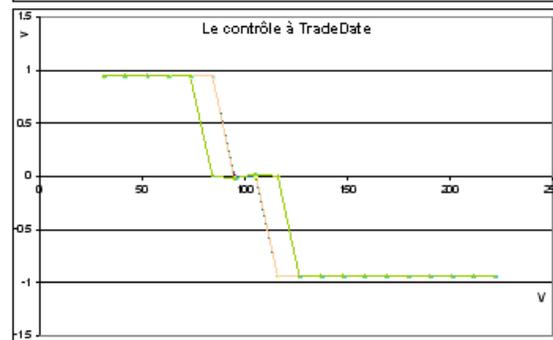
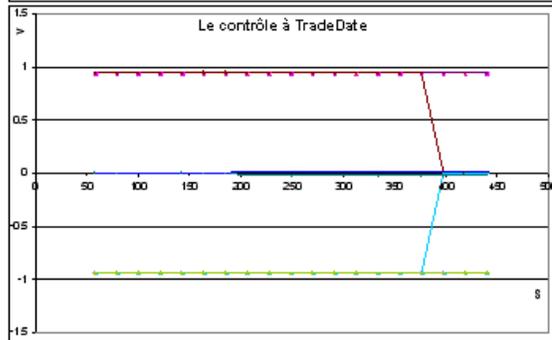
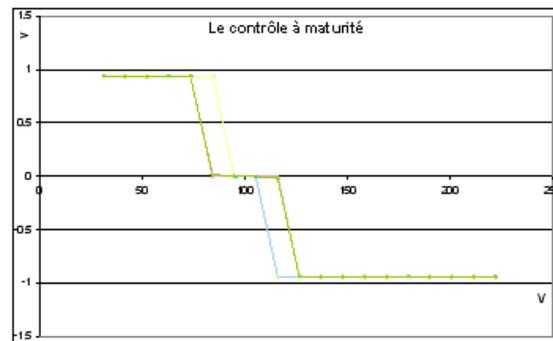
5.3.1.4 Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =40%, drift=1%





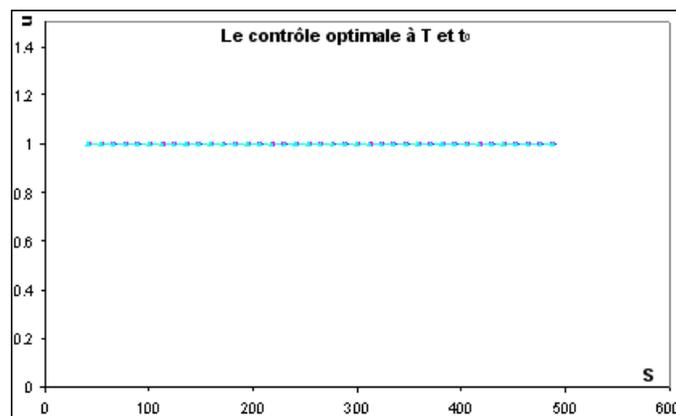
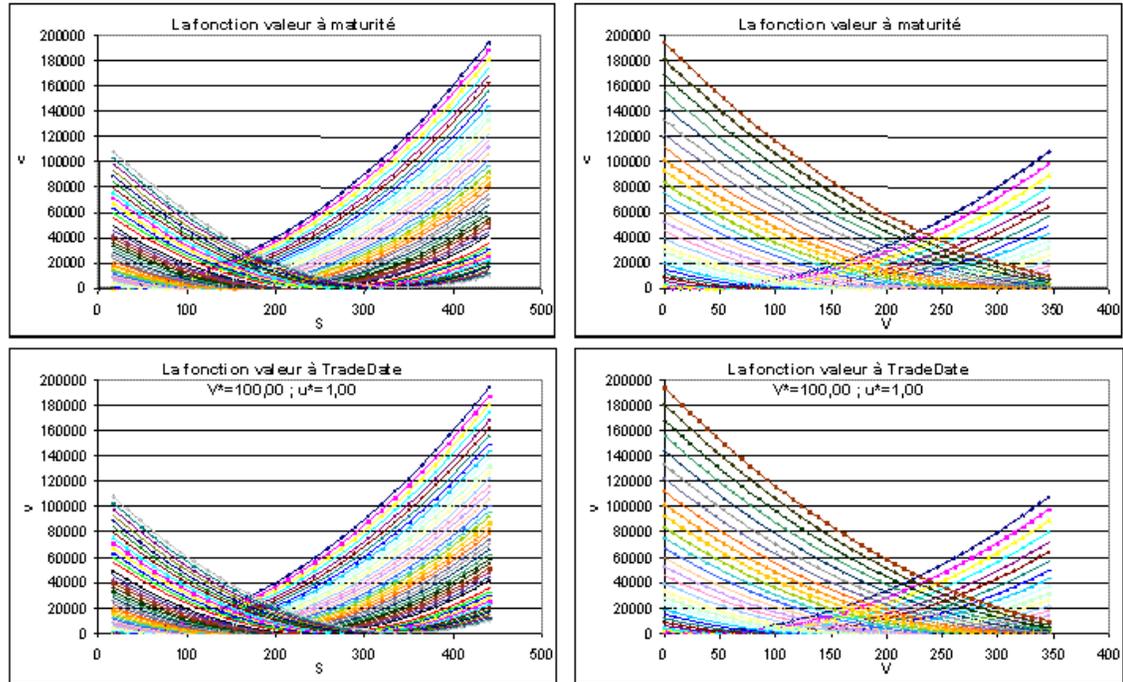
5.3.1.5 Payoff $(V - 100)^2$ Volatilité =40%, drift=10%

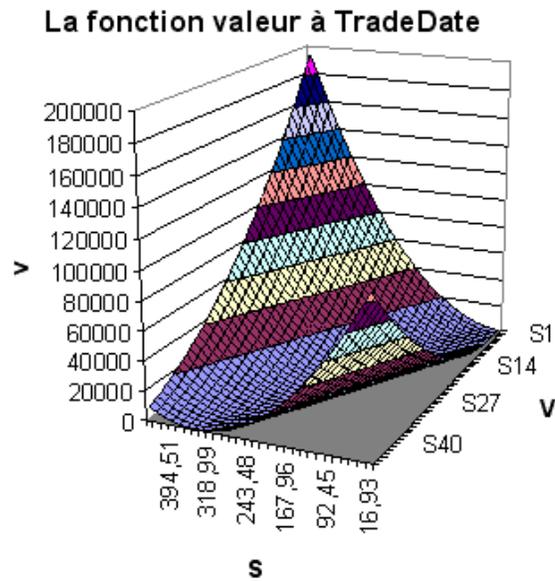




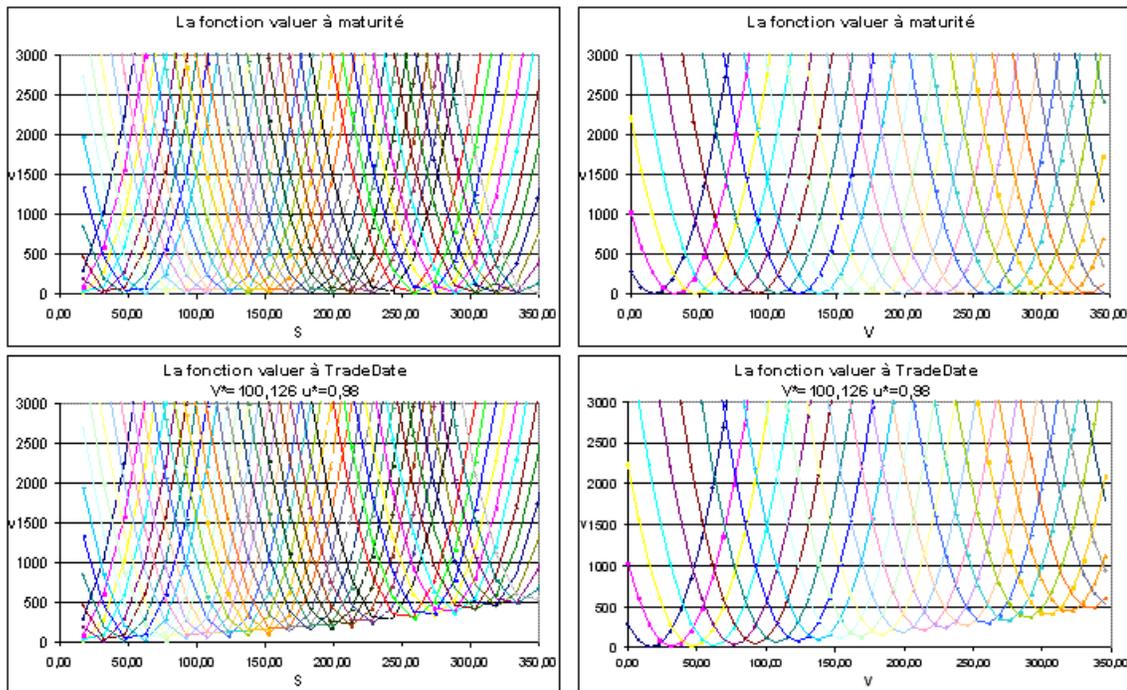
5.3.2 Payoff $(V - S)^2$

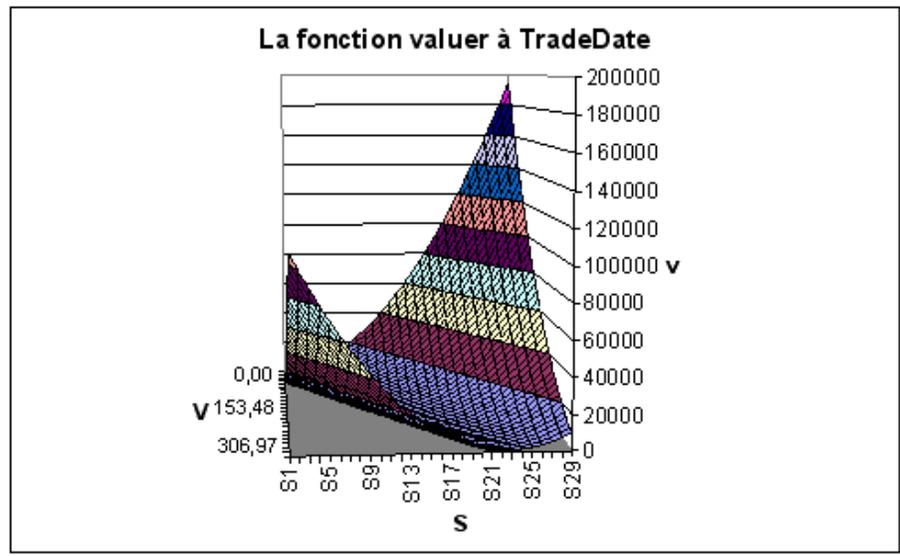
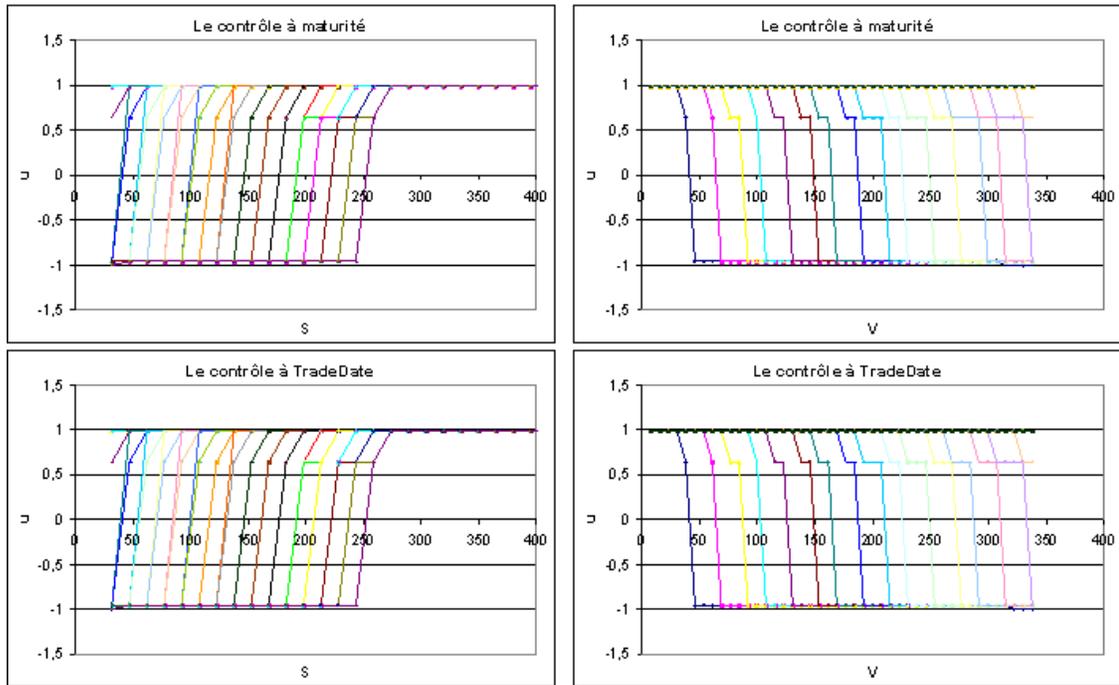
5.3.2.1 Payoff $(V - S)^2$ Volatilité =40%, drift=0%





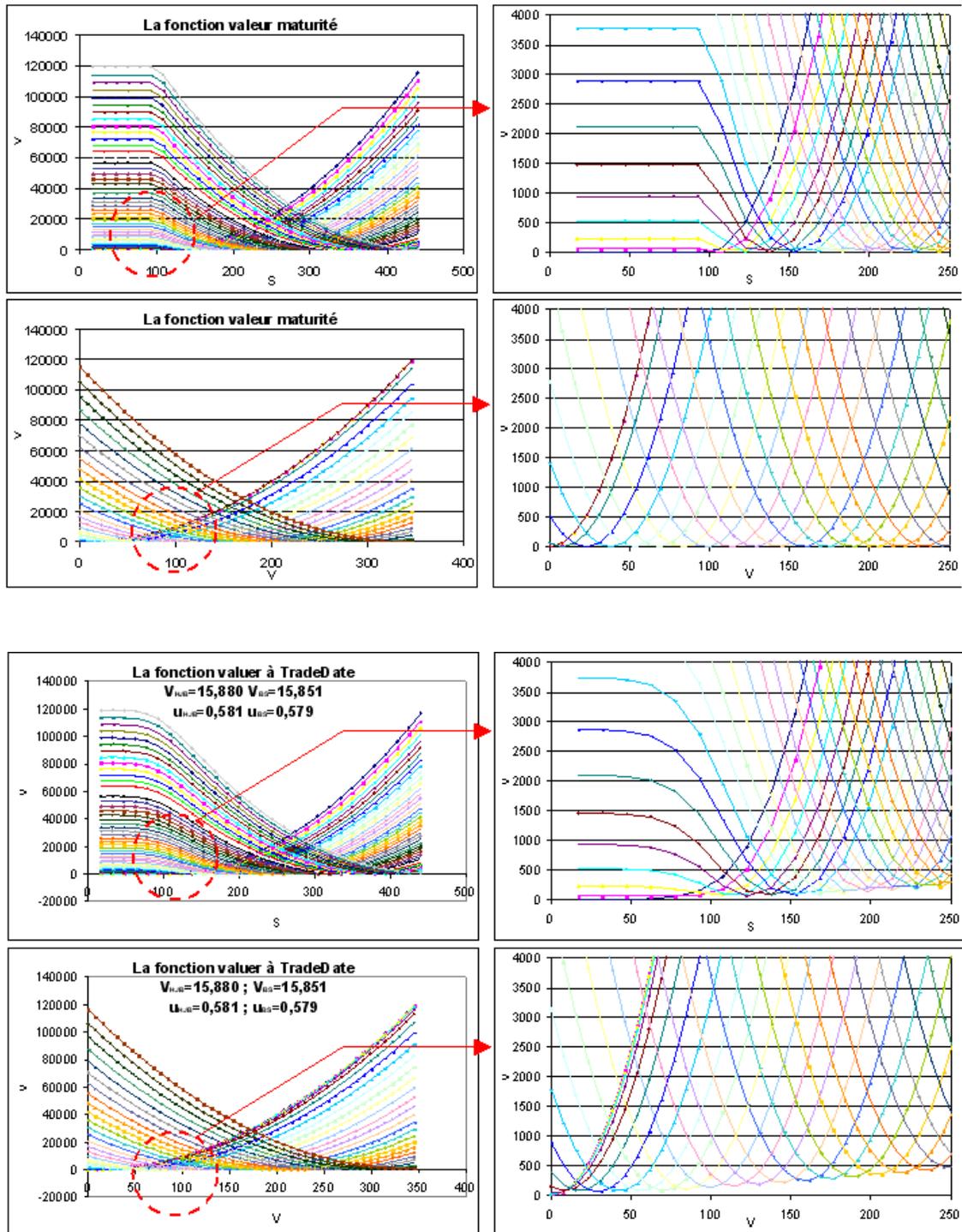
5.3.2.2 Payoff $(V - S)^2$ Volatilité =40%, drift=1%

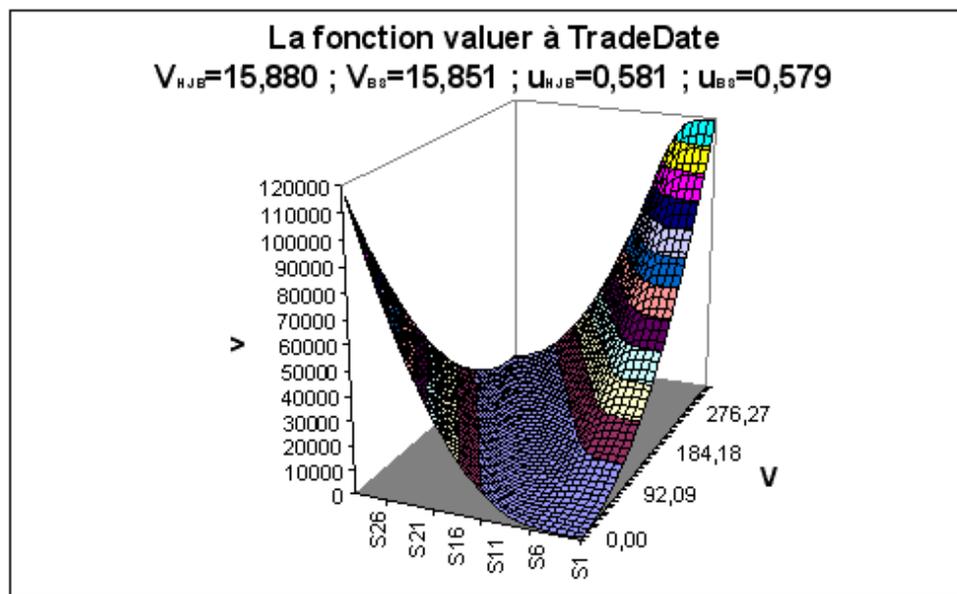
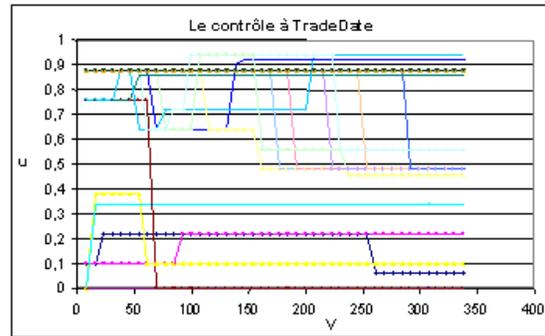
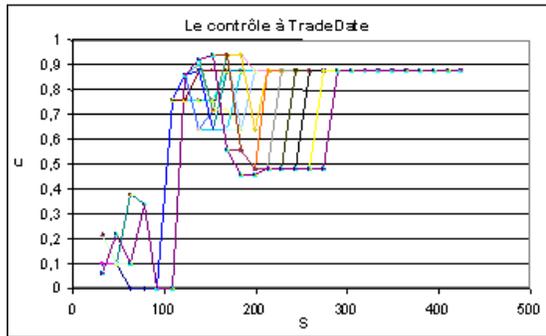
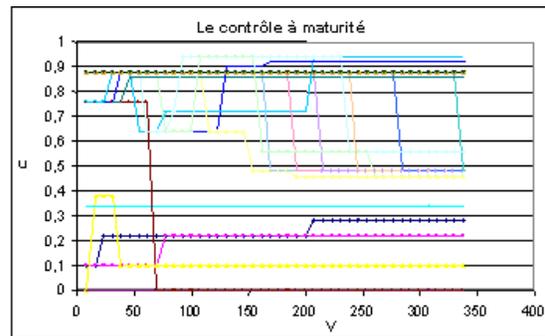
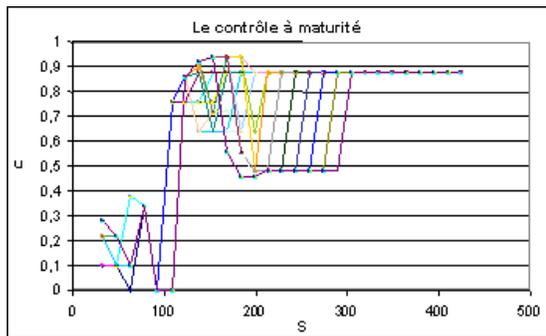




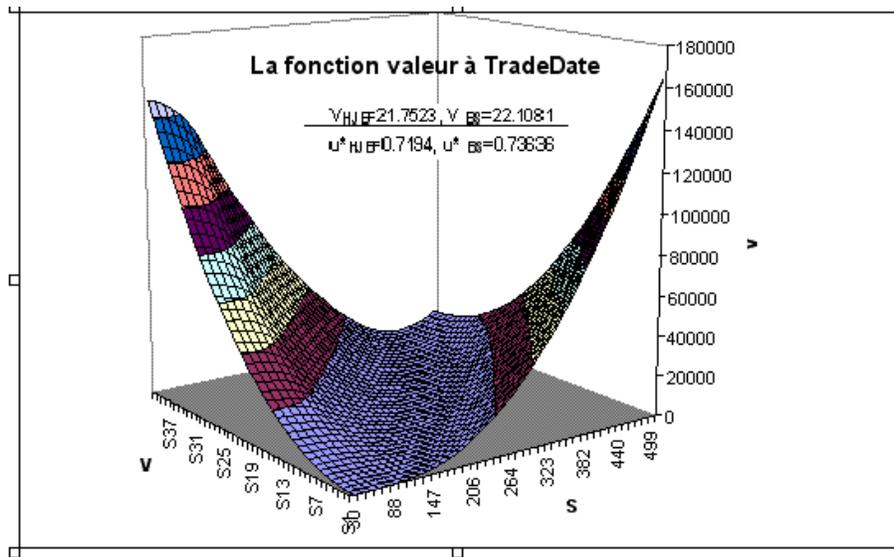
5.3.3 Call européen

5.3.3.1 Call, Volatilité=40%, drift=0%, Strike =100





5.3.3.2 Call, Volatilité =40%, drift=1%, Strike =100

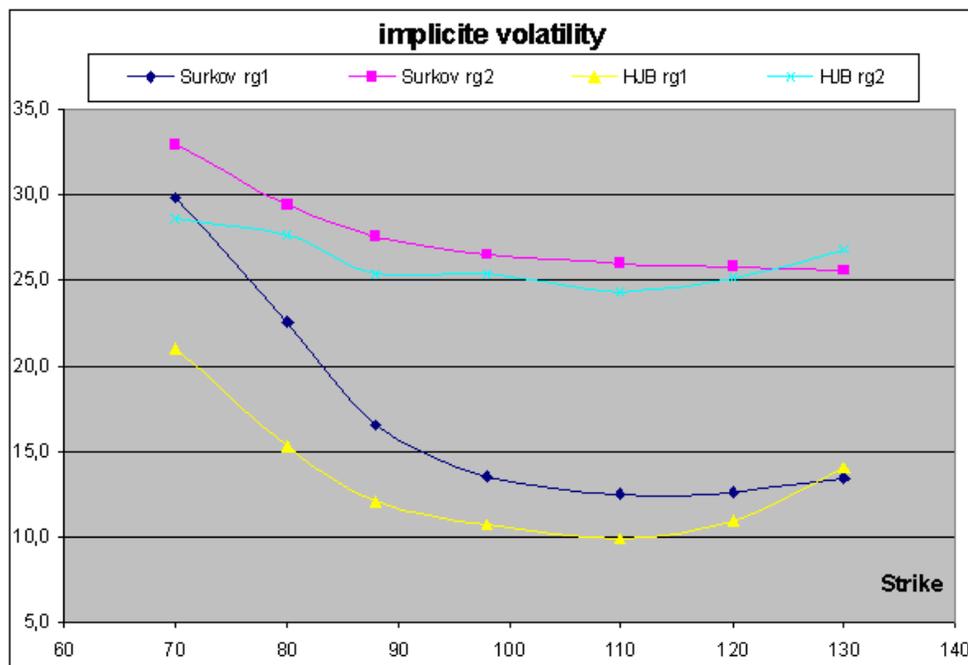
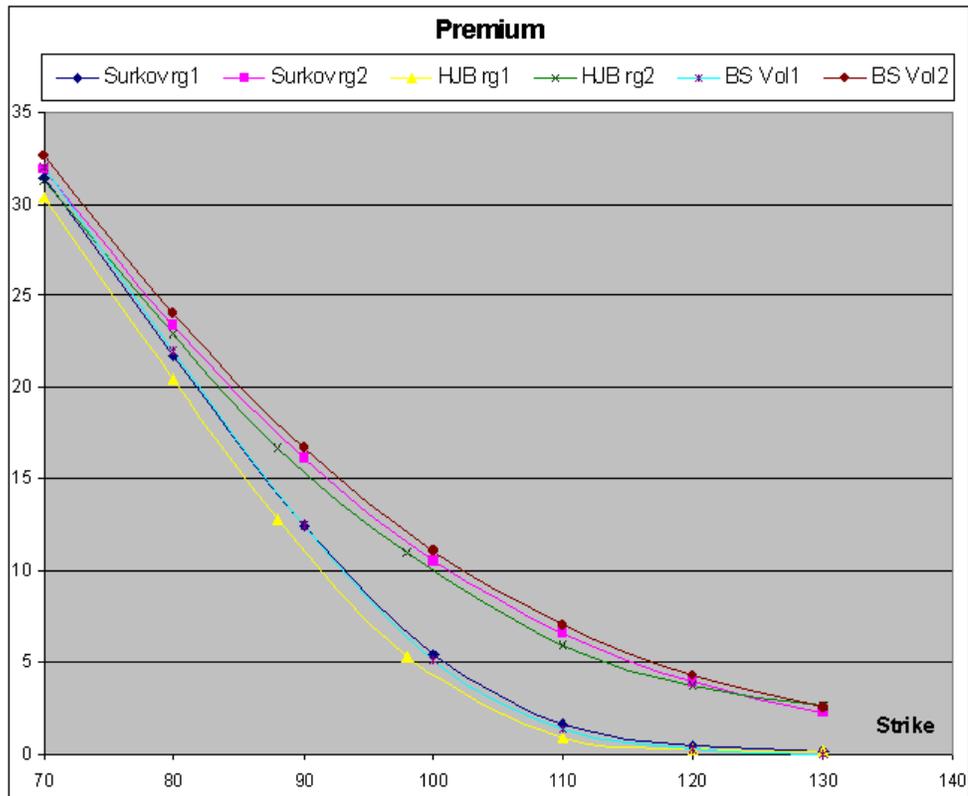


5.3.4 Extraction de la volatilité implicite

Dans la figure suivante, nous présentons les résultats de trois modèles dans l'extraction de la volatilité implicite :

- HJB : Le modèle décrit dans le chapitre trois, on suppose que le nombre de régime du marché est égale à deux et que le deux régime ont le même niveau de drift ($c_1 = c_2 = 2\%$).
- Surkov : la méthode FST « Levy Processes Using Fourier Space Time-stepping »[25] (les résultats sont calculé à partir de la page web suivante: <http://128.100.73.155/fst/>).

- BS : Le modèle de volatilité (Black et Scholes) implicite.



Conclusion

Nous avons introduit une nouvelle méthode de calcul de prix pour des options européennes lorsqu'on suppose que le marché peut être décrit par plusieurs « régimes ». Pour chacun de ces régimes, le sous-jacent est caractérisé par un niveau de volatilité et de rendement donné. Avec en plus, et à priori des discontinuités du prix du sous-jacent à chaque fois qu'une transition d'un régime à un autre a lieu. Les résultats numériques obtenus par cette méthode sont tout à fait satisfaisants. Dans le cas d'un seul régime, on retrouve le prix Black Scholes par la même méthode. Notre algorithme est plus prometteur que la méthode FST [25], car celle-ci limite le changement du régime à un seul paramètre (i.e chacun des régimes est uniquement caractérisé par un niveau de volatilité donné ou bien un niveau de rendement donné). Or pour mieux refléter la dynamique du marché, les deux paramètres doivent avoir la possibilité de varier d'un régime à l'autre.

A ce stade de développement, notre algorithme reste un peu cher en terme de temps de calcul. Il serait d'un grand intérêt d'étudier une autre approche pour calculer les coefficients des conditions aux limites afin de diminuer le temps du calcul. Il convient de noter, toutefois, qu'on n'a pas encore testé numériquement le modèle régime switching (décrit au chapitre trois), avec des sauts dans le prix du sous-jacent au moment des transitions ponctuant le passage d'un régime à un autre.

Bibliographie

- [1] E.Ayache , P.Henrotte and S.Nassar. Can anyone solve the smile problem?
- [2] P.Henrotte. The case for time homogeneity.
- [3] S.Mamon and R.Rodrigo. Explicit solutions to European options in a regime-switching.
- [4] G. Blacher. A new approach for designing and calibrating stochastic volatility models for optimal delta-vega hedging of exotic options. Conference presentation at Global Derivatives, Juan-les-Pins.
- [5] E. Derman and I. Kani. The volatility smile and its implied tree. Quantitative Strategies Research, Goldman Sachs, 1994.
- [6] B. Dupire. Pricing with a smile. Risk, 7(1):18, 1994.
- [7] P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski, and D. Woodward. Managing smile risk. Wilmott, page 84, 2002. [8] A. Lipton. The volatility smile problem. Risk, February 2002.
- [9] A. Lipton and W. McGhee. An efficient implementation of the universal volatility model. Risk, May 2002.
- [10] R. Merton. Options pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics, 3(1), 1976.
- [11] M. Rubinstein. Implied binomial trees. Journal of Finance, (49):771, 1994.
- [12] M. Bardi I.Capuzzo-Dolcetta. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations.1997
- [13] N. Bellamy. Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus. Thèse, Université d'Evry, 1999
- [14] G. Blacher. A new approach for designing and calibrating stochastic volatility models for optimal delta Vega hedging of exotic options. Conference presentation at Global Derivatives, Juan-les-Pins.
- [15] M. Dritschel and Ph. Protter. Complete markets with discontinuous security price. Finance and Stochastic, 3(2), 1999.
- [16] P.L. Lions. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equation. Part2: viscosity solution and uniqueness. Communication in pure and applied mathematic.1983.
- [17] A. Lipton. The volatility smile problem. Risk, February 2002.
- [18] A. Lipton and W. McGhee. An efficient implementation of the universal volatility model. Risk, May 2002.
- [19] R. Merton. Options pricing when underlying stock returns are discontinuous. Journal of Financial Economics, 3(1), 1976
- [20] R.C. Merton. Option Pricing when underlying stock returns are Discontinuous. J. Financial Econ., 3, pages 125-144, 1976.
- [21] F. Bonnans, H. Zidani, consistency of generalized finite difference schemas for the stochastic HJB equation, rapport de recherche n° 4162, 2001.
- [22] R. Munos, H. Zidani, consistency of simple multidimensional schemas for the stochastic HJB equation, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1340 (499-502) 2005.
- [23] K. Kunisch and L. Xie, POD-based feedback control of the burgers equation by solving the evolutionary HJB equation. Computers & Mathematics with Applications, Volume 49, Issues 7-8, May-June 2005, Pages 1113-1126.

- [24] Shuzi Zhou and Wuping Zhan, a new domain decomposition method for an HJB equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 159, Issue 1, 1 October 2003, Pages 195-204.
- [25] Vladimir Surkov, with Ken Jackson and Sebastian Jaimungal. Option Pricing with Regime Switching Levy Processes Using Fourier Space Time-stepping (April 30, 2007) [PDF].
- [26] Vladimir Surkov, with Ken Jackson and Sebastian Jaimungal. Fourier Space Time-stepping for Option Pricing with Levy Models (March 14, 2007).
- [27] Dimitris Bertsimas , Leonid Kogan , Andrew W. Lo, Hedging Derivative Securities and Incomplete Markets: An e-Arbitrage Approach, *Operations Research*, v.49 n.3, p.372-397, May 2001.
- [28] H.J. Kushner, P.G. Dupuis, Numerical methods for stochastic control problems in continuous time, 2nd ed., *Appl. math.* 24, Springer-Verlag, New York, 2001
- [29] M. Saidane & C. Lavergne [2006] ?Factor Analysed Hidden Markov Models for Conditionally Heteroscedastic Financial Time Series? Rapport de Recherche INRIA, N° 5862, Projet MISTIS - INRIA Rhône-Alpes, Grenoble ? France.
- [30] Robert J. Elliott « Measure change estimates for hidden Markov models » Volume 23, Issue 2, Elsevier Science Publishers.
- [31] R.J. Elliott, L. Aggoun, J.B. Moore, « Hidden Markov Models: Estimation and Control » Springer, New York, 1995.
- [32] Hamilton J.D. (1988) Rational Expectations Econometric Analysis of Change in Regime: An Investigation of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 385-423.
- [33] Hamilton J. D. (1989) « A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle », *Econometrica* 57, pp. 357-384.
- [34] Hamilton J. D. (1990) « Analysis of Time Series Subject to Changes inRegimes », *Journal of Econometrics* 45, pp. 39-70.
- [35] Hamilton J. D. (1996) « Speciation Testing in Markov-Switching Time-Series Models », *Journal of Econometrics* 70, pp. 127-157.
- [36] Caillault C. , D. Guégan (2004) Forecasting VaR and Expected Shortfall using Dynamical Systemes: a Risk Managment Strategy, NR MORAIIDHE, 07-2004, ENS Cachan, France.
- [37] Chen C. , G.C. Tiao (1990) Random Level-Shift Time Series Models, ARIMA Approximations and Level-Shift Detection, *Journal of Business and Economic Statistics*, 8, 83 - 97.
- [38] A. Smith (2003) Level Shifts and the Illusion of Long Memory in Economic Time series, Preprint Univ. of California.
- [39] Guégan D., 1994, Séries chronologiques non linéaires à temps discret, *Economica*, Paris, France.
- [40] Guégan D. (2000) A new model: the k-factor GIGARCH process, *Journal of Signal Processing*, 4, 265 - 271.
- [41] Guégan D., 2003, A prospective study of the k-factor Gegenbauer processes with heteroscedastic errors and an application to inflation rates, *Finance India*, XVII, 165 - 197.
- [42] Guégan D., 2004, How can we define the concept of long memory? An Econometric survey, Discussion Paper in Economics, Finance and Internationals Competitiveness, 178, 1 -40, School of Economics and Finance, QUT, Brisbane, Australia.
- [43] Guégan D., 2005, La Persistance dans les Marchés financiers. Note de Recherche IDHE-MORA no03-2005.
- [44] Mikosch T. , C. Starica (1999) Change of structure in financial time series, long range dependence and the GARCH model, Manuscript, Dept. of Stat., University of Pennsylvania.
- [45] Bachelier (L.), « Théorie de la spéculation », *Ann. Sci. école Norm. Sup.*, 1900.
- [46] Bensoussan (A.), Lions (J.-L.), « Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique », Dunod, Paris, 1978.

- [47] Black (F.), Scholes (M.), « The pricing of options and corporate liabilities », *J. Polit. Econ.*, 81, 637-654, 1973.
- [48] Dupire (B.) (Ed.), « Monte Carlo. Methodologies and applications for pricing and risk management », London : Risk Books, 1998.
- [49] El Karoui (N.), Quenez (M.-C.), « Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market », *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33, 29-66, 1995.
- [50] Föllmer (H.), « Probabilistic Aspects of Financial Risk », *Proceedings of the European Congress of Mathematics, Barcelona 2000*, Birkhäuser, 2001.
- [51] Fournié (E.), Lasry (J.-M.), Lebuchoux (J.), Lions (P.-L.), Touzi (N.), « Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance », *Finance and Stochastics*, 3, 391-412, 1999.
- [52] Jarrow (R.) (Ed.), « Volatility. New estimation techniques for pricing derivatives », London : Risk Books, 1998.
- [53] Kahane (J.-P.), « Des séries de Taylor au mouvement brownien, avec un aperçu sur le retour », *Development of Mathematics 1900-1950*, J.P. Pier (Ed.), Birkhäuser Verlag, 415-429, 1994.
- [54] Karatzas (I.), « On the pricing of American options », *Applied Mathematics and Optimization*, 17, 37-60, 1988.
- [55] Lagnado (R.), Osher (S.), « A technique for calibrating derivative security pricing models: numerical solution of an inverse problem », *The Journal of Computational Finance*, 1, 13-25, 1997
- [56] Lamberton (D.), Lapeyre (B.), « Introduction au calcul stochastique en Finance », *Collection Mathématiques et Applications 9 - Ellipses*, 1991.
- [57] Merton (R.-C.), « Theory of rational option pricing », *Bell J. Econom. and Management Sci.*, 4, 141-183, 1973.
- [58] Pardoux (E.), « Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order », *Stochastic analysis and related topics, VI (Geilo, 1996)*, 42, 79-127, 1998.
- [59] Yor (M.), « Le mouvement brownien : quelques développements de 1950 à 1995 », *Development of Mathematics 1950-2000*, J.P. Pier (Ed.), Birkhäuser Verlag, 1187-1202, 2000.
- [60] Tong, H. (1978). On a threshold model, in Chen, C.H.(ed.), *Pattern Recognition and Signal Processing*, Sijhoff and Noordoff, Amsterdam.
- [61] Tong, H. (1983). *Threshold Models in Non-Linear Time Series Analysis*, Springer- Verlag, New York.
- [62] Tong, H. (1995). *Non-linear Time Series. A Dynamical System Approach*, Clarendon Press, Oxford.
- [63] Tong, H., and Lim, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data, *Journal of The Royal Statistical Society, B* 42, 245-292.
- [64] S. Ladoucette J. Collet (2004) « A new kind of switching process: the periodic switching process ».
- [65] W. Fleming, M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.